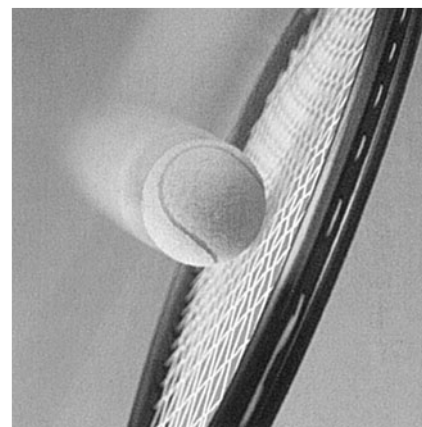


# CAPÍTULO 5

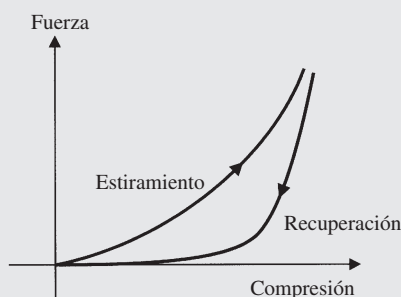


## APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Cuando estamos jugando o viendo jugar algún deporte no pensamos en cuestiones de ciencia o de ingeniería. Sin embargo, el diseño de equipamiento deportivo se ha convertido en una empresa muy técnica, con papel importante de las Matemáticas. Una comparación superficial de la raqueta de tenis de madera de 1980 y la Kevlar de 1990 basta para desvelar el impacto dramático de la tecnología en el deporte (véase la fotografía adjunta).

Uno de los principales objetivos en el diseño de una raqueta de tenis es crear un «punto dulce» lo más extenso posible. Se llama así a la zona de la raqueta que produce un golpe ideal. Para algunos jugadores, ideal significa máxima potencia, para otros vibración mínima de la raqueta. Ambos conceptos son traducibles en términos de problemas de ingeniería susceptibles de ser analizados mediante integrales definidas.

El diseño de una raqueta de tenis comienza por el estudio de la física de la colisión entre la raqueta y la bola. A gran velocidad, una pelota de tenis se aplana casi por completo y las cuerdas de la raqueta se estiran. (Una fotografía notable de este hecho se encuentra en *Stretching the Limits*, de Lee Torrey, donde también se dan más detalles acerca del punto dulce). La manera en que pelota y cordaje recuperan su forma determina las características del vuelo resultante de la pelota. Medidas detalladas proporcionan gráficas de las fuerzas y desplazamientos de las cuerdas al estirarse y al recuperar su posición natural (véase figura adjunta). Se observa que la energía perdida por rozamiento es proporcional al área entre las dos curvas. Además, el giro de la raqueta depende de su centro de masa y de su momento de inercia. Si mencionamos esto aquí es porque el área entre dos curvas, el centro de masa y el momento de inercia de la raqueta se calculan usando integrales definidas. Discutiremos el área entre curvas en la sección 5.1 y el centro de masa y los momentos en la sección 5.6.



La colisión entre una raqueta y una pelota determina la velocidad y el giro de la pelota tras ser golpeada. Estas características determinan, a su vez, la trayectoria de vuelo de la pelota (si se está acertado, una grácil curva hacia la esquina de la pista). En la sección 5.4 veremos cómo calcular la longitud de la curva, mientras que el movimiento de un proyectil (la pelota de tenis, por ejemplo) se analiza en la sección 5.5. La velocidad de la pelota depende de una cantidad llamada impulso, que introduciremos en la sección 5.6.

Este capítulo pondrá de manifiesto la versatilidad de la integral definida. Aunque será introducida como un método para calcular el área bajo una curva, veremos que se utiliza para resolver un espectro muy amplio de situaciones. Las aplicaciones contenidas en este capítulo son sólo una muestra de las que encuentra en Matemáticas, Estadística, Física e Ingeniería.

Ya hemos considerado la integral definida desde tres perspectivas: gráfica (áreas con signo), numérica (aproximación por sumas de Riemann) y teórica (teorema fundamental del Cálculo). Debe tener presentes las tres mientras analizamos cada nueva aplicación, con especial atención al papel que desempeñan en la conexión de cada nuevo problema con la integración. De ese modo se dará cuenta de que el argumento común a todas esas aplicaciones es la integral definida.

## 5.1 ÁREA ENTRE CURVAS

Inicialmente, la integral definida se ha introducido, en el Capítulo 4, para calcular el área bajo una curva. En particular, para cualquier función  $f(x) \geq 0$  y continua en  $[a, b]$ , queríamos hallar el área bajo la curva  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . Empezábamos haciendo una **partición** del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual anchura,  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Los puntos de la partición se denotan por  $x_0 = a$ ,  $x_1 = x_0 + \Delta x$ ,  $x_2 = x_1 + \Delta x$ , y así sucesivamente. Es decir,

$$x_i = x_0 + i \Delta x, \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

En cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  construimos un rectángulo de altura  $f(c_i)$  para algún  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , como indica la figura 5.5. La suma de las áreas de esos  $n$  rectángulos se toma como aproximación del área  $A$  bajo la curva:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x.$$

Al tomar más y más rectángulos, las sumas de sus áreas se iban acercando al valor exacto del área bajo la curva y ese límite daba lo que se ha llamado integral definida:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

En esta sección extenderemos esta noción. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en  $[a, b]$  tales que  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ . Deseamos hallar el área entre las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  (figura 5.2). Puesto que no sabemos aún cómo calcularla exactamente, vamos a aproximarla usando rectángulos.

Como antes, partimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual anchura,  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , tomando como puntos de la partición

$$x_i = a + i \Delta x, \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ahora sobre cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  construimos un rectángulo desde la curva inferior  $y = g(x)$  hasta la curva superior  $y = f(x)$  (figura 5.3a). La figura 5.3b indica que el  $i$ -ésimo rectángulo tiene altura  $h_i = f(c_i) - g(c_i)$ , para ciertos  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Así, pues, el área del  $i$ -ésimo rectángulo es

$$\text{Área} = \text{longitud} \times \text{anchura} = h_i \Delta x = [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x.$$

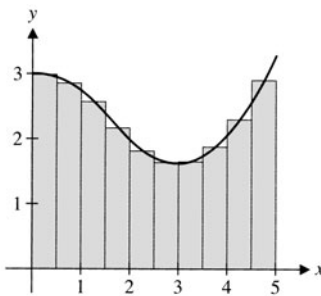


Figura 5.1

Aproximación del área.

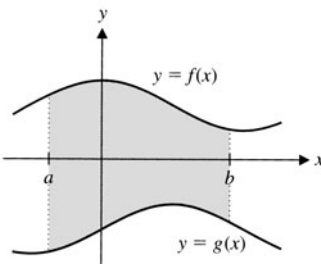
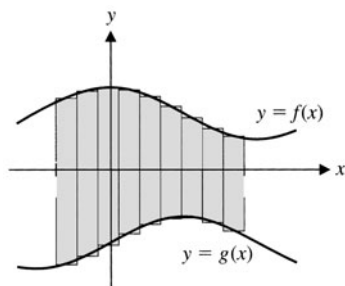
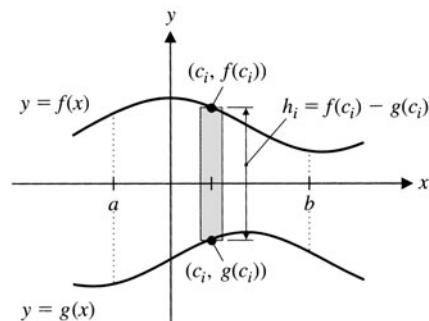


Figura 5.2

Área entre dos curvas.



**Figura 5.3a**  
Área aproximada.



**Figura 5.3b**  
Área del  $i$ -ésimo rectángulo.

Tomamos la suma de las áreas de los rectángulos como aproximación del valor exacto del área  $A$  entre las dos gráficas:

$$A \approx \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x.$$

Finalmente, si existe el límite para  $n \rightarrow \infty$ , dará el área exacta, lo que identificamos como una integral definida:

### Nota 1.1

La fórmula (1.1) sólo es válida si  $f(x) \geq g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . En general, el área entre las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$  viene dada por

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Nótese que para calcular esta integral hay que calcular primero

$$\int_c^d [f(x) - g(x)] dx$$

en cada uno de los subintervalos donde  $f(x) \geq g(x)$ , después

$$\int_c^d [g(x) - f(x)] dx$$

en cada uno de los subintervalos donde  $g(x) \geq f(x)$  y finalmente sumar esas integrales.

**Área entre dos curvas**

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (1.1)$$

### Ejemplo 1.1 Área entre dos curvas

Calcular el área acotada por las gráficas de  $y = 3 - x$  e  $y = x^2 - 9$  (figura 5.4).

**Solución** La región, ilustrada en la figura 5.4, viene determinada por la intersección de dos curvas. Las coordenadas  $x$  de los puntos de intersección serán los límites de integración. Para hallarlas, igualamos a cero las dos funciones y resolvemos en  $x$ . Se tiene

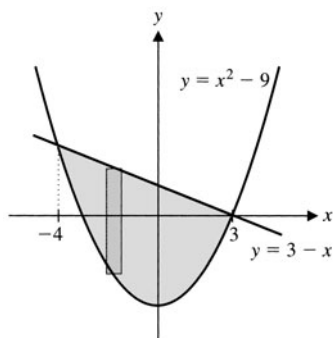
$$3 - x = x^2 - 9, \text{ o sea, } 0 = x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4).$$

Así, pues, las curvas se cortan en  $x = -4$  y en  $x = 3$ . Ahora hay que ver cuál de las gráficas es la frontera superior de la región. En este caso, la curva superior es  $y = 3 - x$ . Por tanto, para cada valor de  $x$  la altura del rectángulo indicado en la figura 5.4 es

$$h(x) = (3 - x) - (x^2 - 9).$$

No se preocupe por el hecho de que  $(x^2 - 9) < 0$  en parte del intervalo. La altura de un rectángulo dado sigue siendo  $h(x)$ . Por (1.1), el área entre las curvas viene dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^3 [(3 - x) - (x^2 - 9)] dx \\ &= \int_{-4}^3 (-x^2 - x + 12) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_{-4}^3 \\ &= \left[ -\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12(3) \right] - \left[ -\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12(-4) \right] = \frac{343}{6}. \end{aligned}$$



**Figura 5.4**  
 $y = 3 - x$  e  $y = x^2 - 9$ .

A veces, la gráfica de una de las funciones es curva superior en parte del intervalo e inferior en otra, como ocurre en el próximo ejemplo.

### Ejemplo 1.2 Área entre dos curvas que se cruzan

Calcular el área acotada por las gráficas de  $y = x^2$  e  $y = 2 - x^2$  en  $0 \leq x \leq 2$ .

**Solución** Como siempre, una figura ayuda a adoptar la estrategia adecuada. La figura 5.5 muestra que las curvas se cortan en el centro del intervalo, así que será necesario calcular dos integrales, una en el intervalo donde  $2 - x^2 \geq x^2$  y otra en el intervalo donde  $x^2 \geq 2 - x^2$ . Parece que se cortan en  $x = 1$ , siendo  $2 - x^2 \geq x^2$  en  $0 \leq x \leq 1$  y  $x^2 \geq 2 - x^2$  en  $1 \leq x \leq 2$ . Para hallar el punto exacto de corte resolvemos  $x^2 = 2 - x^2$ , o sea,  $2x^2 = 2$ , o  $x^2 = 1$ , con soluciones  $x = \pm 1$ . Pero  $x = -1$  está fuera del intervalo en cuestión, así que el único punto de intersección que nos interesa está en  $x = 1$ . Por (1.1), el área es

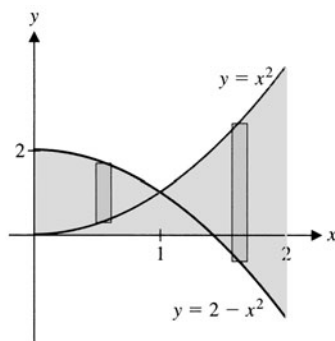


Figura 5.5

$y = x^2$  e  $y = 2 - x^2$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [(2 - x^2) - x^2] dx + \int_1^2 [x^2 - (2 - x^2)] dx \\ &= \int_0^1 (2 - 2x^2) dx + \int_1^2 (2x^2 - 2) dx = \left[ 2x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{2x^3}{3} - 2x \right]_1^2 \\ &= \left( 2 - \frac{2}{3} \right) - (0 - 0) + \left( \frac{16}{3} - 4 \right) - \left( \frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4. \end{aligned}$$

En el ejemplo 1.2, aunque  $2 - x^2 < 0$  en una parte del intervalo, el cálculo del área depende sólo de que  $2 - x^2 \geq x^2$  o  $x^2 \geq 2 - x^2$ . Conviene advertir que ese ejemplo estaba preparado para que el punto de intersección fuera fácil de hallar. En el próximo ejemplo, por el contrario, hay que recurrir a una aproximación numérica.

### Ejemplo 1.3 Un caso en el que los puntos de intersección no se conocen exactamente

Calcular el área acotada por las gráficas de  $y = \cos x$  e  $y = x^2$ .

**Solución** Antes de nada hemos de determinar los puntos de intersección de las curvas. La figura 5.6 indica que las intersecciones están cerca de  $x = -1$  y de  $x = 1$ . Las intersecciones ocurren donde  $\cos x = x^2$ . No sabemos resolver esta ecuación, de modo que hay que usar algún método de aproximación. [Por ejemplo, se puede aplicar el método de Newton a los ceros de la ecuación  $f(x) = \cos x - x^2 = 0$ ]. Se obtienen así los valores aproximados  $x = \pm 0,824132$ , que serán, por tanto, los límites de integración.

La gráfica muestra que, entre esos dos puntos,  $\cos x \geq x^2$ , así que el área buscada es

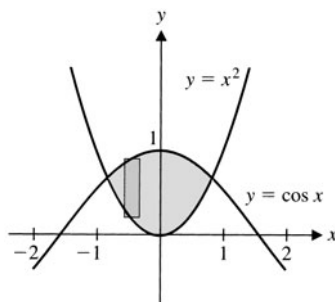


Figura 5.6

$y = \cos x$  e  $y = x^2$ .

$$\begin{aligned} A &\approx \int_{-0,824132}^{0,824132} (\cos x - x^2) dx = \left[ \sin x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-0,824132}^{0,824132} \\ &= \sin 0,824132 - \frac{1}{3} (0,824132)^3 - \left[ \sin (-0,824132) - \frac{1}{3} (-0,824132)^3 \right] \\ &\approx 1,09475. \end{aligned}$$

Nótese que hemos aproximado tanto los límites de integración como el cálculo final.

Calcular el área de algunas regiones exige romper la integral en varias, cada una con distintas fronteras superior e inferior.

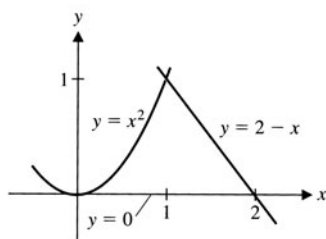


Figura 5.7a

$y = x^2$  e  $y = 2 - x$ .

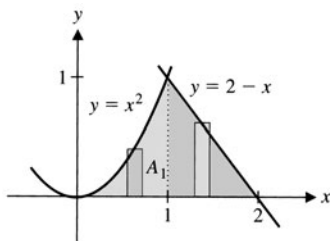


Figura 5.7b

$y = x^2$  e  $y = 2 - x$ .

### Ejemplo 1.4 Área de una región determinada por tres curvas

Hallar el área acotada por las gráficas de  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$  e  $y = 0$ .

**Solución** La figura 5.7a muestra las tres curvas. La curva superior es la parábola  $y = x^2$  en la primera porción del intervalo y la recta  $y = 2 - x$  en la segunda. Para determinar entre qué puntos exactamente, hemos de resolver la ecuación

$$2 - x = x^2, \quad \text{o sea,} \quad 0 = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1).$$

Como  $x = -2$  cae fuera del intervalo, la intersección buscada ocurre en  $x = 1$ . Eso obliga a romper la región en dos partes (figura 5.7b) y a calcular el área de cada una por separado. Por tanto, el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^2 - 0) \, dx + \int_1^2 [(2 - x) - 0] \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Aunque en el ejemplo 1.4 ha sido fácil romper la región en varios fragmentos, vamos a sugerir una alternativa sorprendentemente útil. Si mira la figura 5.7a, girando la página, con el eje  $x$  en posición vertical, verá una única curva que determina las fronteras superior e inferior. Eso equivale a intercambiar los papeles de  $x$  y  $y$ , lo cual da la clave para hallar el área de regiones de este tipo: tratar las fronteras izquierda y derecha de la región como funciones de  $y$ .

En general, si  $f$  y  $g$  son funciones continuas de  $y$ , con  $f(y) \geq g(y)$  en el intervalo  $c \leq y \leq d$ , podemos extender nuestra noción de área al área entre las curvas  $x = f(y)$  y  $x = g(y)$ . En este caso, partimos el intervalo  $[c, d]$  en  $n$  subintervalos de igual anchura,  $\Delta y = \frac{d-c}{n}$  (figura 5.8a). Denotamos los puntos de la partición por  $y_0 = c$ ,  $y_1 = y_0 + \Delta y$ ,  $y_2 = y_1 + \Delta y$ , etc. Es decir,

$$y_i = c + i \Delta y, \quad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

En cada subintervalo  $[y_{i-1}, y_i]$  (con  $i = 1, 2, \dots, n$ ) construimos un rectángulo de anchura  $w_i = [f(c_i) - g(c_i)]$ , para ciertos  $c_i \in [y_{i-1}, y_i]$ , como indica la figura 5.8b. El área del  $i$ -ésimo rectángulo viene dada por

$$\text{Área} = \text{longitud} \times \text{anchura} = [f(c_i) - g(c_i)] \Delta y.$$

El área total entre las dos curvas puede aproximarse por

$$A \approx \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta y.$$

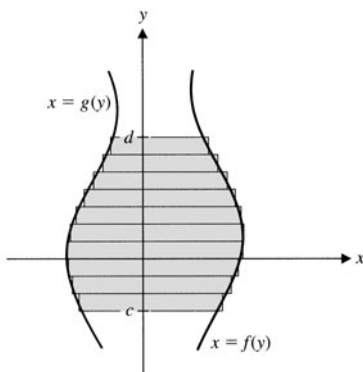


Figura 5.8a

Área entre  $x = g(y)$  y  $x = f(y)$ .

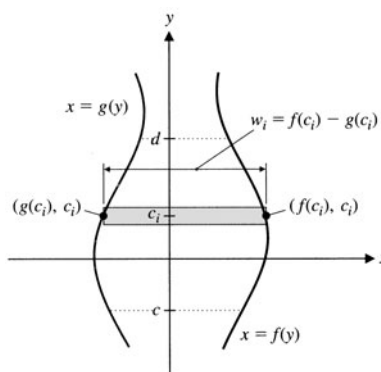


Figura 5.8b

Área del  $i$ -ésimo rectángulo.

Como otras veces, hallamos el área exacta como el límite para  $n \rightarrow \infty$  y reconociendo en ese límite una integral definida. Así, se obtiene

Área entre  
dos curvas

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta y = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy. \quad (1.2)$$

### Ejemplo 1.5 Cálculo de un área como integral en y

Rehacer el ejemplo 1.4 integrando respecto de y.

**Solución** La figura 5.9 muestra el área limitada por las gráficas de  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$  e  $y = 0$ .

La frontera izquierda es la gráfica de  $y = x^2$  y la derecha es la recta  $y = 2 - x$ , de manera que una sola integral en y será suficiente. Pero antes hemos de escribir esas dos fronteras como funciones de y. A tal fin, basta despejar x en  $y = x^2$ . Se obtiene  $x = \sqrt{y}$  (nótese que sólo la mitad derecha de la parábola forma la frontera). Análogamente, de  $y = 2 - x$  resulta  $x = 2 - y$ . Finalmente, estas curvas se cortan cuando  $\sqrt{y} = 2 - y$ . Elevando al cuadrado, vemos que

$$y = (2 - y)^2 = 4 - 4y + y^2,$$

es decir,

$$0 = y^2 - 5y + 4 = (y - 1)(y - 4).$$

Así, pues, las curvas se cortan en  $y = 1$  y en  $y = 4$ . La figura 5.9 deja claro que  $y = 1$  es la solución que nos interesa. (¿A qué corresponde la solución  $y = 4$ ?). Según (1.2), el área viene dada por

$$A = \int_0^1 [(2 - y) - \sqrt{y}] dy = \left[ 2y - \frac{1}{2} y^2 - \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

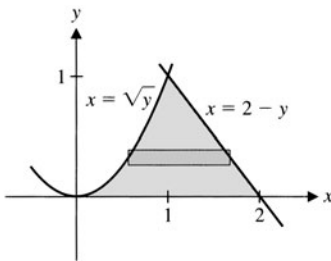


Figura 5.9

$y = x^2$  e  $y = 2 - x$ .

### Ejemplo 1.6 Área de una región acotada por funciones de y

Calcular el área acotada por las gráficas de  $x = y^2$  y  $x = 2 - y^2$ .

**Solución** La figura 5.10 muestra las dos parábolas, una abierta hacia la izquierda y la otra hacia la derecha. Integrar en x exigiría romper en dos la región y hallar por separado las ecuaciones de las fronteras superior e inferior, así que es más fácil integrar en y. Para ello hemos de hallar las intersecciones de las dos curvas. Ocurren cuando  $y^2 = 2 - y^2$ , o sea,  $y^2 = 1$ , de modo que  $y = \pm 1$ . En el intervalo  $[-1, 1]$  es  $2 - y^2 \geq y^2$  (la curva  $x = 2 - y^2$  está a la derecha de la curva  $x = y^2$ ). Por tanto, según (1.2), el área es

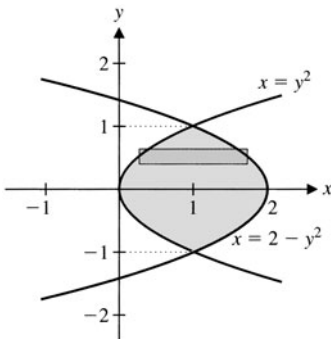


Figura 5.10

$x = y^2$  y  $x = 2 - y^2$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 [(2 - y^2) - y^2] dy = \int_{-1}^1 (2 - 2y^2) dy \\ &= \left[ 2y - \frac{2}{3} y^3 \right]_{-1}^1 = \left( 2 - \frac{2}{3} \right) - \left( -2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Al golpear una pelota de tenis con una raqueta, la pelota cambia de forma: primero se comprime y después se expande. Sea  $x$  la compresión de la pelota, con  $0 \leq x \leq m$ , y sea  $f(x)$  la fuerza ejercida por la raqueta sobre la pelota. La energía transferida es proporcional al

área bajo la curva  $y = f(x)$ . Supongamos que  $f_c(x)$  es la fuerza durante la compresión y  $f_e(x)$  la fuerza durante la expansión. La energía es transferida a la pelota durante la compresión y transferida por la pelota durante la expansión, de modo que la energía perdida por la pelota en la colisión (debido al rozamiento) es proporcional a  $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx$ . Por tanto, el porcentaje de energía perdida en la colisión viene dado por

$$100 \frac{\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx}{\int_0^m f_c(x) dx}$$

### Ejemplo 1.7 Estimación de la energía perdida por una pelota

$x$ (pulg.)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f_c(x)$ (libras)	0	25	50	90	160
$f_e(x)$ (libras)	0	23	46	78	160

Se han efectuado medidas en varios golpes de tenis con los resultados de la tabla. Estimar el porcentaje de energía perdida por la pelota en la colisión con la raqueta.

**Solución** La figura 5.11 muestra los puntos correspondientes a esos datos conectados por segmentos rectos.

Necesitamos estimar el área entre las dos curvas y el área bajo la curva superior. Como no tenemos una fórmula para ninguna de las dos funciones, tenemos que recurrir a un método numérico. Con el método de Simpson aplicado a  $\int_0^{0,4} f_c(x) dx$ , obtenemos

$$\int_0^{0,4} f_c(x) dx \approx \frac{0,1}{3} [0 + 4(25) + 2(50) + 4(90) + 160] = 24.$$

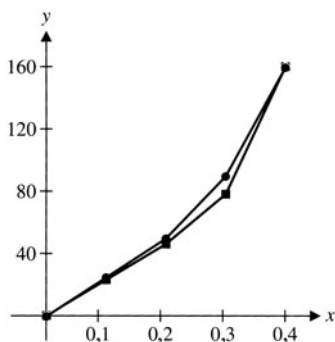


Figura 5.11

Fuerza ejercida sobre una pelota de tenis.

$x$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f_c(x) - f_e(x)$	0	2	4	12	0

Con el fin de aproximar  $\int_0^{0,4} [f_c(x) - f_e(x)] dx$ , por el método de Simpson, necesitamos una tabla de valores de  $f_c(x) - f_e(x)$ . Restando, vemos que de donde deducimos, por la regla de Simpson.

$$\int_0^{0,4} [f_c(x) - f_e(x)] dx \approx \frac{0,1}{3} [0 + 4(2) + 2(4) + 4(12) + 0] = \frac{6,4}{3}.$$

Así, pues, el porcentaje de energía perdido es  $\frac{100(6,4/3)}{24} = 8,9\%$ . Con más de un 90% de su energía retenida tras la colisión, es una pelota muy «viva».



## EJERCICIOS 5.1

- Supongamos que las funciones  $f$  y  $g$  satisfacen  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  en todo  $x$  del intervalo  $[a, b]$ . Explicar, en términos de las áreas  $A_1 = \int_a^b f(x) dx$  y  $A_2 = \int_a^b g(x) dx$ , por qué el área entre las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  viene dada por  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ .
- Supongamos que las funciones  $f$  y  $g$  satisfacen  $f(x) \leq g(x) \leq 0$  en todo  $x$  del intervalo  $[a, b]$ . Explicar, en términos de las áreas  $A_1 = \int_a^b f(x) dx$  y  $A_2 = \int_a^b g(x) dx$ , por qué el área entre las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  viene dada por  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ .
- Las velocidades de dos automóviles  $A$  y  $B$  son  $v_A(t)$  y  $v_B(t)$  mph, respectivamente. Si  $v_A(t) \geq v_B(t)$  para todo  $t$ ,  $v_A(0) = v_B(0)$ , y la carrera transcurre entre  $t = 0$  y  $t = 2$  horas, explicar por qué  $A$  ganará con una ventaja de  $\int_0^2 [v_A(t) - v_B(t)] dt$  millas.
- Las velocidades de dos automóviles  $A$  y  $B$  son  $v_A(t)$  y  $v_B(t)$  mph, respectivamente. Si  $v_A(t) \geq v_B(t)$  en  $0 \leq t \leq 0,5$  y  $1,1 \leq t \leq 1,6$ , mientras que  $v_B(t) \geq v_A(t)$  en  $0,5 \leq t \leq 1,1$  y en  $1,6 \leq t \leq 2$ , describir la diferencia entre  $\int_0^2 |v_A(t) - v_B(t)| dt$  y  $\int_0^2 [v_A(t) - v_B(t)] dt$ . ¿Qué integral dice quién es el ganador?

En los ejercicios 5-12, calcular el área entre las curvas en el intervalo que se especifica.

- $y = x^3$ ,  $y = x^2 - 1$ ,  $1 \leq x \leq 3$
- $y = \cos x$ ,  $y = x^2 + 2$ ,  $0 \leq x \leq 2$
- $y = e^x$ ,  $y = x - 1$ ,  $-2 \leq x \leq 0$
- $y = e^{-x}$ ,  $y = x^2$ ,  $1 \leq x \leq 4$
- $y = x^2 - 1$ ,  $y = 1 - x$ ,  $0 \leq x \leq 2$
- $y = x^2 - 3$ ,  $y = x - 1$ ,  $0 \leq x \leq 3$
- $y = x^3 - 1$ ,  $y = 1 - x$ ,  $-2 \leq x \leq 2$
- $y = x^4 + x - 2$ ,  $y = x - 1$ ,  $-2 \leq x \leq 2$

En los ejercicios 13-20, hacer un esbozo de la región determinada por las intersecciones de las curvas y calcular su área.

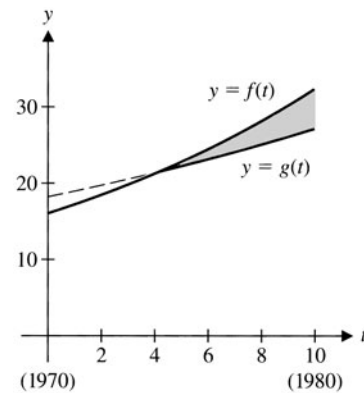
- $y = x^2 - 1$ ,  $y = 7 - x^2$
- $y = x^2 - 1$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2$
- $y = x^2 + 1$ ,  $y = 3x - 1$
- $y = x^2 - x - 4$ ,  $y = x + 4$
- $y = x^3$ ,  $y = 3x + 2$
- $y = x^3 - 2x^2$ ,  $y = x^2$
- $y = x^3$ ,  $y = x^2$
- $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$

En los ejercicios 21-26, esbozar y estimar el área de la región determinada por las intersecciones de las curvas.

- $y = e^x$ ,  $y = 1 - x^2$
- $y = x^4$ ,  $y = 1 - x$
- $y = \sin x$ ,  $y = x^2$
- $y = \cos x$ ,  $y = x^4$
- $y = x^4$ ,  $y = 2 + x$
- $y = \ln x$ ,  $y = x^2 - 2$

En los ejercicios 27-34, hacer un esbozo de la región acotada por las curvas dadas y calcular su área. Elegir la variable independiente que permita expresar el área mediante una única integral.

- $y = x$ ,  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$
- $y = 2x(x > 0)$ ,  $y = 3 - x^2$ ,  $x = 0$
- $y = 3y$ ,  $x = 2 + y^2$
- $x = y^2$ ,  $x = 1$
- $x = y$ ,  $x = -y$ ,  $x = 1$
- $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $y = 2$
- $y = x$ ,  $y = 2$ ,  $y = 6 - x$ ,  $y = 0$
- $x = y^2$ ,  $x = 4$
- El valor medio de una función  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  es  $A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . Calcular el valor medio de  $f(x) = x^2$  en  $[0, 3]$  y probar que el área comprendida entre  $y = A$  e  $y = f(x)$  es igual al área comprendida entre  $y = A$  y el eje  $x$ .
- Demostrar que el resultado del ejercicio 35 es siempre cierto, probando que  $\int_a^b [f(x) - A] dx = 0$ .
- El consumo de petróleo en Estados Unidos en los años 1970-1974 siguió el modelo  $f(t) = 16,1e^{0,07t}$  (millones de barriles anuales), donde  $t = 0$  corresponde a 1970. A causa de la crisis de 1974, el consumo cambió al modelo  $g(t) = 21,3e^{0,04(t-4)}$ ,  $t \geq 4$ . Probar que  $f(4) \approx g(4)$  y explicar qué representa este número. Calcular el área entre  $f(t)$  y  $g(t)$  en  $4 \leq t \leq 10$ . Usar este número para estimar el número de barriles ahorrados por la reducción de consumo entre 1974 y 1980.



- Supongamos que el consumo de madera en un país sigue el modelo  $76e^{0,03t}$  m<sup>3</sup>/año y el crecimiento de árboles nuevos produce  $50 - 6e^{0,09t}$  m<sup>3</sup>/año. Calcular e interpretar el área entre las curvas en  $0 \leq t \leq 10$ .
- En una población hay  $b(t) = 2e^{0,04t}$  millones de nacimientos al año y  $d(t) = 2e^{0,02t}$  millones de defunciones. Probar que  $b(t) \geq d(t)$  para  $t \geq 0$  y explicar por qué el área entre las dos curvas representa el incremento de la población. Calcular ese incremento en el período  $0 \leq t \leq 10$ .



40. En una población hay  $b(t) = 2e^{0.04t}$  millones de nacimientos al año y  $d(t) = 3e^{0.02t}$  millones de defunciones. Hallar la intersección  $T$  de las curvas ( $T > 0$ ). Interpretar el área entre las curvas en  $0 \leq t \leq T$  y en  $T \leq t \leq 30$ . Calcular el cambio neto de población en  $0 \leq t \leq 30$ .
41. De forma análoga a la compresión y expansión de una pelota de tenis, la fuerza ejercida por un tendón como función de su extensión determina la pérdida de energía. Sean  $x$  la extensión,  $f_s(x)$  la fuerza durante la extensión y  $f_r(x)$  la fuerza durante la distensión del tendón. Los datos de la tabla corresponden al tendón posterior de un ualabí (véase el libro *Exploring Biomechanics*, de Alexander):


$x$ (mm)	0	0,75	1,5	2,25	3,0
$f_s(x)$ (N)	0	110	250	450	700
$f_r(x)$ (N)	0	100	230	410	700

Usando la regla de Simpson, estimar la proporción de energía devuelta por el tendón.

42. El arco del pie humano actúa como un muelle al caminar o al saltar, almacenando energía cuando el pie se estira (cuando el arco se pone plano) y devolviéndola cuando el pie se distiende. En los datos,  $x$  es el desplazamiento vertical del arco,  $f_s(x)$  la fuerza durante la extensión y  $f_r(x)$  la fuerza durante la distensión (véase el libro *Exploring Biomechanics*, de Alexander):

$x$ (mm)	0	2,0	4,0	6,0	8,0
$f_s(x)$ (N)	0	300	1.000	1.800	3.500
$f_r(x)$ (N)	0	150	700	1.300	3.500

Usando la regla de Simpson, estimar la proporción de energía devuelta por el arco.

43. Las velocidades de dos objetos que caen por efecto de la gravedad vienen dadas por  $f(t) = -40 - 32t$  pies/s y  $g(t) = -30 - 32t$  pies/s. Si los dos objetos parten de la misma altura en  $t = 0$ , calcular e interpretar el área entre las curvas para  $0 \leq t \leq 10$ .
44. Las velocidades de dos atletas vienen dadas por  $f(t) = 10$  mph y  $g(t) = 10 - \sin t$  mph. Evaluar e interpretar las integrales  $\int_0^\pi [f(t) - g(t)] dt$  y  $\int_0^{2\pi} [f(t) - g(t)] dt$ .
45. Las velocidades de dos automóviles  $A$  y  $B$  vienen dadas por  $f(t) = 40(1 - e^{-t})$  mph y  $g(t) = 20t$  mph, respectivamente. Ambos arrancan en  $t = 0$  desde el mismo lugar. Estimar (a) la máxima ventaja de  $A$ , (b) el instante en que  $B$  le alcanza.
46.  Ya está en disposición de calcular áreas de regiones planas «simples». Para una región general acotada a la izquierda por una función  $x = i(y)$ , a la derecha por  $x = d(y)$ , arriba por una función  $y = t(x)$  y por abajo por  $y = b(x)$ , escribir el área como suma de integrales. (Ayuda: Divida la región en subregiones cuyas áreas se puedan expresar como integral de  $i(y) - d(y)$  o de  $t(x) - b(x)$ ).

## 5.2 VOLUMEN

A lo largo de este capítulo tendremos ocasión de comprobar la sorprendente versatilidad de la integral. En la sección 5.1 se ha utilizado para calcular el área una medida del tamaño de una región bidimensional. En esta sección, las usaremos para calcular el volumen una medida del tamaño de las regiones tridimensionales. Empezamos con un problema sencillo.

Una piscina tiene su parte superior rectangular, de 50 por 15 metros. Si orientamos los ejes como indica la figura 5.12, la superficie superior de la piscina viene dada por  $y = 0$ . Su fondo tiene por ecuación  $y = \frac{1}{165.000} (x^4 - 67x^3) - 3$ . (Nótese que la profundidad en un punto es  $-y$ ). Calcular el volumen de agua necesario para llenar la piscina hasta el nivel  $y = 0$ .

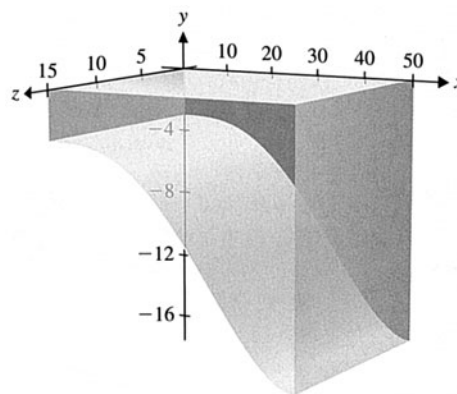


Figura 5.12

Vista lateral de una piscina.

### Notas históricas



**Arquímedes (ca. 287-212 a.C.).** Matemático y científico griego, fue el primero en deducir fórmulas para áreas y volúmenes. Arquímedes es famoso por haber descubierto las leyes fundamentales de la Hidrostática (el célebre «¡Eureka!» y su salida precipitada de la bañera para compartir, a voz en grito, su descubrimiento por las calles) y las palancas («Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra»). Ingeniero de inventiva admirable, sus catapultas, grúas y espejos aterroizaron a un masivo ejército romano cuando intentó la conquista de Siracusa, su ciudad natal. El día en que el asedio romano concluyó, a los tres años, Arquímedes se hallaba estudiando unos dibujos geométricos trazados sobre la arena. Un soldado romano intentó arrestarlo. Las últimas palabras de Arquímedes fueron: «No destruyas mis círculos».

Antes una pregunta previa: ¿de qué sólidos sabe calcular el volumen en este momento? Tal vez su respuesta sea: caja rectangular ( $V = \text{longitud} \times \text{anchura} \times \text{altura}$ ), esfera ( $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ) y cilindro circular recto ( $V = \pi r^2 h$ ). En cierto sentido, el primero y el tercero son del mismo tipo: **cilindros**. En efecto, un cilindro es *cualquier* sólido cuyas secciones (perpendiculares a alguna recta fija) son idénticas. Así, pues, la caja rectangular es un cilindro con secciones rectangulares.

Es interesante advertir la conexión entre las fórmulas de esos dos tipos de cilindros. El volumen de un cilindro circular recto es

$$V = \underbrace{(\pi r^2)}_{\text{área de la sección}} \times \underbrace{h}_{\text{altura}}.$$

Y el de la caja

$$V = \underbrace{\text{longitud} \times \text{anchura}}_{\text{área de la sección}} \times \text{altura}$$

En general, el volumen de cualquier cilindro se calcula así:

$$V = (\text{área de la sección}) \times (\text{altura}).$$

En la figura 5.12 vemos que la piscina es también un cilindro, ya que todas las secciones perpendiculares al eje  $x$  son idénticas. Por tanto, su volumen es el producto del área (constante) de una de sus secciones por la anchura (15 metros). El área de la sección es la comprendida entre las curvas  $y = 0$  e  $y = \frac{1}{165.000}(x^4 - 67x^3) - 3$ . Por (1.1),

$$A = \int_0^{50} \left\{ 0 - \left[ \frac{1}{165.000}(x^4 - 67x^3) - 3 \right] \right\} dx$$

y, en consecuencia, el volumen  $V$  viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \text{Área} \times 15 = -15 \int_0^{50} \left[ \frac{1}{165.000}(x^4 - 67x^3) - 3 \right] dx \\ &= \left[ \frac{-1}{55.000}x^5 + \frac{67}{44.000}x^4 + 45x \right]_0^{50} \approx 6.085 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

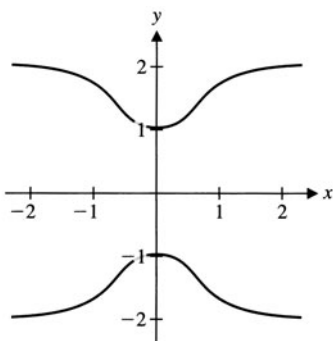
### Volumen por rodajas (o rebanadas)

Si el área de la sección o la anchura de un sólido no son constantes, tenemos que modificar nuestro método. Por ejemplo, consideremos una piscina en forma de reloj de arena (figura 5.13). Salvo que su profundidad sea constante, la piscina no es un cilindro, así que no sabemos hallar su volumen. Adoptaremos, por tanto, la estrategia que ya hemos utilizado otras veces: aproximar el volumen y mejorar después esas aproximaciones.

Dado un sólido que se extiende desde  $x = a$  hasta  $x = b$ , con secciones de área  $A(x)$ , tomamos una partición del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual anchura,  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Como de costumbre, denotamos  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + \Delta x$ , y así sucesivamente, es decir,

$$x_i = a + i \Delta x, \text{ con } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ahora dividimos el sólido en rodajas perpendiculares al eje  $x$  cortando por cada uno de los  $(n-1)$  puntos  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  (figura 5.14a). Necesitamos aproximar el volumen de cada rodaja. Si las rodajas son finas, el área de sus secciones es casi constante. De hecho, la rodaja entre  $x_{i-1}$  y  $x_i$  es casi un cilindro (figura 5.14b). Así que si  $c_i$  denota cualquier punto del intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , el área de cada sección en ese intervalo es aproximadamente  $A(c_i)$ .



**Figura 5.13**

Piscina (vista desde arriba).

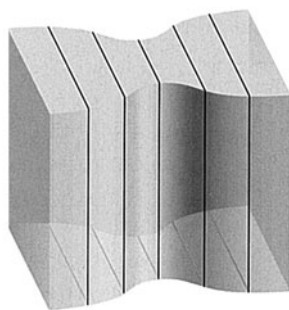


Figura 5.14a

Sólido en rebanadas.

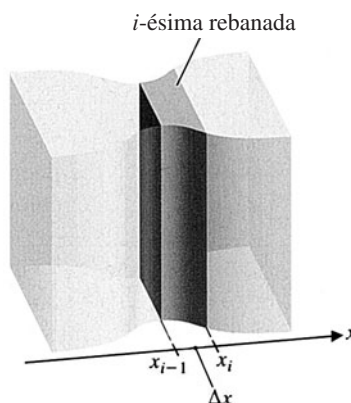


Figura 5.14b

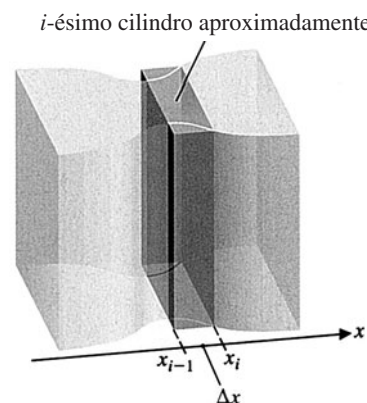
 $i$ -ésima rebanada.

Figura 5.14c

 $i$ -ésimo cilindro aproximante.

Por tanto, podemos aproximar el volumen  $V_i$  de la  $i$ -ésima rodaja por el de un cilindro de área de sección constante  $A(c_i)$  en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  (figura 5.14c):

$$V_i \approx \underbrace{A(c_i)}_{\text{área de la sección}} \underbrace{\Delta x}_{\text{anchura}}$$

donde  $\Delta x$  es la anchura de la rodaja.

Repitiendo este proceso para las  $n$  rodajas, podemos aproximar el volumen total  $V$  del sólido por

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(c_i) \Delta x.$$

Al tomar un número mayor de rodajas, cada vez más estrechas, la aproximación mejorará. De esa forma obtenemos el valor exacto del volumen como el límite

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(c_i) \Delta x,$$

supuesto que exista ese límite. Reconocemos inmediatamente esas sumas como sumas de Riemann, de manera que el límite define una integral. La fórmula para el volumen exacto es, finalmente,

**Volumen de un sólido con secciones de área  $A(x)$**

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (2.1)$$

### Ejemplo 2.1

### Cálculo del volumen por áreas de secciones

Supongamos que la piscina de la figura 5.13, en forma de reloj de arena, está definida por las curvas  $y(x) = \pm \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} + 1 \right)$  metros, en  $-3 \leq x \leq 3$  y que su profundidad es  $d(x) = 6 + x$  metros.

Calcular su volumen.

**Solución** Para todo  $x$ , la sección de la piscina perpendicular al eje  $x$  es un rectángulo de dimensiones  $2 \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} + 1 \right)$  por  $6 + x$ . Por (2.1), el volumen viene dado por

$$V = \int_{-3}^3 \underbrace{2 \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} + 1 \right)}_{\text{área de la sección}} (6 + x) dx \approx 123,81 \text{ m}^3,$$

donde hemos calculado la integral numéricamente. (Se puede usar la regla de Simpson o un PCS).

En el ejemplo 2.1 sabíamos cómo calcular el área de la sección exactamente. En muchas aplicaciones importantes no conocemos el área exacta de la sección y hay que aproximarla realizando medidas. En tales circunstancias, podremos hallar el volumen por integración numérica.

### Nota 2.1

Seguiremos un proceso análogo al anterior para deducir muchas fórmulas importantes: área, volumen, longitud de arco, área de una superficie. Dividimos un objeto en  $n$  fragmentos, aproximamos la cantidad de interés para cada uno de ellos, sumamos las aproximaciones y tomamos el límite para acabar reconociendo una integral al final del camino. Por eso es fundamental comprender la idea que se esconde detrás de la fórmula (2.1). Memorizar la fórmula no le ayudará en ese aspecto. Pero si entiende las piezas del rompecabezas y cómo encajan (partición, aproximación, suma y límite hasta dar con la integral definida), dominará el resto de este capítulo sin dificultad.

### Estimación del volumen con áreas medidas experimentalmente

#### Ejemplo 2.2

En la tomografía computarizada o en la IRM se toman numerosas medidas y se procesan en un ordenador para producir una imagen tridimensional del tejido que el médico desea analizar. Es un proceso parecido al de las rodajas que hemos utilizado para calcular el volumen de un sólido. Sin embargo, en este caso las representaciones matemáticas de varias capas del tejido se combinan para producir una imagen tridimensional que pueda ser analizada por el médico. Supongamos que un barrido de IRM da los siguientes valores del área de las secciones de un tumor.

$x$ (cm)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$A(x)$ (cm <sup>2</sup> )	0,0	0,1	0,4	0,3	0,6	0,9	1,2	0,8	0,6	0,2	0,1

Estimar el volumen del tumor.

**Solución** Para calcular el volumen del tumor tenemos que usar (de acuerdo con (2.1)) la integral

$$V = \int_0^1 A(x) dx,$$

pero ahora sólo conocemos  $A(x)$  en unos cuantos puntos. ¿Es suficiente para nuestro objetivo? Sí, ya que podemos aproximar la integral por la regla de Simpson (sección 4.7) con  $\Delta x = 0,1$ :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) dx \\ &\approx \frac{b-a}{3n} \left[ A(0) + [4A(0,1) + 2A(0,2) + 4A(0,3) + 2A(0,4) + 4A(0,5) \right. \\ &\quad \left. + 2A(0,6) + 4A(0,7) + 2A(0,8) + 4A(0,9) + A(1) \right] \\ &= \frac{0,1}{3} (0 + 0,4 + 0,8 + 1,2 + 1,2 + 3,6 + 2,4 + 3,2 + 1,2 + 0,8 + 0,1) \\ &= 0,49667 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

En el ejemplo 2.1, el área de las secciones era fácil de calcular porque eran rectángulos. Dedicaremos un notable esfuerzo a otra situación favorable en ese aspecto: los sólidos generados al hacer girar una curva en torno a una recta, cuyas secciones son discos circulares. Tales sólidos, llamados **sólidos de revolución**, son comunes en la Naturaleza y en los objetos de fabricación industrial.

#### Ejemplo 2.3

#### Volumen de un sólido de revolución

Se hace girar el segmento de recta  $y = 1 + \frac{x}{3}$ ,  $0 \leq x \leq 12$  (figura 5.15a) en torno al eje  $x$ . El sólido resultante tiene forma de megáfono (figura 5.15b). Calcular su volumen.

**Solución** Para todo  $x$  de ese intervalo, la sección perpendicular al eje  $x$  es un disco circular de radio  $r = 1 + \frac{x}{3}$ . (¡Piense en esto!). El área de esa sección circular es

$$A(x) = \pi r^2 = \pi \left( 1 + \frac{x}{3} \right)^2.$$

De (2.1) se sigue que el volumen de ese sólido de revolución es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{12} \pi \left( 1 + \frac{x}{3} \right)^2 dx = \int_0^{12} \pi \left( 1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{9} \right) dx \\ &\quad \text{área de la sección} = \pi r^2 \\ &= \pi \left[ x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27} \right]_0^{12} = \pi (12 + 48 + 64) = 124\pi. \end{aligned}$$

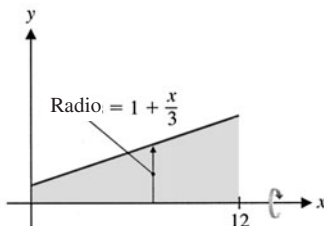


Figura 5.15a

Girar en torno al eje  $x$ .

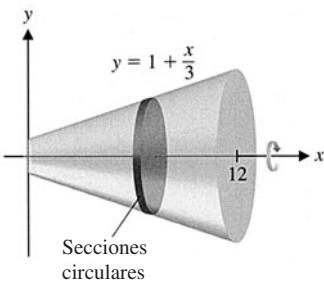


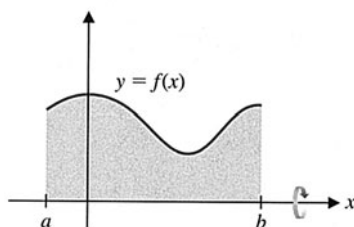
Figura 5.15b

Sólido de revolución.

El ejemplo 2.3 ilustra lo que se conoce como **método de los discos** para calcular el volumen de un sólido generado por una curva que gira en torno a una recta vertical u horizontal. A continuación presentamos el método en general.

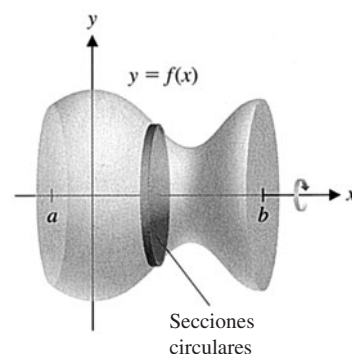
### El método de los discos

Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , con  $f(x) \geq 0$  en todo  $x$  de  $[a, b]$ . Hagamos girar, en torno al eje  $x$ , la región acotada por la curva  $y = f(x)$  y el eje  $x$  en  $a \leq x \leq b$ . Se genera así un sólido de revolución (figuras 5.16a y 5.16b).



**Figura 5.16a**

$y = f(x) \geq 0$ .



**Figura 5.16b**

Sólido de revolución.

Podemos calcular su volumen haciendo en él cortes perpendiculares al eje  $x$  cuyas secciones son discos circulares de radio  $r = f(x)$  (figura 5.16b). Por (2.1), el volumen del sólido viene dado por

**Volumen de un sólido de revolución  
(método de los discos)**

$$V = \int_a^b \underbrace{\pi [f(x)]^2}_{\text{área de la sección} = \pi r^2} dx. \quad (2.2)$$

Como las secciones de este sólido de revolución son todas discos circulares, nos referiremos a este método como el método de los discos.

### Ejemplo 2.4

#### Cálculo del volumen por el método de los discos

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la curva  $y = \sqrt{x}$ , en el intervalo  $[0, 4]$ , en torno al eje  $x$ .

**Solución** Es importante hacer un esbozo de la región y del sólido que genera con el fin de tener una idea clara de cuál es el radio de las secciones circulares. En las figuras 5.17a y 5.17b vemos que el radio de cada sección circular es  $r = \sqrt{x}$ . Por (2.2), el volumen es

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi[\sqrt{x}]^2}_{\text{área de la sección} = \pi r^2} dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = 8\pi.$$

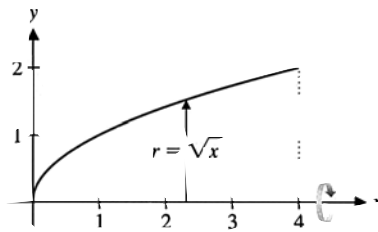


Figura 5.17a

$$y = \sqrt{x}.$$

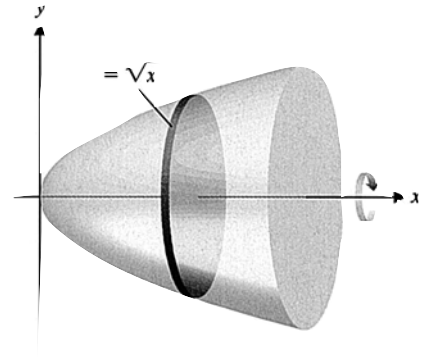


Figura 5.17b

Sólido de revolución.

Análogamente, si  $g(y) \geq 0$  y  $g$  es continua en el intervalo  $[c, d]$ , al hacer girar la región acotada por la curva  $x = g(y)$  y el eje  $y$ , en  $c \leq y \leq d$ , en torno al eje  $y$ , se genera un sólido de revolución (figuras 5.18a y 5.18b). Como muestra la figura 5.18b, las secciones son discos circulares de radio  $r = g(y)$ . Lo único que ha cambiado es el papel de las variables  $x$  e  $y$ . Así, pues, el volumen de este sólido viene dado por

**Volumen de un sólido de revolución  
(método de los discos)**

$$V = \int_c^d \underbrace{\pi[g(y)]^2}_{\text{área de la sección} = \pi r^2} dy. \quad (2.3)$$

## Nota 2.2

Al usar el método de los discos, que la variable de integración sea  $x$  o  $y$  **no** depende de la geometría de la región (como sucedía al hallar el área entre dos curvas en la sección 5.1), sino de cuál es el eje de giro: si es el eje  $x$ , hay que integrar en  $x$ ; si es el eje  $y$ , hay que integrar en  $y$ . Es fácil saberlo por simple inspección de un esbozo del sólido. No tome la primera que se le ocurra. Eso es preludio de desastre, ya que en el resto del capítulo va a tener que tomar decisiones análogas, cada una de ellas acorde a las exigencias concretas del problema entre manos.

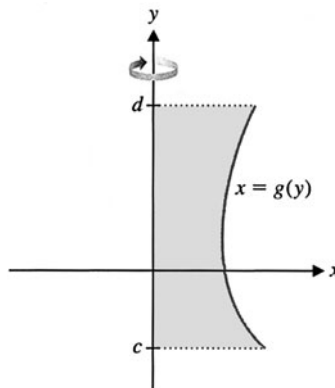


Figura 5.18a

Girar en torno al eje  $y$ .

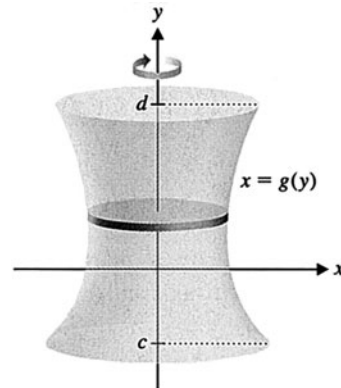


Figura 5.18b

Sólido de revolución.

**Ejemplo 2.5** El método de los discos con  $y$  como variable independiente

Calcular el volumen del sólido resultante al girar la porción de la curva  $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ , entre  $x = 0$  y  $x = 2$ , en torno al eje  $y$ .

**Solución** Las figuras 5.19a y 5.19b muestran la región que gira y el sólido generado.

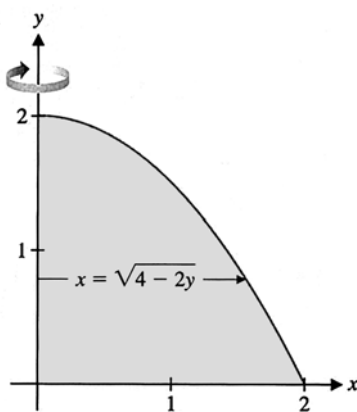


Figura 5.19a

$$y = 2 - \frac{x^2}{2}.$$

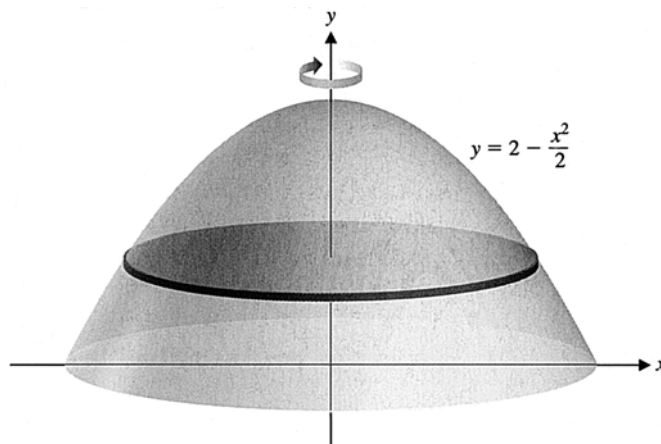


Figura 5.19b

Sólido de revolución

Vemos en ellas que el radio de cualquier sección circular viene dado por  $x$ . Despejando  $x$  en  $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ , obtenemos  $x = \sqrt{4 - 2y}$ . Como la superficie se extiende desde  $y = 0$  hasta  $y = 2$ , el volumen del sólido es, según (2.3),

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \underbrace{\pi(\sqrt{4 - 2y})^2}_{\pi r^2} dy = \int_0^2 \pi(4 - 2y) dy \\ &= \pi \left[ 4y - 2 \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \pi(8 - 2^2) = 4\pi. \end{aligned}$$

**El método de las arandelas**

Respecto de lo visto hasta ahora, en el cálculo del volumen se pueden presentar dos dificultades adicionales. En primer lugar, podemos estar interesados en calcular el volumen de un sólido que tiene un «hueco» o «cavidad» en su interior. Y, en segundo lugar, a veces se hace girar una cierta región respecto de una recta que no es ni el eje  $x$  ni el eje  $y$ . En ambos casos, una mirada a las figuras apropiadas enseña que no suponen obstáculos insalvables. Ilustramos esos casos en los ejemplos que siguen.

**Ejemplo 2.6** Volumen de sólidos con y sin cavidad interior

Sea  $R$  la región acotada por las gráficas de  $y = x^2$ ,  $x = 0$  e  $y = 1$ . Calcular el volumen de los sólidos generados al girar  $R$  en torno a (a) el eje  $y$ , (b) el eje  $x$ , (c) la recta  $y = 2$ .

**Solución** (a) La figura 5.20a muestra la región  $R$  y la 5.20b el sólido generado por  $R$  al girar en torno al eje  $y$ . Nótese que esta parte del problema es semejante al ejemplo 2.5.



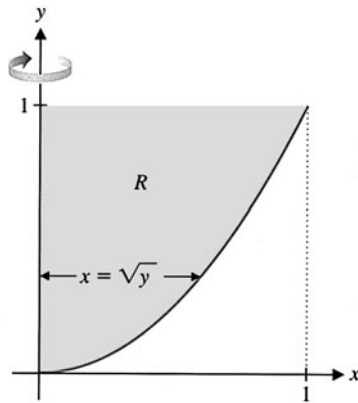


Figura 5.20a

$$x = \sqrt{y}.$$

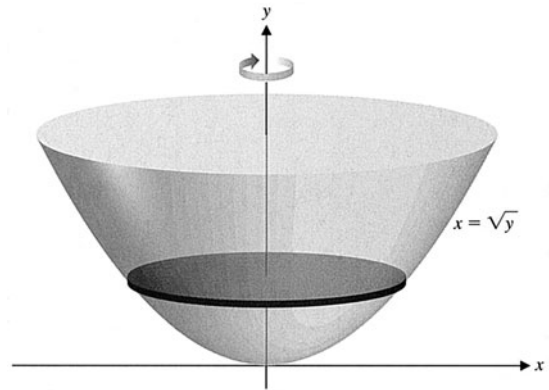


Figura 5.20b

Sólido de revolución.

Según (2.3), el volumen viene dado por

$$V = \int_0^1 \underbrace{\pi(\sqrt{y})^2}_{\pi r^2} dy = \pi \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

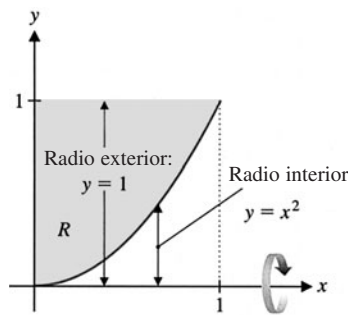


Figura 5.21a

$$x = \sqrt{y}.$$

(b) Esta parte es distinta de todo lo anterior, porque al girar en torno al eje  $x$ , la región  $R$  deja una cavidad dentro del sólido. Las figuras 5.21a y 5.21b muestran una gráfica de  $R$  y el sólido generado. La estrategia para hallar el volumen de ese sólido consiste en calcular el volumen del sólido completo (como si no tuviera cavidad) y restarle el volumen de la cavidad. Antes de hacer cálculos observe la geometría del problema. La superficie exterior del sólido se forma haciendo girar la recta  $y = 1$  en torno al eje  $x$ . La cavidad se forma haciendo girar la curva  $y = x^2$  en torno al eje  $x$ . Intente visualizar todo esto con claridad en las figuras. El radio exterior  $r_{\text{ext}}$  es la distancia de la recta  $y = 1$  al eje  $x$ , o sea,  $r_{\text{ext}} = 1$ . El radio interior  $r_{\text{int}}$  es la distancia de la curva  $y = x^2$  al eje  $x$ , o sea,  $r_{\text{int}} = x^2$ . Aplicando (2.2) dos veces, vemos que el volumen buscado viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \underbrace{\pi(1)^2}_{\pi (\text{radio exterior})^2} dx - \int_0^1 \underbrace{\pi(x^2)^2}_{\pi (\text{radio interior})^2} dx \quad \text{Método de las arandelas} \\ &= \pi \int_0^1 (1 - x^4) dx = \pi \left( x - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 = \pi \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{5} \pi. \end{aligned}$$

(c) Ahora, al girar la región  $R$  en torno a la recta  $y = 2$ , se forma un sólido con un hueco cilíndrico que lo atraviesa por su centro. Las figuras 5.22a y 5.22b muestran la región y el sólido que genera.

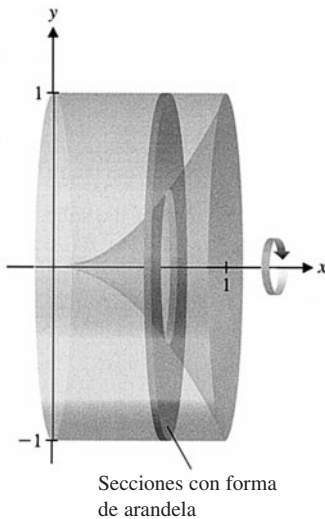


Figura 5.21b

Sólido de revolución.

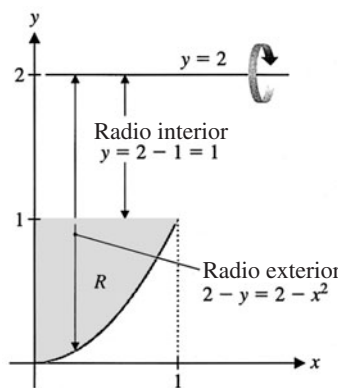


Figura 5.22a

Gira en torno a  $y = 2$ .

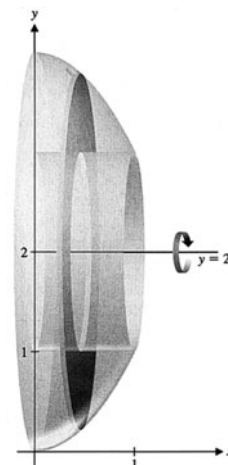


Figura 5.22b

Sólido de revolución.

El volumen se calcula como en el apartado (b), restando el volumen de la cavidad del sólido completo. Si mira con atención las figuras verá que el radio exterior es la distancia entre la recta  $y = 2$  y la curva  $y = x^2$ , es decir,  $r_{\text{ext}} = 2 - x^2$ . El radio del orificio interior es la distancia entre las rectas  $y = 2$  e  $y = 1$ , o sea,  $r_{\text{int}} = 2 - 1 = 1$ .

Por (2.2), el volumen resulta ser

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \underbrace{\pi(2 - x^2)^2}_{\pi (\text{radio exterior})^2} dx - \int_0^1 \underbrace{\pi(2 - 1)^2}_{\pi (\text{radio interior})^2} dx \\ &= \pi \int_0^1 [(4 - 4x^2 + x^4) - 1] dx = \pi \left[ 3x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= \pi \left( 3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{28}{15} \pi. \end{aligned}$$

En los apartados (b) y (c) del ejemplo 2.6 hemos calculado el volumen restando un volumen interior del volumen exterior para tener en cuenta el hueco que había dentro del sólido. Esta técnica es una generalización del método de los discos, que llamaremos **método de las arandelas**, debido a la forma que tiene cada sección del sólido.

### Ejemplo 2.7 Una región que gira respecto de distintas rectas

Sea  $R$  la región acotada por  $y = 4 - x^2$  e  $y = 0$ . Calcular el volumen de los sólidos generados por  $R$  al girar en torno a (a) el eje  $y$ , (b) la recta  $y = -3$ , (c) la recta  $y = 7$ , (d) la recta  $x = 3$ .

**Solución** (a) Las figuras 5.23a y 5.23b muestran la región  $R$  y el sólido de revolución generado.

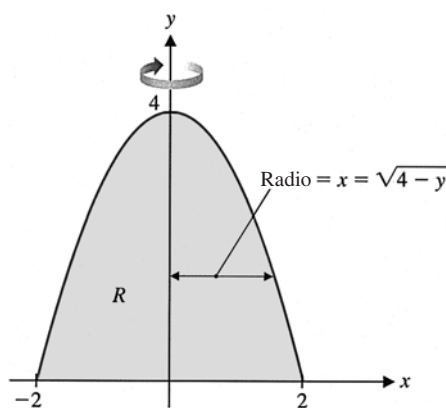


Figura 5.23a

Gira en torno al eje  $y$ .

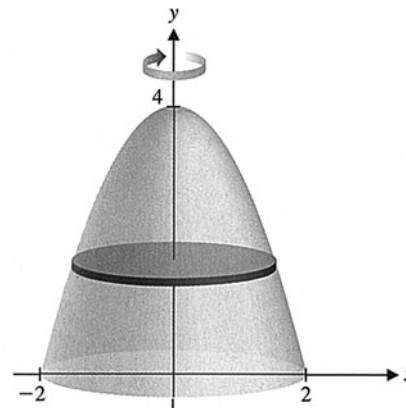
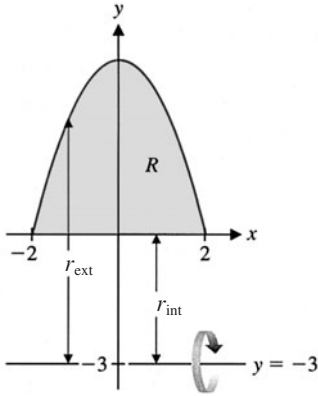


Figura 5.23b

Sólido de revolución.

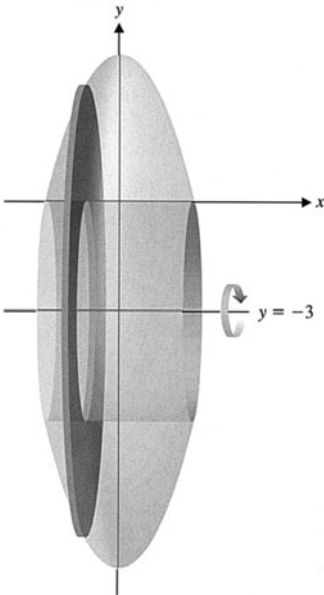
En ellas vemos que la sección es un disco circular de radio igual a la distancia entre la gráfica de  $y = 4 - x^2$  y el eje  $y$ , es decir,  $x$ . Despejando  $x$ , se tiene  $x^2 = 4 - y$ , o sea,  $x = \sqrt{4 - y}$ , donde hemos elegido  $x$  positivo, ya que  $x$  representa una distancia. Por (2.3), el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \underbrace{\pi(\sqrt{4 - y})^2}_{\pi (\text{radio})^2} dy = \pi \int_0^4 (4 - y) dy \\ &= \pi \left[ 4y - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi. \end{aligned}$$



**Figura 5.24a**

Gira en torno a  $y = -3$ .



**Figura 5.24b**

Sólido de revolución.

Un error frecuente es tomar  $2\sqrt{4-y}$  como radio. (¿Qué volumen se obtendría así?).

(b) Las figuras 5.24a y 5.24b muestran la región  $R$  y el sólido de revolución generado. Las secciones tienen aspecto de arandelas. Vemos además que el radio exterior  $r_{\text{ext}}$  es la distancia al eje de giro  $y = -3$  de la curva  $y = 4 - x^2$ . Esto es,

$$r_{\text{ext}} = y - (-3) = (4 - x^2) - (-3) = 7 - x^2.$$

Y el radio interior es la distancia desde el borde inferior (el eje  $x$ ) a la recta  $y = -3$ . Esto es,

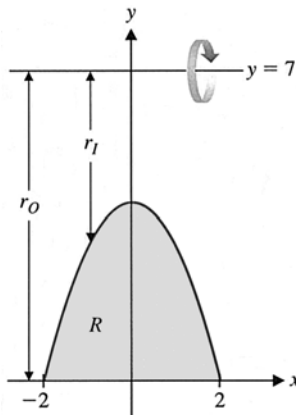
$$r_{\text{int}} = 0 - (-3) = 3.$$

De acuerdo con (2.2), el volumen viene dado por

$$V = \int_{-2}^2 \underbrace{\pi(7 - x^2)^2}_{\pi (\text{radio exterior})^2} dx - \int_{-2}^2 \underbrace{\pi(3)^2}_{\pi (\text{radio interior})^2} dx = \frac{1.472}{15} \pi.$$

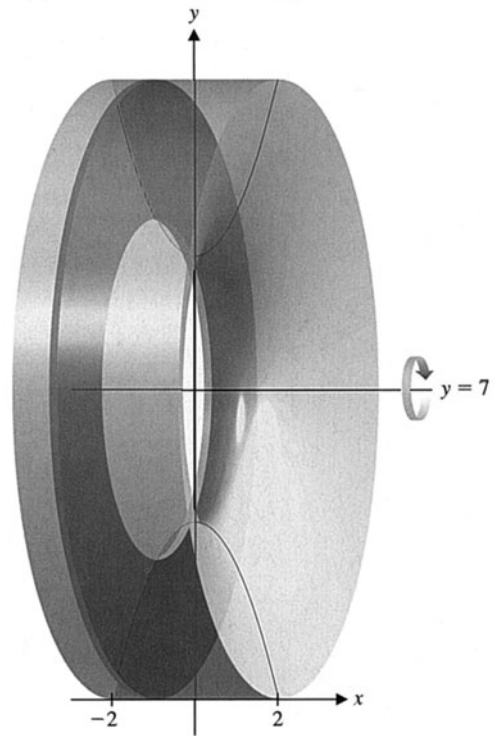
Dejamos los detalles del cálculo como ejercicio.

(c) La situación, con la recta  $y = 7$  como eje de giro, es parecida a la parte (b). La región y el sólido generado pueden verse en las figuras 5.25a y 5.25b.



**Figura 5.25a**

Gira en torno a  $y = 7$ .



**Figura 5.25b**

Sólido de revolución.

De nuevo, las secciones son arandelas. Esta vez, el radio exterior es la distancia de la recta  $y = 7$  al eje  $x$ , es decir,  $r_{\text{ext}} = 7$ . El radio interior es la distancia de la recta  $y = 7$  a la curva  $y = 4 - x^2$ , es decir,

$$r_{\text{int}} = 7 - (4 - x^2) = 3 + x^2.$$

Por (2.2), el volumen del sólido es

$$V = \int_{-2}^2 \underbrace{\pi(7)^2}_{\pi (\text{radio exterior})^2} dx - \int_{-2}^2 \underbrace{\pi(3+x^2)^2}_{\pi (\text{radio interior})^2} dx = \frac{576}{5} \pi.$$

Dejamos los detalles del cálculo como ejercicio.

(d) La región y el sólido que genera al girar en torno a la recta  $x = 3$  se pueden ver en las figuras 5.26a y 5.26b. En este caso, las secciones son arandelas, pero los radios exterior e interior son algo más difíciles de determinar. Mirando con cuidado las figuras 5.26a y 5.26b se observa que el radio exterior es la distancia entre la recta  $x = 3$  y la mitad **izquierda** de la parábola, mientras que el radio interior es la distancia entre la recta  $x = 3$  y la mitad **derecha** de la parábola. La parábola tiene ecuación  $y = 4 - x^2$ , o sea,  $x^2 = 4 - y$ , así que

$$x = \pm \sqrt{4 - y}.$$

Aquí  $x = \sqrt{4 - y}$  corresponde a la mitad derecha de la parábola, mientras que  $x = -\sqrt{4 - y}$  describe su mitad izquierda. Por tanto,

$$r_{\text{int}} = 3 - \sqrt{4 - y} \quad \text{y} \quad r_{\text{ext}} = 3 - (-\sqrt{4 - y}) = 3 + \sqrt{4 - y}.$$

En consecuencia, el volumen resulta ser

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi(3 + \sqrt{4 - y})^2}_{\pi (\text{radio exterior})^2} dy - \int_0^4 \underbrace{\pi(3 - \sqrt{4 - y})^2}_{\pi (\text{radio interior})^2} dy = 64\pi,$$

donde dejamos de nuevo los detalles del cálculo, algo tediosos, al cuidado del lector. (En esta ocasión conviene usar un PCS). En la sección 5.3 presentamos un método para calcular el volumen que produce en este último caso integrales mucho más fáciles.

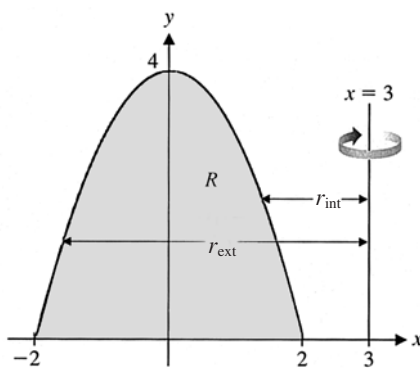


Figura 5.26a

Gira en torno a  $x = 3$ .

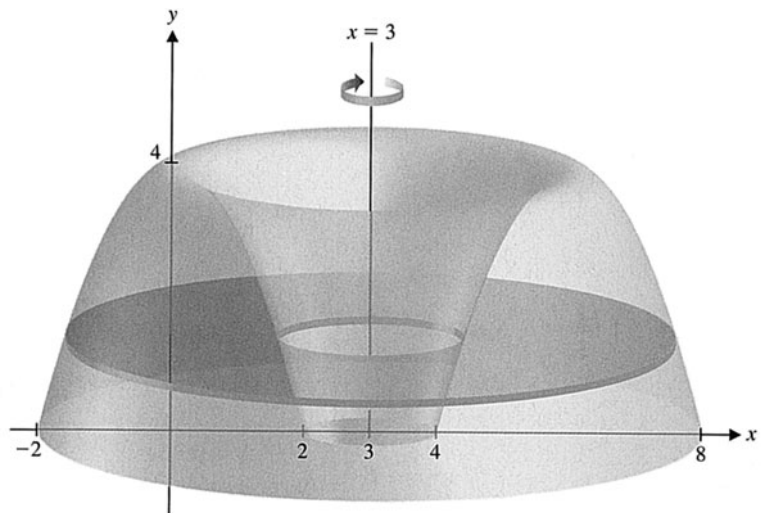






Figura 5.26b

Sólido de revolución.

### Nota 2.3

Buena parte del éxito en el cálculo del volumen de sólidos de revolución radica en una figura razonable. Merece la pena perder tiempo en eso y en indicar en ella las curvas con cuidado. Sólo hay que tener presente cómo se calcula el área de la sección. La integración hace el resto. ¡Tenga cuidado!

## EJERCICIOS 5.2

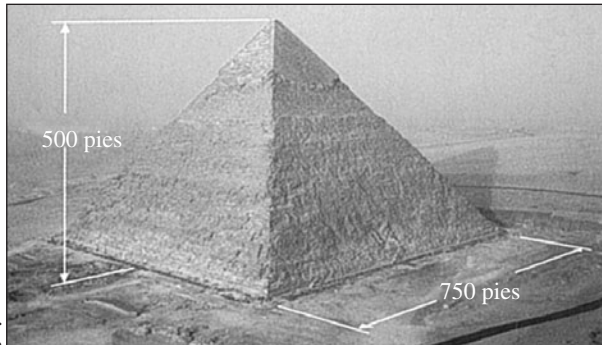
1.  Discutir la relación (perpendicularidad o paralelismo) con los ejes  $x$  e  $y$  de los discos de los ejemplos 2.4 y 2.5. Explicar cómo esa relación permite determinar la variable de integración correcta.
2.  Los métodos de los discos y de las arandelas son casos particulares de una fórmula general para el volumen. Discutir las ventajas de aprender fórmulas separadas frente a la posibilidad de deducirlas de una fórmula general en cada ejemplo. ¿Le parece preferible aprender fórmulas extra o elaborar cada problema a partir de principios básicos? ¿Cuántas fórmulas le parecerían demasiadas?
3.  Explicar por qué se usaría  $y$ -integración para calcular el área de un triángulo de la forma  $\Delta$  en la sección 5.1. En esta sección, ¿hubiera sido más fácil hallar el volumen girando ese triángulo en torno al eje  $x$  o en torno al eje  $y$ ? Explicar la respuesta.
4.  En el apartado (a) del ejemplo 2.7, la figura 5.23a se extiende desde  $x = -\sqrt{4-y}$  hasta  $x = \sqrt{4-y}$ , pero hemos tomado  $\sqrt{4-y}$  como radio. Explicar por qué ése es el radio correcto y no  $2\sqrt{4-y}$ .

En los ejercicios 5-8, calcular el volumen del sólido con secciones de área  $A(x)$ .

5.  $A(x) = x + 2, -1 \leq x \leq 3$
6.  $A(x) = 10e^{0.01x}, 0 \leq x \leq 10$
7.  $A(x) = \pi(4-x)^2, 0 \leq x \leq 2$
8.  $A(x) = 2(x+1)^2, 1 \leq x \leq 4$

En los ejercicios 9-16, escribir una integral apropiada y calcular el volumen.

9. Una piscina tiene perfil  $y = \pm \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} + 1 \right)$ , con  $-3 \leq x \leq 3$  (todas las unidades en pies). Su profundidad es  $6 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ . Esbozar una figura de la piscina y calcular el volumen.
10. Una piscina con el mismo perfil que la del ejercicio 9 tiene 3 pies de profundidad en  $-3 \leq x \leq -1$  y 9 pies en  $1 \leq x \leq 3$ , y crece linealmente en  $-1 \leq x \leq 1$ . Esbozar una figura y calcular el volumen.
11. La gran pirámide de Gizeh tiene 750 pies de lado en su base cuadrada y 500 pies de altura. Calcular su volumen por integración. ¿Coincide su cálculo con lo que da la fórmula geométrica?



1 2 .  
Si en

lugar de terminar la pirámide los constructores de Gizeh se hubieran detenido a 250 pies de altura (con un cuadrado superior de 375 pies de lado), calcular el volumen de esa estructura. Explicar por qué el volumen es mayor que la mitad del de la pirámide completa.

13. La aguja de la torre de una iglesia mide 30 pies de altura y tiene secciones cuadradas, cuyo lado varía linealmente desde 3 pies en la base hasta 6 pulgadas en lo alto. Calcular su volumen.
14. Un ático tiene secciones rectangulares paralelas al suelo y secciones triangulares perpendiculares al suelo. El rectángulo de la base mide 30 por 60 pies y los triángulos tienen 30 pies de base y 10 de altura. Calcular el volumen del ático.
15. Un jarrón tiene secciones circulares de radio  $4 + \sin \frac{x}{2}$  pulgadas, en  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Dibujar un esbozo del jarrón y calcular su volumen.
16. Un jarrón tiene secciones circulares de radio  $4 - \sin \frac{x}{2}$  pulgadas, en  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Dibujar un esbozo del jarrón y calcular su volumen.
17. La tabla muestra las áreas de las secciones adyacentes de un tumor, medidas en una IRM. Estimar su volumen por la regla de Simpson.

$x$ (cm)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$A(x)$ (cm <sup>2</sup> )	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,4

$x$ (cm)	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$A(x)$ (cm <sup>2</sup> )	0,3	0,2	0,2	0,1	0,0

18. La tabla muestra las áreas de las secciones adyacentes de un tumor, medidas en una IRM. Estimar su volumen por la regla de Simpson.

$x$ (cm)	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$A(x)$ (cm <sup>2</sup> )	0,0	0,2	0,3	0,2	0,4	0,2	0,0

19. Estimar el volumen con las áreas de secciones que se indican.

$x$ (pies)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
$A(x)$ (pies <sup>2</sup> )	1,0	1,2	1,4	1,3	1,2

20. Estimar el volumen con las áreas de secciones que se indican.

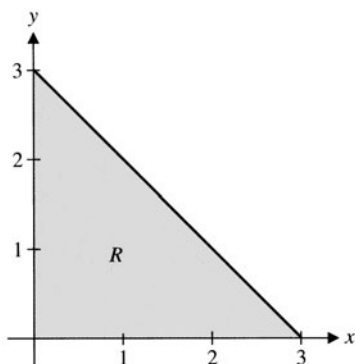
$x$ (m)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$A(x)$ (m <sup>2</sup> )	2,0	1,8	1,7	1,6	1,8

$x$ (m)	0,5	0,6	0,7	0,8
$A(x)$ (m <sup>2</sup> )	2,0	2,1	2,2	2,4

En los ejercicios 21-28, hallar el volumen del sólido generado por la región dada al girar en torno a la recta que se especifica.

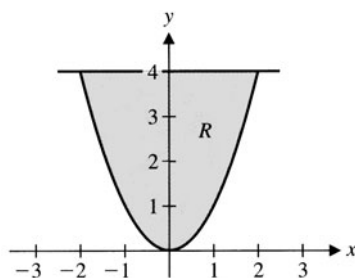
21. Región acotada por  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$  y  $x = 0$  en torno a (a) el eje  $x$ ; (b)  $y = 3$
22. Región acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 0$  y  $x = 2$  en torno a (a) el eje  $x$ ; (b)  $y = 4$
23. Región acotada por  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2$  y  $x = 0$  en torno a (a) el eje  $y$ ; (b)  $x = 4$
24. Región acotada por  $y = 2x$ ,  $y = 2$  y  $x = 0$  en torno a (a) el eje  $y$ ; (b)  $x = 1$
25. Región acotada por  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  y  $y = 0$  en torno a (a) el eje  $y$ ; (b)  $y = -2$ . Estimar numéricamente.
26. Región acotada por  $y = \cos x$ ,  $x = 0$  y  $y = 0$  en torno a (a)  $y = 1$ ; (b)  $y = -1$
27. Región acotada por  $y = x^3$ ,  $y = 0$  y  $x = 1$  en torno a (a) el eje  $y$ ; (b) el eje  $x$
28. Región acotada por  $y = x^3$ ,  $y = 0$  y  $x = 1$  en torno a (a)  $x = 1$ ; (b)  $y = -1$
29. Sea  $R$  la región acotada por  $y = 3 - x$ , el eje  $x$  y el eje  $y$ . Calcular el volumen del sólido que genera al girar en torno a la recta indicada.
 

(a) El eje $y$	(b) El eje $x$	(c) $y = 3$
(d) $y = -3$	(e) $x = 3$	(f) $x = -3$



30. Sea  $R$  la región acotada por  $y = x^2$  e  $y = 4$ . Calcular el volumen del sólido que genera al girar en torno a la recta indicada.
 

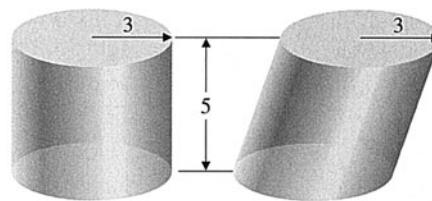
(a) $y = 4$	(b) El eje $y$
(c) $y = 6$	(d) $y = -2$



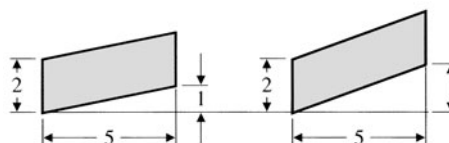
- |                |                |              |
|----------------|----------------|--------------|
| (a) El eje $y$ | (b) El eje $x$ | (c) $x = 1$  |
| (d) $y = 1$    | (e) $x = -1$   | (f) $y = -1$ |

31. Sea  $R$  la región acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 0$  y  $x = 1$ . Calcular el volumen del sólido que genera  $R$  al girar en torno a la recta dada.
 


(a) El eje $x$	(b) El eje $y$
(c) $y = 1$	(d) $y = -1$
32. Sea  $R$  la región acotada por  $y = x$ ,  $y = -x$  y  $x = 1$ . Calcular el volumen del sólido que genera  $R$  al girar en torno a la recta dada.
33. Sea  $R$  la región acotada por  $y = ax^2$ ,  $y = h$  y el eje  $y$  ( $h$  y  $a$  son constantes positivas). Calcular el volumen del sólido generado por  $R$  al girar en torno al eje  $y$ . Probar que la respuesta es igual al volumen del cilindro de altura  $h$  y radio  $\sqrt{h/a}$ . Esbozar una figura para ilustrar esto.
34. Usar el resultado del ejercicio 33 para escribir inmediatamente el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por  $y = ax^2$ ,  $x = \sqrt{h/a}$  en torno al eje  $x$  y en torno al eje  $y$ .
35. El cuadrado  $-1 \leq x \leq 1$  y  $-1 \leq y \leq 1$  gira en torno al eje  $y$ . Probar que el volumen del sólido resultante es  $2\pi$ .
36. El círculo limitado por  $x^2 + y^2 = 1$  gira en torno al eje  $y$ . Comprobar que el volumen del sólido resultante es  $\frac{4}{3}\pi$ .
37. El triángulo de vértices  $(-1, -1)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, -1)$  gira en torno al eje  $y$ . Probar que el volumen del sólido generado es  $\frac{2}{3}\pi$ .
38. Dibujar el cuadrado, el círculo y el triángulo de los ejercicios 35-37 en unos mismos ejes. Probar que los volúmenes relativos de los sólidos generados al girar esas regiones en torno al eje  $y$  están en la relación 3:2:1.
39. Verificar la fórmula para el volumen de una esfera haciendo girar el círculo interior a  $x^2 + y^2 = r^2$  en torno al eje  $y$ .
40. Verificar la fórmula para el volumen de un cono haciendo girar el segmento recto  $y = -\frac{h}{r}x + h$ ,  $0 \leq x \leq r$ , en torno al eje  $y$ .
41. Sea  $A$  un cilindro circular recto de radio 3 y altura 5. Sea  $B$  un cilindro circular inclinado de radio 3 y altura 5. ¿Tienen  $A$  y  $B$  el mismo volumen?




42. Averiguar si los dos paralelogramos de la figura tienen la misma área.





43.  Generalizar el resultado del ejercicio 38 a cualquier rectángulo. Es decir, dibujar el rectángulo  $-a \leq x \leq a$  y  $-b \leq y \leq b$ , la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y el triángulo de vértices  $(-a, -b)$ ,  $(0, b)$  y  $(a, -b)$ . Probar que los volúmenes relativos de los sólidos generados al girar esas regiones en torno al eje  $y$  están en la relación 3:2:1.

44.  El sólido, en forma de rosquilla, generado por el círculo interior a  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  en torno al eje  $y$  recibe en Matemáticas el nombre de **toro**. Calcular su volumen y probar que es igual al producto del área del círculo multiplicada por la distancia recorrida por el centro del círculo. Éste es un caso particular del **teorema de Pappus** (s. IV a.C.). Verificar que este resultado es válido, asimismo, para el triángulo del ejercicio 32, apartados (c) y (d).

## 5.3 VOLUMEN POR CAPAS CILÍNDRICAS

Vamos a presentar un método alternativo al de las arandelas (sección 5.2) que ayudará en situaciones como la del ejemplo 2.7 (d), donde el de las arandelas produce una integral desagradable. Más que los detalles del cálculo importa aprender cómo la geometría del problema indica el método conveniente.

Como motivación, volvamos al ejemplo 2.7 (d), donde  $R$  era la región acotada por  $y = 4 - x^2$  e  $y = 0$  (figura 5.27a) desde  $x = -2$  hasta  $x = 2$ . Si  $R$  gira, como indica la figura 5.27a, en torno a la recta  $x = 3$ , ¿cómo calcular el volumen del sólido generado (figura 5.27b)? La geometría de  $R$  hace molesto integrar en  $y$  porque sus fronteras izquierda y derecha son las dos mitades de la parábola. Por otra parte, como  $R$  está limitada arriba simplemente por  $y = 4 - x^2$  y abajo por  $y = 0$ , sería más fácil integrar en  $x$ . Por desgracia, en este caso el método de las arandelas exige integrar en  $y$ . La solución está en un método alternativo que utiliza la variable de integración opuesta.

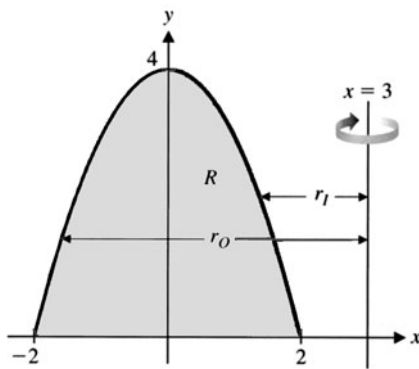


Figura 5.27a

Gira en torno a  $x = 3$ .

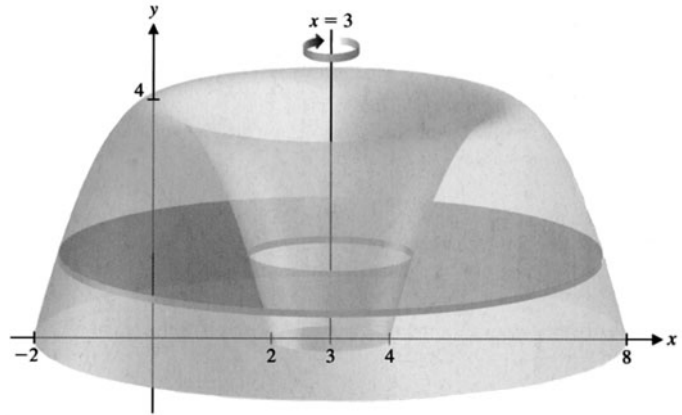


Figura 5.27b

Sólido de revolución.

Antes de retomar el ejemplo, consideremos el caso general de una región que gira en torno al eje  $y$ . Sea  $R$  la región acotada por la gráfica de  $y = f(x)$  y el eje  $x$ , en el intervalo  $[a, b]$ , con  $0 < a < b$  y  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$  (figura 5.28a). Al girar en torno al eje  $y$ , genera el sólido de la figura 5.28b.

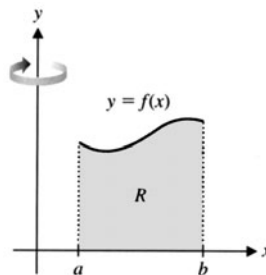


Figura 5.28a

Gira en torno al eje  $y$ .

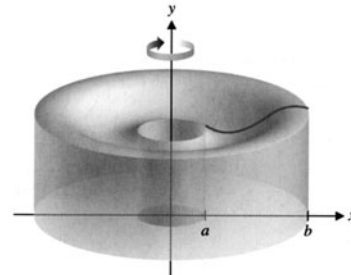
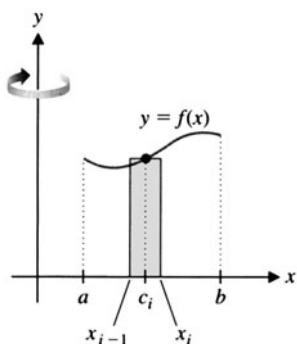


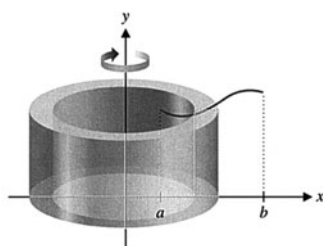
Figura 5.28b

Sólido de revolución.





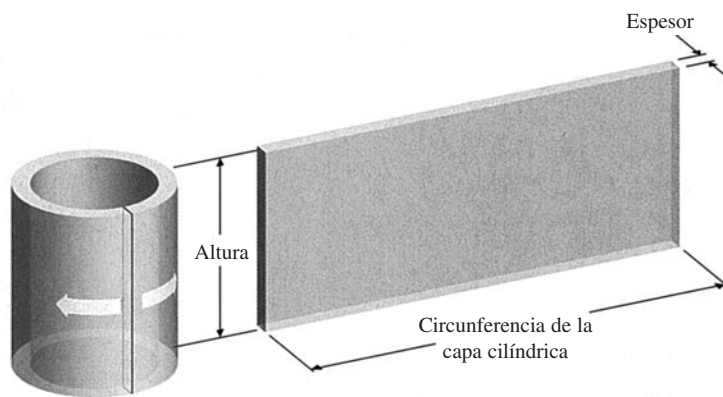
**Figura 5.29a**  
*i*-ésimo rectángulo.



**Figura 5.29b**  
Capa cilíndrica.

Partimos  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual anchura  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . En cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  tomamos un punto  $c_i$  y construimos un rectángulo de altura  $f(c_i)$  (figura 5.29a). Al girar este rectángulo en torno al eje  $y$ , genera una fina capa cilíndrica (es decir, un cilindro hueco, como un trozo de tubo), como muestra la figura 5.29b.

Para hallar el volumen de esta capa cilíndrica, imagine que cortamos el cilindro desde arriba hasta abajo y lo aplanamos formando una lámina rectangular (figura 5.29c).



**Figura 5.29c**  
Capa cilíndrica aplanada.

La longitud de esa lámina es la circunferencia de la capa cilíndrica, o sea,  $2\pi \cdot \text{radio} = 2\pi c_i$ . Por tanto, el volumen  $V_i$  de la  $i$ -ésima capa cilíndrica es aproximadamente

$$\begin{aligned} V_i &\approx \text{longitud} \times \text{anchura} \times \text{altura} \\ &= (2\pi \times \text{radio}) \times \text{espesor} \times \text{altura} \\ &= (2\pi c_i) \Delta x f(c_i). \end{aligned}$$

El volumen  $V$  del sólido se puede aproximar mediante la suma de los volúmenes de las  $n$  capas cilíndricas:

$$V \approx \sum_{i=1}^n 2\pi \underbrace{c_i}_{\text{radio}} \underbrace{f(c_i)}_{\text{altura}} \underbrace{\Delta x}_{\text{espesor}}.$$

Como ya hemos hecho otras veces, podemos obtener el valor exacto del volumen del sólido tomando el límite  $n \rightarrow \infty$  e identificando el resultado como una integral definida.

**Volumen de un sólido de revolución (capas cilíndricas)**

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i) \Delta x = \int_a^b 2\pi \underbrace{x}_{\text{radio}} \underbrace{f(x)}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espesor}}. \quad (3.1)$$

## Advertencia

No se limite a memorizar la fórmula (3.1). Una vez más, debe entender el significado de sus ingredientes. Es fácil si observa cómo se corresponden con el volumen de una capa cilíndrica:  $2\pi(\text{radio})(\text{altura})(\text{espesor})$ . Si piensa así en el volumen, resolverá sin dificultad cualquier problema de este tipo.

## Ejemplo 3.1

### El método de capas (cilíndricas)

Hallar el volumen del sólido de revolución generado por la porción del primer cuadrante de la región acotada por las gráficas de  $y = x$  e  $y = x^2$  al girar en torno al eje  $y$ .

**Solución** La región (figura 5.30a) tiene  $y = x$  como frontera superior e  $y = x^2$  como frontera inferior. Se extiende desde  $x = 0$  hasta  $x = 1$ .

La figura 5.30a muestra un rectángulo típico y la capa cilíndrica que genera. El sólido de revolución resultante se puede ver en la figura 5.30b.

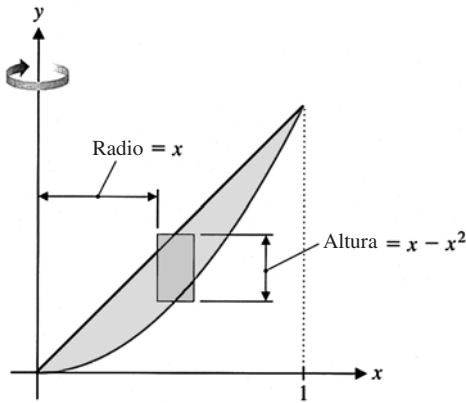


Figura 5.30a

Un rectángulo típico y la capa cilíndrica que genera.

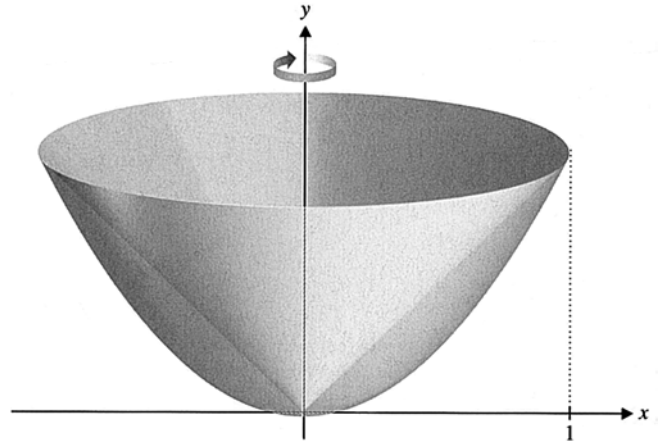


Figura 5.30b

Sólido de revolución.

Podemos escribir una integral para el volumen analizando las diversas componentes del sólido en las figuras 5.30a y 5.30b. De (3.1) se deduce que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi \underbrace{x}_{\text{radio}} \underbrace{(x - x^2)}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espesor}} \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 2\pi \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Ahora ya podemos aplicar este método para resolver el ejemplo antes citado como motivación.

### Ejemplo 3.2 Un volumen en el que las capas son preferibles a las arandelas

Calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de  $y = 4 - x^2$  y el eje  $x$  en torno a la recta  $x = 3$ .

**Solución** Mire con tranquilidad la figura 5.31a, que muestra un rectángulo que genera una capa cilíndrica, y el sólido de la figura 5.31b. Observará que el radio de la capa cilíndrica es la distancia de la recta  $x = 3$  a la capa:

$$r = 3 - x.$$

Eso da para el volumen

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \underbrace{2\pi (3 - c_i)}_{\text{radio}} \underbrace{(4 - c_i^2)}_{\text{altura}} \underbrace{\Delta x}_{\text{espesor}} \\ &= \int_{-2}^2 2\pi \underbrace{(3 - x)}_{\text{radio}} \underbrace{(4 - x^2)}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espesor}} \\ &= 2\pi \int_{-2}^2 (x^3 - 3x^2 - 4x + 12) dx = 64\pi, \end{aligned}$$

donde los detalles del cálculo se dejan como ejercicio.

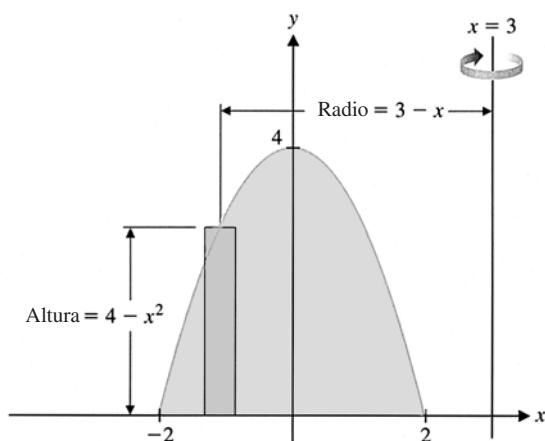


Figura 5.31a

Un rectángulo típico y la capa cilíndrica que genera.

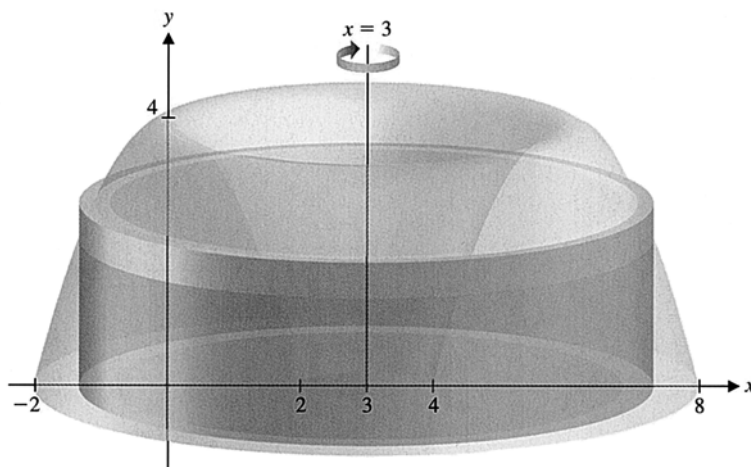


Figura 5.31b

Sólido de revolución.

Con el método de capas como complemento al de arandelas, lo primero que hay que hacer en el cálculo de un volumen es analizar la geometría del sólido para decidir si es más fácil integrar en  $x$  o en  $y$ . Para un sólido dado, la variable de integración del método de capas es exactamente la **opuesta** a la del método de arandelas. Debe elegirse el método que mejor se adapte al problema en cuestión.

### Cálculo del volumen por los métodos de capas y de arandelas

#### Ejemplo 3.3

Sea  $R$  la región acotada por las gráficas de  $y = x$ ,  $y = 2 - x$  e  $y = 0$ . Calcular el volumen de los sólidos generados al girar  $R$  en torno a las rectas (a)  $y = 2$ , (b)  $y = -1$ , (c)  $x = 3$ .

**Solución** La región se muestra en la figura 5.32a. Observe con atención las diferencias entre los tres volúmenes.

(a) Al girar en torno a la recta  $y = 2$ , el radio de una capa cilíndrica es la distancia de la recta  $y = 2$  a la capa:  $2 - y$ , para  $0 \leq y \leq 1$  (figura 5.32b). La altura es la diferencia de los valores  $x$  de las dos curvas: despejando  $x$  se tiene  $x = y$  y  $x = 2 - y$ . Por (3.1), el volumen viene dado por

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{(2 - y)}_{\text{radio}} \underbrace{[(2 - y) - y]}_{\text{altura}} \underbrace{dy}_{\text{espesor}} = \frac{10}{3} \pi,$$

donde dejamos al cuidado del lector los detalles del cálculo.

(b) Al girar en torno a la recta  $y = -1$ , la altura de las capas cilíndricas es la misma que en (a), pero el radio  $r$  es la distancia de la recta  $y = -1$  a la capa:  $r = y - (-1) = y + 1$  (figura 5.32c). Eso da para el volumen

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{[y - (-1)]}_{\text{radio}} \underbrace{[(2 - y) - y]}_{\text{altura}} \underbrace{dy}_{\text{espesor}} = \frac{8}{3} \pi.$$

(c) Al girar en torno a la recta  $x = 3$  para hallar el volumen mediante capas cilíndricas tenemos que romper el cálculo en varios trozos, ya que la altura de las capas en  $[0, 1]$  y en  $[1, 2]$  es diferente. (Piense en esto). Por otra parte, con el método de las arandelas el cálculo es fácil.

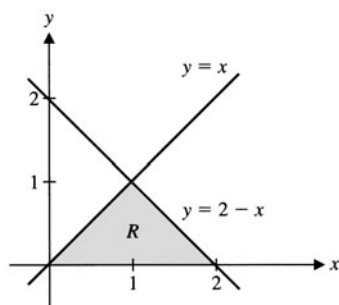


Figura 5.32a

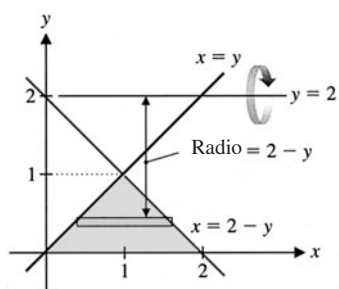
 $y = x$  e  $y = 2 - x$ .


Figura 5.32b

 Gira en torno a  $y = 2$ .

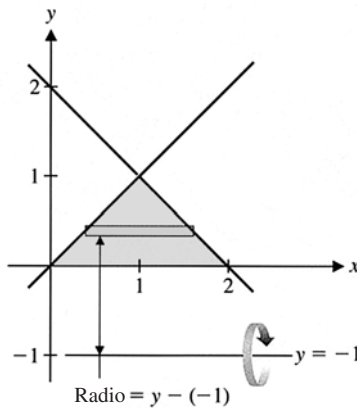


Figura 5.32c

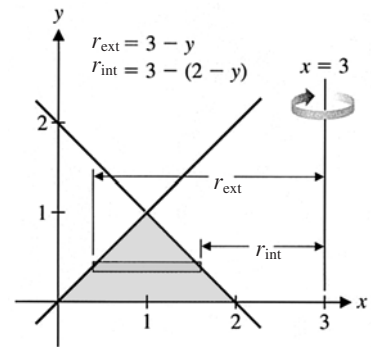
Gira en torno a  $y = -1$ .


Figura 5.32d

Gira en torno a  $x = 3$ .

El radio exterior es la distancia de la recta  $x = 3$  a la recta  $x = y$ :  $r_{\text{ext}} = 3 - y$ , y el radio interior es la distancia de la recta  $x = 3$  a la recta  $x = 2 - y$ :  $r_{\text{int}} = 3 - (2 - y)$  (figura 5.32d). Eso da para el volumen

$$V = \int_0^1 \pi \left\{ \underbrace{(3 - y)^2}_{\text{radio exterior}^2} - \underbrace{[3 - (2 - y)]^2}_{\text{radio interior}^2} \right\} dy = 4\pi.$$

Nótese la importancia de una figura en la que poder visualizar el sólido. El mayor reto en estos problemas es saber cómo plantear la integral. Mire detenidamente la figura y decida cuál es la variable de integración adecuada (es decir, decida si usa arandelas o capas). A continuación, determine los ingredientes de la integral apropiada [el radio o radios y posiblemente la altura] mirando otra vez la figura. Finalmente, calcule la integral. Si no sabe cómo, puede recurrir a un PCS o a una aproximación numérica (la regla de Simpson, por ejemplo).

### Ejemplo 3.4

### Aproximación de un volumen por capas y arandelas

Sea  $R$  la región acotada por las gráficas de  $y = \cos x$  e  $y = x^2$ . Calcular el volumen de los sólidos generados por  $R$  al girar en torno a las rectas (a)  $x = 2$ , (b)  $y = 2$ .

**Solución** Para empezar, hacemos un esbozo de  $R$  (figura 5.33a). Como las fronteras superior e inferior de  $R$  están dadas por curvas de la forma  $y = f(x)$ , interesa integrar en  $x$ . A continuación, buscamos los puntos de intersección de las dos curvas, resolviendo  $\cos x = x^2$ . No sabemos resolver esa ecuación exactamente, así que usamos un método aproximado (el de Newton, pongamos por caso) para encontrar  $x = \pm 0,824132$ .

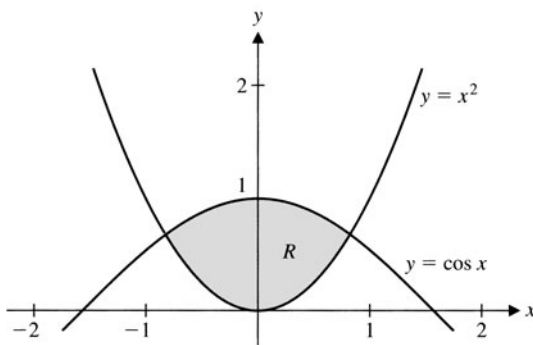


Figura 5.33a

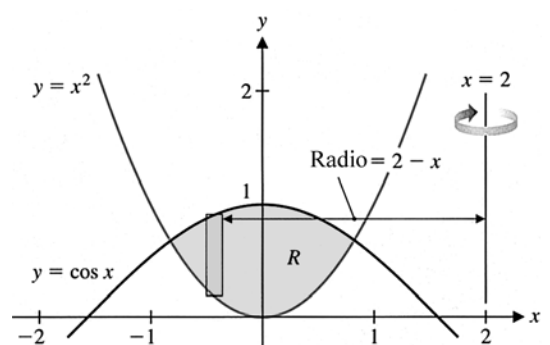
 $y = \cos x$ ,  $y = x^2$ .


Figura 5.33b

Gira en torno a  $x = 2$ .

(a) Si giramos  $R$  en torno a la recta  $x = 2$ , debemos usar capas cilíndricas (figura 5.33b). En este caso, el radio  $r$  de una capa es la distancia de la recta  $x = 2$  a la capa:  $r = 2 - x$ , y la altura de la capa es  $\cos x - x^2$ . Por tanto,

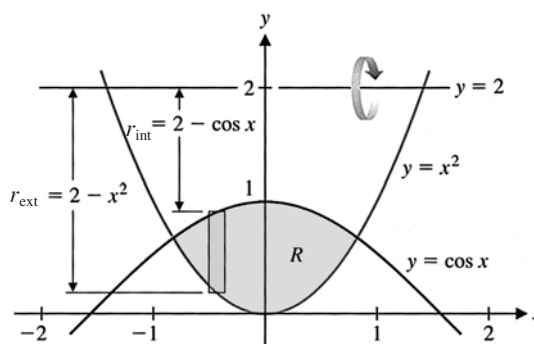
$$V \approx \int_{-0,824132}^{0,824132} 2\pi \underbrace{(2-x)}_{\text{radio}} \underbrace{(\cos x - x^2)}_{\text{altura}} dx \approx 13,757,$$

donde hemos aproximado el valor de la integral numéricamente. (De momento no conocemos una primitiva del integrando, pero veremos cómo hallarla en el Capítulo 7).

(b) Si giramos  $R$  en torno a la recta  $y = 2$  (figura 5.33c), usamos el método de las arandelas. El radio exterior de una arandela es la distancia de la recta  $y = 2$  a la curva  $y = x^2$ :  $r_{\text{ext}} = 2 - x^2$ , y el radio interior es la distancia de la recta  $y = 2$  a la curva  $y = \cos x$ :  $r_{\text{int}} = 2 - \cos x$  (figura 5.33c). Así, pues, el volumen viene dado por

$$V \approx \int_{-0,824132}^{0,824132} \pi \left[ \underbrace{(2-x^2)^2}_{\text{radio exterior}^2} - \underbrace{(2-\cos x)^2}_{\text{radio interior}^2} \right] dx \approx 10,08,$$

donde hemos aproximado numéricamente el valor de la integral.



**Figura 5.33c**




Gira en torno a  $y = 2$ .

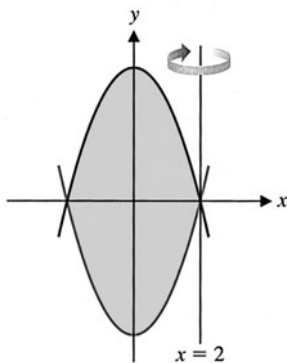
Cerramos la sección con un resumen de las estrategias para calcular el volumen de sólidos de revolución.


### VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

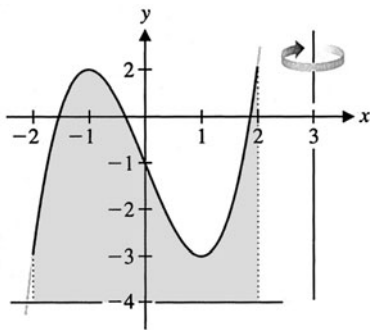
- Dibujar un esbozo de la región que gira.
- Determinar la variable de integración ( $x$  si la región tiene partes superior e inferior bien definidas, y si tiene las fronteras izquierda y derecha bien definidas).
- Según el eje de giro y la variable de integración, decidir qué método conviene (el de discos o arandelas para integración en  $x$  con eje horizontal o en  $y$  con eje vertical, y el de capas para integración en  $x$  con eje vertical o en  $y$  con eje horizontal).
- Marcar en la figura los radios interiores y exteriores de discos o arandelas, o bien el radio y la altura de las capas cilíndricas.
- Escribir la integral adecuada y evaluarla.

## EJERCICIOS 5.3

1.  Explicar por qué el método de capas produce una integral en  $x$  cuando el eje de giro es vertical. (Describir cómo están situadas las capas y en qué dirección hay que desplazarse para pasar de una capa a otra).
2.  Explicar por qué el método de capas tiene la misma forma, independientemente de que el sólido tenga una cavidad o no. Es decir, no son necesarios métodos separados como sucede con discos y arandelas.
3.  Supongamos que se hace girar, en torno a la recta  $x = 2$ , la región acotada por  $y = x^2 - 4$  e  $y = 4 - x^2$ . Argumentar qué método (discos, arandelas o capas) sería el más fácil para calcular el volumen del sólido generado.



4.  Supongamos que se hace girar, en torno a la recta  $x = 3$ , la región acotada por  $y = x^3 - 3x - 1$  e  $y = -4$ , en  $-2 \leq y \leq 2$ . Explicar qué sería necesario para calcular el volumen por el método de las arandelas y qué para calcularlo por el método de capas. ¿Qué método preferiría? ¿Por qué?



**En los ejercicios 5-12, dibujar un esbozo de la región y una capa cilíndrica. Identificar el radio y la altura de las capas y calcular el volumen.**

5. La región acotada por  $y = x^2$  y el eje  $x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , gira en torno a  $x = 2$
6. La región acotada por  $y = x^2$  y el eje  $x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , gira en torno a  $x = 2$
7. La región acotada por  $y = x$ ,  $y = -x$  y  $x = 1$  gira en torno al eje  $y$ .

8. La región acotada por  $y = x$ ,  $y = -x$  y  $x = 1$  gira en torno a  $x = 1$ .
9. La región acotada por  $y = x$ ,  $y = -x$  e  $y = 1$  gira en torno a  $y = 2$ .
10. La región acotada por  $y = x$ ,  $y = -x$  e  $y = 1$  gira en torno a  $y = -2$ .
11. La mitad derecha de  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  gira en torno al eje  $x$ .
12. La mitad derecha de  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  gira en torno a  $y = 2$ .

**En los ejercicios 13-20, calcular el volumen por el método de las capas.**


13. La región acotada por  $y = x^2$  e  $y = 2 - x^2$  gira en torno a  $x = -2$
14. La región acotada por  $y = x^2$  e  $y = 2 - x^2$  gira en torno a  $x = 2$
15. La región acotada por  $x = y^2$  y  $x = 1$  gira en torno a  $y = -2$
16. La región acotada por  $x = y^2$  y  $x = 1$  gira en torno a  $y = 2$
17. La región acotada por  $y = x$  e  $y = x^2 - 2$  gira en torno a  $x = 2$
18. La región acotada por  $y = x$  e  $y = x^2 - 2$  gira en torno a  $x = 3$
19. La región acotada por  $x = (y - 1)^2$  y  $x = 1$  gira en torno al eje  $x$
20. La región acotada por  $x = (y - 1)^2$  y  $x = 1$  gira en torno a  $y = 2$

**En los ejercicios 21-30, usar el mejor método posible para calcular cada volumen.**

21. La región acotada por  $y = 4 - x$ ,  $y = 4$  e  $y = x$  gira en torno a  
(a) el eje  $x$  (b) el eje  $y$  (c)  $x = 4$  (d)  $y = 4$
22. La región acotada por  $y = x + 2$ ,  $y = -x - 2$  y  $x = 0$  gira en torno a  
(a)  $y = -2$  (b)  $x = -2$  (c) el eje  $y$  (d) el eje  $x$
23. La región acotada por  $y = x$  e  $y = x^2 - 6$  gira en torno a  
(a)  $x = 3$  (b)  $y = 3$  (c)  $x = -3$  (d)  $y = -6$
24. La región acotada por  $x = y^2$  y  $x = 2 + y$  gira en torno a  
(a)  $x = -1$  (b)  $y = -1$  (c)  $x = -2$  (d)  $y = -2$
25. La región acotada por  $y = \cos x$  e  $y = x^4$  gira en torno a  
(a)  $x = 2$  (b)  $y = 2$  (c) el eje  $x$  (d) el eje  $y$
26. La región acotada por  $y = \sin x$  e  $y = x^2$  gira en torno a  
(a)  $y = 1$  (b)  $x = 1$  (c) el eje  $y$  (d) el eje  $x$
27. La región acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$  y  $x = 0$  gira en torno a  
(a) el eje  $x$  (b) el eje  $y$  (c)  $x = 1$  (d)  $y = 2$

28. La región acotada por  $y = 2 - x^2$ ,  $y = x$  ( $x > 0$ ) y el eje  $y$  gira en torno a  
 (a) el eje  $x$       (b) el eje  $y$       (c)  $x = -1$       (d)  $y = -1$
29. La región acotada por  $y = 2 - x$ ,  $y = x - 2$  y  $x = y^2$  gira en torno a  
 (a) el eje  $x$       (b) el eje  $y$
30. La región acotada por  $y = e^x - 1$ ,  $y = 2 - x$  y el eje  $x$  gira en torno a  
 (a) el eje  $x$       (b) el eje  $y$
37. Por un método análogo al utilizado para la ecuación (3.1), deducir el siguiente hecho acerca de un círculo de radio  $R$ . Área  $= \pi R^2 = \int_0^R c(r) dr$ , donde  $c(r) = 2\pi r$  es la longitud de la circunferencia de radio  $r$ .
38. Tal vez haya observado que la longitud de la circunferencia de radio  $r$  ( $2\pi r$ ) es igual a la derivada respecto de  $r$  del área del círculo ( $\pi r^2$ ). Usando el ejercicio 37, explique por qué eso no es una coincidencia.
39. Un abalorio de joyería se ha formado taladrando un orificio de  $\frac{1}{2}$  cm de radio por el centro de una bola de 1 cm de radio. Explicar por qué el volumen viene dado por  $\int_{1/2}^1 4\pi x \sqrt{1-x^2} dx$ . Calcular esta integral o calcular el volumen por un método más simple.

En los ejercicios 31-36, la integral representa el volumen de un sólido. Dibujar un esbozo de la región y el eje de revolución.

31.  $\int_0^2 \pi(2x - x^2)^2 dx$
32.  $\int_{-2}^2 \pi[(4 - x^2 + 4)^2 - (x^2 - 4 + 4)^2] dx$
33.  $\int_0^1 \pi[(\sqrt{y})^2 - y^2] dy$
34.  $\int_0^2 \pi(4 - y^2)^2 dy$
35.  $\int_0^1 2\pi x(x - x^2) dx$
36.  $\int_0^2 2\pi(4 - y)(y + y) dy$
40. Hallar el radio del orificio en el ejercicio 39 que extrae la mitad del volumen de la bola.
41. Un hormiguero tiene la forma generada por la región acotada por  $y = 1 - x^2$  y el eje  $x$  al girar en torno al eje  $y$ . Un investigador quita un cilindro centrado en el vértice. ¿Qué radio debe tener el cilindro para eliminar el 10% del hormiguero?
42.  Por el centro de una bola de radio  $R$  se taladra un orificio de radio  $r$ . Calcular el volumen que pierde la bola en términos de  $R$  y  $r$ . Calcular la longitud del orificio en términos de  $R$  y  $r$ . Reescribir el volumen en términos de  $L$ . ¿Es razonable afirmar que el volumen quitado a la bola depende de  $L$ , pero no de  $R$ ?

## 5.4 LONGITUD DE ARCO Y ÁREA DE SUPERFICIES

En esta sección aplicamos la integral al estudio de otras dos medidas del tamaño. Longitud y área le serán familiares desde el punto de vista intuitivo. Sin embargo, ya hemos visto que el cálculo del área es sorprendentemente difícil para muchas formas geométricas. Pues bien, los cálculos que acometeremos aquí vienen complicados por la adición de una dimensión más. En concreto, se trata de calcular la longitud (una medida unidimensional) de una curva en dos dimensiones y el área (una medida bidimensional) de una superficie en tres dimensiones. Como siempre, preste atención a la deducción de las fórmulas. Igual que en ocasiones anteriores, partiremos de una aproximación y llegaremos al valor exacto tomando el límite.

### Longitud de arco

¿Qué queremos decir cuando hablamos de la *longitud* de una porción de la curva seno de la figura 5.34a? (Llamaremos **longitud de arco** a la longitud de una curva). Si la curva es una carretera, podemos recorrerla con un automóvil y mirar la indicación del cuentakilómetros. Si es un trozo de cuerda, podemos ponerla recta y medirla con una regla o con un metro. Estas dos ideas son muy útiles a la intuición. Ambas reducen el problema de medir longitudes en dos dimensiones al problema (mucho más fácil) de medirlas en una dimensión.

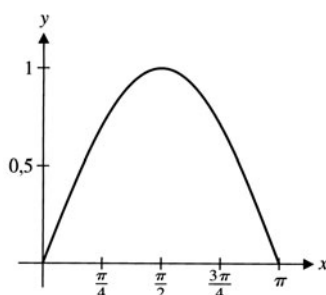
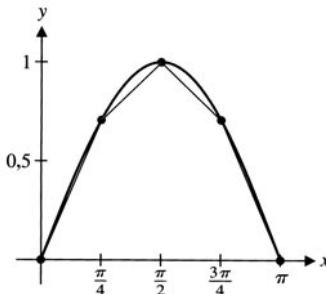


Figura 5.34a

$$y = \sin x.$$

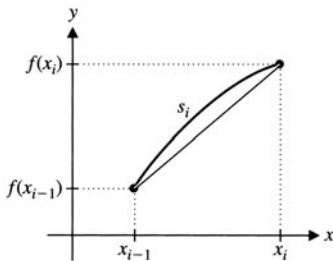




**Figura 5.34b**

Cuatro segmentos rectos aproximantes.

$n$	Longitud
8	3,8125
16	3,8183
32	3,8197
64	3,8201
128	3,8201



**Figura 5.35**

Aproximación de la longitud de arco por un segmento recto.

Para formular esa idea matemáticamente, empezamos aproximando la curva por varios segmentos rectos unidos como indica la figura 5.34b. Los segmentos unen los puntos  $(0, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ,  $(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  y  $(\pi, 0)$  de la curva  $y = \text{sen } x$ . Una aproximación de la longitud de la curva viene dada por la suma de las longitudes de esos segmentos:

$$s \approx \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 3,79.$$

Este valor aproximado es demasiado pequeño (¿por qué?). Podemos mejorar esa aproximación utilizando más segmentos de menor longitud. La tabla del margen muestra estimaciones de la longitud de la curva tomando  $n$  segmentos, con valores más grandes de  $n$ .

Cabe esperar que al usar un número de segmentos cada vez mayor y de longitud cada vez menor, la aproximación se irá acercando al valor exacto de la longitud de la curva. Ya debe sonarle familiar esta idea.

El problema general que vamos a plantearnos es el cálculo de la longitud de arco de la curva  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . Suponemos que  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . (¿Dónde hemos impuesto estas mismas condiciones antes de ahora?). Como de costumbre, empezamos haciendo una partición del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , donde

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b - a}{n},$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Entre cada par de puntos consecutivos de la curva,  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  y  $(x_i, f(x_i))$ , aproximamos la longitud de arco  $s_i$  por la distancia recta entre ellos (figura 5.35). Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos,

$$s_i \approx d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Como  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ ,  $f$  es también continua en el subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  y derivable en  $(x_{i-1}, x_i)$ . Por el teorema del valor medio,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

para algún  $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ . Esto proporciona la aproximación

$$\begin{aligned} s_i &\approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (x_i - x_{i-1}) = \underbrace{\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}}_{\Delta x} \Delta x. \end{aligned}$$

Sumando las longitudes de esos  $n$  segmentos rectos, obtenemos como aproximación de la longitud de arco

$$s \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x.$$

Parece lógico que, al ir creciendo  $n$ , la aproximación debe acercarse al valor exacto de la longitud de arco, es decir,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x.$$

#### Nota 4.1

La fórmula para la longitud de arco es simple, pero se puede calcular de forma exacta para muy pocas funciones. Casi siempre hay que recurrir a métodos numéricos (un PCS, por ejemplo).

Reconocemos aquí el límite de una suma de Riemann para  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ , así que la longitud de arco viene dada exactamente por una integral definida:

**Longitud del arco de  $y = f(x)$   
en el intervalo  $[a, b]$**

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (4.1)$$

siempre que el límite existe.

#### Ejemplo 4.1 Aplicación de la fórmula para la longitud de arco

Calcular la longitud de arco de la curva  $y = \sin x$  en  $0 \leq x \leq \pi$ . (Hemos obtenido para esta longitud un valor aproximado 3,79 en nuestro ejemplo de introducción).

**Solución** Por (4.1), la longitud de arco es

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx.$$



Intente hallar una primitiva de  $\sqrt{1 + \cos^2 x}$ , pero sin perder mucho tiempo. (Un PCS contesta  $\sqrt{2} \text{EllipticE}[x, \frac{1}{2}]$ , que no es especialmente útil). Un PCS da para esa integral el valor aproximado

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx \approx 3,8202.$$

Incluso para curvas sencillas, la evaluación de la integral de longitud de arco puede ser un reto nada fácil.

#### Ejemplo 4.2 Estimación de una longitud de arco

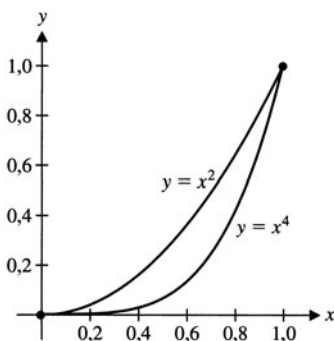
Calcular la longitud de arco de la curva  $y = x^2$  en  $0 \leq x \leq 1$ .

**Solución** Por la fórmula (4.1), la longitud de arco es

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx 1,4789,$$

donde hemos evaluado la integral numéricamente otra vez. (En esta ocasión puede hallar una primitiva con ayuda de las tablas o de un PCS, pero la aproximación es igual de significativa a nuestros efectos).

Las gráficas de  $y = x^2$  e  $y = x^4$  se parecen de un modo sorprendente en  $[0, 1]$  (figura 5.36). Ambas unen los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ , son crecientes y cóncavas hacia arriba. Si las dibujamos en unos mismos ejes, vemos que  $y = x^4$  empieza siendo más plana y termina más pendiente a partir de  $x = 0,7$ . (¡**Demuestre** que esto es verdad!). La longitud de arco distingue entre esas dos gráficas.



**Figura 5.36**

$y = x^2$  e  $y = x^4$ .

#### Ejemplo 4.3 Comparación de longitudes de arco de funciones potencia

Comparar la longitud de arco de las curvas  $y = x^4$  e  $y = x^2$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Solución** Según (4.1), la longitud de arco de  $y = x^4$  viene dada por

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (4x^3)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 16x^6} dx \approx 1,6002.$$

Es un 8% mayor que la de  $y = x^2$ , ya calculada en el ejemplo 4.2.

En los ejercicios se le pedirá que explore las longitudes de  $y = x^6$ ,  $y = x^8$  y otras potencias en el intervalo  $[0, 1]$ . ¿Puede adivinar qué ocurre con la longitud de arco de  $y = x^n$  en  $[0, 1]$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ?

Al igual que con tantas otras, el uso cotidiano de la palabra *longitud* puede inducir a confusión. Así, cuando decimos que la longitud de un lanzamiento de disco fue de 20 metros nos referimos a la distancia horizontal alcanzada, no a la longitud de arco de la curva descrita por la bola. En ese caso, la distancia horizontal tiene más sentido y, de paso, es más fácil de medir. En otros muchos casos, la cantidad de interés es la longitud de arco. Por ejemplo, si alguien va a colgar una pancarta de dos postes que distan 10 metros y sólo dispone de 10 metros de cuerda, tendrá problemas. La longitud de cuerda necesaria la da la longitud de arco, no la distancia horizontal.

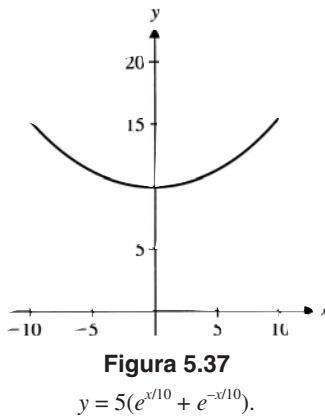
#### Ejemplo 4.4 Longitud de un cable colgante

Un cable cuelga de dos postes de igual altura distantes 20 metros. Se puede demostrar que un cable suspendido adopta la forma de una **catenaria**. Supongamos que en este caso la forma viene dada por  $y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$ ,  $-10 \leq x \leq 10$  (figura 5.37). ¿Cuál es la longitud del cable?

**Solución** Por (4.1), la longitud del cable viene dada por

$$\begin{aligned} s &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \left( \frac{e^{x/10}}{2} - \frac{e^{-x/10}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{4} (e^{x/5} - 2 + e^{-x/5})} dx \\ &\approx 23,504 \text{ metros,} \end{aligned}$$

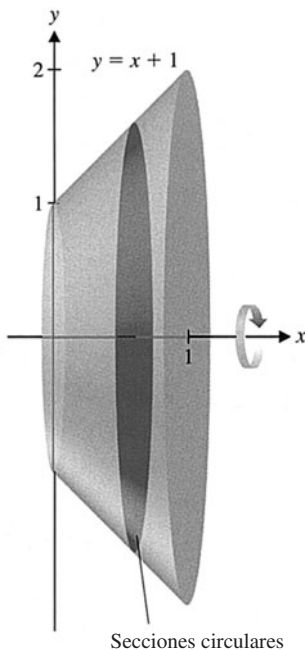
que supera a la distancia horizontal de 20 metros en  $3 \frac{1}{2}$  metros.



#### Área de superficies

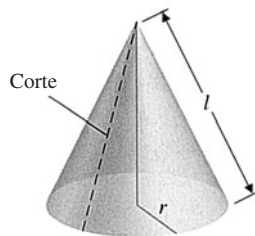
En las secciones 5.2 y 5.3 aprendimos a calcular el volumen de un sólido de revolución. Muchas veces interesa calcular además el área de su *superficie*. Por ejemplo, al hacer girar el segmento  $0 \leq x \leq 1$  de la recta  $y = x + 1$  en torno al eje  $x$ , la superficie generada recuerda una porción de megáfono abierta por los dos lados (figura 5.38).

Es un tronco de cono resultado de cortar un cono por un plano paralelo a su base. Vamos a hallar el área de su superficie curvada. La figura 5.39a muestra un cono circular recto con radio  $r$  en la base y de **altura oblicua**  $l$ . (Como veremos, en este contexto es más conveniente especificar la altura oblicua que la altura). Si cortamos el cono y lo aplanamos, obtenemos un sector circular (figura 5.39b). El área de la superficie curvada del cono es



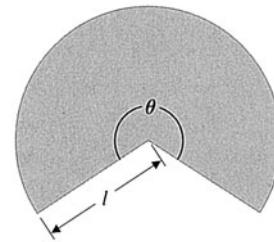
**Figura 5.38**

Superficie de revolución.



**Figura 5.39a**

Cono circular recto



**Figura 5.39b**

Cono aplanado.

igual al área  $A$  de ese sector circular. Y ésta es el área del círculo de radio  $l$  multiplicada por la fracción de círculo incluida:  $\theta$  radianes de los  $2\pi$  del círculo completo, es decir,

$$A = \pi (\text{radio})^2 \frac{\theta}{2\pi} = \pi l^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2} l^2. \quad (4.2)$$

El único problema es que no conocemos  $\theta$ . Pero tal como hemos construido el sector (aplanoando el cono), la circunferencia del sector es la de la base del cono. Por tanto,

$$2\pi r = 2\pi l \frac{\theta}{2\pi} = l \theta.$$

Dividiendo entre  $l$ , se obtiene

$$\theta = \frac{2\pi r}{l}.$$

Según (4.2), el área de la superficie curvada del cono es

$$A = \frac{\theta}{2} l^2 = \frac{\pi r}{l} l^2 = \pi r l.$$

En realidad, nos interesaba el área curvada de un tronco de cono (figura 5.38). Para el **tronco de cono** de la figura 5.40, el área de la superficie curvada viene dada por

$$A = \pi(r_1 + r_2)L.$$

Puede verificar esta fórmula restando el área de dos conos usando triángulos semejantes para hallar la altura del cono mayor, del cual se corta el tronco de cono. Dejamos los detalles como ejercicio.

Volviendo al problema original de hacer girar, en el intervalo  $[0, 1]$ , la recta  $y = x + 1$  en torno al eje  $x$  (figura 5.38), se tiene  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$  y  $L = \sqrt{2}$  (por el teorema de Pitágoras). El área de la superficie curvada es, pues,

$$A = \pi(1 + 2)\sqrt{2} = 3\pi\sqrt{2} \approx 13,329.$$

Como problema general de cálculo del área de una superficie de revolución, consideremos una función  $f(x) \geq 0$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si hacemos girar el intervalo  $[a, b]$  de su gráfica en torno al eje  $x$  (figura 5.41a), generamos una superficie de revolución (figura 5.41b).

Como hemos hecho ya otras veces, partimos  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud mediante los puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , con  $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . En cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , aproximamos la curva por el segmento recto que une los puntos  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  y  $(x_i, f(x_i))$ , como en la figura 5.42.

Al girar en torno al eje  $x$ , ese segmento genera un tronco de cono. El área de la superficie de este tronco de cono nos dará un valor aproximado del área de la superficie de revolución en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . En primer lugar, observemos que la altura oblicua de ese tronco de cono es

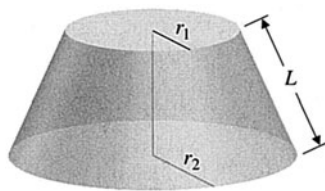
$$L_i = d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

por la fórmula usual de la distancia. Debido a nuestra hipótesis sobre  $f$ , podemos aplicar el teorema del valor medio, luego

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

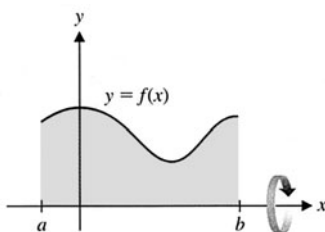
para algún número  $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ . Así, se obtiene

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x}.$$



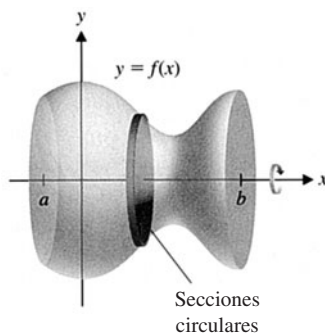
**Figura 5.40**

Tronco de cono.



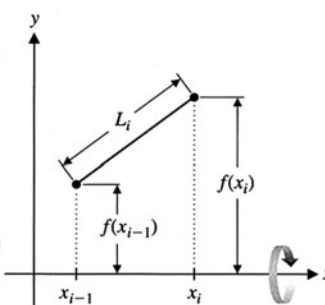
**Figura 5.41a**

Gira en torno al eje  $x$ .



**Figura 5.41b**

Superficie de revolución.



**Figura 5.42**

Gira en torno al eje  $x$ .

El área  $S_i$  de la superficie de revolución en el subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  es aproximadamente el área del tronco de cono,

$$\begin{aligned} S_i &\approx \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})]\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x \\ &\approx 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x, \end{aligned}$$

porque si  $\Delta x$  es muy pequeño,

$$f(x_i) + f(x_{i-1}) \approx 2f(c_i).$$

Repitiendo ese argumento para cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , obtenemos como aproximación del área total  $S$  de la superficie de revolución:

$$S \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x.$$

Como ya hemos hecho notar varias veces, cuando  $n$  crece esa aproximación mejora y tiende al valor exacto del área buscado. Tomando el límite para  $n \rightarrow \infty$ , resulta

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x.$$

En este límite reconocemos ya sin dificultad el límite de una suma de Riemann, lo que produce la integral

**Área de la superficie de un sólido de revolución**

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (4.3)$$

siempre que esta integral existe.

Conviene advertir que el factor  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  del integrando en (4.3) es la longitud de arco de una pequeña porción de la curva  $y = f(x)$ , mientras que el factor  $2\pi f(x)$  es la longitud de la circunferencia del sólido de revolución. Lo cual es fácil de interpretar como sigue. Para cualquier pequeña porción de la curva, si aproximamos el área de la superficie que genera por el área de un tronco de cono,

$$S = 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

ya que el radio, casi constante, del segmento es  $f(x)$  y la altura oblicua del tronco de cono es  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ . Es mucho mejor pensar así en la fórmula del área de una superficie de revolución que memorizarla sin más.

#### Nota 4.2

Son muy pocas las funciones para las que la integral en (4.3) se puede calcular exactamente. No se preocupe; para eso están los métodos numéricos.

#### Ejemplo 4.5

#### Aplicación de la fórmula del área de una superficie





Calcular el área de la superficie de revolución generada por  $y = x^4$ , en  $0 \leq x \leq 1$ , al girar en torno al eje  $x$ .

**Solución** Usando la fórmula (4.3), se tiene

$$S = \int_0^1 2\pi x^4 \sqrt{1 + (4x^3)^2} dx = \int_0^1 2\pi x^4 \sqrt{1 + 16x^6} dx \approx 3,4365,$$

donde, como de costumbre, hemos aproximado el valor de la integral mediante un método numérico.

## EJERCICIOS 5.4

1.  Explicar, en palabras, cómo se deduce la integral para la longitud de arco de las longitudes de segmentos de rectas secantes.
2.  Explicar por qué la suma de las longitudes de los segmentos rectos de la figura 5.34b es menor que la longitud de arco de la figura 5.34a.
3.  Discutir si la integral que expresa la longitud de arco debe ser considerada una fórmula o una definición (es decir, ¿puede definir la longitud de una curva sin hacer uso de esa integral?).
4.  Suponga que dibuja en un papel el trapecio acotado por  $y = x + 1$ ,  $y = -x - 1$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ , lo recorta y lo curva. Explicar por qué no se obtendría la figura 5.38. (Ayuda: Compare las áreas y observe con atención las figuras 5.39a y 5.39b).

**En los ejercicios 5-8, aproximar la longitud de arco de la curva usando rectas secantes con  $n = 2$  y  $n = 4$ .**

5.  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$
6.  $y = x^4$ ,  $0 \leq x \leq 1$
7.  $y = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$
8.  $y = \ln x$ ,  $1 \leq x \leq 3$

**En los ejercicios 9-18, escribir la integral de la longitud de arco y aproximar su valor por un método numérico.**

9.  $y = x^3$ ,  $-1 \leq x \leq 1$
10.  $y = x^3$ ,  $-2 \leq x \leq 2$
11.  $y = 2x - x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$
12.  $y = \tan x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/4$
13.  $y = x^3 + x$ ,  $0 \leq x \leq 3$
14.  $y = x^{1/3}$ ,  $1 \leq x \leq 2$
15.  $y = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$
16.  $y = \ln x$ ,  $1 \leq x \leq 3$
17.  $y = \int_0^x u \sin u \, du$ ,  $0 \leq x \leq \pi$
18.  $y = \int_0^x e^{-u} \sin u \, du$ ,  $0 \leq x \leq \pi$
19. Se cuelga una cuerda entre dos estacas que distan 20 pies. Si la cuerda adopta la forma de la catenaria  $y = 4(e^{x/10} + e^{-x/10})$ ,  $-10 \leq x \leq 10$ , calcular la longitud de la cuerda.
20. Se cuelga una cuerda entre dos estacas que distan 60 pies. Si la cuerda adopta la forma de la catenaria  $y = 4(e^{x/30} + e^{-x/30})$ ,  $-30 \leq x \leq 30$ , calcular la longitud de la cuerda.
21. En el ejemplo 4.4, calcular el pandeo del cable, es decir, la diferencia de valores  $y$  en el centro ( $x = 0$ ) y en los extremos ( $x = 10$ ). A la vista del resultado, ¿es sorprendente la longitud hallada?
22. Calcular el pandeo en los ejercicios 19 y 20.
23. Un balón de rugby sigue la trayectoria  $y = \frac{1}{15}x(60 - x)$  yardas. Esbozar su gráfica. ¿Cuánto ha recorrido horizontalmente? Calcular la longitud de arco de la trayectoria. Si el balón ha estado 4 segundos en el aire, ¿cuál ha sido su velocidad media?

24. Una pelota de béisbol sigue la trayectoria  $y = \frac{1}{300}x(100 - x)$  yardas. Esbozar su gráfica. ¿Cuánto ha recorrido horizontalmente? Calcular la longitud de arco. Explicar por qué el jugador desearía una longitud de arco pequeña, mientras que el del ejercicio 23 la preferiría grande.
25. En el ejemplo 4.4 probar que la longitud de arco es exactamente  $10(e - e^{-1})$ .
26. Evaluar la integral del ejemplo 4.4 con un PCS. Comparar la respuesta con la del ejercicio 25 y con la forma equivalente  $20 \sinh(1)$ , donde  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ .
27. La **integral elíptica de segunda clase** se define como  $\text{EllipticE}(\phi, m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2 u} \, du$ . Con respecto al ejemplo 4.1, muchos PCS dan  $\sqrt{2} \text{EllipticE}(x, \frac{1}{2})$  como primitiva de  $\sqrt{1 + \cos^2 x}$ . Verificar que lo es.

28. Muchos PCS dan

$$\int \sqrt{1 + 16x^6} \, dx = \frac{1}{4} x \sqrt{1 + 16x^6} + \int \frac{3/4}{\sqrt{1 + 16x^6}} \, dx.$$

Verificar que es una primitiva del integrando.

29. Hallar, con un PCS, una primitiva para el ejemplo 4.2. Evaluarla en los extremos del intervalo y comparar la diferencia entre sus valores con el valor que el PCS da por integración numérica. Intente lo mismo para el ejemplo 4.3.
30. Explique brevemente qué significa la respuesta  $\int f(x) \, dx$  de un PCS cuando se le pide hallar  $\int f(x) \, dx$ .



**En los ejercicios 31-38, escribir la integral que expresa el área de la superficie de revolución y aproximar su valor por algún método numérico.**

31.  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , gira en torno al eje  $x$
32.  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , gira en torno al eje  $x$
33.  $y = 2x - x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , gira en torno al eje  $x$
34.  $y = x^3 - 4x$ ,  $-2 \leq x \leq 0$ , gira en torno al eje  $x$
35.  $y = e^x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , gira en torno al eje  $x$
36.  $y = \ln x$ ,  $1 \leq x \leq 2$ , gira en torno al eje  $x$
37.  $y = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ , gira en torno al eje  $x$
38.  $y = \sqrt{x}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ , gira en torno al eje  $x$

**La longitud de arco puede dar información sobre si una curva es casi recta. En los ejercicios 39-44, calcular la longitud de arco  $L_1$  de la curva y la longitud  $L_2$  de la recta secante que une los puntos inicial y final de la curva. Evaluar el cociente  $L_2/L_1$ ; cuanto más cerca esté de 1 ese número, más recta es la curva.**

39.  $y = \sin x$ ,  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$
40.  $y = \cos x$ ,  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$
41.  $y = \sin x$ ,  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
42.  $y = \cos x$ ,  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$



43.  $y = e^x$ ,  $3 \leq x \leq 5$       44.  $y = e^x$ ,  $-5 \leq x \leq -3$
45. Calcular la longitud de arco de  $y = x^6$ ,  $y = x^8$  e  $y = x^{10}$  en  $0 \leq x \leq 1$ . A la vista de los ejemplos 4.2 y 4.3, identificar la pauta de la longitud de  $y = x^n$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , al crecer  $n$ . Conjeturar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ .
46. Para entender mejor el resultado del ejercicio 45, calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$  para cada  $x$  tal que  $0 \leq x < 1$ . Calcular la longitud de esa curva límite. Si se conecta esa curva con el punto final  $(1, 1)$ , ¿cuál es la longitud total?
47. Probar que  $y = x^4$  es más plana que  $y = x^2$  para  $0 < x < \sqrt{1/2}$  y más pendiente para  $x > \sqrt{1/2}$ .
48. Comparar cómo son de planas o de pendientes  $y = x^6$  e  $y = x^4$ .
49. Calcular el área de la superficie generada por el cuadrado  $-1 \leq x \leq 1$  y  $-1 \leq y \leq 1$  al girar en torno al eje  $y$ .
50. Hallar el área de la superficie generada por la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  al girar en torno al eje  $y$ .
51. Calcular el área de la superficie generada por el triángulo de vértices  $(-1, -1)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, -1)$  al girar en torno al eje  $y$ .
52. Dibujar, en unos mismos ejes, el cuadrado, el círculo y el triángulo de los ejercicios 49-51. Probar que las áreas relativas de los sólidos de evolución que generan (cilindro, esfera, cono) está en razón  $3:2:\pi$ , donde  $\pi$  es la **razón áurea**, definida como  $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .
53. Esbozar la gráfica y calcular la longitud de la **astroide**  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ .
54.  En los ejercicios 45 y 46 hemos investigado la longitud de  $y = x^n$  en  $[0, 1]$ . Ahora consideraremos polinomios más generales en ese mismo intervalo. En primer lugar, estime cuál puede ser la longitud máxima de la gráfica de un polinomio en  $[0, 1]$ . Ahora calcule la longitud para varias parábolas. Explique por qué  $f_c(x) = cx(1 - x)$  es una parábola abierta hacia abajo con  $x$ -intersecciones en 0 y 1 y vértice en  $x = 1/2$ . ¿Qué ocurre con la longitud cuando  $c$  se hace muy grande? Imagine que nos restringimos a polinomios cuyos valores están entre  $-1$  y  $1$ . Compruebe que en  $[0, 1]$  las funciones  $g_2(x) = 4x(1 - x)$ ,  $g_3(x) = 20x(1/2 - x)(1 - x)$  y  $g_4(x) = 80x(1/3 - x)(2/3 - x)(1 - x)$  tienen todas esta propiedad. Compare las longitudes de arco de  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$  y  $g_4(x)$ . ¿Cuál será el límite de esas longitudes? Defina una función  $g_5(x)$  que continúe esa pauta.
55.  En este ejercicio va a enfrentarse a una famosa paradoja relativa a la **trompeta de Gabriel**. Se hace girar, en torno al eje  $x$ , la curva  $y = 1/x$ , para  $1 \leq x \leq R$ , con  $R > 0$  un valor constante grande. Calcule el área y el volumen encerrado por esa superficie de revolución. (En ambos casos se pueden hallar las primitivas, aunque tal vez necesite un PCS para hallar el área). Determine el límite del área y del volumen para  $R \rightarrow \infty$ . Ahora vamos con la paradoja. Según sus resultados, tenemos un sólido de volumen finito y área infinita. Así, pues, ese sólido tridimensional se podría llenar completamente con una cantidad finita de pintura, pero para pintar su superficie haría falta una cantidad infinita.

## 5.5

## MOVIMIENTO DE PROYECTILES

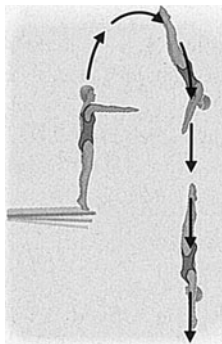
En varias secciones hemos discutido aspectos del movimiento de un móvil rectilíneo. Si conocemos la posición en función del tiempo, la derivada de la función posición es la velocidad y la derivada de la velocidad es la aceleración. Más interesante es el problema inverso: dada la aceleración, hallar la posición y la velocidad de un objeto. Matemáticamente, esto significa reconstruir una función cuya derivada se conoce. Con la integración a nuestra disposición, es fácil conseguir ese objetivo. En esta sección consideraremos el caso de un móvil que se desplaza por una *curva* en dos dimensiones en lugar del movimiento rectilíneo, más simple, considerado antes.

La conocida **segunda ley del movimiento de Newton** establece que

$$F = ma,$$

donde  $F$  es la suma de las fuerzas que actúan sobre el objeto de masa  $m$  y  $a$  es la aceleración. Así, pues, si conocemos las fuerzas actuantes, podemos determinar la aceleración. Y lo que es más importante: una vez que sabemos algo de Cálculo, podemos hallar la velocidad y la posición a partir de su aceleración.

Imaginemos un saltador que se lanza desde un trampolín (véase figura). Durante el salto actúa sobre él la fuerza de la gravedad, es decir, su peso  $W = mg$ , donde  $g$  denota la aceleración de la gravedad. (Suelen tomarse como valores aproximados de  $g$ , al nivel del mar,  $32 \text{ pies/s}^2$  y  $9,8 \text{ m/s}^2$ ). Con el fin de simplificar el problema, despreciaremos otras fuerzas, como la resistencia del aire.





Sea  $h(t)$  la altura del saltador sobre el agua  $t$  segundos después de saltar. La fuerza de la gravedad es  $F = -mg$ , donde el signo menos indica que la fuerza actúa hacia abajo, en la dirección negativa de la altura. Sabemos que la aceleración es  $a(t) = h''(t)$ . Por la segunda ley de Newton,  $-mg = mh''(t)$ , o sea,

$$h''(t) = -g.$$

Nótese que la deducción de esta ecuación está basada en el hecho de que la única fuerza actuante es la gravedad. La función posición de *cualquier* objeto (sea cual sea su masa) sujeto sólo a la acción de la gravedad satisface esa misma ecuación. Las únicas diferencias entre unas situaciones y otras son las condiciones iniciales (la posición inicial y la velocidad inicial) y las cuestiones planteadas.

### Ejemplo 5.1 Velocidad de un saltador en el momento de la inmersión

Un nadador salta desde un trampolín situado a 15 pies de altura sobre el nivel del agua con una velocidad inicial de 8 pies/s (hacia arriba). ¿Cuál es su velocidad al entrar en el agua?

**Solución** Sea  $h(t)$  la altura, en pies, sobre el nivel del agua. La ley de Newton afirma que  $h''(t) = -32$  (ya que la altura se da en pies). Además, tenemos como condiciones iniciales  $h(0) = 15$  (altura desde la que inicia el salto) y  $h'(0) = 8$ . Como vamos a ver, hallar  $h(t)$  se reduce a una simple integración. Se tiene

$$\int h''(t) dt = \int -32 dt$$

y, por tanto,

$$h'(t) = -32t + c.$$

Por el dato de la velocidad inicial,

$$8 = h'(0) = -32(0) + c = c,$$

así que la velocidad en cualquier instante  $t$  viene dada por

$$h'(t) = -32t + 8.$$

Para hallar la velocidad de inmersión necesitamos saber el instante en que impacta en el agua. Eso ocurre cuando  $h(t) = 0$  (cuando la altura del nadador respecto del agua es 0), de modo que hay que efectuar otra integración para calcular la función altura. Integrando la función velocidad, obtenemos

$$\int h'(t) dt = \int (-32t + 8) dt,$$

de manera que

$$h(t) = -16t^2 + 8t + c.$$

Por el dato de la altura inicial,

$$15 = h(0) = -16(0)^2 + 8(0) + c = c,$$

así que

$$h(t) = -16t^2 + 8t + 15.$$

Eso nos da la altura en el instante  $t$ . La inmersión ocurre cuando

$$\begin{aligned} 0 &= h(t) = -16t^2 + 8t + 15 \\ &= -(4t + 3)(4t - 5), \end{aligned}$$

o sea, en el instante  $t = \frac{5}{4}$ . (Desechamos la solución  $t = -\frac{3}{4}$ . ¿Por qué?). Cuando  $t = \frac{5}{4}$ , la velocidad es  $h'\left(\frac{5}{4}\right) = -32\left(\frac{5}{4}\right) + 8 = -32$  pies/s. Para pasar a millas por hora, multiplicamos por 3.600/5.280, lo que da unas 22 mph. (¡No conviene caer en mala posición a esa velocidad!).

En el ejemplo 5.1, el signo negativo de la velocidad indica que el saltador está cayendo. En muchas situaciones son importantes el movimiento hacia arriba y el movimiento hacia abajo.

### Ejemplo 5.2 Una ecuación para el movimiento vertical de una pelota

Se lanza desde el suelo hacia arriba una pelota con velocidad inicial de 64 pies/s. Despreciando la resistencia del aire, hallar una ecuación para su altura en cualquier instante  $t$ . Calcular la altura máxima y el tiempo que la pelota tarda en caer.

**Solución** Con la gravedad como única fuerza, la altura  $h(t)$  satisface la ecuación  $h''(t) = -32$ . Las condiciones iniciales son  $h'(0) = 64$  y  $h(0) = 0$ . Así, pues,

$$\int h''(t) dt = \int -32 dt$$

y, por tanto,

$$h'(t) = -32t + c.$$

De la velocidad inicial se sigue que

$$64 = h'(0) = -32(0) + c = c,$$

luego

$$h'(t) = 64 - 32t.$$

Integrando otra vez, obtenemos

$$\int h'(t) dt = \int (64 - 32t) dt,$$

es decir,

$$h(t) = 64t - 16t^2 + c.$$

Ahora, de la altura inicial se deduce que

$$0 = h(0) = 64(0) - 16(0)^2 + c = c,$$

así que

$$h(t) = 64t - 16t^2.$$



Como la función altura es cuadrática, su máximo se produce cuando  $h'(t) = 0$ . [Piense en la Física de la situación: ¿qué sucede cuando  $h'(t) = 0$ ?]. La solución de  $64 - 32t = 0$  es  $t = 2$  (el instante de máxima altura) y la altura máxima es  $h(2) = 64(2) - 16(2)^2 = 64$  pies. La pelota toca el suelo cuando  $h(t) = 0$ . Las soluciones de

$$0 = h(t) = 64t - 16t^2 = 16t(4 - t)$$

son  $t = 0$  (momento del lanzamiento) y  $t = 4$  (momento en que llega al suelo). Así, pues, tarda en caer 4 segundos.

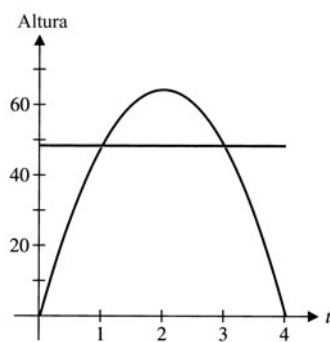


Figura 5.43

Altura de la pelota en el instante  $t$ .

Dibujando la función altura del ejemplo 5.2 junto con la recta  $y = 48$  (figura 5.43) podemos observar una propiedad interesante del movimiento de proyectiles. Las dos gráficas se cortan en  $t = 1$  y en  $t = 3$ . El intervalo  $[1, 3]$  es la mitad del tiempo total que la pelota está en el aire. Eso significa que la pelota está la mitad del tiempo por encima de los tres cuartos de su máxima altura. Es increíble ver cómo algunos deportistas saltan y parece que «se detienen en el aire». Como el cálculo anterior sugiere, cualquier objeto «se detiene en el aire».

### Ejemplo 5.3 Velocidad inicial requerida para alcanzar una cierta altura

Se ha estimado que la estrella de la NBA Michael Jordan saltaba verticalmente 4,5 pies. Despreciando la resistencia del aire, ¿cuál era la velocidad inicial de su salto?

**Solución** Una vez más, la ley de Newton da la ecuación  $h''(t) = -32$  para la altura  $h(t)$ . La velocidad inicial es  $h'(0) = v_0$  y la altura inicial  $h(0) = 0$ . Queremos calcular el valor  $v_0$  que da una altura máxima de 54 pulgadas. Como antes, integramos para obtener

$$h'(t) = -32t + c.$$

Usando la velocidad inicial, vemos que

$$v_0 = h'(0) = -32(0) + c = c.$$

Así, pues, la función velocidad es

$$h'(t) = v_0 - 32t.$$

Integrando de nuevo y usando la posición inicial  $h(0) = 0$ , concluimos que

$$h(t) = v_0 t - 16t^2.$$

La altura máxima se alcanza cuando  $h'(t) = 0$  (¿por qué?). Haciendo

$$0 = h'(t) = v_0 - 32t,$$

obtenemos  $t = \frac{v_0}{32}$ . En ese instante la altura (la altura máxima) es

$$h\left(\frac{v_0}{32}\right) = v_0 \left(\frac{v_0}{32}\right) - 16 \left(\frac{v_0}{32}\right)^2 = \frac{v_0^2}{32} - \frac{v_0^2}{64} = \frac{v_0^2}{64}.$$

Un salto de 4,5 pies requiere  $\frac{v_0^2}{64} = 4,5$ , o sea,  $v_0^2 = 288$ , así que  $v_0 = \sqrt{288} \approx 17$  pies/s. Es decir, unas 11,6 mph.

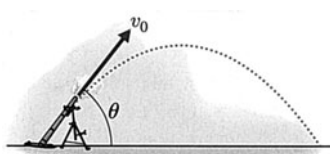


Figura 5.44a

Trayectoria de un proyectil.

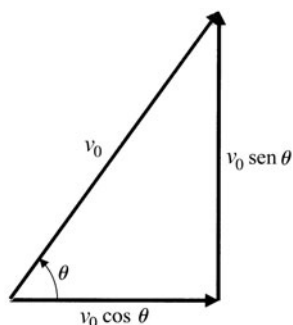


Figura 5.44b

Componentes vertical y horizontal de la velocidad.

Hasta ahora sólo hemos considerado movimientos verticales de proyectiles. En la mayoría de las aplicaciones hay que tener en cuenta también el movimiento horizontal. Si ignoramos la resistencia del aire, los cálculos son fáciles. El principio básico es aplicar la ley de Newton por separado a las componentes horizontal y vertical del movimiento. Si  $y(t)$  representa la posición vertical, tenemos  $y''(t) = -g$  como antes. Si despreciamos la resistencia del aire, no hay fuerzas actuando horizontalmente sobre el proyectil. Por tanto, si  $x(t)$  es la posición horizontal, la ley de Newton da  $x''(t) = 0$ .

Las condiciones iniciales son más complicadas en este caso. En general, el proyectil será lanzado con una velocidad inicial  $v_0$  y con un ángulo de elevación  $\theta$ . La figura 5.44 ilustra el caso  $\theta > 0$ . Si  $\theta < 0$ , la velocidad inicial apuntaría hacia abajo.

Como se aprecia en la figura 5.44a, podemos descomponer por trigonometría la velocidad inicial en componentes vertical y horizontal. La componente horizontal es  $v_x = v_0 \cos \theta$  y la vertical  $v_y = v_0 \sin \theta$ .

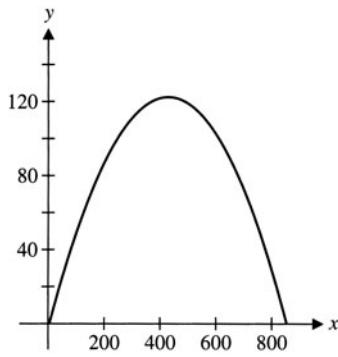


Figura 5.45

Trayectoria de un proyectil.

**Nota 5.1**

Le rogamos encarecidamente que no reduzca esta sección a la memorización de unas cuantas fórmulas. Es cierto que si se desprecia la resistencia del aire, la componente vertical de la posición será siempre  $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + y(0)$ . (Continuaremos con esto en los ejercicios). Sin embargo, la comprensión del proceso y la probabilidad de dar con la respuesta correcta aumentarán de forma notable si aborda cada problema empezando con la ley de Newton y procediendo por integración (cosa nada difícil).

**Ejemplo 5.4****Movimiento de un proyectil en dos dimensiones**

Se lanza un proyectil con velocidad inicial  $v_0 = 98$  m/s y con un ángulo de elevación  $\theta = \pi/6$ . Calcular el tiempo de vuelo y el alcance (horizontal) del proyectil. (Despreciar la resistencia del aire).

**Solución** Para la componente vertical es  $y''(t) = -9,8$  (ya que la velocidad se mide en m/s). En la figura 5.44b vemos que la componente vertical de la velocidad inicial es  $y'(0) = 98 \sin \pi/6 = 49$  y la altura inicial  $y(0) = 0$ . Un par de integraciones simples dan  $y'(t) = -9,8t + 49$  para la función velocidad  $y(t) = -4,9t^2 + 49t$  para la función posición. El proyectil golpea en el suelo cuando  $y(t) = 0$  (altura 0 sobre el suelo). Las soluciones de

$$0 = y(t) = -4,9t^2 + 49t + 49t(1 - 0,1t)$$

son  $t = 0$  (lanzamiento) y  $t = 10$  (caída al suelo). El tiempo de vuelo es, por tanto, 10 segundos. La componente horizontal obedece la ecuación  $x''(t) = 0$  con velocidad inicial  $x'(0) = 98 \cos \pi/6 = 49\sqrt{3}$  y posición inicial  $x(0) = 0$ . Integrando, se obtiene  $x'(t) = 49\sqrt{3}$  y  $x(t) = (49\sqrt{3})t$ . La figura 5.45 muestra la trayectoria del proyectil. [Puede reproducirla con un PCS en modo paramétrico introduciendo  $x(t)$ ,  $y(t)$  en  $0 \leq t \leq 10$ . O bien despeje  $t$  en términos de  $x$  y sustituya  $t$  por  $\frac{1}{49\sqrt{3}}x$  para ver que la curva es una parábola].

La posición en la que el proyectil golpea en el suelo es el valor de  $x(t)$  para  $t = 10$  (momento del aterrizaje), de modo que el alcance resulta ser

$$x(10) = (49\sqrt{3})(10) = 49\sqrt{3} \approx 849 \text{ metros.}$$

**Ejemplo 5.5****El movimiento de la pelota en un servicio de tenis**

Un tenista golpea la pelota a una altura de 8 pies y le imprime una velocidad inicial de 120 mph con un ángulo de  $5^\circ$  por debajo de la horizontal. El saque «entra» si la pelota salva una red de 3 pies de altura situada a 39 pies y golpea en el suelo delante de la línea de fondo, situada a 60 pies (figura 5.46). Averiguar si ese servicio entra o no.

**Solución** Como en el ejemplo 5.4, empezamos por el movimiento vertical. Como la distancia se mide en pies, la ecuación del movimiento es  $y''(t) = -32$ . La velocidad inicial, convertida en pies/s, es  $120 \text{ mph} = 120 \frac{5.280}{3.600} \text{ pies/s} = 176 \text{ pies/s}$ . Por tanto, la componente vertical de la velocidad inicial es  $y'(0) = 176 \sin(-5^\circ) \approx -15,34 \text{ pies/s}$ . Integrando, obtenemos

$$y'(t) = -32t - 15,34.$$

La altura inicial es  $y(0) = 8$  pies, así que otra integración da

$$y(t) = -16t^2 - 15,34t + 8 \text{ pies.}$$

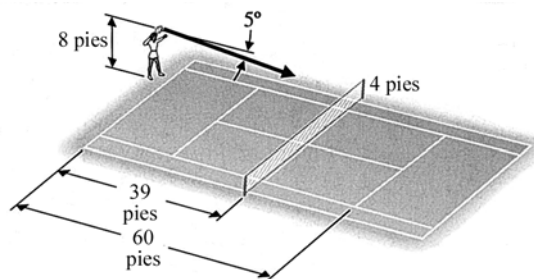


Figura 5.46

Altura en un servicio de tenis.

La componente horizontal del movimiento viene determinada por  $x''(t) = 0$  con velocidad inicial  $x'(0) = 176 \cos(-5^\circ) \approx 175,33$  pies/s y posición inicial  $x(0) = 0$ . Por integración, obtenemos  $x'(t) = 175,33$  pies/s y  $x(t) = 175,33t$  pies. En resumen,

$$\begin{aligned}x(t) &= 175,33t, \\y(t) &= -16t^2 - 15,34t + 8.\end{aligned}$$

Para que la pelota salve la red, ha de ser  $y \geq 3$  para  $x = 39$ . Como  $x(t) = 39$  cuando  $175,33t = 39$ , o sea,  $t \approx 0,2224$ , y en ese momento es  $y(0,2224) \approx 3,8$ , la pelota salva la red. El segundo requisito es que  $x \leq 60$  cuando la pelota toca el suelo ( $y = 0$ ). Se tiene  $y(t) = 0$  cuando  $-16t^2 - 15,34t + 8 = 0$ . La fórmula cuadrática da  $t \approx -1,33$  y  $t \approx 0,3749$ . Ignorando la solución negativa, calculamos  $x(0,3749) \approx 65,7$ , de modo que el servicio cae más allá de la línea de fondo. No entra.

Una buena razón para comenzar cada problema con la ley de Newton es que eso obliga a determinar qué fuerzas deben ser tenidas en cuenta (y cuáles no). Por ejemplo, hasta ahora hemos despreciado la resistencia del aire, lo cual es una simplificación de la realidad. Algunos cálculos usando ecuaciones simplificadas son razonablemente precisos. Otros, como el del próximo ejemplo, no.

### Ejemplo 5.6 Una situación en la que la resistencia del aire no puede ignorarse

Una gota de lluvia cae desde una nube a 3.000 pies de altura sobre el suelo. Despreciando la resistencia del aire, ¿a qué velocidad llegará la gota al suelo?

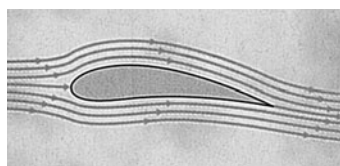
**Solución** Sea  $y(t)$  la altura de la gota en el instante  $t$ . La segunda ley de Newton nos dice que  $y''(t) = -32$ . La velocidad inicial es  $y'(0) = 0$  (la gota cae, no es lanzada hacia abajo) y la altura inicial es  $y(0) = 3.000$ . Integrando y usando esas condiciones iniciales, se obtiene  $y'(t) = -32t$ ,  $y(t) = 3.000 - 16t^2$ . La gota de lluvia toca el suelo cuando  $y(t) = 0$ . De

$$0 = y(t) = 3.000 - 16t^2$$

se sigue que  $t = \sqrt{3.000/16} \approx 13,693$  segundos. La velocidad en ese instante es

$$y'(\sqrt{3.000/16}) = -32\sqrt{3.000/16} \approx -438,18 \text{ pies/s.}$$

Esto es, ¡unas 300 mph! Afortunadamente, la resistencia del aire juega un papel esencial en la caída de las gotas de lluvia, que llegan al suelo con una velocidad en torno a 10 mph.



**Figura 5.47**  
Sección de un ala.



Costuras en una pelota de béisbol reglamentaria.

La resistencia del aire que frena las gotas de lluvia es sólo una de las formas en que el aire afecta al movimiento de un objeto. La **fuerza de Magnus**, producida por el giro o por las asimetrías de un objeto, puede hacer que el objeto cambie de dirección y siga una trayectoria curvada. El ejemplo más común de fuerza de Magnus la sufren los aviones. Una cara del ala de un avión es curvada y la otra casi plana (figura 5.47). Esa falta de simetría hace que el aire se mueva por encima del ala más rápidamente que por debajo, lo que produce una fuerza de Magnus hacia arriba que sostiene al avión en el aire.

Otro ejemplo de fuerza de Magnus se produce sobre la pelota de béisbol en un lanzamiento inusual llamado *knuckleball* («pelota de nudillos»). En él, el lanzador atrapa la pelota con los cinco dedos e intenta lanzarla con el menor giro posible (a pesar del nombre, no se usan los nudillos). Los jugadores de béisbol dicen que la *knuckleball* «baila» de forma impredecible y es muy difícil de batear o de atrapar. No hay acuerdo en por qué la *knuckleball* se mueve tanto, pero vamos a presentar un modelo teórico debido a los físicos Robert Watts y Terry Bahill.

La pelota tiene costuras que sobresalen de su superficie y juegan un papel similar al de las alas de un avión, creando una fuerza de Magnus que afecta a la pelota. La dirección de la fuerza de Magnus depende de la orientación de las costuras. Las medidas efectuadas por

Watts y Bahill indican que la fuerza lateral (de izquierda a derecha para el lanzador) es aproximadamente  $F_m = -0,1 \sin(4\theta)$  libras, donde  $\theta$  es el ángulo en radianes que ha girado la pelota respecto de una posición inicial.

Como la gravedad no afecta al movimiento lateral, éste sólo se ve afectado por la fuerza de Magnus. La segunda ley de Newton da para él  $mx''(t) = -0,1 \sin(4\theta)$ . La masa de una pelota de béisbol es de 0,01 slugs (medida de *masa* que al multiplicarla por  $g = 32$  da el *peso* en libras). Por tanto,

$$x''(t) = -10 \sin(4\theta).$$

Si la pelota gira a  $\omega$  rad/s, se tiene  $4\theta = 4\omega t + \theta_0$ , donde el ángulo inicial  $\theta_0$  depende de en qué posición agarra la pelota el lanzador. Nuestro modelo es, por consiguiente,

$$x''(t) = -10 \sin(4\omega t + \theta_0), \quad (5.1)$$

con las condiciones iniciales  $x'(0) = 0$  y  $x(0) = 0$ . Para una velocidad típica de una *knuckleball* de 60 mph, el lanzamiento tarda 0,68 segundos en alcanzar la base.

### Ejemplo 5.7 Una ecuación para el movimiento de una *knuckleball*

Para un giro de  $w = 2$  rad/s y  $\theta_0 = 0$ , hallar una ecuación del movimiento de una *knuckleball* y representar su gráfica en  $0 \leq t \leq 0,68$ . Repetirlo para  $\theta_0 = \pi/2$ .

**Solución** Con  $\theta_0 = 0$ , la ley de Newton da  $x''(t) = -10 \sin 8t$ , por (5.1). Integrando esta ecuación y usando la condición inicial  $x'(0) = 0$ , se tiene

$$x'(t) = -\frac{10}{8} [-\cos 8t - (-\cos 0)] = 1,25 (\cos 8t - 1).$$

Integrando otra vez y usando la segunda condición inicial,  $x(0) = 0$ , obtenemos

$$x(t) = 1,25 \left( \frac{1}{8} \right) (\sin 8t - 0) - 1,25t = 0,15625 \sin 8t - 1,25t.$$

Una gráfica de esta función muestra el movimiento lateral de la pelota (figura 5.48a) visto desde arriba. Vemos que, tras salir recta, ¡se aparta casi un pie del centro de la base!

En el caso  $\theta_0 = \pi/2$ , (5.1) da

$$x''(t) = -10 \sin \left( 8t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Integrando y usando la primera condición inicial, se obtiene

$$x'(t) = -\frac{10}{8} \left\{ -\cos \left( 8t + \frac{\pi}{2} \right) - \left[ -\cos \left( 0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = 1,25 \cos \left( 8t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Una segunda integración da, finalmente,

$$x(t) = 1,25 \left( \frac{1}{8} \right) \left[ \sin \left( 8t + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] = 0,15625 \left[ \sin \left( 8t + \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right].$$

La gráfica del movimiento lateral en este caso puede verse en la figura 5.48b. Este lanzamiento ¡se aleja casi 4 pulgadas a la derecha y después vuelve a la base! Como vemos, la *knuckleball* es muy sensible al giro y a la posición inicial. De ahí que sea tan difícil golpearla.

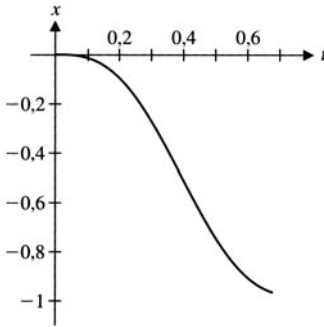


Figura 5.48a

Movimiento lateral de una «knuckleball» para  $\theta_0 = 0$ .

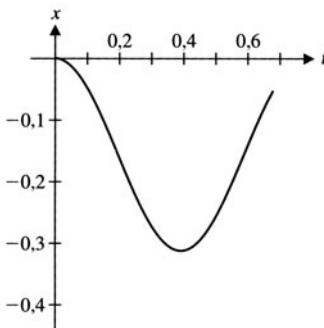






Figura 5.48b

Movimiento lateral de una «knuckleball» para  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ .



## EJERCICIOS 5.5

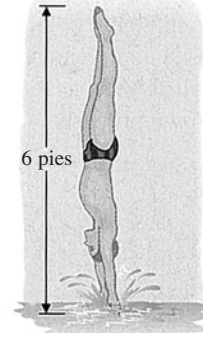
1.  En el ejemplo 5.6 la hipótesis de que la resistencia del aire puede ignorarse es evidentemente inaceptable. Discutir la validez de esa hipótesis en los ejemplos 5.1 y 5.3.
2.  En la discusión que sigue al ejemplo 5.3 probamos que Michael Jordan (y cualquier otro ser humano) se mantiene la mitad del tiempo en el cuarto más alto de un salto. Comparar las velocidades en distintos instantes del salto para explicar por qué se está más tiempo arriba que abajo.
3.  En el ejemplo 5.4 deducimos ecuaciones separadas para las componentes horizontal y vertical de la posición. Para descubrir una consecuencia de esa separación, consideremos dos personas, una junto a otra, con los brazos extendidos a la misma altura. Una de ellas dispara una bala con su pistola horizontalmente. Al mismo tiempo, la otra deja caer una bala. Explicar por qué las balas tocarán el suelo en el mismo instante.
4.  Un modelo más preciso para la gota de lluvia del ejemplo 5.6 es  $y''(t) = -32 + f(t)$ , donde  $f(t)$  representa la fuerza de resistencia del aire (dividida entre la masa). Si  $v(t)$  es la velocidad hacia abajo de la gota, explicar por qué esa ecuación es equivalente a  $v'(t) = 32 - f(t)$ . Explicar en términos físicos por qué cuanto mayor es  $v(t)$ , mayor es  $f(t)$ . Así, pues, un modelo tal como  $f(t) = v(t)$  o  $f(t) = [v(t)]^2$  sería razonable. (En la mayor parte de las situaciones,  $[v(t)]^2$  suele ajustar mejor los datos experimentales).

**En los ejercicios 5-8, identificar las condiciones iniciales  $y(0)$  e  $y'(0)$ .**

5. Se deja caer un objeto desde 80 pies de altura.
6. Se deja caer un objeto desde 100 pies de altura.
7. Se lanza un objeto, desde una altura de 60 pies, con una velocidad de 10 pies/s hacia arriba.
8. Se lanza un objeto, desde una altura de 20 pies, con una velocidad de 4 pies/s hacia abajo.

**En los ejercicios 9-57, despreciar la resistencia del aire.**

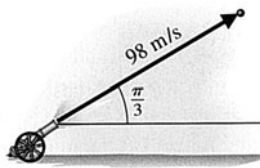
9. Un saltador se deja caer desde 30 pies sobre el nivel del agua (la altura aproximada de un trampolín olímpico). ¿Con qué velocidad entra en el agua?
10. Un saltador se deja caer desde 120 pies sobre el nivel del agua (la altura aproximada del salto desde los acantilados de Acapulco). ¿Con qué velocidad entra en el agua?
11. Para el saltador del ejemplo 5.1, supongamos que la velocidad de impacto de sus manos es  $-32$  pies/s (véase figura). Si mide 6 pies desde las manos hasta los pies, los pies siguen cayendo 6 pies después del impacto de sus manos. Hallar la velocidad de impacto de un objeto que cae una altura de 6 pies con una velocidad inicial de  $-32$  pies/s.
12. Dar una razón al menos de por qué la velocidad de impacto del ejercicio 11 no sería la velocidad de impacto real de los pies del saltador.
13. Comparar las velocidades de impacto de objetos que caen desde 30 pies (ejercicio 9), 120 pies (ejercicio 10) y 3.000 pies (ejemplo 5.3). Si la altura aumenta en un factor  $h$ , ¿por qué factor queda multiplicada la velocidad de impacto?
14. El monumento a Washington tiene 555 pies y  $5\frac{1}{8}$  pulgadas de altura. En un experimento famoso, se dejó caer una pelota de béisbol desde lo alto para ver si un jugador podía atraparla. ¿A qué velocidad llegó abajo la pelota?
15. Un coyote, no muy astuto, descubre atónito que acaba de caer desde el borde de un precipicio. Cuatro segundos más tarde, impacta en el suelo, rodeado de una nube de polvo. ¿Qué altura tiene el precipicio?
16. Una roca, desprendida por el coyote del ejercicio 15, cae 3 segundos antes de golpearle en la cabeza. ¿Desde qué altura ha caído la roca? ¿A qué velocidad golpea la cabeza del pobre coyote?
17. La próxima viñeta de nuestro coyote le muestra lanzándose al aire mediante una catapulta. Si le propulsa verticalmente hacia arriba, desde el suelo, con velocidad inicial de 64 pies/s, hallar una ecuación para la altura del coyote en todo instante  $t$ . Calcular la máxima altura que alcanza, el tiempo que está en el aire y su velocidad cuando vuelve a caer sobre la catapulta.
18. De rebote, el coyote del ejercicio 17 es lanzado a 256 pies de altura. ¿Cuál es la velocidad inicial requerida para ello?
19. Uno de los autores tiene un salto vertical de 20 pulgadas. ¿Cuál es la velocidad inicial en su salto? ¿Cómo se compara con la de Michael Jordan (ejemplo 5.3)?
20. Si el autor entrena con intensidad y aumenta su velocidad de salto inicial en un 10%, ¿en qué porcentaje crece su salto vertical?
21. Una pulga salta con una velocidad inicial vertical de unos 5 pies/s. ¿Qué altura alcanza?



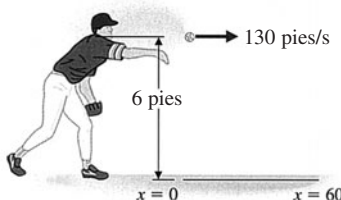
22. Calcular el cociente entre el salto vertical de la pulga del ejercicio 21 y su altura ( $\frac{1}{12}$  pulgadas aproximadamente). Si el autor del ejercicio 19, de 6 pies de altura, pudiera lograr ese mismo cociente, ¿qué altura alcanzaría?
23. Probar que un objeto que se deja caer desde  $H$  pies de altura llega al suelo en  $T = \frac{1}{4}\sqrt{H}$  segundos con velocidad de impacto  $V = -8\sqrt{H}$  pies/s.
24. Probar que un objeto impulsado desde el suelo hacia arriba con velocidad inicial de  $v_0$  pies/s alcanza una altura máxima de  $v_0^2/64$  pies.

**En los ejercicios 25-42, dibujar un esbozo de las gráficas paramétricas como en el ejemplo 5.4 para indicar la trayectoria de vuelo.**

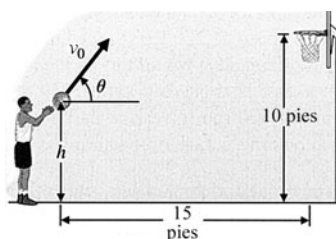
25. Se lanza un objeto con ángulo de elevación  $\theta = \pi/3$  radianes y velocidad inicial de 98 m/s. Calcular el tiempo de vuelo y el alcance horizontal.



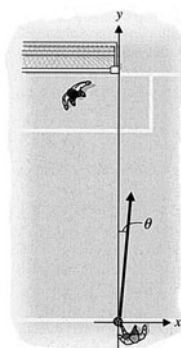
26. Comparar los ángulos de elevación, las velocidades iniciales y los alcances de los objetos del ejercicio 25 y del ejemplo 5.4.
27. Hallar el tiempo de vuelo y el alcance horizontal de un objeto lanzado con un ángulo de elevación de  $30^\circ$  y velocidad inicial de 120 pies/s.
28. Hallar el tiempo de vuelo y el alcance horizontal de un objeto lanzado con un ángulo de elevación de  $60^\circ$  y una velocidad inicial de 120 pies/s. Comparar el alcance con los de los ejercicios 27 y 28.
29. Repetir el ejemplo 5.5 con un ángulo de  $6^\circ$ .
30. Hallar, por prueba y error, el menor y el mayor de los ángulos con los que el servicio del ejemplo 5.5 entra.
31. Repetir el ejemplo 5.5 con velocidad inicial de 170 pies/s.
32. Hallar, por prueba y error, la menor y la mayor de las velocidades iniciales con las que el servicio del ejemplo 5.5 entra.
33. Un jugador lanza la pelota de béisbol como indica la figura. Hallar la altura de la pelota cuando alcanza la base, distante 60 pies. (Ayuda: Deducir el tiempo de vuelo de la ecuación en  $x$  y usar después la ecuación en  $y$  para determinar la altura).



34. Repetir el ejercicio 33 para una velocidad inicial de 80 pies/s. (Ayuda: Interpretar con cuidado la solución negativa).
35. Un jugador de béisbol lanza una pelota hacia la primera base, distante 120 pies, desde una altura de 5 pies con velocidad inicial de 120 pies/s y ángulo de elevación de  $5^\circ$ . Hallar la altura de la pelota cuando alcanza la primera base.
36. Repetir el ejercicio 35 con un ángulo de elevación de  $10^\circ$ .
37. Por prueba y error, hallar el ángulo requerido en los ejercicios 35 y 36 para que la pelota llegue a la primera base a una altura de 5 pies. Con ese ángulo, ¿a qué altura sobre la cabeza del jugador de la primera base debe apuntar el lanzador?
38. En el ejercicio 35, si la bola se lanza horizontalmente, ¿a qué distancia de la primera base bota en el suelo?
39. Un especialista temerario planea saltar sobre 25 automóviles, todos de 5 pies de anchura, por una rampa de  $30^\circ$ . Calcular la velocidad inicial requerida para lograr su arriesgada hazaña.
40. Repetir el ejercicio 39 con un ángulo de  $45^\circ$ . A pesar de la menor velocidad necesaria, ¿por qué preferiría el especialista la rampa de  $30^\circ$  a la de  $45^\circ$ ?
41. Un avión a 256 pies de altura quiere arrojar víveres sobre un cierto punto del suelo. Si su velocidad es de 100 pies/s, ¿a qué distancia horizontal del blanco debe soltar su carga? (Ayuda: Usar la ecuación en  $y$  para hallar el tiempo de caída  $y$ , a continuación, la ecuación en  $x$  para calcular el alcance horizontal).
42. Repetir el ejercicio 42 para una altura de 144 pies.
43. Consideremos una *knuckleball* (ejemplo 5.7) cuyo movimiento lateral satisface el problema de valores iniciales  $x''(t) = -25 \sin(4\omega t + \theta_0)$ ,  $x'(0) = x(0) = 0$ . Con  $\theta_0 = 0$  y  $\omega = 1$ , hallar una ecuación para  $x(t)$  y representar la solución en  $0 \leq t \leq 0,68$ .
44. Repetir el ejercicio 43 con  $\theta_0 = \pi/2$  y  $\omega = 1$ .
45. Repetir el ejercicio 43 con  $\theta_0 = \pi/4$  y  $\omega = 2$ .
46. Repetir el ejercicio 43 con  $\theta_0 = \pi/4$  y  $\omega = 1$ .
47. Para el saltador del ejercicio 9, ¿cuál sería la velocidad angular media (en rad/s) necesaria para completar  $2\frac{1}{2}$  saltos mortales?
48. En el número del hombre bala del circo Zucchini, un hombre es lanzado desde una altura de 10 pies, con un ángulo de  $45^\circ$ , a una velocidad de 160 pies/s. Si la red de seguridad está 5 pies sobre el nivel del suelo, ¿a qué distancia del cañón debe estar colocada? Si esa red sólo soporta una velocidad de impacto de 160 pies/s, el hombre bala ¿saldrá indemne o se aplastará contra el suelo?
49. En un tiro libre, el balón de baloncesto se lanza desde 15 pies de distancia y desde una altura de  $h$  pies a una canasta situada a 10 pies de altura (véase figura). Si  $h = 6$ ,  $\theta = 52^\circ$  y  $v_0 = 25$  pies/s, probar que el tiro libre entra en la canasta. Como la canasta es mayor que el balón, hay un margen de error de varias pulgadas. Si todo lanzamiento que pasa por una altura de 10 pies con  $14,65 \leq x \leq 15,35$  es bueno, probar que, para la velocidad  $v_0$  dada, el margen de error es  $48^\circ \leq \theta \leq 57^\circ$ . Dibujar gráficas paramétricas de varios de esos lanzamientos.



50. Para un lanzamiento libre (ejercicio 49) con  $h = 6$  y  $\theta = 52^\circ$ , hallar el rango de velocidades  $v_0$  para las que el tiro es encestando. Supuesto que lanzar un tiro libre con velocidad  $v_0$  requiere una fuerza de  $F = 0,01 v_0^2$  libras, ¿cuál es el margen de error en la fuerza?
51. Roberto Carlos, jugador de Brasil y del Real Madrid, es famoso por sus disparos curvados. Supongamos que lanza una falta distante 90 pies del poste izquierdo de la portería. Orientando los ejes como en la figura, supongamos que dispara con velocidad inicial de 100 pies/s y un ángulo de  $5^\circ$  respecto del eje  $y$ . Supongamos además que la única fuerza actuante sobre el balón es la fuerza de Magnus, hacia la izquierda, causada por el giro del balón. Con  $x''(t) = -20$  e  $y''(t) = 0$ , determinar si el lanzamiento es gol en  $y = 90$  y  $-24 \leq x \leq 0$ .



52. ¿A qué distancia a la derecha del poste hubiera salido el lanzamiento del ejercicio 51 sin el giro?
53. Para acostumbrar a los astronautas a la ingravidez, la NASA les hace viajar en un avión especial, el *Vomit Comet*, cuya aceleración vertical  $y''(t)$  se consigue igualar a la de la gravedad, es decir,  $y''(t) = -g$ . Probar que, para una velocidad horizontal constante, el avión sigue una trayectoria de vuelo parabólica. El avión de la NASA sigue trayectorias parabólicas de unos 2.500 pies de altura (2.500 hacia arriba y 2.500 hacia abajo). Calcular el tiempo que tarda en completar esa trayectoria, que es el tiempo en que los astronautas experimentan la ingravidez.
54. En un golpe de golf típico, la pelota es lanzada con una velocidad inicial de 220 pies/s y un ángulo de  $9,3^\circ$ . En ausencia de resistencia del aire, ¿qué distancia horizontal alcanzará el golpe? El alcance real de ese golpe es de unos 720 pies. En este caso, un giro hacia atrás de 4.000 rpm confiere a la pelota una gran fuerza de Magnus vertical hacia arriba que cancela buena parte de la resistencia del aire y de la gravedad.
55. En los Juegos Olímpicos de Barcelona de 1992, un arquero disparó una flecha sobre el pebetero, situado a 30 metros de altura y a 70 metros de distancia horizontal. Si la flecha alcanzó en el momento de pasar sobre el pebetero su máxima altura, calcular la velocidad inicial y el ángulo de salida de la flecha. (Ayuda: Probar que  $y'(t) = 0$  si  $t = (v_0 \sin \theta)/9,8$ . Para ese  $t$ , demostrar que  $\frac{x(t)}{y(t)} = 2 \cot \theta = \frac{7}{3}$  y despejar  $\theta$ . A continuación, despejar  $v_0$ ).
56. Los malabaristas profesionales afirman que el máximo número de bolas manejable es 10. Para hacernos una idea de por qué, supongamos que se tarda  $\frac{1}{2}$  segundo en atrapar y relanzar una bola al aire (en otras palabras, el malabarista puede manejar 2 bolas por segundo). Si ha de trabajar con 10 bolas, cada una de ellas debe estar en el aire 5 segundos. ¿A qué altura hay que lanzarlas para conseguirlo? A la vista de esa altura, ¿le parece mucho tiempo ese  $\frac{1}{2}$  segundo? ¿A qué altura habría que lanzar las bolas para poder manejar 11 en lugar de 10?

## 5.6 TRABAJO, MOMENTOS Y FUERZA HIDROSTÁTICA

En esta sección exploramos algunas aplicaciones físicas de la integral. En cada caso definimos un concepto básico para ayudar a resolver un problema específico. A continuación, usamos la integral para generalizar el concepto y resolver una gama mucho más amplia de problemas. Estas aplicaciones son un buen ejemplo de cómo las Matemáticas ayudan a encontrar soluciones de problemas prácticos.

Imagine que se encuentra en un trineo, en la parte baja de una colina cubierta de nieve. Para lograr un buen descenso queremos empujar el trineo lo más arriba posible. Un físico diría que a mayor altura, mayor **energía potencial**. Al ir deslizando cuesta abajo, la energía potencial se va transformando en **energía cinética**. (¡Esta es la parte divertida!). Pero llevar el trineo hasta arriba requiere un trabajo: hay que empujar con fuerza a lo largo de una distancia considerable.

Los físicos han estudiado cómo están relacionadas magnitudes como fuerza y velocidad. Aunque está claro que aumentando la fuerza en la dirección del movimiento haremos crecer la velocidad, hay mucho más que eso. Los físicos simplifican el proceso identificando unas pocas magnitudes clave para describirlo. En esta sección discutiremos tres de ellas: trabajo, impulso y momentos.

Empezaremos cuantificando el trabajo. Si empujamos el trineo cuesta arriba estamos efectuando trabajo. Pero ¿cómo se puede medir el trabajo? Ciertamente, si empujamos un peso doble (hacemos el doble de fuerza) estaremos haciendo doble cantidad de trabajo. Parece razonable que el trabajo sea directamente proporcional a la fuerza ejercida. Análogamen-

te, si lo empujamos una distancia doble, haremos el doble de trabajo, así que el trabajo es también directamente proporcional a la distancia sobre la que se ejerce la fuerza.

En vista de esas observaciones, para cualquier fuerza constante  $F$  aplicada a lo largo de una distancia  $d$ , definimos el **trabajo**  $W$  realizado como

$$W = Fd.$$

Por desgracia, las fuerzas no suelen ser constantes. En un cohete que va consumiendo el combustible en vuelo, la masa no es constante, así que tampoco lo es la fuerza ejercida por la gravedad.

Podemos extender la noción de trabajo al caso de una fuerza no constante  $f(x)$ , aplicada a lo largo del intervalo  $[a, b]$ , como sigue. Dividimos  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos iguales, cada uno de anchura  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , y consideramos el trabajo efectuado en cada subintervalo. Si  $\Delta x$  es pequeño, la fuerza  $f(x)$  aplicada en el subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  puede aproximarse por la fuerza constante  $f(c_i)$  para algún punto  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . El trabajo realizado al mover el objeto a lo largo de ese subintervalo es aproximadamente  $F(c_i) \Delta x$ . El trabajo total  $W$  se puede aproximar por

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x.$$

Reconocemos aquí una suma de Riemann y cuando  $n$  crece las sumas de Riemann tienden hacia el valor del trabajo realizado. Tomando el límite  $n \rightarrow \infty$  se obtiene

**Trabajo**

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x = \int_a^b F(x) dx. \quad (6.1)$$

Adoptamos (6.1) como definición del trabajo.

Habrás experimentado que cuanto más se comprime (o se estira) un muelle de su posición natural de equilibrio, más fuerza hay que hacer. Según la **ley de Hooke**, la fuerza requerida para mantener un muelle en una cierta posición es proporcional a la distancia comprimida (o estirada).

Esto es, si  $x$  denota la distancia que se ha comprimido (o estirado) el muelle a partir de su posición natural, la fuerza  $F(x)$  ejercida por el muelle viene dada por

$$F(x) = kx \quad (6.2)$$

para una cierta constante  $k$  (la **constante del muelle**).

### Ejemplo 6.1 Trabajo realizado al estirar un muelle

Mantener un muelle separado  $\frac{1}{4}$  pies de su posición natural exige una fuerza de 3 libras (figura 5.49). Calcular el trabajo realizado al estirarlo 6 pie a partir de su posición natural.

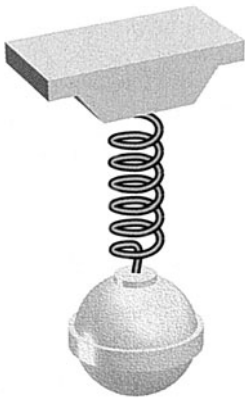
**Solución** Por la ley de Hooke,

$$3 = F\left(\frac{1}{4}\right) = k\left(\frac{1}{4}\right),$$

así que  $k = 12$  y  $F(x) = 12x$ . Por (6.1), el trabajo realizado al estirar el muelle (1/2 pie) es

$$W = \int_0^{1/2} F(x) dx = \int_0^{1/2} 12x dx = \frac{3}{2} \text{ libras-pies.}$$

En este caso, nótese que el estiramiento transfiere energía potencial al muelle (si después se suelta el muelle, volverá hacia su posición de equilibrio convirtiendo la energía potencial en energía cinética).



**Figura 5.49**

Muelle estirado.

**Ejemplo 6.2****Trabajo realizado por un levantador de pesas**

Un atleta levanta unas pesas de 200 libras a una altura de 3 pies. (a) ¿Cuánto trabajo ha hecho? (b) Calcular, asimismo, el trabajo realizado por el levantador si sube el peso desde el suelo hasta 4 pies y lo vuelve a colocar en el suelo.

**Solución** (a) Como aquí la fuerza (el peso) es constante, simplemente se tiene

$$W = Fd = 200 \times 3 = 600 \text{ libras-pies.}$$



(b) Puede parecer extraño, pero puesto que las pesas vuelven a la posición inicial, la distancia neta que han sido desplazadas es cero y el trabajo total realizado es cero. Por supuesto, al levantador le parece haber hecho un gran «trabajo», pero es aquí donde la noción matemática de trabajo difiere del significado usual de esa palabra. Tal como lo hemos definido, el trabajo da cuenta del cambio en la energía del objeto. Como las pesas tienen la misma energía cinética y la misma energía potencial que al comienzo, el trabajo total es cero.

En el próximo ejemplo, tanto la fuerza como la distancia son variables. Eso plantea algunos retos. Necesitaremos aproximar el trabajo y reconocer a continuación la integral definida que este proceso de aproximación genera.

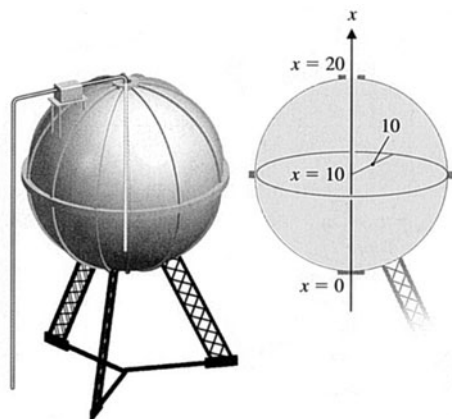
**Ejemplo 6.3****Trabajo requerido para bombear agua de un depósito**

Un depósito esférico de 10 pies de diámetro está lleno de agua. Calcular el trabajo requerido para bombear el agua por un orificio situado en el punto más alto del depósito.

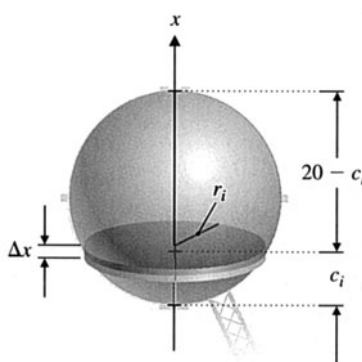
**Solución** La fórmula simple  $W = Fd$  no es aplicable aquí por varias razones. La más obvia es que la distancia que debe ascender el agua de cada parte del depósito no es constante (el agua del fondo debe subir toda la altura del depósito, pero no así la que está cerca del orificio). Para visualizar la situación, partimos el agua en  $n$  capas, cada una de profundidad  $\Delta x = \frac{20}{n}$ . Sea  $x$  la distancia vertical medida desde el fondo del depósito (figura 5.50a). El depósito completo corresponde al intervalo  $0 \leq x \leq 20$ , que partimos con

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 20,$$

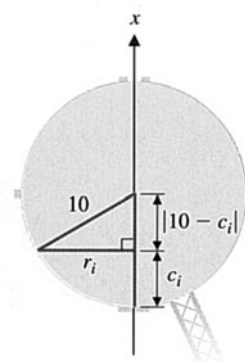
donde  $x_i - x_{i-1} = \Delta x$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Eso divide el depósito en  $n$  capas, cada una correspondiendo a un subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  (figura 5.50b). El agua de la capa  $[x_{i-1}, x_i]$ , que se puede aproximar por un cilindro de altura  $\Delta x$ , debe subir una distancia  $20 - c_i$  aproximadamente, donde  $c_i$  es algún punto  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . (Puede pensar que  $c_i$  es el punto medio del subintervalo, ya que la elección de  $c_i$  es irrelevante). La figura 5.50b muestra que el radio de la  $i$ -ésima capa depende de  $x$ . En la figura 5.50c (que muestra una sección del depósito)



**Figura 5.50a**  
Depósito esférico.



**Figura 5.50b**  
La  $i$ -ésima capa de agua.



**Figura 5.50c**  
Sección del depósito.



vemos que el radio  $r_i$  correspondiente a una profundidad  $x = c_i$  es la base de un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 y altura  $|10 - c_i|$ . Por el teorema de Pitágoras,

$$(10 - c_i)^2 + r_i^2 = 10^2.$$

Despejando  $r_i^2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 10^2 - (10 - c_i)^2 = 100 - (100 - 20c_i + c_i^2) \\ &= 20c_i - c_i^2. \end{aligned}$$

Por tanto, la fuerza  $F_i$  requerida para mover la capa  $i$ -ésima es simplemente su peso. Como la densidad del agua es 62,4 lb/pie<sup>3</sup>, se tiene

$$\begin{aligned} F_i &\approx (\text{Volumen de una capa cilíndrica})(\text{peso del agua por unidad de volumen}) \\ &= (\pi r_i^2 h)(62,4 \text{ lb/pie}^3) \\ &= 62,4 \pi (20c_i - c_i^2) \Delta x. \end{aligned}$$

El trabajo necesario para bombear el agua de la  $i$ -ésima capa es aproximadamente

$$\begin{aligned} W_i &\approx (\text{Fuerza})(\text{distancia}) \\ &= 62,4\pi(20c_i - c_i^2) \Delta x (20 - c_i) \\ &= 62,4\pi c_i(20 - c_i)^2 \Delta x. \end{aligned}$$

El trabajo necesario para bombear toda el agua es la suma del trabajo requerido por todas las capas:

$$W \approx \sum_{i=1}^n 62,4 \pi c_i(20 - c_i)^2 \Delta x.$$

Finalmente, tomando el límite  $n \rightarrow \infty$  se obtiene el trabajo exacto, que reconocemos como una integral definida:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 62,4 \pi c_i(20 - c_i)^2 \Delta x = \int_0^{20} 62,4\pi x(20 - x)^2 dx \\ &= 62,4 \pi \int_0^{20} (400x - 40x^2 + x^3) dx \\ &= 62,4 \pi \left[ 400 \frac{x^2}{2} - 40 \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^{20} \\ &= 62,4 \pi \left( \frac{40.000}{3} \right) \approx 2,61 \times 10^6 \text{ pies-libras.} \end{aligned}$$

El **impulso** es una magnitud física estrechamente vinculada al trabajo. En lugar de relacionar fuerza y distancia para dar cuenta del cambio en la energía, el impulso relaciona fuerza y tiempo para dar cuenta del cambio en la velocidad. Por ahora, supongamos que una fuerza constante  $F$  se aplica a un objeto entre los instantes  $t = 0$  y  $t = T$ . Si  $x(t)$  denota la posición del objeto en el instante  $t$ , la segunda ley de Newton afirma que  $F = ma = mx''(t)$ . Integrando esta ecuación en  $t$ , obtenemos

$$\int_0^T F dt = m \int_0^T x''(t) dt,$$

o sea,

$$F(T - 0) = m[x'(T) - x'(0)].$$



Recordando que  $x'(t)$  es la velocidad  $v(t)$ , eso significa que

$$FT = m[v(T) - v(0)]$$

o sea,  $FT = m \Delta v$ , donde  $\Delta v = v(T) - v(0)$  es el cambio en la velocidad. La cantidad  $FT$  es el **impulso**,  $mv(t)$  el **momento** en el instante  $t$  y la ecuación que relaciona el impulso con el cambio en la velocidad se conoce como **ecuación momento-impulso**.

Hemos definido el impulso para una fuerza constante. Falta generalizar esa noción al caso de una fuerza variable. Piense un poco en ello e intente dar una definición apropiada.

Definimos el **impulso**  $J$  de una fuerza  $F(t)$  que actúa durante el intervalo de tiempo  $[a, b]$  como

$$\text{Impulso} \quad J = \int_a^b F(t) dt.$$

Adviértanse las analogías y diferencias entre trabajo e impulso. Dejamos como ejercicio la deducción de la integral del impulso para una fuerza variable. La ecuación momento-impulso también se generaliza al caso de una fuerza no constante:

Ecuación impulso-momento

$$J = m[v(b) - v(a)].$$

### Ejemplo 6.4

### Estimación del impulso de una pelota de béisbol

Una pelota de béisbol viaja a 130 pies/s (unos 90 mph) y colisiona con un bate. Los siguientes datos (adaptados de *The Physics of Baseball*, de Robert Adair) muestran la fuerza ejercida por el bate sobre la pelota a intervalos de 0,0001 segundos:

$t$ (s)	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007
$F(t)$ (lb)	0	1.250	4.250	7.500	9.000	5.500	1.250	0

Estimar el impulso del bate sobre la pelota y, usando  $m = 0,01$  slugs, la velocidad de la pelota tras el impacto.

**Solución** En este caso, el impulso viene dado por  $\int_0^{0,0007} F(t) dt$ . No podemos evaluar esta integral, ya que desconocemos la función fuerza  $F(t)$ . Sólo conocemos una tabla de valores de  $F(t)$ , así que lo único que podemos hacer es aproximar la integral numéricamente (por ejemplo, mediante la regla de Simpson). La regla de Simpson requiere que  $n + 1$ , el número de puntos de la partición, sea impar. Por tanto, exige un número par  $n$  de subintervalos (¡piénselo!).

Usando  $n = 8$  y añadiendo un valor 0 de la función en  $t = 0,0008$  (¿por qué es correcto esto?), la regla de Simpson da

$$\begin{aligned} J &\approx [0 + 4(1.250) + 2(4.250) + 4(7.500) + 2(9.000) + 4(5.500) \\ &\quad + 2(1.250) + 4(0) + 0] \frac{0,0001}{3} \\ &\approx 2,866. \end{aligned}$$

En este caso, la ecuación momento-impulso  $J = m \Delta v$  es  $2,866 = 0,01 \Delta v$ , luego  $\Delta v = 286,6$  pies/s. Como la velocidad al comienzo era de 130 pies/s en una dirección y termina viajando en dirección opuesta, su velocidad final es de 156,6 pies/s.

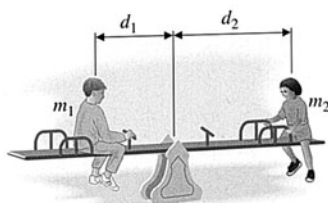


Figura 5.51a

Dos masas en equilibrio.

Al igual que el trabajo, el concepto de **primer momento** tiene como ingredientes la fuerza y la distancia. Los momentos se utilizan para resolver problemas de equilibrio y de rotación. Empezamos con un problema sencillo: dos niños en un balancín. Supongamos que el niño de la izquierda en la figura 5.51a pesa más que el de la derecha. Si los dos niños se

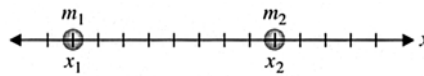
sientan a la misma distancia del punto de apoyo, el lado izquierdo bajará hasta el suelo y el niño más ligero será levantado.

También sabemos que los dos niños pueden balancearse si el más pesado se sienta más cerca del punto de apoyo. Es decir, el equilibrio viene determinado por el peso (la fuerza) y por la distancia al punto de apoyo.

La situación es fácil de describir matemáticamente. Si los niños tienen masas  $m_1$  y  $m_2$  y se sientan a distancias  $d_1$  y  $d_2$ , respectivamente, del punto de apoyo, se balancearán en equilibrio si, y sólo si,

$$m_1 d_1 = m_2 d_2. \quad (6.3)$$

Reformulando el problema, consideramos dos objetos, de masas  $m_1$  y  $m_2$ , situados en las posiciones  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente, con  $x_1 < x_2$ . Vamos a tratarlos como **masas puntuales**, es decir, como si la masa estuviera concentrada en un punto (figura 5.51b).



**Figura 5.51b**

Dos masas puntuales.

Supongamos que queremos hallar el **centro de masa**  $\bar{x}$ , esto es, el lugar donde hay que colocar el punto de apoyo de un balancín para que esos dos objetos se balanceen. Según la ecuación del equilibrio (6.3), ha de ser  $m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$ . Despejando  $\bar{x}$ , se obtiene

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

El denominador en esta expresión es la masa total del «sistema» (la masa total de los dos objetos). El numerador se llama **primer momento** del sistema.

Más en general, para un sistema de  $n$  masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  localizadas en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , respectivamente, el centro de masas  $\bar{x}$  viene dado por el primer momento dividido entre la masa total:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Ahora supongamos que, en lugar de la masa y el centro de masas de un sistema de objetos aislados, queremos hallar la masa y el centro de masa de una varilla de densidad variable que se extiende desde  $x = a$  hasta  $x = b$ . La función densidad  $\rho(x)$ , conocida, se mide en unidades de masa por unidad de longitud. En el caso más simple posible, en el que la densidad es una constante  $\rho$ , la masa de la varilla es  $m = \rho L$ , siendo  $L = b - a$  su longitud.

Si la densidad es variable a lo largo de la varilla, no está claro cómo calcular su masa, así que intentamos aproximar su valor. Como otras veces, empezamos partiendo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud,  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . En cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  la masa es aproximadamente  $\rho(c_i) \Delta x$ , donde  $c_i$  es algún punto del subintervalo. Así, pues, la masa total se puede aproximar por

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(c_i) \Delta x.$$

Esto es una suma de Riemann que tenderá hacia el valor de la masa total cuando  $n \rightarrow \infty$ . Tomando el límite  $n \rightarrow \infty$  obtenemos

**Masa**

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(c_i) \Delta x = \int_a^b \rho(x) dx. \quad (6.4)$$

**Ejemplo 6.5** Masa de un bate de béisbol

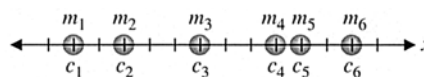
Un bate de béisbol se extiende desde  $x = 0$  hasta  $x = 30$  (pulgadas) con densidad  $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2$  slugs por pulgada. La densidad tiene en cuenta que el bate tiene forma de cono alargado. Calcular la masa del bate.

**Solución** Por (6.4),

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{30} \left( \frac{1}{46} + \frac{x}{690} \right)^2 dx \\ &= \frac{690}{3} \left( \frac{1}{46} + \frac{x}{690} \right)^3 \Big|_0^{30} = \frac{690}{3} \left[ \left( \frac{1}{46} + \frac{30}{690} \right)^3 - \left( \frac{1}{46} \right)^3 \right] \\ &\approx 6,144 \times 10^{-2} \text{ slugs.} \end{aligned}$$

Para entender mejor el resultado, podemos calcular el peso (en onzas), multiplicando la masa por  $32 \cdot 16$ . Resulta un peso de 31,5 onzas.

Para calcular el primer momento de un objeto de densidad variable  $\rho(x)$  que se extiende desde  $x = a$  hasta  $x = b$ , dividimos otra vez  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos. Por el argumento anterior, la masa del  $i$ -ésimo trozo es aproximadamente  $\rho(c_i) \Delta x$ , para cualquier elección de  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Ahora representamos el  $i$ -ésimo trozo del objeto por una masa puntual  $m_i = \rho(c_i) \Delta x$  localizada en  $x = c_i$ . Y pensamos el objeto como aproximado por  $n$  masas puntuales distintas, como indica la figura 5.52.



**Figura 5.52**

Seis masas puntuales.

El primer momento  $M_n$  de este sistema aproximante es

$$\begin{aligned} M_n &= [\rho(c_1) \Delta x]c_1 + [\rho(c_2) \Delta x]c_2 + \dots + [\rho(c_n) \Delta x]c_n \\ &= [c_1\rho(c_1) + c_2\rho(c_2) + \dots + c_n\rho(c_n)] \Delta x = \sum_{i=1}^n c_i\rho(c_i) \Delta x. \end{aligned}$$

Tomando el límite  $n \rightarrow \infty$ , la suma tiende al primer momento

**Primer momento**

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i \rho(c_i) \Delta x = \int_a^b x\rho(x) dx. \quad (6.5)$$

El centro de masa del objeto viene dado por

**Centro de masa**

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}. \quad (6.6)$$

**Ejemplo 6.6** Centro de masa («punto dulce») de un bate de béisbol

Hallar el centro de masa del bate del ejemplo 6.5

**Solución** Por (6.5), el primer momento es

$$M = \int_0^{30} x \left( \frac{1}{46} + \frac{x}{690} \right)^2 dx = \left[ \frac{x^2}{4232} + \frac{x^3}{47.610} + \frac{x^4}{1.904.400} \right]_0^{30} \approx 1,205.$$

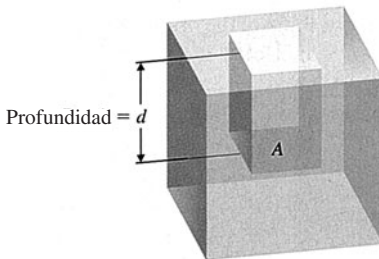
Ya hemos hallado la masa,  $m \approx 6,144 \times 10^{-2}$  slugs, así que de (6.6) se sigue que el centro de masas del bate viene dado por

$$\bar{x} = \frac{M}{m} \approx \frac{1,205}{6,144 \times 10^{-2}} \approx 19,6 \text{ pulgadas.}$$

En un bate de béisbol el centro de masa es candidato a ser el llamado «punto dulce», o sea, el punto óptimo para batear.

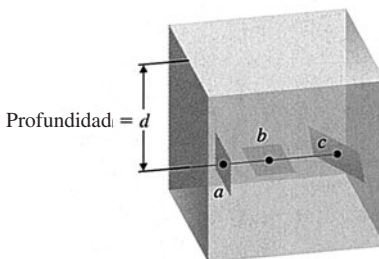


La presa Hoover.



**Figura 5.53**

Una placa de área  $A$  sumergida a profundidad  $d$ .



**Figura 5.54**

A una profundidad dada, la presión es la misma para todas las orientaciones.

La última aplicación de la integración considerada en esta sección va a ser la fuerza hidrostática. ¿Qué fuerza debe soportar la presa de un embalse?

Como de costumbre, resolvemos antes un problema más simple. La fuerza ejercida por el agua sobre una placa rectangular horizontal sumergida en ella (la **fuerza hidrostática**) es simplemente el peso del agua situada por encima de la placa. Es igual al producto del volumen de agua sobre la placa por la densidad del agua ( $62,4 \text{ lb/pies}^3$ ). Si el área de la placa es  $A \text{ pies}^2$  y está  $d \text{ pies}$  por debajo del nivel de la superficie (figura 5.53), la fuerza sobre la placa es

$$F = 62,4 Ad.$$

El principio de Pascal establece que la presión a una profundidad  $d$  es la misma en todas las direcciones. En consecuencia, si se sumerge una placa plana en un fluido de densidad de peso  $\rho$ , la presión sobre un lado de la placa es  $\rho \cdot d$  en cualquier punto. En particular, es irrelevante si la placa se sumerge horizontal, vertical o de cualquier otro modo (figura 5.54).

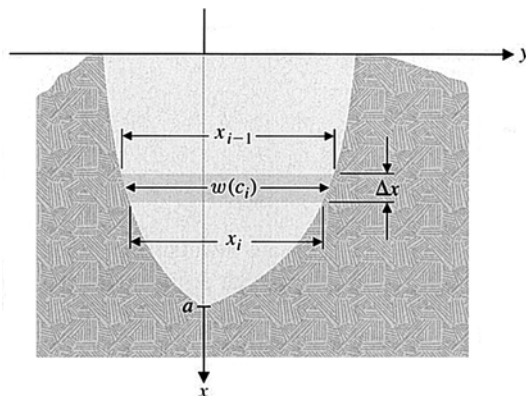
Consideremos ahora un muro vertical (una presa) que cierra un embalse. Conviene orientar el eje  $x$  vertical con  $x = 0$  en la superficie del agua y el fondo en  $x = a > 0$  (figura 5.55). Con ello,  $x$  mide la profundidad de una sección de la presa. Sea  $w(x)$  la anchura del muro a profundidad  $x$  (todas las longitudes medidas en pies).

Partimos el intervalo  $[0, a]$  en  $n$  subintervalos de igual anchura  $\Delta x = \frac{a}{n}$ . Eso parte el muro en  $n$  franjas de anchura  $\Delta x$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , el área de la  $i$ -ésima franja es aproximadamente  $w(c_i) \Delta x$ , donde  $c_i$  es algún punto del subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Además, la profundidad en todo punto de esa franja es aproximadamente  $c_i$ . Así, pues, podemos aproximar la fuerza  $F_i$  que actúa sobre esa franja de la presa mediante el peso del agua situada sobre una placa del tamaño de esa porción, pero orientada horizontalmente:

$$F_i \approx \underbrace{62,4}_{\text{densidad de peso}} \underbrace{w(c_i)}_{\text{longitud}} \underbrace{\Delta x}_{\text{anchura}} \underbrace{c_i}_{\text{profundidad}} = 62,4 c_i w(c_i) \Delta x.$$

Sumando las fuerzas actuantes sobre cada franja, podemos aproximar la fuerza total ejercida sobre la presa por

$$F \approx \sum_{i=1}^n 62,4 c_i w(c_i) \Delta x.$$

**Figura 5.55**

Fuerza que actúa sobre una presa.

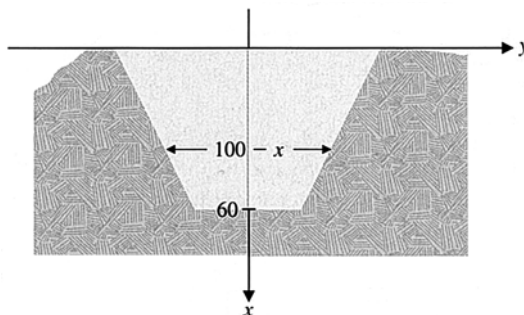
Tomando el límite  $n \rightarrow \infty$ , las sumas de Riemann tienden a la fuerza hidrostática total sobre la presa:

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 62,4 c_i w(c_i) \Delta x = \int_0^a 62,4 x w(x) dx, \quad (6.7)$$

donde reconocemos la integral como límite de sumas de Riemann.

**Ejemplo 6.7****Fuerza hidrostática sobre una presa**

Una presa tiene la forma de un trapecio de 60 pies de altura. La anchura en su parte superior es 100 pies y en el fondo 40 pies (figura 5.56). Hallar la fuerza hidrostática máxima que la presa deberá soportar. Calcular la fuerza hidrostática si una sequía hace descender el nivel del agua 10 pies.

**Figura 5.56**

Presa en forma de trapecio.

**Solución** La anchura es una función lineal de la profundidad, con  $w(0) = 100$  y  $w(60) = 40$ . La pendiente es  $\frac{60}{-60} = -1$ , así que  $w(x) = 100 - x$ . Según (6.7), la fuerza hidrostática es

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^{60} \underbrace{62,4}_{\text{densidad de peso}} \underbrace{x}_{\text{profundidad}} \underbrace{(100 - x)}_{\text{anchura}} dx \\
 &= 3.120x^2 - 62,4 \frac{x^3}{3} \bigg|_0^{60} = 6.739.200 \text{ lb.}
 \end{aligned}$$





Si el nivel del agua desciende 10 pies, la anchura de la presa al nivel de la superficie sería 90 pies. Bajando el origen 10 pies, la nueva función anchura sería tal que  $w(0) = 90$  y  $w(50) = 40$ . La pendiente es todavía  $-1$ , así que la anchura viene dada por  $w(x) = 90 - x$ . Por (6.7), la fuerza hidrostática es ahora

$$F = \int_0^{50} \underbrace{62,4}_{\text{densidad de peso}} \underbrace{x}_{\text{profundidad}} \underbrace{(90-x)}_{\text{anchura}} dx$$

$$= 2.808x^2 - 62,4 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{50} = 4.420.000 \text{ lb.}$$

Representa una reducción del 34% en la fuerza hidrostática.

## EJERCICIOS 5.6

-  Identificar los ingredientes en la definición de trabajo, impulso y primer momento (por ejemplo, fuerza y distancia) y en qué cálculos se utiliza (por ejemplo, cambio en la velocidad).
-  El centro de masa no siempre es el punto que deja la mitad de la masa a cada lado. Dar un ejemplo con más de la mitad de la masa a un lado (véanse los ejemplos 6.5 y 6.6) y explicar por qué el objeto se balancea respecto del centro de masa.
-  Los jugadores acostumbrados a atrapar una pelota llevan hacia atrás su mano de forma instintiva. Para atraparla, hay que aplicarle un impulso igual a su masa multiplicada por su velocidad. Moviéndose hacia atrás la mano consiguen aumentar el tiempo de que disponen para frenar la pelota. Explicar, usando la ecuación momento-impulso, por qué eso reduce la fuerza media sobre la mano.
-  Una pelota de tenis se dirige hacia usted a 100 mph. Tras golpearla se aleja a 100 mph. El trabajo mide el cambio en la energía. Explicar por qué la raqueta ha realizado trabajo aunque la pelota tiene la misma rapidez que antes del golpe.
- Una fuerza de 5 libras estira un muelle 4 pulgadas. Calcular el trabajo realizado al estirar el muelle 6 pulgadas a partir de su posición natural.
- Una fuerza de 10 libras estira un muelle 2 pulgadas. Calcular el trabajo realizado al estirar el muelle 3 pulgadas a partir de su posición natural.
- Una fuerza de 20 libras estira un muelle  $\frac{1}{2}$  pie. Calcular el trabajo realizado al estirar el muelle 1 pie a partir de su posición natural.
- Una fuerza de 12 libras estira un muelle  $\frac{1}{3}$  pie. Calcular el trabajo realizado al estirar el muelle 4 pulgadas a partir de su posición natural.
- Un atleta levanta 250 libras una altura de 20 pulgadas. Hallar el trabajo realizado (en libras-pies).
- Un luchador levanta a su oponente, de 300 libras, sobre su cabeza hasta una altura de 6 pies. Hallar el trabajo realizado (en libras-pies).
- Una persona levanta un sillón de 100 libras hasta una altura de 3 pies. Hallar el trabajo realizado.
- Una carretilla elevadora levanta 2.000 libras de ladrillos a una altura de 8 pies. Calcular el trabajo realizado.
- Un cohete lleno de fuel pesa 10.000 libras en el momento de su lanzamiento. Conforme gana altura, pierde peso al ir consumiendo el combustible. Pierde 1 libra de combustible cada 15 metros de ascenso. Explicar por qué el trabajo realizado para llevar el cohete hasta una altura de 30.000 pies es  $\int_0^{30.000} (10.000 - x/15) dx$  y calcular la integral.
- Supongamos que el cohete del ejercicio 13 pesa 8.000 libras en el momento del despegue y consume 1 libra de combustible cada 10 metros de ascenso. Hallar el trabajo necesario para elevarlo hasta 10.000 pies de altura.
- Un motor de automóvil ejerce una fuerza de  $800x(1-x)$  libras cuando el automóvil está en la posición  $x$  (millas), con  $0 \leq x \leq 1$ . Calcular el trabajo realizado.
- La potencia mide el trabajo por unidad de tiempo. Para la situación del ejercicio 15, explicar por qué no es igual a  $800x(1-x)$ . Si el automóvil tarda 15 segundos en recorrer la milla, calcular la potencia media en caballos de vapor (1 caballo de vapor = 550 libras-pies/s).
- Un depósito esférico de 50 pies de radio tiene su punto más bajo a una altura de 200 pies sobre el suelo. Calcular el trabajo necesario para llenarlo de agua.
- Calcular el trabajo requerido para llenar hasta la mitad el depósito del ejercicio 17.
- Calcular el trabajo realizado al extraer la mitad del agua del depósito del ejemplo 6.3 por su punto más alto.



20. Un depósito tiene la forma de un cono circular recto de 10 pies de altura y su base tiene 5 pies de radio, con su vértice en el suelo (piense en un cucurucho de helado). Si el depósito está lleno de agua, hallar el trabajo necesario para bombear toda el agua por la parte superior.
21. En el ejemplo 6.4, supongamos que la pelota de béisbol se movía a 100 pies/s. La fuerza ejercida sobre ella por el bate va cambiando como indica la tabla. Estimar el impulso y la velocidad de la pelota tras el impacto.

$t$ (s)	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004
$F$ (lb)	0	1.000	2.100	4.000	5.000

$t$ (s)	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008
$F$ (lb)	5.200	2.500	1.000	0

22. En el ejercicio 21 supongamos que la pelota iba a 85 pies/s. La fuerza ejercida por el bate cambia según indica la tabla. Estimar el impulso y la velocidad de la pelota tras el impacto.

$t$ (s)	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004
$F$ (lb)	0	600	1.200	2.000	2.500

$t$ (s)	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008
$F$ (lb)	3.000	2.500	1.100	300

23. Se realiza una prueba de colisión con un vehículo. La tabla muestra la fuerza sobre el muro. Estimar el impulso y la velocidad del vehículo (tomar  $m = 200$ ).

$t$ (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$F$ (lb)	0	8.000	16.000	24.000	15.000	9.000	0

24. Dos jugadores de rugby colisionan. La tabla muestra la fuerza ejercida por el defensor sobre el atacante. Estimar el impulso. Si el atacante tiene  $m = 7$  y velocidad 29 pies/s antes de la colisión, ¿consigue pararle el defensor?

$t$ (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$F$ (lb)	0	300	500	400	250	150

$t$ (s)	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$F$ (lb)	100	100	80	40	0

25. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto con densidad  $\rho(x) = \frac{x}{6} + 2$  kg/m,  $0 \leq x \leq 6$ . Explicar brevemente, en términos de la función densidad, por qué el centro de masa no está en  $x = 3$ .

26. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto con densidad  $\rho(x) = 3 - \frac{x}{6}$  kg/m,  $0 \leq x \leq 6$ . Explicar brevemente, en términos de la función densidad, por qué el centro de masa no está en  $x = 3$ .
27. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto con densidad  $\rho(x) = 4 + \frac{x^2}{4}$  kg/m,  $-2 \leq x \leq 2$ .
28. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto con densidad  $\rho(x) = 4 - \sin \frac{\pi x}{4}$  kg/m,  $0 \leq x \leq 4$ .
29. Calcular el peso en onzas de un objeto que se extiende desde  $x = -3$  hasta  $x = 27$  con densidad  $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x+3}{690}\right)^2$  slugs/pulg.
30. Calcular el peso en onzas de un objeto que se extiende desde  $x = 0$  hasta  $x = 32$  con densidad  $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x+3}{690}\right)^2$  slugs/pulg.
31. Hallar el centro de masa del objeto del ejercicio 29. Ese objeto sirve de modelo para el bate de béisbol del ejemplo 6.5 «acortado» (sujetado 3 pulgadas más allá de lo normal). Comparar las masas y los centros de masa de ambos bates.
32. Calcular el centro de masa del objeto del ejercicio 30. Este objeto sirve de modelo para un bate de béisbol 2 pulgadas más largo que el del ejemplo 6.5. Comparar las masas y los centros de masa de ambos bates.
33. Comparar la masa y el peso en onzas y el centro de masa de un objeto que se extiende de  $x = 0$  a  $x = 30$  con densidad  $\rho(x) = 0,00468 \left(\frac{3}{16} + \frac{x}{60}\right)$  slugs por pulgada.
34. El objeto del ejercicio 33 sirve de modelo para un bate de béisbol de aluminio (hueco y con un grosor de  $\frac{1}{4}$  pulgada). Comparar su masa y su centro de masa con el del bate de madera del ejemplo 6.5. Los expertos afirman que es más fácil batear una pelota con pequeño valor de  $x$  con un bate de aluminio. Explicar por qué los cálculos apuntan a que es cierto.



35. La figura muestra un dibujo esquemático de un cohete. Supongamos que mide 3 unidades en sentido vertical y 6 en sentido horizontal. Calcular, mediante geometría elemental, el área de cada una de las tres regiones del esquema. Suponiendo densidad  $\rho$  constante, localizar la coordenada  $x$  del centro de masa de cada región. (Ayuda: La primera región se extiende desde  $x = 0$  hasta  $x = 1$  con densidad  $\rho(3 - 2x)$  y la tercera desde  $x = 5$  hasta  $x = 6$  con densidad  $\rho(6 - x)$ ).
36. En el ejercicio 35, sustituir el cohete por tres masas puntuales, una por cada región. Tomar como masa de cada una de ellas el área de la región y situarla en la coordenada  $x$  del centro de masa de la región. Hallar el centro de masas de ese sistema de

tres masas puntuales. [Los cohetes se diseñan con las aletas inferiores grandes para que el centro de masa esté cerca de la base (a la izquierda, en la figura). Eso mejora la estabilidad del cohete].

37. Una presa tiene la forma de un trapecio de 60 pies de altura. La anchura superior es 40 pies y la inferior 100 pies. Hallar la máxima fuerza hidrostática que debe soportar. Explicar por qué la fuerza es mucho mayor que la del ejemplo 6.7.
38. Hallar la fuerza hidrostática en el ejercicio 37 si una sequía hace descender el nivel del agua 10 pies.
39. En un acuario hay una ventana circular de observación de radio 5 pies. El centro de la ventana está 40 pies bajo el nivel de la superficie del agua. Calcular la fuerza hidrostática sobre esa ventana.
40. Una ventana de observación rectangular, de 40 pies de anchura, se extiende desde la superficie del agua hasta una profundidad de 10 pies. Hallar la fuerza hidrostática sobre esa ventana.
41. La ventana de la cámara de un robot submarino es circular de 3 pulgadas de radio. ¿Qué fuerza hidrostática deberá soportar si se sumerge a 1.000 pies de profundidad?
42. Un submarinista baja a 60 pies de profundidad con un reloj cuyo cristal, circular, mide 1 pulgada de radio. ¿Cuánta presión debe soportar el cristal?
43. Hemos mencionado en el texto que el trabajo mide cambios en la energía. Por ejemplo, si un saltador de pértiga de 200 libras se eleva hasta 20 pies de altura, el trabajo realizado por la pértiga, 4.000 libras-pies, da al saltador una gran energía potencial. Para ver qué significa esto, calcular la velocidad  $v$  del saltador cuando cae al suelo. Probar que su energía cinética en el momento del impacto, dada por  $\frac{1}{2}mv^2$  ( $m = 200/32$ ), es igual a 4.000 libras-pies. Esto ilustra el concepto de conservación de la energía.
44. Calcular la velocidad del saltador del ejercicio 43 cuando está a una altura de 10 pies. Probar que la suma de la energía potencial ( $32mh$ ) y la energía cinética ( $\frac{1}{2}mv^2$ ) es igual a 4.000 libras-pies.
45. Calcular, en caballos de vapor, la potencia necesaria para levantar un objeto de 100 toneladas (una ballena azul, por ejemplo) a 20 mph (1 caballo de vapor = 550 libras-pies/s). (Las ballenas azules nadan de modo tan eficiente que pueden mantener esa velocidad con sólo 60-70 caballos de vapor).
46. Para una fuerza constante  $F$  ejercida durante un tiempo  $t$ , el impulso se define como  $F \cdot t$ . Para una fuerza variable  $F(t)$ , deducir la fórmula del impulso  $J = \int_a^b F(t) dt$ .
47. El primer momento de un sólido de densidad  $\rho(x)$  es  $\int_a^b x\rho(x) dx$ . El segundo momento respecto del eje  $y$ ,  $\int_a^b x^2\rho(x) dx$ , también es importante en las aplicaciones. Cuanto mayor es, más cuesta hacer girar el sólido en torno al eje  $y$ . Calcular los segundos momentos de los bates del ejemplo 6.5 y del ejercicio 29. Si un

bate se sujeta más corto, es más fácil de manejar y de controlar. Calcular el porcentaje de reducción en el segundo momento si se sujeta acortando 3 pulgadas.

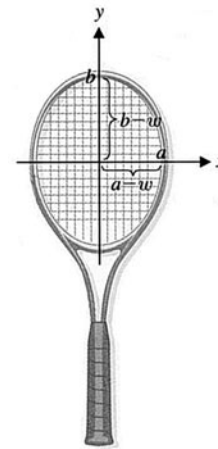
48. Ocasionalmente, los jugadores de béisbol «acorchan» ilegalmente sus bates, haciendo una perforación en la madera y rellenándola con corcho. La ventaja es que el segundo momento se reduce mucho. Como modelo de este hecho, consideremos el bate del ejemplo 6.5 y cambiemos la densidad a

$$\rho(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 28 \\ \left(\frac{1}{92} + \frac{x}{690}\right)^2 & \text{si } 28 < x \leq 30, \end{cases}$$

lo que representa un agujero de  $\frac{1}{4}$  de pulgada de radio y longitud 2 pulgadas. Calcular la masa y el segundo momento del bate trucado y compararlos con los del bate original.

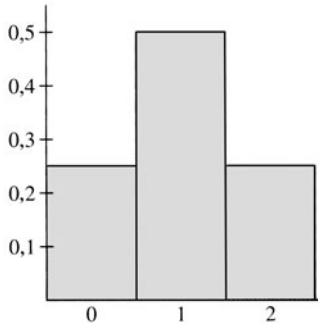
49. El segundo momento (véase ejercicio 47) de un disco de densidad  $\rho$  con la forma de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , viene dado por  $\int_{-a}^a 2\rho bx^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$ . Usar un PCS para evaluar esta integral.
50. Usar el resultado del ejercicio 49 para demostrar que el segundo momento de la raqueta de tenis de la figura es

$$M = \rho \frac{\pi}{4} [ba^3 - (b-w)(a-w)^3].$$



51. Para una raqueta de tenis, un segundo momento grande (véanse ejercicios 49 y 50) significa menos giro de la raqueta en golpes descentrados. Comparar el segundo momento de una raqueta de madera ( $a = 10$ ,  $b = 13$ ,  $w = 0,5$ ), una de tamaño medio ( $a = 10$ ,  $b = 13$ ,  $w = 0,5$ ) y una de tamaño grande ( $a = 11$ ,  $b = 14$ ,  $w = 0,5$ ).
52. Sea  $M$  el segundo momento hallado en el ejercicio 50. Probar que  $\frac{dM}{da} > 0$  y concluir que las raquetas más grandes tienen segundos momentos mayores. Probar además que  $\frac{dM}{dw} > 0$  e interpretar este resultado.

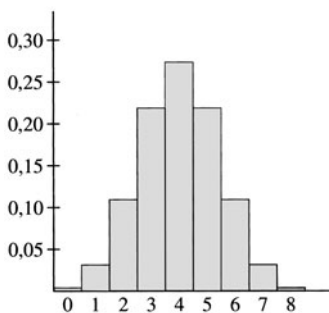
Puede sorprender que el Cálculo contribuya a la investigación de procesos aleatorios, pero es, en efecto, una aplicación muy importante de la integración. Le recomendamos que siga en sus estudios posteriores algún curso de probabilidades y Estadística.



**Figura 5.57**

Histograma para el lanzamiento de dos monedas.

Número de caras	Probabilidad
0	1/256
1	8/256
2	28/256
3	56/256
4	70/256
5	56/256
6	28/256
7	8/256
8	1/256



**Figura 5.58**

Histograma para el lanzamiento de ocho monedas.

## 5.7 PROBABILIDAD

Como tal vez haya sospechado con antelación, en las aplicaciones rara vez tenemos una función para ser analizada. Muy probablemente hay que hacer abundantes medidas y/o desarrollar una teoría detallada del proceso en cuestión. Suele ser un reto decidir cuál es la función a estudiar, sobre todo si las medidas están sujetas a errores aleatorios. El análisis de los procesos aleatorios es el objetivo de la teoría de las probabilidades y de la Estadística. En esta sección describimos brevemente la aplicación del Cálculo a la teoría de probabilidades.

Comenzamos con un ejemplo simple. Supongamos que lanzamos dos monedas, cada una de las cuales tiene un 50% de probabilidad de salir cara (A) o cruz (Z). Debido a la aleatoriedad, no podemos calcular exactamente cuántas caras saldrán en un cierto número de lanzamientos. Pero sí podemos calcular la probabilidad de los posibles resultados, que en un lanzamiento son AA, AZ, ZA y ZZ, cada uno con probabilidad  $\frac{1}{4}$ , ya que todos son igualmente probables. Esto quiere decir que, en promedio, cada uno de estos sucesos ocurrirá en una cuarta parte de los lanzamientos. En otras palabras, la **frecuencia relativa** con que cada uno de esos sucesos se producirá en un número grande de lanzamientos será  $\frac{1}{4}$  aproximadamente.

Supongamos que estamos interesados por el número de caras. Según lo dicho, la probabilidad de obtener dos caras es  $\frac{1}{4}$ , la de obtener una cara es  $\frac{2}{4}$  (ya que eso puede ocurrir de dos maneras, AZ y ZA) y la de obtener cero caras es  $\frac{1}{4}$ . Resumimos esta información en un **histograma** o diagrama de barras (figura 5.57).

Imaginemos ahora que lanzamos ocho monedas. La tabla y la figura 5.58 muestran las probabilidades y el histograma correspondiente. Nótese que la suma de todas las probabilidades es 1 (o sea, el 100%, ya que es **seguro** que alguna de las posibilidades va a ocurrir en una tirada). Ésta es una de las propiedades características de la probabilidad. Otra propiedad básica es el **principio de adición**: para calcular la probabilidad de obtener 6, 7 u 8 caras (o cualesquiera otros sucesos excluyentes) basta sumar las probabilidades de esos sucesos:

$$P(6, 7 \text{ u } 8 \text{ caras}) = \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256} = \frac{37}{256} \approx 0,144.$$

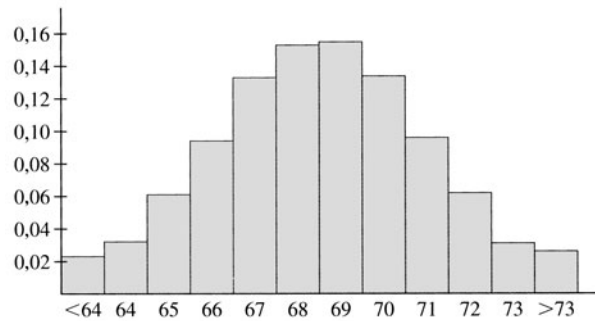
La interpretación gráfica de este cálculo resulta reveladora. En el histograma de la figura 5.58 cada barra tiene anchura 1. La probabilidad asociada con cada barra es igual al área del rectángulo. En términos gráficos:

- El área total en el histograma es 1.
- La probabilidad de obtener 6, 7 u 8 caras es igual a la suma de las áreas de los rectángulos situados sobre 6, 7 y 8.

No todos los problemas de probabilidad son tan simples como el lanzamiento de monedas. Por ejemplo, la situación es muy distinta si queremos hallar la probabilidad de que una persona, elegida al azar, mida 5'9" (5 pies y 9 pulgadas = 69 pulgadas) o 5'10". No hay teoría simple para hallar las probabilidades, porque todas las alturas no son igualmente probables. En este caso, necesitamos utilizar la correspondencia entre probabilidad y frecuencia relativa. Si tenemos un muestreo de las alturas de un gran número de personas, podemos encontrarnos con algo parecido a la siguiente tabla.

Altura	< 64"	64"	65"	66"	67"	68"	69"	70"	71"	72"	73"	>73"
Número de personas	23	32	61	94	133	153	155	134	96	62	31	26

Como el número de personas en este muestreo es 1.000, la frecuencia relativa de la altura 5'9" (69") es  $\frac{155}{1.000} = 0,155$  y la de 5'10" (70") es  $\frac{134}{1.000} = 0,134$ . Por tanto, estimamos que la probabilidad de medir 5'9" o 5'10" es  $0,155 + 0,134 = 0,289$ . La figura 5.59 muestra el histograma.

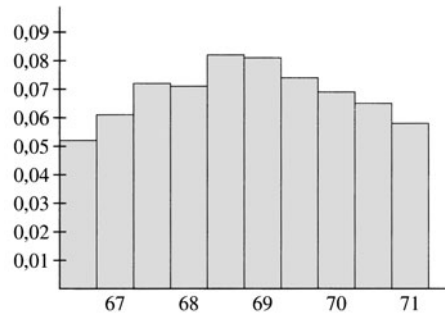
**Figura 5.59**

Histograma para la frecuencia relativa de las alturas.

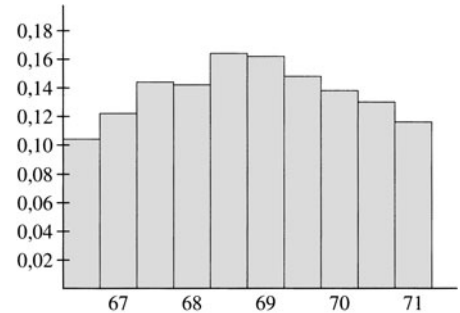
Supongamos que queremos ser más específicos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar mida  $68\frac{1}{2}$ " o  $69$ "? Para responder necesitamos descomponer nuestros datos más todavía, como en la siguiente tabla parcial:

$66\frac{1}{2}$ "	$67$ "	$67\frac{1}{2}$ "	$68$ "	$68\frac{1}{2}$ "	$69$ "	$69\frac{1}{2}$ "	$70$ "	$70\frac{1}{2}$ "	$71$ "
52	61	72	71	82	81	74	69	65	58

La probabilidad de que mida  $69$ " se puede estimar mediante la frecuencia relativa de  $69$ " en la tabla, que es  $\frac{81}{1.000} = 0,081$ . Análogamente, la probabilidad de que la persona mida  $68\frac{1}{2}$ " es aproximadamente  $\frac{82}{1.000} = 0,082$ . La probabilidad de que mida  $68\frac{1}{2}$ " o  $69$ " es, por tanto, aproximadamente  $0,081 + 0,082 = 0,163$ . La figura 5.60a muestra un histograma de esta porción de los datos.

**Figura 5.60a**

Histograma para la frecuencia relativa de las alturas.

**Figura 5.60b**

Histograma que muestra el doble de la frecuencia relativa.

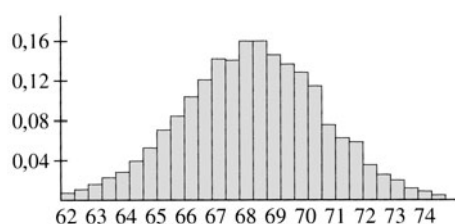
Como ahora cada barra representa un rango de media pulgada de altura, ya no podemos interpretar el área en el histograma como probabilidad (habíamos supuesto que cada barra tenía anchura 1). Para restablecer la relación entre área y probabilidad modificamos el histograma. La figura 5.60b muestra un histograma en el que el eje vertical da el doble de la frecuencia relativa. La barra en  $69$ " tiene altura  $0,162$  y anchura  $\frac{1}{2}$ . Su área,  $\frac{1}{2}(0,162) = 0,081$ , corresponde a la frecuencia relativa (o sea, la probabilidad) de la altura  $69$ ".

Podríamos seguir subdividiendo en subintervalos de altura cada vez más pequeños y modificar a la vez las alturas de manera que el área de cada rectángulo sea siempre igual a la

frecuencia relativa (probabilidad) del intervalo de alturas en cuestión. Por ejemplo, tomemos  $n$  subintervalos entre 5'8" y 5'9". Sea  $x$  la altura en pulgadas y  $f(x)$  la altura de la barra del histograma en el subintervalo que contiene a  $x$ . Sean  $x_1 = 68 + \frac{1}{n}$ ,  $x_2 = 68 + \frac{2}{n}$  y así sucesivamente, de modo que  $x_i = 68 + \frac{i}{n}$ , para  $1 \leq i \leq n$  y sea  $\Delta x = \frac{1}{n}$ . Para una persona elegida al azar, la probabilidad de que su altura esté entre 5'8" y 5'9" se puede estimar mediante la suma de las áreas de los correspondientes rectángulos del histograma:

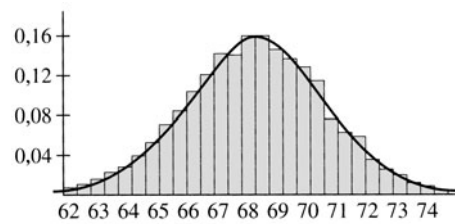
$$P(68 \leq x \leq 69) \approx f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_n) \Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x. \quad (7.1)$$

Al crecer  $n$ , el histograma de la figura 5.61 se «suaviza» y tiende a una curva como la que muestra la figura 5.62.



**Figura 5.61**

Histograma de alturas.



**Figura 5.62**

Histograma de alturas y función densidad de probabilidad.

## Notas históricas



**Blaise Pascal (1623-1662).** Matemático y físico francés que inició con Pierre Fermat el estudio sistemático de la teoría de probabilidades. Se le atribuyen numerosas invenciones: el reloj de pulsera, el barómetro, la prensa hidráulica, la jeringuilla y diversas máquinas calculadoras. También descubrió lo que hoy se conoce como el principio de Pascal en hidrostática (véase sección 5.6). Pascal pudo haber sido uno de los fundadores del Cálculo, pero su precaria salud y largos períodos de tiempo dedicados a la contemplación religiosa y filosófica redujeron su obra matemática.

Esta función límite  $f(x)$  es la **función densidad de probabilidad (fdp)** para las alturas. Nótese que  $f(x_i)$  no da la probabilidad de que una persona mida  $x_i$ . En lugar de eso, la cantidad  $f(x_i) \Delta x$  es una aproximación de la probabilidad de que la altura esté en el rango  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Observe con cuidado (7.1) y piense qué sucede si  $n$  crece. La suma de Riemann de la derecha debe tender a la integral  $\int_a^b f(x) dx$ . En este caso particular, los límites de integración son 68 (5'8") y 69 (5'9"). Se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_{68}^{69} f(x) dx.$$

Ajustando los valores de la función de manera tal que la probabilidad corresponda al área (dada por una integral), hemos llegado a una técnica familiar y directa para calcular probabilidades. Ahora resumimos nuestra discusión en varias definiciones.

Los ejemplos precedentes son **distribuciones de probabilidad discreta** (*discreta* significa que la cantidad medida sólo toma un conjunto finito, o una sucesión, de valores). Por ejemplo, en el lanzamiento de monedas el número de caras debe ser un entero.

Por el contrario, muchas distribuciones son **continuas**. Es decir, la cantidad de interés (la variable aleatoria) toma valores en un continuo (en un intervalo). Así, la altura de una persona puede ser cualquier número real, aunque estamos redondeando a números enteros de pulgadas. (Por ejemplo, uno de los autores da 6'0" como su altura, aunque su altura real es 5'11,8" aproximadamente).

Para las distribuciones continuas, el análogo de un histograma es la gráfica de una función densidad de probabilidad (fdp), que pasamos a definir con precisión.

**Definición 7.1**

Sea  $X$  una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor  $x$  con  $a \leq x \leq b$ . Una **función densidad de probabilidad** (fdp) para  $X$  es una función  $f(x)$  tal que

- (i)  $f(x) \geq 0$  en  $a \leq x \leq b$ . Las fdp nunca son negativas.
- (ii)  $\int_a^b f(x) dx = 1$ . La probabilidad total es 1.
- (iii) La probabilidad de que el valor observado de  $X$  esté entre  $c$  y  $d$  viene dada por el área bajo la gráfica de la fdp en ese intervalo:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx. \text{ La probabilidad corresponde al área bajo la curva.}$$

Si se quiere probar que una función define una fdp para *alguna* variable aleatoria (desconocida) hay que verificar que satisface las propiedades (i) y (ii) de la definición 7.1.

**Ejemplo 7.1****Comprobación de que una función es una fdp en un intervalo**

Probar que  $f(x) = 3x^2$  define una fdp en el intervalo  $[0, 1]$ , verificando que satisface las propiedades (i) y (ii) de la definición 7.1

**Solución** Está claro que  $f(x) \geq 0$ . En cuanto a (ii), integramos la fdp sobre su dominio y obtenemos

$$\int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1.$$

**Ejemplo 7.2****Estimación de probabilidades usando una fdp**

Supongamos que  $f(x) = \frac{0,4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,08(x-68)^2}$  es la fdp de las alturas de los varones en Estados Unidos.

- (a) Hallar la probabilidad de que un varón, elegido al azar, mida entre 68 y 69 pulgadas.
- (b) Ídem entre 74 y 76 pulgadas.

**Solución** (a) La probabilidad de que esté entre 68 y 69 pulgadas es

$$P(68 \leq X \leq 69) = \int_{68}^{69} \frac{0,4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,08(x-68)^2} dx \approx 0,15542.$$

Hemos aproximado numéricamente la integral porque no conocemos una primitiva del integrando. (Se puede usar la regla de Simpson o un PCS).

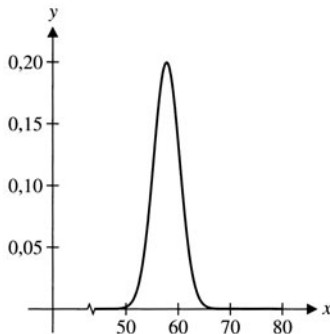
(b) Análogamente, la probabilidad de que esté entre 74 y 76 pulgadas es

$$P(74 \leq X \leq 76) = \int_{74}^{76} \frac{0,4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,08(x-68)^2} dx \approx 0,00751,$$

donde otra vez hemos tenido que aproximar el valor de la integral numéricamente.

De acuerdo con los datos de *Your Vital Statistics*, de Gyles Brandreth, la fdp para las alturas de varones en Estados Unidos se parece a la gráfica de  $f(x) = \frac{0,4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,08(x-68)^2}$  (figura 5.63)

usada en el ejemplo 7.2. Tal vez haya visto antes estas *curvas en forma de campana*. Esta distribución se llama **distribución normal**. Además de ella, hay otras distribuciones de probabilidad importantes en las aplicaciones.



**Figura 5.63**

Altura de varones adultos.



**Ejemplo 7.3** Cálculo de probabilidades con una fdp exponencial

La vida, en años, de un tipo de lámpara se distribuye exponencialmente de acuerdo con la fdp  $f(x) = 4e^{-4x}$ . Calcular la probabilidad de que una lámpara dure 3 meses o menos.

**Solución** En primer lugar, como la vida viene medida en años, convertimos 3 meses en  $\frac{1}{4}$  años. La probabilidad es

$$\begin{aligned} P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right) &= \int_0^{1/4} 4e^{-4x} dx = 4\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4x} \Big|_0^{1/4} \\ &= -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1} \approx 0,63212. \end{aligned}$$

En ocasiones, puede haber argumentos teóricos para suponer que una fdp tiene cierta forma. En tales circunstancias, la primera tarea es determinar los valores de algunas constantes para satisfacer las propiedades de una fdp.

**Ejemplo 7.4** Cálculo de los coeficientes de una fdp

La fdp de una variable aleatoria es del tipo  $f(x) = ce^{-3x}$  para cierta constante  $c$ , en  $0 \leq x \leq 1$ . Hallar el valor de  $c$  para el cual esa función es una fdp.

**Solución** Para que sea una fdp, en primer lugar ha de ser  $f(x) = ce^{-3x} \geq 0$ , para todo  $x \in [0, 1]$ . Eso es cierto siempre que  $c \geq 0$ . Además, la integral sobre el dominio debe ser 1. Por tanto, exigimos que

$$1 = \int_0^1 ce^{-3x} dx = c\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x} \Big|_0^1 = -\frac{c}{3}e^{-3} + \frac{c}{3} = \frac{c}{3}(1 - e^{-3}).$$

Concluimos que  $c = \frac{3}{1 - e^{-3}} \approx 3,1572$ .

Dada una fdp, es posible calcular varias magnitudes que resumen las propiedades de la variable aleatoria. La más común es la **media**, la medida más conocida del valor medio. Si desea promediar las puntuaciones 85, 89, 93 y 93, probablemente hallará la media, dada por  $\frac{85 + 89 + 93 + 93}{4} = 90$ .

Nótese que las puntuaciones 85 y 89 tienen frecuencia relativa  $\frac{1}{4}$ , mientras que 93 tiene frecuencia relativa  $\frac{2}{4}$ . También se puede calcular la media multiplicando cada valor por su frecuencia relativa y sumando  $(85)\frac{1}{4} + (89)\frac{1}{4} + (93)\frac{2}{4} = 90$ .

Supongamos ahora que deseamos calcular la altura media de 1.000 personas, cuyos datos de altura se muestran en la tabla.

Altura	63"	64"	65"	66"	67"	68"	69"	70"	71"	72"	73"	74"
Número	23	32	61	94	133	153	155	134	96	62	31	26

Sería terrible escribir las alturas de las 1.000 personas, sumarlas y dividir entre 1.000. Es mucho más sencillo multiplicar cada valor por su frecuencia relativa y sumar los resultados. De esta forma, el cálculo es

$$\begin{aligned} m &= (63)\frac{23}{1.000} + (64)\frac{32}{1.000} + (65)\frac{61}{1.000} + (66)\frac{94}{1.000} + (67)\frac{133}{1.000} + \dots + (74)\frac{26}{1.000} \\ &= 68,523. \end{aligned}$$

Denotemos las alturas por  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y sea  $f(x_i)$  la frecuencia relativa (probabilidad) correspondiente. Entonces, la media adopta la forma

$$m = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \dots + x_{12} f(x_{12}).$$

Si las alturas en la tabla se hubieran dado cada media pulgada o cada décimo de pulgada, calcularíamos la media multiplicando cada  $x_i$  por la correspondiente probabilidad  $f(x_i) \Delta x$ , donde  $\Delta x$  es la fracción de pulgada entre datos de altura sucesivos. La media tendría entonces la forma

$$m = [x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \dots + x_n f(x_n)] \Delta x = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \Delta x,$$

donde  $n$  es el número de datos. Al crecer  $n$  y tender  $\Delta x$  a cero, la suma de Riemann tiende a la integral  $\int_a^b x f(x) dx$ . Eso sugiere la siguiente definición.

### Definición 7.2

La **media**  $\mu$  de una variable aleatoria con fdp  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$  viene dada por

$$\mu = \int_a^b x f(x) dx. \quad (7.2)$$

La media no es la única medida estadística del *promedio* de los valores de una variable aleatoria. Otra medida alternativa es la **mediana**, el valor de  $x$  tal que la mitad de los valores es inferior o igual a él y la otra mitad superior a él. En el próximo ejemplo, y en los ejercicios, exploramos situaciones en las que cada medida proporciona una indicación, mejor o peor, del promedio de una variable aleatoria.

### Ejemplo 7.5

#### Edad media y mediana de un grupo de células

Supongamos que la edad, en días, de un tipo de organismos unicelulares tiene una fdp  $f(x) = (\ln 2)e^{-kx}$ , con  $k = \frac{1}{2} \ln 2$ . El dominio es  $0 \leq x \leq 2$  (suponemos que a los 2 días cada célula se divide en dos células hijas). Hallar (a) la edad media de las células, (b) la proporción de células que son más jóvenes que la media y (c) la mediana de las edades.

**Solución** (a) Según (7.2), la media es

$$\mu = \int_0^2 x \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2} dx \approx 0,88539 \text{ días},$$

donde hemos aproximado la integral numéricamente, ya que de momento no conocemos una primitiva del integrando. Nótese que, aunque la vida de las células está entre 0 y 2 días, la media no es 1. La gráfica de la fdp (figura 5.64) permite comprender por qué la media es menor que 1: las células más jóvenes son más probables que las viejas.

(b) La proporción de células más jóvenes que la media es igual a la probabilidad de que una célula elegida al azar sea más joven que la media. Y esta probabilidad viene dada por

$$P(0 \leq X \leq \mu) = \int_0^{0,88539} \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2} dx \approx 0,52848,$$

donde de nuevo hemos aproximado la integral numéricamente. Así, pues, hay un 53% de células más jóvenes que la media. En este caso, la media no es el punto de división al 50% de las probabilidades. En otras palabras, la media no es la mediana.

(c) Para hallar la mediana, tenemos que encontrar una constante  $c$  tal que

$$0,5 = \int_0^c \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2} dx.$$

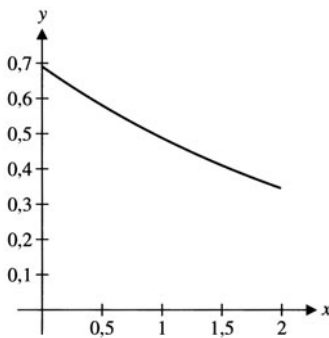


Figura 5.64

$$y = \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2}.$$

Como una primitiva de  $e^{-(\ln 2)x/2}$  es  $-\frac{2}{\ln 2} e^{-(\ln 2)x/2}$ , se tiene

$$\begin{aligned} 0,5 &= \int_0^c \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2} dx \\ &= \ln 2 \left[ -\frac{2}{\ln 2} e^{-(\ln 2)x/2} \right]_0^c \\ &= -2 e^{-(\ln 2)c/2} + 2. \end{aligned}$$

Restando 2 de ambos lados, queda

$$-1,5 = -2e^{-(\ln 2)c/2},$$

y dividiendo entre  $-2$ ,

$$0,75 = e^{-(\ln 2)c/2}.$$

Tomando logaritmos naturales en los dos miembros, resulta





$$\ln 0,75 = -(\ln 2)c/2.$$

Finalmente, despejando  $c$ , obtenemos

$$c = \frac{-2 \ln 0,75}{\ln 2},$$

de manera que la mediana es  $-2 \ln 0,75 / \ln 2 \approx 0,83$ . Ahora podemos concluir que la mitad de las células tienen más de 0,83 días y la otra mitad menos de 0,83 días.

## EJERCICIOS 5.7

-  En el texto hemos dicho que la probabilidad de sacar dos caras al lanzar dos monedas es  $\frac{1}{4}$ . Si intenta este experimento cuatro veces, explique por qué no siempre sacará dos caras exactamente una vez. Si la probabilidad no da predicciones seguras, ¿cuál es su utilidad? Para responder, discuta la información que aporta el saber que en el anterior experimento la probabilidad de sacar una cara y una cruz es  $\frac{1}{2}$  (doble que  $\frac{1}{4}$ ).
  -  Suponga que lanza muchas veces dos monedas (o lo simula en un ordenador). Teóricamente, la probabilidad de sacar dos caras es  $\frac{1}{4}$ . Conforme las tiradas se van realizando en gran número, ¿qué proporción de las veces saldrán dos caras? Haga el experimento y compare los resultados con la predicción teórica.
  -  A la vista de las figuras 5.57 y 5.58, describa cómo espera que sea el histograma para un gran número de monedas. Compare con la figura 5.63.
  -  La altura de una persona viene determinada por muchos factores hereditarios y circunstanciales (la dieta, por ejemplo). Explicar por qué eso debe producir un histograma parecido al que corresponde al lanzamiento de un gran número de monedas.
- En los ejercicios 5-12, probar que la función dada es una fdp en el intervalo indicado.**
- $f(x) = 4x^3$ ,  $[0, 1]$
  - $f(x) = x + 2x^3$ ,  $[0, 1]$
  - $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ ,  $[0, \pi]$
  - $f(x) = e^{-x/2}$ ,  $[0, \ln 4]$
  - $f(x) = \frac{1}{4 - 8/e} x e^{-x/2}$ ,  $[0, 2]$
  - $f(x) = \frac{3}{8} x^2$ ,  $[0, 2]$
  - $f(x) = \frac{3}{2} x^2$ ,  $[-1, 1]$
  - $f(x) = \cos x$ ,  $[0, \pi/2]$

En los ejercicios 13-18, hallar un valor de  $c$  tal que  $f(x)$  sea una fdp en el intervalo especificado.

13.  $f(x) = cx^3$ ,  $[0, 1]$       14.  $f(x) = cx + x^2$ ,  $[0, 1]$   
 15.  $f(x) = ce^{-4x}$ ,  $[0, 1]$       16.  $f(x) = ce^{-x/2}$ ,  $[0, 2]$   
 17.  $f(x) = 2ce^{-cx}$ ,  $[0, 2]$       18.  $f(x) = 2ce^{-cx}$ ,  $[0, 4]$

En los ejercicios 19-22, usar la fdp del ejemplo 7.2 para hallar la probabilidad de que la altura de un varón elegido al azar en Estados Unidos esté en el rango indicado.

19. Entre 5'10" y 6'.      20. Entre 6'6" y 6'10".  
 21. Entre 7' y 10'.      22. Entre 2' y 5'.

En los ejercicios 23-26, sabiendo que la vida de un tipo de lámparas tiene una fdp exponencial  $f(x) = 6e^{-6x}$  (con  $x$  medido en años), calcular la probabilidad de que una lámpara dure:

23. Menos de 3 meses.  
 24. Menos de 6 meses.  
 25. Entre 1 y 2 años.  
 26. Entre 3 y 10 años.

En los ejercicios 27-30, sabiendo que la vida de un tipo de lámparas tiene una fdp exponencial  $f(x) = 8e^{-8x}$  (con  $x$  medido en años), calcular la probabilidad de que una lámpara dure:

27. Entre 1 y 2 meses.  
 28. Entre 5 y 6 meses.  
 29. Menos de 6 meses.  
 30. Más de 6 meses.

En los ejercicios 31-34, suponemos que la vida de un cierto tipo de organismo tiene la fdp  $f(x) = 4xe^{-2x}$ .

31. Hallar la probabilidad de que un organismo viva menos de 1 año.  
 32. Hallar la probabilidad de que un organismo viva entre 1 y 2 años.  
 33. Calcular la vida media ( $0 \leq x \leq 10$ ).  
 34. Representar la fdp y comparar su máximo valor con la media.

En los ejercicios 35-42, hallar (a) la media y (b) la mediana de la variable aleatoria con fdp dada.

35.  $f(x) = 3x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$       36.  $f(x) = 4x^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$   
 37.  $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$       38.  $f(x) = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$   
 39.  $f(x) = \frac{1}{2} (\ln 3)e^{-kx}$ ,  $k = \frac{1}{3} \ln 3$ ,  $0 \leq x \leq 3$   
 40.  $f(x) = \frac{1}{3} (\ln 4)e^{-kx}$ ,  $k = \frac{1}{4} \ln 4$ ,  $0 \leq x \leq 4$

41.  $f(x) = \frac{4}{1 - e^{-4}} e^{-4x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$

42.  $f(x) = \frac{6}{1 - e^{-6}} e^{-6x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$

43. Determinar  $c$  de modo que  $f(x) = ce^{-4x}$  sea una fdp en el intervalo  $[0, b]$  con  $b > 0$ . ¿Qué ocurre con  $c$  cuando  $b \rightarrow \infty$ ?

44. Para la fdp del ejercicio 43, hallar la media exactamente (usar un PCS para encontrar la primitiva). Al crecer  $b$ , ¿qué sucede con la media?

45. Repetir los ejercicios 43 y 44 con  $f(x) = ce^{-6x}$ .

46. A la vista de los resultados de los ejercicios 43-45, conjeturar los valores de  $c$  y de la media cuando  $b \rightarrow \infty$ , para  $f(x) = ce^{-ax}$ ,  $a > 0$ .

47. La tabla muestra las probabilidades de obtener un cierto número de caras al lanzar ocho monedas. Usar el principio de adición para hallar la probabilidad de cada uno de los sucesos que se especifican.

Número de caras	0	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$

Número de caras	5	6	7	8
Probabilidad	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

- (a) tres o menos caras      (b) más caras que cruces  
 (c) todo caras o todo cruces      (d) un número impar de caras

48. En una versión del juego keno el jugador elige 10 números entre el 1 y el 80. Después se sacan al azar 20 números entre el 1 y el 80. La ganancia del jugador depende de cuántos números ha acertado. Usar las probabilidades dadas (redondeadas a 4 dígitos) para hallar la probabilidad de cada uno de los sucesos indicados. (Para ganar han de coincidir al menos 5 de los números elegidos. Con una puesta de 2 euros, a partir de 6 aciertos se gana 40 euros o más).

Números seleccionados	0	1	2	3	4
Probabilidad	0,0458	0,1796	0,2953	0,2674	0,1473

Números seleccionados	5	6	7	8	9	10
Probabilidad	0,0514	0,0115	0,0016	0,0001	0,0	0,0

- (a) ganar (al menos 5 aciertos)  
 (b) perder (4 o menos aciertos)  
 (c) ganar 40 euros o más (6 o más aciertos)  
 (d) 3 o 4 aciertos

49. En la World Series de béisbol, dos equipos juegan partidos hasta que alguno de ellos gana cuatro. Supongamos que el equipo

A tiene probabilidad 0,6 de ganar en cada partido. La tabla muestra las probabilidades para los diversos registros del equipo A. Hallar la probabilidad de los sucesos indicados.

Gan/Perd	0/4	1/4	2/4	3/4
Probabilidad	0,0256	0,0615	0,0922	0,1106

Gan/Perd	4/3	4/2	4/1	4/0
Probabilidad	0,1659	0,2073	0,2073	0,1296

- (a) El equipo A gana la World Series
- (b) El equipo B gana la World Series
- (c) Un equipo gana los cuatro primeros partidos
- (d) Se juegan 6 o 7 partidos



50. Un jugador de baloncesto encesta el 70% de tiros libres. La tabla muestra las probabilidades en una serie de tres lanzamientos. Hallar la probabilidad de cada uno de los sucesos indicados.

Aciertos	0	1	2	3
Probabilidad	0,027	0,189	0,441	0,343

- (a) Encesta 2 o 3
- (b) Encesta al menos 1

51. En todos los tiempos se han producido extinciones de especies animales, aunque extinciones en masa, como las de los dinosaurios, son raras. La evidencia fósil indica que la probabilidad de que se extinga un porcentaje  $p$  ( $1 < p < 100$ ) de las especies en un período de 4 millones de años es aproximadamente  $e(p) = cp^{-2}$  para alguna constante  $c$ . Hallar el valor de  $c$  para el cual  $e(p)$  es una fdp y estimar la probabilidad de que en un período de 4 millones de años se extingan entre un 60% y un 70% de las especies.
52. En el ejemplo 7.5 hallamos la mediana, llamada también el segundo cuartil. Hallar ahora el primer y tercer cuartil, es decir, las edades tales que las probabilidades de ser más viejo sean 0,25 y 0,75, respectivamente.
53. La fdp del ejemplo 7.2 es la fdp de una variable aleatoria distribuida normalmente. La media se ve fácilmente en  $f(x)$ : en el

ejemplo 7.2 la media es 68. La media y un número llamado la **desviación típica** caracterizan una distribución normal. Como indica la figura 5.63, la gráfica de la fdp tiene un máximo en la media y dos puntos de inflexión, uno a cada lado del máximo. La desviación típica es la distancia de la media a un punto de inflexión. Calcular la desviación típica en el ejemplo 7.2.

54. En el ejercicio 53, denotando la media por  $\mu$  y la desviación típica por  $\sigma$ , hallar la probabilidad de que la altura de una persona esté entre  $\mu - \sigma$  y  $\mu + \sigma$  (es decir, dentro de una desviación típica respecto de la media). Calcular la probabilidad de que una altura esté dentro de dos desviaciones típicas respecto de la media (entre  $\mu - 2\sigma$  y  $\mu + 2\sigma$ ) y lo mismo con tres desviaciones típicas. Estas probabilidades son las mismas para cualquier distribución normal. Basta conocer la media y la desviación típica de una variable aleatoria normal para conocer esas probabilidades.
55.  La teoría matemática del caos indica que los números generados por algoritmos muy simples pueden tener apariencia aleatoria. Los investigadores analizan diversas gráficas para distinguir la aleatoriedad del caos determinista. Por ejemplo, iterar la función  $f(x) = 4x(1 - x)$  partiendo de  $x = 0,1$ . Es decir, calcular  $f(0,1) = 0,36$ ,  $f(0,36) = 0,9216$ ,  $f(0,9216) = 0,289$  y así sucesivamente. Iterar 50 veces y anotar cuántas veces aparece cada dígito en primera posición (hasta ahora hemos obtenido un 1, un 3, un 9 y un 2). Si el proceso fuera verdaderamente aleatorio, los dígitos tendrían que aparecer aproximadamente el mismo número de veces. ¿Ocurre así? Para desenmascarar el carácter no aleatorio del proceso, hay que dibujar su **plano de fases**. A tal fin, tomar las iteraciones consecutivas como puntos  $(x, y)$  y marcar los puntos en un plano. Los tres primeros puntos son  $(0,1, 0,36)$ ,  $(0,36, 0,9216)$  y  $(0,9216, 0,289)$ . Describir la pauta (no aleatoriedad) que aparece, identificándola con la mayor precisión posible.
56.  Un muelle oscila arriba y abajo con una posición dada por  $u(t) = \sin t$ . Si miramos su posición en un instante  $t$  elegido al azar, ¿qué es más probable: encontrarlo cerca de un extremo ( $u = 1$  o  $u = -1$ ) o cerca del centro ( $u = 0$ )? La fdp es inversamente proporcional a la rapidez (¿por qué es razonable esto?). Probar que la rapidez viene dada por  $|\cos t| = \sqrt{1 - u^2}$ , de modo que la fdp es  $f(u) = c/\sqrt{1 - u^2}$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ , para alguna constante  $c$ . Demostrar que  $c = 1/\pi$ , representar  $f(x)$  y describir qué posiciones del muelle son más probables.

## EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

En los ejercicios 1-8, hallar el área (exacta, si es posible, o aproximada).

- El área entre  $y = x^2 + 2$  e  $y = \sin x$  en  $0 \leq x \leq \pi$
- El área entre  $y = e^x$  e  $y = e^{-x}$  en  $0 \leq x \leq 1$
- El área entre  $y = x^3$  e  $y = 2x^2 - x$
- El área entre  $y = x^2 - 3$  e  $y = -x^2 + 5$
- El área entre  $y = e^{-x}$  e  $y = 2 - x^2$
- El área entre  $x = y^2$  e  $y = 1 - x$
- El área de la región acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$  e  $y = 0$
- El área de la región acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 0$  y  $x = 2$
- Una ciudad tiene hoy 10.000 habitantes, y en ella se producen  $10 + 2t$  nacimientos al año y  $4 + t$  defunciones al año. Calcular su población a los 6 años.
- A partir de los datos de la tabla, estimar el área entre las curvas en  $0 \leq x \leq 2$ .

$x$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f(x)$	3,2	3,6	3,8	3,7	3,2	3,4
$g(x)$	1,2	1,5	1,6	2,2	2,0	2,4

$x$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$f(x)$	3,0	2,8	2,4	2,9	3,4
$g(x)$	2,2	2,1	2,3	2,8	2,4

- Hallar el volumen del sólido cuyas secciones tienen área  $A(x) = \pi(3 + x)^2$  en  $0 \leq x \leq 2$ .
- Una piscina, vista desde arriba, tiene la forma descrita por  $y = \pm(5 + x)$  en  $0 \leq x \leq 2$ . Su profundidad es  $4 + x$ . Calcular su volumen.
- La tabla da las áreas de las secciones de un objeto sumergido. Estimar su volumen.

$x$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
$A(x)$	0,4	1,4	1,8	2,0	2,1	1,8	1,1	0,4

En los ejercicios 14-18, calcular el volumen del sólido de revolución que se especifica.

- La región acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 0$  y  $x = 1$  girada en torno a (a) el eje  $x$ ; (b) el eje  $y$ ; (c)  $x = 2$ ; (d)  $y = -2$
- La región acotada por  $y = x^2$  e  $y = 4$  girada en torno a (a) el eje  $x$ ; (b) el eje  $y$ ; (c)  $x = 2$ ; (d)  $y = -2$

- La región acotada por  $y = x$ ,  $y = 2x$  y  $x = 2$  girada en torno a (a) el eje  $x$ ; (b) el eje  $y$ ; (c)  $x = -1$ ; (d)  $y = 4$
- La región acotada por  $y = x$ ,  $y = 2 - x$  e  $y = 0$  girada en torno a (a) el eje  $x$ ; (b) el eje  $y$ ; (c)  $x = -1$ ; (d)  $y = 4$
- La región acotada por  $x = 4 - y^2$  y  $x = y^2 - 4$  girada en torno a (a) el eje  $x$ ; (b) el eje  $y$ ; (c)  $x = 4$ ; (d)  $y = 4$

En los ejercicios 19-22, escribir una integral para la longitud de arco y estimar su valor numéricamente.

- La porción de  $y = x^4$  en  $-1 \leq x \leq 1$
- La porción de  $y = x^2 + x$  en  $-1 \leq x \leq 0$
- La porción de  $y = e^{x/2}$  en  $-2 \leq x \leq 2$
- La porción de  $y = \sin 2x$  en  $0 \leq x \leq \pi$

En los ejercicios 23 y 24, escribir una integral para el área de la superficie y estimar su valor numéricamente.

- La superficie generada por  $y = 1 - x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , al girar en torno al eje  $x$ .
- La superficie generada por  $y = x^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , al girar en torno al eje  $x$ .

En los ejercicios 25-32 ignorar la resistencia del aire.

- Un nadador salta desde una palanca a 64 pies de altura. ¿Cuál es su velocidad de impacto en el agua?
- Si el nadador del ejercicio 25 tuviera una velocidad inicial hacia arriba de 4 pies/s, ¿cuál sería su velocidad de impacto en el agua?
- Se lanza un objeto desde el suelo con un ángulo de  $20^\circ$  y una velocidad inicial de 48 pies/s. Hallar el tiempo que está en el aire y su alcance horizontal.
- Repetir el ejercicio 27 si el objeto es lanzado desde 6 pies de altura.
- Se lanza un balón desde una altura de 6 pies con velocidad inicial de 80 pies/s y un ángulo de  $8^\circ$ . Una persona está a 40 yardas en la dirección del lanzamiento. ¿Podrá atraparlo?
- Repetir el ejercicio 29 para un ángulo de  $24^\circ$ . Por prueba y error, hallar el rango de ángulos que permite atrapar el balón.
- Calcular la velocidad inicial necesaria para lanzar un objeto a 128 pies de altura. Hallar la velocidad de impacto en el suelo.
- Un avión con ayuda humanitaria vuela a 120 pies de altura con una velocidad horizontal de 100 pies/s. ¿A qué distancia del punto de destino en el suelo tiene que dejar caer un paquete de víveres?





33. Una fuerza de 60 libras estira un muelle 1 pie. Hallar el trabajo realizado para estirar el muelle 8 pulgadas a partir de su longitud natural.
34. Un motor ejerce una fuerza de  $800 + 2x$  libras cuando el automóvil está en la posición  $x$  (millas). Calcular el trabajo realizado para mover el automóvil desde  $x = 0$  hasta  $x = 8$ .
35. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto de densidad  $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$  en  $0 \leq x \leq 4$ . Explicar por qué el centro de masa no está en  $x = 2$ .
36. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto de densidad  $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$  en  $0 \leq x \leq 2$ . Explicar por qué el centro de masa no está en  $x = 1$ .
37. Una presa tiene la forma de un trapecio de 80 pies de altura. Su anchura en la parte superior es 60 pies y en la inferior 140 pies. Calcular la máxima fuerza hidrostática que debe soportar.
38. Una ventana de observación submarina es un rectángulo de 20 pies de anchura y se extiende desde 5 pies hasta 10 pies de profundidad. Calcular la máxima fuerza hidrostática que debe soportar.
39. La fuerza ejercida en diversos instantes por un bate sobre una pelota viene dada en la tabla. Con esos datos, estimar el impulso. Si la pelota (de masa  $m = 0,01$  slugs) tiene una velocidad de 120 pies/s antes del golpe, estimar su velocidad tras el golpe.

$t$ (s)	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004
$F(t)$ (lb)	0	800	1.600	2.400	3.000

$t$ (s)	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008
$F(t)$ (lb)	3.600	2.200	1.200	0

40. Si un muro ejerce una fuerza de  $f(t) = 3.000t(2 - t)$  libras sobre un automóvil, en  $0 \leq t \leq 2$ , hallar el impulso. Si el automóvil (de masa  $m = 100$  slugs) queda en reposo tras la colisión, ¿qué velocidad llevaba en el momento del impacto?
41. Probar que  $f(x) = x + 2x^3$  es una fdp en el intervalo  $[0, 1]$ .
42. Probar que  $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$  es una fdp en el intervalo  $[0, \ln 2]$ .

43. Determinar para qué valor de  $c$  es  $f(x) = \frac{c}{x^2}$  una fdp en el intervalo  $[1, 2]$ .
44. Determinar para qué valor de  $c$  es  $f(x) = ce^{-2x}$  una fdp en el intervalo  $[0, 4]$ .
45. La vida de una lámpara tiene fdp  $f(x) = 4e^{-4x}$  ( $x$  en años). Calcular la probabilidad de que una lámpara dure (a) menos de 6 meses, (b) entre 6 meses y un año.
46. La vida de un organismo tiene fdp  $f(x) = 9xe^{-3x}$  ( $x$  en años). Calcular la probabilidad de que un organismo viva (a) menos de 2 meses, (b) entre 3 meses y un año.
47. Calcular (a) la media y (b) la mediana de una variable aleatoria con fdp  $f(x) = x + 2x^3$  en el intervalo  $[0, 1]$ .
48. Calcular (a) la media y (b) la mediana de una variable aleatoria con fdp  $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$  en el intervalo  $[0, \ln 2]$ .
49.  Como se indicó en la sección 5.5, se pueden deducir fórmulas generales para muchas magnitudes importantes en el movimiento de proyectiles. Para un objeto lanzado desde el suelo con ángulo  $\theta_0$  y velocidad inicial  $v_0$  pies/s, hallar el alcance horizontal  $R$  (pies) y usar la identidad trigonométrica  $\sin(2\theta_0) = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$  para demostrar que  $R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{32}$ . Concluir que el máximo alcance se consigue con  $\theta_0 = \pi/4$  ( $45^\circ$ ).

50.  Siguiendo el ejercicio 49, supongamos que el suelo está inclinado un ángulo de  $A^\circ$  respecto de la horizontal. Si  $A > 0$  (el proyectil se lanza cuesta arriba), explicar por qué el alcance máximo se alcanzará con un ángulo mayor que  $45^\circ$ . Si  $A < 0$  (el proyectil se lanza cuesta abajo), explicar por qué el alcance máximo se alcanzará con un ángulo menor que  $45^\circ$ . Para determinar el valor exacto del ángulo óptimo, empezamos representando el suelo por la recta  $y = (\tan A)x$ . Probar que el proyectil llega al suelo en el instante  $t = v_0 \frac{\sin \theta_0 - \tan A \cos \theta_0}{16}$ .

Evaluar  $x(t)$  en ese valor de  $t$  y usar una identidad trigonométrica para sustituir  $\sin \theta_0 \cos A - \sin A \cos \theta_0$  por  $\sin(\theta_0 - A)$ . A continuación, usar otra identidad trigonométrica para sustituir  $\cos \theta_0 \sin(\theta_0 - A)$  por  $\sin(2\theta_0 - A) - \sin A$ . En este momento, el único término en  $\theta_0$  será  $\sin(2\theta_0 - A)$ . Con el fin de hacer máximo el alcance, maximizar ese término tomando  $\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}A$ .