Policy Gradient

Clément Rambour

Plan

Cours précédents

- Estimation de la valeur par échantillonnage
- Deux grande familles d'approches :
  - MC : approximation de la valeur par moyenne des retour
  - TD : Minimisation de l'erreur de Bellman
- Contrôle : estimation de la fonction de valeur état-action
- Valeurs stockées dans la table Q

Cours précédents

- Approximation de la fonction de valeur par une fonction de paramètre $\boldsymbol{\theta}$:

$$Q(s, a) \simeq f_{\boldsymbol{\theta}}(s, a)$$

- Optimisation de $f_{\boldsymbol{\theta}}$ par descente de gradient
- Loss Mean Square Error
  - MC : par rapport au retour
  - TD : par rapport à la TD-target Q-learning
- Deep Q Networks : $f_{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow$ réseau de neurones

Aujourd'hui

Motivation :

- Plutôt que de passer par une fonction décrivant le potentiel de chaque état/action de l'agent, pourquoi ne pas apprendre directement la politique ?
- Politique donnée par une distribution paramétrée par $\boldsymbol{\theta}$: $\pi_{\boldsymbol{\theta}}(s, a)$

optimisation de la valeur vs. optimisation de la politique

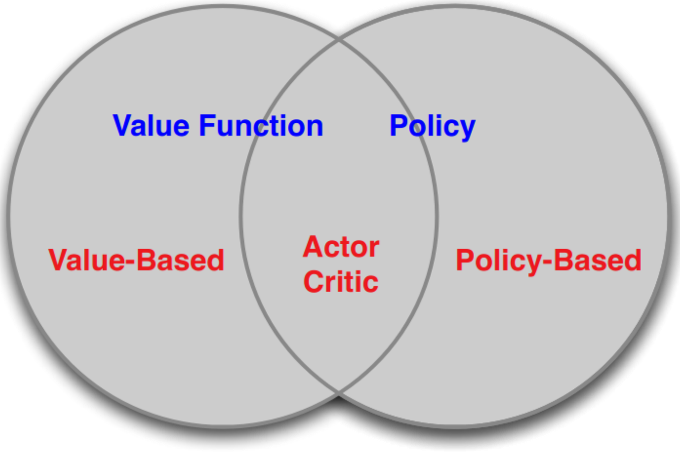
Avantages de l'optimisation de politique :

- Meilleure convergence
- Fonctionne en grande dimension ou si les actions sont continues
- Peut apprendre des politiques stochastiques

Désavantages :

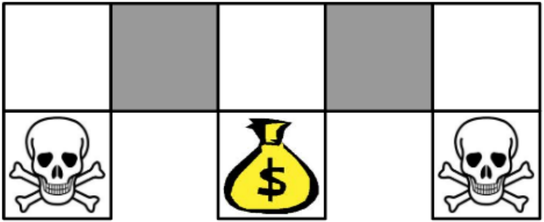
- Converge vers un minimum local
- Grande variance

RL et Policy based



Exemple : chifoumi

Exemple : gridworld avec alias



- Descripteurs (*features*) de la forme

$$\phi(s,a) = \begin{cases} 1 \text{ si action } a \text{ possible depuis } s \text{ (pas de mur sur le chemin)} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Impossibilité de différencier les cases grises

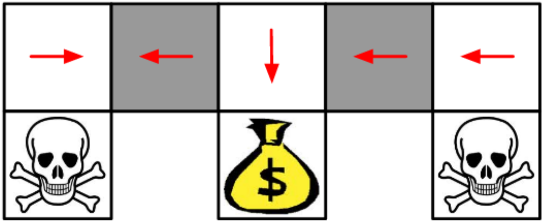
Value based RL :

$$Q_{\boldsymbol{\theta}}(s,a) = f_{\boldsymbol{\theta}}(\phi(s,a))$$

Policy based RL :

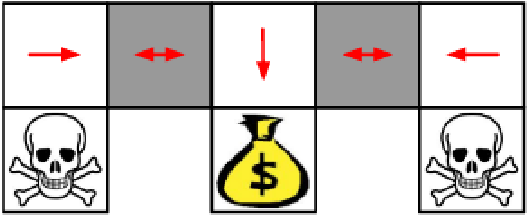
$$\pi_{\boldsymbol{\theta}}(s,a) = g_{\boldsymbol{\theta}}(\phi(s,a))$$

Exemple : gridworld avec alias



- *Value based* : politique optimale déterministe : pas idéale
- Peut être coincée et ne jamais atteindre le but
- Longue convergence

Exemple : gridworld avec alias



- *Policy based* : politique optimale stochastique
- Trouve le but en quelques coups avec une bonne probabilité

Optimisation de la politique

- Problème d'optimisation
- Trouver $\boldsymbol{\theta}$ qui maximise l'espérence du retour de l'agent
- De nombreuses approches possibles :
  - Hill climbing
  - Simplex / amoaeba / Neleder Mead
  - Genetic algorithms
  - Gradient Ascent $\leftarrow$
  - Conjugate Gradient
  - Quasi-Newton

Plan

Gradient de la politique

- Quel **objectif** $J(\theta)$ maximiser ?
- On note $v_{\pi_\theta}(s) = v(s;\theta)$ la valeur de l'état s obtenue en suivant la politique π_θ paramétrée par θ
- On prend comme objectif $J(\theta) = v(s;\theta)$
- D'autres objectifs (très semblables) sont aussi possible :
  - La valeur moyenne :

$$J(\theta) = \sum_{s \in \mathcal{S}} d_{\pi_\theta}(s) v_{\pi_\theta}(s)$$

    où $d_{\pi_\theta}(s)$ est la probabilité d'être dans l'état s

  - La récompense par pas de temps :

$$J(\theta) = \sum_{s \in \mathcal{S}} d_{\pi_\theta}(s) \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi_\theta(s,a) \mathcal{R}_s^a$$

Gradient de la politique

- Les algorithmes dits *Policy gradient* cherchent un maximum **local** de $v(s;\theta)$ par montée de gradient par rapport à θ :

$$\Delta\theta = \alpha \nabla_\theta v(s;\theta)$$

- α : *learning rate*
- Le *policy grdient* :

$$\nabla_\theta v(s;\theta) = \begin{bmatrix} \frac{dv(s;\theta)}{d\theta_1} \\ \vdots \\ \frac{dv(s;\theta)}{d\theta_n} \end{bmatrix}$$

Approche la plus simple : différences finies

Pour chaque dimension $k \in [1, ..., n]$

- Estimation de la k-ieme dérivée de $v(s; \theta)$
- Estimation par une perturbation de θ sur sa composante k
- Nécessite d'être répété pour chaque dimension

Approche la plus simple : différences finies

Pour chaque dimension $k \in [1, ..., n]$

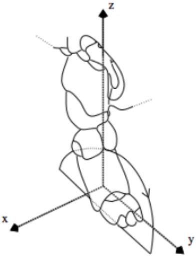
- Estimation de la k-ieme dérivée de $v(s; \theta)$
- Estimation par une perturbation de θ sur sa composante k
- Nécessite d'être répété pour chaque dimension
- Simple, fonctionne quelque soit la politique

Approche la plus simple : différences finies

Pour chaque dimension $k \in [1, ..., n]$

- Estimation de la k-ieme dérivée de $v(s; \theta)$
- Estimation par une perturbation de θ sur sa composante k
- Nécessite d'être répété pour chaque dimension
- Simple, fonctionne quelque soit la politique
- Bruité, pas efficace

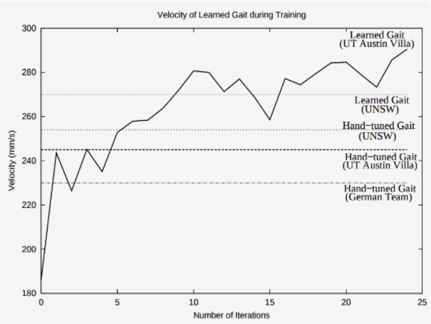
Entraînement par différence finies



- Goal: learn a fast AIBO walk (useful for Robocup)
- Adapt these parameters by finite difference policy gradient
- Evaluate performance of policy by field traversal time

[1] Kohl and Stone. Policy gradient reinforcement learning for fast quadrupedal locomotion. ICRA 2004. http://www.cs.utexas.edu/ ai-lab/pubs/icra04.pdf

Entraînement par différence finies



- Authors discuss that performance is likely impacted by: initial starting policy parameters, ϵ (how much policies are perturbed), learning rate for how much to change policy, as well as policy parameterization

Plan

Fonction de score

- *Policy gradient* : Approches basées sur sur une montée de gradient
- On suppose que $\pi_\theta(a|s)$ est différentiable
- Astuce (*likelihood ratio gradient* ou *policy gradient*) :

$$\begin{aligned}\nabla_\theta \pi_\theta(a|s) &= \pi_\theta(a|s)\frac{\nabla_\theta \pi_\theta(a|s)}{\pi_\theta(a|s)}\\ &= \pi_\theta(a|s)\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s)\end{aligned}$$

- $\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s)$: fonction de score

Exemple de score : softmax

- Politique paramétrée comme une régression logistique sur les features :

$$\pi_\theta(a|s) = \sigma(\phi(s,a)^T\theta)$$

- σ : softmax :

$$\pi_\theta(a|s) = \frac{e^{\phi(s,a)^T\theta}}{\sum_a e^{\phi(s,a)^T\theta}}$$

- Le score est :

$$\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s) = \phi(s,a) - \mathbb{E}_{\pi_\theta}[\phi(s,.)]$$

Exemple de score : politique gaussienne

- Politique possible dans un espace d'action continu
- Moyenne = combinaison linéaire de *features* :

$$\mu(s) = \phi(s,a)^T\theta$$

- Variance σ^2
- Politique :

$$a \sim \mathcal{N}(\mu(s), \sigma^2)$$

- Le score est :

$$\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s) = \frac{(a-\mu(s))\phi(a,s)}{\sigma^2}$$

Objectif

- Soit une trajectoire τ :

$$\tau = \{s_0, a_0, r_1, ..., s_{T-1}, a_{T-1}, r_T\}$$

- On note $R(\tau) = \sum_{t=0}^{T} r_t$ la somme des récompense.
- $T(\tau) = G_0$ pour $\gamma = 1$
- La fonction objectif est donc :

$$v(s_0; \theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[\sum_{t=0}^{T} r_t] = \sum_{\tau} P(\tau; \theta) R(\tau)$$

- $P(\tau; \theta)$: probabilité de la trajectoire τ en suivant π_θ
- Notre **fonction objectif** est donc :

$$\underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \; v(s; \theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \; \sum_{\tau} P(\tau; \theta) R(\tau)$$

Gradient de la politique

- Notre **fonction objectif** est donc :

$$\underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \; v(s;\theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \; \sum_{\tau} P(\tau;\theta) R(\tau)$$

- On applique l'astuce vue précédemment pour calculer le gradient :

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta v(s_0;\theta) &= \nabla_\theta \sum_{\tau} P(\tau;\theta) R(\tau) \\
&= \sum_{\tau} \nabla_\theta P(\tau;\theta) R(\tau) \\
&= \sum_{\tau} P(\tau;\theta) \nabla_\theta \log P(\tau;\theta) R(\tau) \\
&= \mathbb{E}_{\pi_\theta}[R(\tau) \nabla_\theta \log P(\tau;\theta)] \qquad (1)
\end{aligned}$$

Gradient de la politique

- Notre **fonction objectif** est donc :

$$\underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \; v(s;\theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \; \sum_{\tau} P(\tau;\theta) R(\tau)$$

- On applique l'astuce vue précédemment pour calculer le gradient :

$$\nabla_\theta v(s;\theta) = \sum_{\tau} P(\tau;\theta) \nabla_\theta \log P(\tau;\theta) R(\tau)$$

- Espérance approchée par une moyenne sur un batch de m trajectoires :

$$\nabla_\theta v(s;\theta) \simeq \hat{g} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \nabla_\theta \log P(\tau^{(i)};\theta) R(\tau^{(i)})$$

Indépendance au modèle

Le gradient de $\log P(\tau;\theta)$ est agnostique à la dynamique du modèle :

$$\nabla_\theta \log P(\tau;\theta) = \sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t)$$

Gradient de la politique

- Notre **fonction objectif** est donc :

$$\underset{\theta}{\text{argmax}}\ V(s;\theta) = \underset{\theta}{\text{argmax}}\ \sum_{\tau} P(\tau;\theta)R(\tau)$$

- On applique l'astuce vue précédemment pour calculer le gradient :

$$\nabla_\theta v(s;\theta) = \sum_{\tau} P(\tau;\theta)\nabla_\theta \log P(\tau;\theta)R(\tau)$$

- Espérance approchée par une moyenne sur un batch de m trajectoires :

$$\nabla_\theta v(s;\theta) \simeq \hat{g} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R(\tau_i)\sum_{t=0}^{T-1}\nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t^{(i)}|s_t^{(i)})$$

- Pas besoin de la dynamique du modèle

Plan

Structure temporelle

- Gradient de l'espérance de la récompense à l'instant t' :

$$\nabla_\theta \mathbb{E}[r_{t'}] = \mathbb{E}\big[r_{t'} \sum_{t=0}^{t'} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t)\big]$$

- Structure dans les épisodes : étape par étape (s_0, a_0, r_1), ..., jusqu'à (s_{T-1}, a_{T-1}, r_T)
- En sommant pour tous les instants on a :

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta v(s;\theta) = \nabla_\theta \mathbb{E}[R(\tau)] &= \mathbb{E}\big[\sum_{t'=0}^{T-1} r_{t'} \sum_{t=0}^{t'} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t)\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) \sum_{t'=t}^{T-1} r_{t'}\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) G_t\big]
\end{aligned}$$

Monte Carlo Policy Gradient (REINFORCE)

REINFORCE:

Initialize policy parameters θ arbitrarily

for each episode $\{s_1, a_1, r_2, \cdots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T\} \sim \pi_\theta$ **do**

  for $t = 1$ to $T-1$ **do**

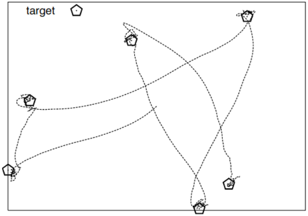
    $\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta \log \pi_\theta(s_t, a_t) G_t$

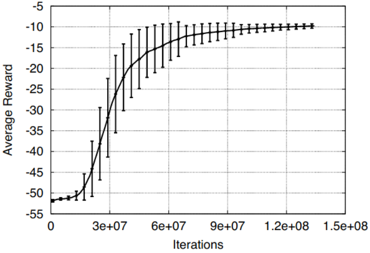
  endfor

endfor

return θ

Exemple : Puck world





- Continuous actions exert small force on puck
- Puck is rewarded for getting close to target
- Target location is reset every 30 seconds
- Policy is trained using variant of Monte-Carlo policy gradient

Monte Carlo Policy Gradient

- MC policy gradient : toujours une grande variance
- Non biaisé

Plan

Policy Gradient theorem

Théorème

Pour n'importe quelle politique différentiable $\pi_\theta(a|s)$, pour n'importe quelle fonction objectif $J(\theta)$ (valeur, valeur moyenne, récompense moyenne), le gradient de la politique est donné par :

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s) Q_{\pi_\theta}(s,a)]$$

Par rapport à précédemment :

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta v(s;\theta) &= \mathbb{E}\Big[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) G_t\Big] \\
&\simeq \mathbb{E}\Big[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) Q_{\pi_\theta}(s_t,a_t)\Big]
\end{aligned}$$

Critique

- On a vu :

$$\nabla_\theta v(s;\theta) = \mathbb{E}\Big[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) G_t\Big]$$

- Peut être estimé sur un batch :

$$\nabla_\theta v(s;\theta) \simeq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t^{(i)}|s_t^{(i)}) G_t^{(i)}$$

- Se baser sur le retour : bruité
- Approche pour réduire la variance : *bootstrapping* TD

$$\nabla_\theta v(s;\theta) = \mathbb{E}\Big[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) Q(s_t,a_t)\Big]$$

- Estimation de Q est faite par un critique

Actor-critic Methods

- Estimation de Q est fait par un critique :
  - TD
  - SARSA
  - Q-learning
  - Deep Q Networks
- Approches *Actor-critic* maintiennent une représentation explicite de la politique **et** de la valeur
- L'acteur met à jour les paramètres de la politiques θ
- La critique met à jour les paramètres de la fonction de valeur w
- On suit un gradient approché :

$$\nabla J(\theta) \simeq \mathbb{E}[\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s) Q_w(s,a)]$$

- La mise à jour est donnée par :

$$\Delta\theta = \alpha \nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s) Q_w(s,a)$$

Action-Value Actor Critic

- Critique : mise à jour de w par TD avec $Q_w(s,a) = \phi(s,a)^T w$
- Acteur : mise à jour de θ par monté de gradient

function QAC
  Initialise s, θ
  Sample $a \sim \pi_\theta$
  for each step **do**
    Sample reward $r = \mathcal{R}_s^a$; sample transition $s' \sim \mathcal{P}_{s,\cdot}^a$
    Sample action $a' \sim \pi_\theta(s', a')$
    $\delta = r + \gamma Q_w(s', a') - Q_w(s, a)$
    $\theta = \theta + \alpha \nabla_\theta \log \pi_\theta(s, a) Q_w(s, a)$
    $w \leftarrow w + \beta \delta \phi(s, a)$
    $a \leftarrow a', s \leftarrow s'$
  end for
end function

Fonction de valeur compatibles

Theorem

Si les conditions suivantes sont réunies :

- La fonction d'approximation de Q est compatible avec la politique :

$$\nabla_w Q_w(s,a) = \nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s)$$

- Les paramètres w minimisent l'erreur quadratique moyenne (MSE)

Alors, le gradient de la politique est exact :

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[\nabla_\theta \log \pi_\theta(s,a) Q_w(s,a)]$$

Utilisation de Baseline

- Espérance de la politique estimée : grande variance
- Réduction de la variance grâce à une *baseline* $B(s)$:

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s)(Q_{\pi_\theta}(s,a) - B(s))]$$

- Aucun impact sur l'espérance
- Une bonne *baseline* est la fonction de valeur elle même : $B(s) = V_{\pi_\theta}(s)$
- Le gradient est donc donné en fonction de l'avantage A_{π_θ} :

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s)(Q_{\pi_\theta}(s,a) - V_{\pi_\theta}(s))]$$

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s) A_{\pi_\theta}(s,a)]$$

Estimation de l'avantage

- L'erreur TD est un estimateur de l'avantage :

$$\delta_{\pi_\theta}(s, s') = r + \gamma V_{\pi_\theta}(s') - V_{\pi_\theta}(s)$$

- Le gradient est donc donné par :

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s)\delta_{\pi_\theta}(s, s')]$$

- On a seulement à estimer la valeur d'état

Plan

Bibliographie

- Reinforcement Learning : an introduction, second edition, Richard S. Sutton and Adrew G. Barto
- Reinforcement Learning courses, David Silver, DeepMind (https ://www.davidsilver.uk/)
- A3C (Mnih et al. ICML 2016)
- T. P. Lillicrap et al., Continuous control with deep reinforcement learning.