

# Peubah Acak

---

Metode Statistika (STK 211) | Pertemuan ke-5

[rrahmaanisa@apps.ipb.ac.id](mailto:rrahmaanisa@apps.ipb.ac.id)

# Outline



- Memahami definisi dan aplikasi peubah acak (peubah acak sebagai fungsi, peubah acak diskrit dan kontinu)
- Memahami sebaran peubah acak (konsep dan sifat-sifat nilai harapan dan ragam)
- Memahami beberapa model sebaran peubah acak (Sebaran Binomial, Sebaran Poisson, Sebaran Normal)
- Memahami hampiran Normal terhadap Binomial

# Gender Discrimination



Sebuah tuntutan tahun 2001 oleh tujuh pegawai wanita mengklaim bahwa Wal-Mart Stores, Inc. lebih jarang mempromosikan pegawai wanita dibandingkan pegawai laki-laki.

Tuntutan hukum ini berkembang menjadi tuntutan tindakan kelas diskriminasi seks terbesar dalam sejarah A.S., yang mewakili lebih dari 1,5 juta karyawan (dan mantan karyawan) perempuan Wal-Mart, sebelum akhirnya pada tahun 2011, dikeluarkan putusan oleh Mahkamah Agung yang mendukung Wal-Mart.

# Question to Explore

Misalkan perusahaan Wall-Mart memiliki daftar karyawan dengan kualifikasi dan kinerja terbaik (dengan jumlah karyawan laki-laki sama dengan perempuan).

Dan akan dipilih 10 orang di antaranya yang akan diikutsertakan dalam program promosi. Bila 10 orang yang dipilih untuk promosi semuanya adalah laki-laki, maka karyawan perempuan mengklaim bahwa program ini memiliki bias gender.

Bagaimana kita bisa menyelidiki secara statistik tentang validitas klaim para karyawan perempuan?

# Thinking Ahead

Karena tidak satu pun dari 10 karyawan yang dipilih untuk promosi adalah perempuan, mungkin beberapa orang cenderung mendukung klaim perempuan tersebut.

Pertanyaan yang perlu kita pertimbangkan adalah, apakah hasil ini tidak mungkin terjadi **jika tidak ada** bias gender?

Pertanyaan yang setara adalah, jika kita melempar koin 10 kali, apakah mungkin jika kita tidak memperoleh sisi Gambar sama sekali?

# Sebaran Peluang Peubah Acak

---

# Peubah Acak

- Peubah acak adalah kuantifikasi suatu kejadian acak menjadi bilangan riil.
- Seringkali, keacakan berasal dari penarikan contoh acak atau percobaan acak.

**Apa itu sebaran?**



# Ilustrasi



- Misalnya seorang anak melempar bola basket sebanyak **2 (kali)** kali.
- Kita ingin mengamati berapa **banyaknya bola yang berhasil masuk ke ring.**
- Coba uraikan banyaknya kemungkinan dari pengamatan tersebut.
- Berapakah peluang dari setiap kemungkinan tersebut? (jika peluang bola masuk ke ring = 0.5)

# Ilustrasi

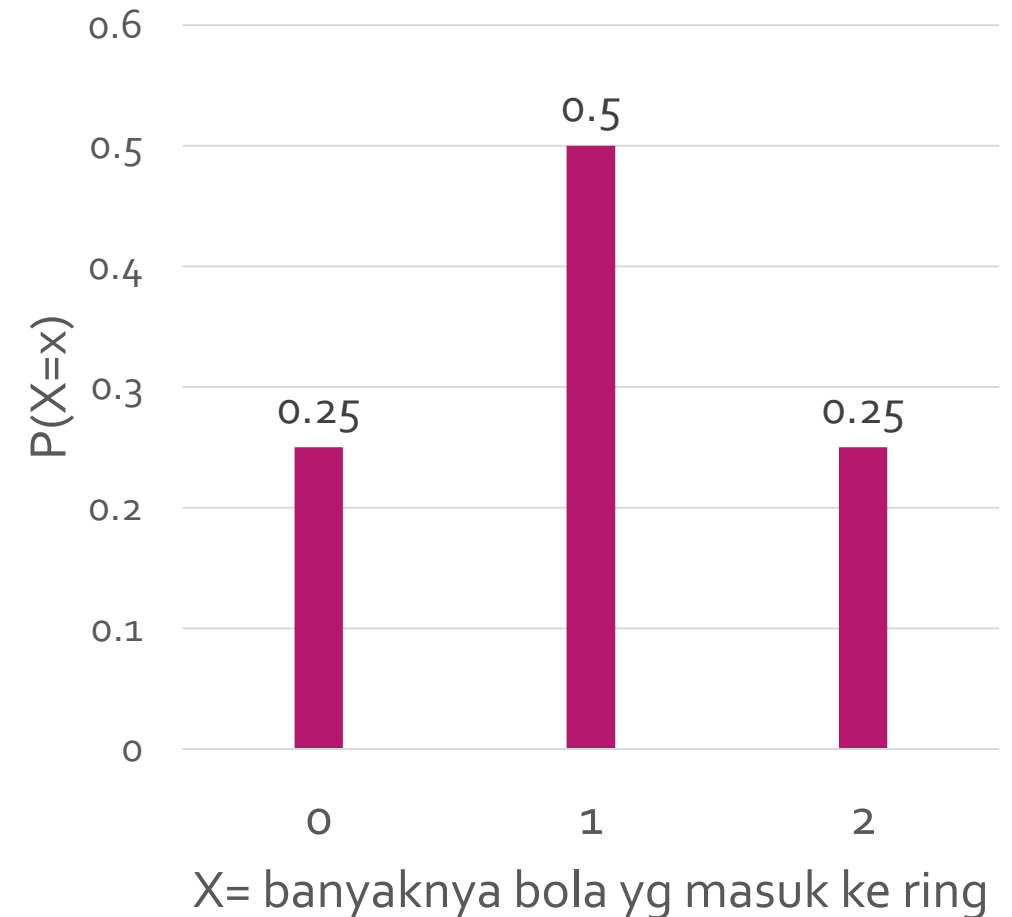
Misalnya,

Peubah  
acak  
**DISKRET**

$X$  = banyaknya bola yg berhasil masuk ke dalam ring

$X = \{0, 1, 2\}$

$X$	Possible Event	$P(X = x)$
0	Gagal, Gagal	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
1	Gagal, Sukses	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4}$
	Sukses, Gagal	
2	Sukses, Sukses	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$



# Nilai Harapan

- $E(X) = \sum_{x=0}^2 x P(X = x) = 0 \left(\frac{1}{4}\right) + 1 \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \left(\frac{1}{4}\right) = 1$
- Artinya, rata-rata banyaknya lemparan yang akan masuk ke dalam ring adalah sebanyak 1 lemparan (kalau ada 2 lemparan)

## Mean of a Discrete Probability Distribution

The **mean of a probability distribution** for a discrete random variable is

$$\mu = \sum x P(x),$$

where the sum is taken over all possible values of  $x$ .

# Ragam

- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

- $E(X^2) = \sum_{x=0}^2 x^2 P(X = x) = 0^2 \left(\frac{1}{4}\right) + 1^2 \left(\frac{1}{2}\right) + 2^2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$

- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{2} - (1)^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow \sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{0.5}$



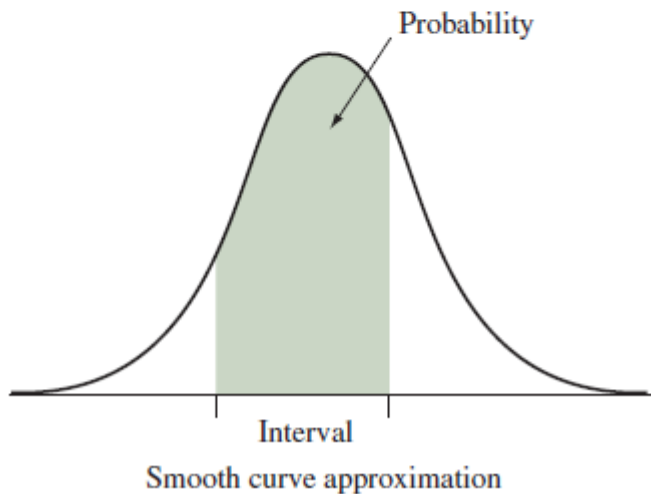
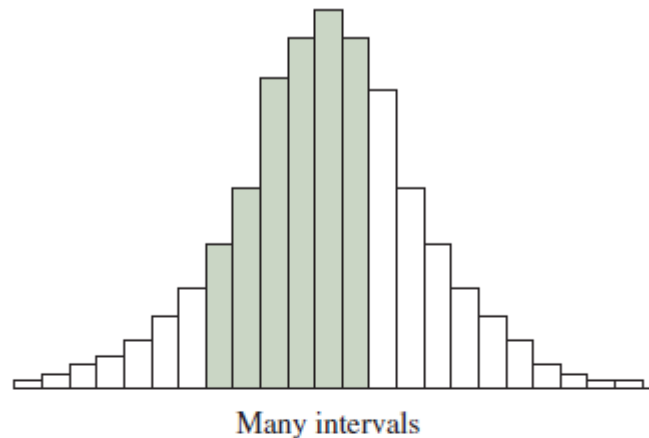
Roughly,  $\sigma$  describes how far values of the random variable fall, on the average, from the expected value of the distribution.

Diskret

Peubah Acak  
Kontinu???



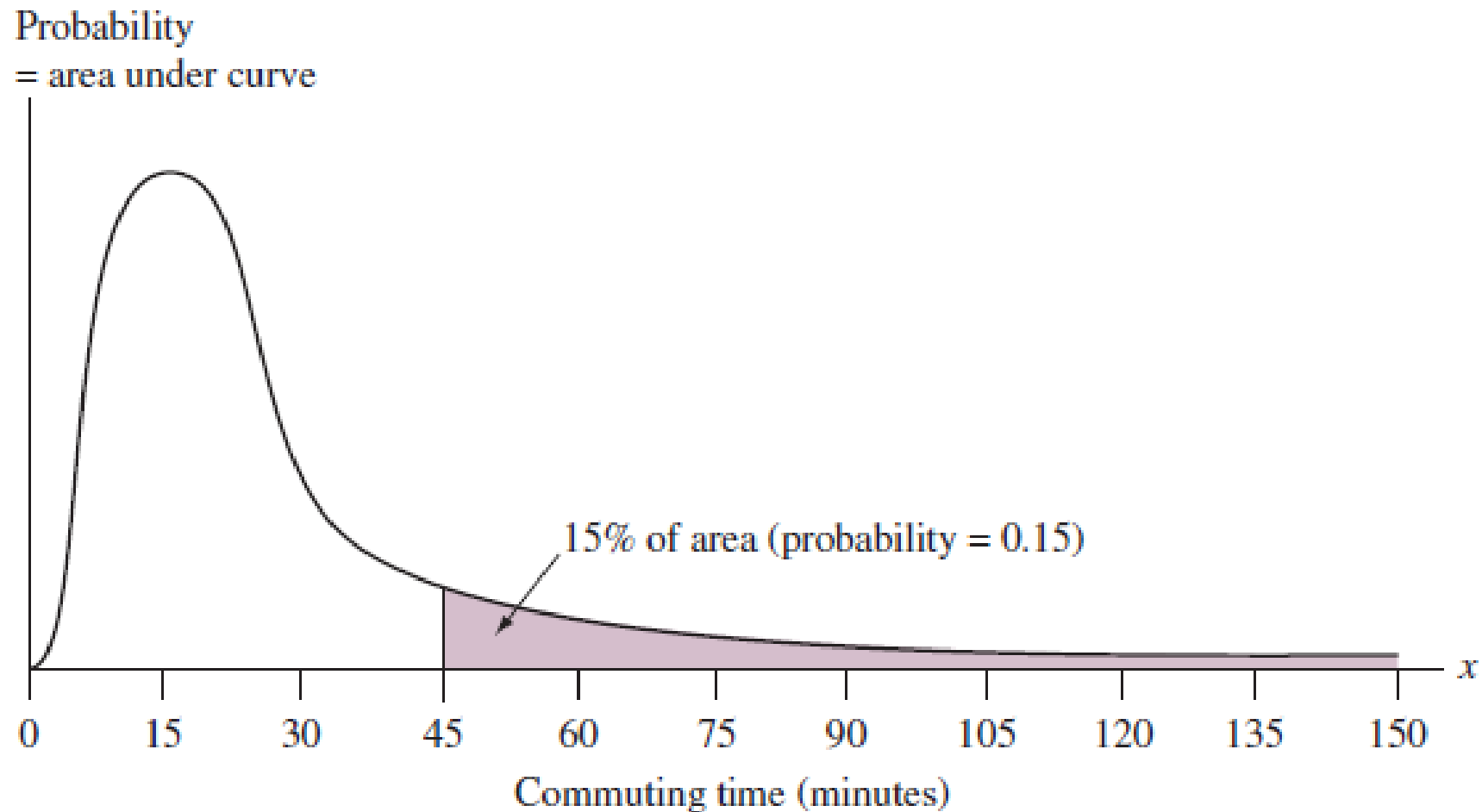
# Peubah Acak Kontinu



Misalkan  $X$  adalah suatu peubah acak kontinu, maka:

- Fungsi peluang dari peubah acak kontinu merupakan fungsi kepekatan peluang
- Integral fungsi kepekatan peluang dari semua kemungkinan nilai sama dengan 1
- Peluang dari suatu selang nilai dapat dibentuk dengan mengintegralkan fungsi kepekatan peluang dalam selang nilai tersebut.

# Ilustrasi



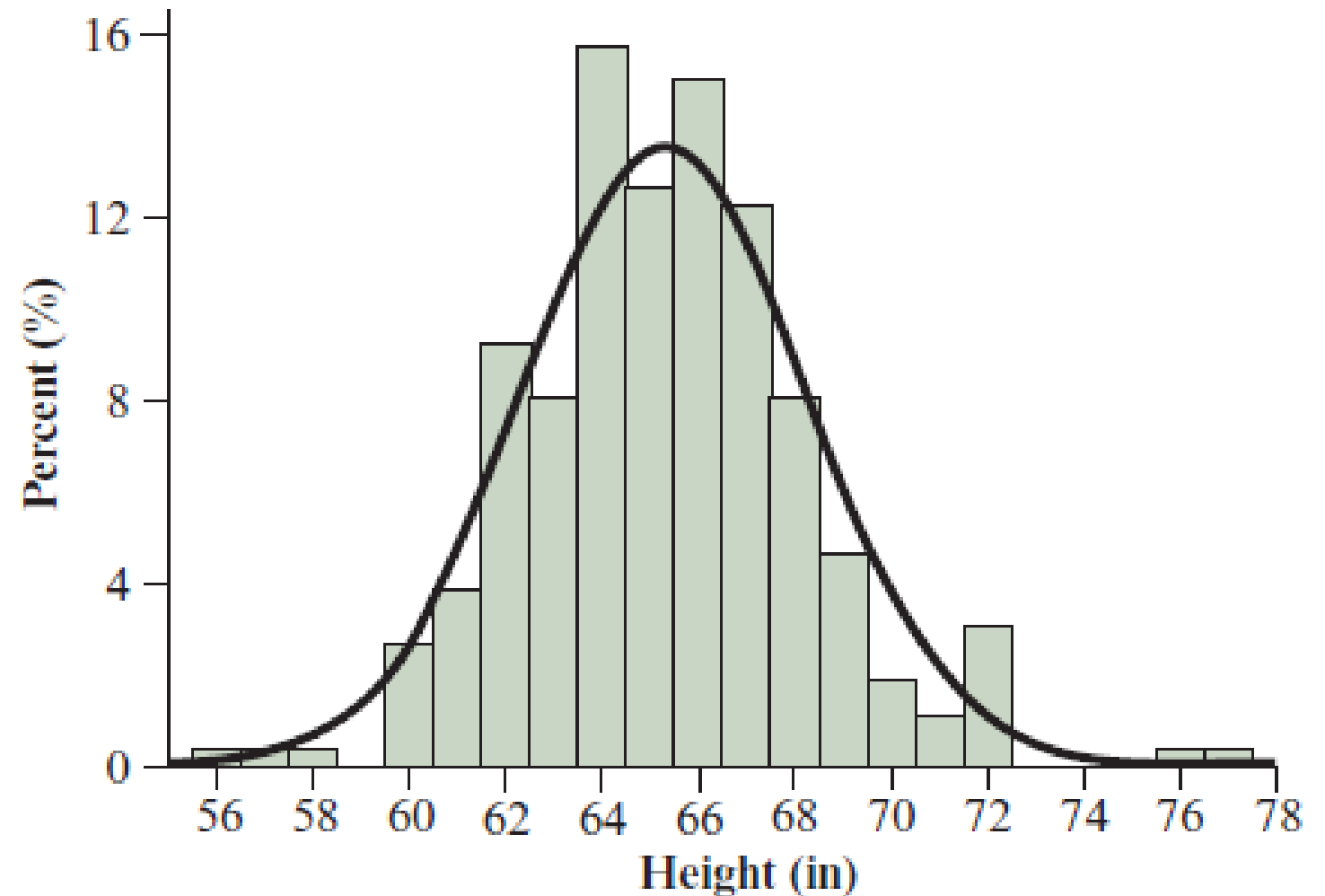
▲ **Figure 6.2 Probability Distribution of Commuting Time.** The area under the curve for values higher than 45 is 0.15. **Question** Identify the area under the curve representing the probability of a commute less than 15 minutes, which equals 0.27.



# Ilustrasi

## Data tinggi Badan siswa (inci)

- Bagaimana bentuk sebaran data di samping?
- Berapakah persentase siswa yang tingginya lebih dari 65 inci?



# Jenis-jenis Peubah Acak

- Diskret
  - Segugus nilai dari suatu peubah acak yang dapat dicacah (*countable*)
  - Misalkan  $X$  = banyaknya tendangan penalti yang berhasil dilakukan oleh pemain A
- Kontinu
  - Nilai-nilai dari peubah acak tersebut tidak dapat dicacah (*uncountable*)
  - Nilai dalam peubah acak tersebut berupa selang interval
  - Misalkan  $X$  = tinggi badan (cm)

# Fungsi Peluang

- Setiap nilai peubah acak, berpadanan dengan satu atau lebih kemungkinan kejadian.
- Setiap nilai peubah acak bisa ditentukan nilai peluangnya.
- Fungsi yang menyatakan peluang dari setiap nilai peubah acak disebut fungsi peluang.

Total nilai dari fungsi ini adalah 1.

# Ilustrasi

- Percobaan: melempar dua dadu bersisi enam setimbang

$S = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

- $Y$  adalah peubah acak yang melambangkan nilai maksimum dari kedua sisi dadu,

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Fungsi peluang:

$$P(Y = 1) = 1/36 \quad P(Y = 4) = 7/36$$

$$P(Y = 2) = 3/36 \quad P(Y = 5) = 9/36$$

$$P(Y = 3) = 5/36 \quad P(Y = 6) = 11/36$$

$$\rightarrow P(Y=y) = (2y-1)/36$$

# Fungsi Peluang

- Peubah Acak Diskret
  - Fungsi Peluang  $\rightarrow$  Fungsi Massa Peluang
    - $p(x) \geq 0$
    - $\sum p(x) = 1$
- Peubah Acak Kontinu
  - Fungsi Peluang  $\rightarrow$  Fungsi Kepekatan Peluang
    - $f(x) \geq 0$
    - $\int f(x)dx = 1$

# Nilai Harapan Peubah Acak

- Nilai harapan dari peubah acak adalah pemusatan dari nilai peubah acak jika percobaannya dilakukan secara berulang-ulang sampai tak berhingga kali.
- Nilai harapan peubah acak  $X$  dinotasikan  $E(X)$  dan didefinisikan sebagai:

– untuk  $X$  diskret

$$E(X) = \sum_{\forall x} x \times p(x)$$

– untuk  $X$  kontinu

$$E(X) = \int xf(x)dx$$

# Sifat-sifat Nilai Harapan

- Jika  $c$  konstanta maka  $E(c) = c$
- Jika p.a.  $X$  dikalikan dengan konstanta  $c$  maka  
$$E(cX) = c E(X)$$
- Jika  $X$  dan  $Y$  peubah acak maka  $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

# Ragam Peubah Acak

- Ragam dari suatu peubah acak  $X$  dinotasikan  $\text{Var}(X)$ , dan didefinisikan sebagai berikut

$$\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

- Jika  $X$  adalah peubah acak diskret dengan fungsi massa peluang  $p(x)$ , maka

$$\text{Var}(X) = \sum_{\forall x} x^2 p(x) - (E(X))^2$$

- Jika  $X$  adalah peubah acak kontinu dengan fungsi massa peluang  $f(x)$ , maka

$$\text{Var}(X) = \int x^2 f(x) dx - (E(X))^2$$



# Sifat-sifat Ragam

- $X$  adalah peubah acak dengan ragam  $\text{Var}(X)$
- Jika  $a$  adalah sebuah konstanta,  
 $\text{Var}(X+a) = \text{Var}(X)$
- Jika  $a$  adalah sebuah konstanta,  
 $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$

# Beberapa Contoh Sebaran Peubah Acak

- Diskret:
  - Bernoulli
  - Binomial
  - Poisson
- Kontinu:
  - Normal
  - Khi-kuadrat
  - F
  - T-student

# Peubah Acak Bernoulli

- Setiap percobaan menghasilkan dua kemungkinan,  $X = \{0, 1\}$
- Peluang terjadinya “1” adalah  $p$ , sehingga fungsi massa peluangnya adalah

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(X = 1) = p$$

Atau dituliskan

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ untuk } x = 0 \text{ dan } 1$$

- $E(X) = p$
- $\text{Var}(X) = p(1-p)$

# Ilustrasi



Akan melakukan lemparan bebas. Jika peluang bola tersebut masuk ring sebesar 80% maka peluang bola tidak masuk ring adalah 20%



Akan melakukan tendangan pinalti. Jika peluang bola masuk sebesar 95% maka peluang bola tidak masuk sebesar 5%.

# Peubah Acak Binomial

- Terdapat  $n$  kali percobaan yang saling bebas, dan setiap percobaan menghasilkan dua kemungkinan (ya/tidak) dengan peluang terjadinya “ya” untuk setiap percobaan adalah tetap sebesar  $p$

- $X$  adalah banyaknya kejadian “ya” dari  $n$  kali percobaan.

$$X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- Fungsi massa peluang dari  $X$  adalah  $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$$

- $E(X) = np$
- $\text{Var}(X) = np(1-p)$

# ilustrasi



Jika peubah acak  $X$  didefinisikan sebagai banyaknya lemparan bebas yang sukses dari 3 lemparan

$p$  = peluang sukses untuk sekali melakukan lemparan bebas

$$\begin{array}{ccc} S & S & S \end{array} \longrightarrow x=3 \longrightarrow P(X=3) = \binom{3}{3} p^3 (1-p)^{3-3}$$

$$\begin{array}{ccc} G & G & S \\ S & G & G \\ G & S & G \end{array} \longrightarrow x=1 \longrightarrow P(X=1) = \binom{3}{1} p^1 (1-p)^{3-1}$$

$$\begin{array}{ccc} S & S & G \\ G & S & S \\ S & G & S \end{array} \longrightarrow x=2 \longrightarrow P(X=2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^{3-2}$$

$$\begin{array}{ccc} G & G & G \end{array} \longrightarrow x=0 \longrightarrow P(X=0) = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^{3-0}$$

Rata-rata sukses melakukan lemparan  $E(X) = np = 3p$

# Peubah Acak Poisson

- Fungsi massa peluang  $P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$
- Sering digunakan sebagai fungsi peluang peubah acak yang menyatakan banyaknya suatu kejadian jarang dalam rentang waktu tertentu. Misal banyaknya kecelakaan dalam satu bulan di sebuah ruas jalan, frekuensi listrik padam dalam satu bulan, banyaknya karyawan yang bolos dalam satu hari.
- $E(X) = \lambda$
- $\text{Var}(X) = \lambda$

# Ilustrasi

- Diketahui gempa bumi terjadi di bagian timur Indonesia dengan  $\lambda = 2$  per minggu. Dapatkan peluang sedikitnya terjadi 1 kali gempa bumi selama dua minggu berikutnya.

- $$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 1 - e^{-2} = 0.86 \end{aligned}$$



# Peubah Acak Normal

- Bentuk sebaran simetrik
- Mean, median dan modus berada dalam satu titik
- Fungsi kepekatan peluang dapat dituliskan sebagai berikut:

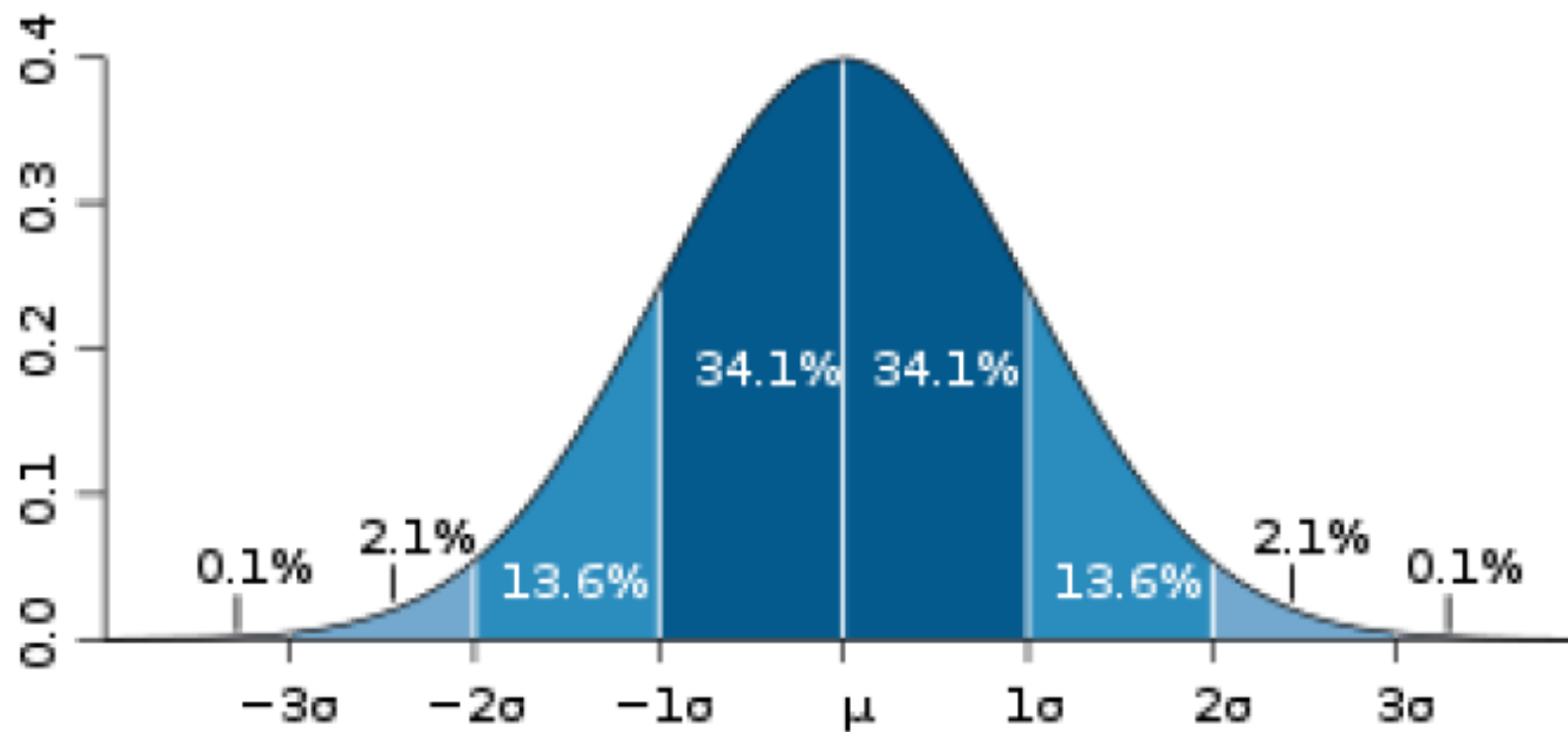
$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Peluang merupakan luasan dibawah kurva kepekatan normal:

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

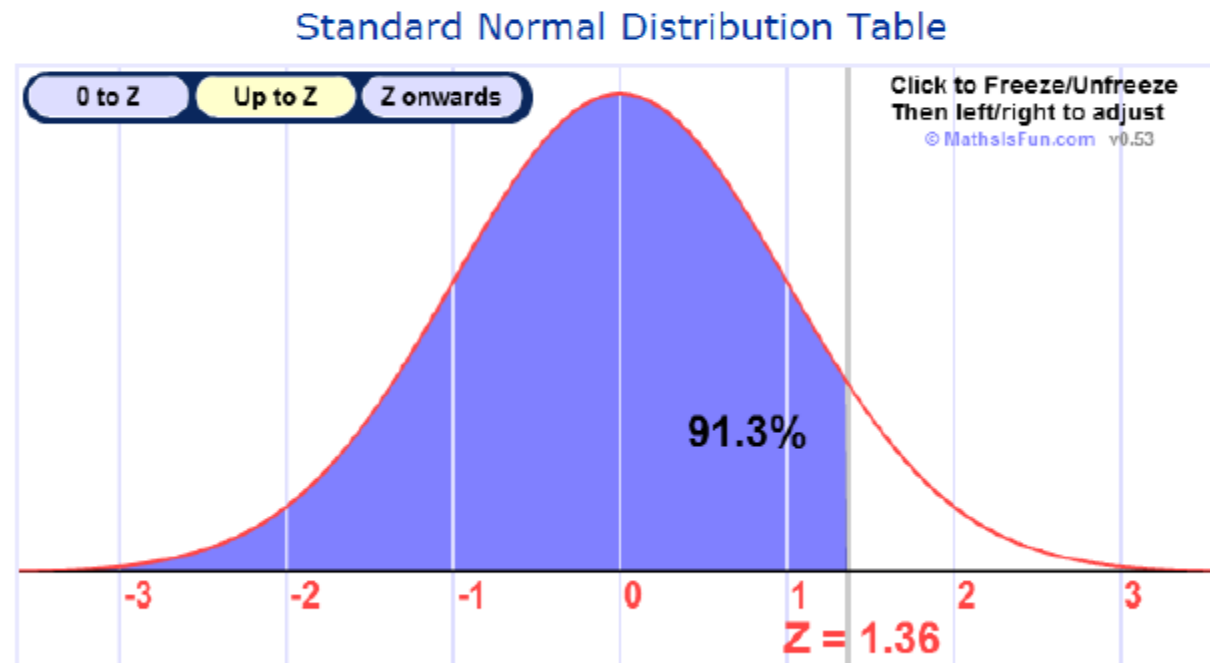
- $P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0.683$
- $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.954$
- Peubah acak (X) dengan mean ( $\mu$ ) dan ragam ( $\sigma^2$ ) menyebar normal sering dituliskan sebagai  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

# Peubah Acak Normal



# Peubah Acak Normal Baku

$$P(Z < 1.36)$$



# Tabel Distribusi Normal Baku

$$P(Z < 1.26) = 0.89617$$

**STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.**

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062

# Ilustrasi

- Nilai ujian tulis CPNS Kabupaten Bogor diketahui menyebar normal dengan rata-rata 56 dan ragam 9.
  - Jika ditemui satu orang peserta ujian secara acak, berapa peluang peserta yang ditemui tersebut adalah peserta dengan nilai kurang dari 50?
- Nilai  $\sim N(\mu=56, \sigma^2=9), \sigma = 3$
- $$\begin{aligned} P(\text{nilai} < 50) &= P(Z < (50 - 56)/3) \\ &= P(Z < -2.00) \\ &= .02275 \end{aligned}$$

# Ilustrasi

Misalkan penggunaan kuota paket data di kalangan mahasiswa IPB menyebar normal dengan nilai tengah 10 GB per bulan dan ragam 4 GB<sup>2</sup>.

- a) Jika di pilih satu orang mahasiswa secara acak, berapakah peluang bahwa mahasiswa tersebut biasanya menghabiskan lebih dari 8 GB per bulan?
- b) Apabila ternyata ada 1000 mahasiswa IPB, berapa persen di antaranya yang menghabiskan kuota paket data lebih dari 8 GB per bulan?

# Ilustrasi

Misalkan :

$X$  = besarnya penggunaan paket data mahasiswa IPB per bulan (GB)

$$X \sim \text{Normal}(10, 4) \rightarrow \mu = 10, \sigma^2 = 4 \rightarrow \sigma = \sqrt{4} = 2$$

$$a) \quad P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8-10}{2}\right) = P(Z > -1) = 0.84134$$

$$b) \quad (1000)P(X > 8) = (1000)(0.84134) = 841.34 \approx 842 \text{ mahasiswa}$$

# Latihan Soal

Curah hujan di kota Bogor diketahui menyebar normal dengan rata-rata tingkat curah hujan 25 mm dan ragam  $25 \text{ mm}^2$ . Hitunglah,

1. Peluang curah hujan di kota Bogor kurang dari 15 mm?
2. Peluang curah hujan di kota Bogor antara 10 mm sampai 20 mm?
3. Peluang curah hujan di kota Bogor di atas 40 mm?
4. Jika BMKG mengatakan bahwa terdapat 25% kejadian curah hujan ekstrim, tentukanlah batasan yg digunakan BMKG untuk kejadian curah hujan ekstrim tersebut.



$$1. \quad P(X < 15) = P\left(Z < \frac{15-25}{\sqrt{25}}\right) = P(Z < -2.00) = 0.0228$$

$$\begin{aligned} 2. \quad P(10 < X < 25) &= P\left(\frac{10-25}{\sqrt{25}} < Z < \frac{25-25}{\sqrt{25}}\right) = P(-3 < Z < -1) \\ &= P(Z < -1) - P(Z < -3) = 0.1587 - 0.0013 = 0.1574 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad P(X > 40) &= P\left(Z > \frac{40-25}{\sqrt{25}}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z < 3) \\ &= 1 - 0.9987 = 0.0013 \end{aligned}$$

$$4. \quad P(X > a) = 0.25 \leftrightarrow P(Z > z_a) = 0.25 \leftrightarrow 1 - P(Z < z_a) = 0.25 \leftrightarrow P(Z < z_a) = 0.75$$

Lihat di tabel normal baku, untuk mencari nilai Z yg memenuhi  $P(Z < z_a) = 0.75$ .

$$P(Z < 0.67) \approx 0.75$$

$$\leftrightarrow z_a = 0.67$$

$$\leftrightarrow \frac{a-\mu}{\sigma} = 0.68 \leftrightarrow \frac{a-25}{\sqrt{25}} = 0.67 \leftrightarrow a = 0.67(5) + 25 = 31.35$$

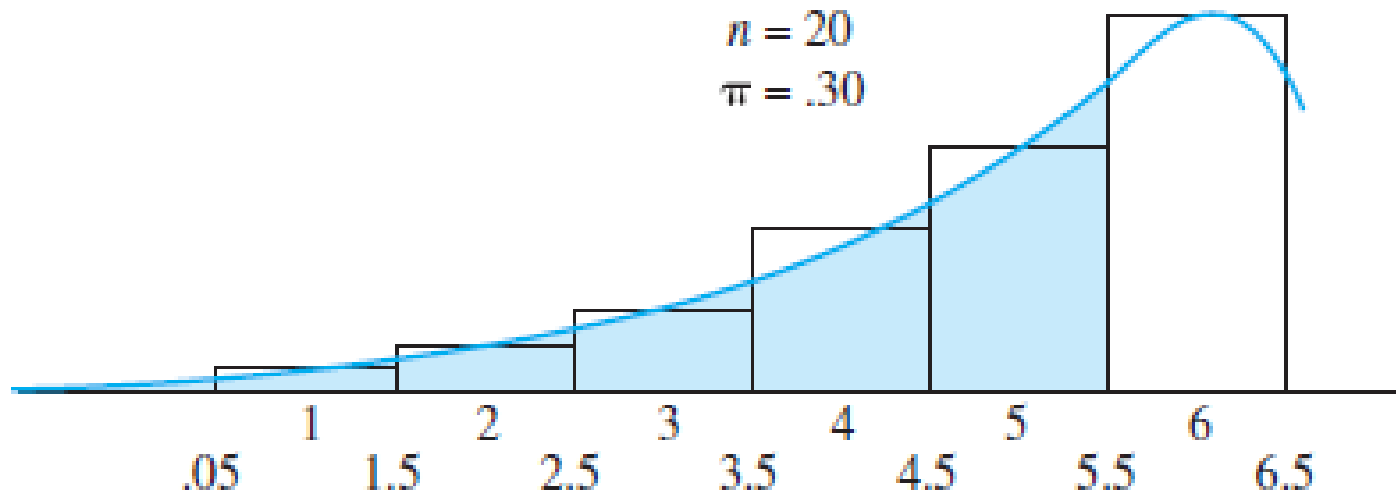
$\therefore$  batasan yg digunakan BMKG untuk kejadian curah hujan ekstrim adalah 31.35mm

# Hampiran Normal untuk Sebaran Peluang Binomial

- Untuk ukuran contoh  $n$  yang besar, dan peluang  $p$  yang tidak mendekati 1 atau 0, sebaran peluang peubah acak binomial dapat didekati dengan sebaran normal dengan  $\mu = np$  dan  $\sigma^2 = np(1 - p)$ .
- Pendekatan ini dapat digunakan hanya jika  $np \geq 5$  dan  $n(1 - p) \geq 5$ .

# *Continuity Correction*

- Pada kasus dimana  $n$  tidak terlalu besar, koreksi sebesar  $\pm 0.5$  dari nilai binomial akan meningkatkan presisi peluang yang didekati dengan sebaran normal.



*Ilustrasi pendekatan sebaran normal pada sebaran binomial*

# Ilustrasi

Sebuah perkebunan teh mengklaim bahwa 20% hasil panennya merupakan daun teh dengan kualitas yang sangat tinggi. Jika pada suatu musim panen diperoleh 100 ton daun teh, berapakah peluang bahwa paling tidak terdapat 15 ton daun teh berkualitas tinggi? (Anggap asumsi binomial terpenuhi)

$$\mu = np = 100(0.2) = 20$$

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 100(0.2)(0.8) = 16 \rightarrow \sigma = \sqrt{16} = 4$$

$$\begin{aligned} P(y \geq 14.5) &= P\left(z \geq \frac{14.5 - 20}{4.0}\right) = P(z \geq -1.38) = 1 - P(z < -1.38) \\ &= 1 - .0838 = .9162 \end{aligned}$$