

Wiskunde voor KI - deel I

§3.2 Set definitions

$A \subseteq B$ $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
laat $Y = \{1, 2\}$ $1 \in Y$
 $\{1\} \subseteq Y$ $1 \in \{1\} \rightarrow 1 \in Y$
 $A \not\subseteq B$ $\exists x(x \in A \rightarrow x \notin B)$
 $A = B$ $\forall A \forall B(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$
 $\mathcal{P}(A)$ $\{X \mid X \subseteq A\}$
 $a \in \mathcal{P}(A)$ $\iff a \subseteq A$
 $a \in A$ $\neq a \subseteq A$
 $\mathcal{P}(A)$ 2^i elementen voor $A = \{n_1, \dots, n_i\}$
 $\mathcal{P}(\{a, b\})$ $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

§3.3 Set operations

$A \cup B$ (union) $\{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$
 $A \cap B$ (intersection) $\{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$
 A en B zijn disjoint wanneer $A \cap B = \emptyset$
set difference $A - B$ (of \setminus) $\{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$
Cartesian product $A \times B$ $\{(a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in B\}$
 $\{a, b\} \times \{1, 2\}$ $\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$
 $A \times \emptyset$ is gelijk aan \emptyset

§3.4 Families of Sets

$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ $\{x \mid x \in A_n \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}$
 $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$ $\{x \mid x \in A_n \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}$
geen volgorde in \bigcup daarom ook goed: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \{1, 2, \dots, 3i\}$... $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \mathbb{N}$, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = \{1, 2, 3\}$
family of sets \mathcal{A} $\forall X(X \in \mathcal{A} \rightarrow X \text{ is een set})$
 \mathcal{A} is indexed by I $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$
 $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ $\{x \mid x \in A \text{ for some } A \in \mathcal{A}\}$
 $\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$ $\{x \mid x \in A \text{ for all } A \in \mathcal{A}\}$
als $\mathcal{A} = \emptyset$ dan $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X = \emptyset$
als $\mathcal{A} = \emptyset$ dan is $\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$ ongedefinieerd

§4 Functies

Een functie (map) f van A naar B , $f: A \rightarrow B$, is een subset $F \subseteq A \times B$ zodat voor elke $a \in A$ één paar $(a, b) \in F$ bestaat. A is het domein, B het codomein.
range van $f: A \rightarrow B$ $\{b \in B \mid \exists a \in A(f(a) = b)\}$
 $f: A \rightarrow B$ $f(x) \in B$

union of disjoint subsets $\begin{cases} x, & \text{if } x \geq 0 \\ -1, & \text{if } x < 0 \end{cases}$

not disjoint, but well-defined $\begin{cases} x^2, & \text{if } x \geq 3 \\ x + 6, & \text{if } x \leq 3 \end{cases}$

well-defined potential problems don't occur
equal functions (A, B, F) zijn gelijk
constante $f: A \rightarrow B$ $\exists(b \in B) \forall(a \in A)(f(a) = b)$
identiteit(1_x) $f: A \rightarrow A$ $\forall(a \in A) f(a) = a$
inclusie $f: A \rightarrow B$ $\forall(a \in A)(A \subseteq B \wedge f(a) = a)$
gegeven $f: A \rightarrow B$ en $C \subseteq A$:
restrictie $f|_C: C \rightarrow B$ $\forall(c \in C)(f|_C(a) = f(a))$
gegeven $f: A \rightarrow B$ en $C \supseteq A$:
extensie $g: C \rightarrow B$ van f $\forall(a \in A)(g(a) = f(a))$
projectie $\pi_1: A \times B \rightarrow A$ $\pi_1(a, b) = a$
projectie $\pi_2: A \times B \rightarrow B$ $\pi_2(a, b) = b$

§4.2 Inverse Image

Laat functie $f: A \rightarrow B$, subsets $P \subseteq A$ en $Q \subseteq B$
image set $P: f(P)$.. $\{b \in B \mid b = f(p) \text{ for some } p \in P\}$
inverse set $Q: f^{-1}(Q)$ $\{a \in A \mid f(a) \in Q\}$
 $f^{-1}(Q)$ a subset of A
inverse set: $f^{-1}(Q)$ always defined for $Q \subseteq B$
inverse function: f^{-1} doesn't always exist
 g inverse voor f $f(g(x)) = 1_B \wedge g(f(x)) = 1_A$
if f^{-1} exists $f^{-1}: B \rightarrow A$ (not subset of A)

§4.4 ...jective functions

injectie iedereen heeft een eigen stoel
injectie $\forall(x, y \in A)(x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$
injectie $\forall(x, y \in A)(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$
surjectie alle stoelen zijn gevuld
surjectie $\forall(b \in B) \exists(a \in A)(f(a) = b)$
bijectie zowel injective als surjective
bijectief: $A \rightarrow B$ A en B evenveel elementen
als f bijectie dan f^{-1} bijectie
 $f: X \rightarrow Y$ een bijectie desda f^{-1} bestaat

§5.1 Relations

relation R from A to B $\bar{R} \subseteq A \times B$
 aRb if $(a, b) \in R$
Laat R en S relaties van A naar B zijn:
 $R = S$ $\forall(a \in A, b \in B)(aRb \iff aSb)$
 $R[x]$ $\{y \in B \mid xRy\}$
reflexive $\forall(x \in A)(xRx)$
symmetric $\forall(x, y \in A)(xRy \rightarrow yRx)$
transitive $\forall(x, y, z \in A)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

§5.2 Equivalence

equivalence reflexive, symmetric and transitive
quotient set A/\sim $\{[x] \mid x \in A\}$
partition punten van een taart

A partition of A is a family \mathcal{D} of non-empty subsets of A such that:

partition #1 $(P, Q \in \mathcal{D} \wedge P \neq Q \rightarrow P \cap Q = \emptyset)$
partition #2 $\bigcup_{P \in \mathcal{D}} P = A$

§6 Infinity

1: basisstap bewijs $P(0)$
2: inductiestap bewijs $\forall(n \in \mathbb{N})(P(n) \rightarrow P(n+1))$
zelfde kardinaliteit $X \sim Y$ als $f: X \rightarrow Y$ bijectie
 $\mathbb{N} \sim$ $\mathbb{N}_{>0} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \cup \{\{0\}\} \rightarrow \mathbb{N}$ $\begin{cases} f(\{0\}) = 0 \\ n \in \mathbb{N}: f(n) = n + 1 \end{cases}$

als $A \sim B$ dan $B \sim A$
als $A \sim B$ en $B \sim C$ dan $A \sim C$
 X heet finite $\exists(n \in \mathbb{N})(X \sim \{1, 2, \dots, n\})$
 A is finite $B \subseteq A \rightarrow B$ is finite
 X heet infinite als $X \neq \text{finite}$
countably infinite $\sim \mathbb{N}$
countable finite of $\sim \mathbb{N}$
uncountable not countable

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ voor $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$... $f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{als } n > 0 \\ -2n, & \text{als } n \leq 0 \end{cases}$

$f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$ $\exists q \forall i(f(i) \geq f(i))$

Een subset van de set colleges Wiskunde voor KI 2017-2018 door Benjamin Rin. Verzameld door R. Grouls.

Notatie: vanwege ruimtegebruik gebruik ik soms $\forall(a \in A)(\dots)$ in plaats van $\forall a(a \in A \dots)$.