Les fonctions à variables réelles :

1) Notions de fonctions

1.1 Définition :

Définition 1 :
Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$. En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

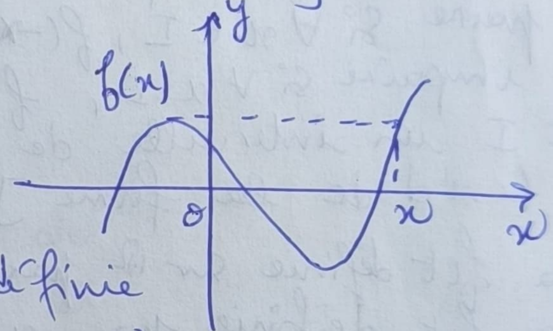
- On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

Exemple : La fonction inverse.

$$f :]-\infty, 0[\cup]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

- Le graphe d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x)), \forall x \in U\}$

Opérations sur les fcts :



Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fcts définies sur U vers $\mathbb{R}$. On peut définir les fcts suivantes

- La somme $f+g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in U$
- La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$
  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x \in U$
- Le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

1.3 Fonctions majorées / minorées / bornées :

Définition :
Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions Alors

- $f \geq g$ si $\forall x \in U$, $f(x) \geq g(x)$
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U$, $f(x) \geq 0$

Rappel :

1.4 fonctions croissantes · décroissante :

Définition :

* f est croissante sur U ssi :

$\forall x, y \in U$, $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$.

* f est ↘ sur U ssi

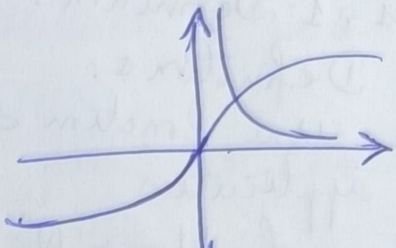
$\forall x, y \in U$, $x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$

* f est strict croiss sur U ssi :

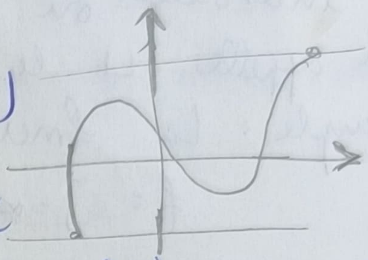
$\forall x, y \in U$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

* f est strict ↘ sur U ssi :

$\forall x, y \in U$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

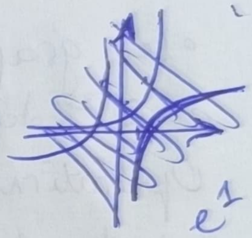


ln 1



* f est monotone (resp strict monotone) sur U si f est croissante ou décroissante (resp strict croissante ou strict décroissante)

Exp : fct racine carré $\sqrt{x}$ est strict ↗
fcts exp et fcts ln. sont strict ↗



e^1

ln 1 = 0 e

$e^0 = 1$

$e^0 = 1$

f est paire si $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$
f est impaire si $\forall x \in I$, $f(-x) = -f(x)$
→ soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c.à.d de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$)

Ex : la fct définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ est paire,
la fct définie par $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ est impaire,

Définition :

* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nbr réel l, $T > 0$
* La fct f est dite périodique de période T si
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$

Interpretation graphique :
f est périodique de période T ssi son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$ où $\vec{i}$ le premier vecteur de coordonnées.

2) Limite :

2.1 Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tque f est définie au V de ce point et $l \in \mathbb{R}$

On a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \leftarrow$ finie

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tque f est définie au Voisignage de x_0, on a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

ssi $\forall A > 0 \ \exists \alpha > 0$ tque $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$

Si f est définie au ~~voig~~ voisignage de $+\infty$ on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \varphi$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ tque $\forall x > A \Rightarrow |f(x) - \varphi| < \varepsilon$

* Si f est définie au voisignage de $+\infty$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ssi $\forall A > 0, \exists A' > 0, \forall x > A' \Rightarrow f(x) > A$

Remarques :

1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit un voisignage de x_0 tout intervalle ouvert contenant x_0.

2) On peut définir les limites à gauche et à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$ que l'on note respectivement $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $x < x_0$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $x > x_0$

Théorème : unicité de la limite :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$)

x_0

$x_0 \in I$, si f admet une limite au pt x_0
Alors, cette limite est unique.

Propositions:

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction, $x_0 \in I$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Limites usuelles:

$x \longrightarrow$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln x$		$-\infty$ (en 0^+)	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$
x^n, $n>0$		0	$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$			

théorème:

tout polynôme a la m̂ limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme de plus haut degré

. toute fraction rationnelle limité en $+\infty$ et $-\infty$ est le rapport de ses monomes de plus haut degré

2.3 - Opérateurs sur les limites:

Dans cette partie b désigne soit un réel soit $+\infty$ ou $-\infty$ (on dit que $b \in \overline{\mathbb{R}}$)

~~un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$~~ $(\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ $b \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$

un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$$

$$\lim_{x \to +\infty, -\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

$a_1 x^1$ monome de deg 1

n: degré de P

a: coeff de P.

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^3 + x = \lim_{x \to \pm\infty} x^3$$

$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ← polynôme, ← polynôme. Fraction rationnelles

$$\lim_{x \to +\infty, -\infty} F(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$\lim\limits_{x \to b} u(x)$	$\lim\limits_{x \to b} v(x)$	$\lim\limits_{x \to b} (u+v)(x)$	$\lim\limits_{x \to b} (uv)(x)$	$\lim\limits_{x \to b} \left(\frac{u}{v}\right)(x)$
$l \neq 0$	0	l	0	$\pm\infty$
0	0	0	0	FI
$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	0
$\pm\infty$	$l'(\neq 0)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	FI
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI

Proposition:

Soient b, b' et b'' 3 éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et f et g donne 2 fcts tque f est définie au $\mathcal{V}(b)$ et g est définie au $\mathcal{V}(b')$ Alors

$\lim\limits_{x \to b} f(x) = b'$; $\lim\limits_{x \to b'} g(x) = b''$

alors $\lim\limits_{x \to b} (g \circ f)(x) = b''$

$$\lim_{x \to b} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to b} g(\underbrace{f(x)}_{x \to b}) = b''$$

2-4 Propriétés:

Proposition: Soient f et g 2 fcts définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et on suppose que f et g ont des limites finies en x_0

Si $f \leq g$ au $\mathcal{V}(x_0)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Théorème (théorème de gendarmes):

soient f, g et h 3 fcts définies sur le m̂ intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f et h admettent la m̂ limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 et que au $\mathcal{V}(x_0)$ on a $f \leq g \leq h$

Proposition :

Soit f une fct croissante (resp décroissante) sur $[a,b[$ avec $a<b \leq$ ~~+∞~~

Si f est majorée par M (resp minorée par m) sur $[a,b[$ alors f admet une limite finie l en b et $l \leq M$ (resp $l \geq m$)

Proposition :

si f admet une limite finie en x_0 alors, f est bornée au $\mathcal{V}$ de x_0

Preuve :

on a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (existe et finie)

D'après la définition

$\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 ; \forall \underbrace{|x - x_0|}_{\mathcal{V}(x_0)} < h \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$|f(x) - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$

$\iff \underbrace{l - \varepsilon}_{m} < f(x) < \underbrace{\varepsilon + l}_{M}$

Alors f est bornée au $\mathcal{V}(x_0)$

Les branches infinies

* Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ alors la dte $x = x_0$ est un asymptote verticale à la $\mathcal{C}_f$
* Voici un schéma représentant la méthode permettant de déterminer la nature de la branche infinie à la $\mathcal{C}_f$.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

- $l \in \mathbb{R}$ (finie) : Asymptote horiz d'éq $y = l$
- $\pm\infty$:
  - $a \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax$
    - $b \in \mathbb{R}$ finie : Asymptote d'éq $y = ax + b$
    - $\pm\infty$: Branche parabolique de direction $y = ax$
  - 0 : Branche parabolique de dir $(0, x)$
  - $\pm\infty$: Branche parabolique de dir $(0, y)$

Continuité :

Définition :

Soit I un intervalle ouvert ~~de~~ $\mathbb{R}$ et f une fct définie sur I. On dit que f est continue en $x_0 \in I$ ssi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

* On dit que f est continue sur I ssi f est continue en tout pt de I

Notation :

On note par $\mathcal{C}(I)$ ou bien $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fcts continues sur I

Proposition :

Si f est une fonction non définie en x_0 mais elle possède une limite finie en x_0.
alors, on peut définir le prolongement par continuité comme suit.

$$g : D_f \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Opérations sur les fonctions continues :

Théorème :

Soient f et g 2 fcts continues sur l'intervalle Alors
+ les fcts $f+g$, $\lambda f (\lambda \in \mathbb{R})$ et fg sont continues sur I
+ Si g ne s'annule pas sur I alors la fct $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Théorème :

Soient $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in \mathcal{C}(J)$, I et J sont 2 intervalles de $\mathbb{R}$ tq $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

Quelques Théorèmes :

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soient a et b 2 réels tq $a < b$ et f une fct continue sur $[a, b]$. Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$

il existe c un réel, $c \in [a, b]$ tque $f(c) = k$

Théorème:

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème:

Toute fonction continue est un intervalle fermé borné et atteint ses bornes

Notation:

Pour une fonction continue, on notera $\max_{x \in [a,b]} f(x)$ le maximum de la fonction f sur $[a, b]$ et $\min_{x \in [a,b]} f(x)$, le minimum de la fonction f sur $[a, b]$

Exercice:

Soit la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 1}{x} e^{-1/x}, & si\ x > 0 \\ 0, & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f

$D_f = \mathbb{R}$

Continuité de f sur $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ Continuité en 0

$\rightarrow$ Continuité sur $]-\infty, 0[$

$\rightarrow$ Continuité sur $]0, +\infty[$

Monotonie & continuité :

Proposition :
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$, $(a<b)$
alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in]a,b[$ tq que
$$f(c)=k$$

théorème : (théorème de bijection monotone)
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors f réalise une bijection de ~~l~~ l'intervalle I vers $f(I)=J$
De plus, la bijection réciproque f^{-1} est continue de J vers I et de m̂ monotonie que f.

Remarque :
Pour obtenir la courbe de f^{-1} à partir de la courbe de f il faut effectuer une symétrie d'axe la droite d'éq $y=x$

Dérivabilité :

Def :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$
et $x_0 \in I$
on dit que f est dérivable en x_0 ssi la fct $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
possède une limite finie en x_0. Cette limite alors appelée le nombre dérivé de f en x_0 ~~est~~ est notée par $f'(x_0)$

Remarque :
f est dérivable en x_0 éq aussi à $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie en 0.
($h = x - x_0$, qd $x \to x_0$ on à $h \to 0$
$x = h + x_0$)

Définition :
On dit que f est dérivable sur l'intervalle I ssi elle est définie sur I et dérivable en tout ~~pour~~ point x_0 de I. On appelle, alors fonction dérivée de f, et on note f' la fonction qui à tout $x_0 \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x_0)$

Proposition :
Déf :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction,
$x_0 \in I$
* On dit que f est dérivable à gauche en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et existe et finie et notée par $f'_g(x_0)$
* On dit que f est dérivable à droite en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie et est notée par $f'_d(x_0)$

Proposition:
Soit $f: I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$
alors, f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à gauche et à droite en x_0
et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

Opérations sur les dérivées:

Théorème:
Soient f et g 2 fcts définies sur l'intervalle I et dérivables aussi sur I.
Alors on a:

Déf:
On dit que f est dérivable sur l'intervalle I ssi elle est définie sur I et dérivable en tout point x_0 de I. On appelle, alors fonction dérivée de f, et on note f la fct qui à tout $x_0 \in I$ associé le nombre dérivé $f'(x_0)$.

* $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f'+g'$
* Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$
* fg est dérivable et $(fg)' = f'g + g'f$
* si de plus $g \neq 0$ sur I alors f/g est dérivable sur I

et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

théorème:
Soient I et J 2 intervalles de $\mathbb{R}$ $f: I \to \mathbb{R}$ et $g: J \to \mathbb{R}$ 2 fcts. On suppose que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a: $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

Ex: $(e^{\sin(x)})' = \cos x \, e^{\sin x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

théorème:
Soit $f: I \to J$ une fonction bijective et f^{-1} sa fonction réciproque $f^{-1}: J \to I$. Si f est dérivable sur I
alors f^{-1} est dérivable sur J
et on a $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Dérivé et sens de variation:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors:
* f est croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I
* f est décroissante sur I ssi $f' \leq 0$ sur I
* f est constante sur I ssi $f' = 0$ sur I.

tangente:
Soit $f: I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on appelle C_f la courbe représentatif de f dans ce repère.

théorème: Soit $x_0 \in I$, si f est dérivable en x_0 alors C_f possède une tangente au point d'abscisse x_0 et cette tgt a pour éq:
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Remarque:

Pour connaître la position de la Courbe de f par rapport à la tgt en x_0, il suffit d'étudier le signe de $[f(x)-(f(x_0)+f'(x)(x-x_0))]$

Si il est positive alors C_f est au dessus de T_{x_0}

Sinon alors C_f est au dessous de T_{x_0}

Extremum local:

Proposition:

Soient f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$ qui n'est pas une borne de I

Si $f'(x_0)=0$ et si f' change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

- On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

Remarque:

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ → f est dérivable sur $[0,1]$
  → f' est continue sur $[0,1]$
- $f \in \mathcal{C}^1(x)$ → f est ~~dérivable~~ 2 fois dérivable sur I
  → $f^{(2)}$ est continue sur I.
- f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$ → f est n fois dérivable sur $[0,1]$
  et
  → $f^{(n)}$ est continue sur I

Définition:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I.

- On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exemple: Les fcts polynômes et la fct exponentielle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées d'ordre supérieur:

Proposition:
Le produit de 2 fcts de classe $\mathcal{C}^n$ (resp $\mathcal{C}^\infty$) sur I est une fct de classe $\mathcal{C}^n$ (resp $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Proposition:
Si f une fct de classe $\mathcal{C}^n$ (resp $\mathcal{C}^\infty$) sur I et qui ne s'annule pas sur I alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Proposition (formule de
Soient f et g 2 fcts n fois dérivables sur I. Alors fg est n fois dérivables sur I et:

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{(n-k)}$$

théorèmes classiques.

theorème des accroissements finis:

Soient a et b 2 réels tque $a < b$, soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tque $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

theorème (inégalité des accroissements finies):

Soient a et b 2 réels tque $a<b$ soit f une fct continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

· s'il existe m et n 2 réels tque $\forall x \in]a,b[$

$$m \leq f'(x) \leq n \text{ alors } m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq n(b-a)$$

theorème de Rolle:

Soient a et b 2 réels tque $a<b$ et soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ si $f(a)=f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tque $f'(c)=0$

Dérivée d'ordre supérieur:

Définition: soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction

* on dit que f est 2 fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et f' est dérivable sur I.

La dérivée de f' est appelée la dérivée second de f est notée f'' ou $f^{(2)}$

* pour $n \geq 1$, on dit que f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ dérivée sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable

la dérivée de f^{n-1} est appelée la dérivée de n-ième de f est noté $f^{(n)}$

Remarque:

$$f^{(0)} = f$$

$$f' = (f') = f^{(1)}$$

$$f'' = f^{2} = (f')'$$

$$f^{(3)} = (f^{(2)})'$$

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Exercice : Determiner la dérivée n ième de $x^2 \ln(x)$; $\forall x>0$

$$(x^2 \ln(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^k (\ln(x))^{n-k}$$
$$= C_n^0 x^2 (\ln(x))^{(n)} + C_n^1 2x (\ln(x))^{(n-1)} +$$
$$C_n^2 2 (\ln(x))^{n-2} + 0 + \dots$$

Soit $g(x) = \ln(x)$; $x>0$

$g'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$

$g''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$g^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$

$g^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}$

$\vdots$

pour $k=1$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^{1-1} 0!}{x^{1}}$ vrai

• supposons que P est vrai à l'ordre k et montrons qu'elle resterai vrai à l'ordre $k+1$

càd mque $(\ln(x))^{k+1} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$

en effet : On a P est vrai à l'ordre k donc $(\ln(x))^k = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$

$$(\ln(x))^{k+1} = ((\ln(x))^k)'$$
$$= \left(\frac{(-1)^{(k-1)}(k-1)!}{x^k}\right)'$$
$$= (-1)^{k-1}(k-1)! \left(\frac{1}{x^k}\right)'$$
$$= (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{-k}{x^{k+1}}$$
$$= \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

$\underline{\text{cc}}$: $(\ln(x))^k = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}$

On remplace dans la formule de Lei on trouve :

$$(x^2 \ln(x))^n = x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + C_n^1 2x \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-2}}$$