

## SEBARAN NORMAL

1. Memiliki dua parameter, yaitu: nilai tengah ( $\mu$ ) dan ragam ( $\sigma^2$ )
2. Suatu peubah acak  $X$  yang menyebar normal dengan nilai tengah  $\mu$  dan ragam  $\sigma^2$  dapat dinyatakan dalam notasi berikut:  $X \sim (\mu, \sigma^2)$
3. Distribusi (sebaran) normal dengan nilai tengah 0 dan ragam 1 dikatakan sebagai distribusi normal baku, dan pada umumnya dinotasikan sebagai peubah acak  $Z$ .  $\rightarrow Z \sim (0,1)$

$$\text{Rumus : } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Keterangan:

$X$  : Peubah acak yang diamati

$\bar{x}$  : Nilai tengah contoh

$\mu$  : Nilai tengah populasi

$\sigma$  : Simpangan baku populasi

4. Tabel Z digunakan untuk membaca  $P(Z \leq k)$  atau  $P(Z < k)$
5. Beberapa kaidah peluang
  - a)  $P(Z \geq k) = 1 - P(Z \leq k)$
  - b)  $P(Z > k) = 1 - P(Z < k)$
  - c)  $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$
  - d)  $P(Z \leq a \text{ atau } Z \leq b) = P(Z \leq a) + P(Z \geq b)$

### Contoh:

1. Peubah acak  $Z$  menyebar normal dengan nilai tengah 0 dan simpangan baku 1 ( $Z \sim (0,1)$ ). Dengan menggunakan tabel sebaran normal baku. Tentukan:
  - a.  $P(Z < 2.3) = \dots$
  - b.  $P(Z > 1.96) = \dots$
  - c.  $P(-1.96 < Z < 1.96) = P(|Z| < 1.96) = \dots$
  - d.  $P(Z < -1.64) + P(Z > 1.64) = P(|Z| > 1.64) = \dots$
  - e.  $P(Z > z) = 0.05$
2. Pengeluaran per bulan mahasiswa diketahui menyebar normal dengan nilai tengah 500 ribu dan simpangan baku sebesar 84 ribu.
  - a. Berapa peluang pengeluaran per bulan mahasiswa lebih dari 750 ribu?
  - b. Berapa peluang pengeluaran mahasiswa antara 416 ribu sampai 584 ribu?
  - c. Jika 10% mahasiswa kesulitan dalam ekonomi dan mempunyai pengeluaran paling kecil. Tentukan batas maksimal dari besarnya pengeluaran mahasiswa tersebut.

### Jawab:

1.  $Z \sim (0,1) \rightarrow$  Nilai peluang dapat dilihat pada tabel normal baku
  - a.  $P(Z < 2.3) = \mathbf{0.9893}$
  - b.  $P(Z > 1.96) = 1 - P(Z < 1.96)$   
 $= 1 - 0.9750$   
 $= \mathbf{0.0250}$
  - c.  $P((-1.96 < Z < 1.96) = P(|Z| < 1.96)$   
 $= P(Z < 1.96) - P(Z < -1.96)$   
 $= 0.9750 - 0.025$   
 $= \mathbf{0.950}$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } P(Z < -1.64) + P(Z > 1.64) &= P(|Z| > 1.64) \\
 &= P(Z < -1.64) + [1 - P(Z < 1.64)] \\
 &= 0.0505 + [1 - 0.9495] \\
 &= 0.0505 + 0.0505 \\
 &= \mathbf{0.101}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e. } P(Z > z) &= 0.05 \\
 \Leftrightarrow 1 - P(Z < z) &= 0.05 \\
 \Leftrightarrow P(Z < z) &= 1 - 0.05 = 0.9500
 \end{aligned}$$

Carilah nilai  $z$  di dalam tabel normal baku yang menunjukkan besarnya peluang mendekati 0.95.

Dari tabel normal diperoleh bahwa:  $P(Z < 1.64) = 0.9495$  dan  $P(Z < 1.65) = 0.9505$

Maka, nilai  $z$  yang memiliki peluang 0.95 adalah:

$$\begin{aligned}
 z &= 1.64 + \frac{(0.9500 - 0.9495)}{(0.9505 - 0.9495)}(1.65 - 1.64) \\
 &= 1.64 + \frac{0.0005}{0.001}(0.01) \\
 &= 1.64 + 0.005 \\
 &= \mathbf{1.645}
 \end{aligned}$$

2. Misalkan  $X = \text{pengeluaran mahasiswa per bulan (ribu rupiah)}$   
 $\mu = 500$  dan  $\sigma = 84$ , sehingga dapat dinyatakan:  $X \sim N(500, 84^2)$

a. peluang pengeluaran per bulan mahasiswa lebih dari 750 ribu:

$$\begin{aligned}
 P(X > 750) &= P\left(Z > \frac{750 - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= P\left(Z > \frac{750 - 500}{84}\right) \\
 &= P(Z > 2.98) \\
 &= 1 - P(Z < 2.98) \\
 &= 1 - 0.9986 \\
 &= \mathbf{0.0014}
 \end{aligned}$$

b. peluang pengeluaran mahasiswa antara 416 ribu sampai 584 ribu:

$$\begin{aligned}
 P(416 < X < 584) &= P\left(\frac{416 - \mu}{\sigma} < Z < \frac{584 - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= P\left(\frac{416 - 500}{84} < Z < \frac{584 - 500}{84}\right) \\
 &= P(-1 < Z < 1) \\
 &= P(Z < 1) - P(Z < -1) \\
 &= 0.8413 - 0.1587 \\
 &= \mathbf{0.6826}
 \end{aligned}$$

c. batas maksimal dari besarnya pengeluaran 10% mahasiswa yang mempunyai pengeluaran paling kecil:

$$P(Z < z) = 0.10 \rightarrow \text{tentukan nilai } z!$$

Dari tabel normal baku diperoleh bahwa:

- $P(Z < -1.28) = 0.1003$
- $P(Z < -1.29) = 0.0985$

Maka, nilai  $z$  yang memiliki peluang 0.10 adalah:

$$\begin{aligned} z &= -1.29 + \frac{(0.1000 - 0.0985)}{(0.1003 - 0.0985)} (-1.28 - [-1.29]) \\ &= -1.29 + \frac{0.0015}{0.0018} (0.01) \\ &= -1.29 + 0.008333 \\ &= -1.28167 \end{aligned}$$

Transformasi peubah  $Z$  menjadi peubah  $X$ :

$$\begin{aligned} z &= -1.28167 \\ \leftrightarrow \frac{x - \mu}{\sigma} &= -1.28167 \\ \leftrightarrow \frac{x - 500}{84} &= -1.28167 \\ \leftrightarrow x &= (-1.28167)(84) + 500 \\ \leftrightarrow x &= -107.66 + 500 \\ \leftrightarrow x &= \mathbf{392.34} \end{aligned}$$

Jadi, batas maksimal 10% mahasiswa dengan pengeluaran paling kecil adalah sebesar 392.34 ribu rupiah.

#### Latihan soal:

Kandungan vitamin B12 (Cyanocobalamine) pada minuman energy diketahui menyebar normal dengan nilai tengah 5mg dengan ragam  $0.0625\text{mg}^2$ . Hitunglah:

- a. Peluang kandungan vitamin B12 dalam suatu minuman energy kurang dari 5mg.
- b. Peluang kandungan vitamin B12 dalam suatu minuman energy berada di antara 2.5mg sampai 7.5mg.
- c. Jika ingin dibuat kategori kandungan vitamin B12 dalam berbagai minuman energy yang beredar di pasaran, dengan ketentuan 20% berkadar sangat tinggi, 35% berkadar tinggi, 40% berkadar sedang, dan sisanya berkadar rendah. Tentukanlah batasan kandungan vitamin B12 untuk setiap kategori.