usepackagexcolor

Model Free Prediction and Control

Clément Rambour

Plan

1. Introduction
2. Model Free Prediction
   - Monte Carlo sampling
   - TD0 Learning
   - TD(λ) Learning
3. *Model Free Control*
   - Introduction
   - On policy et SARSA
   - Off policy et Q-learning

Plan

1. Introduction
2. Model Free Prediction
   - Monte Carlo sampling
   - TD0 Learning
   - TD(λ) Learning
3. *Model Free Control*
   - Introduction
   - On policy et SARSA
   - Off policy et Q-learning

Table of Contents

Échantillonnage de Monte Carlo

But

- Apprendre v_π d'après les épisodes vécus en suivant π :

$$S_1, A_1, R_1, \cdots, s_k \sim \pi$$

- La fonction de valeur d'un état v_π est donnée par :

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s]$$

$$\text{avec } G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots + \gamma^{T-1} R_T$$

Échantillonnage de Monte Carlo

But

- Apprendre v_π d'après les épisodes vécus en suivant π :

$$S_1, A_1, R_1, \cdots, s_k \sim \pi$$

- La fonction de valeur d'un état v_π est donnée par :

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s]$$

$$\text{avec } G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots + \gamma^{T-1} R_T$$

Monte Carlo

Simplest way to estimate the value $\rightarrow$ mean of the returns

Échantillonnage de Monte Carlo

First Visit Monte-Carlo Policy Evaluation

$$\hat{v}_\pi(s) = \frac{S(s)}{N(s)}$$

- $N(s)$: compteur incrémenté si s est vu au moins **une fois** dans un épisode
- $S(s) \leftarrow S(s) + G_t$: retour total pour l'état s

Échantillonnage de Monte Carlo

Every Visit Monte-Carlo Policy Evaluation

$$\hat{v}_\pi(s) = \frac{S(s)}{N(s)}$$

- $N(s)$: compteur incrémenté **à chaque fois** que s est vu dans un épisode
- $S(s) \leftarrow S(s) + G_t$: retour total pour l'état s

Moyenne incrémentielle

$$
\begin{aligned}
\mu_k &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j \\
&= \frac{1}{k}\Big(x_k + \sum_{j=1}^{k-1} x_j\Big) \\
&= \frac{1}{k}(x_k + (k-1)\mu_{k-1}) \\
&= \mu_{k-1} + \frac{1}{k}(x_k - \mu_{k-1})
\end{aligned}
$$

Moyenne incrémentielle

$$
\begin{aligned}
\mu_k &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j \\
&= \frac{1}{k}\Big(x_k + \sum_{j=1}^{k-1} x_j\Big) \\
&= \frac{1}{k}(x_k + (k-1)\mu_{k-1}) \\
&= \mu_{k-1} + \frac{1}{k}(x_k - \mu_{k-1})
\end{aligned}
$$

- $V(s)$ est mis a jour après chaque épisode :

foreach S_t **do**

  $N(S_t) \leftarrow N(S_t) + 1$ $V_\pi(S_t) \leftarrow V(S_t) + \frac{1}{N(S_t)}(G_t - V(S_t))$

end

Moyenne incrémentielle

$$
\begin{aligned}
\mu_k &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j \\
&= \frac{1}{k}(x_k + \sum_{j=1}^{k-1} x_j) \\
&= \frac{1}{k}(x_k + (k-1)\mu_{k-1}) \\
&= \mu_{k-1} + \frac{1}{k}(x_k - \mu_{k-1})
\end{aligned}
$$

- $V(s)$ est mis a jour après chaque épisode :

  foreach S_t **do**
  $N(S_t) \leftarrow N(S_t) + 1$ $V_\pi(S_t) \leftarrow V(S_t) + \frac{1}{N(S_t)}(G_t - V(S_t))$
  end

- En cas de non stationnarité, la moyenne peut être mise à jour *ie.* le poids des anciens épisodes $\rightarrow 0$:

$$V_\pi(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(G_t - V(S_t))$$

$$\alpha << 1$$

Monte Carlo prediction : pros and cons

pros

- Intuitif
- Facile à implémenter
- Sans biais

Cons

- Ne peut être mis à jour qu'après un épisode complet *ie.* ne peut pas être utilisé *online*
- Long à converger

Table of Contents

De Monte Carlo à TD(0)

Monte Carlo

- Mise à jour basée sur le retour G_t :

$$v_\pi(S_t) \leftarrow v(S_t) + \alpha(G_t - v(S_t))$$

- *Offline*

De Monte Carlo à TD(0)

Monte Carlo

- Mise à jour basée sur le retour G_t :

$$v_\pi(S_t) \leftarrow v(S_t) + \alpha(G_t - v(S_t))$$

- *Offline*

TD(0)

- D'après les équations de Bellman :

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}[R_{t+1} + v_\pi(S_{t+1})|S_t = s]$$

- Mise à jour basée sur le retour estimé $R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1})$:

$$v_\pi(S_t) \leftarrow v_\pi(S_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1}) - v_\pi(S_t))$$

- *Online*

De Monte Carlo à TD(0)

Monte Carlo

- Mise à jour basée sur le retour G_t :

$$v_\pi(S_t) \leftarrow v(S_t) + \alpha(G_t - v(S_t))$$

- *Offline*

TD(0)

- D'après les équations de Bellman :

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}[R_{t+1} + v_\pi(S_{t+1}) | S_t = s]$$

$$v_\pi(S_t) \leftarrow v_\pi(S_t) + \alpha(\underbrace{\underbrace{R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1})}_{\text{TD Target}} - v_\pi(S_t)}_{\text{TD Error } = \delta_t})$$

Temporal Difference

TD(0)

Intuition : Estimation de la valeur basée sur la connaissance de l'état suivant

$$V_\pi(S_t) \leftarrow V_\pi(S_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma V_\pi(S_{t+1}) - V_\pi(S_t))$$

Temporal Difference

TD(0)

Intuition : Estimation de la valeur basée sur la connaissance de l'état suivant

$$V_\pi(S_t) \leftarrow V_\pi(S_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma V_\pi(S_{t+1}) - V_\pi(S_t))$$

Généralisation : *n-step*

Généralisation possible en se basant sur les n état suivants.

- D'après les équations de Bellman :

$$G_t^{(n)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots + \gamma^n v_\pi(S_{t+n})$$

- Mise à jour de la valeur :

$$V_\pi(S_{S_t}) \leftarrow V_\pi(S_t) + \alpha(G_t^{(n)} - V_\pi(S_t))$$

Temporal Difference

TD(0)

Intuition : Estimation de la valeur basée sur la connaissance de l'état suivant

$$V_\pi(S_t) \leftarrow V_\pi(S_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma V_\pi(S_{t+1}) - V_\pi(S_t))$$

Généralisation : *n-step*

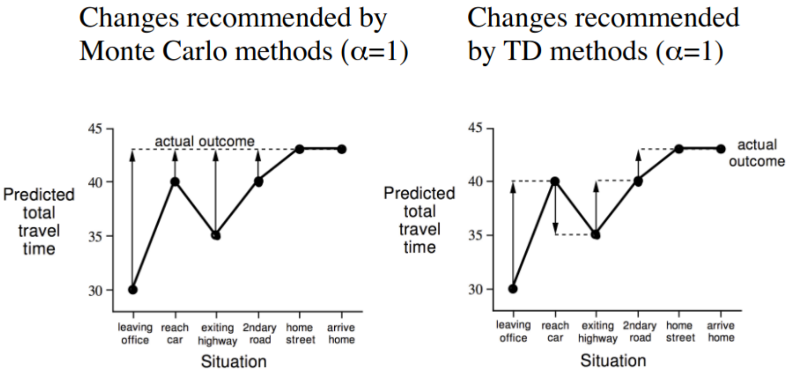
Généralisation possible en se basant sur les n état suivants.

- Équivalent à Monte-Carlo pour $n \to \infty$
- Nécessite de stocker n récompenses et valeurs d'état

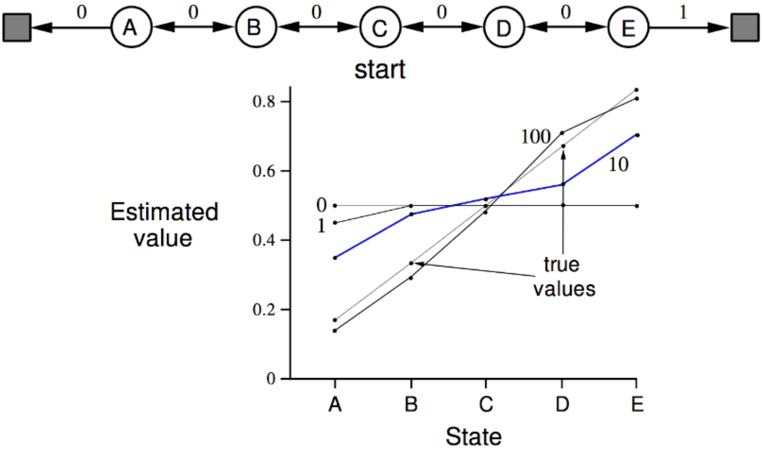
Exemple

State	Elapsed Time (minutes)	Predicted Time to Go	Predicted Total Time
leaving office	0	30	30
reach car, raining	5	35	40
exit highway	20	15	35
behind truck	30	10	40
home street	40	3	43
arrive home	43	0	43

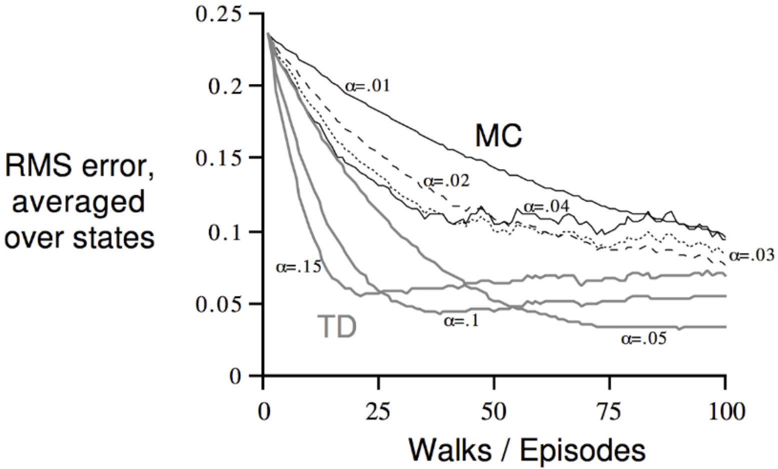
Exemple : MC vs TD



Exemple : MC vs TD



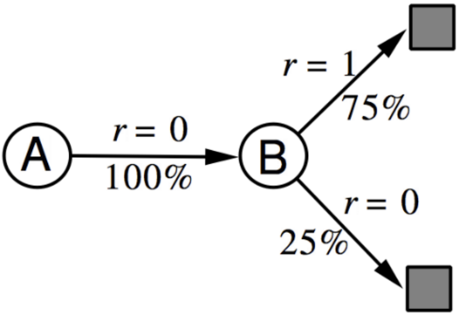
Exemple : MC vs TD



Exemple : MC vs TD

Two states A, B; no discounting; 8 episodes of experience

A, 0, B, 0
B, 1
B, 1
B, 1
B, 1
B, 1
B, 1
B, 0



What is $V(A), V(B)$?

MC vs TD

- batch-MC converge vers la solution correspondant aux moindre carrés
- Batch TD(0) converge vers le maximum de vraisemblance d'après la dynamique du modèle conditionné par la politique

Table of Contents

TD(λ)

TD(λ)

- Utilisation de toutes les approximation du retour :

$$G_t^{\lambda} = (1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}G_t^{(n)}$$

- (*forward-view*) TD(λ) :

$$V_\pi(S_t) \to V_\pi(s_t) + \alpha\big(G_t^{\lambda} - V_\pi(S_t)\big)$$

- Nécessite des épisodes complets (comme MC)
- *offline*

TD(λ)

TD(λ)

- Utilisation de toutes les approximation du retour :

$$G_t^\lambda = (1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} G_t^{(n)}$$

- (*forward-view*) TD(λ) :

$$V_\pi(S_t) \to V_\pi(s_t) + \alpha\big(G_t^\lambda - V_\pi(S_t)\big)$$

- Nécessite des épisodes complets (comme MC)
- *offline*
- Peut être approché *online* (*backward-view*)

Eligibility traces

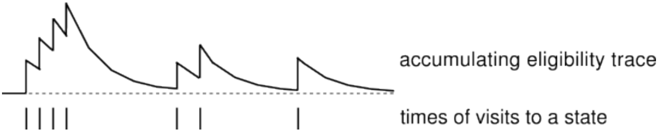
- Plutôt que de regarder les n états suivants, on peut regarder les n états précédents
- Pondération donnée par l'éligibilité des états observées

Éligibilité

Mise à jour basée sur les états *récents* et *fréquents* :

$$E_0(s) = 0$$

$$E_t(s) = \gamma\lambda E_{t-1}(s) + \mathbb{1}_{S_t=s}$$



Backward view TD(λ)

- Éligibilité calculée pour chaque état
- Mise à jour de tous les états à chaque itération
- L'erreur TS δ_t est pondéré par l'éligibilité

$$\delta_t = R_{t+1} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t)$$

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha \delta E_t(S_t)$$

Plan

Table of Contents

Model Free Control

- Précédemment (programmation dynamique), l'amélioration *greedy* de la politique se fait selon la fonction de valeur d'état :

$$\pi_{k+1}(s) = \underset{a \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\ q_\pi(s, a)$$

- $\rightarrow$ on choisit les action qui amèneront aux meilleurs états
- Nécessité de stocker la valeur de chaque état $v_\pi(s)$

Model Free Control

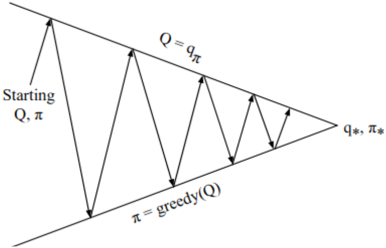
- Précédemment (programmation dynamique), l'amélioration *greedy* de la politique se fait selon la fonction de valeur d'état :

$$\pi_{k+1}(s) = \underset{a \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\ q_\pi(s, a)$$

- $\rightarrow$ on choisit les action qui amèneront aux meilleurs états
- Nécessité de stocker la valeur de chaque état $v_\pi(s)$

- Sans connaître la dynamique du modèle, on ne sait pas quels sont les états atteignables
- $\rightarrow$ Nécessité de stocker la valeur de chaque couple (action-état) $q_\pi(s, a)$

Generalized policy iteration



- Même principe qu'en programmation dynamique
- Alternance :
  - Estimation de q_π
  - Amélioration *greedy* de la politique

GLIE

Condition **suffisante** pour la convergence vers q_{π^*}

Définition

Un processus d'amélioration de politique est dit *Greedy in the Limit with Infinite Exploration (GLIE)* si

- Tous les états-action sont explorés infiniments :

$$\lim_{k \leftarrow \infty} N_k(s, a) = \infty$$

- La politique converge vers une politique *greedy* :

$$\lim_{k \leftarrow \infty} \pi_k(a|s) = \mathbb{1}_{\underset{a \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\, q_k(s,a)}$$

GLIE

Condition **suffisante** pour la convergence vers q_{π^*}

Définition

Un processus d'amélioration de politique est dit *Greedy in the Limit with Infinite Exploration (GLIE)* si

- Tous les états-action sont explorés infiniments :

$$\lim_{k \leftarrow \infty} N_k(s,a) = \infty$$

- La politique converge vers une politique *greedy* :

$$\lim_{k \leftarrow \infty} \pi_k(a|s) = \mathbb{1}_{\underset{a \in \mathcal{A}}{\text{argmax}}\ q_k(s,a)}$$

Par exemple : un apprentissage ϵ-*greedy* est GLIE si $\epsilon_k = \frac{1}{k}$

ϵ-greedy policy iteration

Intuition : explorer continuement tout en convergent vers la politique optimale

- Toutes les actions ont une probabilité non nulle
- L'action qui maximise $q(s, a$ est prise avec la probabilité ϵ
- Les autres actions peuvent être choisie avec une probabilité ϵ

$$\pi_{\text{greedy}}(a|s) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{m} + 1 - \epsilon \text{ si } a^* = \underset{a \in \mathcal{A}}{\text{argmax}}\ q(s, a) \\ \frac{\epsilon}{m} \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $m = |\mathcal{A}|$

GLIE Monte Carlo

- Échantillonner k épisodes basés sur π : $\{S_1, A_1, R_2, \cdots, S_T\}$
- Pour chaque couple (s_t, a_t) :

$$N(s_t, a_t) \leftarrow N(s_t, a_t) + 1$$

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \frac{1}{N(s_t, a_t)}(G_t - Q(s_t, a_t))$$

- Amélioration ϵ-greedy de π :

$$\epsilon \leftarrow \frac{1}{k}$$

$$\pi \leftarrow \epsilon - \text{greedy}(Q)$$

GLIE Monte Carlo

- Échantillonner k épisodes basés sur π : $\{S_1, A_1, R_2, \cdots, S_T\}$
- Pour chaque couple (s_t, a_t) :

$$N(s_t, a_t) \leftarrow N(s_t, a_t) + 1$$

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \frac{1}{N(s_t, a_t)}(G_t - Q(s_t, a_t))$$

- Amélioration ϵ-greedy de π :

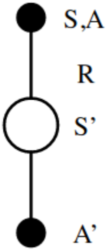
$$\epsilon \leftarrow \frac{1}{k}$$

$$\pi \leftarrow \epsilon - \text{greedy}(Q)$$

GLIE MC converge vers la fonction action-valeur optimale

Table of Contents

SARSA



$$Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha \left(R + \gamma Q(S', A') - Q(S, A) \right)$$

SARSA

Initialize $Q(s,a), \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)$, arbitrarily, and $Q(\textit{terminal-state}, \cdot) = 0$
Repeat (for each episode):
  Initialize S
  Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
  Repeat (for each step of episode):
    Take action A, observe R, S'
    Choose A' from S' using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
    $Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha\big[R + \gamma Q(S',A') - Q(S,A)\big]$
    $S \leftarrow S'$; $A \leftarrow A'$;
  until S is terminal

SARSA

Initialize $Q(s,a), \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)$, arbitrarily, and $Q(\textit{terminal-state}, \cdot) = 0$
Repeat (for each episode):
    Initialize S
    Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
    Repeat (for each step of episode):
        Take action A, observe R, S'
        Choose A' from S' using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
        $Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha\big[R + \gamma Q(S',A') - Q(S,A)\big]$
        $S \leftarrow S'$; $A \leftarrow A'$;
    until S is terminal

SARSA converge vers la politique optimale ($Q(s,a) \rightarrow q^*(s,a)$) si,

- La séquence des politiques est GLIE
- Le *learning rate* α_t vérifie les conditions suivantes :

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t = \infty$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^2 < \infty$$

Extensions

SARSA similaire à l'estimation avec TD(0) :

- On estime la fonction de valeur d'état-action $q(s, a)$ par mise à jour de la **TD Target** :

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t))$$

- **contrôle** : on cherche à suivre une politique optimale $\rightarrow$ $\pi_t = \epsilon\text{-greedy}(Q(s_t, a_t))$

Extensions

SARSA similaire à l'estimation avec TD(0) :

- On estime la fonction de valeur d'état-action $q(s, a)$ par mise à jour de la **TD Target** :

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t))$$

- **contrôle** : on cherche à suivre une politique optimale $\rightarrow$ $\pi_t = \epsilon\text{-greedy}(Q(s_t, a_t))$

L'estimation peut être étendue aux extension de TD déjà rencontrée

Table of Contents

Off-Policy learning

Intuition : Apprendre d'une autre politique

- Évaluer une politique cible $\pi(s|a)$: $v\pi(s)$, $q_\pi(s,a)$
- Suivre une politique différente (comportement) : $\mu(a|s)$

$$\{S_1, A_1, R2, ..., S_T\} \sim \mu$$

- Nombreux cas d'utilisation :
  - Apprendre d'humains
  - Ré-utiliser l'expérience passée
  - Apprendre une politique **optimale** tout en suivant une politique **exploratoire**

Importance sampling

- Espérance de $f(X)$ avec $X \sim P$:

$$\mathbb{E}_P[f(X)] = \sum P(X)f(X)$$

- Espérance de $f(X)$ par rapport à une autre distribution Q :

$$\begin{aligned} E_P[f(X)] &= \sum P(X)f(X) \\ &= \sum Q(X)\frac{P(X)}{Q(x)}f(X) \\ &= \mathbb{E}_{X\sim Q}[\frac{P(X)}{Q(X)}f(X)] \end{aligned} \tag{1}$$

Off-Policy Monte-Carlo

- Utiliser les retour générer par μ (le comportement) pour évaluer π
- Pondération du retour par le facteur de correction sur tout l'épisode :

$$G_t^{\pi/\mu} = \frac{\pi(A_t|S_t)\pi(A_{t+1}|S_{t+1})...\pi(A_T|S_t)}{\mu(A_t|S_t)\mu(A_{t+1}|S_{t+1})...\mu(A_T|S_t)}$$

- La valeur est mise à jour grâce au retour corrigé :

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(G_t^{\pi/\mu} - V(S_t))$$

- Pour que la correction soit définie : $\mu \neq 0$ si $\pi \neq 0$
- Peut entraîner des problème de stabilité

Off-Policy TD

- Utiliser les retour générer par μ (le comportement) pour évaluer π
- Pondération de la TD target facteur de correction sur pour une étape lors de la mise à jour :

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha\left(\frac{\pi(A_t|S_t)}{\mu(A_t|S_t)}(R_{t+1} + \gamma V(S_{t+1})) - V(S_t)\right)$$

- Meilleure variance et conditionnement que off-policy MC sampling

Q-learning

- Off policy TD learnging pour l'estimation de la fonction de valeur (état,action)
- Importance sampling **plus** nécessaire
- $A_{t+1} \sim \mu(.|S_{t+1})$
- On considère une action alternative $A' \sim \pi(.|S_{t+1})$
- La TD target est distribuée selon μ mais on a choisi une action A' donnée par π :

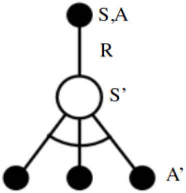
$$Q(S_t, A_t \leftarrow Q(s_t, A_t) + \alpha\Big((R_{t+1} + \gamma Q(S_{t+1}, A')) - Q(S_t, A_t)\Big)$$

Q-learning

- Choix de μ et π ?
- μ gère l'exploration
- π cherche l'optimalité
- Simple schéma off-policy à partir d'une même politique :

$$\pi(S|A) = \text{greedy}(Q) = \underset{a'}{\text{argmax}}\ Q(S, A)$$
$$\mu(S|A) = \epsilon - \text{greedy}(Q)$$

Q-learning

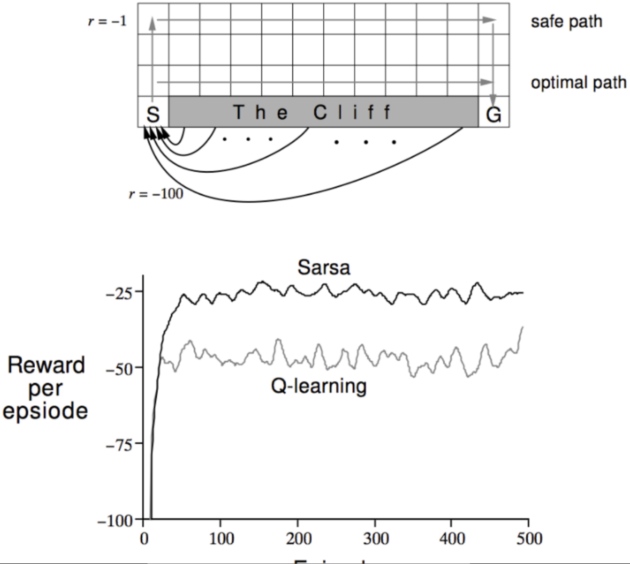


$$Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha \left(R + \gamma \max_{a'} Q(S', a') - Q(S, A) \right)$$

Q-learngin

Initialize $Q(s,a), \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)$, arbitrarily, and $Q(\textit{terminal-state}, \cdot) = 0$
Repeat (for each episode):
  Initialize S
  Repeat (for each step of episode):
    Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
    Take action A, observe R, S'
    $Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha\big[R + \gamma \max_a Q(S',a) - Q(S,A)\big]$
    $S \leftarrow S'$;
  until S is terminal

SARSA vs. QLearning



Bibliogrphie

- Reinforcement Learning : an introduction, second edition, Richard S. Sutton and Adrew G. Barto
- Reinforcement Learning courses, David Silver, DeepMind (https ://www.davidsilver.uk/)