GROUPE SCOLAIRE

LA PERFECTION

DEVOIR LIBRE N°1

NIVEAU SCO : 1SMBIOF

ANNEE SCO : 2022 /202

EXERCICE N°1 :

Soit f une fonction numérique définie sur $[0,1]$ tel que :

a) $\forall x \in [0,1]$: On a $f(x) \in [0,1]$

b) $\forall x \in [0,1]$; $\forall y \in [0,1]$: $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$

1) Montrer que : $(f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1)$ ou $(f(1) = 0 \text{ et } f(0) = 1)$

2) On suppose que : $f(0) = 0$: i) Montrer que : $\forall x \in [0,1]$: $f(x) \geq x$

ii) Déduire que : $\forall x \in [0,1]$: $f(x) = x$

EXERCICE N°2 :

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} : x^3 + 2x - 1 = 0) \Rightarrow (\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2})$;

2) Montrer que : $\left(|x| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |y| \leq 1\right) \Rightarrow \left(|4x^2y - x - y| \leq \frac{17}{16}\right)$;

3) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que : $\left(|x-1| \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{8}|x-1| \leq \left|\frac{x^2+1}{x+2} - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{1}{2}|x-1|\right)$;

4) Soient x *et* y *deux réels positifs* tel que : $x + y = 1$ et n nombre naturel non nul :

a) Vérifier que : $\frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y}$ puis déduire que : $\frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{y^n} \geq 4^n$;

b) Montrer que : $(1 + \frac{1}{x^n})(1 + \frac{1}{y^n}) \geq (1 + 2^n)^2$;

EXERCICE N°3 :

1) a) Montrer que : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$; $\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$

b) Déduire que : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$; $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+c} \geq \frac{a+b+c}{2}$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et soit a_1 *et* a_2 *et* ……. *et* a_n et b_1 *et* b_2 *et* ……. *et* b_n nombres réels Strictement positives tel que : $a_1 + a_2 + \cdots \ldots . + a_n = b_1 + b_2 + \cdots \ldots . + b_n$;

Montrer que : $\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots \ldots . + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots \ldots + a_n}{2}$

3) a) Montrer que : $\forall x \geq 3 : 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \geq 0$ (Factoriser par x^3)

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\} : 3n^3 \geq (n+1)^3$;

c) Montrer que : $\forall n \geq 3$; $3^n \geq n^3$;

EXERCICE N°4 :

1) a) Montrer que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$; $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;

b) Déduire que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$; $(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$;

2) Montrer que : $\forall (a,b,c,x,y,z) \in \mathbb{R}^6$; $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$;

3) Soient x, y et z de $\mathbb{R}^+$ tels que : $x + y + z = 1$

a) Montrer que : $x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} \leq \sqrt{xy + yz + zx}$;

b) Déduire que : $x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$;

EXERCICE N°5 :

1) Soit n un entier naturel.

On pose : $u_n = (n+1)(n+2) \dots\dots.(n+n)$ et $v_n = 1 \times 3 \times 5 \times \dots . \times (2n-1)$

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $u_n = 2^n v_n$;

2) Soit n un entier naturel.

On pose : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \dots + \frac{1}{2n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots\dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$;

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = v_n$;

3) Soit q un réel positif ; a) Montrer que :$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*) : (1+q)^n \geq 1 + nq$;

b) Déduire que : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$; $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$;

4) Montrer que : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$:[$(3^{2n+1} + 4^{n+1} - 2(-1)^n)$ est divisible par 5].

5) Montrer que : $(\forall\, n \in \mathbb{N})$; $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$;

EXERCICE N°6 :

1) Soient a et b deux entiers naturels de même parités ;

a) Montrer que : 4 divise $(a^2 - b^2)$; b) Montrer que : $\sqrt{31} \notin \mathbb{Q}$;

2) On considère l'équation suivante ; (E) : $x^8 - x^2 + 1 = 0$;

a) Montrer que l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$.

b) Montrer que l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

3) Soient a, b et c de $\mathbb{R}$; On considère les équations suivantes :

(E) : $x^2 - 2ax + bc = 0$; (F) : $x^2 - 2bx + ac = 0$ et (G) : $x^2 - 2cx + ab = 0$;

Montrer que au moins l'une des équations (E) , (F) et (G) admet une solution dans $\mathbb{R}$.

BON COURAGE

GROUPE SCOLAIRE LA PERFECTION | DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 | NIVEAU SCO : 2BAC SMBF | ANNEE SCO : 2020 / 2021

EXERCICE N°1 :

1) Donner la valeur de vérité des assertions suivantes en justifiant votre réponse :

a) $((\forall x \in \mathbb{R}),(\exists y \in \mathbb{R}) : 3x + y = 5)) \Rightarrow ((\exists y \in \mathbb{R}) : (\forall x \in \mathbb{R}),(3x + y = 5))$

b) $(\forall y \in \mathbb{R}),(\exists x \in \mathbb{R}) / x^2 - xy - y^2 = 0$;

2)a) Donner la négation de la proposition suivante :

$(\forall x \in \mathbb{R}),\ (\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2) : (a \leq x \Rightarrow b < x) \Rightarrow (a \geq b)$

b) Montrer que la négation de la proposition suivante $(P \Leftrightarrow Q)$ est $(\bar{P} \Leftrightarrow Q)$

EXERCICE N°2 :

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ; x + \frac{1}{x} \geq 2$;

2) Montrer que : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 ; (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$;

3) Déduire que : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 ; \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$;

4) Soient x et y de $[1;+\infty[$; Montrer que : $(x \neq 1 \text{ ou } y \neq 1) \Rightarrow (x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 \neq 0)$;

5) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 - |x-3| - 18 = 0$;

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x + 4$;

EXERCICE N°3 :

1) Soit $(a,b,c) \in [0,1]^3$; On pose $A = ab$ et $B = a(1-b) + b(1-a)$ et $c = (1-a)(1-b)$;

On suppose que : $A < \frac{4}{9}$ et $B < \frac{4}{9}$ et $c < \frac{4}{9}$;

a) Montrer que : $B \geq 2(\sqrt{ab} - ab)$

b) Montrer que : $ab - \sqrt{ab} + \frac{2}{9} > 0$ puis déduire $ab < \frac{1}{9}$;

c) Montrer que : $c < \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{5}{9} < a + b - ab$;

d) Déduire que : $B \geq \frac{4}{9}$; Que peut-on conclure ?

2) a) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$; vérifier que : ($a^2 + b^2$ est pair) $\Leftrightarrow$ (les entiers a et b ont même parités) ;

b) Montrer que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3 : a^2 + b^2 - 8c \neq 6$; (utiliser l'absurde)

3)Soient x ; y et z trois nombres rationnels tel que : $x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 18$;

Montrer que : $(x \neq y \text{ ou } y \neq z \text{ ou } x \neq z)$; (utiliser l'absurde)

EXERCICE N°4 :

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 2$; 6 divise $[n(5n^2+1)]$;

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \geq 7)$; $2^n \geq n^2 + 5n$;

3) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^2 = \frac{n(n+1)}{2}$;

BON COURAGE

LYCEE PRINCESSE LALLA AMINA

DEVOIR SURVEILLE N°1

NIVEAU : 1BACSMBIO
ANNEE SCO : 2021/20

EXERCICE N°1

1) a) Vérifier que : $\forall (x ; y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 ; x + y \geq 2\sqrt{xy}$;

b) Montrer que : $\forall (a ; b ; c) \in (\mathbb{R}^{+*})^3 ; \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1\right) \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) \geq 8$;

2) Soient x et y de l'intervalle $[0 ; 1]$ on pose : $a = xy$ et $b = x(1-y) + y(1-x)$;

a) Montrer que : $b \geq 2\sqrt{a} - 2a$

b) Montrer que : $a \geq \frac{4}{9}$ ou $b \geq \frac{4}{9}$ (Absurde)

3) Montrer que : $(\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2); \left(2\sqrt{x^2+1} + 3\sqrt{y^2+1} = 5\right) \Leftrightarrow (x = y = 0)$;

4) a) Montrer que : $(\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2) : (x^2 + xy + y^2 + 1 > 0)$;

b) Déduire que : $(\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2) ; (x \neq y) \Rightarrow (x^3 + x \neq y^3 + y)$;

5) a) Montrer que : $(\forall n \in (\mathbb{N}^*) ; (9$ *divise* $(16^n + 12n - 1))$;

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{k=1}^{k=n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4\times 5^{n+1} - (5+n)\,4^{n+1}}{5^n}$;

EXERCICE N°2

1) On considère les ensembles : $A = \left\{\frac{-2p-1}{2p+2} / p \in \mathbb{N}\right\}$; $B = \left\{\frac{2q+2}{2q+1} / q \in \mathbb{N}\right\}$ et $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$

a) Montrer que : $A \subset C$;

b) Montrer que : $C \subset A \cup B$;

2) On considère les ensembles : $E = \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $F = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{4k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\}$;
Montrer que : $E \cap F = \Phi$;

3) Soient A ; B et C trois parties d'un ensembles E ;

a) Montrer que : $A \subset C \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;

b) Montrer que : $(A \cap C \neq \Phi$ et $B \cap C = \Phi) \Rightarrow (A \cap \bar{B} \neq \Phi)$;

4) On considère les ensembles : $G = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2ax + b = 0\}$ et $H = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2cx + d = 0\}$;

Avec $a ; b ; c$ et d sont des réels tel que : $b + d = ac$;

Montrer que : $(\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2) : (x^2 + y^2 > xy)$; Puis déduire que : $G \neq \Phi$ ou $H \neq \Phi$;

5) On considère l'ensemble $K = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 3x + 3y \leq \frac{-9}{4}\right\}$;

a) Justifier que : $K \neq \Phi$; b) Montrer que : $K \subset [0 ; 3] \times [-3; 0]$; c) Est-ce que : $K = [0 ; 3] \times [-3; 0]$?

EXERCICE N°3

On considère l'application f de $]0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$;

1) a) Montrer que : $(\forall x \in]0 ; +\infty[) ; f(x) \leq 1$;

b) Est-ce que f est surjective ? Justifier ;

2) a) Montrer que : $(\forall x \in [1 ; +\infty[) ; f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = f(x)$;

b) Est-ce que f est injective ? Justifier ;

3) Soit l'application g la restriction de l'application f sur $[1 ; +\infty[$;

a) montrer que : $(\forall y \in]0; 1[) ; 1 - y - \sqrt{1-y} < 0$;

b) Montrer que g est bijective de $[1; +\infty[$ vers $]0; 1]$; Puis exprimer $g^{-1}(x)$ en fonction de x de $]0 ; 1]$;

4) Résoudre dans $]1 ; +\infty[$ l'équation : $g(x - 2\sqrt{x}) = 1$;

LA REUSSITE EST UNE QUESTION DE VOLONTE' ET DE CONFIANCE EN SOI

LYCEE PRINCESSE LALLA AMINA | DEVOIR SURVEILLEE N°1 | NIVEAU SCO : 2BACSMB | ANNEE SCO : 2021 / 2

EXERCICE N°1

1) a) vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $1 + x^2 \geq 2x$

b) Soient a, b et c trois réels strictement positifs ; montrer que :

$(a+b+c=3) \Rightarrow (\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}$;

2) Soient a ; b et c les longueurs des côtés d'un triangle tel que : $a + b + c = 1$;

a) montrer que : $a < \frac{1}{2}$ et $b < \frac{1}{2}$ et $c < \frac{1}{2}$; (Vous pouvez utilisez l'absurde)

b) Vérifier que : $a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{2} = \left(a^2 - \frac{a}{2}\right) + \left(b^2 - \frac{b}{2}\right) + (c^2 - \frac{c}{2})$;

c) Déduire que : $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$;

3) soient a et x deux réels tel que : $|a| \leqslant 1$ et $|x| \leqslant 1$;

a) Vérifier que : $|ax^2 + x - a| \leqslant |a|\,|x^2 - 1| + |x|$;

b) déduire que : $|ax^2 + x - a| \leqslant -x^2 + |x| + 1$; ;

c) Montrer que : $|ax^2 + x - a| \leqslant \frac{5}{4}$;

4) a) Soient x et y deux réels de l'intervalle $[1 ; +\infty[$;

Montrer que : $(x \neq y) \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \neq \sqrt{y} + \sqrt{y-1})$;

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (x^3 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2})$

5) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; Montrer que : $(4\sqrt{x+1} + 6\sqrt{2y+1} = x + 2y + 15) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ et } y = 4)$

6) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; (8 *divise le nombre* $1 + 2 \times 3^n + 5^{n+1}$) ;

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} (2^k \times 3^{k+1})$;

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) : S_n = \frac{18}{5}(6^n - 1)$;

EXERCICE N°2

1) Soient A , B et C trois parties d'un ensemble non vide E ; Etablir les implications suivantes ;

$\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ \bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C \end{cases} \Rightarrow B = C$; $\begin{cases} A \cup B = C \\ A \cap C = B \end{cases} \Rightarrow A = B = C$;

2) Soient les ensembles $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1 ; 4t+3), t \in \mathbb{R}\}$

Montrer que : A = B ;

3) Soient les ensembles $A = \{n \in \mathbb{Z} ; (|n-2| \geq 3 \Rightarrow |n+2| < 2)\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} ; \frac{2n^2+5n+48}{2n+3} \in \mathbb{N}\}$

a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{2n^2+5n+48}{2n+3} = n + 1 + \frac{45}{2n+3}$;

b) Déterminer en extension les ensembles suivants : E ; F ; $E \cap F$; $E \cup F$ et $E \Delta F$;

4) a) Soient les ensembles ; $A = \{\frac{2k+4}{2k-1} ; k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{\frac{8h+7}{5h-1} ; h \in \mathbb{Z}\}$; Montrer que $A \cap B = \emptyset$;

b) Soient les ensembles : $E = \{\frac{2p+6}{2p+1} ; p \in \mathbb{Z}\}$ et $F = \{\frac{5q+3}{8q-9} ; q \in \mathbb{Z}\}$; Déterminer : $E \cap F$;

GROUPE SCOLAIRE SANAA

PROF : HADDAR

DERIVABILITE ET APPLICATION

2SM-BIOF

Exercice 1 :

Étudier la dérivabilité de f en x_0 dans chacun des cas suivants, puis donner une interprétation géométrique :

$$\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), x\neq 0 \\ f(0)=0 \\ x_o=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=\arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) , x\geq 1 \\ f(x)=(x-1)\sqrt[3]{1-x} , \quad x<1 \\ x_o=1 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x)=2x^2+b \,; x\leq 2 \\ f(x)=2ax^3+11a \,; x>2 \end{cases}$$

a et b deux nombres réels .

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 2 .

Exercice 3 :

Montrer que :

$$(\forall x\in IR): 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $[3,+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$$

1) Étudier la dérivabilité de f à droite de 3.

2) Montrer que f est dérivable sur $]3,+\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]3,+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variation de f

4)a-montrer que f est une bijection de $[3,+\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

b- Montrer que f^{-1} est dérivable en $2\sqrt[3]{2}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(2\sqrt[3]{2})$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur IR$^+$ par :

$$f(x)=3\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Étudier la dérivabilité de f à droite de 0, puis donner une interprétation géométrique.

3) Étudier les variations de f

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt[3]{x-\arctan x}$$

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est IR$^+$.

2) a- Montrer que pour tout $x\in IR^+$:

$$x-\frac{x^3}{3}\leq \arctan x\leq x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$$

b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis donner une interprétation géométrique.

3) Donner le tableau de variation de f

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

Exercice 7 :

Soit $n\in IN$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k x^{k+1}$

1) Calculer $f_n{}'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k$

Prof: Asma OULBAZ | Devoir surveillé N°: ④.S① | 1.Bac.SMF

Exercice ①:

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (\sqrt{2}+\sqrt{3})\cos^2 x + (\sqrt{2}-\sqrt{3})\sin^2 x + 2\sin x.\cos x$$

1) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) + \sqrt{2}$ — 2×1

2) Calculer: $f\left(\frac{37\pi}{8}\right)$ et $f\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ — 1+1

3) Vérifier que: $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}$ — 1,5

4) a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $f(x) = 0$. — 2

b- Résoudre dans $[0;\pi]$; l'inéquation: $f(x) \leqslant 0$. — 2

Exercice ②:

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$; par:

$$g(x) = \cos(3x) + \cos(2x).$$

1) Calculer $g\left(\frac{\pi}{5}\right)$. — 1

2) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}$; $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ — 2

3) En déduire que: $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = (1+\cos x)(4\cos^2 x - 2\cos x - 1)$ — 1,5

4) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. — 2

Exercice ③:

On considère la fonction h définie par: $h(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

1) Trouver un $\lambda \in \mathbb{R}$; tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$|x| < 1 \Rightarrow |h(x) - 1| < \lambda |x|$$ — 1,5

2) Déterminer: $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ — 1,5

Prof: Asma OULBAZ	Devoir surveillé N: ③. S(I)	1.Bac SM.F

Exercice ① : Soit (U_n) la suite définie par :

$U_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N};\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 3}{3U_n + 4}$

1,5 1) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N};\ 1 \leq U_n \leq 3$.

1 b- Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N};\ V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

1,5 a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$; et calculer V_0.

b- Ecrire V_n en fonction de n

c- Montrer que :

5 $\forall n \in \mathbb{N};\ U_n = \dfrac{2 + \frac{1}{7^n}}{2 - \frac{1}{7^n}}$

3) Calculer : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

4) Calculer :

$S_2 = \dfrac{1}{U_0 + 1} + \dfrac{1}{U_1 + 1} + \dfrac{1}{U_2 + 1} + \dots + \dfrac{1}{U_n + 1}$

Exercice ② : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

I) On considère les points :

$A(1;2)$; $B(-2;1)$; $C(-3,4)$

5 1) Calculer : $\vec{BA}\cdot\vec{BC}$ et AB et BC

5 puis ; en déduire la nature du triangle ABC.

1 2) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur (Δ) du triangle ABC passant par B

II) On considère les points : $\Omega(2;-1)$ et $E(2;-2)$ et $F(2;2)$ et $H(2;3)$

1; 1) Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et passant par le point A.

1; 2) Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}')$ de diamètre $[EF]$.

1,5 3) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$; puis déterminer les points d'intersection s'ils existent.

Exercice ③ : Soit $m \in \mathbb{R}$; et $(\mathscr{C}_m)$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que :

$x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 2m - 1 = 0$

1 1) Montrer que $(\mathscr{C}_m)$ est un cercle de centre $\Omega_m(m;-2m)$ et de rayon $r_m = |m-1|$

1 2) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m varie sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que : $|m| \geq |m-1| \iff m \geq \frac{1}{2}$

b) Discuter selon les valeurs de m la position relative de : $(\Delta): 3x + 4y = 0$ et $(\mathscr{C}_m)$

Prof : Asma OULBAZ | Devoir surveillé N° ④ . S ① | 1. Bac. SMF

Exercice ① :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (\sqrt{2}+\sqrt{3})\cos^2 x + (\sqrt{2}-\sqrt{3})\sin^2 x + 2\sin x . \cos x$$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) + \sqrt{2}$ — 2×1

2) Calculer : $f\left(\frac{37\pi}{8}\right)$ et $f\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ — 1+1

3) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}$ — 1,5

4) a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$. — 2

b- Résoudre dans $[0;\pi]$; l'inéquation : $f(x) \leq 0$. — 2

Exercice ② :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$; par :

$$g(x) = \cos(3x) + \cos(2x).$$

1) Calculer $g\left(\frac{\pi}{5}\right)$. — 1

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ — 2

3) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = (1+\cos x)(4\cos^2 x - 2\cos x - 1)$ — 1,5

4) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. — 2

Exercice ③ :

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

1) Trouver un $\lambda \in \mathbb{R}$; tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$|x| < 1 \Rightarrow |h(x) - 1| < \lambda |x|$$ — 1,5

2) Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ — 1,5

Prof: Asma OULBAZ	Devoir surveillé N°: ①. S. (I)	1.Bac.SM.F

Exercice ①:

1,5 1) Montrer que: $\forall (x;y;a) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y > 3a \Rightarrow x > a$ ou $y > a$

1,5 2) Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2;\ xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

3) Montrer par récurrence que:

1,5 a) $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

1,5 b) $\forall n \in \mathbb{N}$; 11 divise $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$

4) On considère la proposition: P: " $(\forall y \in \mathbb{R}), (\exists x \in \mathbb{R}); 4xy > x^2 + 4$ "

0,5 a) Donner la négation de P.

1 b) Montrer que P est une proposition fausse.

1 5) Montrer que: $\forall (a;b;c) \in (\mathbb{R}^+)^3;\ (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$

1,5 6) Montrer que l'équation : (E): $4\sin x = 5x^2 - 2x + 6$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Exercice ②:

On considère les deux ensemble A et B; tq:
$A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R};\ \frac{x}{x-1} \leq 0\}$

2 1) Montrer que: $A = [-3;1]$ et $B = [0;1[$.

2,5 2) Déterminer: $A \cap B$; $A \cup B$; $C_{\mathbb{R}}^{B}$; $A \setminus B$; $A \Delta B$

1,5 3) Ecrire en extension les ensembles: $A \cap \mathbb{Z}$ et $B \cap \mathbb{N}^*$.

Exercice ③:

On considère l'ensemble E défini par:

0,75 $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + y^2 < 1\}$. Et on pose: $I = [0;2]$ et $J = [-1;1]$

0,75 1) Vérifier que $E \neq \emptyset$

0, 2) Montrer que: $t \in I \Leftrightarrow |t-1| \leq 1$

1,5 3) Montrer que: $E \subset I \times J$.

1 4) A-t-on : $E = I \times J$? Justifier.

Prof : Asma OULBAZ | Devoir surveillé N : ② . S ① | 1. Bac . SM F

Exercice ① :

Soit f une application définie de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

1 1) Montrer que :

$f(]0;+\infty[) \subset]-\infty;1]$

1 2) f est-elle surjective ? Justifier

3) Montrer que :

1 $\forall x \in [1;+\infty[\; ; \; f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = f(x)$

1 4) f est-elle injective ? Justifier

5) Soit g l'application définie par : $g : [1;+\infty[\longrightarrow]0;1]$

$x \longmapsto f(x)$

a) Montrer que :

1 $\forall y \in]0;1[\; ; \; 1 - y - \sqrt{1-y} < 0$

,5 b) Montrer que g est bijective.

,5 c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;1]$

Exercice ② :

Partie ① : On considère les deux fonctions u et v définies par :

$u(x) = x^2 - x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$

1) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions u et v en justifiant votre réponce.

,5 2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $u(x) \geqslant -\frac{1}{4}$

3) Montrer que : $\forall x \in]-1;+\infty[$; $v(x) < 1$ 0,

Partie ② : On considère la fonction numérique f définie par :

$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}$

1) Montrer que : $D_f = \mathbb{R}$ 0,

2) Vérifier que :

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = v \circ u(x)$. 0,

3) En déduire les variations de f sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2};+\infty[$. 2

Partie ③ : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(|x|)$

1) Montrer que g est paire. 0,

2) Déterminer les variations de g 2

Exercice ③ : Soit ABC un triangle.

On considère les points : C ; D et H tels que : $\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

- D le milieu du segment $[AC]$
- $H = \text{Bary}\{(A;5);(B;2);(C;-3)\}$

1) Montrer que G est le milieu de $[BD]$ 1

2) Montrer que $GHAC$ est un parallélogramme. 1

3) Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient :

a) $\|5\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\| = 8$ 1,

b) $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|5\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\|$ 1,

Contrôle

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{5x^2+2x-3}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-x+1}{x^2-9}$
$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x+11}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{14-x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x+\sin 3x}{x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x+2-\sqrt{1-x}}$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{4x^2+x}-2x+1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\sqrt{\sin x}-\sin x\sqrt{\tan x}}{x^3\sqrt{x}}$	

Exercice2

a et b deux réels . on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{(a-1)x^2+(b+2)x-1}{x-1} & ; \quad x>1 \\ f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x^2-\sqrt{x}} & ; \quad 0<x<1 \end{cases}$$

1) a) on suppose $a\neq 1$. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) on suppose $a=1$ étudier la limite $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) pour quelle valeur de a et b a-t-on $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

3) a) déterminer suivant a et b la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$

b) montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=1$

c) déterminer a et b pour que admette une limite au point 1

Exercice3

On pose $F(x)=\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)-1$

1) calculer $F\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $F\left(\dfrac{-3\pi}{8}\right)$

2) a) montrer que $2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x-\sin 2x)$

et $2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x+\sin 2x)$

b) en déduire que $F(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

c) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $F(x)=\dfrac{1}{2}$

3) résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation $F(x)>0$

Exercice 4

Soit h la fonction telle que $h(x)=\sin(2x)\,E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ |h(x)-2|\leq|\sin 2x|+\left|\dfrac{\sin 2x}{x}-2\right|$

2) déduire que $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=2$

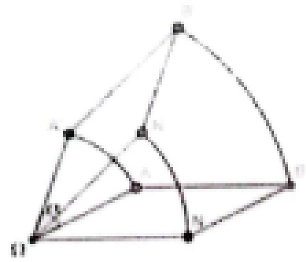
3) montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=0$

Bonus :

Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{x}$

(4pts) **Question de cours**

1. Soit R la rotation de centre Ω et d'angle α et soient $A; B$ deux points du plan avec $A \neq \Omega$; $B \neq \Omega$; $A \neq B$; On pose $R(A) = A'$; $R(B) = B'$ et on considère les points $N; N'$ tel que $\overrightarrow{\Omega N} = \overrightarrow{AB}$ et $R(N) = N'$



(1pts) (a) Montrer que $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}\right) \quad [2\pi]$

(1pts) (b) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha \quad [2\pi]$

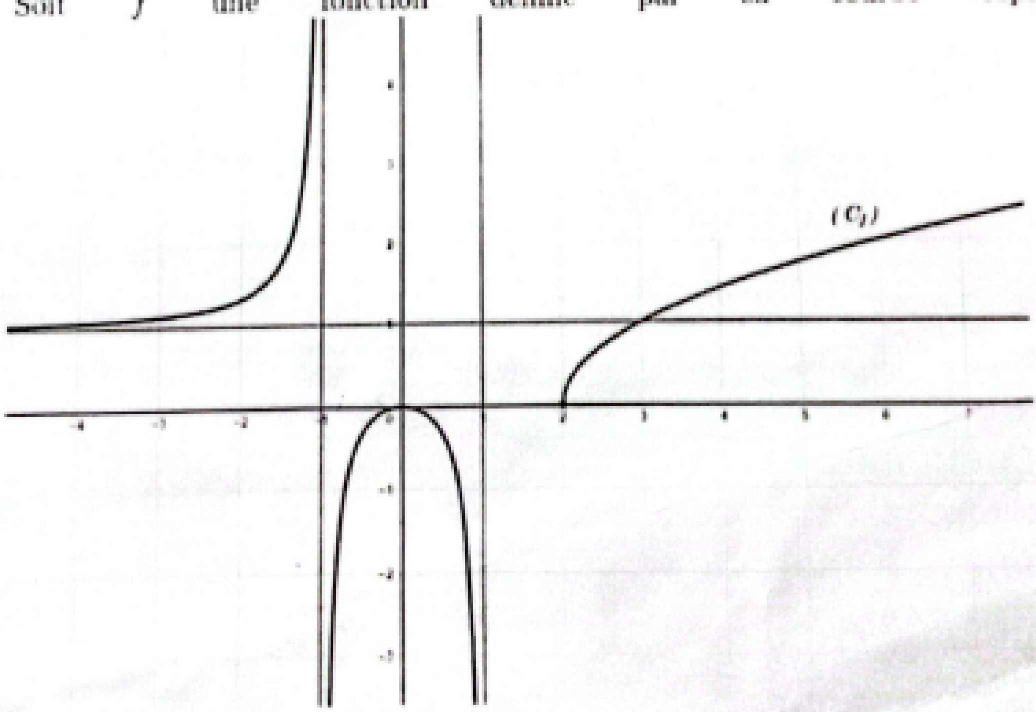
2. Soit deux fonction définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$

(1pts) (a) Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = +\infty$

(1pts) (b) Justifier avec des exemples pourquoi $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée

(4pts) **Exercice 1**

Soit f une fonction définie par sa courbe représentative suivante



(0.5pts) 1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.

(3.5pts) 2. Déterminer en justifiant votre réponse les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

(9pts) **Exercice 3**

(1pts) 1. Montrer que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$

2. On pose $f(x) = \frac{\sqrt{x^m+1}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$ avec n et m deux entiers naturels.

(1pts) (a) Vérifier que $(\forall x \neq 0) f(x) = \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{x^m+1}+\sqrt{1-x^m}}$

(3pts) (b) Étudier la limite $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ dans les cas suivants : $m > n$; $m = n$; $m < n$.

(2pts) 3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-1}{x-1} = n$

(1pts) 4. Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^{n+1}-1}{x^n-1} = \dfrac{n+1}{n}$

(2pts) 5. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = 1$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos x}{x+\sin x} = 1$

(3pts) **Exercice 2**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = (x^2+x)E\left(\frac{1}{x}\right) & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$

(0.5pts) 1. Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $1-x^2 < f(x) \leqslant x+1$

(0.5pts) 2. En déduire que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

(0.5pts) 3. Montrer que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$

(0.5pts) 4. La fonction f admet-elle une limite en zéro ?

(0.5pts) 5. Montrer que $(\forall x \in]-\infty;0[)$ $\frac{\sqrt{2}-1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(0.5pts) 6. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (indication :prendre $x \in]1;+\infty[$)

EXERCICE 1 8 pts

Soient f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ et (C) la courbe de f

1) déterminer le domaine D_f de la fonction f 1 pts

2) calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ interpréter graphiquement les résultats obtenus 1.5 pts

3) calculer $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus 1.5 pts

4) a) montrer que f est dérivable sur D_f et que $(\forall x\in D_f)$ $f'(x)=\frac{-3x+4}{2\sqrt{(x^2-3x+2)^3}}$ 1.5 pts

b) étudier les variations de f puis donner le tableau de variation 1.5 pts

5) tracer la courbe (C) 1 pts

EXERCICE 2 6 pts

1) a) montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $21^n\equiv1+20n$ $[100]$ 1.5 p

b) déduire que $2021^{2021}\equiv21$ $[100]$ 1 pts

2) a) décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 2022 et 2025 1.5 p

b) On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation (E) $(a\vee b)^2-3(a\wedge b)^2=2022$ et on pose $d=a\wedge b$

b1) montrer que $(\exists(x,y)\in\mathbb{N}^{*2})$ $d^2((xy)^2-3)=2022$. 1 pt

b2) déduire les solutions de (E) 1 p

EXERCICE 3 6pts

Une **URNE** contient : 5 boules rouges numérotés : 1 , 1 , 1 , 0 , 2

et 4 boules vertes numérotés : 1 , 1 , 0 , 2

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'**URNE**

1) quel est le nombre de possibilité de ce tirage 1.5

2) dénombrer les ensembles suivants : A " Obtenir 3 boules de même couleur " 1.

B " 3 boules portent des numéros de somme égale à 4 " 1

C " Tirer 3 boules de même couleur **OU** portent des numéros de somme égale à 4 " 1

Problème Devoire

Rappels et définitions : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite monotone si f est croissante ou décroissante.
On dit que f est **convexe** si elle vérifie :

$$\forall x, y \in I; \forall \lambda \in [0,1]; \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ est dite **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leq M$.
De même, on dira que f est **majorée** sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \leq M$.
Soit A est une partie non vide de $\mathbb{R}$. *On suppose dans ce problème que si A est majoré, alors il existe $l \in \mathbb{R}$* tel *que :*

$$(\mathbf{H}) \qquad \begin{cases} \forall x \in A; x \leq l \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \ / \ x_\varepsilon > l - \varepsilon. \end{cases}$$

Partie I

Soit $a \in \mathbb{R}$, $I =]-\infty, a[$ $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Soit $\omega \in I$. Montrer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to \omega^-} f(x) = l$
2. Montrer que si f est non majorée, alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

On suppose dans la suite que le résultat de la question 1 s'étend à $+\infty$ et pour toute fonction monotone, c'est *à-dire si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone alors il existe $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.*

Partie II

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on considère $g_{x_0} : \mathbb{R}\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1. Montrer que g_{x_0} est croissante.
2. Déduire que si f est majorée, alors f est constante.
3. Montrer que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$.
4. **Application** :
   (a) Montrer qu'il existe $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.
   (b) On suppose que $l \in \mathbb{R}$. Montrer que la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - lx$ existe.
   indication : considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - lx$ et montrer qu'elle est décroissante

Partie III

e plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit Ω le point de coordonné $(3;1)$. Considérons un poi
f variant sur l'axe (Ox), d'abscisse x. Soit M' le point d'intersection de (ΩM) et l'axe (Oy). Posons $f(x) = y_{}$
ı $y_{M'}$ désigne l'ordonné du point M'.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Conjecturer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$.
3. Expliciter $f(x)$ et retrouver les résultats précédents.