
Série 3

Exercice 1: Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes:

$$\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}, \quad \frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1}, \quad \frac{X + 1}{(X^2 - 1)(X + 2)}, \quad \frac{X - 1}{X^2(X^2 + 1)},$$

$$\frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X - 1)^4}, \quad \frac{X^5 + X^4 + 1}{(X - 1)^3(X + 1)^2}, \quad \frac{6X + 5}{(3X^2 + 5X + 2)^2}.$$

Exercice 2: En utilisant la division suivant les puissances croissantes, décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes:

$$\frac{X}{(X - 1)^3(X + 2)}, \quad \frac{X^2 - 3}{(X + 3)^2(X - 3)}, \quad \frac{5X - 4}{X(X - 1)^2}.$$

Exercice 3: Décomposer en éléments simples, pour tout entier $n \geq 2$, les fractions rationnelles suivantes:

$$\frac{1}{X^n - 1}, \quad \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}.$$

Exercice 4:

On donne le polynôme: $P = -X^6 + X^4(3 - X) - 2 + (X^3 - 4)^2 + 9X^2(X - 1) - 2(X - 3)^2$.

1. Donner le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P .
2. Montrer que 1 est une racine triple de P .
3. Décomposer le polynôme P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Ecrire la formule de Taylor pour P au point 1.
5. En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)^4$.
6. Soit $Q = X^4 + X^3 + aX^2 + X - 2$, $a \in \mathbb{C}$.
7. Déterminer a pour que i soit racine de Q .
8. Décomposer le polynôme Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
9. Donner un diviseur commun à P et à Q de degré strictement positif.
10. Préciser le degré, la partie entière et les pôles de la fraction: $F_1 = \frac{Q}{P}$.
11. En utilisant une division suivant les puissances croissantes, décomposer la fraction: $F = \frac{(X-1)^2 Q}{X^3 P}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Quelques méthodes de calcul.

* Simplification par symétrie, paire et impair.

$$F = E + \frac{R}{Q} \text{ avec } \boxed{\deg R < \deg Q}.$$

i/ R paire $\Rightarrow R(-x) = R(x)$

exemple: $R = \frac{1}{(x-1)^2 (x+1)^2}$ est paire

$$R = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow R(-x) = R(x)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{-a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{-c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} \\ &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

\Rightarrow Par unicité des coefficients de la décomposition en éléments simples,

$$-a = c, b = d, -c = a, d = b$$

$\Rightarrow \boxed{a = -c \atop b = d} \Rightarrow$ le calcul de a et b suffit donc.

de même si R impaire

2° types de symétries:

exemple: $F = \frac{1}{x(x-1)}$; les pôles 0 et 1

sont symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow F(x) = F(1-x) \Rightarrow \begin{aligned} F &= \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} \\ F(1-x) &= \frac{-\beta}{x} - \frac{\alpha}{x-1} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\beta}$$

Ex 1:

Série 3:

(1)

$$1^{\circ}/ \quad F = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1} = \frac{P}{Q}.$$

• F est une forme irréductible unitaire.

$\deg(F) = 2 \Rightarrow$ on effectue la division euclidienne de P par Q pour trouver la partie entière E :

$$\begin{array}{c|c} & x-1 \\ \begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + x - 4 \\ x^3 - x^2 \\ \hline -2x^2 + x - 4 \\ -2x^2 + 2x \\ \hline -x + 4 \\ -x + 1 \\ \hline R = -5 \end{array} & \begin{array}{c} x^2 - 2x + 1 \\ \hline E \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow F = E + \frac{R}{Q} = x^2 - 2x + 1 + \frac{-5}{x-1}.$$

$$2^{\circ}/ \quad F = \frac{2x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{P}{Q}$$

• F est une forme irréduc. unitaire

$\deg(F) = 1 \Rightarrow$ On effectue la div. euclidienne de P par Q :

$$\begin{array}{c|c} & x^2 - 2x + 1 \\ \begin{array}{r} 2x^3 + x^2 - x + 1 \\ 2x^3 - 4x^2 + 2x \\ \hline 5x^2 - 3x + 1 \\ 5x^2 - 10x + 5 \\ \hline 7x - 4 \\ \hline R \end{array} & \begin{array}{c} 2x + 5 \\ \hline E \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow F = E + \frac{R}{Q} = 2x + 5 + \frac{7x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

• $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$
1 racine double de Q

$$\Rightarrow F = 2x + 5 + \frac{7x - 4}{(x-1)^2}$$

Les pôles defi: 1 pôle double.

$$\Rightarrow F = 2x + 5 + \frac{d_1}{x-1} + \frac{d_2}{(x-1)^2}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad d_2 = (x-1)^2 F \Big|_{x=1} = 3.$$

$$\bullet \quad f(0) = 5 - d_1 + 3 = 1 \Rightarrow d_1 = 2$$

$$\text{Cl: } f = 2x + 5 + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

$$3^{\circ} \quad F = \frac{x+1}{(x^2-1)(x+2)} \quad \begin{array}{l} P \text{ et } Q \text{ pas irréductible} \\ \text{car -1 racine commune} \\ \text{pour } P \text{ et } Q \end{array}$$

$$\Rightarrow F = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} \text{ irréductible}$$

$\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0$ (partie entière).

\Leftrightarrow les pôles de F : 1 pôle simple
- 2 pôles simples

$$\Rightarrow F = \frac{1}{x-1} + \frac{P}{x+2} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} A = (x-1)F \Big|_{x=1} = \frac{1}{3} \\ B = (x+2)F \Big|_{x=-2} = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

4) $F = \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}$ irréductible, unitaire.

$\deg F = -3 < 0 \Rightarrow$ partie entière $E=0$.

- Les pôles de F :
 - Dans \mathbb{R} : 0 pôle double
 - Dans \mathbb{C} :
 - 0 pôle double
 - i pôle simple
 - $-i$ pôle simple

- Décomposition dans \mathbb{R} :

$$F = \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{x^2} + \frac{ax+b}{x^2+1}; \lambda_1, \lambda_2, a, b \in \mathbb{R}$$

x^2+1
 $D < 0$

$$\lambda_2 = x^2 F \Big|_{x=0} = \frac{x-1}{x^2+1} \Big|_{x=0} = -1$$

$$\lambda_1 = (x^2 F)' \Big|_{x=0} = \left(\frac{x-1}{x^2+1} \right)' \Big|_{x=0} = \left[\frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2} \right] \Big|_{x=0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x F(x) = \lambda_1 + 0 + a = 0 \Rightarrow a = -\lambda_1 = -1$$

$$\begin{aligned} & \text{Pour } x=1: F(1) = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \frac{a+b}{2} = 0 \Leftrightarrow b = -a = 1 \\ \Rightarrow F &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{-x+1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

• Décomposition dans \mathbb{C} : (40)

$$F = \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{x^2} + \frac{\alpha}{x-i} + \frac{\bar{\alpha}}{x+i} \quad \begin{matrix} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \alpha, \bar{\alpha} \in \mathbb{C} \end{matrix} .$$

$$\bullet \lambda_2 = \left. x^2 F \right|_{x=0} = -1 .$$

$$\bullet \lambda_1 = \left. (x^2 F)' \right|_{x=0} = 1 .$$

$$\bullet \alpha = \left. (x-i) F \right|_{x=i} = \left. \frac{x-1}{x^2(x+i)} \right|_{x=i} = \frac{i-1}{i^2(i+i)}$$

$$= \frac{(i-1) \times (i+i)}{-2i \times i} .$$

$$= \frac{-1 \cancel{i}}{2} .$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = -\frac{1+i}{2} .$$

$$\stackrel{\text{cl.}}{=} f = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{1-i}{2}}{x-i} + \frac{-\frac{1+i}{2}}{x+i} .$$

$$5/ F = \frac{x^5 + x^4 + 1}{x(x-1)^4} \text{ irréductible, unitaire.}$$

$$\bullet \deg(F) = 0 \Rightarrow E = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 .$$

• Les pôles de F :
 0 pôle simple
 1 pôle d'ordre 4.

Décomposition ds \mathbb{R} et \mathbb{C} :

$$\Rightarrow F = 1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\lambda_1}{x-1} + \frac{\lambda_2}{(x-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(x-1)^3} + \frac{\lambda_4}{(x-1)^4}; \quad \begin{matrix} \alpha \in \mathbb{R} \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

(5)

$$\bullet \alpha = \left. xF \right|_{x=0} = \left. \frac{x^5 + x^4 + 1}{(x-1)^4} \right|_{x=0} = 1.$$

$$\bullet \lambda_4 = \left. (x!)^4 F \right|_{x=1} = \left. \frac{x^5 + x^4 + 1}{x} \right|_{x=1} = 3.$$

$$\bullet \lambda_3 = \left. \left(\frac{(x-1)^4 F}{1!} \right)' \right|_{x=1} = \left. \left(\frac{x^5 + x^4 + 1}{x} \right)' \right|_{x=1} = \left. \left(x^4 + x^3 + \frac{1}{x} \right)' \right|_{x=1}$$

$$= \left. 4x^3 + 3x^2 - \frac{1}{x^2} \right|_{x=1} = 6.$$

$$\bullet \lambda_2 = \left. \left(\frac{(x-1)^4 F}{2!} \right)'' \right|_{x=1} = \left. \frac{12x^2 + 6x + \frac{2}{x^3}}{2} \right|_{x=1} = 10.$$

$$\bullet \lambda_1 = \left. \left(\frac{(x-1)^4 F}{3!} \right)^{(3)} \right|_{x=1} = \left. \frac{24x + 6 - \frac{6}{x^4}}{6} \right|_{x=1} = 4.$$

$$\stackrel{\text{cl}}{=} f = 1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{10}{(x-1)^2} + \frac{6}{(x-1)^3} + \frac{3}{(x-1)^4}.$$

$$\stackrel{\text{G}}{=} f = \frac{x^5 + x^4 + 1}{(x-1)^3 (x+1)^2} \text{ irrég, unitaire.}$$

$$\bullet \deg(f) = 0 \Rightarrow E = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

• des pôles de f : 1 pôle triple
-1 pôle double.

$$\Rightarrow f = 1 + \frac{\lambda_1}{x-1} + \frac{\lambda_2}{(x-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(x-1)^3} + \frac{\alpha_1}{(x+1)} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2}, \quad \overbrace{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^{\infty}, \overbrace{\alpha_1, \alpha_2}^{\infty}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lambda_3 = (x-1)^3 f \Big|_{x=1} = - \\ \bullet d_2 = ((x-1)^2 f)' \Big|_{x=1} = - \\ \bullet d_3 = \frac{((x-1)^3 f)''}{2!} \Big|_{x=1} = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \alpha_2 = (x+1)^2 f \Big|_{x=-1} = - \\ \bullet \alpha_1 = \frac{((x+1)^2 f)'}{1!} \Big|_{x=-1} = - \end{array} \right\} \quad (6)$$

\boxed{f} $f = \frac{6x+5}{(3x^2+5x+2)^2}$ irréductible, non unitaire.

$$\bullet \deg(f) < 0 \Rightarrow E = 0.$$

$$\bullet \text{des pôles de } f : \quad 3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 25 - 4 \times 3 \times 2 \\ &= 25 - 24 \\ &= 1 \\ \Rightarrow x &= -\frac{5-1}{6} \text{ ou } x = -\frac{5+1}{6} = -\frac{2}{3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

\Rightarrow • -1 pôle double

• $-\frac{2}{3}$ pôle double.

$$\Rightarrow (3x^2+5x+2)^2 = 3(x+1)^2 \left(x+\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow f = \frac{6x+5}{3(x+1)^2 \left(x+\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\lambda_1}{x+1} + \frac{d_2}{(x+1)^2} + \frac{\alpha_1}{x+\frac{2}{3}} + \frac{\alpha_2}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Q1} \quad F = \frac{6x+5}{(3x^2+5x+2)^2} = \frac{6x+5}{\cancel{x}(x+1)^2(x+\frac{2}{3})^2}$$

↙ g

Ex 2:

(7)

$$1^{\circ}/ F = \frac{x}{(x-1)^3 (x+2)} \text{ irréductible, unitaire.}$$

• $\deg(F) = -3 < 0 \Rightarrow E = 0$

• des pôles de F sont: 1 pôle triple, -2 pôle simple

$$\Rightarrow F = \frac{\lambda}{x+2} + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}; \lambda, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$\lambda = (x+2)F \Big|_{x=-2} = \frac{x}{(x-1)^3} \Big|_{x=-2} = \frac{2}{27}.$$

Pour calculer a, b et c , on pose $h = x-1$
 $\Leftrightarrow x = h+1$

$$\Rightarrow F(h+1) = \frac{h+1}{h^3(h+3)}.$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $(h+1)$ par $(h+3)$ à l'ordre 2.

$$\begin{array}{r|l} 1+h & 3+h \\ \hline 1+\frac{1}{3}h & \frac{1}{3} + \frac{2}{9}h - \frac{2}{27}h^2 \\ +\frac{2}{3}h & \\ \hline \frac{2}{3}h & \\ -\frac{2}{27}h^2 & \\ \hline \frac{2}{9}h^2 & \\ -\frac{2}{9}h^2 - \frac{2}{27}h^3 & \\ \hline \frac{2}{27}h^3 & \end{array}$$

ainsi $(1+h) = (3+h)\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}h - \frac{2}{27}h^2\right) + \frac{2}{27}h^3$

$$\Leftrightarrow \frac{1+h}{3+h} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}h - \frac{2}{27}h^2 + \frac{2}{27}\frac{h^3}{3+h}$$

$$\Leftrightarrow F(1+h) = \frac{1}{3h^3} + \frac{2}{9h^2} - \frac{2}{27h} + \frac{2}{27(3+h)}$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{\frac{2}{27}}{x+2} + \frac{-\frac{2}{27}}{x-1} + \frac{\frac{2}{9}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^3}.$$

On a trouvé les valeurs des scalaires a, b etc mais aussi on a retrouvé la valeur de λ .

$$2^{\circ} \quad F = \frac{x^2 - 3}{(x+3)^2(x-3)} \quad \text{inéd. mixte} \quad (8)$$

• $\deg(F) = -1 < 0 \Rightarrow E = 0$.

• Les pôles de F : -3 pôle triple, 3 pôle simple

$$\Rightarrow F = \frac{\lambda}{x-3} + \frac{a}{x+3} + \frac{b}{(x+3)^2} ; \lambda, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = (x-3)F \Big|_{x=3} = \frac{x^2 - 3}{(x+3)^2} \Big|_{x=3} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Pour calculer a , b et c , on pose $h = x+3 \Leftrightarrow x = h-3$

$$\Rightarrow F(h-3) = \frac{(h-3)^2 - 3}{h^2(h-6)} = \frac{h^2 - 6h + 6}{h^2(h-6)}.$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $(h-6h+h^2)$ par $(-6+h)$ à l'ordre 1.

$$\begin{array}{r} 6 - 6h + h^2 \\ + 6 - h \\ \hline -5h + h^2 \\ -5h + \frac{5}{6}h \\ \hline \frac{1}{6}h^2 \end{array} \left| \begin{array}{c} -6+h \\ -1+\frac{5}{6}h \end{array} \right.$$

donc $6 - 6h + h^2 = (-6+h)(-1+\frac{5}{6}h) + \frac{1}{6}h^2$
 $\Rightarrow F(h-3) = -\frac{1}{h^2} + \frac{5}{6h} + \frac{1}{6(h-6)}$
 $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{5}{6x} + \frac{-1}{(x+3)^2}$.

On a trouvé les valeurs des scalaires a et b
mais on a retrouvé la valeur de λ .

(9)

$$3^{\circ} F = \frac{5x - 4}{x(x-1)^2} \text{ m\'ed, unitaire.}$$

- $\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0.$
- Les pôles de F sont : 0 pôle simple, 1 pôle double.
 $\Rightarrow F = \frac{1}{x} + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}; a, b \in \mathbb{R}.$

$$\lambda = xF \Big|_{x=0} = \frac{5x-4}{(x-1)^2} \Big|_{x=0} = -4.$$

Pour calculer a et b , on pose $h = x-1$
 $\Leftrightarrow x = h+1$

$$\Rightarrow F(h+1) = \frac{5(h+1)-4}{(h+1)h^2} = \frac{5h+1}{(h+1)h^2}.$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $(1+5h)$ par $(1+h)$ à l'ordre 1.

$\begin{array}{c cc} 1+5h & 1+h \\ \hline 1+h & 1+4h \\ \hline 4h & 4h+4h \\ \hline -4h^2 & \end{array}$	<p>ainsi $(1+5h) = (1+h)(1+4h) - 4h^2$</p> $\Rightarrow F(h+1) = \frac{1}{h^2} + \frac{4}{h} - \frac{4}{h+1}$ $\Rightarrow F(x) = \frac{-4}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$
--	---

On a trouv\'e les valeurs des scalaires a et b
mais aussi on a retrouv\'e la valeur de λ .

(10)

Ex 3:

$$1^{\circ} F = \frac{1}{x^n - 1} = \frac{P}{Q}, \quad n \geq 2.$$

- $\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0$

- les pôles de F sont les racines n -ièmes de l'unité, c'est-à-dire les complexes $x_k = e^{\frac{2\pi k \pi i}{n}}$, $k \in [0, n-1]$. Chaque pôle est simple.

$$\Rightarrow F = \frac{\alpha_0}{x - x_0} + \frac{\alpha_1}{x - x_1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{x - x_{n-1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{x - x_k};$$

$$\alpha_k = \frac{P(\cancel{x})}{Q'(x)} \Big|_{x=x_k} = \frac{1}{nx^{n-1}} \Big|_{x=x_k} = \frac{1}{nx_k^{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi k \pi i}{n}}}{n}.$$

$$\Rightarrow f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n} e^{\frac{2\pi k \pi i}{n}}}{x - x_k}.$$

$$2^{\circ} F = \frac{x^{n-1}}{x^n - 1}, \quad n \geq 2$$

- $\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0$.

- les pôles de f : $x_k = e^{\frac{2\pi k \pi i}{n}}$, $k \in [0, n-1]$. (pôles simples)

$$\Rightarrow F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{x - x_k};$$

$$\Rightarrow F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n}}{x - x_k}.$$

$$\alpha_k = \frac{P(x)}{Q'(x)} \Big|_{x=x_k} = \frac{x^{n-1}}{nx^{n-1}} \Big|_{x=x_k} = \frac{1}{n}.$$

$$\underline{\text{EX4:}} \quad P = -x^6 + x^4(3-x) - 2 + (x-4)^2 + 9x^2(x-1) - 2(x-3)^2$$

$$= -x^6 + 3x^4 - x^5 - 2 + x^6 - 8x^3 + 16 + 9x^3 - 9x^2 - 2x^2 + 12x - 18$$

$$= -x^5 + 3x^4 + x^3 - 11x^2 + 12x - 4.$$

$$1^{\circ} \cdot \deg(P) = 5$$

- coefficient dominant = -1.
- terme constant = -4.

$$2^{\circ} \cdot P = -x^5 + 3x^4 + x^3 - 11x^2 + 12x - 4.$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow P(1) &= -1 + 3 + 1 - 11 + 12 - 4 \\ &\Rightarrow (-1 - 11 - 4) + (3 + 1 + 12) \\ &= -16 + 16 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\bullet P' = -5x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 22x + 12.$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow P'(1) &= -5 + 12 + 3 - 22 + 12 \\ &= (-5 - 22) + (12 + 3 + 12) \\ &\Rightarrow -27 + 27 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\bullet P'' = -20x^3 + 36x^2 + 6x - 22$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow P''(1) &= -20 + 36 + 6 - 22 \\ &= (-20 - 22) + (36 + 6) \\ &= -42 + 42 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\bullet P^{(3)} = -60x^2 + 72x + 6$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow P^{(3)}(1) &= -60 + 72 + 6 \\ &= -60 + (72 + 6) \\ &= -60 + 78 \\ &= 18 \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P''(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \\ \text{et} \\ P^{(3)}(1) \neq 0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow 1 \text{ racine triple de } P.$

3°/ 1racine triple de P

$$\Rightarrow P = (x-1)^3 Q \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \deg Q = 2.$$

Pour déterminer Q , on effectue la division

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

$$\begin{array}{r} -x^5 + 3x^4 + x^3 - 11x^2 + 12x - 4 \\ -x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2 \\ \hline 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \\ 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ -x^2 + 4 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P = (x-1)^3 (-x^2 + 4)$$

$$= -(x-1)^3 (x^2 - 4)$$

Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\Rightarrow P = -(x-1)^3 (x-2) (x+2)$$

4°/ Formule de Taylor pour P au point 1:

$$\begin{aligned} P &= P(1) + \frac{P'(1)}{1!} (x-1) + \frac{P''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{P^{(3)}(1)}{3!} (x-1)^3 \\ &\quad + \frac{P^{(4)}(1)}{4!} (x-1)^4 + \frac{P^{(5)}(1)}{5!} (x-1)^5. \end{aligned}$$

$$\text{Or } P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \text{ et } P^{(3)}(1) = 18.$$

Il nous reste à calculer ~~$P'''(1)$~~ , $P^{(4)}(1)$ et $P^{(5)}(1)$

$$\bullet P^{(4)} = -120x + 72 \quad (16)$$

$$\Rightarrow P^{(4)}(1) = -120 + 72$$

$$= -48.$$

$$\bullet P^{(5)} = -120$$

$$\hookrightarrow P^{(5)}(1) = -120$$

$$\text{de plus } 3! = 3 \times 2 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$$

cf: F. Tay pour P en 1.

$$\Rightarrow P = \frac{P^{(3)}(1)}{3!} (x-1)^3 + \frac{P^{(4)}(1)}{4!} (x-1)^4 + \frac{P^{(5)}(1)}{5!} (x-1)^5$$

$$= 3(x-1)^3 - 2(x-1)^4 - (x-1)^5.$$

5°/

$$\text{On a } P = 3(x-1)^3 - 2(x-1)^4 - (x-1)^5$$

$$= (x-1)^4 \left[-2 - (x-1) \right] + 3(x-1)^3$$

$$= (x-1)^4 (-x-1) + 3(x-1)^3.$$

div. eucl
de
 P par $(x-1)^4$: $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{quotient: } -x-1 \\ \text{reste: } 3(x-1)^3. \end{array} \right.$

$$6^{\circ} \text{ Soit } Q = x^4 + x^3 + ax^2 + x - 2, a \in \mathbb{Q}. \quad (18)$$

14

$$\text{a) } P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\text{b) } Q = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

$$\cancel{x^3(x+1)} \cancel{+ (x^3-x^2+x)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q \in \mathbb{R}[x] \\ \text{et} \\ i \text{ racine de } Q \end{array} \right. \Rightarrow \bar{i} = -i \text{ racine de } Q$$

$$\Rightarrow Q = (x-i)(x+i)Q_1; \quad Q_1 \in \mathbb{R}[x] \text{ et } \deg Q_1 = 2.$$

$$= (x^2+1)Q_1$$

Pour déterminer Q_1 , on effectue la div. eucl.
de Q par (x^2+1) .

$$\begin{array}{r|l} & x^2+1 \\ \hline x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 & x^2 + x - 2 \\ x^4 + x^2 & \hline x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ x^3 + x & \hline -2x^2 - 2 \\ -2x^2 - 2 & \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow Q = (x^2+1)(x^2+x-2)$$

• $x^2+1=0 \Leftrightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ irréductible dans $\mathbb{R}[x]$.

• $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1$ ou $x=-2$

$$\Rightarrow Q = (x^2+1)(x-1)(x+2) \text{ dans } \mathbb{R}[x] \Rightarrow Q = (x-i)(x+i)(x-1)(x+2) \text{ dans } \mathbb{C}.$$

C° • $P = -(x-1)^3(x-2)(x+2)$ (18)

• $Q = (x-1)(x+2)(x^2+1)$

On remarque $(x-1)(x+2)$ divise P et divise Q
 $\Rightarrow (x-1)(x+2)$ est un diviseur commun à P et à Q .

7°

$$F_1 = \frac{Q}{P} = \frac{(x-1)(x+2)(x^2+1)}{-(x-1)^3(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+1}{-(x-1)^2(x-2)}$$

- $\deg(F_1) = -1 < 0 \Rightarrow E = 0$ (partie entière)
- Les pôles de F_1 : 1 pôle double, 2 pôles simples.

8°

$$F = \frac{(x-1)^2 Q}{x^3 P} = \frac{x^2+1}{x^3(x+2)}, \text{ irréductible.}$$

- $\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0$
- Les pôles de F : 0 pôle triple, 2 pôles simples

$$\Rightarrow F = \frac{\lambda}{-x+2} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}, \quad \lambda, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

~~Etape 1~~ Pour calculer λ, a, b etc, ~~on peut écrire~~

~~Effectuons la division suivant les puiss. croissantes de $(1+x^2)$ par (x^2-x) à l'ordre 2.~~

$$\begin{array}{c|ccccc} 1+x^2 & 2-x & & & & \\ \hline 1-\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}x^2 & & & & \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2 & & & & & \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2 & & & & & \\ \hline \frac{5}{8}x^2 & & & & & \\ \frac{5}{8}x^2-\frac{5}{8}x^3 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \quad \text{ainsi } 1+x^2 = (x^2-x)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}x^2\right) + \frac{5}{8}x^3$$

$$\Rightarrow F = \frac{\frac{5}{8}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x^3} + \frac{\frac{5}{8}}{-x+2}.$$

donc on trouve les valeurs des scalaires λ, a, b etc.