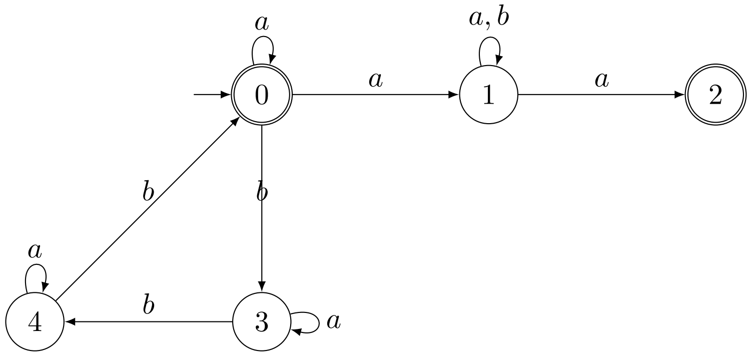
LU2IN016 - Interrogation écrite
17 février 2020

Durée : 30 minutes. Le barème sur 20 points est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (3 points)

On considère l'automate fini $\mathcal{A}$ ci-dessous :



(a) ($1/2$ point) Donnez une exécution de l'automate $\mathcal{A}$ sur le mot *abbab*.

(b) (1 point) Le mot *abbab* est-il accepté par l'automate $\mathcal{A}$? Justifiez brièvement.

(c) ($1/2$ point) L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ?

(d) (1 point) Quel est le langage accepté par $\mathcal{A}$?

Solution:

(a) Une exécution de l'automate sur *abbab* est par exemple : $0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{b} 0$. (Une exécution est la séquence d'états visités, ce n'est pas un graphe. On pourrait également écrire $(0, a, 0, b, 3, b, 4, a, 4, b, 0)$. On ne peut donc pas faire apparaître de boucle ou autre fantaisie.)

(b) Le mot *abbab* est accepté par l'automate car l'exécution $0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{b} 0$ est une exécution acceptante (elle se termine dans un état acceptant). Dans un automate non déterministe, il suffit qu'il y ait une seule exécution acceptante sur un mot pour que ce mot soit accepté par l'automate.

(c) Non l'automate n'est pas déterministe, il existe deux transitions $(0, a, 0)$ et $(0, a, 1)$ étiquetée par a à partir de l'état 0.

(d) Si on appelle $\Sigma = \{a, b\}$, le langage de l'automate $\mathcal{A}$ est donné par $L(\mathcal{A}) = \{a\} \cdot \Sigma^*\{a\} \cup (\{a\}^*b\{a\}^*b\{a\}^*b\{a\})^*$, ou encore l'ensemble des mots commençant et terminant par a, ainsi que les mots contenant un nombre de b mutliple de 3.

Exercice 2 (6 points)

Soit la grammaire $\mathcal{G}$ ci-dessous

$$S \to SbSbSbS|aS|\varepsilon$$

(a) ($1/2$ point) Quels sont les symboles de variables de $\mathcal{G}$?

(b) ($1/2$ point) Quels sont les symboles terminaux de $\mathcal{G}$?

(c) (1 point) Donnez un mot de $L(\mathcal{G})$ et sa dérivation.

(d) (2 points) Quel est le langage généré par $\mathcal{G}$?

(e) (2 points) Existe-t-il une grammaire linéaire pour ce langage ? Justifier.

Solution:

(a) L'unique symbole de variable est S (les symboles de variables sont à gauche des règles de la grammaire).

(b) Les symboles terminaux sont $\{a, b\}$. ε n'est pas un symbole terminal ! ! C'est un *mot*.

(c) Par exemple : $S \Rightarrow SbSbSbS \Rightarrow aSbSbSbS \Rightarrow abSbSbS \Rightarrow abbSbS \Rightarrow abbbS \Rightarrow abbbaS \Rightarrow abbba$. Le mot $abbba$ est donc un mot de $L(\mathcal{G})$.

(d) Le langage $L(\mathcal{G}) = (\{a\}^*b\{a\}^*b\{a\}^*b\{a\})^*$.

(e) Le langage $L(\mathcal{G})$ est un langage reconnaissable (voir exercice 1 !) Or tout langage reconnaissable peut être généré par une grammaire linéaire droite (proposition du cours). Donc il existe une (autre) grammaire linéaire pour ce langage, même si G n'est pas une grammaire linéaire.

Exercice 3 (5 points)

(a) (2½ points) Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, donner une grammaire pour le langage $L_1 = \{wcw' \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = |w'|\}$.

(b) (2½ points) Donner une grammaire pour le langage $L_2 = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Solution:

(a) $S \to aSa|bSb|bSa|aSb|c$

(b) $S \to aSbb|\varepsilon$

Exercice 4 (6 points)

Parmi les langages suivants, lesquels sont reconnaissables ? hors-contexte ? Les deux ?

(a) (2 points) $L_1 = \{a^n b^p \mid n \neq p\}$?

(b) (2 points) $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \{1, 2, 3\}\}$

(c) (2 points) $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contient 2 a ou exactement un $b\}$?

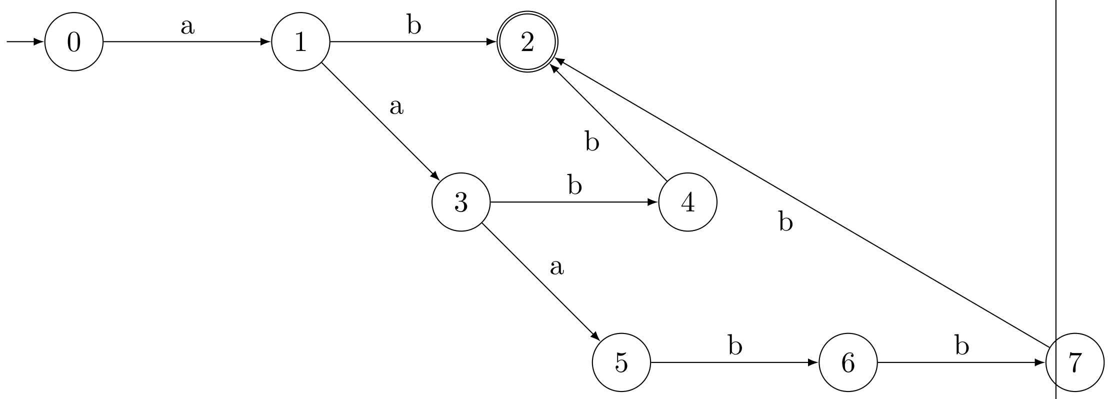
Solution:

(a) L_1 n'est pas reconnaissable. Supposons L_1 reconnaissable, alors $\overline{L_1}$ est reconnaissable. Comme a^*b^* est reconnaissable, alors $\overline{L_1} \cap a^*b^* = \{a^n b^n \in \mathbb{N}\}$ est reconnaissable. Or on sait que $\{a^n b^n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable (théorème du cours).

Par contre L_1 est hors-contexte. Il est généré par la grammaire G_1 suivante :

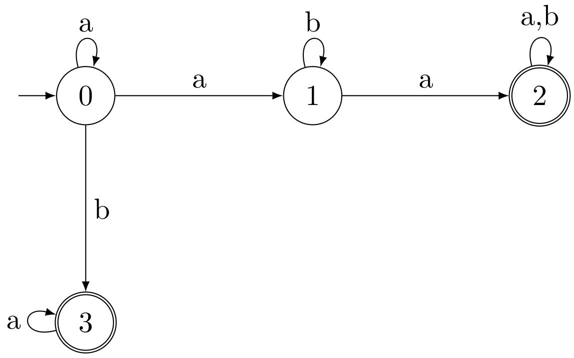
$$\begin{aligned} S &\to T_1|T_2 \\ T_1 &\to aT_1|aT \\ T_2 &\to T_2b|Tb \\ T &\to aTb|\varepsilon \end{aligned}$$

(b) L_2 est reconnaissable. Une façon de répondre est de remarquer que $L_2 = \{a\}\{b\} \cup \{a\}\{a\}\{b\}\{b\} \cup \{a\}\{a\}\{a\}\{b\}\{b\}\{b\}$ est un langage régulier par définition. Par le théorème de Kleene, il est donc reconnaissable. Une autre façon est de donner un automate reconnaissant L_2. Par exemple



Tout langage reconnaissable étant hors-contexte, L_2 est également hors-contexte.

(c) L_4 est reconnaissable. Voici un automate pour L_4



Comme ci-dessus, L_4 est hors-contexte, puisqu'il est reconnaissable.