L1 INFO - Algèbre 2 -

Chp II Déterminants

I] Déterminant d'une matrice carrée :

1) Cas d'une matrice carrée d'ordre 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

On appelle déterminant de la matrice A, noté $\det(A)$, le scalaire $\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc}$

Exp : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-2).4 - 3.1$
$= -11$.

2) Cas d'une matrice carrée d'ordre 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(K)$.

Le déterminant de A est le scalaire :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a[ei - fh] - b[di - gf] + c[dh - ge].$$

On dit qu'on a calculé $\det A$ en développant par rapport à la $1^{ère}$ Ligne.

On obtient le même résultat si on développe par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$= a[ei - fh] - d[bi - hc] + g[bf - ec].$$

Exp : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= [45 - 48] - 2[36 - 42] + 3[32 - 35] = 0.$$

3) Cas d'une matrice carrée d'ordre n : ($n \in \mathbb{N}^*$)

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.

Déf :

i) soit $i, j \in \{1, -, n\}$.

On appelle mineur de A d'indice (i,j), noté Δ_{ij}, le déterminant d'ordre $(n-1)$ de la matrice extraite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

ii) On appelle cofacteur de A d'indice (i,j), le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Exps :

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Le mineur de A d'indice $(1,1)$ est $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 21$

Le cofacteur de A d'indice $(1,1)$ est $(-1)^{1+1} \Delta_{11} = 21$.

b) Le mineur de A d'indice $(2,3)$ est

$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -28 - 30 = -58$.

Le cofacteur de A d'indice $(2,3)$ est $(-1)^{2+3} \Delta_{23} = 58$.

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

a) Le mineur de A d'indice $(3,2)$ est :

$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$

$= -2(-2) - 1(1-12) + 4(1-0) = 11$.

Le cofacteur de A d'indice $(3,2)$ est $(-1)^{3+2} \Delta_{32} = -11$.

b) Le mineur de A d'indice $(1,4)$ est :

$\Delta_{14} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \\ 6 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -4$.

Le cofacteur de A d'indice $(1,4)$ est $(-1)^{4+1} \Delta_{14} = 4$.

Rque :
Le cofacteur d'indice (i,j) est égal au signe près au mineur de même position. Mais comment ces signes sont ils distribués ?
La matrice suivante montre leur disposition :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}.$$

Théo : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
On peut calculer le déterminant de A en développant par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne $(1 \leq i \leq n)$. On obtient :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

où Δ_{ij} est le mineur de A d'indice (i,j).
On peut aussi calculer le déterminant de A en développant par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne $(1 \leq j \leq n)$, on obtient :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

Rque : Pour calculer det A, on choisit de développer par rapport à la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros possibles.

Exp1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

on choisit de développer par rapport à la $3^{\text{ème}}$ ligne :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,\Delta_{31} - 0\,\Delta_{32} - 1\,\Delta_{33}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(-1-2) - (1-1) = 6$$

Exp 2 :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

on choisit de developper par rapport la $2^{ème}$ colonne :

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\,\Delta_{12} + 0\,\Delta_{22} - 1\,\Delta_{32} + 0\,\Delta_{42}$$

$$\det A = -4\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

on se ramène à un calul de déterminants d'ordre 3.

Propriétés : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Les colonnes de A sont linéairement indépendants $\iff \det A \neq 0$

(ii) Les colonnes de A sont liés $\iff \det A = 0$.

(iii) $\det({}^tA) = \det A$.

(iv) Les lignes de A sont liées $\iff \det A = 0$.

(V) $\forall \lambda \in K$, $\det(\lambda A) = \lambda^n . \det A$.

(Vi) A est inversible $\iff \det A \neq 0$

et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(Vii) Si A est triangulaire (supérieure ou inférieure) alors

$\det A$ est le produit des éléments diagonaux.

i.e : Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & a_{ij} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ Alors $\det A = \lambda_1 . \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

(Viii) Pour tte matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$, $\det(A.M) = \det A . \det M$.

Exps :

1) $\forall a, b, c \in K$, $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Alors $\det A = -1 . 2 . 3 = -6$.

2) $\det(I_n) = 1$ puisque $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$. Alors $\det A = 0$ car $C_3 = -2C_1$.

ainsi (C_1, C_2, C_3) est lié.

Propriétés : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) $\det(A)$ change de signes si on échange deux lignes ou deux colonnes.

i.e : $$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} \boxed{} & \boxed{} & & \boxed{} & & \boxed{} & & \boxed{} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= - \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} \boxed{} & \boxed{} & & \boxed{} & & \boxed{} & & \boxed{} \end{vmatrix} \end{array}$$

(ii) Sortir un facteur commun d'une colonne ou d'une ligne :

i.e : $$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\det(A)$ ne change pas si on ajoute à une ligne, une combinaison linéaire des autres lignes.

(iv) $\det(A)$ ne change pas si on ajoute à une colonne, une combinaison linéaire des autres colonnes.

Rque : Les deux derniers propriétés sont souvent utilisées pour faire apparaître le maximum de zéros possibles.

Exp : soit $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$.

Pour quels scalaires $a \in \mathbb{C}$, la matrice A est elle inversible.

Corrigé:

on a : A est inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

on commence par calculer $\det(A)$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4+a & 1 & 1 & 1 \\ 4+a & 1+a & 1 & 1 \\ 4+a & 1 & 1+a & 1 \\ 4+a & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= (4+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (4+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 (4+a)$$

$\det A = 0 \Longleftrightarrow a^3(4+a) = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $a = -4$.

Ainsi A est inversible $\Longleftrightarrow a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -4\}$.

4) Calcul de l'inverse d'une matrice :

Déf : Comatrice :

Soit $A \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle comatrice de A, notée $com(A)$, la matrice des cofacteurs de A.

i.e : $com(A) = \left((-1)^{i+j} \Delta_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$.

avec Δ_{ij} est le mineur de A d'indice (i,j).

Δ_{ij} est le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A.

Exp : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculons les mineurs Δ_{ij} $(1 \leq i,j \leq 3)$.

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

d'où $com(A) = \begin{pmatrix} +\Delta_{11} & -\Delta_{12} & +\Delta_{13} \\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} & -\Delta_{23} \\ +\Delta_{31} & -\Delta_{32} & +\Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Théo : Soit $A \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A \cdot {}^t(com(A)) = {}^t(com(A)) \cdot A = det(A) \cdot I_n.$$

COR : Soit $A \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A est inversible $\iff det(A) \neq 0$

et $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \cdot {}^t(com A)}$.

Exp 1 :

Reprenons la matrice de l'exp précédent $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

qu'on a déjà calculé la comatrice.

$$det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{dev \% à } C_2.$$

$= -1 \neq 0$ d'où A est inversible

et $A^{-1} = \dfrac{1}{det A} \, {}^t(com A) = - {}^t\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exp 2 : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

$det A = ad - bc$ d'où A est inversible $\iff ad - bc \neq 0$.

$com(A) = \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix}$ d'où $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

II Déterminant d'une famille de vecteurs :

Soit E un $\mathbb{K}$-espvect de dimension $n \geqslant 1$.

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Déf : Soit $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ une famille de vecteurs de E.

On appelle déterminant de la famille $\mathcal{V}$ dans la base B, le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ dans la base B.

i.e : $\det_B (V_1, \ldots, V_n) = \det(A)$ avec $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 \ldots & V_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$

Théo :

Soit $V_1, \ldots, V_n$ des vecteurs de E.

Alors $(V_1, \ldots, V_n)$ est une base de $E \iff \det_{\mathcal{B}} (V_1, \ldots, V_n) \neq 0$.

où $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exp : $E = \mathbb{R}^3$. $V_1 = (-1, 1, 2)$, $V_2 = (1, \lambda, 0)$, $V_3 = (2, -1, 1)$.

Pour quelles valeurs de λ, la famille (V_1, V_2, V_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé :

Soit $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\det_{B_c} (V_1, V_2, V_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$

$$\det_{B_c} (V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{dev } \% \text{ à } L_3$$

$$= -5\lambda - 3.$$

(V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow \det_{Bc}(V_1, V_2, V_3) \neq 0$

$\Longleftrightarrow -5\lambda - 3 \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda \neq -\frac{3}{5}$

Rques :

1) Pour toute base $\mathcal{B}$ de E on a : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

2) Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $(V_1, \dots, V_n)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$\det_{\mathcal{B}'}(V_1, \dots, V_n) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_n) \cdot \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

3) Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

Alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ représente le déterminant de la matrice de passage $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Propriétés :

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $(V_1, \dots, V_n)$ une famille de vecteurs de E.

(a) $\forall \lambda \in K$, $\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, \lambda V_i, \dots, V_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n)$

(b) $\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_j, \dots, V_n) = -\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_j, \dots, V_i, \dots, V_n)$

(c) $\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_i + W, \dots, V_n) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_i, \dots, V_n) + \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, W, \dots, V_n)$

où W est un vecteur de E.

III) Déterminant d'un endomorphisme :

Soit E un K-esp vect de dimension finie $\dim E = n \geq 1$.

Théo_Déf :

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endom de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

Alors $\det(\operatorname{mat}(f, \mathcal{B}))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie, on l'appelle déterminant de l'endom f, noté $\det(f)$.

$$\boxed{\det f = \det A \quad \text{où} \quad A = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}). \quad \mathcal{B} \text{ base de } E.}$$

Dém : soit B et B' deux bases de E.

$A = \operatorname{mat}(f, B)$, $\quad M = \operatorname{mat}(f, B')$.

Alors on a : $\quad M = P^{-1} \cdot A \cdot P$ avec $P = \operatorname{pass}(B, B')$.

$\det M = \det(P^{-1} A P) = \det(A P P^{-1}) = \det(A)$.

d'où $\det(\operatorname{mat}(f, B))$ ne dépend pas de la base choisie.

Propriété :

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endom de E.

(a) $\forall \lambda \in K$, $\det(\lambda f) = \lambda^n . \det(f)$, $\quad n = \dim E$.

(b) pour tt endom $f, g \in \mathcal{L}(E)$

$\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det g . \det(f)$.

(c) Soit $(V_1, \ldots, V_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$\det_{\mathcal{B}}(f(V_1), \ldots, f(V_n)) = \det(f) . \det_{\mathcal{B}}(V_1, \ldots, V_n)$.

(d) f est inversible $\Longleftrightarrow \det f \neq 0$ et $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Attention : $\det(f+g) \neq \det f + \det g$.

Exps :

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$
$$P \longmapsto f(P) = -2P + P'.$$

f est un endom de $\mathbb{R}_3[X]$.

Calculer $\det(f)$, f est il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

Corrigé :

Soit $B_c = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$A = \mathrm{mat}(f, B_c) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$$

$f(1) = -2$

$f(X) = -2X + 1$

$f(X^2) = -2X^2 + 2X$

$f(X^3) = -2X^3 + 3X^2$.

d'où $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

A est triangulaire supérieure

d'où $\det(f) = \det(A) = (-2)^4$.

$\det(f) \neq 0$ d'où f est inversible.

f est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

IV- Application du déterminant :

1) Rang d'une matrice :

Déf : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $n,p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $C_1, \dots, C_p$ les vecteurs colonnes de A.

$\forall j,\ 1 \leq j \leq p$, C_j est un vecteur de K^n.

$rg(A) = rg(C_1, \dots, C_p) \leq \min(n,p)$.

Théo : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Alors $rg(A) = q$ $(1 \leq q \leq \min(n,p))$ $\Longleftrightarrow$ il existe un déterminant d'ordre q extrait de la matrice A non nul et tout déterminant d'ordre $(q+1)$ est nul.

ou encore :

$rg(A) =$ L'ordre de la plus grande sous matrice carrée de déterminant non nul que l'on peut extraire de A.

La matrice nulle étant de rang zéro.

Exp : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Déterminer $rg(A)$.

on a : $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \Rightarrow rg(A) \leq 4$.

comme A est carrée alors on calcule $\det(A)$.

(si $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible et $rg\, A = 4$)

on remarque que $L_1 + L_2 = L_3$ d'où $\det A = 0$.

ainsi $rg\, A \leq 3$.

prenons la matrice A' d'ordre 3 extraite de A en supprimant la 1ère ligne et la 1ère colonne de A.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1.$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{dev } / \text{ à } C_3$$

$$= -1(2-4) = 2 \neq 0.$$

ainsi on a trouvé une matrice carrée d'ordre 3 de déterminant non nul et extraite de A. cl : $\mathrm{rg}\, A = 3$.

2) Rang d'une famille de vecteurs :

Soit E un K.esp vect de dim finie, $\dim E = n \geq 1$.
Soit $(V_1, -, V_k)$ une famille de vecteurs de E.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(V_1, -, V_k)$.

Alors $\mathrm{rg}(V_1, -, V_k) = \mathrm{rg}\, A$.
$(V_1, -, V_k)$ est une famille libre $\iff$ il existe une sous matrice carrée d'ordre k extraite de A et de déterminant non nul.

Exp : Dans $\mathbb{R}_3[X]$, $P_1 = X + X^2 + X^3$, $P_2 = 1 - X + X^3$, $P_3 = 2 + X^2$.
M.que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre.

$$A = \underset{Bc}{\mathrm{mat}}(P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est carrée extraite de A d'ordre 3
$\det(A') = 1 \neq 0$ d'où $\mathrm{rg}\, A = 3$
et (P_1, P_2, P_3) est libre.

L1 INFO
Algèbre II

chp III Systèmes linéaires

I/ Equations linéaires

Déf : Soient E et F des K.e.v.
on appelle équation linéaire, une équation de la forme :

$$(1) : u(x) = y.$$

où u est une application linéaire de E dans F et y un vecteur de F appelé second membre.
L'ensemble des solutions de l'équ (1) est l'ens des antécédents de y.
c-à-d : $S = u^{-1}(\{y\})$.
On appelle équation sans second membre associée à (1), l'équ

$$(2) : u(x) = 0.$$

L'ens de solutions de l'équ (2) est $\ker u$.

Théo : l'ens de solutions de l'équ (1) : $u(x) = y$ est soit vide soit l'ens décrit par la somme d'une sol° particulière x_0 de (1) et d'une sol° quelconque de l'équ sans second membre.
c-à-d : $S = \emptyset$ ou $S = x_0 + \ker u$.

II Système d'équations linéaires :

un système à n équations, p inconnus scalaires

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1p} x_p = y_1 \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2p} x_p = y_2 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{np} x_p = y_n \end{cases}$$

est une équation linéaire de la forme $u(x) = y$ où u est une appl linéaire de K^p dans K^n.
ce système peut être représenté matriciellement par : $AX = Y$
avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ appelée matrice du système. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Soit r le rang de la matrice A. on a :

*/ Si $r = n$ alors u est surjective, le système admet de sol° quelque soit le second membre y.

*/ Si $r < n$, le second membre y doit vérifier certaines conditions pour que le syst admette des sol°.

*/ Si $r = p$, alors u est injective, la sol° si elle existe, elle est unique.

*/ Si $r < p$ au contraire, les sol° ne sont jamais uniques. on peut fixer arbitrairement certaines inconnus et calculer les autres en fonction de celles-là.

*/ Si $r = n = p$ alors u est bijective, pour tout second membre y il y a une unique sol° $x = u^{-1}(y)$ ou $X = A^{-1} \cdot Y$.

Dans ce cas on dit qu'il s'agit d'un système de Cramer et sa résolution est équivalente au calcul de l'inverse de la matrice A.

Résolution par la méthode du pivot partiel

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1p} x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{np} x_p = y_n \end{cases}$$

représenté matriciellement par :

$AX = Y$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On peut effectuer simultanément sur les matrices A et Y des opérations élémentaires lignes pour aboutir à : $A' = \begin{pmatrix} p_1 & & M \\ & \ddots & \\ 0 & & p_r \quad \boxed{0} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} p_1 \neq 0 \\ \vdots \\ p_r \neq 0 \end{matrix}$

et $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$ c'est à dire le système :

3 - Suite - chp III - Syst linéaires

$$\begin{cases} P_1 x'_1 + a'_{12} x'_2 + \cdots + a'_{1p} x'_p = y'_1 \\ \qquad P_2 x'_2 + \cdots + a'_{2p} x'_p = y'_2 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad P_r x'_r + \cdots + a'_{rp} x'_p = y'_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = y'_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = y'_n \end{cases}$$

Les $x'_1, \dots, x'_p$ sont les inconnues éventuellement permutées.
Les $(n-r)$ dernières équations qui ne font plus intervenir les inconnus sont les relations de Compatibilité du système.
Elles expriment les conditions portant sur le second membre pour qu'il existe des solutions.
Les $(p-r)$ derniers inconnus dans leur nouvel ordre peuvent être fixées arbitrairement et en remontant de la $r$ième ligne à la première, on calcule les r premières inconnus en fonction de ces $(p-r)$ paramètres.

Exp :
$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 1 \\ -x + y + 7z + 2t = 1 \\ 2x + y - 8z + t = a \end{cases} ; \quad a \in \mathbb{R}.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ y + 2z - 2t = 0 \\ 3y + 6z + 3t = 2 \\ -3y - 6z - t = a - 2 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ y + 2z - 2t = 0 \\ 9t = 2 \\ -7t = a - 2 \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow 9L_4 + 7L_3$:
$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ y + 2z - 2t = 0 \\ 9t = 2 \\ 0 = 9a - 4 \end{cases}$$

La dérniere équation est une relation de Compatibilité.
Le syst admet des solᵒ $\Longleftrightarrow 9a - 4 = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{4}{9}$.

Dans ce cas : $t = \frac{2}{9}$, $y = -2z + 2t = -2z + \frac{4}{9}$.
$$x = -2y + z - t + 1$$
$$x = 5z - \frac{1}{9}$$
L'ens des solᵒ est : $S = \left\{ \left(5z - \frac{1}{9}, -2z + \frac{4}{9}, z, \frac{2}{9}\right), z \in \mathbb{R} \right\}$.
Le syst admet une infinité de solᵒ.

III - Système de Cramer

un système linéaire de n équations à n inconnus
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n = y_n \end{cases}$$
peut s'écrire $AX = Y$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

ce système est dit syst de Cramer ssi A est inversible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

Dans ce cas le syst admet une unique solution : $X = A^{-1} Y$.

La solution est donnée par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec

$\forall j, 1 \leq j \leq n$; $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\det A}$ avec Δ_j est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par la colonne Y.

Exp 1 : $S : \begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$; $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\det A \neq 0$.

L'unique sol$^{\circ}$ de ce syst est $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\det A} \; ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Exp : Résoudre $(S)\begin{cases} 2x+3y=-5 \\ -x+4y=1 \end{cases}$;

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $\det A = 11 \neq 0$

(S) est un système de Cramer, il admet une unique sol$^{\circ}$

$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{11}=\dfrac{-23}{11}$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{11}=\frac{-3}{11}.$$

Exp 2 : $S : \begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$

$A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(K)$; avec $\det A \neq 0$.

L'unique sol$^{\circ}$ de ce syst est $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\det A}$$

ces résultats sont appelés formules de Cramer.

-6- Suite - chp III - Systèmes Linéaires

Exp : $S : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 3 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

S est un système de Cramer, il admet une unique sol$^{\underline{o}}$:

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{6} = 2 \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{6} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = -3.$$

IV Application aux équations des sous espaces vectoriels :

Soient E un K.e.v de dimension n ; F un s.e.v de E, $\dim F = p$.

$F = \text{Vect}(V_1, \ldots, V_p)$; $(V_1, \ldots, V_p)$ est une base de F.

on veut chercher les équations définissant le s.e.v. F.

soit B une base de E. Soit $A = \underset{B}{\text{mat}}(V_1, \ldots, V_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

on a : $rg(A) = p$ d'où il existe une matrice carrée d'ordre p extraite de A et qui est inversible.

Supp que $A' = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ inversible.

pour $x \in E$; $x = (x_1, \ldots, x_n)_B$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

notons $\Delta_i(x) = \begin{vmatrix} \boxed{A'} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{matrix} \\ a_{i1} \cdots a_{ip} & x_i \end{vmatrix}$.

Alors $x \in F \Longleftrightarrow \Delta_i(x) = 0$
$\forall i, \; p+1 \leq i \leq n$

ainsi F un s.e.v est de dimension p $\Longleftrightarrow$ F est représenté par un système à $(n-p)$ équations linéairement indépendants.

Exp: Dans $\mathbb{R}^4$; $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$; $V_1 = (1,2,3,4)$
$V_2 = (2,4,0,1)$.

$$A = \underset{B_c}{\text{mat}}(V_1, V_2) = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 2 \quad 4 \\ \boxed{3 \quad 0} \\ 4 \quad 1 \end{pmatrix} ; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \det A' = -6 \neq 0.$$

pour $X \in \mathbb{R}^4$, $X = (x, y, z, t)_{B_c}$.

$$\Delta_1(X) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 0 & z \\ 2 & 4 & y \end{vmatrix} = 12x - 6y$$

$$\Delta_2(X) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 0 & z \\ 4 & 1 & t \end{vmatrix} = 3x + 7z - 6t.$$

$$X \in F \Longleftrightarrow \begin{cases} 12x - 6y = 0 \\ 3x + 7z - 6t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 7z - 6t = 0. \end{cases}$$