Espaces Vectoriels :

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Définitions - Propriétés :

Def : Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée

$+ : E \times E \longrightarrow E$
$(u, v) \longmapsto u + v$

et $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$
$(\alpha, u) \longmapsto \alpha u$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou E est un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel si on a :

1) $\forall u, v \in E$, $u + v = v + u$
2) $\forall u, v, w \in E$, $u + (v + w) = (u + v) + w$
3) Il existe un élément de E noté 0_E appelé élément neutre tque : $x + 0_E = x$
4) $\forall x \in E$, $\exists x' \in E$; $x + x' = 0_E$ (x' appelé élément symétrique de x noté $-x$)
5) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$
6) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) x$
7) $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
8) $\forall x \in E$ $1 \cdot x = x$

Rq : Les éléments de E sont appelés vecteurs.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Ex :

1) $E = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

Soit $u \in E \Rightarrow u = (x_1, y_1)$
$v \in E \quad v = (x_2, y_2)$

$(u + v) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
$= (x_1 x_2, y_1 y_2)$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u = (x_1, y_1) \in E$
$\alpha u = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

$u = (x_1, y_1)$; $v = (x_2, y_2)$ et $w = (x_3, y_3)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$
$= v + u$

2) $u + (v + w) =$
$(x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$
$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$
$= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$
$= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)$
$= ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) + (x_3, y_3)$
$= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)$
$= (u + v) + w$

3)

$u = (x_1, y_1)$

$\exists\ ?\ 0_E\ (a, b) \ / \ u + 0_E = u$

$(x_1, y_1) + (a, b) = (x_1, y_1)$

$(x_1 + a, y_1 + b) = (x_1, y_1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a = x_1 \\ y_1 + b = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$

$\Rightarrow 0_E = (0, 0)$

Soit $0_E = (0, 0)$ on a :

$u + 0_E = (x_1, y_1) + (0, 0)$

$= (x_1 + 0, y_1 + 0)$

$= (x_1, y_1)$

$= u.$

4) $u + u' = 0_E$

$(x_1, y_1) + (a, b) = (0, 0)$

$(x_1 + a, y_1 + b) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a = 0 \\ y_1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ y_1 = -b \end{cases}$

$\Rightarrow u' = (-x_1, -y_1)$

5) $(\alpha + \beta) u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1)$

$= ((\alpha + \beta) x_1, (\alpha + \beta) y_1)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)$

$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)$

$= \cancel{(\alpha x_1 + \alpha y_1) +}$

$= \alpha (x_1, y_1) + \beta (x_1, y_1)$

$= \alpha u + \beta u$

6) $\alpha (\beta u) = \alpha (\beta (x_1, y_1))$

$= \alpha (\beta x_1, \beta y_1)$

$= (\alpha \beta x_1, \alpha \beta y_1)$

$= \alpha \beta (x_1, y_1)$

$= (\alpha \beta)\ u.$

7) $\alpha (u + v) = \alpha ((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$

$= \alpha (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (\alpha (x_1 + x_2), \alpha (y_1 + y_2))$

$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2)$

$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)$

$= \alpha (x_1, y_1) + \alpha (x_2, y_2)$

$= \alpha u + \alpha v.$

8) $\forall\ 1 . u = 1 (x_1, y_1)$

$= (1 . x_1, 1 y_1)$

$= (x_1, y_1) = u.$

Conclusion :

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement :

* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) $E = \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right\}$

Alors E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec les lois suivantes

$\forall\ f, g \in E, \ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E,$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

3) $E = \mathbb{R}[x]$

$E = \mathbb{C}[x]$

Propriétés:

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Alors on a:

$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

1) $0 \cdot u = 0_E$

2) $(-1) \cdot u = -u$

3) $\alpha \cdot 0_E = 0_E$

4) $(-\alpha) u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$

5) $(\alpha - \beta) u = \alpha u - \beta u$.

6) $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

7) $\alpha u = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $u = 0_E$

II) Sous-espaces Vectoriels:

Dans toute la suite $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition:

Une partie F de E est dite un sous espace vectoriel de E si seulement si on a:

1) $F \neq \emptyset$

2) $\alpha u \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F$

3) $u + v \in F, \forall u, v \in F$.

(2) et (3) $\Leftrightarrow$ $\alpha u + v \in F$,

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$\forall u, v \in F$

Remarque:

1) tout sous espace vectoriel F de E contient le vecteur nul 0_E

Ex:

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$

1) $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$

car $0 + 0 = 0$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in F$

$u = (x_1, y_1)$; $x_1 + y_1 = 0$

$\alpha u = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

On a: $\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1)$

$= \alpha \cdot 0 = 0$

$(\alpha x_1 ; \alpha y_1) \in F$

$\Leftrightarrow \alpha(x_1, y_1) \in F$

$\Leftrightarrow$ ~~$\alpha \times u$~~ $\alpha \cdot u \in F$

3) Soit $u, v \in F$

$u = (x_1, y_1)$; $x_1 + y_1 = 0$

$v = (x_2, y_2)$; $x_2 + y_2 = 0$

$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

On a:

$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \underbrace{x_1 + y_1}_{0} + \underbrace{x_2 + y_2}_{0}$

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow u + v \in F$

cc: F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Remarque: ① Tout sous espace vectoriel F de E contient l'élément neutre 0_E.

② Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $(F, +, \cdot)$ est lui même est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Ainsi: pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition - proposition:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $V_1, V_2, \dots, V_n$ des vecteurs de E.

On appelle combinaison linéaire de $V_1, \dots, V_n$ tout vecteur u de E qui s'écrit $u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k V_k.$$

On note $\text{Vect}(V_1, V_2, \dots V_n)$ l'ensemble formé par toutes les combinaisons linéaires finies des vecteurs $V_1, \dots, V_n$

$\text{vect}(V_1, V_2 \dots V_n) = \{u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n\}$

Alors $\text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est un sous espace vectoriel de E appelé le sous-espace vectoriel de E engendré par $V_1, \dots, V_n$

Remarque: Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de l'écrire sous forme d'un vect.

Proposition - Définition:

Soient F et G 2 sous-espaces vectoriels de E. On note

$$F + G = \{u + v, \ u \in F \text{ et } v \in G\}$$

Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et G.

$F + G$ contient F et G.

Définition: On dit que les sous-espace vectoriels F et G sont une somme directe ou que la somme $F+G$ est directe si $F \cap G = \{0_E\}$

On note dans ce cas cette somme que $F \oplus G$

Ex: $E = \mathbb{R}^2$

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x - y = 0\}$

1) Montrer que F et G sont 2 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer $F \cap G$

3) Déduire.

Solution:

1) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x = -y\}$

$= \{y(-1, 1), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(-1, 1)\}$

$\Rightarrow$ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$

$= \{(x,x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(1,1)\}$

$\Rightarrow$ G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) $F \cap G = \{z \in F \text{ et } z \in G\}$

$= \{z = (x,y), x+y=0 \text{ et } x-y=0\}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$

$\Rightarrow F \cap G = \{0_E\}$

3) F et G sont une somme directe.

Définition : 2 sous-espace vectoriels F et G de E sont dites supplémentaires dans E si :

1) $F \cap G = \{0_E\}$

2) $F + G = E$

Dans ce cas on écrit $F \oplus G = E$

Exemple : $E = \mathbb{C}$

$F = \mathbb{R}$

$G = i\mathbb{R}$

1) $F \cap G = \{0\}$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = \underset{\in F}{a} + \underset{\in G}{ib}$

$\Rightarrow E \subset G + F$

D'autre $F + G \subset E$

$\Rightarrow F \oplus G = E$

III - Famille libre - Famille liée

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$V_1, V_2 \cdots V_n$ des vecteurs de E.

1) On dit que la famille $(V_1, V_2 \cdots V_n)$ est libre ou que $V_1, \ldots, V_n$ sont linéairement indépendantes si :

Pour tous scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n = 0_E$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$

2) On dit que la famille $(V_1, \cdots, V_n)$ est liée s'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tq que

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n = 0_E$

Ex : $E = \mathbb{R}^2$

$H = \{(1,0), (0,1)\}$

Montrer que H est libre :

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tq que :

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\Leftrightarrow \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ H est libre

2) $F = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$

Montrer que F est liée.

En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tq que : $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = (0,0)$

Il est dite aussi un monôme

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ F n'est pas libre donc elle est liée.

Définition :

Soient $V_1, \dots, V_n$ des vecteurs de E

on dit que la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est génératrice dans E si pour tout $u \in E$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tque

$u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$ ~~$= 0_E$.~~

~~Exemple : $E = \mathbb{R}^2$~~

~~1 $F = \{(1,0), (0,1)\}$~~

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$

$F = \{\underbrace{(1,0)}_{V_1}, \underbrace{(0,1)}_{V_2}\}$

Soit $u = (x,y) \in E$. on a :

$u = (x,y) = (x,0) + (0,y)$

$= x(1,0) + y(0,1)$

$\Rightarrow u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$

$\Rightarrow$ F est une famille génératrice dans E.

Définition :

Soit $B = \{V_1, V_2, \dots, V_n)$ une famille de vecteurs de E.

on dit que B est une base si B est une famille libre et génératrice :

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$

$F = \{(1,0), (0,1)\}$

D'après les exemples précédents on a montré que F est une famille libre & génératrice donc F est une base de $\mathbb{R}^2$. Cette base appelée base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement,

$F = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\vdots$

$F = \{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0) \dots (0,0,0,\dots,1)\}$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Ex :

$E = \mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$F = \{1, X, X^2\}$ est une base.

F est libre car : soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$;

$\alpha_1 1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2 = 0.1 + 0.X + 0.X^2$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

F est génératrice. En effet,

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$

$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

$= a_0 \cdot 1 + a_1 X + a_2 X^2$

$= a_0 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3$.

Ex :

$E = \mathbb{R}^2$

$F = \{(0,1),(0,2)\}$ 2 bases de $\mathbb{R}^2$

$F = \{(1,0),(0,1)\}$

Définition: Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
On dit que E est de dimensions finies si E possède une base de cardinal fini, c'est à dire le nombres de vecteurs qui forment la base est finie

Ex: $E = \mathbb{R}^2$ est de dimension finie.

Théorème: Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors toutes les bases de E ont le même cardinal.
On le note $\dim E$.

Ex: ① $E = \mathbb{R}^2$

$B = \{(1,0),(0,1)\}$

$\dim E = \#B = 2$.

② $E = \mathbb{R}_3[x]$

$B = \{1, X, X^2\}$, $\dim E = \#B = 3$

Proposition: Si $\dim E = n$

Alors:

1) Toute famille libre contient au plus n vecteurs
2) Toute famille génératrice contient au moins n vecteurs
3) Toute famille libre et contient exactement n vecteurs est une base.
4) Toute famille génératrice qui contient exactement n vecteurs est une base.

Théorème: Soit E un espace vectoriel avec $\dim E = n$ alors:

1) Si F est un sous-espace vectoriel de E alors: $\dim F \leq \dim E$.
En particulier, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.
2) Si F et G 2 sous-espaces vectoriel alors:

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

$F \cap G = \{0_E\}$

$\dim F \cap G = 0$.

$F \oplus G \iff \dim F \cap G = 0$

Remarque: Soit E un espace vectoriel ~~Si F et G sont~~ & F et G 2 sous espaces vect de E de dimension n.

1) $F \cap G = \{0_E\} \iff \dim F \cap G = 0$
2) $F \oplus G = E \iff \dim F \cap G = 0$ et $\dim F + G = \dim E$.

Chapitre 3 : Applications linéaires :

I – Définition et propriétés :

Soient E et F un sous espace vectoriels sur $\mathbb{K}$

Définition : On appelle application linéaire, une application $f : E \longrightarrow F$ tque

1) $\forall u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$

2) $\forall u \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto x+y$

f est linéaire. En effet,

1) Soit $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

$v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ &= f(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= x_1+x_2+y_1+y_2 \\ &= x_1+y_1+x_2+y_2 \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u = (x_1, y_1)$

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(x_1, y_1)) \\ &= f(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ &= \alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1+y_1) \\ &= \alpha f(x_1, y_1) \\ &= \alpha f(u) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f est bien une application linéaire.

Remarque :

Si f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$

Si $f(0_E) \neq 0_F \Rightarrow$ f n'est pas linéaire

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto x+y+1$

On a : $f(0_E) = 0+0+1 \neq 0$

$\Rightarrow$ f n'est pas linéaire.

Ex2 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

On a $f(0) = 0^2 = 0$

$f(\alpha u) = \cancel{\alpha f(u)} = (\alpha u)^2 = \alpha^2 u^2$

$\alpha f(u)$ alors que

αu^2

$\Rightarrow$ f n'est pas linéaire.

démonstration : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

$0_F \neq f(0_E) = f(0_E + 0_E)$

$= f(0_E) + f(0_E)$

$f(0 u) = 0 f(u)$

$f(0) = 0$

morphisme : app linéaire

Remarque :

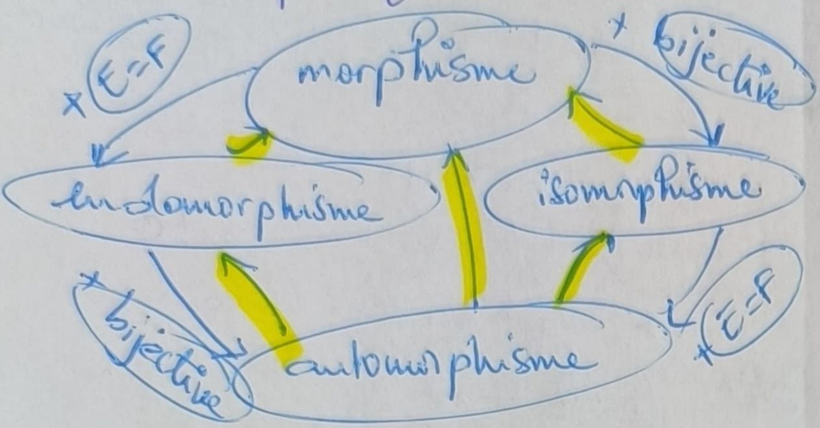
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1) f est dite aussi un morphisme

2) Si de plus, E=F, on dit que f est un endomorphisme.

3) Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.

4) Si E=F et f est bijective on dit que f est automorphisme



Notation:

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté par $\mathcal{L}(E,F)$ → II- Image & noyau:

Proposition: Soit $f: E \to F$ une application linéaire, alors:

1) L'image d'un sous-espace vectoriel de E par f est un sous espace ~~II- Image & noyau~~: vectoriel de F

2) L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par f est un sous-espace vectoriel de E.

~~II- Image & noyau:~~

1) Définition:

1) On appelle l'image de f et on note $Im(f)$ le sous-espace vectoriel de F défini par:

$$Im(f) = f(E) = \{y \in F, \exists x \in E \; y = f(x)\}$$

2) On appelle noyau de f et on note $Ker(f)$ le sous-espace vectoriel de E défini par:

$$Ker(f) = f^{-1}(\{0_F\})$$