Algèbre 2

Chp I Matrices - Calculs matriciels

I] Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

Dans Toute la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1) Généralités :

Déf : On appelle matrice à n lignes - p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute application $A : [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$

$$(i \,,\, j) \longmapsto a_{ij}$$

c'est à dire la donnée de $p.n$ scalaires de $\mathbb{K}$ que l'on peut disposer en tableau :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & C_j & & \phantom{a_{1p}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

on note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

*/ Le coefficient de A situé sur la $i^{ème}$ ligne, $j^{ème}$ colonne est noté a_{ij} $\begin{cases} \text{o/ } i \text{ représente l'indice de ligne} \\ \text{o/ } j \text{ est l'indice de colonne.} \end{cases}$

*/ On dit que A est une matrice de type (n,p) ou matrice $n \times p$.

*/ pour tout i, $(1 \le i \le n)$, on appelle $i^{ème}$ vecteur Ligne de A, Le p-uplet : $(a_{i1} \; a_{i2} \cdots a_{ip}) = L_i$

*/ $\forall j$, $1 \leq j \leq p$, on appelle $j$ième vecteur colonne de A, Le n-uplet $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

*/ on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ L'ens des matrices de type (n,p) et à coeff dans $\mathbb{K}$

Exp :

$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ $\quad a_{11} = -1$, $a_{12} = 8$, $a_{13} = 3$
$a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = -6$

Déf : Matrices Particulières :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est dite :

(i) matrice nulle ssi $a_{ij} = 0$, $\forall i \in \{1, -, n\}$, $\forall j \in \{1, -, p\}$.

(ii) matrice ligne ssi $n = 1$, $A = (a_{11} \; a_{12} \cdots a_{1p}) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

(iii) matrice colonne ssi $p = 1$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

(iv) matrice carrée ssi $n = p$.

Dans ce cas on dit que A est une matrice carrée d'ordre n.

$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

*/ Le coeff a_{ii} $(1 \leq i \leq n)$ s'appelle coeff diagonal de A.

*/ La famille des coeff diagonaux s'appelle diagonale de A.

*/ On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ L'ens des matrices carrées d'ordre n.

Exp : $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

la diagonale de A.

A est une matrice carrée d'ordre 2.

Rque :

Deux matrices sont égales $\Leftrightarrow$ elles sont de même type et leurs coeff correspondants sont égaux.

i.e : $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$ et $\forall j$, $1 \leq j \leq p$.

2/ Opérations sur les matrices :

*/ Addition des matrices :

Déf : Soit $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

On appelle somme des matrices A et B, la matrice $A+B = (c_{ij})$

avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$.

$A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Exp : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$

Alors $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$.

Rque :

La matrice nulle, notée 0, est l'élément neutre de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ pour la somme.

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $A + 0 = 0 + A = A$.

*/ Multiplication d'une matrice par un scalaire :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $\lambda \in K$.

On appelle produit de la matrice A par le scalaire λ, la matrice λA

$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Exp : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -4 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $\lambda = 3$, $\lambda A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 15 \\ -12 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

Rque :

Toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ possède un élément symétrique pour la somme, c'est la matrice

$-A = (-a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$.

Théo : $(M_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel.

Exp : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 15 & -24 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -13 & 30 \\ -8 & -3 & -17 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

3/ Base de $M_{n,p}(K)$:

Déf : Matrice élémentaire :

$\forall i, 1 \leq i \leq n, \forall j, 1 \leq j \leq p$, on définit la matrice élémentaire E_{ij} de $M_{n,p}(K)$ par :

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \; i$$

Tous les coeff de E_{ij} sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

Exp : Les matrices élémentaires de $M_{2,3}(K)$ sont :

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2,3}(K)$ on a :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + a_{13} E_{13} + a_{21} E_{21} + a_{22} E_{22} + a_{23} E_{23}$$

On généralise ce résultat :

Théo : La famille formée par les matrices élémentaires $\{E_{ij},\ 1 \le i \le n, 1 \le j \le p\}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

$\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ on a :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}.$$

- $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est un K.e.v de dimension np.
- En particulier $\mathcal{M}_n(K)$ est un K.e.v de dimension n^2.

Exps :

1) $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ est de dimension $2.3 = 6$.
La base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ est $B_c = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23})$

2) $\mathcal{M}_2(K)$ est de dimension $2.2 = 4$.
La base canonique de $\mathcal{M}_2(K)$ est $B_c = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Multiplication Matricielle : $n, p, q \in \mathbb{N}^*$.

Déf : Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$, $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(K)$.

(Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B)

On appelle produit des matrices A et B, la matrice AB de $M_{n,q}(K)$

(elle a le m̂ nbre de lignes que A et le m̂ nbre de colonnes que B),

définie par :

$$AB = (C_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \quad \text{avec} \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}.$$

En pratique, pour calculer le coeff C_{ij} de la matrice AB, on considère la $i^{ème}$ ligne de A et la $j^{ème}$ colonne de B et on fait la somme de leurs produits terme à terme :

$$C_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{ip}\, b_{pj}.$$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{pmatrix} \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip}} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{matrix}} & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & & \\ & \boxed{C_{ij}} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \end{array}$$

Exp : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{-2 \quad 3} \\ 4 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times5+3\times6 & -2\times(-1)+3\times2 & -2\times6+3\times0 \\ 4\times5+1\times6 & 4\times(-1)+1\times2 & 4\times6+1\times0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -12 \\ 26 & -2 & 24 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

Rque: On ne peut effectuer le produit de $A \in M_{n,p}(K)$ par $B \in M_{p',q}(K)$ que si $p = p'$.

Le produit AB peut exister sans que ce soit le cas pour BA.

Propriétés:

Soit $A, A' \in M_{n,p}(K)$, $B, B' \in M_{p,q}(K)$, $C \in M_{q,r}(K)$. on a:

a/ $(A.B).C = A.(B.C)$: Le produit matriciel est associatif.

b) $\forall \lambda \in K$, $(\lambda A).B = A.(\lambda B) = \lambda.(AB)$.

c) $\forall \alpha, \lambda \in K$, $(\alpha A + \lambda A')B = \alpha(AB) + \lambda(A'B)$

d) $\forall \alpha, \lambda \in K$, $A(\alpha B + \lambda B') = \alpha(AB) + \lambda(AB')$.

5) Transposée d'une matrice:

Déf: Soit $A \in M_{n,p}(K)$, on appelle transposée de A, notée ${}^tA$, la matrice de $M_{p,n}(K)$ dont les colonnes sont formés par les lignes de A.

i.e: $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$, ${}^tA = (b_{ij}) \in M_{p,n}(K)$ avec $b_{ij} = a_{ji}$.

Exp: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

$A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, ${}^tA \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

Propriétés:

i) $\forall A \in M_{n,p}(K)$, ${}^t({}^tA) = A$.

ii) $\forall A, B \in M_{n,p}(K)$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

iii) $\forall A \in M_{n,p}(K)$, $\forall \lambda \in K$, ${}^t(\lambda A) = \lambda . {}^tA$.

iv) L'appl $\Phi : M_{n,p}(K) \longrightarrow M_{p,n}(K)$, $\Phi(A) = {}^tA$, est un isom d'e.v.

Dém :

iv) M. q.ue $\Phi : M_{n,p}(K) \longrightarrow M_{p,n}(K)$ est un isom d'e.v.

$$A \longmapsto \Phi(A) = {}^tA$$

•/ Φ est linéaire : $\forall A, B \in M_{n,p}(K)$, $\forall \lambda \in K$.

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$\Phi(A) = {}^tA = (a'_{ij})$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$.

$\Phi(B) = {}^tB = (b'_{ij})$ avec $b'_{ij} = b_{ji}$

soit $C = \lambda A + B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij}$

$\Phi(\lambda A + B) = \Phi(C) = {}^tC = (c'_{ij})$

avec $c'_{ij} = c_{ji} = \lambda a_{ji} + b_{ji} = \lambda a'_{ij} + b'_{ij}$.

d'autre part on a :

$\lambda \Phi(A) + \Phi(B) = \lambda(a'_{ij}) + (b'_{ij}) = (\lambda a'_{ij} + b'_{ij}) = (c'_{ij})$

$= \Phi(\lambda A + B)$. cl : Φ est linéaire.

•/ Φ est injective : En effet soit $A \in M_{n,p}(K)$.

$A \in \operatorname{Ker} \Phi \iff \Phi(A) = 0 \iff {}^tA = 0 \Longrightarrow {}^t({}^tA) = 0 \Longrightarrow A = 0$

d'où $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$.

•/ Φ est surjective : soit $M \in M_{p,n}(K)$ alors ${}^tM \in M_{n,p}(K)$

$\Phi({}^tM) = {}^t({}^tM) = M$.

cl : Φ est un isom d'e.v.

Théo : Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$

on a : $\boxed{{}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA}$

Dém : soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$.

$AB = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$, avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

${}^t(AB) = {}^tC = (c'_{ij}) \in \mathcal{M}_{q,n}(K)$ avec $c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki}$

d'autre part soit $A' = {}^tA = (a'_{ij})$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$, $A' \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$

$B' = {}^tB = (b'_{ij})$ avec $b'_{ij} = b_{ji}$, $B' \in \mathcal{M}_{q,p}(K)$

soit $D = {}^tB \cdot {}^tA = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{q,n}(K)$

avec $d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk} = c'_{ij}$

d'où $D = {}^tC$. i.e : ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.

Exp :

soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Calculer ${}^tA$, ${}^tB$, AB, ${}^t(AB)$, ${}^tB \cdot {}^tA$.

on a : ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & -11 \end{pmatrix}$

${}^t(AB) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$

${}^tB \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$

II Matrices Carrées :

1) Généralités :

Déf : Rappelons qu'une matrice A est dite carrée d'ordre n si elle possède n lignes - n colonnes.

L'ens des matrices carrée d'ordre n est noté $M_n(K)$.

$(M_n(K), +, \cdot)$ est un K-e.v de dimension n^2.

Prop : Dans $M_n(K)$, le produit matriciel est une Loi de composition interne i.e : $\forall A, B \in M_n(K)$, Le produit $A.B \in M_n(K)$.

de même le produit BA existe, $BA \in M_n(K)$.

L'élément neutre pour le produit matriciel est la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont tous les coeff sont nuls sauf ceux de La diagonale qui valent 1.

I_n est appelée matrice identité d'ordre n.

on a : $\forall A \in M_n(K)$, $A.I_n = I_n.A = A$.

Exps :

1) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Dans $M_n(K)$, $(n \geq 2)$, le produit matriciel n'est pas commutatif.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq AB$.

3) Dans $M_n(K)$, $(n \geq 2)$, on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$

soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $AB = 0$.

$A \neq 0$ et $B \neq 0$.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Prop : Pour deux matrices élémentaires de $M_n(K)$

on a : $E_{ij} . E_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ E_{il} & \text{si } j = k. \end{cases}$

Prop : Formule du Binôme de Newton

Soit $A, B \in M_n(K)$ deux matrices qui commutent : $AB = BA$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$ on a :

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j A^j B^{k-j}.$$

Exp : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on veut calculer A^k, $\forall k \in \mathbb{N}$.

on écrit $A = I_3 + B$ avec $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

on calcule $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

d'où $B^k = 0$, $\forall k \geqslant 3$.

comme I_3 et B commutent alors d'après la formule du Binôme

on a : $A^k = (I_3 + B)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j B^j$

$$A^k = I_3 + C_k^1 B + C_k^2 B^2 = I_3 + kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & -k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

2) Matrices carrées remarquables :

Déf : Matrice diagonale :

Une matrice $D = (d_{ij}) \in M_n(K)$ est dite diagonale ssi
$d_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ on note } D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn}).$$

L'ensemble des matrices carrées diagonales d'ordre n est noté $D_n(K)$.

$D_n(K)$ est un s-e-v de $M_n(K)$.

$\dim D_n(K) = n$.

$(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$ est une base de $D_n(K)$.

Exps :

1) $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in D_2(\mathbb{R})$.

2) $M = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in D_3(\mathbb{C})$.

3) $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin D_2(\mathbb{R})$.

Prop : Soit $D_1 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in M_n(K)$
$D_2 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in D_n(K)$

Alors $D_1 . D_2$ est une matrice diagonale.

$D_1 . D_2 = \text{diag}(\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \dots, \lambda_n \alpha_n) \in D_n(K)$.

Déf : Matrice Triangulaire :

(i) Une matrice carrée $T = (t_{ij}) \in M_n(K)$ est dite triangulaire supérieure ssi $t_{ij} = 0,\ \forall i > j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{diagonale de } T$$

On note $T_{n,s}(K)$ l'ens des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n.

(ii) Une matrice carrée $T = (t_{ij}) \in M_n(K)$ est dite triangulaire inférieure ssi $t_{ij} = 0,\ \forall i < j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{diagonale de } T$$

On note $T_{n,i}(K)$ l'ens des matrices carrées triangulaires inférieures d'ordre n.

Exps :

1) $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \pi & 0 \\ \sqrt{3} & e^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure d'ordre 3.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas triangulaire.

3) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure d'ordre 2.

Prop :

(i) $T_{n,i}(K)$ et $T_{n,s}(K)$ sont des s.e.v de $M_n(K)$ chacun est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

$(E_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ est une base de $T_{n,s}(K)$

$(E_{ij})_{1\leq j\leq i\leq n}$ est une base de $T_{n,i}(K)$.

(ii) Soit T_1 et T_2 deux matrices triang supérieures (resp. inférieures) dont ls coeff diagonaux sont resp $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Alors $T_1.T_2$ est une matrice triang supérieure (resp. inférieure) et ses coeff diagonaux sont $\lambda_1\alpha_1, \ldots, \lambda_n\alpha_n$.

(iii) Soit $N \in M_n(K)$ une matrice triangulaire (sup ou inf) dont tous ls coeff diagonaux sont nuls alors : $N^n = 0$.

N est appelée matrice nilpotente.

Exps :

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 12 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

2) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$, N est nilpotente.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déf : Matrices symétriques - antisymétriques :

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice carrée.

(i) A est dite symétrique ssi ${}^tA = A$ i.e $a_{ji} = a_{ij}$, $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$

on note $S_n(K)$ l'ens des matrices symétriques d'ordre n.

(ii) A est dite antisymétrique ssi ${}^tA = -A$ i.e $a_{ji} = -a_{ij}$, $\forall i,j$

on note $A_n(K)$ l'ens de matrices antisymétriques d'ordre n.

Exps :

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 4 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 \\ 4 & 5 & \pi \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique d'ordre 3.

2) $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ M n'est pas symétrique
M n'est pas antisymétrique.

Rque : Si $A = (a_{ij})$ est antisymétrique alors $a_{ii} = 0$ $\forall i, 1 \leq i \leq n$.

Exp : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisym.

Théo : $S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont des s.e.v supplémentaires de $M_n(K)$ i.e : $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$.

Pour toute $A \in M_n(K)$, $A = \underbrace{\frac{A + {}^tA}{2}}_{\in S_n(K)} + \underbrace{\frac{A - {}^tA}{2}}_{\in A_n(K)}$

$\dim S_n(K) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim A_n(K) = \frac{n(n-1)}{2}$.

3) Matrices inversibles :

Déf : On dit qu'une matrice carrée $A \in M_n(K)$ est inversible s'il existe $M \in M_n(K)$ tq $AM = MA = I_n$.

Dans ce cas M est unique et est appelée matrice inverse de la matrice A, on note $M = A^{-1}$.

L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $GL_n(K)$.

Exp : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$

En effet, cherchons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tq $AM = I_2$.

$$AM = I_2 \iff \begin{cases} x + z = 1 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{et on trouve } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

on vérifie que $AM = MA = I_2$. cl : $A^{-1} = M$.

Théo :

(i) Pour tout $A, M \in GL_n(K)$ le produit $AM \in GL_n(K)$ et

$$(AM)^{-1} = M^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Dém : soit $A, M \in GL_n(K)$.

$(A \cdot M) \cdot (M^{-1} A^{-1}) = A (M M^{-1}) A^{-1} = A I_n A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$

d'où AM est inversible et $(AM)^{-1} = M^{-1} \cdot A^{-1}$.

(ii) Pour tout $A \in GL_n(K)$, $A^{-1} \in GL_n(K)$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Dém : Comme $A \in GL_n(K)$ alors on a : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

d'où $A^{-1} \in GL_n(K)$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exp : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 5A + 3I_2$.

En déduire que A est inversible.

Prop : Soit $A, M \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $AM = I_n$

Alors A et M sont inversibles et $A^{-1} = M$, $M^{-1} = A$.

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

A est inversible $\Longleftrightarrow$ ${}^tA$ est inversible.

Dans ce cas $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Dém : A est inversible $\Longleftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $AM = I_n$.

$\Longleftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}_n(K)$ tq ${}^t(AM) = {}^tI_n$

$\Longleftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}_n(K)$ tq ${}^tM \, {}^tA = I_n$

$\Longleftrightarrow$ ${}^tA$ est inversible.

et $({}^tA)^{-1} = {}^tM = {}^t(A^{-1})$.

Prop :

(i) Soit $D \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonale.

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Alors D est inversible $\Longleftrightarrow \forall i, \lambda_i \neq 0$.

Dans ce cas $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

(ii) Soit T une matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors T est inversible $\Longleftrightarrow \forall i, \lambda_i \neq 0$.

Dans ce cas T^{-1} est une matrice triang supérieure.

(iii) Soit T une matrice triang inférieure.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ t_{ij} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors T est inversible $\Longleftrightarrow \forall i, \lambda_i \neq 0$

et T^{-1} est triang inférieure.

4) Trace d'une matrice carrée :

Déf : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice carrée.
On appelle trace de A, notée $tr(A)$, le scalaire :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

$tr(A)$ est la somme des éléments diagonaux de A.

Exp : $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & \pi \\ 3 & -5 & -1/2 \\ 5 & e & 8 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$tr(A) = 4 - 5 + 8 = 7.$

Propriétés :

(i) $\forall A, B \in M_n(K)$, $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

(ii) $\forall A \in M_n(K)$, $\forall \lambda \in K$, $tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$.

Ainsi l'application $tr : M_n(K) \longrightarrow K$, $A \longmapsto tr(A)$ est une forme linéaire.

(iii) $\forall A \in M_n(K)$, $tr({}^tA) = tr(A)$.

(iv) $\forall A, B \in M_n(K)$, $tr(AB) = tr(BA)$.

Dém : Soit $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(K)$. $\lambda \in K$.

(i) $A + B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = tr A + tr(B)$

(ii) $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, $tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda\, tr(A)$.

(iii) ${}^tA = (a'_{ij})$, $a'_{ij} = a_{ji}$, $tr({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr A$

(iv) $AB = (d_{ij})$ avec $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$BA = (e_{ij})$ avec $e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$.

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} e_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$$

Changeons les rôles de k et i

$$tr(BA) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} \, a_{ik} = tr(AB).$$

III) Matrice d'une application Linéaire :

1) Matrice d'une famille de vecteurs :

Dans la suite E est un K-e.V de dimension $n \geq 1$.

Déf 1 : Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

tout vecteur x de E s'écrit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$

avec $x_1, \ldots, x_n \in K$.

On appelle matrice de x dans la base B, notée $\underset{B}{mat}(x)$, la matrice colonne : $\underset{B}{mat}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$.

Exp : $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P = -3X^2 + 4X + 8$.

$B_c = (1, X, X^2)$ La base canonique de E.

$$\underset{B_c}{mat}(P) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Prop : Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Alors L'appl $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & M_{n,1}(K) \\ x & \longmapsto & \underset{B}{mat}(x) \end{array}$ est un isomorphisme d'e.V.

Ainsi tout K-e.V de dimension n est isomorphe à $M_{n,1}(K)$.

Déf 2 : Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soit $V_1, \ldots, V_p$ des vecteurs de E.

chaque vecteur V_j $(1 \leq j \leq p)$ se décompose dans la base B

sous la forme : $V_j = a_{1j}\, e_1 + a_{2j}\, e_2 + \cdots + a_{nj}\, e_n$.

On appelle matrice de la famille $(V_1, \ldots, V_p)$ relativement à la base B, notée $\underset{B}{\mathrm{mat}}(V_1, \ldots, V_p)$, la matrice de type (n, p) dont la $j$ième colonne représente les coordonnées du vecteur V_j dans la base B

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(V_1, \ldots, V_p) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 \ldots & V_j & \ldots & V_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Exp 1 : Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, on donne :

$V_1 = (-1, 0, 0, 2)$, $V_2 = (4, 5, -2, 7)$, $V_3 = (1, 1, 1, 1)$.

$$\underset{Bc}{\mathrm{mat}}(V_1, V_2, V_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}).$$

Exp 2 : Dans $\mathbb{R}_4[X]$ muni de sa Bc, on donne :

$P_1 = -2X + 4X^2 + 3$, $P_2 = X^3 + 1$

$$\underset{Bc}{\mathrm{mat}}(P_1, P_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{array} \in \mathcal{M}_{5,2}(\mathbb{R}).$$

2) Matrice d'une application Linéaire:

Dans la suite E est un K-e.v, $\dim E = n \geq 1$

et F est un K-e.v de dimension $\dim F = p \geq 1$.

Déf: Soit $u : E \longrightarrow F$ une appl linéaire.

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E

Soit $B' = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

On appelle matrice de u relativement aux base B et B', notée $mat(u, B, B')$, la matrice de type (p, n), dont la $j^{ème}$ colonne représente les coordonnés du vecteur $u(e_j)$ dans la base B'.

$$mat(u, B, B') = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) \cdots & u(e_j) \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{matrix}$$

$$mat(u, B, B) = \underset{B'}{mat}\left(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\right) \in \mathcal{M}_{p,n}(K).$$

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n, \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

$$u(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{pj} f_p$$

Exp 1: $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$

$F = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B' = (f_1, f_2)$.

$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $u(x, y, z) = (2x + y - 3z, -x + 4y + z)$.

u est une appl linéaire.

$u(e_1) = u(1,0,0) = (2,-1) = 2(1,0)-(0,1) = 2f_1 - f_2$

$u(e_2) = u(0,1,0) = (1,4) = (1,0)+4(0,1) = f_1 + 4f_2$

$u(e_3) = u(0,0,1) = (-3,1) = -3(1,0)+(0,1) = -3f_1 + f_2$

$$\mathrm{mat}(u,B,B') = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \end{array}$$

$$\mathrm{mat}(u,B,B') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Exp 2 : $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa Base canonique $B = (1, X, X^2)$

$F = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa Base canonique $B' = (1, X, X^2, X^3)$

$$u : E \longrightarrow F$$
$$P \longmapsto u(P) = -2XP + 4P'$$

u est une appl linéaire.

$u(1) = -2X$

$u(X) = -2X^2 + 4$

$u(X^2) = -2X^3 + 8X$

$$\mathrm{mat}(u,B,B') = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} u(1) & u(X) & u(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ -2 \end{matrix}} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{matrix} \end{array}$$

$$\mathrm{mat}(u,B,B') = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}).$$

Théo :

Soit B une base de E, B' une base de F.

Alors l'appl $\psi : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(K)$

$$u \longmapsto \psi(u) = mat(u, B, B')$$

est un isomorphisme d'e.v.

En particulier, Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, il existe une unique appl linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tq $mat(u,B,B') = A$.

On dit que u est l'appl linéaire de E dans F représentée par A dans les bases B de E et B' de F.

Dém : Soit $B = (e_1, -, e_n)$ et $B' = (f_1, -, f_p)$.

*/ ψ est linéaire :

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda \in K$, M.que $\psi(\lambda u + v) = \lambda \psi(u) + \psi(v)$?

notons $\forall j$, $1 \leq j \leq n$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$, $v(e_j) = \sum_{i=1}^{p} b_{ij} f_i$

avec $a_{ij}, b_{ij} \in K$, $\forall i, j$.

$\psi(u) = mat(u, B, B') = A = (a_{ij})$.

$\psi(v) = mat(v, B, B') = M = (b_{ij})$.

$(\lambda u + v)(e_j) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda a_{ij} + b_{ij}) f_i$

$\psi(\lambda u + v) = mat(\lambda u + v, B, B') = D = (d_{ij})$ avec $d_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij}$

d'où $D = \lambda A + M$.

ainsi $\psi(\lambda u + v) = \lambda A + M = \lambda \psi(u) + \psi(v)$.

*/ ψ est injective :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $u \in Ker \psi \Leftrightarrow \psi(u) = 0 \Leftrightarrow mat(u, B, B') = 0$

d'où $\forall j$, $\forall$ $1 \leq j \leq n$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} 0 . f_i = 0$

u s'annule sur une base de $E \Rightarrow u = 0 . \Rightarrow Ker \psi = \{0\}$

et ψ est injective.

*/ Ψ est surjective:

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$.

considérons l'appl linéaire $u : E \longrightarrow F$ donnée par:

$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$.

on a alors $\Psi(u) = mat(u, B, B') = A$ et Ψ est surjective.

d'où Ψ est un isom d'e.v.

COR: $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E . \dim F$.

Dém: d'après le Théo précédent, $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ sont isomorphes d'où $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{p,n}(K)$

$= p.n = \dim F . \dim E$.

Théo:

soit E, F, G des K-e.v de dim finies.

B, B' et B'' sont des bases de E, F et G respectivement.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$ et

$mat(v\circ u, B, B'') = mat(v, B', B'') . mat(u, B, B')$.

i.e: Soit $A = mat(u, B, B')$

$M = mat(v, B', B'')$

Alors $mat(v \circ u, B, B'') = MA$.

Prop: Ecriture matricielle de l'image d'un vecteur:

Soit B une base de E, B' une base de F.

$u : E \longrightarrow F$ une appl linéaire.

Alors: $\forall x \in E$, $\underset{B'}{mat}(u(x)) = mat(u, B, B') . \underset{B}{mat}\, x$.

i.e: pour $x \in E$ soit $X = \underset{B}{mat}\, x$, $A = mat(u, B, B')$

$Y = \underset{B'}{mat}(u(x))$ Alors $\boxed{Y = AX}$

Dém : Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$, $B'=(f_1,\dots,f_p)$.

Soit $A=(a_{ij}) = mat(u,B,B')$

i.e : $\forall j,\ 1\leq j\leq n,\ u(e_j)=\sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$.

Soit $x\in E$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $X=\underset{B}{mat}\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{p} a_{ki} f_k.$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ki}\right) f_k.$$

$$= \sum_{k=1}^{p} y_k f_k \text{ avec } y_k=\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ki},\ \forall k$$

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \underset{B'}{mat}\,(u(x)) = A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX.$$

Exp : Soit u L'appl linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de leurs bases canoniques B et B', donnée par sa matrice :

$$A=mat(u,B,B') = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer L'expression de $u(x,y,z)$ pour $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Soit $a=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $X=\underset{B}{mat}\,(a) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$Y=\underset{B'}{mat}\,(u(a)) = A\cdot X = \begin{pmatrix} \boxed{-2 \quad 1 \quad 3} \\ 0 \quad -1 \quad 4 \end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2x+y+3z \\ -y+4z \end{pmatrix}$$

d'où $u(a)=u(x,y,z) = (-2x+y+3z,\ -y+4z)$.

2) Soit $V:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
$(x,y) \longmapsto (-8x+y,\ y,\ x-y,\ 2x)$

a) Ecrire $mat(V,B',B'')$ où B'' est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

b) Ecrire $mat(V\circ u,B,B'')$.

c) Déduire l'expression de $v \circ u(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

on a:

a) $B' = (f_1, f_2)$; La Bc de $\mathbb{R}^2$.

$B'' = (w_1, w_2, w_3, w_4)$: La Bc de $\mathbb{R}^4$.

$v(f_1) = v(1,0) = (-8,0,1,2)$

$v(f_2) = v(0,1) = (1,1,-1,0)$.

d'où $\operatorname{mat}(v, B', B'') = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = M$

b) $\operatorname{mat}(v \circ u, B, B'') = \operatorname{mat}(v, B', B'') . \operatorname{mat}(u, B, B') = MA$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{16} & -9 & -20 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = D$$

c) soit $D = \operatorname{mat}(v \circ u, B, B'')$. $v \circ u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

soit $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $X = \operatorname{mat}_{Bc}(a) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$Y = \operatorname{mat}_{B''}(v \circ u(a)) = D.X$

$$= \begin{pmatrix} 16 & -9 & -20 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16x - 9y - 20z \\ -y + 4z \\ -2x + 2y - z \\ -4x + 2y + 6z \end{pmatrix}$$

d'où $v \circ u(x,y,z) = (16x - 9y - 20z, -y + 4z, -2x + 2y - z, -4x + 2y + 6z)$

Prop:

Soit B une base de E et B' une base de F.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $A = mat(u, B, B')$.

<u>Alors</u> u est inversible $\Longleftrightarrow$ A est inversible.

Dans ce cas $mat(u^{-1}, B', B) = A^{-1}$.

Dém:

"$\Longrightarrow$" u est inversible alors u^{-1} existe, $u^{-1} : F \to E$ Linéaire.

Soit $M = mat(u^{-1}, B', B)$.

$$A \cdot M = mat(u, B, B') \cdot mat(u^{-1}, B', B) = mat(u \circ u^{-1}, B', B')$$
$$= mat(id_F, B', B') = I_n.$$

$$M \cdot A = mat(u^{-1}, B', B) \cdot mat(u, B, B') = mat(u^{-1} \circ u, B, B)$$
$$= mat(id_E, B, B) = I_n.$$

d'où $AM = MA = I_n$

ainsi A est inversible et $A^{-1} = M = mat(u^{-1}, B', B)$.

"$\Longleftarrow$" on a A est inversible alors $\exists M \in M_n(K)$ tq

$AM = MA = I_n$.

Soit $V \in \mathcal{L}(F,E)$ tq $mat(V, B', B) = M$.

alors $mat(V \circ u, B, B) = mat(V, B', B) \cdot mat(u, B, B')$
$$= M \cdot A = I_n.$$

et $mat(u \circ V, B', B') = mat(u, B, B') \cdot mat(V, B', B)$
$$= A \cdot M = I_n$$

ainsi $u \circ V = id_F$ et $V \circ u = id_E$.

d'où u est inversible et $u^{-1} = V$.

et $mat(u^{-1}, B', B) = mat(V, B', B) = M = A^{-1}$.

Déf : Matrice d'un endomorphisme :

Soit u un endom de E, $u : E \longrightarrow E$ Linéaire.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

On appelle matrice de l'endom u relativement à la base B, notée $\underset{B}{\text{mat}}(u)$ ou $\text{mat}(u, B)$, la matrice $\text{mat}(u, B, B)$

$$\underset{B}{\text{mat}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \in M_n(K).$$

$\underset{B}{\text{mat}}(u)$ est une matrice carrée d'ordre $n = \dim E$.

Exp : Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto u(x, y) = (5x - 6y, 7x + 8y)$.

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

$B_c = (e_1, e_2)$ La base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\underset{B_c}{\text{mat}}(u) = \begin{array}{cc} u(e_1) & u(e_2) \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -6 \\ 8 \end{matrix}} \end{array} \right) \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

$u(e_1) = u(1, 0) = (5, 7)$

$u(e_2) = u(0, 1) = (-6, 8)$

$$\underset{B_c}{\text{mat}}\, u = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Théo: $\dim E = n \geq 1$.

Soit B une base de E.

Alors l'appl $\Psi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow M_n(K)$ est un isomorphisme d'e.V.

$$u \longmapsto \underset{B}{\mathrm{mat}}(u)$$

En particulier pour toute matrice $A \in M_n(K)$, il existe un unique endom $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\underset{B}{\mathrm{mat}}(u) = A$.

On dit que u est l'endom de E représenté par A dans la base B.

COR: Prenons $E = K^n$ muni de sa Base canonique Bc.

Alors l'appl $\Psi : \mathcal{L}(K^n) \longrightarrow M_n(K)$ est un isom d'e.V.

$$u \longmapsto \underset{BC}{\mathrm{mat}}(u)$$

En particulier, pour toute matrice $A \in M_n(K)$, il existe un unique endom $u \in \mathcal{L}(K^n)$ tq $\mathrm{mat}(u, Bc) = A$.

on dit que u est l'endom de K^n canoniquement associé à A.

Exp: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'endom $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.

Soit $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $X = \underset{BC}{\mathrm{mat}}(a) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$Y = \underset{BC}{\mathrm{mat}}(u(a)) = A \cdot X = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 0} \\ 1 \quad 4 \quad 3 \\ -1 \quad 5 \quad 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 4y + 3z \\ -x + 5y + 2z \end{pmatrix}$$

ainsi : $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto u(x, y, z) = (x + 2y,\ x + 4y + 3z,\ -x + 5y + 2z)$$

Prop : Soit B une base de E.

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \underset{B}{\text{mat}}(u)$.

Alors u est inversible $\Longleftrightarrow$ A est inversible

et $\underset{B}{\text{mat}}(u^{-1}) = A^{-1}$.

(ii) Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $A = \underset{B}{\text{mat}}\, u$, $M = \underset{B}{\text{mat}}\, v$.

Alors $\underset{B}{\text{mat}}(u \circ v) = AM = \underset{B}{\text{mat}}\, u \cdot \underset{B}{\text{mat}}\, v$.

Exp : $u : K_1[X] \longrightarrow K_1[X]$

$P \longmapsto u(P) = P(X+1)$.

$\underset{BC}{\text{mat}}(u) = A = ?$

$BC = (1, X)$ La base canonique de $K_1[X]$.

$u(1) = 1(X+1) = 1$.

$u(X) = X(X+1) = X + 1$.

$$\text{d'où } A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(1) & u(X) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \end{array}$$

ainsi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

on a déjà montré que A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

on conclut que u est inversible et

$\underset{BC}{\text{mat}}(u^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV Changement de bases :

1) Matrice de changement de bases :

E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Déf : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B_1 = (V_1, \dots, V_n)$ deux base de E. On appelle matrice de passage de la base B à la base B_1, notée $Pass(B, B_1)$, la matrice de la famille des vecteurs $B_1 = (V_1, \dots, V_n)$ relativement à la base B.

i.e : $Pass(B, B_1) = \underset{B}{mat}(V_1, \dots, V_n) = $
$$\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & & \boxed{} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

$pass(B, B_1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriéts : Soit B, B_1, B_2 des bases de E. On a :

i°) $Pass(B, B_1) = mat(Id_E, B_1, B)$.

ii°) $Pass(B, B_2) = Pass(B, B_1) . Pass(B_1, B_2)$.

iii) $Pass(B, B_1)$ est inversible et $(pass(B, B_1))^{-1} = pass(B_1, B)$.

Dém :

i) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$, $B_1 = (V_1, \dots, V_n)$.

$$Id_E : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto Id_E(x) = x \end{array}$$

$$mat(Id_E, B_1, B) = \begin{array}{ccc} Id(V_1) & \cdots & Id(V_n) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{} & & \boxed{} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

$$= \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & & \boxed{} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} = pass(B, B_1).$$

ii) $\operatorname{pass}(B, B_1) \cdot \operatorname{pass}(B_1, B_2) = \operatorname{mat}(Id_E, B_1, B) \cdot \operatorname{mat}(Id_E, B_2, B_1)$

$= \operatorname{mat}(Id_E \circ Id_E, B_2, B)$

$= \operatorname{pass}(B, B_2)$.

iii) d'après (ii) on a : $\operatorname{pass}(B, B_1) \cdot \operatorname{pass}(B_1, B) = \operatorname{pass}(B, B) = I_n$

d'où le résultat.

Prop : soit $B = (e_1, -, e_n)$ une base de E. Soit $(V_1, -, V_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$(V_1, -, V_n)$ est libre $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{mat}_B(V_1, \dots, V_n)$ est inversible.

Dém :

"$\Longrightarrow$" Suppose la famille $B_1 = (V_1, -, V_n)$ est libre alors B_1 est une base de E. d'où $\operatorname{mat}_B(V_1, -, V_n) = \operatorname{pass}(B, B_1)$ qui est inversible.

"$\Longleftarrow$" Suppose $A = \operatorname{mat}_B(V_1, -, V_n)$ est inversible alors $A \in GL_n(K)$

d'où A représente La matrice d'un autom u de E dans la base B.

Comme l'image d'une base de E par un autom est une base de E

alors $(V_1, -, V_n)$ est une base de E ainsi $(V_1, -, V_n)$ est libre.

COR : Soit $B = (e_1, -, e_n)$ une base de E.

soit $A \in GL_n(K)$. Alors A représente la matrice de passage de la base B à une unique base B' de E.

i.e : $\exists !$ base B' de E tq $A = \operatorname{pass}(B, B')$.

Dém : Les vecteurs colonnes de A sont les coordonnées d'une famille de vecteurs $B' = (V_1, -, V_n)$ dans la base B.

$A = \operatorname{mat}_B(V_1, -, V_n) \in GL_n(K) \Longleftrightarrow (V_1, -, V_n)$ est libre ds E

$\Longleftrightarrow B' = (V_1, -, V_n)$ est une base de E et $A = \operatorname{pass}(B, B')$.

2) Formules de changement de bases

Soit B et B_1 deux bases de E.

Prop : Soit $x \in E$, $X = \underset{B}{\text{mat}}(x)$, $X' = \underset{B_1}{\text{mat}}(x)$

Alors $\boxed{X = P X' \text{ avec } P = \text{pass}(B, B_1)}$

Dém : on a $P = \text{pass}(B, B_1) = \text{mat}(Id_E, B_1, B)$.

d'où $P X' = \text{mat}(Id_E, B_1, B) \cdot \underset{B_1}{\text{mat}}(x) = \underset{B}{\text{mat}}(Id(x)) = X$.

Théo : Formule de changement de bases pour une appl linéaire :

Soit E et F des K.e.v de dimensions finies.

Soit B et B_1 deux bases de E, $\boxed{P = \text{pass}(B, B_1)}$

Soit B' et B'_1 deux bases de E, $\boxed{Q = \text{pass}(B', B'_1)}$.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une appl linéaire.

Alors : $\boxed{\text{mat}(f, B_1, B'_1) = Q^{-1} \cdot \text{mat}(f, B, B') \cdot P}$

Dém : Notons $A = \text{mat}(f, B, B')$; $M = \text{mat}(f, B_1, B'_1)$.

on a : $Q^{-1} \cdot A \cdot P = \text{pass}(B'_1, B') \cdot \text{mat}(f, B, B') \cdot \text{pass}(B, B_1)$

$= \text{mat}(Id_F, B', B'_1) \cdot \text{mat}(f, B, B') \cdot \text{mat}(Id_E, B_1, B)$

$= \text{mat}(Id_F, B', B'_1) \cdot \text{mat}(f \circ Id_E, B_1, B')$.

$= \text{mat}(Id_F \circ f \circ Id_E, B_1, B'_1) = \text{mat}(f, B_1, B'_1) = M$.

Déf : Deux matrices A et M de $M_{p,n}(K)$ sont dits équivalents s'il existe des matrices inversibles $P \in GL_n(K)$, $Q \in GL_p(K)$ telsque $M = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Théo : Formule de changement de base pour un endomorphisme

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endom de E.
Soit B et B_1 deux bases de E, $P = pass(B, B_1)$.
Alors $\boxed{mat(f, B_1) = P^{-1} . mat(f, B) . P.}$

Dém : Analogue à la dém du Théo précédent.

Déf : Deux matrices carrées $A, M \in M_n(K)$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ telque $M = P^{-1} A . P$

Exp : soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, x - y)$.
Soit $V_1 = (1, -1)$, $V_2 = (0, 2)$.
1) Vérifier que $B_1 = (V_1, V_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. $B_c = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2) Ecrire $P = pass(B_c, B_1)$ et $mat(f, B_1)$.
3) Donner $mat(f, B_c)$

Corrigé :
1) V_1 et V_2 ne sont pas colinéaires d'où (V_1, V_2) est libre.
card$(V_1, V_2) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, cl : $B_1 = (V_1, V_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) $P = pass(B_c, B_1) = \begin{array}{cc|c} V_1 & V_2 & \\ \multicolumn{2}{c|}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} \end{array}$

d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) $mat(f, B_c) = \begin{array}{cc|c} f(e_1) & f(e_2) & \\ \multicolumn{2}{c|}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} \end{array}$

$f(e_1) = f(1, 0) = (2, 1)$ cl : $A = mat(f, B_c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$f(e_2) = f(0, 1) = (1, -1)$

pour avoir $M = mat(f, B_1)$, on applique la formule de changement de bases.

on a : $M = P^{-1} . A . P$.

$$P = pass(B_c, B_1) \Longrightarrow P^{-1} = pass(B_1, B_c) = \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \end{array} \end{array}$$

on a $\begin{cases} V_1 = (1, -1) = e_1 - e_2 \\ V_2 = (0, 2) = 2e_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} V_1 = e_1 - e_2 \\ V_2 = 2e_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = V_1 + e_2 = V_1 + \frac{1}{2} V_2 . \\ e_2 = \frac{1}{2} V_2 \end{cases}$$

ainsi $M = P^{-1} . A . P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

cl : $M = mat(f, B_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

V Rang d'une matrice :

Déf : soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Notons $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ les vecteurs colonnes de A. $\forall j, 1 \leq j \leq p$: C_j est un vect de K^n.
on appelle rang de A, noté $rg(A)$, le rang de la famille $(C_1, \dots, C_p)$ dans K^n. $rg(A) = rg(C_1, C_2, \dots, C_p)$ = le nbre maximal de colonnes linéairement indépendants que l'on peut extraire de la matrice A.

$rg(A) \leq p$, $rg(A) \leq n$.

Prop : Soit $f : E \to F$ une appl linéaire tq $mat(f, B, B') = A$ où B et B' sont des bases de E et F respectivement.

Alors : $rg\, f = rg(A)$.

Prop : une matrice et sa transposée ont même rang.
c-à-d : $rg\, A = rg({}^tA)$.

Théo : Deux matrics sont équivalents $\Leftrightarrow$ elles ont $\hat{m}$ rang.
en particulier : $rg(Q^{-1} A P) = rg(A)$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$
$P \in \mathcal{M}_n(K)$ inversible et $Q \in GL_p(K)$ inversible.

opérations conservant le rang : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.
Le rang de A ne change pas si :

i) on échange deux lignes $(L_i \leftrightarrow L_j)$

ii) on multiplie une ligne par un scalaire non nul
$(L_i \leftarrow \lambda L_i, \ \lambda \neq 0)$

iii) on ajoute une ligne à une autre : $(L_i \leftarrow L_i + L_j)$

iv) on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres

v) on remplace une ligne par une combinaison linéaire de tts les lignes à condition que le coeff de la ligne elle $\hat{m}$ soit non nul.

Rque : les opérations élémentaires précédents peuvent aussi être effectuées sur les colonnes.

Rque : Pour calculer le rang d'une matrice, L'idée c'est d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A jusqu'à obtenir une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & M \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \lambda_r & \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$ avec $\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_r \neq 0$

Dans ce cas $rg(A) = r$.

Exp : calculer Le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + L_1 \end{aligned} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + L_2 \end{aligned} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

finalement on échange La dernière colonne avec la troisième et on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cl $rg(A) = 3$.

Rque : La méthode précédente s'appelle méthode des pivots de Gauss.

Calcul de l'inverse d'une matrice inversible

Soit $A \in M_n(K)$ une matrice inversible.

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A jusqu'à obtenir la matrice unité I_n.

et En parallèle ces mêmes transformations on les effectue sur la matrice I_n pour obtenir A^{-1} :

EXP :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow 5L_1 + L_3$

$L_2 \leftarrow 5L_1 + 2L_3$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -12 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -6 & 12 & -3 \\ -12 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{15} L_1$

$L_2 \leftarrow -\frac{1}{15} L_2$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{5} L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$