Chapitre 1 : Polynômes et Fractions Rationnelles :

I- Polynômes :

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Définition / Propriétés :

Définition :

On appelle monôme toute expression de la forme $a_k X^k$, où a_k est un élément de $\mathbb{K}$ appelé coefficient du monôme et X une variable ~~vide~~ indéterminée.

- Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de variable X, est une expression de la forme : $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. qu'on écrit aussi $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{K}$
- Les scalaires $a_0, a_1, \dots a_n$ s'appellent coefficients de P.
- Le scalaire a_0 s'appelle coefficient ou terme constant de P.
- On appelle polynôme constant, un polynôme dont tous les coefficients sont nul sauf eventuellement le terme constant c'est à dire $P(X) = a_0$

Notation : On note $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de variable X

Exemple :

1) $P(X) = -2X^3 + 4X - 1 \in \mathbb{R}[X]$

2) $P(X) = X - i\pi \in \mathbb{C}[X]$

3) $P(X) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ polynôme constant.

Remarque :

1) Polynôme nul : $P = 0$

$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme nul

$\Leftrightarrow a_k = 0, \quad \forall\ 0 \le k \le n$;

2) Polynôme égaux : Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

4) $PQ = 0 \iff P = 0$ ou $Q = 0$

5) $\left.\begin{array}{l} PQ = PR \\ P \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = R$

6) $PQ = 1 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ tque $P = \lambda$ et $Q = \frac{1}{\lambda}$

4) Dérivé d'un polynôme:

Def: Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$$

On appelle fonction polynôme associée au polynôme P l'application: $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

$x \longmapsto P(x)$

On peut se permettre d'assimuler un polynôme a son fonction polynôme, et ainsi par exemple dériver un polynôme

On définit le polynôme dérivée de P par:

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

On peut calculer P' ~~en~~ en n'importe quel $x \in \mathbb{K}$

Ex: $P'(0) = a_1$, $P'(1) = a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n$

On définit par ~~résume~~ récurrence la dérivé k de P ($k \in \mathbb{N}$) (ou dérivée d'ordre k) par:

$P^{(0)} = P$ | $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$

$P^{(1)} = P'$

$P^{(2)} = P''$

Ex: $P(X) = 2 + 3X + 5X^4$ $\quad P'(X) = 3 + 20X^3$

$P(X)$

Propriétés:

1) Si $\deg(P) > 0$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$

2) Si $\deg(P) = n$ alors $\forall k \geq n+1$, $P^{(k)} = 0$

3) Si P est un polynôme constant alors $P' = 0$

4) Pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ on a:

$(P+Q)' = P' + Q'$ | $(PQ)' = P'Q + Q'P$

$(\lambda P)' = \lambda P'$ | $(P^n) = n P' P^{n-1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ex: $f(x) = (x-2)^n$

$f'(x) = n(x-2)^{n-1}$ avec $k \leq n$

$f''(x) = n(n-1)(x-2)^{n-2}$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(x-2)^{n-3}$

$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$

$n! = n(n-1)(n-2)\ (n-k+1)\ (n-k)$

$k! = k(k-1)(k-2) - \cancel{(k}\quad 1$

$(n-k)! = (n-k)\ (n-k-1)\ (n-k-2 - -$

$= \dfrac{n!}{(n-k)!}(x-2)^{n-k}$

$f^{n}(x) = n(n-1)\underset{(n-n+1)}{---}(x-2)^{n-n} = n!$

$f^{(k)}(x) = 0, \forall\ k > n$

$k \geq n+1$

4) Divisibilité dans $\mathbb{K}[x]$:

4.1) Multiples - Diviseurs :

Déf : Soient A, B 2 polynômes de $\mathbb{K}[x]$. On dit que B divise A (et on note B / A) ou que B est un diviseur de A ou que A est un multiple de B, s'il existe $Q \in \mathbb{K}[x]$ tque $A = B \cdot Q$

Exemple:

1) $(x-1)$ divise $(x^2+1)(x-1)$

2) Le polynôme nul est divisible par tous les polynômes car $0 = 0 \times f$, $\forall\ f \in \mathbb{K}[x]$

3) Soit $A = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

alors $x-1$ divise A et $x-2$ divise A.

Propriétés:

1) Si B divise A et $A \neq 0$ alors $\deg A \geq \deg B$

2) Si A divise B et B divise C alors A divise C

3) Si A divise B et A divise C alors A divise $PB + QC$, $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$

$B / A \Leftrightarrow \exists Q$

$A = BQ$

$\deg(A) = \deg BQ$

$= \deg B + \deg Q$

$\Rightarrow \deg(A) \geq \deg(B)$

2) Division Euclidienne:

Théorème définition:

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tq que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple de polynôme (Q, R) de $\mathbb{K}[X]$ tq que $A = B.Q + R$ avec $\deg R < \deg B$

Q est appelé quotient, R est le reste de la division euclidienne de A par B

$A = 2x^4 - 19x^2 + 26x - 13 \quad | \quad B = x^2 + 3x - 2$

Remarques:

1) Si $\deg A < \deg B$ alors $A = \cancel{BQ + R}$ $B.0 + A$

2) Le polynôme B divise A $\Leftrightarrow$ le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{2x^4 - 19x^2 + 26x - 13}^{A} & \overbrace{x^2 + 3x - 2}^{B} \\
\hline
-\underline{2x^4 + 6x^3 - 4x^2} & \underbrace{2x^2 - 6x + 3}_{Q} \\
0 - 6x^3 - 15x^2 + 26x - 13 & \\
\underline{-6x^3 - 18x^2 + 12x} & \\
0 + 3x^2 + 14x - 13 & \\
-\underline{\ \ 3x^2 + 9x - 6} & \\
0 + \underbrace{5x - 7}_{R} &
\end{array}$$

$A = BQ + R$

Pratique: Effectuer la division euclidienne de A par B, On commence par diviser le terme de plus haut degré de A par le terme de plus haut degré de B. Soit $Q_1 = \frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$ puis on calcule $R_1 = A - Q_1 B = -16x^3 - 15x^2 + 26x - 13$ ensuite on divise le terme de plus haut degré de R_1 par le terme de plus haut degré de B.

Soit $R_2 = \frac{-6x^3}{x^2} = -6x$ puis on calcule $R_2 = R_1 - Q_2 B$ $= A - B(Q_1 + Q_2)$ et ainsi de suite. On arrête les calculs lorsqu'on obtient un polynôme R_k

$R_k = A - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k) B$ tq que $\deg R_k < \deg B$

Ainsi le quotient de la division euclidienne de A par B est $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k$ et le reste est $R = R_k$ (voir exemple)

3) Racine d'un polynôme:

Définition:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, on dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$. On dit aussi que a est un zéro de P

Ex: $P(X) = X-1$: 1 est une racine p car $P(1) = (1-1) = 0$

0 n'est pas une racine de P car $P(0) = -1 \neq 0$

2) $P(X) = X^2 - 3X + 2$ 2 est une racine de P car $P(2) = 0$

Proposition:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$

a racine de $P \iff (X-a)$ divise P

$\iff \exists\, Q \in \mathbb{K}[X]$ tque $P = (X-a)Q$

Corollaire:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a_1, a_2, \dots, a_q$ des racines distinctes de P alors

$$\prod_{i=1}^{q} (x-a_i) = (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_q) \text{ divise } P$$

Corollaire 2:

Soit P un polynôme non nul, $\deg P = n$ alors P admet au plus n racines.

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

si $\deg P \leq n$ et P admet $(n+1)$ racines alors $P = 0$

Corollaire: un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul

Corollaire: soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n \geq 1$

supposons que P admet n racines suivantes. Alors:

$$P = \lambda (X-a_1)(X-a_2)(X-a_3) \cdots (X-a_n)$$

$$= \lambda \prod_{i=1}^{n} (X-a_i)$$

où λ est le coefficient dominant de P.

Définition (Racine Multiple):

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$

On dit que a est une racine d'ordre de multiplicité m de P s'il existe $Q \in \mathbb{K}[x]$ tq $P(x) = (x-a)^m Q(x)$ avec $Q(a) \neq 0$

2) Si $m = 1$ on dit que a est une racine simple de P

3) Si $m = 2$ on dit que a est une racine double de P.

4) Si $m \geq 2$ on dit que a est une racine multiple de P.

Exemples:

$P(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

2 est (-3) sont des racines simples de P

3) $P(x) = x^4(x^2+1)(x+4) = (x-0)^3(x-i)(x+i)(x-(-4))$

dans $\mathbb{R}$ 0 racine multiple de P

et -4 racine simple de P

dans $\mathbb{C}$ 0 racine multiple de P

-4, i, $-i$ sont des racines simples de P.

$P'(x) = ---$ $\qquad$ P $(x-a)^3$ $\qquad$ $(x-a)^2$

$P'(a) \neq 0$ $\qquad$ P' $3(x-a)^2$ $P' = 2(x-a)$

$P''(x) = ---$ $\qquad$ P'' $6(x-a)$ $\quad$ $P'' = 2$

$P''(a) = 0$ $\qquad$ P''' 6 $\quad$ $P''' = 0$

P'''' 0

Proposition:

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et $a \in \mathbb{K}$ $\qquad$ avec $P^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de P

Alors, a est une racine double de P

$\iff$

$P(a) = 0$, $P'(a) = 0$ et $P''(a) \neq 0$

Ex: $P(x) = (x^2 - 2x + 1)$

$P(1) = 0$

$P'(x) = (2x - 2)$

$P'(1) = 0$

$P''(x) = 2$ $\qquad$ $P''(1) \neq 0$

$\Rightarrow 1$ est une racine double de P

$\boxed{3}$

Théorème: Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, $a \in \mathbb{K}$

Alors: a est une racine d'ordre de multiplicité m ($m \in \mathbb{N}^*$) $\iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$

polynôme conjugué:

Soit $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$

On appelle polynôme conjugué de P, le polynôme

$$\bar{P} = \bar{a_0} + \bar{a_1} X + \dots + \bar{a_n} X^n = \sum_{k=0}^{n} \bar{a_k} X^k$$

$$P(x) = -3x^4 + 2i X^3 + (4-5i) x - 1$$

$$\bar{P}(x) = -3x^4 - 2i x^3 + (4+5i) x - 1$$

Propriétés:

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$

1) $\overline{P+Q} = \bar{P} + \bar{Q}$

2) $\overline{PQ} = \bar{P}\,\bar{Q}$

3) $\overline{P(\lambda)} = \bar{P}(\bar{\lambda})$

4) Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{P} = P$

Proposition: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

1) a est racine de P $\iff$ $\bar{a}$ est racine de $\bar{P}$

2) a est racine de multiplicité m $\iff$ $\bar{a}$ est une racine de $\bar{P}$ multiplicité m.

4) Factorisation des polynômes:

4.1) Polynôme scindé

Déf : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n ($n \in \mathbb{N}$) P est dit scindé sur $\mathbb{K}$ ~~[X]~~ s'il s'écrit

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$$

où les scalaires $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont les racines de P comptées avec leur ordre de multiplicité

$a_k \in \mathbb{K}$, $1 \leq k \leq n$

et $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est le coefficient dominant de P.

Exemple:

$P(x) = (1-x)^3 (x^2+1)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$

$P(x) = (1-x)^3 (x-i)(x+i)$ scindé dans $\mathbb{C}$.

Théo Théorème d'Alembert:

Tout polynôme de degré ≥ 1 à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Remarque: Ce résultat est faux, si $P \in \mathbb{R}[X]$

Ex: $P = X^2+1$ n'admet pas des racines réelles.

Corollaire:

1) Tout polynôme de degré ≥ 1 dans $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P = n \geq 1$, alors P admet n racines complexes comptées avec leurs ordre de multiplicité

~~Déf: On dit que~~

4.2) Polynômes irréductibles:

Def: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n \geq 1$ On dit que P est irréductible sur $\mathbb{K}$ si ses seuls diviseurs sont

* les polynômes constants non nuls et
* les polynômes multiples de P.

Ex: $P = X^2+1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$

4.3) factorisation des polynômes

théorème de décomposition en facteurs irréductibles:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P \geq 1$ Alors P s'écrit de manière unique (à l'aide des facteurs près) comme produits de polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{K}[X]$

Corollaire: (Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$)

Comme les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tq $\deg P \geq 1$ s'écrit de façon unique $P = \lambda (X-a_1)^{m_1} (X-a_2)^{m_2} \dots (X-a_k)^{m_k}$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, λ coefficient dominant de P.

- $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ sont les racines distinctes de P.

$m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$

$m_1 + m_2 + \dots + m_k = \text{degré } P$

Ex : $P = X^3 - X^2 + X - 1$

$P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$

$= (X-1)(X^2+1)$

$= (X-1)(X+i)(X-i)$

- Corollaire : (Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$)

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit de façon que $P = \lambda (X-a_1)^{m_1} (X-a_2)^{m_2} \dots (X-a_k)^{m_k} Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} Q_3^{\beta_3} \dots Q_s^{\beta_s}$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, λ coefficient dominant de P

- $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont les racines réelles distinctes de P.

$\forall\ 1 \leq i \leq s$, Q_i est un polynôme unitaire réel de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif $Q_i \neq Q_j$, $\forall\ i \neq j$

- $m_1, m_2, \dots, m_k, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{N}^*$

Exemple :

- $P(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 2$

1) vérifier que -1 est une racine double de P.

2) Déduire la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Réponse :

$P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4 \times (-1) + 2$

$= 0$

$P'(X) = 4X^3 + 6X^2 + 6X + 4$

$P'(-1) = 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 6(-1) + 4$

$= -4 + 6 - 6 + 4 = 0$

$P''(X) = 12X^2 + 12X + 6$

$P''(-1) = 12(-1)^2 + 12(-1) + 6$

$= 6 \neq 0$

$\Rightarrow -1$ est une racine double de P.

$\Rightarrow P(X) = (X+1)^2 (aX^2 + bX + c)$

$= (X+1)^2 (X^2+1)$

2) $P(X) = (X+1)^2 (X^2+1)$ c'est la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$.

5) divisions suivants les puissances croissantes :

Théorème :

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ 2 polynômes tel que $B(0) \neq 0$

Soit $k \in \mathbb{N}$, alors il existe une unique couple de polynômes (Q_k, R_k) de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$A = BQ_k + X^{k+1} R_k$ avec

$\deg Q_k \leq k$

Le polynôme Q s'appelle le quotient de la division de A par B suivant les puissances croissantes à l'ordre k et $X^{k+1} R_k$ est le reste de cette division

Exemple: $A = 1 - X$ $\quad B = 1 - X + X^2$

division de A par B suivant ~~la div de la~~ puissance croissante à l'ordre 2

$$\begin{array}{c|l} 1-X & 1-X+X^2 \\ \hline & 1-X^2 \dots X^3 \end{array}$$

3) Formule de taylor pour les polynômes :

théorème: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$

Soit $a \in \mathbb{K}$ alors:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + P''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{P^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Remarque

Si $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$a_0 = P(0)$

$a_1 = \frac{P'(0)}{1!}$

$a_2 = \frac{P''(0)}{2!}$

$\vdots$

$a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$

Exemple: Soit $P = 1 + 9x + 4x^2$

Ecrire P en puissance de $(x+1)$

$a = -1$

$$P(x) = P(-1) + P'(-1)(x+1) + \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2$$

$$P = -4 + 1(x+1) + 4(x+1)^2$$