Chp IV Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans toute la suite $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$.

Introduction :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, réduire l'endom u c'est trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est la plus simple c'est à dire une matrice diagonale (dans le cas on dira que u est diagonalisable) ou une matrice triangulaire (et dans ce cas, on dira que u est trigonalisable).

Pour les matrices carrées : Si $A \in M_n(K)$, réduire la matrice A c'est déterminer une matrice diagonale (ou triangulaire) qui soit semblable à A.

I) Polynôme Caractéristique :

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée :

Déf 1 : Polynôme caractéristique d'une matrice carrée :

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n.

On appelle polynôme caractéristique de A, noté P_A ou χ_A, le déterminant de la matrice $(A - x I_n)$.

i.e : $\forall x \in K$, $P_A(x) = \det(A - x I_n)$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

Exps :

1) $A = 0$ la matrice nulle, $P_A(x) = (-x)^n$.

2) $A = I_n$ la matrice identité, $P_A(x) = (1-x)^n$.

3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $P_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} 4-x & 6 \\ -1 & 5-x \end{vmatrix}$

$= (4-x)(5-x) + 6 = x^2 - 9x + 26.$

4) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$

$$P_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc$$

$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc$$
$$= x^2 - \operatorname{tr} A \cdot x + \det A.$$

Ainsi pour tte matrice $A \in M_2(K)$, $\boxed{P_A(x) = x^2 - \operatorname{tr} A\, x + \det A}$

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad P_A(x) = \det(A - x I_3)$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ -1 & -x & 3 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \quad \text{dev \% à } L_1$$

$$= (2-x)\begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)\left[-x(1-x) - 3\right] - (x-1-3)$$

$$= -x^3 + 2x^2 - 2.$$

Théo : Soit $A \in M_n(K)$, Alors le polynôme Caractéristique de A est un polynôme à coeff dans K, de degré n, de coeff dominant $(-1)^n$, de terme constant $\det A$ et il s'écrit :

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \cdot x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_1 x + \det A$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2} \in K$.

Rque : $P_A(x) = \det(A - x I_n)$ d'où $P_A(0) = \det A$
$= \text{terme Constant}.$

Prop :

(a) Une matrice et sa transposée ont même poly caractéristique

(b) Deux matrices semblables ont même poly caractéristique.

Dém : (a) Soit $A \in M_n(K)$, $P_{{}^tA}(x) = \det({}^tA - x I_n) = \det\left({}^t(A - x I_n)\right)$
$= \det(A - x I_n) = P_A(x).$

(b) Soit $A, M \in M_n(K)$ deux matrices semblables.
Alors $\exists\, Q \in M_n(K)$ une matrice inversible tq $M = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$.
Ainsi $P_M(x) = \det(M - x I_n) = \det(Q^{-1} \cdot A \cdot Q - x I_n)$

$$= \det\left(Q^{-1}(A - x I_n)\, Q\right)$$
$$= \det(Q^{-1}) \cdot \det(A - x I_n) \cdot \det Q$$
$$= \det(A - x I_n) = P_A(x).$$

Défé: Polynôme caractéristique d'un endomorphisme :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle polynôme caractéristique de l'endom u, le déterminant de l'endom $(u - x\, id)$.

$$P_u(x) = \det(u - x\, id) = \det(A - x I_n)$$
$$= P_A(x) \qquad \text{avec } A = mat(u, B) \text{ où } B \text{ est une base de } E.$$

Rque : si B' est une autre base de E et $M = mat(u, B')$ alors A et M sont semblables
$M = P^{-1} \cdot A \cdot P$ avec $P = pass(B, B')$
d'où $P_M = P_A$.

Exp : Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = P'$.
Calculons le polynôme caractéristique de u.
Soit $Bc = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.
Soit $A = mat(u, Bc) =$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & \cdots & u(X^n) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & 0 & 2 & & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & n \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ X \\ \vdots \\ \\ X^n \end{array}$$

$u(1) = 0$.
$u(X) = 1$
$u(X^2) = 2X$, $\quad u(X^n) = n X^{n-1}$.

$P_u(x) = P_A(x) = \det(A - x I_n)$

$$= \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & 2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & -x \end{vmatrix}$$ est le déterminant d'une matrice triang supérieure.

$= (-x)^{n+1}$

$\left(n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X] \ , \ A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \right)$.

Exp :

1) $u = id_E$, soit B une base de E.

$mat(u, B) = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

d'où $P_u(x) = \begin{vmatrix} 1-x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^n$.

2) $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (y, x)$.

Soit $B_c = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$A = mat(u, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d'où $P_u(x) = P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 1$.

2 Valeurs propres – Vecteurs propres

Déf 1 : Eléments propres d'un endomorphisme :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(i) Un scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre de u (λ v.p de u) s'il existe un vecteur $a \in E$, $a \neq 0$ tq $u(a) = \lambda a$.

(ii) Un vecteur $a \in E$ est dit vecteur propre de u ssi $a \neq 0$ et il existe $\lambda \in K$ tq $u(a) = \lambda a$.

on dit que a est un vecteur propre de u associé à la v.p λ.

(iii) soit λ une v.p de u.

Alors le sous espace vect $\mathrm{Ker}(u - \lambda id)$ est non réduit à $\{0\}$, il est noté $E_\lambda(u)$ et appelé le sous espace propre de u associé à la v.p λ.

$$\boxed{E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda id) = \{x \in E \text{ tq } u(x) = \lambda x\}}$$

(iv) On appelle spectre de u, noté $sp(u)$, l'ensemble de ses v.p.

$sp(u) = \{\lambda \in K \text{ tq } \lambda \text{ v.p de } u\}$.

Rque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in K$

- si λ est v.p de u alors $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda id) \neq \{0\}$, $\dim E_\lambda(u) \geq$
- si λ n'est pas v.p de u alors $\mathrm{Ker}(u - \lambda id) = \{0\}$.

Exp : $E = \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = P'$. $u \in \mathcal{L}(E)$.

Déterminons les éléments propres de u.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une v.p de u alors $\exists P \in E$, $P \neq 0$ tq $u(P) = \lambda P$

$u(P) = \lambda P \Leftrightarrow P' = \lambda P \Rightarrow \deg P' = \deg(\lambda P)$ ~~$\Rightarrow \deg P - 1 = \deg(\lambda P)$~~

si $\lambda \neq 0$ alors $\deg(\lambda P) = \deg P$

Ainsi $\deg P - 1 = \deg P \Rightarrow -1 = 0$ imp.

par suite $\forall \lambda \neq 0$, λ ne peut pas être une v.p de u.

u n'admet pas de v.p non nulles.

Vérifions si $\lambda = 0$ peut être v.p de u.

si $\lambda = 0$ alors $u(P) = 0 \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow P = cte$.

Soit alors $P = 1$ alors $P \neq 0$ et $u(P) = 0 = 0.P$

d'où $\lambda = 0$ est v.p de u.

cl : $Sp(u) = \{0\}$.

$E_0(u) = Ker(u - 0\, id) = Ker\, u = \{P \in E \text{ tq } u(P) = 0\}$

$= \{P \in E \text{ tq } P' = 0\} = \{P \text{ poly constant}\} = \mathbb{R}$.

Théo : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Soit λ, α deux v.p distincts de u.

Alors $E_\lambda(u) \cap E_\alpha(u) = \{0\}$

i.e : Un vecteur propre est associé à une seule v.p.

(b) Une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres 2à2 distincts est une famille libre dans E.

Dém :

(a) Soit $x \in E_\alpha(u) \cap E_\lambda(u)$ alors $\begin{cases} u(x) = \alpha x \\ \text{et} \\ u(x) = \lambda x \end{cases}$

d'où $\alpha x = \lambda x$

$\Rightarrow (\alpha - \lambda) x = 0$ comme $\alpha \neq \lambda$ alors $x = 0$.

cl : $E_\alpha(u) \cap E_\lambda(u) = \{0\}$.

Théo : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme caractéristique.

i.e : λ v.p de $u \Longleftrightarrow P_u(\lambda) = 0$.

Dém : λ v.p de $u \Longleftrightarrow \exists a \in E,\ a \neq 0$ tq $u(a) = \lambda a$

$\Longleftrightarrow \exists a \in E,\ a \neq 0$ tq $(u - \lambda id)(a) = 0$

$\Longleftrightarrow \exists a \in E,\ a \neq 0$ tq $a \in Ker(u - \lambda id)$

$\Longleftrightarrow Ker(u - \lambda id) \neq \{0\} \Longleftrightarrow (u - \lambda id)$ n'est pas injectif.

$\Longleftrightarrow (u - \lambda id)$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \det(u - \lambda id) = 0 \Longleftrightarrow P_u(\lambda) = 0$.

Exp 1 : $u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$P \longmapsto u(P) = P'$.

on a déjà déterminé la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et son polynôme caractéristique.

$$A = mat(u, Bc) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & n \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_u(x) = P_A(x) = (-x)^{n+1}$.

Ainsi la seule valeur propre de u est 0.

$Sp(u) = \{0\}$.

c'est ce qu'on a déjà trouvé.

Exp 2 : Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longmapsto (x+2y+3z,\ 4x+y+4z,\ -x-2y-3z)$

Cherchons les v.p de u.

Soit $A = mat(u, Bc)$, Bc étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}. \quad P_u(x) = P_A(x) = \det(A - x I_3)$$

$$P_u(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 4 & 1-x & 4 \\ -1 & -2 & -3-x \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & -x \\ 4 & 1-x & 4 \\ -1 & -2 & -3-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1-x & 4 \\ -1 & -2 & -3-x \end{vmatrix}, \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1$$

$$= -x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1-x & 0 \\ -1 & -2 & -2-x \end{vmatrix} = -x(1-x)(-2-x).$$

$\underline{cl}$: $Sp(u) = \{0, 1, -2\}$.

Déf 2 : Eléments propres d'une matrice carrée :

Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n.

(i) un scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre de A (λ v.p de A) s'il existe un vecteur colonne $X \in M_{n,1}(K)$ tq $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.

(ii) Un vecteur colonne $X \in M_{n,1}(K)$ est un vecteur propre de A ssi $X \neq 0$ et il existe $\lambda \in K$ tq $AX = \lambda X$.

on dit que X est un vecteur propre de A associé à la v.p λ.

(iii) Soit λ une v.p de A.

Le sous espace propre de A associé à la v.p λ, noté $E_\lambda(A)$, est défini par :

$$\boxed{E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K) \text{ tq } AX = \lambda X \right\}}$$

(iv) On appelle spectre de A l'ensemble de ses v.p.

$Sp_K(A) = \{\lambda \in K \text{ tq } \lambda \text{ v.p de } A\}$.

Théo : Soit $A \in M_n(K)$.

Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique

i.e : λ v.p de A $\Longleftrightarrow P_A(\lambda) = 0$.

COR : Soit $A \in M_n(K)$.

1) A admet au plus n v.p.

puisque $\deg P_A = n$, P_A admet au plus n racines.

2) $Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

3) $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

Exp : $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$P_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} -1-x & -1 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 + 1$

d'où $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Rque : les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont les éléments diagonaux de la matrice.

En effet si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ est triang supérieure

Alors $P_A(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}-x \end{vmatrix}$

$= (a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$.

cl : $\operatorname{Sp} A = \{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$.

Prop : Soit $A \in M_n(K)$.

Supposons que le polynôme caractéristique P_A est scindé sur K

c-à-d : $P_A(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$.

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont les racines de P_A (donc les v.p de A) non nécessairement 2 à 2 distincts.

Alors $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

En particulier si $K = \mathbb{C}$ alors P_A est scindé sur $\mathbb{C}$.

Dém : on a : $P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \cdot x^{n-1} + \cdots + \det A$.

si $P_A(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)$ alors

- $\det A$ = terme constant de $P_A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- $(-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)$ est le coeff de x^{n-1} qui est aussi $(-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$

d'où $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Prop : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle.
Alors $P_A \in \mathbb{R}[X]$ est un poly réel.
Ainsi les racines complexes de P_A sont 2 à 2 conjuguées.
par suite les v.p complexes de A sont 2 à 2 conjugués.
et on a : soit $\lambda \in \mathbb{C}$

λ est v.p de $A \iff \bar{\lambda}$ est v.p de A.

et $E_{\bar{\lambda}}(A) = \overline{E_\lambda(A)}$ i.e : $X \in E_\lambda(A) \iff \bar{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A)$.

Dém :

$$X \in E_\lambda(A) \iff AX = \lambda X \iff \overline{AX} = \overline{\lambda X}$$
$$\iff \bar{A}.\bar{X} = \bar{\lambda}.\bar{X} \quad \text{or } A \text{ est réelle}$$
$$\iff A.\bar{X} = \bar{\lambda}.\bar{X}$$
$$\iff \bar{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A).$$

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, B base de E et $A = mat(u, B)$.
Soit $\lambda \in K$. Alors on a :
λ est v.p de $u \iff \lambda$ v.p de A.
x est un vecteur propre de u associé à la v.p $\lambda \iff$
$X = \underset{B}{mat}(x)$ est un vecteur propre de A associé à λ.

Dém :
comme $A = mat(u, B)$ alors $P_u = P_A$
d'où λ v.p de $u \iff \lambda$ v.p de A.

x vect propre de u associé à $\lambda \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{et} \\ u(x) = \lambda x \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} X = \underset{B}{mat}(x) \neq 0 \text{ et} \\ \underset{B}{mat}(u(x)) = \underset{B}{mat}(\lambda x) \end{cases} \iff \begin{cases} X \neq 0 \\ AX = \lambda X \end{cases}$$

$\iff X$ vect propre de A associé à λ.

Déf : Ordre de multiplicité d'une v.p :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in M_n(K)$). Soit λ une v.p de u (resp de A)

On appelle ordre de multiplicité de λ, noté m_λ, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du poly P_u (resp P_A).

i.e : $P_u(x) = (\lambda - x)^{m_\lambda} \cdot Q(x)$ avec $Q \in K[x]$, $Q(\lambda) \neq 0$.

Exp :

1) $u = id_E$, $P_u(x) = (1-x)^n$.

ainsi 1 est v.p de u d'ordre de multiplicité n.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_A(x) = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$

A n'admet pas de v.p réelles.

i et $(-i)$ sont des v.p simples de A.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & e \\ 0 & -1 & c & f \\ 0 & 0 & 3 & g \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(K)$.

Alors comme A est triang supérieure, ses v.p sont sur la diagonale. $Sp(A) = \{-1, 2, 3\}$.

2 est v.p double de A.

-1 et 3 sont des v.p simples de A

Théo :

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, λ v.p de u de multi m_λ. Alors

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda.$$

(ii) Soit $A \in M_n(K)$, λ v.p de A de multi m_λ. Alors

$$1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda.$$

Rque : Si λ est v.p simple alors $m_\lambda = 1$

Ainsi $\dim E_\lambda(u) = 1$.

3] Diagonalisation :

Déf 1 : Endomorphisme diagonalisable :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base B de E telle que $mat(u,B) = D$ diagonale.

Exp :

a) L'endom nul est diagonalisable puisque sa matrice dans n'importe quelle base de E est la matrice nulle qui est diagonale.

b) L'identité de E, id_E, est diagonalisable puisque sa matrice dans n'importe quelle base de E est I_n qui est diagonale.

Rque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

u est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E tq

$$mat(u,B) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K.$$

comme $P_u(x) = P_D(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x)$

Alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les v.p de u.

Ainsi sur la diagonale de D figurent les v.p de u, chacune est répétée autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité

d'après la matrice D on a : $u(e_1) = \lambda_1 e_1$, $u(e_2) = \lambda_2 e_2, \dots, u(e_n) = \lambda_n e_n$

on en déduit que $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont des vecteurs propres de u.

Ainsi la base B est formée par des vecteurs propres de u.

On a ces résultats :

Théo 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

u est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ il existe une base B de E formée par des vecteurs propres de u.

Théo 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

u est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $\dim E$ = La somme des dimensions des sous espaces propres de u.

i.e : $n = \dim E = \sum \dim E_\lambda(u)$.

Théo 3 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors
u est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ le poly caractéristique P_u de u est scindé sur K et pour toute λ v.p de u de multiplicité m_λ on a : $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

Rque : on sait que si λ est v.p de u de multi m_λ alors
$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$$
Ainsi s'il existe une v.p λ de u tq $\dim E_\lambda(u) < m_\lambda$ alors u n'est pas diagonalisable.

Exp 1 : $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (-y,x)$.

Soit Bc la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$A = mat(u,Bc) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$P_u(x) = P_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$.

P_u n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. u n'est pas diagonalisable.

Exp 2 : $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (x+y, y)$.

Soit Bc la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$A = mat(u,Bc) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P_u(x) = P_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$.

d'où 1 est v.p double de u.

Cherchons $E_1(u) = \operatorname{Ker}(u - id) = \{a = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } u(a) = a\}$.

$a = (x,y) \in E_1(u) \Longleftrightarrow u(a) = a \Longleftrightarrow u(x,y) = (x,y)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ y = y \end{cases} \Longleftrightarrow y = 0 \Longleftrightarrow a = (x,y) = (x,0) = x(1,0) = x e_1$

Ainsi $E_1(u) = Vect(e_1)$. $\dim E_1(u) = 1 \neq 2$

Cl : u n'est pas diagonalisable.

Exp3: $u : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$
$(x, y) \longmapsto (-y, x)$.

soit B_C la base canonique du $\mathbb{C}$.e.v $\mathbb{C}^2$

$A = mat(u, B_C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_u(x) = P_A(x) = x^2+1 = (x-i)(x+i)$

P_u est scindé sur $\mathbb{C}$.

i et $-i$ sont les v.p de u et elles sont des v.p simples

d'où $\dim E_i(u) = \dim E_{-i}(u) = 1$.

d'après Théo 3, u est diagonalisable.

Déterminons les sous espaces propres de u.

$E_i(u) = Ker(u - i\,id) = \{a = (x, y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tq } u(a) = ia\}$.

$a = (x, y) \in E_i(u) \iff u(a) = ia \iff u(x, y) = i(x, y)$

$\iff \begin{cases} -y = ix \\ x = iy \end{cases} \iff x = iy \iff a = (x, y) = (iy, y) = y(i, 1)$
$= y . V_1$

d'où $E_i(u) = Vect(V_1)$, $V_1 = (i, 1)$.

$E_{-i}(u) = Ker(u + i\,id) = \{a = (x, y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tq } u(a) = -ia\}$

$a = (x, y) \in E_{-i}(u) \iff u(a) = -ia \iff u(x, y) = -i(x, y)$

$\iff \begin{cases} -y = -ix \\ x = -iy \end{cases} \iff y = ix \iff a = (x, y) = (x, ix) = x(1, i)$
$= x V_2$

Ainsi $E_{-i}(u) = Vect(V_2)$, $V_2 = (1, i)$.

soit $B = (V_1, V_2)$. Alors B est une base de $\mathbb{C}^2$ formée par des vecteurs propres de u.

$$D = mat(u, B) = \begin{array}{cc|l} u(V_1) & u(V_2) & \\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & & \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \end{array}$$

$V_1 \in E_i(u) \implies u(V_1) = iV_1$

$V_2 \in E_{-i}(u) \implies u(V_2) = -iV_2$

on vient de diagonaliser l'endom u.

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si u admet n valeurs propres deux à deux distincts alors u est diagonalisable. ($n = \dim E$).

Dém : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les v.p distincts de u. ($\lambda_i \in K$, $1 \leq i \leq n$)
comme $\deg P_u = n$ alors $P_u(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \dots (\lambda_n - x)$
par suite P_u est scindé sur K et chaque v.p λ_i est simple
d'où $\dim E_{\lambda_i}(u) = 1 = m_{\lambda_i}$ ($\forall i, 1 \leq i \leq n$).
d'après le Théo 3, u est diagonalisable.

Rque : La proposition précédente est une condition suffisante de diagonalisation et elle n'est pas nécessaire
i.e : u est diagonalisable $\not\Longrightarrow$ u admet n v.p 2à2 distincts.

Exp : $u = id$
u est diagonalisable alors que $P_u(x) = (1-x)^n$
u admet une seule v.p (qui est 1) de multiplicité n.

Exp : Soit u l'endom de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$mat(u, Bc) = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$
Alors u admet 3 v.p 2à2 distincts qui sont 2, -3 et 4
par suite u est diagonalisable $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Déf 2 : Matrice diagonalisable :

Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n.
On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.
i.e : il existe $D \in M_n(K)$ une matrice diagonale, il existe $P \in M_n(K)$ une matrice inversible tq $A = P.D.P^{-1}$.

Exp : Toute matrice diagonale est diagonalisable.
En effet si A est une matrice diagonale alors

$$A = I_n . A . I_n^{-1}$$ et A est diagonalisable.

Rque : si A est diagonalisable alors A est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
comme $P_A = P_D$
Alors les éléments diagonaux de D représentent les valeurs propres de A.

Prop :

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, B base de E, $A = mat(u, B)$.
Alors u est diagonalisable $\iff$ A est diagonalisable.

(ii) En particulier : soit $A \in M_n(K)$, alors il existe un unique $u \in \mathcal{L}(K^n)$ tq $mat(u, Bc) = A$.
(Bc = base canonique de K^n).
Alors A est diagonalisable $\iff$ u est diagonalisable.

Dém :

Si u est diagonalisable alors il existe B' base de E tq $mat(u, B') = D$ diagonale. Or $A = mat(u, B)$
Ainsi $A = P.D.P^{-1}$ avec $P = pass(B, B')$
et A est diagonalisable.

Théo : Soit $A \in M_n(K)$.

Les propositions suivants sont équivalents :

(i) A est diagonalisable.

(ii) il existe B une base de $M_{n,1}(K)$ formée par des vecteurs propres de A.

(iii) $n = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_\lambda(A)$ = somme des dimensions des sous espaces propres de A.

(iv) Le poly caract P_A est scindé sur K et pour toute λ v-p de A de multiplicité m_λ on a : $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda$.

Prop : Condition suffisante de diagonalisation :

Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n.

Si A admet n valeurs propres 2 à 2 distincts alors A est diagonalisable.

Rque : La réciproque est fausse :

I_n est diagonale donc diagonalisable et I_n admet une seule valeur propre.

Mode opératoire:

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base de E et $A = mat(u, \mathcal{B})$.

(i) Déterminer le poly carract $P_u(x) = P_A(x) = \det(A - x I_n)$

Si P_u n'est pas scindé sur K alors u n'est pas diagonalisable.

Supposons que P_u est scindé sur K.

(ii) Déterminer les valeurs propres de u qui sont les racines de P_u et préciser leur ordre de multiplicité.

(iii) Déterminer les sous espaces propres associés et donner une base de chacun.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les v.p distincts de u (resp de A) de multi resp $m_1, \dots, m_k$.

Si $\dim E = n = \dim E_{\lambda_1}(u) + \dots + \dim E_{\lambda_k}(u)$

ou encore si $\dim E_{\lambda_i}(u) = m_i$, $\forall i, 1 \leq i \leq k$

Alors u est diagonalisable.

Dans ce cas on prend une base $\mathcal{B}_i$ de chaque sous esp propre $E_{\lambda_i}(u)$ et la réunion de toutes ces bases forme une base $\mathcal{B}'$ de E constituée de vecteurs propres de u.

$mat(u, \mathcal{B}') = D$ diagonale sur la diagonale figurent les v.p de u chacune est répétée autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité.

et comme $\left.\begin{array}{l} A = mat(u, \mathcal{B}) \\ D = mat(u, \mathcal{B}') \end{array}\right\} \Rightarrow A = P . D . P^{-1}$ avec $P = pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

Rque:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonalisable.

Soit $\mathcal{B}' = (V_1, \dots, V_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ formée par des vecteurs propres de A. Alors $A = P . D . P^{-1}$ avec

$$D = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array}$$

with the columns of D labelled $Av_1 \quad Av_2 \quad \cdots \quad Av_n$.

et $P = \text{pass}(Bc, B')$, Bc = Base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(K)$

$$= \begin{array}{c} v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \\ \left(\begin{array}{cccc} \boxed{} & \boxed{} & & \boxed{} \end{array}\right) \end{array}_{BC}$$

de l'ordre des vecteurs propres dans la base B' dépend
l'ordre des valeurs de la diagonale de D et réciproquement.

Exp 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que A est diagonalisable et effectuer la diagonalisation.

$$P_A(x) = \det(A - x I_3) = \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1-x & -1-x & 1 \\ 1-x & 1 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-x & 0 \\ 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (1-x)(-2-x)^2.$$ est Scindé sur $\mathbb{R}$.

$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -2\}$. 1 est v.p simple de A
-2 est v.p double de A.

$E_1(A) = \text{Vect}(A - I_3) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = X \right\}$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} -x + y + z = x \\ x - y + z = y \\ x + y - z = z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 & (1) \\ x - 2y + z = 0 & (2) \\ x + y - 2z = 0. & (3) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (1)-(2) : -3x + 3y = 0 : x = y \\ (2)-(3) : -3y + 3z = 0 : y = z \\ \quad (3) : x + y - 2z = 2x - 2x = 0. \end{cases}$

$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x V_1$. $E_1(A) = \text{Vect}(V_1)$.

$E_{-2}(A) = \text{Vect}(A + 2 I_3) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ tq } AX = -2X \right\}$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) \iff AX = -2X \iff \begin{cases} -x + y + z = -2x \\ x - y + z = -2y \\ x + y - 2z = -2z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff x = -y - z \iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$= y\, V_2 + z\, V_3$

cl : $E_{-2}(A) = \text{Vect}(V_2, V_3)$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

on a : $\dim E_1(A) + \dim E_{-2}(A) = 3$: cl : A est diagonalisable.

ou encore : $\begin{cases} P_A(x) = (1-x)(-2-x)^2 \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \\ \dim E_1(A) = 1 = m_1 = \text{multi de la v.p } 1 \\ \dim E_{-2}(A) = 2 = m_{-2} = \text{multi de la v.p } (-2) \end{cases}$

cl : A est diagonalisable.

$A = P\, D\, P^{-1}$ avec $P = \text{pass}(BC, B')$, $B' = (V_1, V_2, V_3)$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{BC} \end{array}$$

et $D = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} AV_1 & AV_2 & AV_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array}$

Rque : Si on prend $B'' = (V_2, V_3, V_1)$ alors B'' est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ formée par des vect propres de A.

$A = P.D.P^{-1}$, $P = \text{pass}(BC, B'') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_2 & V_3 & V_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{BC} \end{array}$

et $D = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} AV_2 & AV_3 & AV_1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_2 \\ V_3 \\ V_1 \end{array} \end{array}$.

4 Trigonalisation :

Déf :

(i) soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est dit trigonalisable s'il existe B base de E tq $mat(u, B)$ est triangulaire supérieure.

(ii) soit $A \in M_n(K)$, A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

i.e : $\exists T \in M_n(K)$ une matrice triangulaire supé, $\exists P \in M_n(K)$ une matrice inversible tq $A = P.T.P^{-1}$.

Rques :

1) Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

2) soit $u \in \mathcal{L}(E)$, B base de E, $A = mat(u, B)$.
Alors u est trigonalisable $\Longleftrightarrow$ A est trigonalisable.

3) soit $A \in M_n(K)$. Alors A est trigonalisable $\Longleftrightarrow$ L'endom $u \in \mathcal{L}(K^n)$ de K^n canoniquement associé à A est trigonalisable

4) soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endom trigonalisable.
Alors il existe B base de E tq $mat(u, B) = T$ triang supérieure comme $P_u = P_T$ alors les éléments diagonaux de T représentent les valeurs propres de u, chacune écrite sur cette diagonale autant de fois que l'indique son ordre de multi

Théo :

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ Alors u est trigonalisable $\Longleftrightarrow$ P_u le polynôme caractéristique de u est scindé sur K.

(ii) Soit $A \in M_n(K)$. Alors :

A est trigonalisable $\Longleftrightarrow$ P_A est scindé sur K.

Rques :

1) Comme tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$

Alors toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

et si E est un $\mathbb{C}$.e.v alors tout endom $u \in \mathcal{L}(E)$

est trigonalisable.

Exp : soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tq $mat(u, Bc) = A$.

avec $Bc = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

on a : $P_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} 4-x & -3 \\ 3 & -2-x \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1$

$= (x-1)^2$

1 est v.p double de A. $Sp(A) = \{1\}$.

A n'est pas diagonalisable

En effet si A était diagonalisable alors $\exists P \in M_2(\mathbb{R})$

une matrice inversible tq $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I_2$

ce qui est imp.

et comme P_A est scindé sur $\mathbb{R}$ alors A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

$E_1(A) = \ker(A - I_2) = \{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tq $AX = X \}$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \Longleftrightarrow AX = X \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = x \\ 3x - 2y = y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow x = y \Longleftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$E_1(A) = Vect(V_1)$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Complétons V_1 pour avoir une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. Soit $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\det_{BC}(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

d'où (V_1, V_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Soit $B' = (V_1, V_2)$.

Soit $T = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} AV_1 & AV_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}} \end{pmatrix} & \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \end{array}$

$V_1 \in E_1(A) \Longrightarrow AV_1 = V_1$

$AV_2 = \alpha V_1 + \beta V_2$

$AV_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \alpha + \beta = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 1. \end{cases}$

Ainsi $T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triang supérieure.

$A = P.T.P^{-1}$, $P = pass(BC, B') = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} & BC \end{array}$

5] Application de la réduction

*/ Calcul de la puissance d'une matrice :

Soit $A \in M_n(K)$.

(i) Si A est diagonalisable alors il existe $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale, il existe $P \in M_n(K)$ une matrice inversible tq $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Dém : par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Si A est trigonalisable alors il existe T triang supé

Il existe P matrice inversible tq

$A = P \cdot T \cdot P^{-1}$, Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P \cdot T^k \cdot P^{-1}$

T^k est aussi triang supé.

*/ Suite récurrente linéaire :

Soit $a, b \in K$ avec $(a,b) \neq (0,0)$.

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifie la relation

$$u_{n+2} = a\,u_n + b\,u_{n+1} \quad \text{ave } u_0, u_1 \text{ sont donnés.}$$

Notons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

$X_{n+1} = A \cdot X_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$.

d'où $X_n = A^n \cdot X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.

on se ramène à un calcul de A^n.

• Soit $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in K$ des scalaires non tous nuls.
Une suite récurrente Linéaire d'ordre k vérifie la relation :

$$u_{n+k} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{k-1} u_{n+k-1}$$

avec $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ sont donnés.
on écrit cette égalité sous forme matricielle en posant

$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix}$ et on se ramène à un calcul de puissance d'une matrice d'ordre k.

*/ Système de suites récurrentes :

Illustrons ceci par un exemple.
Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites réelles vérifiant :
x_0, y_0, z_0 sont donnés et $\forall n \geq 0$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 4z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n + 12z_n \\ z_{n+1} = x_n - 2y_n + 5z_n \end{cases}$$

posons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

$X_{n+1} = A X_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

et $X_n = A^n . X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

on se ramène au calcul de A^n.

6] Théo de Cayley-Hamilton :

Déf : Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_m X^m \in K[X]$.

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, Alors l'endom $P(u)$ défini par :

$P(u) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k = a_0\, id + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_m u^m$

est un endomorphisme de E appelé polynôme de l'endom u.

$(u^k = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (k fois, $k \geq 1$) et $u^0 = id)$.

$P(u) \in \mathcal{L}(E)$.

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que P est un polynôme annulateur de u ssi l'endom $P(u) = 0$.

(iii) Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n.

Alors la matrice $P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m$ appelée polynôme de la matrice A.

est une matrice carrée d'ordre n

$(A^k = A \cdots A$ (k fois, $k \geq 1$) et $A^0 = I_n)$.

$P(A) \in M_n(K)$.

(iv) Soit $A \in M_n(K)$, on dit que P est un polynôme annulateur de A ssi la matrice $P(A) = 0$.

Exps :

1] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $P = X^2 + 1$ alors $P(u) = u^2 + id$.

$P = 1 \implies P(u) = id$

$P = X \implies P(u) = u$.

2] Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = -3X^2 + 4X + 5$

Alors $P(A) = -3A^2 + 4A + 5I_2$.

$= -3\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$.

Théo de Cayley-Hamilton :

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors le poly caract P_u de u est un poly annulateur de u, i.e $P_u(u) = 0$.

(ii) soit $A \in M_n(K)$, alors $P_A(A) = 0$.

Exp : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

En utilisant le Théo de Cayley-Hamilton, montrer que A est inversible, déterminer A^{-1} et calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

on a : $P_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 5 & -2-x \end{vmatrix} = x^2 + 1$.

d'après le Théo de Cayley-Hamilton, on a $P_A(A) = 0$.

$P_A(A) = A^2 + I_2 = 0$. d'où $A^2 = -I_2 \Rightarrow A(-A) = I_2$

par suite A est inversible et $A^{-1} = -A$.

D'autre part on a : $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^3 = -A \Rightarrow A^4 = -A^2 = (-1)^2 I_2$

$A^5 = (-1)^2 . A$.

Ainsi soit $n \in \mathbb{N}$:

Si n est pair $n = 2p$ $(p \in \mathbb{N})$, $A^n = A^{2p} = (A^2)^p = (-I_2)^p = (-1)^p . I_2$

Si n est impair $n = 2p+1$ $(p \in \mathbb{N})$, $A^n = A^{2p+1} = A^{2p} . A = (-1)^p . A$

soit $n \in \mathbb{Z}_-$ alors $n = -q$, $q \in \mathbb{N}$.

$$A^n = A^{-q} = (A^{-1})^q = (-A)^q = (-1)^q . A^q = \begin{cases} (-1)^p I_2 & \text{si } q = 2p \\ (-1)^{p+1} . A & \text{si } q = 2p+1. \end{cases}$$

Calculons par exp A^{-2025} :

$$A^{-2025} = (A^{-1})^{2025} = (-A)^{2025} = -A^{2025} = -A^{2 \times 1012 + 1}$$

$$= -(A^2)^{1012} . A = -(-I_2)^{1012} . A = -A.$$