Systèmes linéaires

Exemples préliminaires

Exemple 1.1

Fixons un réel a. Considérons le système de trois équations à deux inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} -x + \ \ y = 1 & E_1 \\ 2x - \ \ y = 2 & E_2 \\ 3x + 2y = a & E_3 \end{cases}$$

Résolution. On essaie de faire « disparaître » progressivement les inconnues à l'aide de **combinaisons linéaires** sur les équations :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl|l} -x + & y = 1 & E_1 \\ & y = 4 & E_2' = E_2 + 2E_1 \\ & 5y = a + 3 & E_3' = E_3 + 3E_1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r|l} -x + y = 1 & E_1 \\ y = 4 & E_2' \\ 0 = a - 17 & E_3'' = E_3' - 5E_2' \end{array} \right.$$

On obtient un système composé d'un sous-système **triangulaire** de deux équations à deux inconnues (S'') : $\begin{cases} -x + y = 1 \\ \quad\quad y = 4 \end{cases}$ et d'une équation de « **compatibilité** » sans inconnue : $a - 17 = 0$.

Cette dernière indique si le système (S) admet des solutions ou non :

- si $a \neq 17$, il n'y a pas de solution, on dit que le système (S) est **incompatible** ;
- si $a = 17$, l'équation de compatibilité s'écrit $0 = 0$ et devient redondante. Les systèmes (S) et (S'') sont alors équivalents.
  Le sous-système (S'') étant **triangulaire**, il est facile de le résoudre en partant de l'équation du bas puis en « remontant » les équations : E_2' donne $y = 4$, puis en reportant dans E_1, on récupère $x = y - 1 = 3$.
  Le système (S) admet une **unique** solution dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y) = (3, 4)$.

Interprétation géométrique

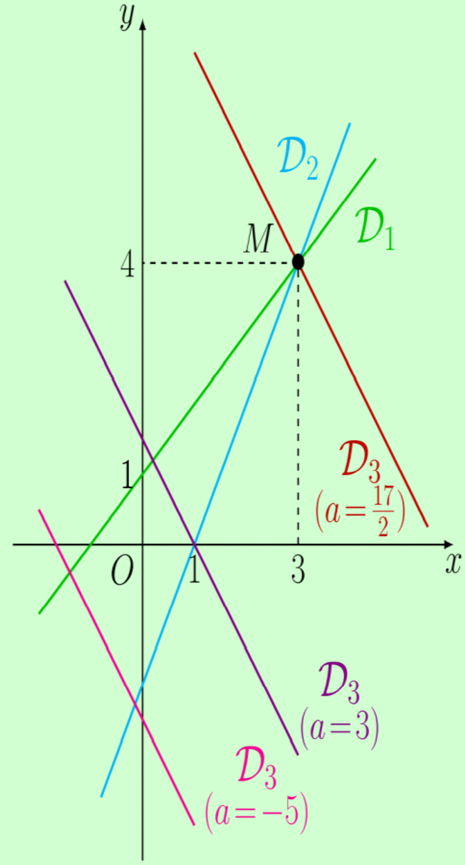
Chaque équation du système (S) représente une droite dans un plan rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Notons

- $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $-x+y=1$
- $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $2x-y=2$
- $\mathcal{D}_3$ la droite d'équation $3x+2y=a$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection de ces trois droites.

La résolution précédente fournit donc :

- si $a\neq 17$, les droites $\mathcal{D}_1$,$\mathcal{D}_2$,$\mathcal{D}_3$ n'admettent pas de point d'intersection : $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2\cap\mathcal{D}_3=\varnothing$;
- si $a=17$, les droites $\mathcal{D}_1$,$\mathcal{D}_2$,$\mathcal{D}_3$ admettent un point d'intersection, le point $M(3,4)$, elles sont **concourantes** : $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2\cap\mathcal{D}_3=\{M\}$.



Exemple 1.2

Considérons le système de deux équations à trois inconnues suivant :

$$(S):\quad\begin{cases}-x+y+\ \ z=1 & E_1\\ \ 2x-y+3z=2 & E_2\end{cases}$$

Résolution

On essaie de faire « disparaître » progressivement les inconnues à l'aide de **combinaisons linéaires** sur les équations :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{r|l}-x+y+\ \ z=1 & E_1\\ y+5z=4 & E_2'=E_2+2E_1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r|l}-x+y=1-\ \ z & E_1\\ y=4-5z & E_2'\end{array}\right.$$

On obtient un système **triangulaire** (S') équivalent à (S) composé de deux équations à deux inconnues dites « **principales** » (x, y) et une inconnue dite « **auxiliaire** » (z).

Le sous-système (S') étant **triangulaire**, il est facile de le résoudre en partant de l'équation du bas puis en « remontant » les équations :

- E_2' donne $y = 4 - 5z$,
- puis en reportant dans E_1, on récupère $x = y + z - 1 = 3 - 4z$.

Le système (S) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) = (3 - 4z, 4 - 5z, z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Interprétation géométrique

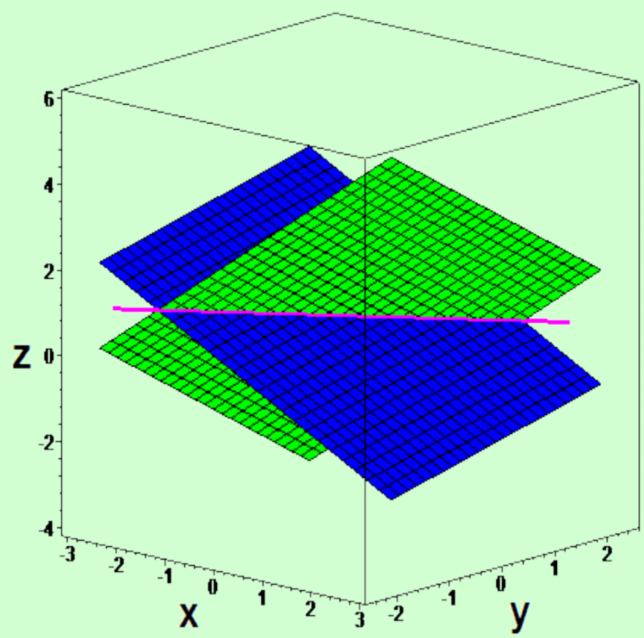
Chaque équation du système (S) représente un plan dans l'espace rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Notons

- $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $-x + y + z = 1$
- $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $2x - y + 3z = 2$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection de ces deux plans.

La résolution précédente montre que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ admettent une infinité de points d'intersection, les points $M(3 - 4z, 4 - 5z, z)$, $z \in \mathbb{R}$, il s'agit en fait d'une droite $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D}.$$



Exemple 1.3

Fixons un réel a. Considérons le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} -x + \ \ y + \ \ z = 1 & E_1 \\ 2x - \ \ y + 3z = 2 & E_2 \\ -x + 2y + 6z = a & E_3 \end{cases}$$

Résolution. On essaie de faire « disparaître » progressivement les inconnues à l'aide de **combinaisons linéaires** sur les équations :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl|l} -x + y + & z = 1 & E_1 \\ y + 5z & = 4 & E_2' = E_2 + 2E_1 \\ y + 5z & = a - 1 & E_3' = E_2 - E_1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl|l} -x + y + & z = 1 & E_1 \\ y + 5z & = 4 & E_2' \\ 0 & = a - 5 & E_3'' = E_3' - 5E_2' \end{array} \right.$$

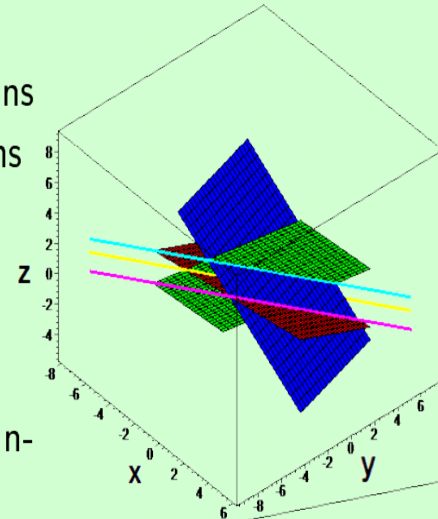
On obtient un système composé d'un sous-système **triangulaire** de deux équations à deux inconnues **principales** (x, y) et une **auxiliaire** (z) $(S'') : \begin{cases} -x + y + \ \ z = 1 \\ \qquad\ \ y + 5z = 4 \end{cases}$ et d'une équation de **compatibilité** sans inconnue $a - 5 = 0$.

Cette dernière indique si le système (S) admet des solutions ou non :

- si $a \neq 5$, il n'y a pas de solution, le système (S) est **incompatible** ;
- si $a = 5$, l'équation de compatibilité s'écrit $0 = 0$ et devient redondante. Les systèmes (S) et (S'') sont alors équivalents.
  Le sous-système (S'') a été résolu dans l'exemple précédent.
  Ainsi, le système (S) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^3$:
  $$(x, y, z) = (3 - 4z, 4 - 5z, z), z \in \mathbb{R}.$$

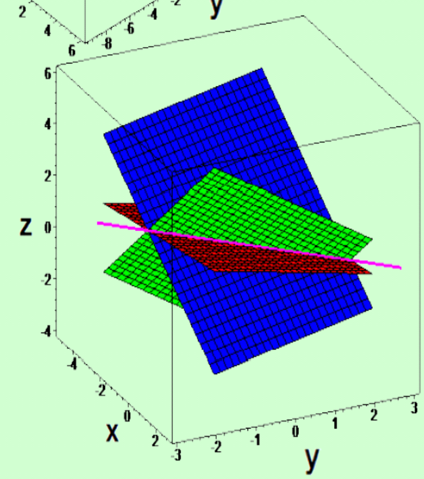
Interprétation géométrique

Chaque équation de (S) représente un plan dans l'espace rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Notons



- $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $-x+y+z=1$
- $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $2x-y+3z=2$
- $\mathcal{P}_3$ le plan d'équation $-x+2y+6z=a$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection de ces trois plans.
La résolution précédente fournit donc :



- si $a\neq 5$, les plans $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3$ n'admettent pas de point d'intersection :
$$\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\varnothing;$$
- si $a=5$, les plans $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3$ admettent comme intersection une droite $\mathcal{D}$:
$$\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\mathcal{D}.$$

Exemple 1.4

Considérons le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S):\quad\left\{\begin{array}{rcl} -x+\ \ y+\ \ z=1 & & E_1\\ 2x-\ \ y+3z=2 & & E_2\\ -x+2y+5z=4 & & E_3\end{array}\right.$$

Résolution

On essaie de faire « disparaître » progressivement les inconnues à l'aide de **combinaisons linéaires** sur les équations :

$$(S)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{r|l} -x+y+\ \ z=1 & E_1\\ y+5z=4 & E_2'=E_2+2E_1\\ y+4z=3 & E_3'=E_2-E_1\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{r|l} -x+y+\ \ z=1 & E_1\\ y+5z=4 & E_2'\\ z=1 & E_3''=E_3'-5E_2'\end{array}\right.$$

On obtient un système **triangulaire** qui se résout en partant de l'équation du bas puis en remontant les équations :

- E_3'' donne $z = 1$,
- que l'on reporte dans E_2' qui donne $y = 4 - 5z = -1$,
- que l'on reporte dans E_1 qui donne $x = y + z - 1 = -1$.

Le système (S) admet une **unique** solution dans $\mathbb{R}^3$: $(x, y, z) = (-1, -1, 1)$.

Interprétation géométrique

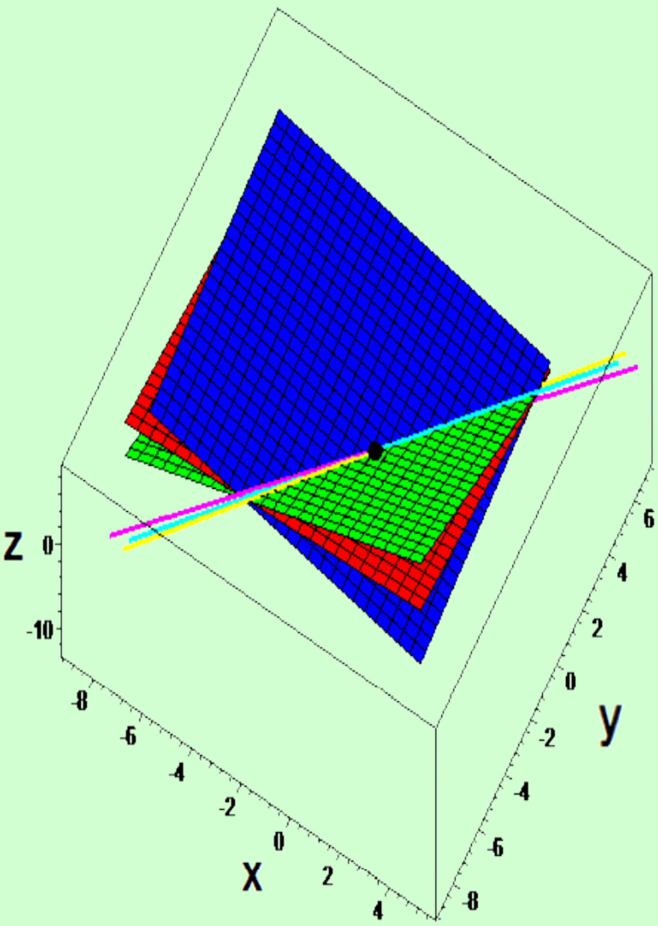
Chaque équation du système (S) représente un plan dans l'espace rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Notons

- $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $-x + y + z = 1$
- $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $2x - y + 3z = 2$
- $\mathcal{P}_3$ le plan d'équation $-x + 2y + 5z = 4$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection de ces trois plans.

La résolution précédente montre que les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ admettent un point d'intersection, le point $M(-1, -1, 1)$, ils sont **concourants** :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{M\}.$$



1 Notion de système linéaire

Définition 1.1 Système linéaire

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** tout système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_n & = & b_n \end{cases}$$

où $x_1, \dots, x_p$ sont des inconnues.

Exemple 1.1

Quelques exemples et contre-exemples.

- $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$ est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.
- $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 7x - 5y - 2z = 2 \end{cases}$ est un sytème linéaire de 2 équations à 3 inconnues.
- $\begin{cases} x = y + 2z + 1 \\ z + y + 2 = -3x \\ 2x + 3y - 3 = 17z \end{cases}$ est un système d'équation linéaire de 3 équations à 3 inconnues.
- $\begin{cases} e^x + y = 1 \\ x + \sin(y) = 2 \end{cases}$ n'est pas un système linéaire.
- $\begin{cases} x^2 + 2y^3 = -3 \\ 2x^4 - y^5 = 2 \end{cases}$ n'est pas un système linéaire.

Interprétation géométrique

Cas $n = 2$ Les équations intervenant dans un système linéaire à deux inconnues sont de la forme $ax + by = c$. Sauf cas particulier où $(a, b) = (0, 0)$, ce sont des équations de droites du plan. L'ensemble des solutions d'un système linéaire à deux inconnues peut être interprété comme l'intersection de droites du plan.

Cas $n = 3$ Les équations intervenant dans un système linéaire à trois inconnues sont de la forme $ax + by + cz = d$. Sauf cas particulier où $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, ce sont des équations de plans de l'espace. L'ensemble des solutions d'un système linéaire à trois inconnues peut être interprété comme l'intersection de plans de l'espace.

2 Structure de l'ensemble des solutions

Définition 2.1 Système homogène associé à un système linéaire

On appelle système **homogène** associé au système linéaire

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

le système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{cases}$$

Remarque. En clair, on se débarasse des termes constants.

Exemple 2.1

Systèmes homogènes associés à quelques systèmes linéaires.

- Le système homogène associé au système $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$ est $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$.
- Le système homogène associé au système $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 7x - 5y - 2z = 2 \end{cases}$ est $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 7x - 5y - 2z = 0 \end{cases}$.
- Le système homogène associé au système $\begin{cases} x = y + 2z + 1 \\ z + y + 2 = -3x \\ 2x + 3y - 3 = 17z \end{cases}$ est $\begin{cases} x = y + 2z \\ z + y = -3x \\ 2x + 3y = 17z \end{cases}$.

Résoudre le système (S), c'est trouver tous les n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant (S). Jusqu'à la fin du chapitre, on notera $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_h$) l'ensemble des solutions su système (S) (resp. (S_h)).

Le système (S) est dit **compatible** si et seulement si $\mathcal{S} \neq \varnothing$. On note qu'un système homogène est toujours compatible car le n-uplet $(0, \dots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène.

Ecriture matricielle d'un système

Soit $A \in (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. A est la **matrice du système** (S). Soient $B = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ puis $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système (S) s'écrit matriciellement

$$(S) \quad AX = B.$$

Le vecteur colonne B est le **second membre du système** (S). Le rang de A est le **rang du système** (S). On dit dans ce cas que le système est un système (n, p, r) (n inconnues, p équations, de rang r).

Si $B \in \mathrm{Im}(A)$, alors (S) est compatible et si $B \notin \mathrm{Im}(A)$, alors (S) n'est pas compatible.

Si de plus A est une matrice carrée (systèmes ayant autant d'équations que d'inconnues), le **déterminant du système** (S) est le déterminant de A.

Présentation en colonnes

On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrices A. Donc, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le système (S) s'écrit alors

$$(S) \quad \sum_{j=1}^{n} x_j C_j = B.$$

Si $B \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$, alors (S) est compatible et si $B \notin \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$, alors (S) n'est pas compatible.

Avec une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles respectivement notées n et p respectivement. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de E et une base de F respectivement.

Soit f l'élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$. Soient $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$ et $b = \sum_{i=1}^{p} b_i e'_i \in F$. Le système (S) s'écrit

$$(S) \quad f(x) = b.$$

L'inconnue x est alors un élément de E. Le système (S) est compatible si et seulement si $b \in \text{Im}(f)$.

Théorème 2.1 Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Les solutions d'un système linéaire sont les sommes d'une solution particulière de ce système et des solutions du système homogène associé.

Exemple 2.2

Le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x - y - z = -2 \end{cases}$ admet $(1, 2, 3)$ pour solution. Alors

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x - y - z = -2 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} 2x + y + z = 2 \times 1 + 2 + 3 \\ 3x - y - z = 3 \times 1 - 2 - 3 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} 2(x-1) + (y-2) + (z-3) = 0 \\ 3(x-1) - (y-2) - (z-3) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi (x, y, z) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $(x-1, y-2, z-3)$ est une solution (u, v, w) du système homogène associé à $(\mathcal{S})$.
Ceci signifie que (x, y, z) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si il existe une solution (u, v, w) du système homogène associé à $(\mathcal{S})$ tel que $(x, y, z) = (1 + u, 2 + v, 3 + w) = (1, 2, 3) + (u, v, w)$.

3 Résolution d'un système linéaire

Proposition

Tout système linéaire est changé par des opérations élémentaires en un système équivalent.

Proposition

*On obtient un système (S') **équivalent** au système (S) si on applique à ce dernier l'une des opérations suivantes :*

- ***échange** de deux lignes (on note $L_i \longleftrightarrow L_j$) ;*
- ***multiplication** d'une ligne par un coefficient **non nul** α (on note $L_i \longleftarrow \alpha L_i$) ;*
- ***ajout** à une ligne d'un multiple d'une autre (on note $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$),*
  *et plus généralement **ajout** à une ligne d'une **combinaison linéaire** des autres (on note $L_i \longleftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \beta_j L_j$).*

REMARQUE. Des opérations du type $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ avec $\underline{\lambda \neq 0}$ transforme également un système en un système équivalent.

Méthode du pivot de Gauss

Description d'une méthode de résolution

On va décrire la **méthode du pivot de Gauss** pour résoudre un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3p}x_p = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

1. **Choix du pivot :**
   - Si **tous** les coefficients a_{ij} sont **nuls**, et si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, tous les p-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$ sont solutions : $\mathscr{S} = \mathbb{K}^p$.
   - Si **tous** les coefficients a_{ij} sont **nuls**, et si **l'un au moins** des b_i est **non nul**, alors le système n'admet pas de solution : $\mathscr{S} = \varnothing$.
   - Si l'**un** des coefficients a_{ij} est **non nul**, on peut le choisir comme **pivot**. Quitte à échanger lignes et/ou colonnes, on peut supposer par exemple $a_{11} \neq 0$.

2. On utilise a_{11} comme **pivot** pour « éliminer » x_1 des lignes L_2 à L_n, à l'aide des opérations $L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$.
   On obtient alors un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcll}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & \\
 & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \cdots & + & a'_{2p}x_p & = & b'_2 & L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\
 & & a'_{32}x_2 & + & a'_{33}x_3 & + & \cdots & + & a'_{3p}x_p & = & b'_3 & L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 \\
 & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & a'_{n2}x_2 & + & a'_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a'_{np}x_p & = & b'_n & L_n \longleftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1
\end{array}\right.$$

3. On recommence la même démarche sur les lignes L_2 à L_n (en supposant $a'_{22} \neq 0$) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcll}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & \\
 & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \cdots & + & a'_{2p}x_p & = & b'_2 & \\
 & & & & a''_{33}x_3 & + & \cdots & + & a''_{3p}x_p & = & b''_3 & L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} L_2 \\
 & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & a''_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a''_{np}x_p & = & b''_n & L_n \longleftarrow L_n - \frac{a'_{n2}}{a'_{22}} L_2
\end{array}\right.$$

4. On recommence ce procédé jusqu'à l'obtention d'un système **échelonné** :

Méthode **Formatage d'un système linéaire**

Pour effectuer sans peine des opérations élémentaires sur un sytème linéaire, les inconnues doivent être placées en «colonnes».

Par exemple, le système linéaire $\begin{cases} x+z=2 \\ y-z=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ sera plutôt écrit $\begin{cases} x & & & + & z & =2 \\ & & y & - & z & =-1 \\ x & + & 2y & & & =3 \end{cases}$.

On peut alors résoudre le système linéaire à l'aide de l'algorithme suivant.

Algorithme 1 Pivot de Gauss

Données : un système linéaire de n équations $(\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)$ à p inconnues $(x_1, \dots, x_p)$
Résultat : un système linéaire «triangulaire» équivalent au système initial.
  Pour k variant de 1 à $\min(n, p)$ **Faire**
    Si il existe une ligne i où le coefficient de x_k est non nul **Alors**
      $\mathrm{L}_k \leftrightarrow \mathrm{L}_i$
      $a \leftarrow$ coefficient de x_k sur la ligne L_k (a est donc non nul)
      Pour j variant de $k+1$ à n **Faire**
        $b \leftarrow$ coefficient de x_k sur la ligne j
        $\mathrm{L}_j \leftarrow \mathrm{L}_j - \frac{b}{a}\mathrm{L}_k$
      Fin Pour
    Fin Si
  Fin Pour

Remarque. Le coefficient de x_k sur la ligne L_k à l'étape k de l'algoithme s'appelle le **pivot**.

A la fin de l'algorithme, on obtient un système «triangulaire» et plusieurs cas peuvent se présenter.

- Il existe une unique solution.
- Il n'existe aucune solution.
- Il existe une infinité de solutions.

Proposition

Tout système linéaire à n équations et p inconnues est équivalent à un système de la forme suivante pour un certain entier $r \leqslant \min(n, p)$ *:*

$$\left\{\begin{array}{rcl}
b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1r}y_r + \cdots + b_{1p}y_p &=& c_1 \\
b_{22}y_2 + \cdots + b_{2r}y_r + \cdots + b_{2p}y_p &=& c_2 \\
\ddots \qquad\qquad & & \vdots \\
b_{rr}y_r + \cdots + b_{rp}y_p &=& c_r \\
\hline
0 &=& c_{r+1} \\
&\vdots& \\
0 &=& c_n
\end{array}\right.$$

où les inconnues $y_1, \ldots, y_p$ *sont les mêmes que* $x_1, \ldots, x_p$ *mais éventuellement dans un ordre différent, et où les* $b_{11}, \ldots, b_{rr}$ *sont tous* ***non nuls****.*

Lorsque $r < n$*, les équations* $0 = c_{r+1}, \ldots, 0 = c_n$ *sont des équations de* ***compatibilité****.*

Théorème-définition

Le nombre r de coefficients diagonaux b_{ii} *non nuls est* ***indépendant*** *des opérations effectuées pour arriver à cette forme du système, et s'appelle le* ***rang*** *du système.*

5. **Analyse de la compatibilité du système :**
   - Si $n > r$ et si **l'un au moins** des c_i, $r+1 \leqslant i \leqslant n$ est **non nul**, le système est **incompatible**, et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.
   - Si $n > r$ et si **tous** les coefficients c_i, $r+1 \leqslant i \leqslant n$ sont **nuls**, ou si $n = r$, le système est **compatible**, et admet au moins une solution.
     * Les r premières équations constituent un **sous-système principal**,
     * les r inconnues $y_j, 1 \leqslant j \leqslant r$, sont appelées **inconnues principales** du système,
     * et, lorsque $p > r$, les $p - r$ inconnues y_j, $r+1 \leqslant j \leqslant p$, **inconnues auxiliaires**.

6. « **Remontée** » **du système principal** :

   On résout alors le système **principal** « en partant du bas », et les inconnues **principales** $y_1, \ldots, y_r$ s'expriment en fonction des inconnues **auxiliaires** $y_{r+1}, \ldots, y_p$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1r}y_r & = & c_1 - b_{1r+1}y_{r+1} - \cdots - b_{1p}y_p \\ b_{22}y_2 + \cdots + b_{2r}y_r & = & c_2 - b_{2r+1}y_{r+1} - \cdots - b_{2p}y_p \\ \ddots & \vdots & \\ b_{rr}y_r & = & c_r - b_{rr+1}y_{r+1} - \cdots - b_{rp}y_p \end{array}\right. \quad \Uparrow$$

Système échelonné

En pratique, on ne cherche pas toujours à obtenir des coefficients diagonaux tous non nuls, mais plutôt à obtenir un système **échelonné**, c'est-à-dire où chaque ligne contient **au moins « un zéro de plus »** que la précédente « en partant de la gauche », jusqu'à ce que les premiers membres soient nuls. Cela évite d'échanger les inconnues.

Dans un système **échelonné**, le nombre r d'équations dont le premier membre est **non nul** est égal au **rang** du système.

Proposition

Un système linéaire admet soit

- ***aucune** solution* $\quad (r < n$ *et sytème* ***incompatible****)* ;
- *une solution* ***unique*** $\quad (r = p \leqslant n$ *et système* ***compatible****)* ;
- *une* ***infinité*** *de solutions* $\quad (r < p$ *et système* ***compatible****)*.

Remarque

Un système **homogène** admet **une ou une infinité** de solutions. Il admet en particulier toujours la solution « nulle » $(0, \ldots, 0)$.

4 Quelques exemples

Exemple 4.1

Résolution
On est dans un cas simple de pivot de Gauss où tous les pivots sont égaux à 1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 5z & = & -6 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -3x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \text{Le coefficient en position de pivot est égal à 1.}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 5z & = & -6 \\ & & y & + & 11z & = & 14 \\ & - & y & - & 14z & = & -17 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \qquad \text{Le coefficient en position de pivot est encore égal à 1.}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 5z & = & -6 \\ & & y & + & 11z & = & 14 \\ & & & - & 3z & = & -3 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est le singleton $\{(2, 3, 1)\}$.
Interpération géométrique
L'ensemble des solutions est l'intersection de trois plans de l'espace donc un point (sauf cas particulier).

Exemple 4.2

Résolution
Si des pivots sont nuls, on procède à des échanges de lignes.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \bigcirc & & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$ Le coefficient en position de pivot est nul.

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$ On met un 1 en position de pivot.

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & -2 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$ Le coefficient en position de pivot est différent de 1.

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & - & 2z & = & -2 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftrightarrow L_2$$ On préfère un 1 en position de pivot.

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est le singleton $\left\{\left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$.

Interpération géométrique
L'ensemble des solutions est l'intersection de trois plans de l'espace donc un point (sauf cas particulier).

Exemple 4.3

Résolution

Si des pivots ne sont pas égaux à 1, on utilise des opérations du style $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ avec $\underline{\lambda \neq 0}$.

$$\begin{cases} -4x + 3y - z = 2 \\ -3x - y - 3z = -1 \\ -2x + 5y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -4x + 3y - z = 2 \\ \quad - 13y - 9z = -10 \\ \quad 7y + 5z = 4 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -4x + 3y - z = 2 \\ \quad - 13y - 9z = -10 \\ \quad 2z = -18 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow 13L_3 + 7L_2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \\ z = -9 \end{cases}$$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions est le singleton $\{(7, 7, -9)\}$.

Interpération géométrique

L'ensemble des solutions est l'intersection de trois plans de l'espace donc un point (sauf cas particulier).

Exemple 4.4

Résolution

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & z & = & 3 \\ & & -5y & - & 3z & = & -4 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{17}{5}z \\ y = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}z \end{cases}$$ On exprime les inconnues en fonction du paramètre z.

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(-\frac{1}{5} + \frac{17}{5}z, \frac{4}{5} - \frac{3}{5}z, z\right), z \in \mathbb{K}\right\}$$

En particulier, il existe donc une infinité de solutions (puisque z peut prendre une infinité de valeurs). Les solutions sont de la forme

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\left(\frac{17}{5}z, -\frac{3}{5}z, z\right)}_{\text{solution de l'équation homogène}}$$

Interprétation géométrique L'ensemble des solutions est l'intersection de deux plans de l'espace non parallèles donc une droite. Il s'agit en effet de la droite paramétrée par $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{17}{5}t \\ y = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ autrement dit de la droite passant par le point $\left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ et de vecteur directeur $\left(\frac{17}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right)$.

Exemple 4.5

Résolution

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -3 \\ 2x & - & 3y & = & 1 \\ 4x & - & 5y & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -3 \\ & - & 7y & = & 7 \\ & - & 13y & = & 14 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x + 2y = -3 \\ y = -1 \\ 13 = 14 \end{array}\right.$$

Structure de l'ensemble des solutions

Puisque manifestement $13 \neq 14$, l'ensemble des solutions est vide.

Interprétation géométrique Rien de surprenant : trois droites du plan sont rarement concourantes.

Exemple 4.6

Résolution

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x = 5 \\ 3x - y = 1 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \text{On préfère éliminer } y.$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est le singleton $\{(1,2)\}$.
Interprétation géométrique On a donc ici affaire à trois droites concourantes.

Exemple 4.7

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 4z = -3 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \text{On préfére un } -1 \text{ en position de pivot.}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ y + 6z = 7 \\ 3y + 18z = 21 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ y + 6z = 7 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\iff \begin{cases} x = 9 - 11z \\ y = 7 - 6z \end{cases}$$

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est

$$\{(9-11z, 7-6z, z), z \in \mathbb{K}\}$$

En particulier, il existe donc une infinité de solutions (puisque z peut prendre une infinité de valeurs). Les solutions sont de la forme

$$\underbrace{(9,7,0)}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{(-11z, -6z, z)}_{\text{solution de l'équation homogène}}$$

Interprétation géométrique Trois plans de l'espace se coupent suivant la droite paramétrée par $\begin{cases} x = 9-11t \\ y = 7-6t \\ z = t \end{cases}$, c'est à dire la droite passant par le point $(9,7,0)$ et de vecteur directeur $(-11,-6,1)$.

4- Systèmes de Cramer:

Définition-théorème (Système de Cramer)

- Un système linéaire est dit *de Cramer* si sa matrice est inversible — donc CARRÉE, en particulier.
- Pour tous $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$, le système de Cramer : $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution : $A^{-1}B$.

Démonstration Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$: $AX = B \iff X = A^{-1}B$, — on a simplement multiplié par A^{-1} à gauche pour passer de gauche à droite, et par A à gauche pour passer de droite à gauche. ∎

Corollaire

Un système de Cramer homogène $Ax = 0$ admet pour unique solution la matrice-colonne 0.

Exemple

Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x + 6y & = & 0 \\ x + 13y & = & 0 \end{cases}$$

est un système de Cramer car $\det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} = 20 \neq 0$.

Il n'admet donc que la solution nulle $(x, y) = (0, 0)$.

Exemple

Résolvons le système $\begin{cases} x + y & = & 1 \\ x + t^2 y & = & t \end{cases}$ suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - 1$.

Premier cas. $t \neq +1$ **et** $t \neq -1$. Alors $t^2 - 1 \neq 0$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Et la solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 - t \\ t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t+1} \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque $t \neq \pm 1$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{t}{t+1}, \frac{1}{t+1} \right) \right\}$.

Deuxième cas. $t=+1$. Le système s'écrit alors : $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 1 \end{cases}$ et les deux équations sont identiques. Il y a une infinité de solutions : $\mathscr{S}=\{(x,1-x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

Troisième cas. $t=-1$. Le système s'écrit alors : $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= -1 \end{cases}$, les deux équations sont clairement incompatibles et donc $\mathscr{S}=\varnothing$.

Exemple

$$\begin{cases} a+c &= 1 \\ b-c &= 2 \\ -a+b &= 3 \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Écrivons $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On doit donc résoudre l'équation matricielle $Ax=b$.

Comme $\det(A)=2\neq 0$, la matrice A est inversible.

En multipliant chaque membre de l'équation $Ax=b$ par A^{-1} à gauche, on obtient

$$A^{-1}Ax=A^{-1}b,$$

c'est-à-dire

$$x = A^{-1}b.$$

Il y a donc une unique solution $A^{-1}b$.

Il ne reste plus qu'à la calculer.

On calcule d'abord la matrice inverse de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on obtient

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.3 (*Formules de Cramer*)

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, l'unique solution du système de Cramer $Ax = b$ est donnée par $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où

$$\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\det A}$$

Démonstration. En notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A, on a $b = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i$.

On note A_k la matrice obtenue en remplaçant la k-ème colonne par b, et $B_{i,k}$ la matrice obtenue en remplaçant la k-ème colonne par C_i. Par linéarité du déterminant par rapport à la k-ème colonne et en utilisant son caractère alterné, on a :

$$\det(A_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i \det(B_{i,k}) = x_k \det B_{k,k} = x_k \det A$$

Théorème **(Formules de Cramer pour les systèmes 2×2)** Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{C}$. Si : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, la solution (x, y) du système de Cramer : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ est donnée par : $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$.

Exemple:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

On a alors:

$$x = \frac{24 \cdot 3 - 16 \cdot 2}{8} = \frac{40}{8} = 5 \text{ et } y = \frac{4 \cdot 16 - 2 \cdot 24}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

Exemple:

Résolvons le système $\begin{cases} tx-2y &= 1 \\ 3x+ty &= 1 \end{cases}$ suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Le déterminant associé au système est $\begin{vmatrix} t & -2 \\ 3 & t \end{vmatrix} = t^2+6$ et ne s'annule jamais. Il existe donc une unique solution (x,y) et elle vérifie :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t+2}{t^2+6}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t-3}{t^2+6}.$$

Pour chaque t, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{t+2}{t^2+6}, \frac{t-3}{t^2+6}\right)\right\}$.

Système d'ordre 3

Soit :

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

Posons :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Le système admet une solution unique ssi $\det(A) \neq 0$:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Exemple:

Résolution du système :

$$\begin{cases} x + 3y + 4z & = & 50 \\ 3x + 5y - 4z & = & 2 \\ 4x + 7y - 2z & = & 31 \end{cases}$$

La matrice A du système est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$, d'où $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -8$

Le système est de Cramer et admet une solution unique :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \\ 31 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-24}{-8} = 3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 50 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 31 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-40}{-8} = 5$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 50 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 31 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-64}{-8} = 8$$

Exemple:

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m-5)z = 7 \end{cases},$$

où m est un paramètre réel.

Solution:

Soit $m \in \mathbb{R}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix}$$
$$= 2(m(m-5)-6) + (3(m-5)-3) + 7(6-m) = 2m^2 - 14m + 12 = 2(m-1)(m-6).$$

Le système est de CRAMER si et seulement si $m \notin \{1,6\}$.

• Si $m \notin \{1,6\}$, les formules de CRAMER fournissent :

$$x = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{4(m^2-5m-6)-5(3m-18)-7(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1}$$

$$y = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(5m-39)+(4m-27)+21}{2(m-1)(m-6)} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1}$$

$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{2(7m-15)+9+7(-4m+15)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}$$

Si $m \notin \{1,6\}$, $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{2m-9}{m-1}, \frac{7}{m-1}, -\frac{7}{m-1}\right)\right\}$.

• Si $m \in \{1,6\}$, $\det(S) = 0$. Puisque $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, on peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations s'écrit $\begin{cases} 2x + z = 4 - 3y \\ -x + 2z = 5 - my \end{cases}$

et équivaut à $\begin{cases} x = \dfrac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \dfrac{14-(2m+3)y}{5} \end{cases}$.

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en y disparaissent si $m \in \{1, 6\}$ car dans le cas contraire le système serait de CRAMER ce qui n'est pas).

$$7x + 3y + (m-5)z = 7 \Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)y}{5} + 3y + (m-5)\frac{14-(2m+3)y}{5} = 7 \Leftrightarrow 21 + 14(m-5) = 35$$
$$\Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

Si $m = 1$, le système n'a pas de solution et si $m = 6$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3}{5}, y, \frac{14-15y}{5}\right), \ y \in \mathbb{R}\right\}$.

Exemple

Etude du système $\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \end{cases}$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Son déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ est égal à 18.

Il est non nul, le système est donc un système de Cramer. Il admet donc une unique solution $x = (x_1, x_2, x_3)$ avec :

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ soit } x_1 = \frac{35}{18}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \text{ soit } x_2 = \frac{29}{18}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \text{ soit } x_2 = \frac{5}{18}$$

Donc l'unique solution du système est $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{38}{18}, \frac{29}{18}, \frac{5}{18}\right)$.