अध्याय-2 : बहुपद (Polynomials)

Part-1 : आसान Short Notes

इस अध्याय को पढ़ने के बाद आप जानेंगे–

- बहुपद (Polynomial) क्या होता है?
- चर (Variable) क्या होता है?
- पद (Term) क्या होता है?
- गुणांक (Coefficient) क्या होता है?
- बहुपद की घात (Degree) कैसे ज्ञात करते हैं?
- बहुपद के प्रकार
- बोर्ड परीक्षा में पूछे जाने वाले प्रश्न

परिचय :- मान लीजिए, $3x + 5$

या $2x^2 + 5x + 7$

या $x^3 - 2x + 1$

ये सभी **बहुपद (Polynomial)** कहलाते हैं।

चर (Variable) :- जिसका मान बदल सकता है, उसे **चर (Variable)** कहते हैं।

उदाहरण:- x,y,z

अचर (Constant) :- जिसका मान हमेशा निश्चित रहता है।

उदाहरण :- 2,5,100,-3

पद (Term) :- जो भाग **+** या **−** से अलग-अलग हों, उन्हें पद कहते हैं।

उदाहरण :- $5x^2 + 3x - 7$

इसमें तीन पद हैं–

- $5x^2$
- 3x
- -7

गुणांक (Coefficient) :- चर के साथ लगी संख्या को गुणांक कहते हैं।

उदाहरण :- $8x$

गुणांक = 8

$-5x^2$, गुणांक = -5

घात (Degree) :-किसी बहुपद में चर की **सबसे बड़ी घात** को बहुपद की घात कहते हैं।

उदाहरण :- $7x^5 + 2x^2 + 4$

सबसे बड़ी घात =5 अतः **Degree =5**

बहुपद के प्रकार

(1) एकपद (Monomial) :- केवल एक पद | उदाहरण **:-** 5x, $2x^2$, 7

(2) द्विपद (Binomial) :- दो पद | उदाहरण **:-** x+5, $2x^2-3$

(3) त्रिपद (Trinomial) :- तीन पद | उदाहरण :- x^2+3x+5

(4) बहुपद (Polynomial) :- तीन से अधिक पद | उदाहरण :- $x^4+x^3+2x^2+x+1$

Degree के आधार पर :- Degree 0 Constant Polynomial उदाहरण **:-** 5, 10

Degree 1 Linear Polynomial उदाहरण :- 3x+2

Degree 2 Quadratic Polynomial उदाहरण **:-** x^2+5x+2

Degree 3 Cubic Polynomial उदाहरण **:-** x^3-4x+8

Note :- बहुपद नहीं होगा

1. यदि चर हर (Denominator) में हो उदाहरण $\frac{1}{x}$ बहुपद नहीं।
2. घात ऋणात्मक हो x^{-2} बहुपद नहीं।
3. घात भिन्न हो $x^{1/2}$ बहुपद नहीं।

उदाहरण

उदाहरण 1 :- $4x^3 + 5x + 2$ Degree =3 Polynomial ✓

उदाहरण 2 :- $5x^{-1} + 3$ Polynomial ✗

उदाहरण 3 :- $\sqrt{x} + 5$ Polynomial ✗

उदाहरण 4 :- 8 Polynomial ✓ Degree=0

बोर्ड परीक्षा में पूछे जाने वाले प्रश्न

प्रश्न Polynomial किसे कहते हैं?

उत्तर :- चर के विभिन्न पदों का ऐसा बीजीय व्यंजक जिसमें चर की घात शून्य या धनात्मक पूर्णांक हो, बहुपद कहलाता है।

प्रश्न Degree किसे कहते हैं?

उत्तर :- चर की सबसे बड़ी घात को Degree कहते हैं।

प्रश्न Coefficient क्या है?

उत्तर :- चर के साथ लगी संख्या को गुणांक कहते हैं।

अध्याय-2 : बहुपद

प्रश्नावली 2.1

प्रश्न 1 निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक (Zeroes) ज्ञात कीजिए।

(i) $\boldsymbol{p(x) = x^2 - 2}$

हल :- शून्यक ज्ञात करने के लिए $p(x) = 0$ रखते हैं।

$$x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

उत्तर : $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

(ii) $\boldsymbol{p(x) = x^2 + 1}$

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$

वास्तविक संख्या पद्धति में इसका कोई हल नहीं है।

उत्तर : कोई वास्तविक शून्यक नहीं।

(iii) $\boldsymbol{p(x) = x}$

$$x = 0$$

उत्तर : 0

(iv) $\boldsymbol{p(x) = x^2}$

$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

उत्तर : 0 (दोहराया हुआ शून्यक)

प्रश्न 2 निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ग्राफ द्वारा ज्ञात कीजिए।

(i) $y = x^2 - 2$

जब $y = 0$ तब $x = \pm\sqrt{2}$

उत्तर : $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

(ii) $y = x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

उत्तर : 1 तथा -1

(iii) $y = x(x - 2)$

$$x(x - 2) = 0$$

उत्तर : 0 तथा 2

प्रश्न 3 बहुपद का शून्यक क्या होता है?

उत्तर :- यदि किसी बहुपद $p(x)$में $x = a$रखने पर $p(a) = 0$ प्राप्त हो, तो a को उस बहुपद का **शून्यक (Zero)** कहते हैं।

पाठ 2.2

बहुपदों के शून्यकों और गुणांकों के बीच संबंध

(Relationship between Zeroes and Coefficients of a Polynomial)

Short Notes

1. द्विघात बहुपद (Quadratic Polynomial)

द्विघात बहुपद का सामान्य रूप: $ax^2 + bx + c, a \neq 0$

इसके दो शून्यक (Zeroes) मान लेते हैं: α, β

सबसे महत्वपूर्ण सूत्र ⭐

शून्यकों का योग $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

उदाहरण 1 :- $x^2 - 5x + 6$ यहाँ $a = 1, b = -5, c = 6$

शून्यकों का योग $\alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5$

शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta = \frac{6}{1} = 6$

उदाहरण 2 :- $2x^2 + 7x + 3$ यहाँ $a = 2, b = 7, c = 3$

$$\alpha + \beta = -\frac{7}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{3}{2}$$

यदि शून्यक दिए हों, तो बहुपद कैसे बनाएँ? यदि शून्यक α, β हों, तो बहुपद:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

उदाहरण :- यदि शून्यक 2 और 3 हैं। योग = 5 गुणनफल = 6

बहुपद: $x^2 - 5x + 6$

त्रिघात बहुपद (Cubic Polynomial)

सामान्य रूप: $ax^3 + bx^2 + cx + d$

शून्यक: α, β, γ

महत्वपूर्ण सूत्र ⭐⭐⭐

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$
$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

प्रश्नावली 2.2

प्रश्न 1 निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा शून्यकों और गुणांकों के बीच संबंध को सत्यापित कीजिए।

(i) $x^2 - 2x - 8$

चरण 1 : शून्यक ज्ञात करें $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

अतः $x = 4, -2$

शून्यक हैं: $\alpha = 4, \beta = -2$

चरण 2 : योग और गुणनफल

$$\alpha + \beta = 4 + (-2) = 2$$
$$\alpha\beta = 4 \times (-2) = -8$$

चरण 3 : गुणांकों से जाँच, यहाँ

$$a = 1,\ b = -2,\ c = -8$$
$$-\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$$
$$\frac{c}{a} = \frac{-8}{1} = -8$$ दोनों बराबर हैं। ✓ सत्यापित।

(ii) $x^2 + 7x + 12$

शून्यक :- $x^2 + 7x + 12 = 0$

$$(x+3)(x+4) = 0$$

अतः $\alpha = -3, \beta = -4$

योग $\alpha + \beta = -3 - 4 = -7$

गुणनफल $\alpha\beta = (-3)(-4) = 12$

गुणांकों से जाँच $a = 1,\ b = 7,\ c = 12$

$$-\frac{b}{a} = -7$$

$\frac{c}{a} = 12$✓ सत्यापित।

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

पहले व्यवस्थित करें:- $6x^2 - 7x - 3 = 0$

शून्यक :- $6x^2 - 7x - 3 = 0$

$$(3x+1)(2x-3)$$

$$(3x+1)(2x-3)=0$$

अतः $\alpha=-\frac{1}{3}, \beta=\frac{3}{2}$

योग $\alpha+\beta=-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{7}{6}$

गुणनफल $\alpha\beta=-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$

गुणांकों से जाँच $a=6, b=-7, c=-3$

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{6}=\frac{7}{6}$$

$\frac{c}{a}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$ ✓ सत्यापित।

प्रश्न 2 शून्यक दिए गए हैं। बहुपद ज्ञात कीजिए।

(i) शून्यक : 2 तथा 3 योग $2+3=5$, गुणनफल $2\times3=6$

अतः बहुपद= x^2-5x+6

(ii) शून्यक : -2**तथा** $\frac{1}{2}$ योग $-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$, गुणनफल $=-2\times\frac{1}{2}=-1$

अतः $x^2+\frac{3}{2}x-1$

भिन्न हटाने पर $2x^2+3x-2$

प्रश्नावली 2.3

महत्वपूर्ण सूत्र ⭐ **यदि** $p(x)$ **को** $g(x)$ **से भाग दिया जाए, तो** $p(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$

जहाँ,

- $q(x)$= भागफल (Quotient)
- $r(x)$= शेषफल (Remainder)
- शेषफल की घात < भाजक की घात

प्रश्न 1 x^2-3x+2**को** $x-2$**से भाग दीजिए।**

Sol:-

```
            x - 1
x - 2 )  x² - 3x + 2
         x² - 2x
        ----------
       -x + 2
       -x + 2
       ----------
          0
```

अंतिम उत्तर भागफल (Quotient)= $x-1$ शेषफल (Remainder)= 0

प्रश्न 2 $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$**को** $x - 2$**से भाग दीजिए।**

प्रश्न 3 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$**को** $x - 1$**से भाग दीजिए।**

प्रश्न 4 $2x^3 + 3x^2 + x + 5$**को** $x + 1$**से भाग दीजिए।**

शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem)

यदि किसी बहुपद $p(x)$ को $x - a$ से भाग दिया जाए, तो शेषफल $p(a)$ के बराबर होता है।

उदाहरण :- $p(x) = x^2 - 3x + 2$ और भाजक $x - 2$ तो

$$p(2) = 4 - 6 + 2 = 0$$

अतः शेषफल = 0

गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem)

यदि $p(a) = 0$ तो $x - a$ बहुपद का गुणनखंड होगा।

उदाहरण

$$p(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$p(2) = 4 - 10 + 6 = 0$$

अतः $x - 2$

इसका गुणनखंड है।