Université de Monastir
Institut Supérieur D'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Dépt. de Mathématiques

A.U: 2024-2025
L1 INFO.
Algébre 2
Série No.2

Matrices - Déterminants -

Exercice 1: On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et le rang de chacune des matrices ci-dessus.
2. Retrouver le rang de chaque matrice en appliquant la méthode du pivot de Gauss.
3. Indiquer les matrices inversibles et donner leurs inverses par la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 2: Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$, calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1-i \\ i & 1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} j+1 & 1 & j^2 \\ 2 & j^2 & j \\ j^2 & j & 2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 8 & 4-i & 12 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 1+a & -a & a \\ b & 1+b & -b \\ c & -c & 1+c \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & a & 2 & a \\ a & 1 & 2 & -a & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 & a \\ 2 & 0 & 3 & 0 & b \\ -2 & 0 & 2 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 3:

1. Déterminants de Vandermonde:

   Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, calculer : $V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ puis $V(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$.

2. Calculer $det(A)$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ dans les cas suivants:

   (i) $a_{ij} = \begin{cases} x\ , & si\ \ i = j \\ 1\ , & si\ \ i \neq j \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (ii) $n = 4$, $a_{ij} = i^j$, (on pourra montrer que $det(A)$ est un déterminant de Vandermonde)

3. Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n vérifiant: $A^2 = -I_n$. Montrer que n est un entier pair.

Exercice 4:

1. Dans les exemples suivants, caculer le déterminant de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (i) $E = \mathbb{C}^2$ et $u(x, y) = (ix + y,\ (1+i)y - x)$. (iii) $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $u(P) = P' - 2P(X+1)$.
   (ii) $E = \mathbb{R}^3$ et $u(x, y, z) = (x + z, y - 2x, z - y)$. (iv) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $u(A) = {}^tA$.
2. Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et dans le cas où la matrice est inversible, calculer son inverse:

$$\begin{pmatrix} a & i \\ -i & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Exercice 5:

1. Soit dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs (e_1,e_2,e_3), avec $e_1 = (1, 1, t)$, $e_2 = (1, t, 1)$ et $e_3 = (t, 1, 1)$. Dire pour quelles valeurs de t la famille (e_1,e_2,e_3) est libre.
2. Déterminer le rang des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2m & 0 \\ -m+1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & m-3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$f(x, y, z) = (2x - y,\ -2x + y - 2z, x + y + 3z)$$

1. Ecrire la matrice A de f relativement à la base canononique B de $\mathbb{R}^3$.
2. Caculer le déterminant de f et déduire que f est inversible.
3. Déterminer la comatrice de A, caculer A^{-1} et déduire l'expression de f^{-1}.
4. Montrer que com(A) est inversible et donner son inverse.

   On considère les vecteurs: $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, -1, 0)$.
5. Calculer $det_B(v_1, v_2, v_3)$ et déduire que la famille $B' = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Ecrire P la matrice de passage de la base B à la base B' et déterminer son inverse.
7. Déterminer D la matrice de f relativement à la base B'.
8. Ecrire la relation entre A et D à l'aide de la matrice P.
9. Caculer D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\ D^n\ P^{-1}$ et caculer A^n.
11. On considère les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par:

$$x_0 = z_0 = 1,\ y_0 = -1\ \ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n \\ y_{n+1} = -2x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + 3z_n \end{cases}$$

   (a) On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
   (b) En déduire le terme général des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$.