金融工程

证券研究报告

专题报告

财通证券研究所

财通证券 CAITONG SECURITIES

2018 年 05 月 02 日

随机波动率微笑模型及套利

联系信息

陶勤英 **分析师**

SAC 证书编号：S0160517100002

taoqy@ctsec.com

熊晓湛 **联系人**

xiongxz@ctsec.com

相关报告

1 《金融工程：市场波动率处于低位，情绪仍偏谨慎》 2018-04-23

2 《金融工程：反趋势技术指标在期权上的应用－期权 CTA 技术分析专题之二》 2018-04-16

3 《金融工程：市场情绪持续回暖》 2018-04-16

4 《金融工程：趋势类技术指标在期权上的应用－期权 CTA 技术分析专题之一》 2018-04-10

5 《金融工程：市场情绪有好转，但仍偏谨慎》 2018-04-09

投资要点：

- **金融市场的波动率**

金融市场波动率具有尖峰肥尾、波动率群集、具有杠杆效应等特点。

本文将简单地分析金融市场波动率重要的几个特性，并介绍 50ETF 相关波动率的度量方法。

- **波动率微笑**

与 BS 模型假设不同，隐含波动率 ω (t, t + h) 在很大程度上取决于日历时间 t 、到期期限 h 和期权的货币性，隐含波动率曲面呈现明显的微笑或倾斜的特征。

本文将简单地介绍隐含波动率微笑的基本特性。

- **利用随机波动率模型进行套利**

Vanna-Volga 模型，SVI 模型，SABR 模型都可以用来拟合隐含波动率微笑。通过模型刻画的隐含波动率与通过 BS 公式反算的隐含波动率进行对比，找到每日最被低估和高估的期权合约，分别买入和卖出。通过合约的持仓数量，形成 delta 中性，从而赚取波动率估值回归的收益。

结果显示，在看涨期权季月合约上进行波动率套利有不错效果，三种模型年化收益率都超过 20%。

- **风险提示：**未来市场变幻莫测，模型有失效的可能。

内容目录

图表目录

1、 波动率的分类

在期权世界中，波动率可以简单的分为历史波动率、隐含波动率、已实现波动率三大类，分别对应着过去的波动率、隐含在期权价格中的波动率（也被称之为预期波动率）以及实际的波动率。对于这三种波动率的理解对于期权交易来说是至关重要的，这不仅可以用于期权的定价，还可以用于直接的波动率交易，包含波动率的方向性交易及波动率的套利交易。

1.1、 历史波动率 (HV)

历史波动率是基于过去的统计分析得出的，假定未来是过去的延伸，利用历史方法估计波动率类似于估计标的资产收益系列的标准差。

1.1.1、 标准差

标准差是衡量风险的常用标准，是与时间期限相关的概念，例如日标准差、周标准差、月标准差、年标准差等等。在风险评价中，常用的是年标准差。

计算方法（以标的证券过去 30 个交易日的历史波动率为例）;

1. 根据计算周期(交易周期；周、月、季度、年均指日历周期) 在所选时间段内拆分出 N 个区间(头尾包含的不完整日历周期舍去)。

2. 获取每个区间最末一个交易日的收盘价EPi和最初一个交易日的前收盘价BPi。
3. 如果所选收益率计算方法是“普通收益率”则以“$EPi/BPi-1$”作为区间内的收益率Ri；如果所选收益率计算方式是“对数收益率”则以“$ln(EPi/BPi)$”作为区间内的收益率Ri。

4. 根据以下公式确定计算结果。

$$波动率 = \{\sum[(Ri-\sum Ri/N)^2]/(N-1)\}^0.5$$

1.1.2、 GARCH & EWMA

EWMA 方法即指数移动平均方法。EWMA 根据历史数据距当前时刻的远近，分别赋予不同的权重，距离现在越近，赋予的权重越大，因为越远的历史信息所起的作用越小。

GARCH (1, 1) 模型方差如下：

$$\sigma_t^2 = a + br_{t-1,t}^2 + c\sigma_{t-1}^2$$

EWMA 是 GARCH (1,1) 一个特殊情况，而 GARCH(1,1) 是 EWMA 的一般形式。

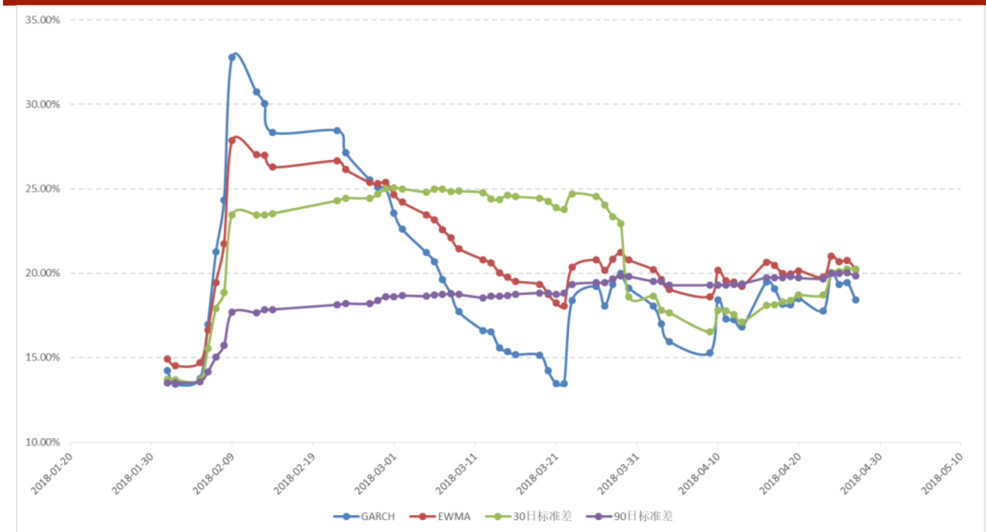
当我们取 $a=0$ ，$(b+c)=1$ 时，上式被简化为：

$$GARCH(1,1) = \sigma_t^2 = br_{t-1,t}^2 + (1-b)\sigma_{t-1}^2$$

这与 EWMA 的表达式相同：

$$EWMA = \sigma_t^2 = br_{t-1,t}^2 + (1-b)\sigma_{t-1}^2$$
$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1,t}^2$$

图 1：50ETF 对应的标准差、GARCH(1,1)波动率与 EWMA 波动率



数据来源：财通证券研究所

1.2、隐含波动率（IV）

隐含波动率(Implied Volatility)是将市场上的期权或权证交易价格代入权证理论价格模型 Black-Scholes 模型，反推出来的波动率数值。

计算隐含波动率可以使用 Newton method。

图 2：隐含波动率（IV）计算

```python
def imp_vol(S_0, K, T, r, C_0, sigma_est,type, it=1000):
    for i in range(it):
        sigma_est -= ((European_BS(S_0, K, T, sigma_est, r,type) - C_0) / bsm_vega(S_0, K, T, sigma_est, r))
    return sigma_est
```

S_o：标的价格
K：行权价格
T：期权合约距离到期日时间
r：无风险利率
C_o：期权价格
sigma_est：迭代初始值
type：C 或者 P
it：迭代次数

数据来源：财通证券研究所

1.2.1、方差互换 (Variance Swap)

假设标的价格几何布朗运动：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t$$

使用 Ito 公式：

$$d(\log S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dZ_t$$

$$\frac{dS_t}{S_t} - d(\log S_t) = \frac{\sigma^2}{2} dt$$

得到方差：

$$\text{Variance} = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2 dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right)$$

其中后一项可以以如下的方式实现复制：

$$-\ln\left(\frac{S_T}{S^*}\right) = -\frac{S_T - S^*}{S^*} + \int_{K\le S^*} (K - S_T)^+ \frac{dK}{K^2} + \int_{K\ge S^*} (S_T - K)^+ \frac{dK}{K^2}$$

得到风险中性条件下波动率的合理价格：

$$K_{var}=\frac{2}{T}\left(rT-\left(\frac{S_0}{S^*}e^{rT}-1\right)-\ln\left(\frac{S^*}{S_0}\right)+e^{rT}\int_0^{S^*}\frac{1}{K^2}P(K)dK+e^{rT}\int_{S^*}^{\infty}\frac{1}{K^2}C(K)dK\right)$$

1.2.2、中国波指（iVIX）

中国波指（000188.SH），简称 iVIX 指数，是由上海证券交易所发布，用于衡量上证 50ETF 未来 30 日的波动预期。该指数是根据**方差互换**原理，结合 50ETF 期权的实际运作特点，并通过上海证券交易所交易的 50ETF 期权价格的计算编制而成。

iVIX 指数通过反推当前在交易的期权价格中蕴含的隐含波动率，反映出未来 30 日标的 50ETF 价格的波动水平。

iVIX 指数由 6 月 26 日第一次公布，起始日为上证 50ETF 期权上市之日 2 月 9 日，上交所向市场实时发布 iVIX 行情数据，帮助投资者实时分析市场情绪。

1.2.3、IVIX 计算方法

先计算近月和远月波动率

以近月合约波动率为例

$$\sigma_1{}^2=\frac{2}{T}\sum_i\frac{\Delta K_i}{K_i{}^2}e^{RT}\mathrm{P}(\mathrm{K}_i)-\frac{1}{T}[\frac{F}{K_0}-1]^2$$

σ_1：近月波动率

NT：近月合约剩余到期时间（以分钟计）

T：$\frac{NT}{N_{365}}$

R：上交所采用的无风险利率

S：认购期权价格与认沽期权价格相差最小的执行价

F：$S=e^{RT}\times[\mathrm{C(S)}-\mathrm{P(S)}]$

K_0：小于 F 且最接近于 F 的执行价

K_i：由小到大的所有执行价(i = 1,2,3, … .)

ΔK_i：第 i 个执行价所对应的执行价间隔，一般为$\frac{K_{i+1}-K_{i-1}}{2}$

$\mathrm{P}(\mathrm{K}_i)$：若K_i小于K_0，为K_i对应的认沽期权价格；若K_i大于K_0，为K_i对应的认购期权价格；若K_i等于K_0，为K_i对应的认沽期权价格与认购期权价格均值。

完成近月波动率 σ1 与次近月波动率 σ2 的计算之后，采用以下公式计算上证 50 ETF 波动率指数：

$$\mathrm{iVX} = 100 \times \sqrt{\left\{T_1\sigma_1^2\left[\frac{\mathrm{NT}_2-\mathrm{NT}_{30}}{\mathrm{NT}_2-\mathrm{NT}_1}\right]+T_2\sigma_2^2\left[\frac{\mathrm{NT}_{30}-\mathrm{NT}_1}{\mathrm{NT}_2-\mathrm{NT}_1}\right]\right\}\times\frac{N_{365}}{N_{30}}}$$

1.3、 已实现波动率（RV）

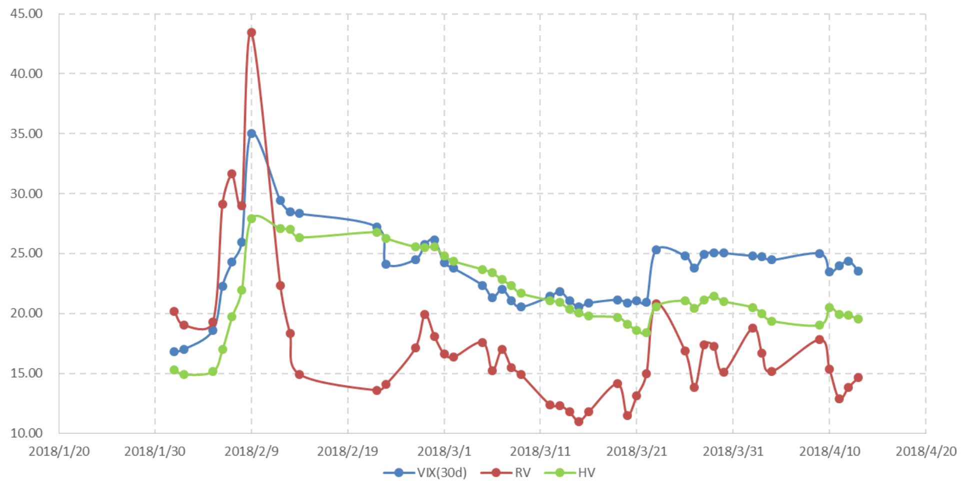
$$\mathrm{RV}_t = \sum_{j=1}^{M} r_{t,j}^2$$

$r_{t,j}$为高频 5 分钟数据计算的收益率。

已实现波动率是针对频率较高的数据计算的一种波动率，又称为日内波动率或高频波动率。高频数据是指以小时、分钟或秒为采集频率的数据。还有一类数据叫超高频数据，即人们获得的股票市场、外汇市场、期货市场实时的每笔成交数据。超高频数据的时间间隔是不一定相等的，具有时变性，它是交易过程中实时采集的数据，或称逐笔数据(tick-by-tick data)。Garman & Klass(1980)提出了日内波动率的一种估算方法—Ohlc；Andersen，Bollerslev(1998)提出使用日内高频股价数据，可以获得对日波动率更精确的描述，并由此建立了一种基于高频股价数据的已实现波动率测度方法。由于高频数据中蕴含了比低频数据更多的市场波动信息，因此基于高频数据的波动率测度一定是一种更为真实的市场波动描述。已实现波动率的计算不需要复杂的参数估计方法，无模型、计算简便，在一定条件下是积分波动率(已实现波动率的概率极限)的无偏估计量，近年来在高频领域中获得了广泛的应用。

1.4、 50ETF 对应的各种波动率

图 3：50ETF 对应的各种波动率



数据来源：财通证券研究所

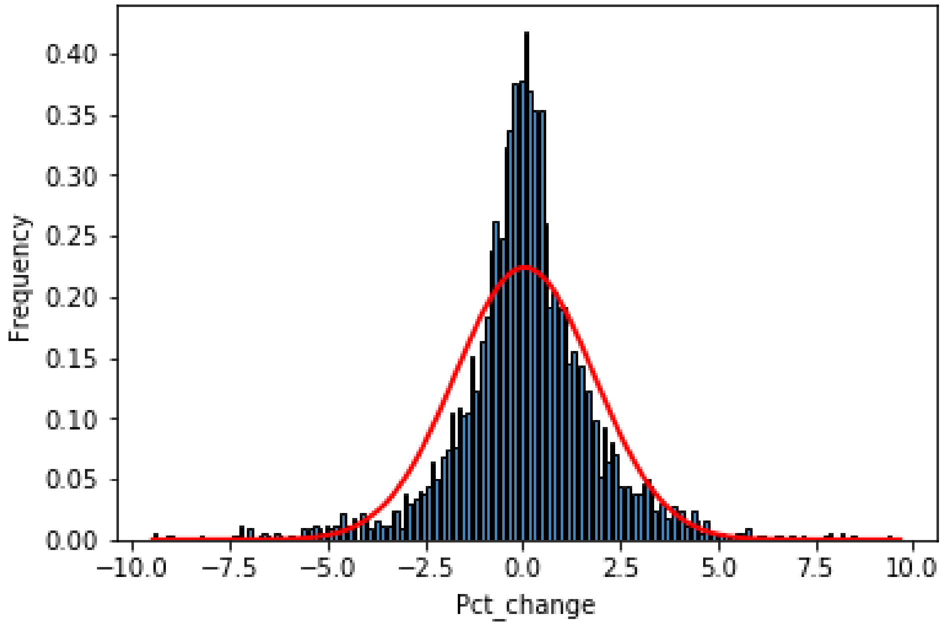
由于二月初的极端行情，VIX 指数出现了大幅上涨，并在之后长期处于高位。

而 HV 保持稳定的下降趋势，RV 则是从 2 月初极端行情过后就保持在低位。

2、 波动率的特征

2.1、 尖峰肥尾

图 4：上证 50 指数 （ 2005 年至今）涨跌幅频率分布直方图



数据来源：财通证券研究所

六十年代早期以来，人们开始注意到资产收益具有尖峰分布的性质，特别是 Mandelbrot（1963）、 Fama（1963， 1965）的发现。

其结果是，大量的论文应用肥尾的独立同分布，如 Prantian 分布或者 Levy 分布，为资产收益建模。

2.2、 波动率群集 (clustering)

对金融时间序列的任何观测都表明了高或低波动率时段的聚集。

事实上，波动率群集和资产收益肥尾是密切相关的，后者事实上是一个静态的解释。

而 ARCH 模型的主要作用是给出了动态（条件）波动率行为和（无条件）肥尾间的正式联系。

由 Engle（1982）提出，并且此后获得大量扩展的 ARCH 模型及 SV 模型，主要就是用于模拟波动率群集的。

2.3、杠杆效应

被 Black（1976）称为杠杆效应的现象指股票价格运动和波动率呈负相关。

因为下跌的股票价格暗示公司财务杠杆提高，人们相信这意味着更多的不确定性及更高的波动率。

然而， Black（1976）， Christie（1982）及 Schwert（1989）的实证证据表明，杠杆效应自身作用太小，不足以解释股票价格中发现的不对称性。

其他报告关于杠杆效应的实证证据的还包括 Nelson（1991），

Gallant、Rossi 和 Tauchen（1992，1993），Campbell 和 Kyle（1993）以及 Engle 和 Ng（1993）。

2.4、长记忆性

一般来说，波动率是高度持续性的。特别是对于高频率数据，证据表明条件方差过程具有接近单位根的行为。

在 ARCH 文献中，关于股票市场、商品、外汇和其它资产价格序列的 GARCH

模型的各种估计，是与 IGARCH 设定相一致的。

同样，对随机波动率模型的估计显示了相似的持续性模式（参见 Jacquier、Polson 和 Rossi（1994））。

这些发现导致了一场争论，即条件方差过程持久性的建模是通过单位根还是长期记忆过程。

2.5、协同运动(comovement)

有大量的文献是讨论投机市场的跨国协同运动的。

资本市场的全球化是否提高了价格的波动率和股票收益的相关性已经成为最近许多研究的主题，包括 von Fustenberg 和 Jean （1989），

Hamao、Masulis 和 Ng（1990），King、Sentatna 和 Wadhwani（1994），Harvey、Ruiz 和 Sentana（1992）以及 Lin、 Engle 和 Ito（1994）。

人们通常运用因子模型来模拟国际波动率的共同性，比如 Diebold 和 Nerlove （1989）， Harvey、 Ruiz 和 Sentana（1992）， Harvey， Ruiz 和 Shephard （1994），或者探索所谓的共同特征， 如 Engle 和 Kozicki （1993）， 或共同趋势， 如 Bollerslev 和 Engle（1993）。

3、 隐含波动率微笑

3.1、 波动率微笑

如果市场中的期权价格满足 Black-Scholes 公式，则对应于相同资产的各种期权的所有 Black-Scholes 隐含波动率将和标的资产的波动率参数 σ 相一致。

但事实并非如此。

隐含波动率 ω (t,t + h) 在很大程度上取决于日历时间 t 、到期期限 h 和期权的货币性。

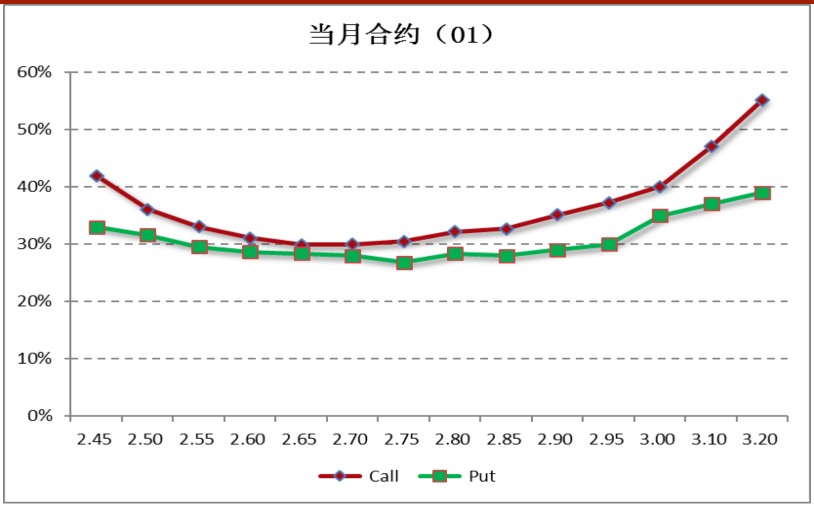
原因：

1. 标准 BS 模型假定标的资产价格服从几何布朗运动。但是大量实证检验发现，现实市场中，金融资产的收益率分布呈现尖峰肥尾的特征。这种分布下，收益率出现极端值的概率远高于正态分布，而在公式中采用收益率正态分布的前提假设，会大大低估到期时期权价值变为实值与虚值出现的概率，相应也低估了深度实值和深度虚值期权的价格。

2. BS 模型忽略了现实市场上资产价格在一定冲击下发生跳跃的可能。例如价格在期权临近到期前发生跳跃，且交易方根据变化后的价格调整标的资产头寸并持有到期，到期时复制组合与期权价值将可能出现较大偏差，使得期权一方面临额外风险。这种风险无法分散化，空方必须要求相应补偿，造成期权市场价格对理论价格的溢价。

3. 深度虚值期权需求大于供给。深度虚值期权权利金低，获利概率低，但收益率高，这种特性使得它具有很强的避险功能，适合对抗极端风险。市场对于深度虚值期权有一定的需求，而供给相对不足，虚值期权市场的流动性有限，从而推高了虚值期权的价格。

图 5：当月合约隐含波动率



数据来源：财通证券研究所

3.2、 隐含波动率微笑随机模型

当 BS 隐含波动率被用来评估具有不同执行价 K 和到期期限 h 的新期权时，这可能在期权定价和保值中产生偏差。

一般认为波动率的微笑效应必须由随机波动率模型来解释。这有几个理由：

首先，应用随机时变波动率模型来表示随机时变 BS 隐含波动率是很自然的。

其次，微笑下降的幅度是到期期限的函数，实际情况显示，当到期期限增加时，波动率消除了条件异方差，从而减少微笑现象。

最后，偏度本身也可以被归因于波动率过程的随机特征以及该过程与价格过程（所谓的杠杆效应）的整体相关性。事实上，这个效应对股票价格数据是很明显的，但是对利率和汇率序列却是很小的，这就是为什么微笑的偏度在以股票为标的期权时更常见。

关于解释微笑及其偏度的其它论据（跳跃，交易成本，买卖差价，非同步交易，流动性问题， …）在理论上和实证上都应加以考虑。例如，实证证据表明最昂贵的期权（微笑曲线的上部）也是最小流动性的期权；因此偏度或许可归因于期权市场中流动性的特殊结构形式。

3.3、 隐含波动率的期限结构

图 6：IVIX 指数

数据来源：财通证券研究所

Black-Scholes 模型所预测波动率的期限结构是平缓的。

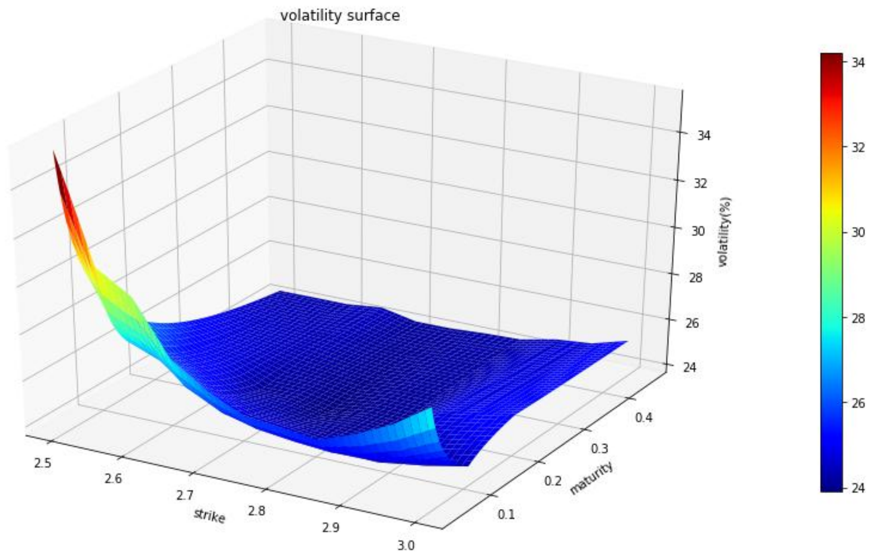
事实上，当短期波动率很低的时候，实值期权的隐含波动率的期限结构是向上倾斜的，反之则向下倾斜（Stein（1989））。

Taylor 和 Xu （1994）发现外汇期权隐含波动率的期限结构每几个月都要改变一次斜率方向。

Stein（1989）也发现中短期隐含波动率的实际敏感度比预测期限结构得到的估计敏感度要更大一些，并且得出中期隐含波动率对信息具有过度反应的结论。 Diz 和 Finucane（1993）运用不同的估计技术拒绝了过度反应假设，同时报告了反应不足的证据。

3.4、隐含波动率曲面

图 7：4 月 13 日看涨期权隐含波动率曲面



数据来源：财通证券研究所

隐含波动率 ω (t,t + h) 在很大程度上取决于日历时间 t 、到期期限 h 和期权的货币性。

我们可以通过插值的方法构建波动率曲面，从直观的角度了解隐含波动率。

4、 隐含波动率微笑模型

4.1、 Vanna-Volga 模型

4.1.1、 Vanna & Volga 的定义

Vega 衡量标的资产价格波动率变动时，期权价格的变化幅度，是用来衡量标的价格的波动率的变化对期权价值的影响。

$$Vega = S\sqrt{T-t}\,N'(d_1)\,e^{-q(T-t)}$$

Where:

S = Stock Price	σ = Implied volatility	r = Risk free rate
T = Expiry Date	t = Current period	q=Dividend rate

$$N'(d_1) = e^{-\frac{(d_1)^2}{2}} * \frac{1}{2\pi} \qquad d_1 = \frac{Ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Vanna 表示 Vega 对标的价格变化的敏感度

$$\text{Vanna} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S}.$$

$$vanna = e^{-qt}\sqrt{T-t}\,N'(d_1)\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)$$

Where:

S = Stock Price	σ = Implied volatility	r = Risk free rate
T = Expiry Date	t = Current period	q=Dividend rate

$$N'(d_1) = e^{-\frac{(d_1)^2}{2}} * \frac{1}{2\pi} \qquad d_1 = \frac{Ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Volga 表示 Vega 对波动率变化的敏感度

$$\text{Volga} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma}.$$

$$volga = e^{-qt}\sqrt{T-t}\,N'(d_1)\left(\frac{d_1 d_2}{\sigma}\right)$$

Where:

S = Stock Price	σ = Implied volatility	r = Risk free rate
T = Expiry Date	t = Current period	q=Dividend rate

$$N'(d_1) = e^{-\frac{(d_1)^2}{2}} * \frac{1}{2\pi} \qquad d_1 = \frac{Ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

4.1.2、 模型简介

Vanna-Volga 方法认为，不同行权价格的期权 Vega，Vanna，Volga 暴露不一，而这三个希腊字母风险正是导致期权价格偏离 BS 模型价格的原因。

通过构建能够对冲给定期权相对平值期权的 Vega，Vanna，Volga 变化的期权组合，我们就能通过复制成本确定期权的合理价格。

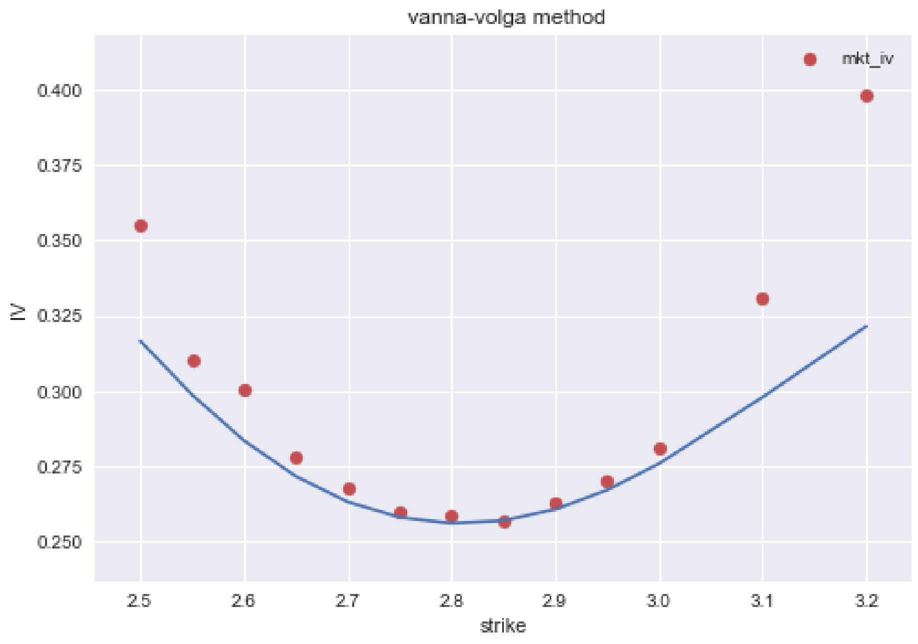
$$\begin{aligned}
\mathrm{ATM}(K_0) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Call}(K_0,\sigma_0)+\mathrm{Put}(K_0,\sigma_0)\right)\\
\mathrm{RR}(K_c,K_p) &= \cdot\mathrm{Call}(K_c,\sigma(K_c))-\mathrm{Put}(K_p,\sigma(K_p))\\
\mathrm{BF}(K_c,K_p) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Call}(K_c,\sigma(K_c))+\mathrm{Put}(K_p,\sigma(K_p))\right)-\mathrm{ATM}(K_0)
\end{aligned}$$

通过以上三个期权组合进行复制。

$$X^{\mathrm{VV}} = X^{BS} + \underbrace{\frac{\mathrm{X}_{vanna}}{\mathrm{RR}_{vanna}}}_{w_{RR}} RR_{cost} + \underbrace{\frac{\mathrm{X}_{volga}}{\mathrm{BF}_{volga}}}_{w_{BF}} BF_{cost}$$

其中 X_BS 使用 ATM 波动率由 BS 模型得到。

图 8：使用 vanna-volga 方法刻画隐含波动率微笑（4 月 13 日近月认购期权）



数据来源：财通证券研究所

4.1.3、VV 模型套利

回测方法：

1. 初始资金　：100 万。
2. 期权手续费　：单边 2.5 元/张，卖开免手续费。
3. 合约选择　：选定的合约
4. 策略操作　：用 vanna-volga 模型刻画隐含波动率为微笑，从中选取最被高估和最被低估的合约。

   买入被低估的合约，卖出被高估的合约，调整合约配比使策略满足 delta 中性。
5. 净值结算　：每日以收盘价结算净值。

表 1：在认沽期权上利用 VV 模型套利年化收益

	当月合约	次月合约	季月合约
2015	-21.44%	-8.48%	-26.31%
2016	-1.37%	-5.20%	-4.53%
2017	-12.06%	-7.62%	-6.30%
2018	-5.75%	-10.53%	-39.57%
overall	-10.51%	-6.92%	-15.04%

数据来源：财通证券研究所

表 2：在认购期权上利用 VV 模型套利年化收益

	当月合约	次月合约	季月合约
2015	18.33%	13.77%	66.11%
2016	0.73%	13.07%	13.67%
2017	-7.99%	-4.60%	3.93%
2018	-13.93%	25.42%	33.26%
overall	0.06%	7.76%	23.94%

数据来源：财通证券研究所

4.2、SABR 模型

4.2.1、模型简介

SABR 模型认为波动率与标的价格相关

$$dF_t = \sigma_t F_t^{\beta}\, dW_t,$$
$$d\sigma_t = \alpha\sigma_t\, dZ_t,$$

$$dW_t\, dZ_t = \rho\, dt$$

模型参数：

Sigma ：波动率初值

Beta ：CEV 模型弹性项

Alpha ：波动率的波动率参数

Rho ：几何布朗运动之间相关系数

SABR 模型下的期权隐含波动率有近似解：

$$\sigma_{\text{impl}} = \alpha \frac{\log(F_0/K)}{D(\zeta)} \left\{1 + \left[\frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2 + 1/F_{\text{mid}}^2}{24}\left(\frac{\sigma_0 C(F_{\text{mid}})}{\alpha}\right)^2 + \frac{\rho\gamma_1}{4}\frac{\sigma_0 C(F_{\text{mid}})}{\alpha} + \frac{2-3\rho^2}{24}\right]\varepsilon\right\}$$

其中：

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sigma_0}\int_K^{F_0}\frac{dx}{C(x)} = \frac{\alpha}{\sigma_0(1-\beta)}\left(F_0^{1-\beta} - K^{1-\beta}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{C'(F_{\text{mid}})}{C(F_{\text{mid}})} = \frac{\beta}{F_{\text{mid}}},$$
$$\gamma_2 = \frac{C''(F_{\text{mid}})}{C(F_{\text{mid}})} = -\frac{\beta(1-\beta)}{F_{\text{mid}}^2}.$$

$$D(\zeta) = \log\left(\frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2}+\zeta-\rho}{1-\rho}\right)$$

图 9：SABR 波动率模型

```
def SABR(alpha,beta,rho,nu,F,K,time):
    if K <= 0:
        VOL = 0
        diff = 0
    elif F == K: # ATM formula
        V = (F*K)**((1-beta)/2.)
        logFK = math.log(F/K)
        A = 1 + ( ((1-beta)**2*alpha**2)/(24.*(V**2)) + (alpha*beta*nu*rho)/(4.*V) \
              + ((nu**2)*(2-3*(rho**2))/24.) ) * time
        B = 1 + (1/24.)*(((1-beta)*logFK)**2) + (1/1920.)*(((1-beta)*logFK)**4)
        VOL = (alpha/V)*A
    elif F != K: # not-ATM formula
        V = (F*K)**((1-beta)/2.)
        logFK = math.log(F/K)
        z = (nu/alpha)*V*logFK
        x = math.log( ( math.sqrt(1-2*rho*z+z**2) + z - rho ) / (1-rho) )
        A = 1 + ( ((1-beta)**2*alpha**2)/(24.*(V**2)) + (alpha*beta*nu*rho)/(4.*V) \
              + ((nu**2)*(2-3*(rho**2))/24.) ) * time
        B = 1 + (1/24.)*(((1-beta)*logFK)**2) + (1/1920.)*(((1-beta)*logFK)**4)
        VOL = (nu*logFK*A)/(x*B)

    return VOL
```

数据来源：财通证券研究所

4.2.2、基于 SABR 模型的隐含波动率微笑

图 10：使用 SABR 模型刻画隐含波动率微笑（4 月 13 日近月认购期权）

数据来源：财通证券研究所

4.2.3、SABR 模型套利

回测方法：

1. 初始资金：100 万。
2. 期权手续费：单边 2.5 元/张，卖开免手续费。
3. 合约选择：选定的合约
4. 策略操作：用 SABR 模型刻画隐含波动率为微笑，从中选取最被高估和最被低估的合约。

   买入被低估的合约，卖出被高估的合约，调整合约配比使策略满足 delta 中性。
5. 净值结算：每日以收盘价结算净值。

表 3：在认沽期权上利用 SABR 模型套利年化收益

	当月合约	次月合约	季月合约
2015	2.66%	-8.36%	-19.19%
2016	-4.22%	-0.73%	-3.27%
2017	-3.13%	-7.74%	-6.99%
2018	-27.13%	-1.52%	-10.44%
overall	-3.91%	-5.10%	-9.79%

数据来源：财通证券研究所

表 4：在认购期权上利用 SABR 模型套利年化收益

	当月合约	次月合约	季月合约
2015	21.60%	25.58%	126.40%
2016	-3.65%	7.71%	-6.10%
2017	-5.81%	-5.12%	5.36%
2018	4.12%	7.82%	-13.95%
overall	2.26%	8.10%	23.66%

数据来源：财通证券研究所

4.3、SVI 模型

4.3.1、模型简介

SVI 模型直接对隐含波动率刻画

$$\omega_{imp}(x) = a + b(\rho(x-m) + \sqrt{(x-m)^2 + \sigma^2})$$

波动率曲面无套利条件：

$$\alpha \in [0, \max(\omega)]$$

$$b \in [0, \frac{4}{\tau(1+|\rho|)}]$$

$$\rho \in [-1,1]$$

$$m \in [\min(x), \max(x)]$$

$$0 < \sigma_{min} \le \sigma$$

4.3.2、为什么用 SVI 模型？

SVI 模型可直接用于刻画期权隐含波动率微笑，模型对不同情况的隐含波动率微笑拟合效果都不错。

同时，我们还需要提到另一个重要的模型，Heston 模型。

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sqrt{\nu_t} S_t\,dW_t^S$$

其中：

$$d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)\,dt + \xi\sqrt{\nu_t}\,dW_t^\nu$$

Heston 模型是一个经典的随机波动率模型，它考虑了波动率与标的资产价格回报之间的相关性。

相关性参数的刻画尤为重要，它反映了价格变动的偏度，也很大程度上显示了价格回报尖峰厚尾的特点。

但 Heston 模型有一个缺点，在于参数估计较为复杂，并且缺乏稳定性。

Gatheral（2011）证明，随着期权到期时间增长，SVI 模型收敛到 Heston 随机波动率模型。

而 SVI 模型参数估计速度快稳定性高，非常适合用来拟合波动率微笑。

这就说明 SVI 模型理论上和实际应用上都有较高的价值。

4.3.3、SVI 模型的参数估计方法

运用 Quasi-explicit 方法做两层参数估计

令

$$y = \frac{x - m}{\sigma}$$

$$\omega(x) = a + b(\sigma\rho y + \sigma z)$$

$$= a + dy + cz$$

其中：

$$a = a$$

$$d = b\rho\sigma$$

$$c = b\sigma$$

$$z = \sqrt{y^2 + 1}$$

那么模型参数估计就变成了对 a,d,c 的线性参数估计（内层）和对 m,σ的非线性参数估计(外层)。

内层通过 SLSQP 算法求解，外层通过 Nelder-Mead 算法进行估计。

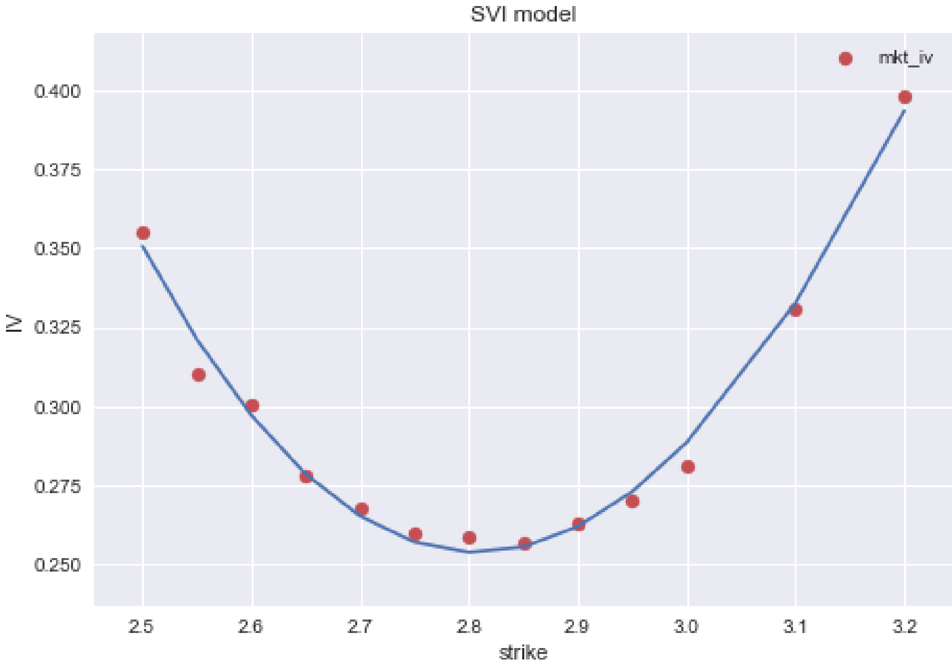
图 11：SVI 波动率模型参数估计

```python
class SVI_NelderMeadOptimization:
    def __init__(self,data,init_adc,init_msigma,tol):
        self.init_msigma = init_msigma
        self.init_adc = init_adc
        self.tol = tol
        self.data = data

    def outter_fun(self,params):
        m,sigma = params
        sigma = max(0,sigma)
        adc_0 = self.init_adc
        def inner_fun(params):
            a,d,c = params
            sum = 0.0
            for i,xi in enumerate(self.data[0]):
                yi = (xi - m)/sigma
                f_msigma = (a + d*yi + c * math.sqrt((yi**2 + 1)) - self.data[1][i])**2
                sum += f_msigma
            return sum
        bnds = ((1e-10,max(self.data[1])),(-4*sigma,4*sigma),(0, 4*sigma))

        b = np.array(bnds,float)
        cons = (
            {'type':'ineq','fun': lambda x: x[2] - abs(x[1])},
            {'type':'ineq','fun': lambda x: 4*sigma - x[2] - abs(x[1])}
        )

        inner_res = minimize(inner_fun, adc_0, method='SLSQP', tol=1e-6)
        a_star,d_star,c_star = inner_res.x

        self._a_star, self._d_star, self._c_star = inner_res.x

        sum = 0.0
        for i,xi in enumerate(self.data[0]):
            yi = (xi - m)/sigma
            f_msigma = (a_star + d_star*yi + c_star * math.sqrt((yi**2 + 1)) - self.data[1][i])**2
            sum += f_msigma
        return sum

    def optimization(self):
        outter_res = minimize(self.outter_fun, self.init_msigma, method='Nelder-Mead', tol=self.tol)
        m_star,sigma_star = outter_res.x
        obj = outter_res.fun
        calibrated_params = [self._a_star, self._d_star, self._c_star,m_star,sigma_star]
        return calibrated_params
```

数据来源：财通证券研究所

4.3.4、 基于 SVI 模型的隐含波动率微笑

图 12：使用 SVI 模型刻画隐含波动率微笑（4 月 13 日近月认购期权）



数据来源：财通证券研究所

4.3.5、SVI 模型套利

回测方法：

1. 初始资金　　：100 万。
2. 期权手续费　：单边 2.5 元/张，卖开免手续费。
3. 合约选择　　：选定的合约
4. 策略操作　　：用 SVI 模型刻画隐含波动率为微笑，从中选取最被高估和最被低估的合约。

   买入被低估的合约，卖出被高估的合约，调整合约配比使策略满足 delta 中性。
5. 净值结算　　：每日以收盘价结算净值。

表 5：在认沽期权上利用 SVI 模型套利年化收益

	当月合约	次月合约	季月合约
2015	14.69%	-7.86%	-13.83%
2016	-9.53%	-9.44%	-9.75%
2017	-5.71%	-7.15%	-10.33%
2018	-0.25%	-13.25%	-18.74%
overall	-1.85%	-8.34%	-11.72%

数据来源：财通证券研究所

表 6：在认购期权上利用 SVI 模型套利年化收益

	当月合约	次月合约	季月合约
2015	4.48%	15.39%	98.26%
2016	-4.63%	8.26%	-5.37%
2017	-6.54%	-17.08%	4.84%
2018	9.55%	16.11%	-9.83%
overall	-1.80%	1.94%	20.05%

数据来源：财通证券研究所

5、 波动率套利方法总结

我们发现，在看涨期权季月合约上进行波动率套利效果最佳。

在 2015 年，所有模型都能获得不错收益，而在之后，SABR 与 SVI 模型逐渐失效。vanna-volga 方法虽然在 2015 年表现并不突出，但它能够 2015~2018 持续获利，因此我们认为 vanna-volga 方法在三种方法中表现最优。

图 13：认购期权季月合约上进行波动率套利表现

数据来源：财通证券研究所

值得一提的是，季月合约由于流动性有限，因此实际操作时可能因为冲击成本过大而导致套利空间进一步压缩，同时因为可成交量不足从而缺乏实际操作的吸引力。因此本报告的意图更多的是为读着介绍一些波动率套利的方法论。

信息披露

分析师承诺

作者具有中国证券业协会授予的证券投资咨询执业资格，并注册为证券分析师，具备专业胜任能力，保证报告所采用的数据均来自合规渠道，分析逻辑基于作者的职业理解。本报告清晰地反映了作者的研究观点，力求独立、客观和公正，结论不受任何第三方的授意或影响，作者也不会因本报告中的具体推荐意见或观点而直接或间接收到任何形式的补偿。

资质声明

财通证券股份有限公司具备中国证券监督管理委员会许可的证券投资咨询业务资格。

公司评级

买入：我们预计未来 6 个月内，个股相对大盘涨幅在 15%以上；
增持：我们预计未来 6 个月内，个股相对大盘涨幅介于 5%与 15%之间；
中性：我们预计未来 6 个月内，个股相对大盘涨幅介于-5%与 5%之间；
减持：我们预计未来 6 个月内，个股相对大盘涨幅介于-5%与-15%之间；
卖出：我们预计未来 6 个月内，个股相对大盘涨幅低于-15%。

行业评级

增持：我们预计未来 6 个月内，行业整体回报高于市场整体水平 5%以上；
中性：我们预计未来 6 个月内，行业整体回报介于市场整体水平-5%与 5%之间；
减持：我们预计未来 6 个月内，行业整体回报低于市场整体水平-5%以下。

免责声明