Konsep Dasar Peluang

Metode Statistika (STK 211) | Pertemuan 4

rahmaanisa@apps.ipb.acid

Outline

- Mencacah ruang contoh (memahami definisi kejadian dan operasi-operasi pada kejadian)
- Menghitung dengan konsep permutasi dan kombinasi
- Menghitung peluang (aksiomatik dan frekuensi relatif,dan peluang bersyarat)
- Mampu membedakan kejadian bebas dan Kaidah penggandaan
- Mengaplikasikan Dalil Bayes

Failing a Test for Illegal Drug Use

Picture the Scenario

Many employers require potential employees to take a diagnostic test for illegal drug use. Such tests are also used to detect drugs used by athletes. For example, at the 2008 Summer Olympic Games in Beijing, 6 out of 4500 sampled specimens tested positive for a banned substance.

But diagnostic tests have a broader use. They can be used to detect certain medical conditions. For example, one test for detecting HIV is the ELISA screening test.

Questions to Explore

- Given that a person recently used drugs, how can we estimate the likelihood that a diagnostic test will correctly predict drug use?
- Suppose a diagnostic test says that a person has recently used drugs. How likely is it that the person truly did use drugs?

Mengapa kita perlu belajar tentang Peluang ???

"Uncertainty surrounds us in everyday life, at home, at work, in business, and in leisure."

Banyak hal penting yg mengandung ketidakpastian

Decisions under **uncertainty**

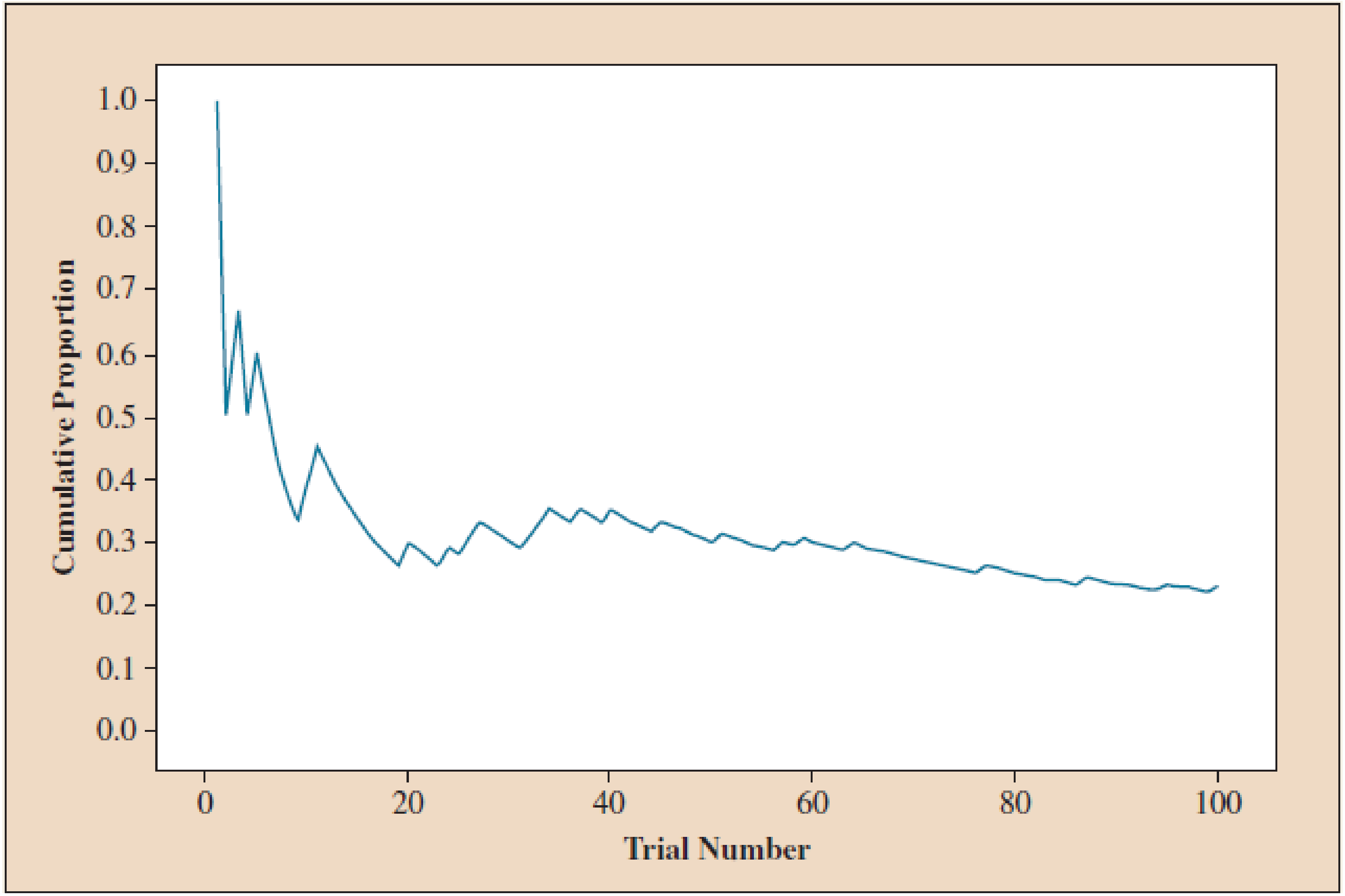
Konsep **Peluang** !

KONSEP DASAR PELUANG

Mari kita lakukan sedikit percobaan…

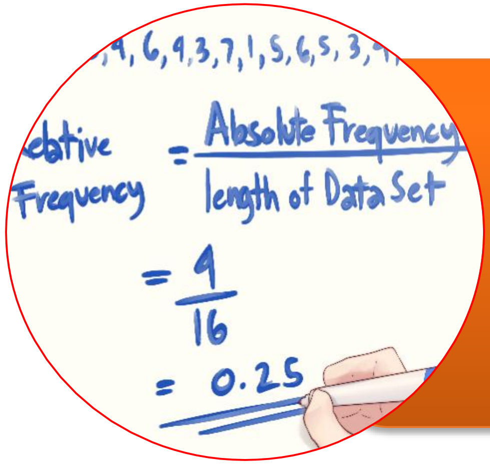
- Tentukan **4 orang** di antara mahasiswa STK 211 untuk menjadi relawan, 2 di antaranya akan melempar sekeping uang logam, 2 lainnya akan melakukan pencatatan.
- Orang pertama akan melempar sebanyak **4 kal**i, sedangkan orang kedua sebanyak **16 kali**.
- Tuliskan perolehan angka (A) dan gambar (G) dari keduanya.
- Diskusikan dengan teman Anda tentang hal berikut:
  1) Apakah hasil keduanya menunjukkan proporsi A dan G yg sama?
  2) Menurut Anda, berapa seharusnya peluang munculnya A dan G?
  3) Apakah hasil lemparan teman Anda sejalan dengan besarnya peluang yang Anda berikan pada butir (2)? Jelaskan alasannya.

Law of Large Numbers



▲ **Figure 5.1 The Cumulative Proportion of Times a 6 Occurs, for a Simulation of 100 Rolls of a Fair Die.** The horizontal axis of this figure reports the number of the trial, and the vertical axis reports the cumulative proportion of 6s observed by then. **Question** The first four rolls of the die were 6, 2, 6, and 5. How can you find the cumulative proportion of 6s after each of the first four trials?

Tipe Peluang



Frekuensi Relatif

Peluang Subjektif

RUANG CONTOH DAN KEJADIAN

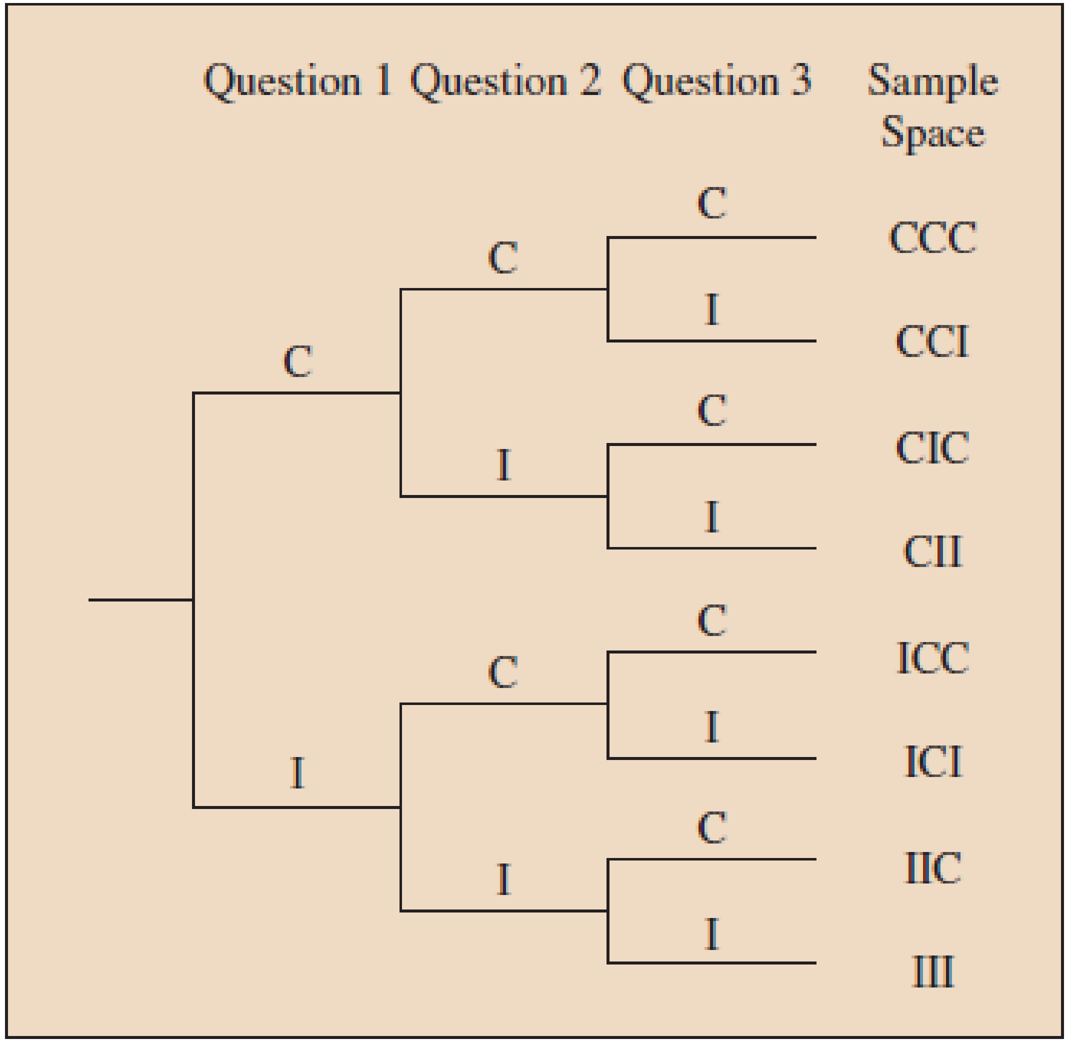
Multiple-Choice Pop Quiz

Picture the Scenario

Your statistics instructor decides to give an unannounced pop quiz with three multiple-choice questions. Each question has five options, and the student's answer is either correct (C) or incorrect (I). If a student answered the first two questions correctly and the last question incorrectly, the student's outcome on the quiz can be symbolized by CCI.

Question to Explore:

What is the sample space for the possible answers on this pop quiz?



◀ **Figure 5.3 Tree Diagram for Student Performance on a Three-Question Pop Quiz.** Each path from the first set of two branches to the third set of eight branches determines an outcome in the sample space. **Question** How many possible outcomes would there be if the quiz had four questions?

From the tree diagram, a student's performance has eight possible outcomes:

$$\{CCC, CCI, CIC, CII, ICC, ICI, IIC, III\}.$$

Permalasahanya……

- Tidak semua kasus dapat dibuat dalam bentuk diagram
- Akibatnya, Anda perlu mengingat kembali tentang **analisis kombinatorika.**
- Ingatkah dgn istilah2 ini:
  - Penggandaan : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots. \times n_k$
  - Penjumlahan : $n_1 + n_2$
  - Permutasi: ${}_nP_r$
  - Kombinasi: ${}_nC_r$

Penggandaan

Jika operasi pertama dapat dilakukan dengan n_1 cara dan setiap cara ini dilanjutkan dengan operasi kedua yang dapat dilakukan dengan n_2 cara dan setiap cara sebelumnya dilanjutkan lagi dengan operasi ketiga yang dapat dilakukan dengan n_3 cara dan seterusnya sampai sederetan k buah operasi, maka semua operasi tersebut dapat dikerjakan secara bersama-sama dengan

$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ cara.

Ilustrasi - 1

Andaikan kita memiliki 4 kemeja yang masing-masing berbeda warnanya dan 3 celana yang juga berbeda-beda warna. Berapa banyak kemungkinan menggunakan sepasang kemeja dan celana?

Penjumlahan

Jika suatu operasi diselesaikan dengan 2 alternatif; alternative pertama dapat dilakukan dengan n_1 cara, alternative kedua dengan n_2 cara, maka operasi tersebut dapat dilakukan dengan $n_1 + n_2$ cara.

Ilustrasi - 1

Misalkan kita mau pergi dari Bogor ke Jakarta dengan angkutan umum. Berdasarkan jenis angkutan umum yang digunakan, ada dua kemungkinan yaitu naik bis atau naik kereta api. Jika naik bis, maka ada 3 cara (yaitu : lewat Parung, lewat Cibinong dan Tol Jagorawi), sedangkan jika naik kereta api hanya ada satu cara. Jadi banyak cara pergi dari Bogor ke Jakarta dengan angkutan umum adalah 3 + 1 cara.

Permutasi r unsur dari n unsur yang tersedia

Banyaknya permutasi dari n benda yang berbeda jika diambil r benda sekaligus (disebut permutasi tingkat r dari n) adalah:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ilustrasi - 1

Suatu panitia yang terdiri dari 3 orang dengan rincian seorang sebagai ketua, seorang sebagai sekretaris, dan seorang sebagai bendahara akan dipilih dari 8 orang yang tersedia. Seorang panitia tidak boleh merangkap jabatan.

Tentukan banyaknya susunan panitia berbeda yang mungkin

Kombinasi

Definisi :

Kombinasi adalah kelompok yang dapat dibentuk dari sekumpulan obyek yang dipilih sebagian atau seluruhnya.

Banyaknya kombinasi dari n benda yang berbeda jika dipilih sebanyak r buah benda adalah

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,x(n-r)!}$$

Kombinasi (cont'd)

Ilustrasi - 1

Misalkan sebuah panitia yang terdiri atas 3 orang yang akan dipilih dari 4 pasang suami istri yang tersedia, tentukan

a) banyaknya panitia berbeda yang dapat dibentuk

b) Jika pada soal nomor a) ada syarat tambahan bahwa panitia yang terbentuk harus terdiri atas 2 pria dan 1 wanita, berapa banyaknya panitia yang berbeda yang mungkin?

Kejadian (*Event(E)*)

Perhatikan pada pertandingan sepakbola Liga 1 Indonesia 2017 antara Bhayangkara melawan Bali United, maka akan ada tiga kemungkinan:

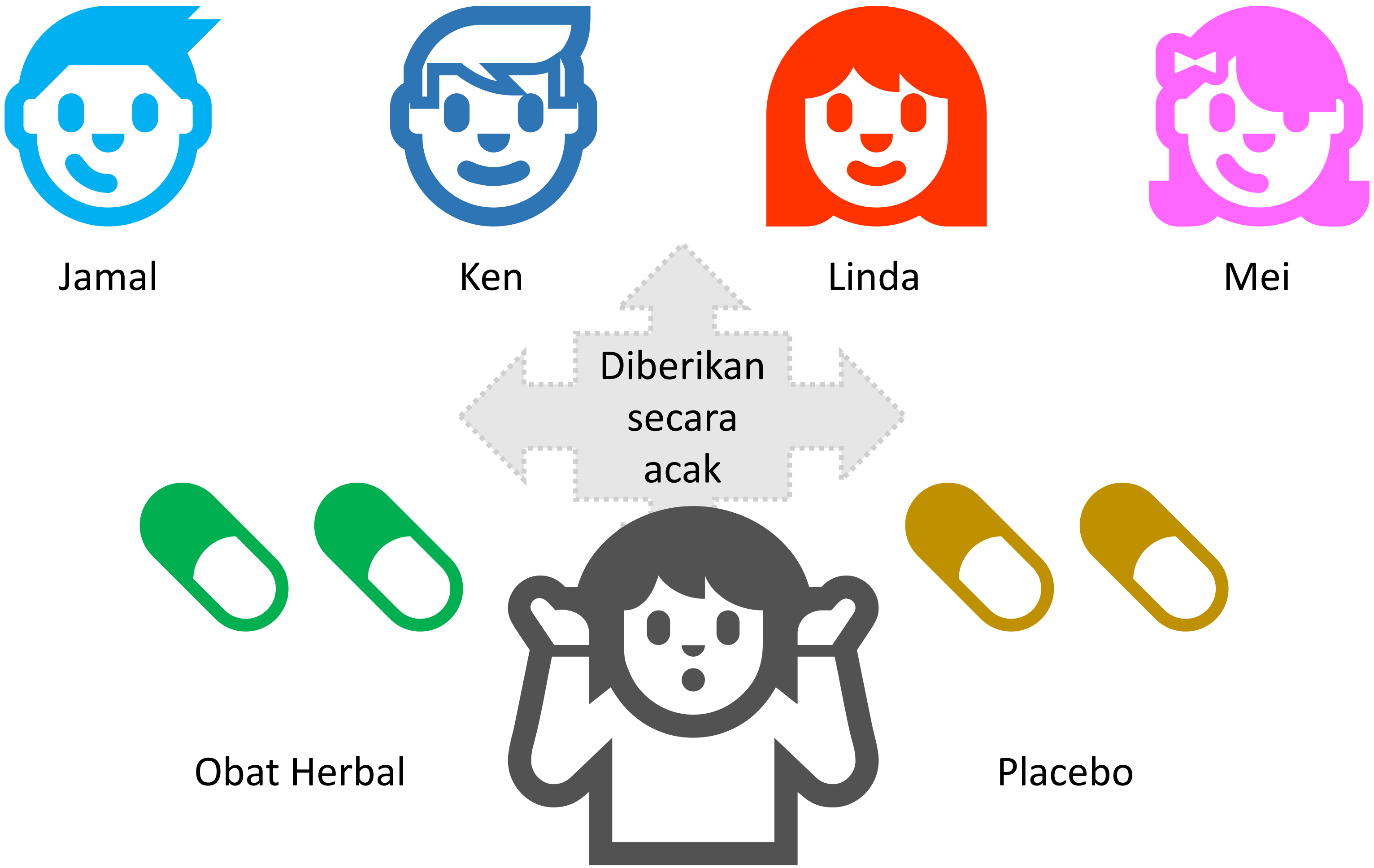
1. Bhayangkara menang (E_1)
2. Bali United menang (E_2)
3. Keduanya seri (E_3)

Berapakah peluang terjadinya masing[2] kejadian?

$$S = \{\text{Bhayangkara menang}, \text{Bali United menang}, \text{Keduanya seri}\}$$

$$E_1 \qquad\qquad E_2 \qquad\qquad E_3$$

Ilustrasi



- Tentukan banyaknya cara memberikan obat kepada keempat orang tsb, berapakah peluang masing-masing cara tsb?
- Berapakah peluang kejadian bahwa orang yang terpilih utk diberikan obat herbal terdiri dari 1 perempuan dan 1 laki^2?

Ilustrasi

a. The six possible samples to assign to the herbal remedy are {(Jamal, Ken), (Jamal, Linda), (Jamal, Mei), (Ken, Linda), (Ken, Mei), (Linda, Mei)}. This is the sample space for randomly choosing two of the four people. For a simple random sample, every sample is equally likely. Since there are six possible samples, each one has probability 1/6. These probabilities fall between 0 and 1, and their total equals 1, as is necessary for probabilities for a sample space.

b. The event in which the sample chosen has one man and one woman consists of the outcomes {(Jamal, Linda), (Jamal, Mei), (Ken, Linda), (Ken, Mei)}. These are the possible pairings of one man with one woman. Each outcome has probability 1/6, so the probability of this event is $4(1/6) = 4/6 = 2/3$.

Peluang Suatu Kejadian

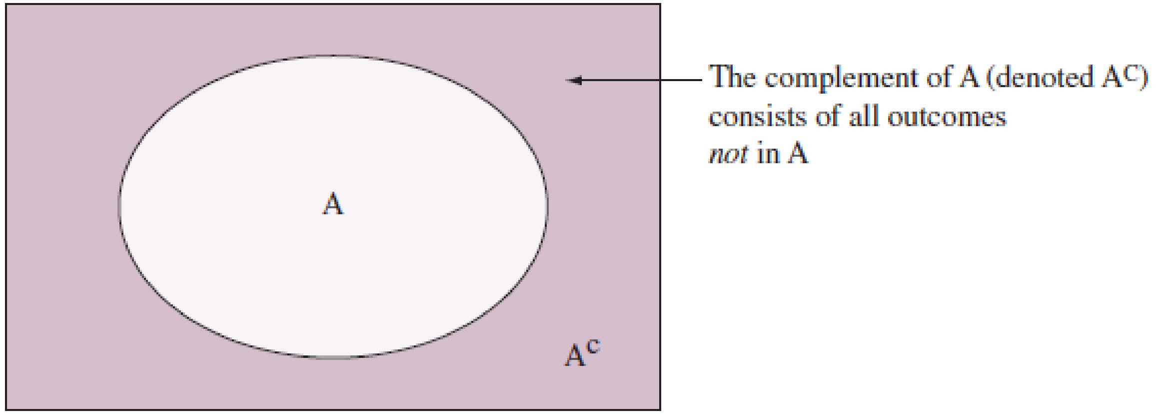
The probability of an event A, denoted by P(A), is obtained by adding the probabilities of the individual outcomes in the event.

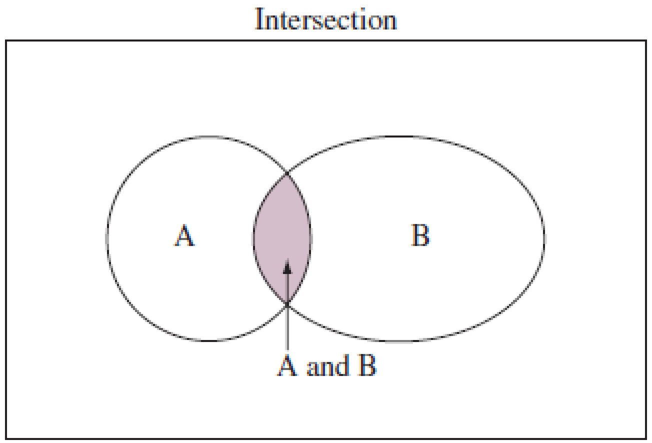
- When all the possible outcomes are equally likely,

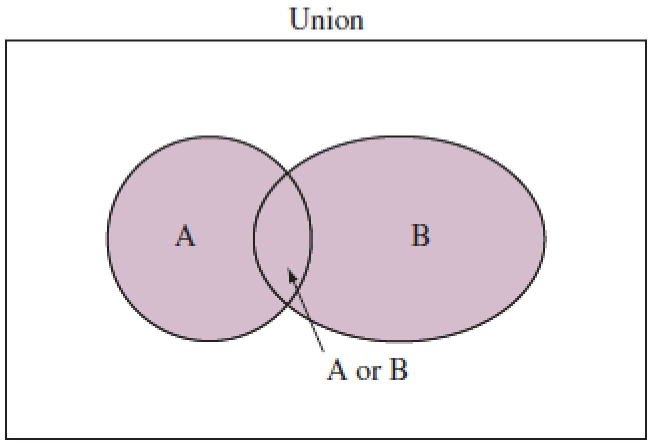
$$P(A) = \frac{\text{number of outcomes in event A}}{\text{number of outcomes in the sample space}}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

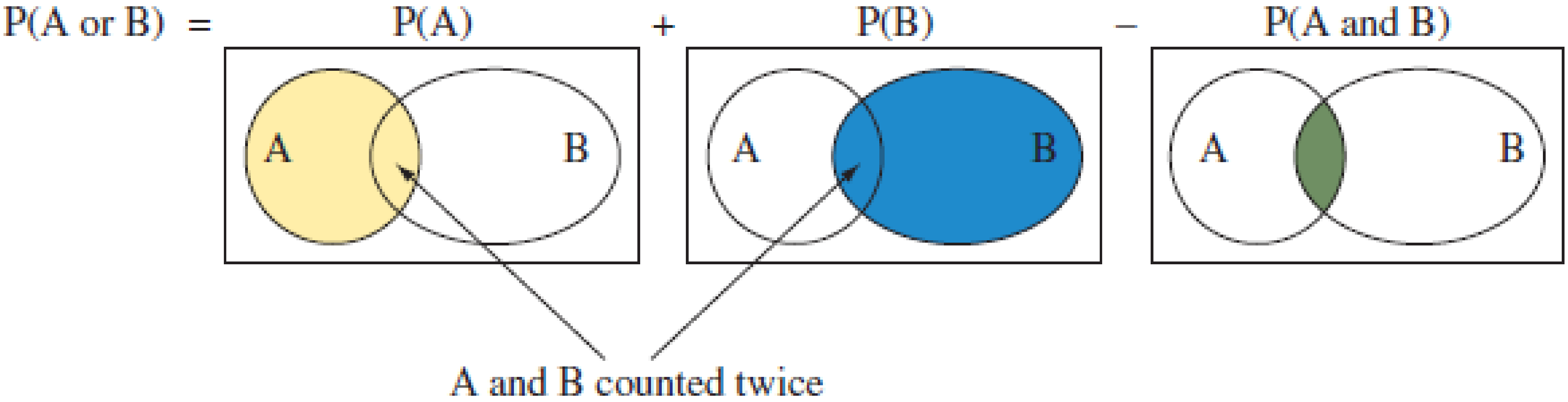
Review tentang Teori Himpunan







Review tentang Teori Himpunan



Kejadian Saling Bebas

Multiplication Rule: Probability of the Intersection of Independent Events

For the **intersection** of two **independent** events, A and B,

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B).$$

The paradigm for independent events is repeatedly flipping a coin or rolling a die, where what happens on one trial does not affect what happens on another. For instance, for two rolls of a die,

$$P(6 \text{ on roll } 1 \textit{ and } 6 \text{ on roll } 2) = P(6 \text{ on roll } 1) \times P(6 \text{ on roll } 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

This multiplication rule extends to more than two independent events.

SUMMARY: Rules for Finding Probabilities

- The probability of each individual outcome is between 0 and 1, and the total of all the individual probabilities equals 1. The **probability of an event** is the sum of the probabilities of the individual outcomes in that event.
- For an event A and its **complement** A^c (not in A), $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- The **union** of two events (that is, A occurs or B occurs or both) has

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B).$$

- When A and B are **independent**, the **intersection** of two events has

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B).$$

- Two events A and B are **disjoint** when they have no common elements. Then

$$P(A \text{ and } B) = 0, \text{and thus } P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B).$$

Aksioma Peluang

Beberapa kaidah sebaran peluang, yaitu:

1. $0 \leq p(xi) \leq 1$, untuk i=1,2, ..., n
2. Jumlah peluang seluruh kejadian dalam ruang contoh adalah 1 :

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

3. p(A1+A2+...+Am) = p(A1)+p(A2)+...+p(Am), jika A1, A2, ..., Am merupakan kejadian-kejadian yang terpisah.

Kejadian Bersyarat

The Triple Blood Test for Down Syndrome

Picture the Scenario

A diagnostic test for a condition is said to be **positive** if it states that the condition is present and **negative** if it states that the condition is absent. How accurate are diagnostic tests? One way to assess accuracy is to measure the probabilities of the two types of possible error:

False positive: Test states the condition is present, but it is actually absent.

False negative: Test states the condition is absent, but it is actually present.

The Triple Blood Test screens a pregnant woman and provides an estimated risk of her baby being born with the genetic disorder Down syndrome. This syndrome, which occurs in about 1 in 800 live births, arises from an error in cell division that results in a fetus having an extra copy of chromosome 21. It is the most common genetic cause of mental impairment. The chance of having a baby with Down syndrome increases after a woman is 35 years old.

A study[2] of 5282 women aged 35 or over analyzed the Triple Blood Test to test its accuracy. It was reported that of the 5282 women, "48 of the 54 cases

[2] J. Haddow et al., *New England Journal of Medicine*, vol. 330, pp. 1114–1118, 1994.

of Down syndrome would have been identified using the test and 25 percent of the unaffected pregnancies would have been identified as being at high risk for Down syndrome (these are false positives)."

Questions to Explore

a. Construct the contingency table that shows the counts for the possible outcomes of the blood test and whether the fetus has Down syndrome.

b. Assuming the sample is representative of the population, estimate the probability of a positive test for a randomly chosen pregnant woman 35 years or older.

c. Given that the diagnostic test result is positive, estimate the probability that Down syndrome truly is present.

Table 5.5 Contingency Table for Triple Blood Test of Down Syndrome

	Blood Test		
Down Syndrome Status	**POS**	**NEG**	**Total**
D (Down)	48	6	**54**
D^c (unaffected)	1307	3921	**5228**
Total	**1355**	**3927**	**5282**

b. From Table 5.5, the estimated probability of a positive test is $P(\text{POS}) = 1355/5282 = 0.257$.

c. The probability of Down syndrome, given that the test is positive, is the conditional probability, $P(D|\text{POS})$. Conditioning on a positive test means we consider only the cases in the first column of Table 5.5. Of the 1355 who tested positive, 48 cases actually had Down syndrome, so $P(D|\text{POS}) = 48/1355 = 0.035$. Let's see how to get this from the definition of conditional probability,

$$P(D|\text{POS}) = \frac{P(D \text{ and POS})}{P(\text{POS})}.$$

Since $P(\text{POS}) = 0.257$ from part b and $P(D \text{ and POS}) = 48/5282 = 0.0091$, we estimate $P(D|\text{POS}) = 0.0091/0.257 = 0.035$. In summary,

Teorema Bayes

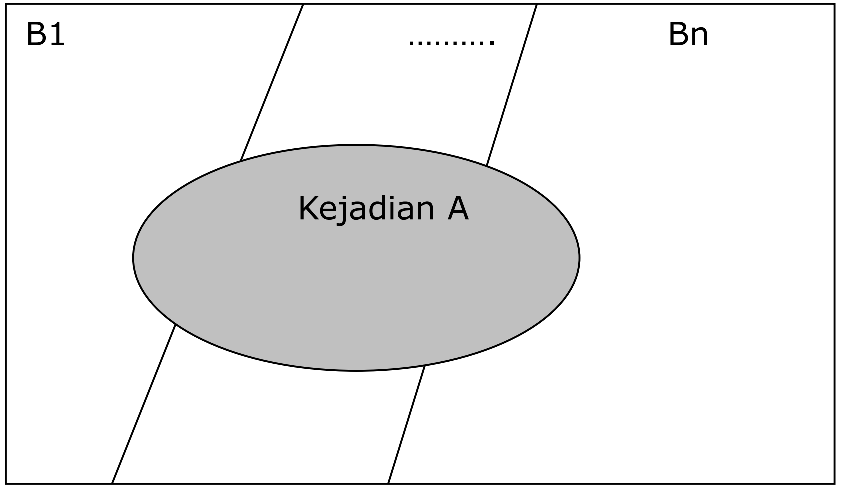
- Suatu gugus universum disekat menjadi beberapa anak gugus B1, B2, …, Bn dan A suatu kejadian pada U dengan $p(B) \neq 0$ maka,

  $$P(A) = \Sigma\, P(Bi)P(A|Bi)$$

- Peluang B_k bersyarat A, dapat dihitung sebagai berikut:

  $$P(B_k|A) = P(B_k \cap A)/\, P(A)$$

- Perhatikan diagram berikut:
  - Ruang contoh dipecah menjadi kejadian B1, B2,…,Bn saling terpisah
  - Disamping itu ada kejadian A, yang dapat terjadi pada kejadian B1, B2,…,Bn. Dengan demikian, $A=(A\cap B1) + (A\cap B2) + ... + (A\cap Bn)$
  - Peluang kejadian A adalah: $P(A)=P(A\cap B1) + P(A\cap B2) + ... + P(A\cap Bn)$
  - Dengan memanfaatkan sifat peluang bersyarat, diperoleh peluang Bk bersyarat A adalah:



$$P(Bk/A) = P(Bk)P(A/Bk)/ \Sigma\ P(Bi)P(A/Bi)$$

Latihan

Ada tiga kotak:

1. Kotak 1: 3 bola merah + 2 bola putih
2. Kotak 2: 2 bola merah + 3 bola putih
3. Kotak 3: 1 bola merah + 2 bola putih + 1 bola hitam

Jika kita mengambil 1 bola dari kotak 1 secara acak, apabila terambil bola merah maka bola tersebut dimasukkan ke kotak 2, lalu diambil 1 bola dari kotak tsb. Tapi apabila pada pengambilan pertama terambil bola putih, maka bola tsb dimasukkan ke kotak 3, dan diambil 1 bola dari kotak tsb.

a) Berapakah peluang terambil bola putih pada kedua pengambilan?
b) Berapa peluang terambil bola dengan warna yang sama?
c) Jika diketahui pengambilan kedua diperoleh bola merah, berapa peluang bahwa terambil bola putih pada pengambilan pertama?

Latihan

Suatu serum kebenaran yang biasa diberikan pada seorang tersangka, diketahui 90% dapat dipercaya bila ternyata tersangka tersebut memang bersalah dan 99% dapat dipercaya bila ternyata tersangka tersebut tidak bersalah. Dengan kata lain, 10% di antara yang bersalah dinyatakan tidak bersalah dan 1% di antara yang tidak bersalah dinyatakan bersalah oleh serum tersebut.

Bila seorang tersangka diambil dari sejumlah tersangka yang hanya 5% di antaranya pernah melakukan kejahatan, dan serum itu menunjukkan bahwa ia bersalah, berapa peluang bahwa ia sesungguhnya tidak bersalah?

Latihan

Jika ada pesawat datang, radar mampu mendeteksi secara tepat dengan peluang 0.99. Jika tidak ada pesawat, radar salah mendeteksi (menyatakan ada pesawat) dengan peluang 0.1. Asumsikan bahwa peluang sebuah pesawat asing masuk ke wilayah kita sebesar 0.05.

Tentukan besarnya peluang *false alarm* (tidak ada pesawat, radar mendeteksinya) dan kesalahan deteksi (ada pesawat, tapi radar menyatakan tidak ada).

Tugas Mandiri

Sumber: Agresti (2017)

5.10 Simulate coin flips Use the web app Random Numbers (go to the tab that says Coin Flips) on the book's website or other software (such as random.org/coin) to illustrate the long-run definition of probability by simulating short-term and long-term results of flipping a balanced coin.

TRY

TECH

a. Keep the probability of a head at the default value of 50% and set the number of flips to generate in a simulation to 10. Click on Simulate and record the proportion of heads for this simulation. Do this a total of 10 times by repeatedly clicking Simulate.

b. Now set the number of flips to 100. Click Simulate 10 times, and record the 10 proportions of heads for each simulation. Do they vary much?

c. Now set the number of flips to 1000. Click Simulate 10 times, and record the 10 proportions of heads for each simulation. Do they vary more, or less, than the proportions in part b based on 100 flips?

d. Summarize the effect of the number of flips on the variability of the proportion. How does this reflect what's implied by the law of large numbers?