

निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry)

खोज- क्रांतिप्रयम प्रालीली नाशनिक ईनी टेकार्ट (1596-1650) ने 1637 ई. 17वीं शताब्दी में आंख किया था।

(Rectangular axes and Coordinate System)

- (i) xox' (x -अक्ष) (ii) yoy' (y -अक्ष)
- (iii) xoy' (x -अक्ष, और y -अक्ष और मूलप बिन्दु O के समीक्षक का निरूपण (frame of reference) कहते हैं।

जिस पर x -अक्ष तथा y -अक्ष कातीय तल (Cartesian Plane) कहते हैं।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

माना दो बिन्दु - $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

$PM \perp ox, QN \perp ox, PL \perp QN$

$$OM = x_1, \quad ON = x_2$$

$$PM = y_1, \quad QN = y_2$$

$$MN = (x_2 - x_1), \quad QL = (y_2 - y_1)$$

$$MN = PL = x_2 - x_1$$

$\triangle PLQ$ में समकोण त्रिभुज है।

पाठ्यांगौल प्रमेय से -

$$PQ^2 = QL^2 + PL^2$$

$$PQ^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$$

$$PQ = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$PQ = \sqrt{y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2}$$

$$PQ = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

प्रश्नातली न(न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. निम्नलिखित बिन्दु युगमों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिएः

(i) (4,3) और (2,5)

$$\underline{\text{उल}} \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$x_1 = 4, \quad y_1 = 3$$

$$x_2 = 2, \quad y_2 = 5$$

$$d = \sqrt{(2-4)^2 + (5-3)^2}$$

$$d = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$

$$d = \sqrt{4+4}$$

$$d = \sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

(ii) (2,0) तथा (-1,4)

$$\underline{\text{उल}} \quad x_1 = 2, \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = -1, \quad y_2 = 4$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-0)^2}$$

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$

$$d = \sqrt{9+16}$$

$$d = \sqrt{25} = 5 \text{ मात्रक}$$

(iii) (2a, a) तथा (-a, -3a)

$$\underline{\text{उल}} \quad x_1 = 2a, \quad y_1 = a$$

$$x_2 = -a, \quad y_2 = -3a$$

$$d = \sqrt{(-a-2a)^2 + (-3a-a)^2}$$

$$d = \sqrt{(-3a)^2 + (-4a)^2}$$

$$d = \sqrt{9a^2 + 16a^2}$$

$$d = \sqrt{25a^2}$$

$$d = 5a \text{ मात्रक}$$

(iv) (4,-6) और (-6,4)

$$\underline{\text{उल}} \quad x_1 = 4, \quad y_1 = -6$$

$$x_2 = -6, \quad y_2 = 4$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-6-4)^2 + (4-(-6))^2}$$

$$d = \sqrt{(-10)^2 + (10)^2}$$

$$d = \sqrt{100 + 100}$$

$$d = \sqrt{200}$$

$$d = 10\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

(v) (2,3) और (4,1)

$$\underline{\text{उल}} \quad x_1 = 2, \quad y_1 = 3$$

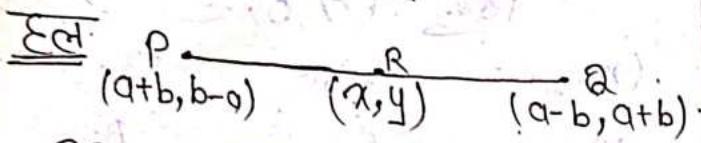
$$x_2 = 4, \quad y_2 = 1$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2}$$

$$d = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$$

उ. यदि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं
 $(a+b, b-a)$ और $(a-b, a+b)$ से
समान दूरी पर हो, तो दिखाएँ
कि $bx = ay$.



$$PR = \sqrt{(x-(a+b))^2 + (y-(b-a))^2}$$

$$= \sqrt{(x-a-b)^2 + (y-b+a)^2}$$

$$QR = \sqrt{(x-(a-b))^2 + (y-(a+b))^2}$$

$$= \sqrt{(x-a+b)^2 + (y-a-b)^2}$$

$$PR = QR \text{ का वर्णन करें पर,$$

$$(x-a-b)^2 + (y-b+a)^2 = (x-a+b)^2 + (y-a-b)^2$$

$$(x-a-b)^2 - (x-a+b)^2 = (y-a-b)^2 - (y-b+a)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= (x-a-b + x-a+b)(x-a-b - x+a+b)$$

$$= (y-a-b + y-b+a)(y-a-b - y+b-a)$$

$$x^2$$

$$(2x-2a)(-2b) = (2y-2b)(-2a)$$

$$2x-2b(a-b) = 2x-2a(y-b)$$

$$bx - ab = ay - ab$$

$$bx = ay$$

4. निम्नलिखित बिन्दु प्रामाण्य के
बीच की दूरी पाओ भात कीजिए।

(i) $(a\sin\theta, a\cos\theta)$ और
 $(a\cos\theta, -a\sin\theta)$

हल

हल $A.$ B

$$x_1 = a\sin\theta, y_1 = a\cos\theta$$

$$x_2 = a\cos\theta, y_2 = -a\sin\theta$$

$$AB =$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(a\cos\theta - a\sin\theta)^2 + (-a\sin\theta - a\cos\theta)^2}$$

$$d = \sqrt{(a\cos\theta)^2 - 2(a\cos\theta)(a\sin\theta) + (a\sin\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 - 2(a\sin\theta)(a\cos\theta) + (a\cos\theta)^2}$$

$$d = \sqrt{2a\cos^2\theta - 4(a\sin\theta)(a\cos\theta) + 2a\sin^2\theta}$$

$$d = \sqrt{2a(\cos\theta - \sin\theta)^2}$$

$$d = \sqrt{2a(-1)^2}$$

$$d = \sqrt{2a}$$

(ii) $(am_1^2, 2am_1)$ और $(am_2^2, 2am_2)$

हल $x_1 = am_1^2, y_1 = 2am_1$
 $x_2 = am_2^2, y_2 = 2am_2$

$$d = \sqrt{(am_2^2 - am_1^2)^2 + (2am_2 - 2am_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(am_2^2 - am_1^2)^2 + 4a^2(m_2 - m_1)^2}$$

$$d = \sqrt{a^2(m_2 - m_1)^2(m_2 + m_1)^2 + 4a^2(m_2 - m_1)^2}$$

$$d = a(m_2 - m_1)\sqrt{(m_2 + m_1)^2 + 4}$$

5. P का मान भात कीजिए, जिसके
लिए बिन्दु $P(2, -3)$ और $O(10, y)$
के बीच की दूरी

Ex $x_1 = 2, y_1 = -3$
 $x_2 = 10, y_2 = 4$.
मात्रक (d.) = 10.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = 10$$

$$\sqrt{(10-2)^2 + (4-(-3))^2} = 10$$

$$\sqrt{(8)^2 + 4^2 + 6 \cdot 4 + 9} = 10$$

$$\sqrt{64 + 16 + 24 + 9} = 10$$

$$\sqrt{73 + 4^2 + 6 \cdot 4} = 10$$

दोनों पक्षों का वर्ग करके घटा

$$73 + 4^2 + 6 \cdot 4 = 100$$

$$4^2 + 6 \cdot 4 = 100 - 73$$

$$4^2 + 6 \cdot 4 - 27 = 0$$

$$(4^2 + 19 - 3) \cdot 4 - 27 = 0$$

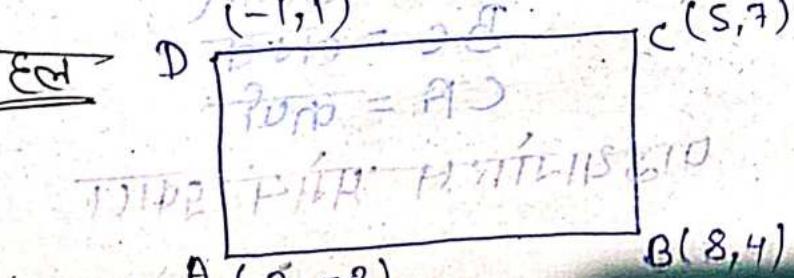
$$4^2 + 9 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 27 = 0$$

$$4(4+9) - 3(4+9) = 0$$

$$(4+9)(4+9) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} 4+9=0 & 4-3=0 \\ 4=-9 & 4=3 \end{array}$$

6. सैद्ध कीजिए कि बिन्दु (2, -2), (8, 4), (5, 7) और (-1, 1) स्क आपत के शीर्ष हैं।



माना, ABCD स्क आपत है,
तो - AB = CD
BC = DA.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(8-2)^2 + (4+2)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{36+36} \\ &= \sqrt{72} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(5-8)^2 + (7-4)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(-1-5)^2 + (1-7)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{36+36} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DA &= \sqrt{(2+1)^2 + (-2-1)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{9+9} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$AB = CD$$

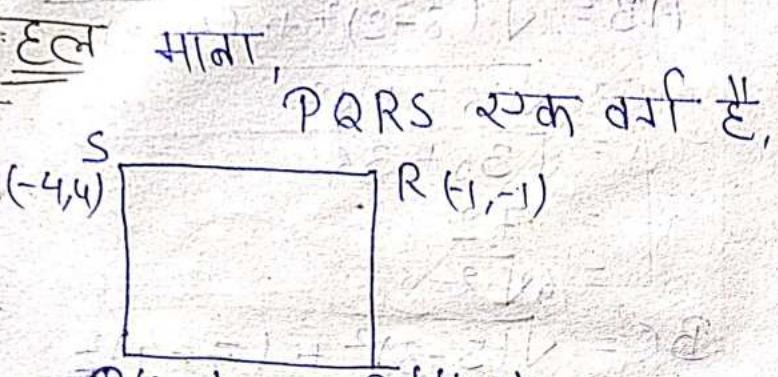
$$6\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{और } BC = DA$$

$$3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

अतः पद्धति सुआ कि ABCD स्क आपत है।

7. दर्शाइए कि त्रिभुज $(1, 7), (4, 2)$, $(-1, -1)$ और $(-4, 4)$ एक वर्ग के शीर्ष हैं।



$$\text{तो, } PQ = QR = RS = SP$$

$$PQ = \sqrt{(4-1)^2 + (2-7)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{9+25}$$

$$= \sqrt{34}$$

$$QR = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-2)^2}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{25+9}$$

$$= \sqrt{34}$$

$$RS = \sqrt{(-4+1)^2 + (4+1)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{9+25}$$

$$= \sqrt{34}$$

$$SP = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (3)^2}$$

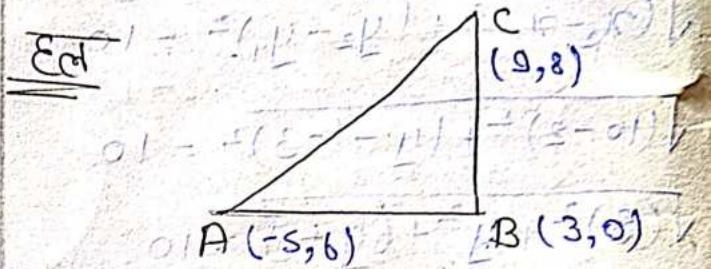
$$= \sqrt{25+9}$$

$$= \sqrt{34}$$

$$\text{अतः } PQ = QR = RS = SP = \sqrt{34}$$

तो सिद्ध इसकी $PQRS$ वर्ग के शीर्ष है।

8. एक त्रिभुज के शीर्ष क्रमशः $(-5, 6), (3, 0)$ तथा $(9, 8)$ है। सिद्ध कीजिए कि यह समांतर त्रिभुज है।



$$AB = \sqrt{(3+5)^2 + (0-6)^2}$$

$$= \sqrt{(8)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{64+36}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$= 10$$

$$BC = \sqrt{(9-3)^2 + (8-0)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{36+64}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$= 10$$

$$CA = \sqrt{(-5-9)^2 + (6-8)^2}$$

$$= \sqrt{(-14)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{196+4}$$

$$= \sqrt{200}$$

$$= 10\sqrt{2}$$

$$\text{अतः } AB = BC$$

इसलिए यह समांतर त्रिभुज है।

माना, $AB = \text{आधार}$

$BC = \text{उच्चार}$

$CA = \text{काण्डा}$

पाठ्यान्गोरण प्रमेय द्वारा

$$CA^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\text{L.H.S.} = CA^2$$

$$= (10\sqrt{2})^2$$

$$= 100 \times 2$$

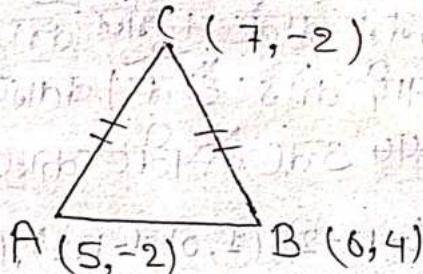
$$= 200$$

$$\begin{aligned}\text{R.H.S.} &= AB^2 + BC^2 \\ &= 10^2 + 10^2 \\ &= 100 + 100 \\ &= 200\end{aligned}$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

9. जाँच कीजिए कि क्या बिन्दु $(5, -2), (6, 4)$ और $(7, -2)$ स्कॉर्स में त्रिभुज के रूप में समाविष्ट हैं।

हल



$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(6-5)^2 + (4+2)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{37}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{(7-6)^2 + (-2-4)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{1+36} \\ &= \sqrt{37}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CA &= \sqrt{(5-7)^2 + (-2+2)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + 0} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

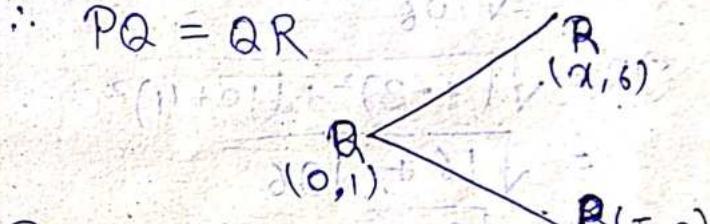
$$AB = BC$$

तो, $ABC \Delta$ स्कॉर्स में समाविष्ट है, परन्तु समाविष्ट है।

10. यदि $Q(0, 1)$ बिन्दुओं $P(5, -3)$ और $R(x, 6)$ से समदूरस्थ है, तो x के मान ज्ञात कीजिए। दूरियाँ QR और PR भी ज्ञात कीजिए।

हल बिन्दु $Q(0, 1)$ बिन्दुओं $R(x, 6)$ और $P(5, -3)$ से समदूरस्थ हैं।

$$\therefore PQ = QR$$



$$\begin{aligned}PQ &= \sqrt{(0-5)^2 + (1+3)^2} \\ &= \sqrt{25+16} \\ &= \sqrt{41}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QR &= \sqrt{(x-0)^2 + (6-1)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 25}\end{aligned}$$

$PQ = QR$ का वर्ग करने पर

$$x^2 + 25 = 41$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$PR = \sqrt{(4-5)^2 + (6+3)^2}$$

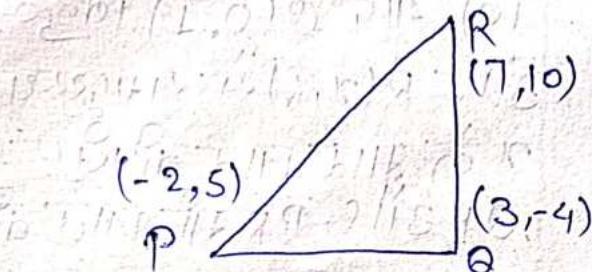
$$\begin{aligned} &= \sqrt{1^2 + 9^2} \\ &= \sqrt{1+81} \\ &= \sqrt{82}\end{aligned}$$

11. सिद्ध कीजिए कि ΔPQR एक समान्तराल है।

(3, -4) तथा (7, 10) रेख समान्तराल
समकोण (त्रिभुज के शीर्ष हैं)

उल

माना, PQR एक समकोण Δ है।



$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(3+2)^2 + (-4-5)^2} \\ &= \sqrt{25 + 81} \\ &= \sqrt{106} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(7-3)^2 + (10+4)^2} \\ &= \sqrt{16 + 196} \\ &= \sqrt{212} \\ &= 2\sqrt{53} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RP &= \sqrt{(-2-7)^2 + (5-10)^2} \\ &= \sqrt{(9)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{81 + 25} \\ &= \sqrt{106} \end{aligned}$$

$$PQ = RP = \sqrt{106}$$

ΔPQR में दो भुजाएँ बराबर हैं तो

सिद्ध इडा कि PQR समान्तराल Δ है।

माना, $PQ = \text{लम्ब}$

$RP = \text{आधार}$, कर्ण = QR .

पाठ्याग्रहण प्रमेय इसके

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$QR^2 = PQ^2 + RP^2$$

$$L.H.S = (2\sqrt{53})^2$$

$$L.H.S = QR^2$$

$$= 212$$

$$R.H.S = PQ^2 + RP^2$$

$$= (\sqrt{106})^2 + (\sqrt{106})^2$$

$$= 106 + 106$$

$$= 212$$

$$L.H.S = R.H.S$$

अतः सिद्ध इडा कि ΔPQR
एक समकोण Δ ही है।

12. निम्नलिखित विन्दुओं से एक
बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार
(यदि कोई है तो) बताइ तथा उपरे
अधिक ज्ञान के लिए कारण भी दीजिए।

$$(i) (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)$$

उल माना $PQRS$ चतुर्भुज है।
 $P(-1, -2), Q(1, 0), R(-1, 2)$
 $S(-3, 0)$ चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(-1+1)^2 + (0+2)^2} \\ &= \sqrt{4+4} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$QR = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 RS &= \sqrt{(-3+1)^2 + (0-2)^2} \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{4+4} \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SP &= \sqrt{(-1+3)^2 + (-2+0)^2} \\
 &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{4+4} \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$PQ = QR = RS = SP$$

इस चतुर्भुज की सातों भुजा समान है। इसके लिए वर्णन है-

$$\text{iii)} (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)$$

इस माना, ABCD एक चतुर्भुज है।

$$A(-3, 5), B(3, 1)$$

$$C(0, 3), D(-1, -4)$$

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{(3+3)^2 + (1-5)^2} \\
 &= \sqrt{36+16} \\
 &= \sqrt{52} \\
 &= 2\sqrt{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BC &= \sqrt{(0-3)^2 + (3-1)^2} \\
 &= \sqrt{9+4} \\
 &= \sqrt{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 CD &= \sqrt{(-1-0)^2 + (-4-3)^2} \\
 &= \sqrt{1^2 + 49} \\
 &= \sqrt{50}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DA &= \sqrt{(-3+1)^2 + (3+4)^2} \\
 &= \sqrt{4+81} \\
 &= \sqrt{85}
 \end{aligned}$$

$$\text{iii)} 5.$$

$$3. (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)$$

इस माना, MNOP एक चतुर्भुज है। तो, M(4, 5), N(7, 6), O(4, 3) और P(1, 2) हैं।

$$\begin{aligned}
 MN &= \sqrt{(7-4)^2 + (6-5)^2} \\
 &= \sqrt{3^2 + 1^2} \\
 &= \sqrt{9+1} \\
 &= \sqrt{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 NO &= \sqrt{(4-7)^2 + (3-6)^2} \\
 &= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{18}
 \end{aligned}$$

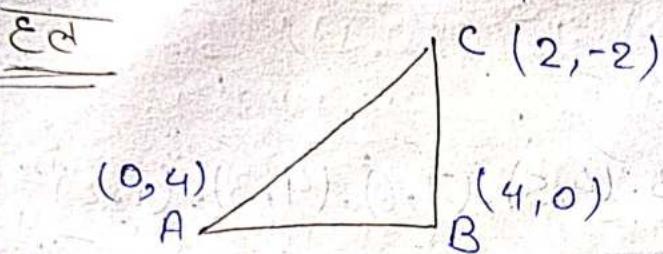
$$\begin{aligned}
 OP &= \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2} \\
 &= \sqrt{3^2 + 1^2} \\
 &= \sqrt{9+1} \\
 &= \sqrt{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 PM &= \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} \\
 &= \sqrt{3^2 + 3^2} \\
 &= \sqrt{9+9} \\
 &= \sqrt{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MN &= OP = \sqrt{10} \\
 NO &= PM = \sqrt{18}
 \end{aligned}$$

तो, इस चतुर्भुज की MNOP एक समांतर चतुर्भुज है।

13. उस त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (0, 4) (4, 0) और (2, -2) हैं समकोण त्रिभुज के रूप में है।



माना. ABC एक त्रिभुज है।
तो, A(0, 4); B(4, 0) और
C(2, -2) बिन्दु हैं।

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{16+16} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(2-4)^2 + (-2-0)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4+4} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{(0-2)^2 + (4+2)^2} \\ &= \sqrt{4+36} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle \text{ का परिमाप} &= \text{ त्रिभुज की दूरी } + \text{ त्रिभुज की दूरी } \\ &= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10} \\ &= 6\sqrt{2} + 2\sqrt{10} \\ &= 2(3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \end{aligned}$$

14. निर्धारित कीजिए कि क्या बिन्दु (1, 5), (2, 3) और (-2, -11) असेक्षी हैं।

माना,
A(1, 5), B(2, 3)
और C(-2, -11)

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2-1)^2 + (3-5)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{1+4} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(-2-2)^2 + (-11-3)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 14^2} \\ &= \sqrt{16+196} \\ &= \sqrt{212} \\ &= 2\sqrt{53} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{(1+2)^2 + (5+11)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 16^2} \\ &= \sqrt{9+256} \\ &= \sqrt{265} \\ &= 16 \end{aligned}$$

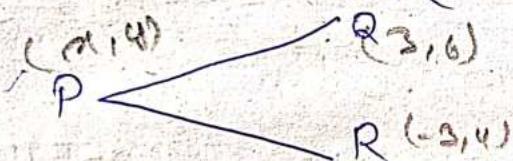
प्रश्नान्वयन,
बिन्दु (1, 5), (2, 3) और (-2, -11)
असेक्षी हैं।

$$\begin{aligned} AB + BC + CA &= 0 \\ 5 + 2\sqrt{53} + 16 &\neq 0 \\ \text{अतः यह असेक्षी नहीं है।} \end{aligned}$$

15. यदि त्रिभुज की जीव (x, y) में स्थित अक्षों पर समान्तर लिन्टों (3, 6) और (-3, 4) से समतुरस्प है।

हल बिन्दु (x, y) बिन्दुओं (3, 6) और (-3, 4) से समतुरस्प है।

माना, P(x, y), Q(3, 6)
R(-3, 4) $\therefore PQ = PR$



$$\begin{aligned}PQ &= \sqrt{(3-x)^2 + (6-y)^2} \\&= \sqrt{9 - 6x + x^2 + 36 - 12y + y^2} \\&= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 12y + 45}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}PR &= \sqrt{(-3-x)^2 + (4-y)^2} \\&= \sqrt{9 - 6x + x^2 + 16 - 8y + y^2} \\&= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25}\end{aligned}$$

PQ = PR का वर्ग करने पर,

$$x^2 + y^2 - 6x - 12y + 45 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$$

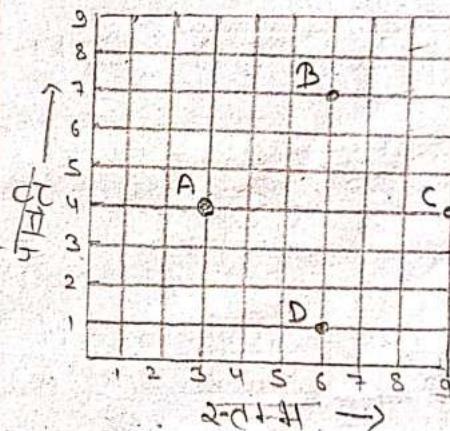
$$-12y + 45 = -8y + 25$$

$$-12x - 12y + 8y + 45 - 25 = 0$$

$$-4(3x + y - 5) = 0$$

$$3x + y - 5 = 0$$

16. किसी कक्षा में चार शिक्षिक बिन्दुओं A, B, C और D पर बहुभृत है, जैसा कि आकृति में दर्शिया गया है। चम्पा और चमेली कक्षा के छांदों आती है और कहा भिन्न तक देखने के बाद, चंपा चमेली से पूछती है, 'क्या तुम नहीं सोचती हों कि ABCD स्कर्वर्ग है?' चमेली इससे सहमत नहीं है। दूसरी भूल का प्रयोग करके, बताइए कि उनमें कौन सही है।



$$A = (3, 4), B = (6, 7)$$

$$C = (9, 4), D = (6, 1)$$

ABCD में

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(6-3)^2 + (7-4)^2} \\&= \sqrt{(3)^2 + (3)^2} \\&= \sqrt{9+9} \\&= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$BC = \sqrt{(9-6)^2 + (4-7)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{9+9} \Rightarrow 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}CD &= \sqrt{(6-9)^2 + (1-4)^2} \Rightarrow \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \\&= \sqrt{9+9} \Rightarrow \sqrt{18} \Rightarrow 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DA &= \sqrt{(3-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} \\&= \sqrt{9+9} \Rightarrow \sqrt{18} \Rightarrow 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\therefore AB = BC = CD = DA$$

\therefore उन सब आकृति वर्ग होगी।

1. बिन्दुओं (-3, 4) और (3, -4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु का निरूपण कीजिए।

$$\text{मध्य बिन्दु का निरूपण} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{-3 + 3}{2}, \frac{4 - 4}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{0}{2}, \frac{0}{2} \right)$$

$$= (0, 0)$$

2. उस बिन्दु के निरूपण कीजिए, जो बिन्दुओं (-1, 7) और (4, -3) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:3 के अनुपात में विभाजित करता है।

$$\text{हल} \quad \text{बिन्दु का निरूपण} = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$= \frac{x_1 = -1, y_1 = 7, m_1 = 2}{x_2 = 4, y_2 = -3, m_2 = 3}$$

$$\text{बिन्दु का निरूपण} = \frac{2 \times 4 + 3 \times -1}{2+3}, \frac{2 \times -3 + 3 \times 7}{2+3}$$

$$= \frac{8 - 3}{5}, \frac{-6 + 21}{5}$$

$$= \frac{5}{5}, \frac{15}{5}$$

$$(x, y) = (1, 3)$$

3. उस लिन्दु के निरूपण जो क्रमन लिन्दुओं से खीच जाने वाले रेखाखण्ड को दिप्त है अनुपात में बांटतः विभाजित करता है:

(i) (3, 4) तथा (-6, 2); अनुपात (3:2)

$$\text{बिन्दु का बांटन विभाजन} = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

$$x_1 = 3, y_1 = 4, x_2 = -6, y_2 = 2, m_1 = 3, m_2 = 2$$

$$= \frac{3 \times -6 + 2 \times 3}{3 - 2}, \frac{3 \times 2 - 9 \times 4}{3 - 2}$$

$$= \frac{-18 + 6}{1}, \frac{6 - 36}{1}$$

$$= -24, -2$$

(ii) (-2, 5) तथा (6, 4); अनुपात 2:2

$$\text{विन्दु का नोट विभाजन} = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$$x_1 = -2, y_1 = 5, x_2 = 6, y_2 = 4, m_1 = 1, m_2 = 2$$

$$= \frac{1 \times 6 - 2 \times -2}{1 + 2}, \frac{1 \times 4 - 2 \times 5}{1 + 2}$$

$$= \frac{6 + 4}{3}, \frac{4 - 10}{-1}$$

$$= 10, -6$$

4. उस विन्दु के निरूपाक ज्ञात कीजिए, जो विन्दुओं (-1, 7) और (4, -3) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:3 के अनुपात में विभाजित करता है।

उल्लेख विन्दु का निरूपाक = $\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

$$x_1 = -1, y_1 = 7, m_1 = 2$$

$$x_2 = 4, y_2 = -3, m_2 = 3$$

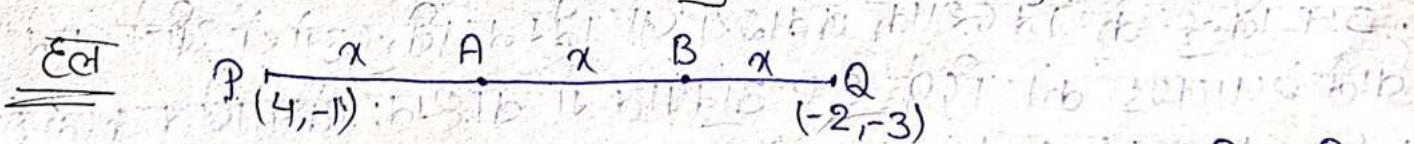
$$= \frac{2 \times 4 + 3 \times -1}{2 + 3}, \frac{2 \times -3 + 3 \times 7}{2 + 3}$$

$$= \frac{8 - 3}{5}, \frac{-6 + 21}{5}$$

$$= \frac{5}{5}, \frac{15}{5}$$

$$= (1, 3)$$

5. विन्दुओं (4, -1) और (-2, -3) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को सम-त्रिभाजित करने वाले विन्दुओं के निरूपाक ज्ञात कीजिए।



माना, PQ रेखा-खण्ड को A और B विन्दु सम-त्रिभाजित करते हैं।

माना, PA = x

$$PB = 2x, BA = x, AQ = x, QD = x, AD = 12, CD = 15$$

$$AQ = 2x, PA = x$$

$$PA : AQ = x : 2x = 1 : 2$$

$$PB : BQ = 2x : x = 2 : 1$$

PQ रेखाखण्ड को A बिंदु $1:2$ के अनुपात में विभाजित करता है, जबकि B बिंदु $2:1$ के अनुपात में,

A के निरूपण -

$$A \left(\frac{1x-2+2x4}{1+2}, \frac{1x-3+2x-1}{1+2} \right)$$

$$A \left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3} \right)$$

$$A \left(\frac{6}{3}, \frac{-5}{3} \right)$$

$$A = (2, -\frac{5}{3})$$

B का निरूपण

$$B \left(\frac{2x-2+1x4}{2+1}, \frac{2x-3+1x-1}{2+1} \right)$$

$$B \left(\frac{-4+4}{3}, \frac{-6-1}{3} \right)$$

$$B \left(\frac{0}{3}, -\frac{7}{3} \right)$$

$$B \left(0, -\frac{7}{3} \right)$$

6. एक रेखाखण्ड का एक अंत्य बिंदु $(13, 19)$ है। यदि उसका मध्य बिंदु $(-9, 30)$ हो, तो इसके अंत्य बिंदु के निरूपण कीजिए।

हल

$$\text{मध्य बिंदु का निरूपण} = \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$(-9, 30) = \frac{13+x_2}{2}, \frac{19+y_2}{2}$$

$$B = A + E = 9A$$

$$E : A = 1 : 9$$

$$-9 = \frac{13+x}{2} - 13$$

$$x_2 = -31$$

$$\frac{19+y_2}{2} = 30$$

$$y_2 = 41$$

7. बिंदु A $(-4, -3)$ और B $(5, 2)$ से छीना जाने वाले रेखाखण्ड x-अक्ष को किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल माना, अभीष्ट अनुपात $1:k$ है तब विभाजन सूत्र द्वारा अभीष्ट बिंदु के निरूपण $\left(\frac{5-4k}{1+k}, \frac{2-3k}{1+k} \right)$

$$x - \text{अक्ष पर}, y = 0 \text{ होता है, तब, } \frac{2-3k}{1+k} = 0$$

$$2-3k = 0$$

$$k = -\frac{2}{3}$$

$$= 2:3$$

अतः अनुपात $(2:3)$ है।

8. बिन्दुओं (-3, 10) और (6, -8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (-1, 6) की समतुल्यता में विभाजित करता है।

$$\text{उल} \quad (x, y) = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$(-1, 6) = \left(\frac{6m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

$$\frac{6m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} = -1 \quad | \quad -\frac{8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = 6$$

$$6m_1 - 3m_2 = -m_1 - m_2 \quad | \quad -8m_1 + 10m_2 = 6m_1 + 6m_2$$

$$7m_1 - 4m_2 = 0 \quad | \quad -14m_1 + 4m_2 = 0$$

$$7m_1 = 4m_2 \quad | \quad -14m_1 = -4m_2$$

$$(7, 4) \quad | \quad (7, 2)$$

9. पाइ A और B के मध्य (-2, -2) और (2, -4) है, तो बिन्दु P के निरूपण के आवश्यक भाग की जिए ताकि $AP = \frac{3}{7} AB$ हो और P रेखा AB पर स्थित हो।

$$\text{उल} \quad A(-2, -2) \text{ और } B(2, -4) \quad | \quad AP = \frac{3}{7} AB \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{3}{7}$$

$$x_1 = -2, x_2 = 2, y_1 = -2, y_2 = -4 \quad | \quad AP : AB = 3 : 7$$

$$A \frac{3}{7} \frac{4}{7} B$$

$$\frac{-2}{7} \frac{-4}{7}$$

जब $AB = 7$, तो $PB = AB - AP$, $PB = 7 - 3 = 4$

$$P \text{ बिन्दु के निरूपण} = \frac{3x_2 + 4x_1 - 2}{3+4}, \frac{3y_2 + 4y_1 - 2}{3+4}$$

$$= \frac{6-8}{7}, \frac{-12-8}{7}$$

$$= \frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}$$

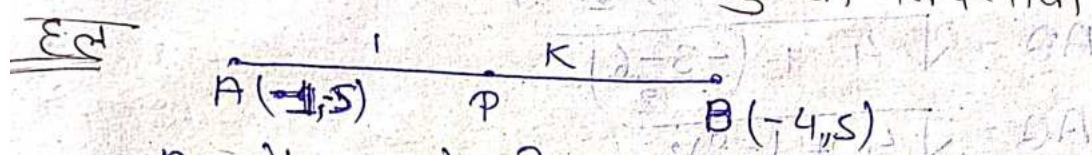
10. रेखाखण्ड AB को दोनों बिन्दु P विभाजित करता है। पाइ बिन्दुओं A और B के निरूपण के मध्य (-4, 3) और (2, 1) है, तो P के निरूपण के आवश्यक है।

E P बिन्दु का बाह्यतः विभाजन - $\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

$$= \frac{3 \times 2 - 2 \times 4}{3-2}, \frac{3 \times 1 - 3 \times 3}{3-2}$$

$$= \frac{6-8}{1}, \frac{-6}{1}$$

11. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं A(1, -5) और B(-4, 5) को मिलाने वाले रेखाखण्ड x-अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिन्दु के निरूपाक भी ज्ञात कीजिए।



A और B को मिलाने वाली रेखा x-अक्ष को विभाजित करते हैं तो $y = 0$ होगा।

माना, अनुपात $= 1 : k$

$$x, y = \frac{-4 + k}{1+k}, \frac{5 + (-5k)}{1+k} \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{5 - 5k}{1+k} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

तो अनुपात $(1:1)$ है।

सभी (1) में k का मान,

$$P(x, y) = \frac{-4+1}{1+1}, \frac{5-5}{1+1}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}, 0 \right)$$

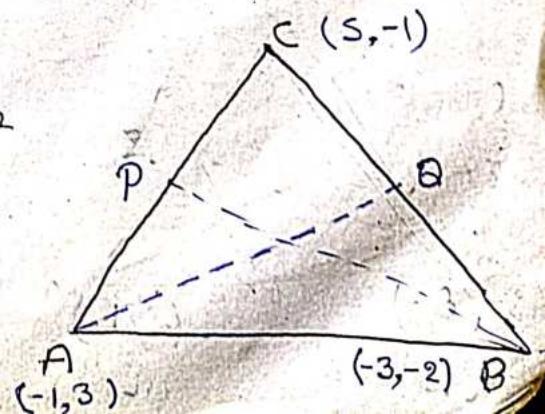
12. त्रिभुज ABC के शीर्षों के निरूपाक क्रमशः $(-1, 3), (-3, -2)$ और $(5, -1)$ हैं, तो शीर्ष A व B से चीर्ची गई माध्यिकाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

E AC का मध्य बिन्दु $= \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}$

$$= \frac{-1+5}{2}, \frac{3-1}{2}$$

$$= \frac{4}{2}, \frac{2}{2}$$

$$P = (2, 1)$$



$$BC \text{ का मध्य बिन्दु } Q = \frac{-3+5}{2}, \frac{-2-1}{2}$$

$$\text{E.I.E.} \quad -1 = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{-3}{2}$$

$$\text{O} \quad Q = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

प्रश्नानुसार

2 विष A की माध्यिका की लम्बाई = AQ

$$AQ = \sqrt{(1+1)^2 + (-\frac{3}{2} - 3)^2}$$

$$AQ = \sqrt{4 + (\frac{-3-6}{2})^2}$$

$$AQ = \sqrt{4 + (\frac{-9}{2})^2}$$

$$AQ = \sqrt{4 + \frac{81}{4}}$$

$$AQ = \sqrt{\frac{97}{4}}$$

2 विष B की माध्यिका की लम्बाई = BP

$$BP = \sqrt{(2+3)^2 + (1+2)^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + 3^2}$$

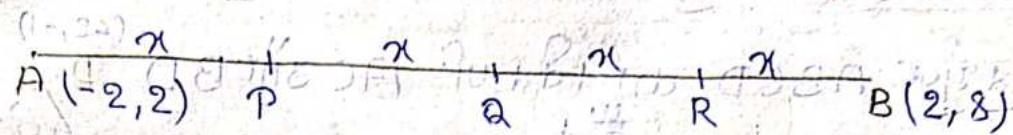
$$= \sqrt{25+9}$$

$$= \sqrt{34}$$

$$(Q, \frac{3}{2})$$

13. बिन्दुओं A(-2, 2) और B(2, 8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AB को त्यार करते हुए भी में विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निम्नलिखित भाग कीजिए।

हल



माना

$$AP = x, \quad AQ = 2x, \quad AR = 3x$$

$$PB = 3x, \quad QB = 2x, \quad RB = x$$

$$AP : PB = x : 3x = 1 : 3$$

$$AQ : QB = 2x : 2x = 1 : 1$$

$$AR : RB = 3x : x = 3 : 1$$

P बिन्दु का निम्नलिखित

$$\left(\frac{2 \times 1 + 3 \times 2}{1+3}, \frac{1 \times 8 + 3 \times 2}{1+3} \right)$$

$$= \frac{2+6}{4}, \frac{8+6}{4}$$

$$= \left(\frac{4}{4}, \frac{14}{4} \right)$$

$$= \left(1, \frac{7}{2} \right)$$

Q बिन्दु का निम्नलिखित

$$\left(\frac{2 \times -2 + 2 \times 2}{2+2}, \frac{2 \times 8 + 2 \times 2}{2+2} \right)$$

$$= \frac{-4+4}{4}, \frac{16+4}{4}$$

$$= \left(\frac{0}{4}, \frac{20}{4} \right) = (0, 5)$$

R बिन्दु का निम्नलिखित

$$\left(\frac{3 \times 2 + 1 \times -2}{3+1}, \frac{3 \times 8 + 1 \times 2}{3+1} \right)$$

$$= \frac{6-2}{4}, \frac{24+2}{4}$$

$$= \left(\frac{4}{4}, \frac{26}{4} \right) = (1, 6)$$

14. दोनों समयतुर्भुज का क्षेत्रफल आते कीजिए जिसके २ ओर
ठहरी कम हो $(3,0), (4,5), (-1,4)$ और $(-2,-1)$ है।

उत्तर Formula- समयतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (उसके विकर्णों का गुणनफल)

समयतुर्भुज ABCDP का विकर्ण AC और BD है।

$$AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2}, BD = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2}$$

$$AC = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2}, BD = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$

$$AC = \sqrt{32}, BD = \sqrt{72}$$

$$AC = 4\sqrt{2}, BD = 6\sqrt{2}$$

$$\text{समयतुर्भुज का क्षेत्र} = \frac{1}{2} (AC \times BD)$$

$$= \frac{1}{2} \times (4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{2} \times 48$$

$$= 24$$

15. बिन्दु A के विद्युतांक आते कीजिए जहाँ AB सक वृत्त का
त्पाल है जिसका केन्द्र $(2,-3)$ है तथा B के विद्युतांक
 $(1,4)$ है।

उत्तर

$$AB = \text{त्पाल}$$

$$BC = \text{विद्युतांक} = x$$

$$\text{त्पाल} = 2x$$

$$BC : AC = x : x = 1 : 1$$

$$2, -3 = \left(\frac{1+x+1+x}{1+1}, \frac{1+4+1+4}{1+1} \right)$$

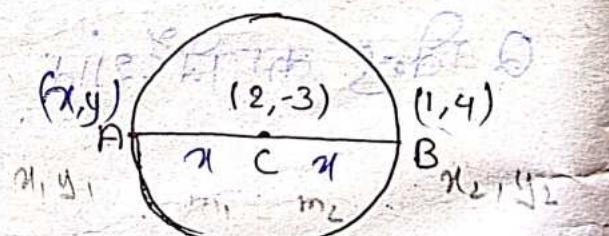
$$2, -3 = \frac{1+x}{2}, \frac{4+4}{2}$$

$$\frac{x+1}{2} = 2, \frac{4+4}{2} = -3$$

$$x+1 = 4-1, 4+4 = -6-4$$

$$x = 3, 4 = -10$$

$$(x, y) = (3, -10)$$



16. बिन्दु के निरूपक भारत की ओर जो बिन्दुओं (-3, -4) और (2, 1) से खीच गए रेखाखण्ड को 3:2 के अनुपात में विभाजित करता है।

उत्तर

$$R \text{ बिन्दु का निरूपक} = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

$$= \frac{3 \times 2 - 2 \times (-3)}{3 - 2}, \frac{3 \times 1 - 2 \times (-4)}{3 - 2}$$

$$= \frac{6 + 6}{1}, \frac{3 + 8}{1}$$

$$= (12, 11)$$

17. बिन्दुओं A(2, -2) और B(-7, 4) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को सम-विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निरूपक भारत की ओर.

उत्तर

$$AP = PQ = QB \quad \text{माना, } AP = x$$

$$AP = x, PB = 2x \quad | \quad AP : PQ \equiv x : 2x = 1 : 2$$

$$AQ = 2x, QB = x \quad | \quad AQ : QB \equiv 2x : x = 2 : 1$$

$$P \text{ बिन्दु का निरूपक} = \frac{1 \times -7 + 2 \times 2}{1 + 2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times -2}{1 + 2}$$

$$= \frac{-7 + 4}{3}, \frac{4 - 4}{3}$$

$$= \frac{5 - 4}{3}, \frac{0}{3}$$

$$= (-1, 0)$$

$$Q \text{ बिन्दु का निरूपक} = \frac{2 \times -7 + 1 \times 2}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times -2}{2 + 1}$$

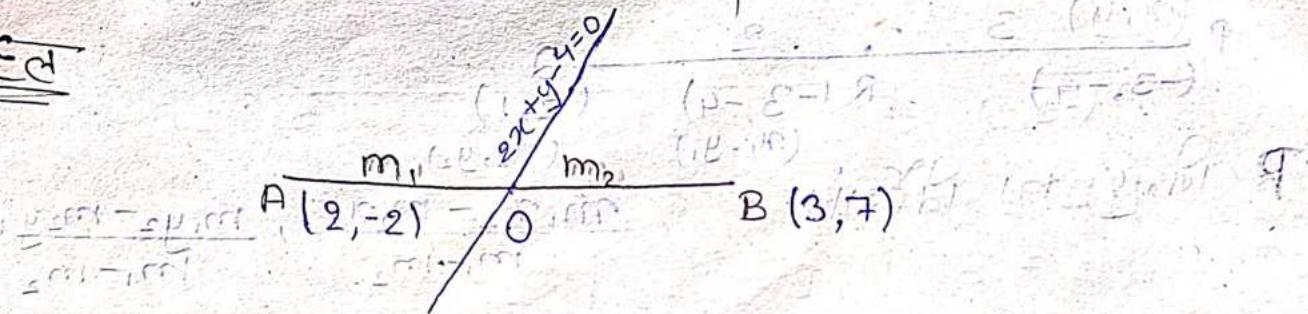
$$= \frac{-14 + 2}{3}, \frac{8 - 2}{3}$$

$$= -\frac{12}{3}, \frac{6}{3}$$

$$= (-4, 2)$$

18. बिन्दु A(2, -2) और B(3, 7) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को देखा 2x + y - 4 = 0 जिस ठनुपात में विभाजित करती है उसे छात कीजिए।

उत्तर

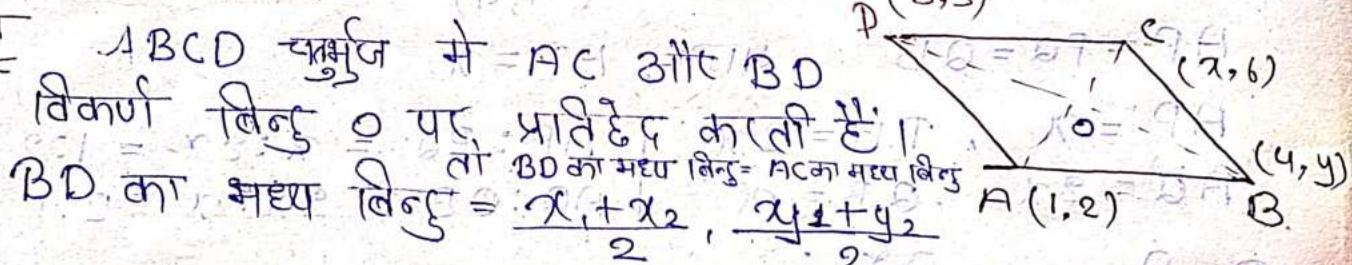


$$m_1 \Rightarrow 2x + y - 4 = 0 \quad m_2 \Rightarrow 2x + y - 4 \\ \Rightarrow 2 \times 2 + (-2) = 4 \\ (=) 4 = 8 - 4 \\ = -2$$

$$= 2(3) + 7 - 4 \\ = 6 + 7 - 4 \\ = 9$$

2. यदि बिन्दु (1, 2), (4, y), (x, 6) और (3, 5) छाती क्रम में लेने पर क्रमसमानत चतुर्भुज के शीर्ष होते x और y छात कीजिए।

उत्तर



$$\text{AC का मध्य बिन्दु} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}$$

$$\text{BD का मध्य बिन्दु} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3+4}{2}, \frac{5+y}{2}$$

$$O(x, y) = \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1+4}{2}, \frac{2+5}{2} = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{x+1}{2}; \quad \frac{y+s}{2} = 4$$

$$1+x = 7 \quad ; \quad y+s = 8$$

$$x = 6 \quad ; \quad y = 3$$