



Effet non linéaire d'auto-démodulation d'amplitude dans les milieux granulaires: théories et expériences

Vincent Tournat

► To cite this version:

Vincent Tournat. Effet non linéaire d'auto-démodulation d'amplitude dans les milieux granulaires: théories et expériences. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2003. Français. tel-00004227

HAL Id: tel-00004227

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004227>

Submitted on 20 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes
ÉCOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE
Le Mans, FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : ACOUSTIQUE

Présentée par
Vincent TOURNAT

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

**EFFET NON LINÉAIRE D'AUTO-DÉMODULATION
D'AMPLITUDE DANS LES MILIEUX GRANULAIRES :
THÉORIES ET EXPÉRIENCES**

soutenue le 5 novembre 2003

devant le jury composé de

X. JIA	Professeur (LPMDI) Université de Marne-la-Vallée	Rapporteur
D. ROYER	Professeur (LOA, ESPCI) Université de Paris VII	Rapporteur
B. HOSTEN	Directeur de recherche CNRS (LMP) Université de Bordeaux I	Président de jury
F. PATAT	Professeur, PH (LUSSI) Université de Tours	Examineur
E. PLESKA	Directeur de programmes (DPEA GN) DGA Paris	Invité
B. CASTAGNÈDE	Professeur (LAUM) Université du Maine	Directeur de thèse
V.E. GUSEV	Professeur (LPEC) Université du Maine	Directeur de thèse

Table des matières

Table des matières	i
Liste des notations	iii
Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Introduction générale	1
1 Les milieux granulaires comme milieux micro-inhomogènes d'étude	5
1.1 Introduction	5
1.2 Description mécanique des contacts entre sphères élastiques	6
1.2.1 Le contact de Hertz	6
1.2.2 La théorie de Hertz-Mindlin	7
1.3 Propagation acoustique dans les chaînes de billes 1-D	9
1.3.1 Relation de dispersion	9
1.3.2 Caractéristiques de la propagation acoustique	12
1.4 Acoustique des milieux granulaires non consolidés tridimensionnels	14
1.4.1 Structures des assemblages granulaires	14
1.4.2 Processus de diffusion acoustique	18
1.4.3 Description de la non-linéarité	21
1.5 Conclusion	30
Bibliographie	31
2 Antenne paramétrique en milieu multidiffusant	35
2.1 Introduction	35
2.2 Principe de l'antenne paramétrique en émission	36
2.2.1 Cas de deux fréquences de pompage	36
2.2.2 Signaux démodulés large bande	36
2.2.3 Régimes de fonctionnement	37
2.3 Modèle d'antenne paramétrique dans les milieux granulaires	41
2.3.1 Approche de base	41
2.3.2 Solution pour le déplacement démodulé	44
2.4 Analyse des différents régimes	46
2.4.1 Démodulation de la partie balistique de l'onde de pompage	46
2.4.2 Démodulation de la partie diffusive de l'onde de pompage	48
2.4.3 Transition ondes de pompage balistiques → diffusives	51
2.5 Résultats expérimentaux	53
2.5.1 Dispositif expérimental	53
2.5.2 Influence du régime de transport de l'onde de pompage	55

2.6	Analyse et discussion	58
2.7	Conclusion et perspectives	64
	Bibliographie	67
3	Antenne paramétrique dans une chaîne granulaire 1-D	71
3.1	Introduction	71
3.2	Théorie	74
3.2.1	Principe de l'antenne paramétrique en émission	74
3.2.2	Approximation quadratique de l'équation du mouvement	75
3.2.3	Relation de dispersion pour les ondes acoustiques dans la chaîne	76
3.2.4	Solution pour l'onde auto-démodulée	77
3.3	Analyse	79
3.3.1	Analyse de la force non linéaire	79
3.3.2	Analyse du signal démodulé de basse fréquence	80
3.4	Traitement numérique et résultats	89
3.4.1	Influence de la distance d'observation	89
3.4.2	Transition associée à la dispersion de vitesse	92
3.4.3	Transition propagatif \rightarrow évanescent	93
3.5	Conclusion	100
	Bibliographie	101
4	Antenne paramétrique avec des ondes de pompage de cisaillement	103
4.1	Introduction	103
4.1.1	Rôle des contacts "faibles" dans les arrangements granulaires	104
4.1.2	Distributions de contacts	105
4.2	Expériences	108
4.2.1	Dispositif expérimental	108
4.2.2	Dynamique de croissance des signaux démodulés	109
4.2.3	Dilatance non linéaire	112
4.2.4	Caractérisation de l'anisotropie des chaînes de force	115
4.3	Modélisation	119
4.4	Discussion	127
4.5	Conclusion	129
	Bibliographie	131
	Conclusion générale	133
	Annexe A	136
	Annexe B	145
	Index	158

Principales notations utilisées

a	rayon de la surface de contact entre billes (chap. 1) & diamètre des billes (chap. 2)
α	écart du paramètre non-linéaire (chap. 1) & raideur des ressorts équivalents (chap. 3)
c_ϕ	vitesse de phase
c_g	vitesse de groupe
c_0	vitesse de phase à fréquence nulle
δ_0	déplacement statique entre deux billes
E	module d'Young
E_p	énergie potentielle
ε	déformation
ε_0	déformation statique
$\tilde{\varepsilon}$	déformation dynamique
$\tilde{\varepsilon}_a$	amplitude de la déformation dynamique
f_c	fréquence de coupure
f_p	fréquence de pompage
G	module de cisaillement
Γ_2	paramètre de non-linéarité quadratique
$H(\dots)$	distribution de Heaviside
k	nombre d'onde
K	raideur d'un ressort
m	masse d'une bille
ν	coefficient de Poisson
ω	pulsation / pulsation de pompage
ω_c	pulsation de coupure
Ω	pulsation de l'onde démodulée
p	pression acoustique
P_0	pression statique
\vec{r}	vecteur position
R	rayon des billes
ρ	densité du matériau constituant les billes (chap. 1)
σ	contrainte
σ_0	contrainte statique
$\tilde{\sigma}$	contrainte dynamique

Table des figures

Chapitre 1

1.1	<i>Définitions des variables pour le problème du contact entre deux billes.</i>	7
1.2	<i>Chaîne unidimensionnelle de billes et réseau équivalent de masses-ressorts.</i>	9
1.3	<i>Représentation de la relation de dispersion 1.10.</i>	10
1.4	<i>Vitesses de phase et de groupe issues de la relation de dispersion 1.10.</i>	11
1.5	<i>Ondes de surface sphérique dans une chaîne de bille</i>	12
1.6	<i>Représentation des différents arrangements réguliers possibles.</i>	14
1.7	<i>Réseau de chaînes de force créé sous une contrainte statique uniaxiale</i>	16
1.8	<i>Hystérésis de l'amplitude démodulée (dynamique lente)</i>	17
1.9	<i>Diffusion d'une onde plane par un obstacle.</i>	19
1.10	<i>Illustration du désordre dans un milieu granulaire</i>	20
1.11	<i>Modèle de non-linéarité des milieux mésoscopiques</i>	22
1.12	<i>Paramètres linéaire et non linéaire des milieux mésoscopiques</i>	23
1.13	<i>Distribution de raideurs des inclusions compliantes</i>	24
1.14	<i>Les non-linéarités susceptibles d'apparaître dans les milieux granulaires.</i>	25
1.15	<i>Loi de hooke, milieu linéaire</i>	26
1.16	<i>Non-linéarité quadratique dans la relation contrainte - déformation</i>	27
1.17	<i>Non-linéarité cubique dans la relation énergie - déformation</i>	27
1.18	<i>Illustration du phénomène de clappement</i>	28

Chapitre 2

2.1	<i>Représentation schématique de l'antenne paramétrique en émission.</i>	36
2.2	<i>Amplitudes des ondes primaires et démodulées en fonction de la distance</i>	37
2.3	<i>Exemple de signaux de pompage et démodulé</i>	38
2.4	<i>Antenne paramétrique dans le régime de Westervelt</i>	38
2.5	<i>Antenne paramétrique dans le régime de Berktay</i>	39
2.6	<i>Transformation du signal démodulé prédite par la solution de l'équation (2.25)</i>	48
2.7	<i>Transformation du signal démodulé prédite par la solution de l'équation (2.28)</i>	50
2.8	<i>Transformation du signal démodulé prédite par la solution de l'équation (2.28)</i>	51
2.9	<i>Schéma du dispositif expérimental de mesures</i>	54
2.10	<i>Signaux temporels de pompage et démodulés</i>	55
2.11	<i>Signaux démodulés pour trois fréquences de pompage différentes</i>	57
2.12	<i>Profils de vitesse sur le transducteur émetteur</i>	62

Chapitre 3

3.1	<i>Schéma du problème considéré.</i>	75
3.2	<i>Les différents cas limites de l'analyse du résultat (3.19)</i>	81

3.3	<i>Amplitude du déplacement démodulé en fonction de la distance d'observation</i>	90
3.4	<i>Evolution du profil temporel démodulé de vitesse avec la distance d'observation</i>	91
3.5	<i>Transition associée à la dispersion de vitesse pour le profil de vitesse démodulée</i>	92
3.6	<i>Transition ondes de pompage propagatives → ondes de pompage évanescentes</i>	94
3.7	<i>Transition ondes de pompage propagatives → ondes de pompage évanescentes</i>	95
3.8	<i>Evolution du profil temporel du déplacement démodulé en fonction de la distance</i>	97
3.9	<i>Evolution du profil temporel du déplacement démodulé en fonction de la distance</i>	97
3.10	<i>Evolution du profil temporel du déplacement démodulé en fonction de la distance</i>	98
3.11	<i>Evolution du profil temporel du déplacement démodulé en fonction de la distance</i>	98

Chapitre 4

4.1	<i>Différentes distributions de déformations de contacts</i>	106
4.2	<i>Configuration de l'expérience de propagation verticale</i>	108
4.3	<i>Amplitude des signaux démodulés en fonction de l'amplitude de pompage</i>	109
4.4	<i>Amplitude des signaux démodulés en fonction de l'amplitude de pompage</i>	110
4.5	<i>Illustration de l'anisotropie du paramètre de non-linéarité quadratique</i>	111
4.6	<i>Illustration de la dilatace sur une période de l'onde acoustique de cisaillement</i>	112
4.7	<i>Tests de polarisation pour le signal démodulé</i>	113
4.8	<i>Signaux temporels impulsionnels démodulés</i>	114
4.9	<i>Schéma de l'expérience de propagation dans la direction horizontale</i>	116
4.10	<i>Amplitude des signaux démodulés en fonction de l'amplitude de pompage</i>	116
4.11	<i>Amplitude des signaux démodulés en fonction de l'amplitude de pompage</i>	117
4.12	<i>Amplitude des signaux démodulés en fonction de l'amplitude de pompage</i>	118
4.13	<i>Amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage (mod.)</i>	121
4.14	<i>Amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage (mod.)</i>	122
4.15	<i>Amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage (mod.)</i>	123
4.16	<i>Amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage (mod.)</i>	123
4.17	<i>Distribution de déformations de contacts et dynamique en amplitude</i>	124
4.18	<i>Distribution de déformations de contacts et dynamique en amplitude</i>	125
4.19	<i>Distribution de déformations de contacts et dynamique en amplitude</i>	125
4.20	<i>Influence de la longueur caractéristique d'atténuation ℓ_a</i>	128

Liste des tableaux

Chapitre 1	
1.1	<i>Propriétés des différents types d'arrangements de billes identiques.</i> 15
Chapitre 2	
2.1	<i>Variation des paramètres de l'ajustement en fonction de la fréquence de pompage . . .</i> 56
2.2	<i>Effets physiques impliqués dans les expériences</i> 59
Chapitre 4	
4.1	<i>Relevés de l'anisotropie non linéaire expérimentale</i> 129

Introduction générale

L'acoustique non linéaire est devenue un domaine de recherche en tant que tel à partir de la fin des années 1950, bien que les équations de l'acoustique, établies longtemps auparavant, soient fondamentalement non linéaires. Les besoins d'investigations liés à l'étude des sons intenses provenant d'explosions (sous-marines, sismiques), de moteurs ou de jets, ont été un des facteurs de développement de ce domaine. La conception et la réalisation de nouvelles sources, capables de générer des ultrasons de puissance, ont permis depuis de mettre en évidence un grand nombre de phénomènes acoustiques, propres aux systèmes non linéaires, comme l'émission ou la réception paramétrique, l'auto-action, la cavitation, la génération d'harmoniques, de sous-harmoniques ou de bruit, et bien d'autres...

Les efforts de recherche importants, effectués par l'Union Soviétique et les USA pendant la guerre froide, sur la propagation acoustique sous-marine, se sont rapidement portés sur les applications prometteuses de l'acoustique non linéaire. L'une de ces applications est l'antenne paramétrique, utilisant le phénomène d'acoustique non linéaire désigné par "auto-démodulation d'amplitude". Cet effet, étudié dans ce travail de thèse, a un principe de base relativement simple : deux ondes intenses de fréquences proches, les ondes primaires, sont émises dans un milieu de propagation. En raison de la non-linéarité de ce milieu, ces deux ondes peuvent interagir au cours de leur propagation pour créer, par mélange de fréquences, de nouvelles composantes fréquentielles qui n'étaient pas présentes à l'émission. En particulier, une fréquence basse, qui est égale à la différence entre les deux fréquences d'émission proches, peut être générée. En raison d'une atténuation acoustique croissante avec la fréquence, cette onde de fréquence différence, ou onde secondaire, se propage plus loin que les ondes primaires de hautes fréquences.

Un des intérêts de cette méthode est associé au fait que cette onde de fréquence différence est générée par un ensemble de sources virtuelles en mouvement, étalé sur une distance caractéristique de l'ordre de la longueur d'atténuation des ondes primaires. Cette propriété confère à la radiation de basse fréquence (onde secondaire) une forte directivité, même si un émetteur de faible ouverture est utilisé, ce qui peut s'avérer utile pour sonder sélectivement un milieu.

Les effets non linéaires de la propagation acoustique, qui ne sont en général que des corrections aux effets relativement bien décrits par les approximations linéaires des équations de l'acoustique, peuvent devenir extrêmement marqués dans les milieux dits mesoscopiques, qui présentent des inhomogénéités structurales. Ces milieux sont caractérisés par la présence de défauts d'élasticité ou inclusions, plus compliant que l'ensemble de leur matrice rigide, et impliquant une relation d'état macroscopique fortement non linéaire : milieux comportant des fissures, des délaminations, des pores fluides ou des contacts. Ainsi, il est admis depuis une dizaine d'années que les effets d'acoustique non linéaire sont plus sensibles que les effets linéaires pour la caractérisation de ces milieux, notamment lorsque les inclusions sont de faibles dimensions et en faible quantité.

Les milieux granulaires non consolidés, composés de grains solides (billes élastiques), possèdent ces propriétés. En raison de la relation fondamentalement non linéaire qui existe entre contrainte et

déformation de chaque contact inter-billes (contact de Hertz par exemple), la non-linéarité de l'équation d'état d'un assemblage granulaire est beaucoup plus élevée que celle des milieux homogènes. Chaque contact inter-billes, et en particulier chaque contact faiblement comprimé, joue le rôle d'une inclusion compliant évoquée précédemment, pour une onde élastique se propageant dans les billes elles-mêmes et à travers les contacts.

Les milieux granulaires en général, présentent à la fois l'intérêt d'être utilisés ou étudiés dans de nombreuses branches de l'industrie (agro-alimentaire, pharmaceutique, génie civil, génie des matériaux, etc ...), et l'intérêt fondamental d'exhiber des comportements physiques qui leur sont spécifiques. Par exemple, les milieux granulaires peuvent se comporter à la fois comme un solide (sable mouillé du château de sable), comme un fluide (grains du sablier) ou encore comme un gaz (chocs de billes en mouvement dans une boîte).

Ce travail de thèse porte sur l'étude du phénomène non linéaire d'auto-démodulation d'amplitude dans les milieux granulaires non consolidés. Il a pour but de mieux comprendre le fonctionnement de la méthode de l'antenne paramétrique dans les milieux micro-inhomogènes en général, afin d'envisager des applications de cet effet non linéaire au contrôle non destructif ou au diagnostic des matériaux endommagés.

Les milieux granulaires ont été choisis comme matériau micro-inhomogène d'étude pour leur caractère courant, et aussi, parce que leur micro-structure a une taille et une forme connue, lorsque des billes élastiques identiques sont utilisées. De plus, la méthode de l'antenne paramétrique est susceptible d'être bien adaptée à ces milieux qui atténuent fortement, par absorption et diffusion, les ondes acoustiques qui se propagent dans les billes dès quelques dizaines de kiloHertz pour des billes de diamètre de l'ordre du millimètre. En effet, alors que les ondes primaires de hautes fréquences émises sont rapidement atténuées, les ondes secondaires, créées par effets non linéaires, peuvent se propager relativement facilement.

Plusieurs interrogations sont alors susceptibles d'être posées :

- Est-il possible d'obtenir des informations sur le régime de propagation des ondes primaires de hautes fréquences, sensibles à la micro-structure du milieu, à partir des caractéristiques du signal secondaire de basse fréquence : amplitude, phase, profil temporel, ... ?
- Quels sont les phénomènes physiques susceptibles d'influencer le fonctionnement de l'antenne paramétrique dans les milieux granulaires ?
- Les ondes de cisaillement sont-elles capables, dans ces milieux complexes, de produire le phénomène d'auto-démodulation d'amplitude ?
- Est-il possible, grâce à ce phénomène, d'obtenir des informations sur le milieu granulaire lui-même, et sur ses comportements spécifiques en particulier ?

Dans le premier chapitre de ce document, une revue non exhaustive des comportements mécaniques et des phénomènes physiques apparaissant dans les milieux granulaires non consolidés est présentée, particulièrement pour les phénomènes mis en jeu et étudiés dans les chapitres suivants.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'influence de la diffusion acoustique sur le processus d'auto-démodulation d'amplitude. Un modèle d'antenne paramétrique qui prend en compte la diffusion des ondes primaires de hautes fréquences est développé, et des expériences associées sont réalisées puis analysées.

Dans le chapitre 3, le problème de l'auto-démodulation d'amplitude dans une chaîne granulaire uni-dimensionnelle est traité. Cette configuration plus simple comparée aux milieux tri-dimensionnels réels, permet de modéliser précisément la dispersion de vitesse, et de prendre en compte le caractère évanescent des modes acoustiques. L'influence de la transition entre sources non linéaires propagatives et sources non linéaires évanescences sur le fonctionnement de l'antenne paramétrique est analysée théoriquement et numériquement.

Dans le dernier chapitre, des ondes de cisaillement sont utilisées pour exciter le signal secondaire de basse fréquence. Expérimentalement, plusieurs phénomènes nouveaux sont mis en évidence, et permettent de caractériser les contacts du milieu ainsi que l'anisotropie induite par un chargement uniaxial de l'assemblage. Le développement d'une modélisation théorique et numérique permet d'interpréter les résultats expérimentaux obtenus.

- [Zar66] L. K. Zarembo et V. A. Krasil'nikov, *Introduction to nonlinear acoustics*, (Nauka, Moscou), (1966).
- [Rud77] O. V. Rudenko et S. I. Soluyan, *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*, (Plenum, New-York), (1977).
- [Nov87] B. K. Novikov, O. V. Rudenko et V. I. Timoshenko, *Nonlinear underwater acoustics*, (American Institute of Physics, New-York), (1987).
- [Ham98] M. F. Hamilton et D. T. Blackstock (eds.), *Nonlinear acoustics*, (Academic Press, San Diego), (1998).
- [Nau98] K. A. Naugolnykh et L. A. Ostrovsky, *Nonlinear wave processes in acoustics*, (Cambridge University Press, Cambridge), (1998).

Chapitre 1

Les milieux granulaires comme milieux micro-inhomogènes d'étude

1.1 Introduction

Les milieux granulaires, des nano-matériaux aux sédiments marins, des poudres pharmaceutiques aux grains de blé sont très diverses mais ont des propriétés physiques très similaires. Ce premier chapitre, à caractère introductif, regroupe un ensemble de notions, phénomènes ou descriptions de comportements, utiles pour la compréhension des résultats théoriques et expérimentaux présentés par la suite. L'objet de ce chapitre n'est pas de faire une revue exhaustive des modèles, des expériences ou des résultats numériques reportés dans la littérature à ce jour, mais simplement de présenter les éléments utilisés et discutés dans les chapitres suivants.

En partant de l'échelle microscopique, les lois de comportements des contacts entre deux sphères élastiques sont présentées. A une échelle plus grande, l'échelle mésoscopique des chaînes de billes (comprise entre l'échelle microscopique des billes, et l'échelle macroscopique pour laquelle le milieu apparaît comme homogène), des éléments de la propagation acoustique linéaire puis non linéaire dans une configuration uni-dimensionnelle sont développés. L'étude de ces systèmes "simplifiés" permet de mettre en évidence des comportements de base comme la dispersion de vitesse ou encore la dépendance de la vitesse de phase sur la pression statique appliquée. Ensuite, les structures des assemblages tridimensionnels et les chaînes de force sont discutées. Enfin, les manifestations macroscopiques de la diffusion acoustique et des non-linéarités acoustiques, dont les causes proviennent de caractéristiques micro- et/ou mésoscopiques du milieu sont présentées.

1.2 Description mécanique des contacts entre sphères élastiques

La description du contact entre les billes élastiques est la base microscopique de la compréhension du comportement d'un milieu granulaire. En effet, le comportement macroscopique du milieu est dicté en partie par le comportement local au niveau des contacts, notamment en ce qui concerne la non-linéarité macroscopique ou non-linéarité "effective" du milieu.

Le comportement du contact entre deux sphères identiques de rayon R peut être décrit par la théorie de Hertz-Mindlin. Hertz a résolu le problème du contact entre deux sphères élastiques soumises à une contrainte axiale, c'est à dire une contrainte dirigée selon l'axe formé par les deux centres des billes [Joh85]. Il étudiait les franges d'interférences lumineuses de Newton qui apparaissent entre deux lentilles de verre, et il s'est intéressé à l'influence de la déformation élastique des surfaces des lentilles due à leur contact mutuel sous pression. Mindlin, quant à lui, a formulé la théorie concernant l'application d'une force tangentielle entre deux sphères [Joh85, Min49, Joh54].

1.2.1 Le contact de Hertz

Les hypothèses et simplifications de départ de la théorie de Hertz sont les suivantes : la zone de contact entre deux sphères élastiques est de façon générale elliptique. Pour le calcul des déformations locales, chaque sphère est vue comme un demi espace élastique linéaire, chargé sur une petite région elliptique de sa surface plane. Grâce à cette hypothèse, les contraintes qui sont concentrées au niveau des contacts sont traitées séparément de la distribution générale de contraintes dans les deux sphères. Pour que cette simplification soit justifiée, il faut que les régions de contact soient petites devant les rayons des sphères, ce qui implique de faibles déformations. Enfin, les surfaces sont supposées sans friction, tel qu'il existe uniquement une pression normale entre elles. Un schéma du problème du contact entre deux sphères élastiques est représenté sur la figure 1.1.

Considérant l'ensemble de ces hypothèses, la théorie de Hertz permet d'obtenir les formules suivantes [Joh85] :

$$a = \left(\frac{3F_0 R}{4E^*} \right)^{1/3}, \quad (1.1)$$

où a est le rayon de la surface de contact entre les sphères, F_0 la force axiale totale appliquée sur les sphères, $E^* = E/2(1 - \nu^2)$ avec E et ν , respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson des matériaux constituant les sphères, et R le rayon des sphères. Pour les billes de verres utilisées dans les expériences présentées dans ce document, $E \simeq 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ et $\nu \simeq 0.21$.

La pression locale au centre de la surface de contact p_0 s'écrit :

$$p_0 = \left(\frac{6F_0 E^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}. \quad (1.2)$$

Le déplacement axial relatif entre les centres des sphères $U^{(a)}$ s'écrit :

$$U^{(a)} = \left(\frac{9F_0^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3}. \quad (1.3)$$

Cette relation déplacement-force est fondamentalement non linéaire puisque $U^{(a)} \propto F_0^{2/3}$. La relation inverse force-déplacement suivante sera souvent utilisée dans ce document,

$$F_0 = \left(\frac{4R^{1/2} E^*}{3} \right) U^{(a)3/2}. \quad (1.4)$$

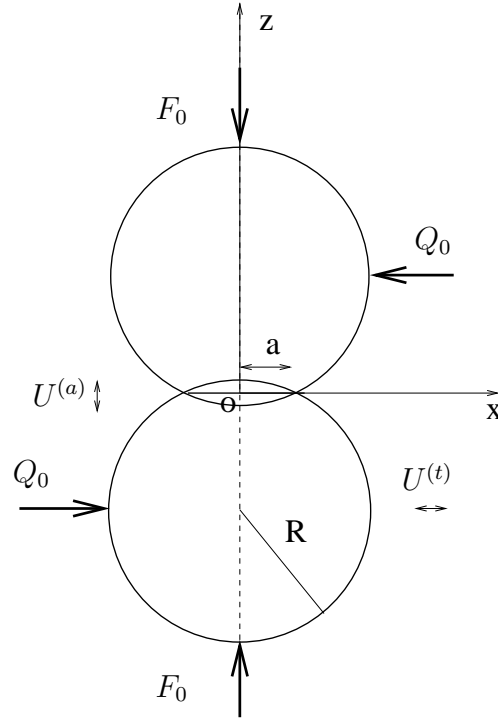


FIG. 1.1: Définitions des variables pour le problème du contact entre deux billes.

1.2.2 La théorie de Hertz-Mindlin

Si une force tangentielle Q_0 est appliquée en plus de la force axiale F_0 , elle cause une déformation élastique à l'interface. Dans le cas où il n'y a pas glissement au niveau du contact, les déplacements tangentiels de tous les points de la zone de contact sont les mêmes. Si la force tangentielle totale Q_0 agit sur l'axe Ox , alors par symétrie du problème, le déplacement est parallèle à l'axe Ox . La distribution de contraintes tangentielles qui produisent un déplacement tangentiel uniforme pour une région circulaire, est symétrique radialement en amplitude et s'écrit [Min49, Joh54] :

$$q(r) = q_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad (1.5)$$

où $q_0 = Q_0/2\pi a^2$, et r est la distance radiale par rapport au centre de la surface de contact.

Contrairement à la théorie de Hertz écrite pour une contrainte et un déplacement axiaux, le déplacement tangentiel $U^{(t)}$ est ici proportionnel à la force tangentielle :

$$U^{(t)} = \frac{Q_0}{4a} \left(\frac{2 - \nu}{G} \right), \quad (1.6)$$

où G est le module de cisaillement du matériau constituant les billes.

La contrainte tangentielle locale $q(r)$ devient très grande lorsque r s'approche de a (voir l'équation (1.5)). Il peut alors y avoir glissement pour les points qui se situent sur la couronne périphérique de la surface de contact. Lorsque ce glissement est pris en compte, le déplacement tangentiel relatif des

deux sphères s'écrit :

$$U^{(t)} = \frac{3\mu_f F_0}{8a} \left(\frac{2-\nu}{G} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{Q_0}{\mu_f F_0} \right)^{2/3} \right] , \quad (1.7)$$

où μ_f est le coefficient de friction du matériau constituant les billes.

Ce n'est plus une relation linéaire entre déplacement et contrainte tangentiels. Il faut aussi noter que le déplacement tangentiel $U^{(t)}$ est une fonction non linéaire de la contrainte axiale F_0 . Il est prédit et observé expérimentalement un comportement hystérétique du contact selon le chargement axial ou tangentiel et le chemin de variation de ces contraintes [Joh85, Joh54]. De tels contacts peuvent donc, a priori, être des sources de non-linéarité de type hystérétique pour le matériau granulaire dans son ensemble.

La théorie de Hertz-Mindlin est très souvent utilisée comme théorie de base pour la description des contacts de billes dans les milieux granulaires. Cependant, les milieux granulaires tridimensionnels peuvent être le siège d'autres phénomènes associés par exemple au passage d'une onde acoustique.

Des extensions de ces modèles de description mécanique des contacts ont été réalisées ou sont envisageables. Les points susceptibles de poser des problèmes de modélisation sont entre autres :

- l'influence des aspérités des surfaces en contact sur la friction ou sur la réponse élastique du contact [Joh97] ;
- l'influence des effets thermo-élastiques localisés au niveau des contacts ;
- le comportement dynamique associé à une onde acoustique et notamment l'influence de la friction dynamique [Khi01] ;
- les fortes déformations de contacts menant à des déformations plastiques ;
- les pertes dynamiques par friction ou par conduction thermique ;
- l'effet de la rotation des billes autour de l'axe de symétrie du contact.

L'ensemble de ces phénomènes n'est pas considéré ici, et les modèles et interprétations qui sont présentés dans ce document sont basés sur le contact de Hertz uniquement.

1.3 Propagation acoustique dans les chaînes de billes 1-D

Dans une chaîne unidimensionnelle de billes, lors de la propagation d'ondes élastiques longitudinales, les contraintes sont supposées axiales en raison de la symétrie du système. Les contacts entre les billes sont dans ce cas décrits par la théorie de Hertz [Joh85, Lan86]. Comme les déformations statiques et dynamiques des billes sont confinées dans une très petite région autour du point de contact, il est possible de modéliser la chaîne de billes par un ensemble de masses ponctuelles $m = 4\pi\rho R^3/3$ (où ρ est la densité de chaque bille et R leur rayon), reliées entre elles par des ressorts non linéaires obéissant à l'équation de Hertz. Une représentation schématisée de ce problème est présentée sur la figure 1.2. Cette approche peut s'appliquer dans le cas d'une sollicitation dynamique sous réserve que la longueur d'onde dans le matériau constituant les billes reste très grande devant R . Ceci assure le fait que les phénomènes dynamiques sont quasi-statiques au niveau des contacts, et que la contrainte est uniforme à l'échelle d'une bille. Ainsi, les modes de "respiration" ou modes supérieurs des billes apparaissent à des fréquences plus hautes que celles considérées ici, tout comme les éventuelles ondes de surface.

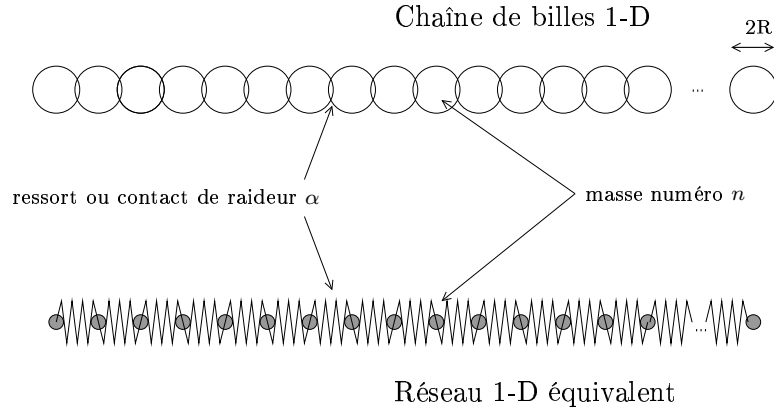


FIG. 1.2: Chaîne unidimensionnelle de billes et réseau équivalent de masses-ressorts.

1.3.1 Relation de dispersion

La relation qui lie pulsation et nombre d'onde pour un milieu de propagation donné est appelée relation de dispersion. La connaissance de cette relation permet par exemple de décrire la dépendance fréquentielle des vitesses de phase et de groupe d'une onde acoustique dans le milieu.

Pour des longueurs d'ondes grandes devant le pas du réseau, la dynamique de la chaîne peut-être décrite par cette équation différentielle non linéaire [Cos97, Cos99] :

$$\ddot{u}_n = \frac{\sqrt{2RE}}{3m(1-\nu^2)} \{ [\delta_0 - (u_n - u_{n-1})]^{3/2} - [\delta_0 - (u_{n+1} - u_n)]^{3/2} \} \quad (1.8)$$

où u_n est le déplacement de la bille n par rapport à sa position d'équilibre, \ddot{u}_n l'accélération de la bille n , et δ_0 la distance au repos entre les deux centres de billes adjacentes.

L'approximation linéaire de l'équation (1.8) est obtenue dans la limite des petites déformations dynamiques $|u_n - u_{n-1}| \ll |\delta_0|$. Avec cette approximation, une constante de raideur pour les ressorts est trouvée égale à :

$$K = \left(\frac{\partial \delta_0}{\partial F_0} \right)^{-1} = \frac{3}{4} (RF_0)^{1/3} \left(\frac{4E}{3(1-\nu^2)} \right)^{2/3} \quad (1.9)$$

où F_0 est la force statique appliquée sur la chaîne, et δ_0 le déplacement statique associé. Une estimation de la raideur K d'un contact pour $R = 0.5 \text{ cm}$, $F_0 = 10 \text{ N}$, $E = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ et $\nu = 0.21$ donne $K \simeq 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$, ce qui correspond à un module d'Young effectif de $E \simeq 5 \cdot 10^8 \text{ Pa}$, très inférieur à celui du matériau lui-même. La relation de dispersion entre le nombre d'onde k et la pulsation ω dans cette approximation s'obtient en substituant un déplacement de la forme $u_n = Ae^{i\omega t - k2Rn}$ dans l'approximation linéaire de l'équation (1.8) :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} |\sin(kR)| \quad (1.10)$$

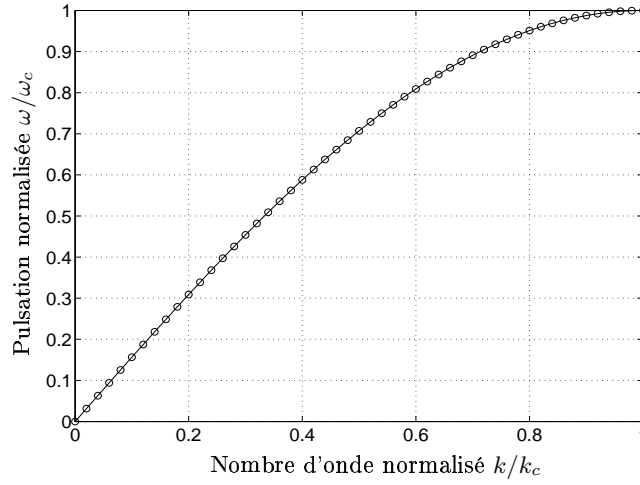


FIG. 1.3: Représentation de la relation de dispersion 1.10.

La pulsation de coupure de la chaîne, pulsation maximum au delà de laquelle les modes acoustiques longitudinaux considérés deviennent évanescents, vaut alors,

$$\omega_c = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \quad (1.11)$$

La fréquence de coupure de la chaîne associée, exprimée en fonction des paramètres accessibles expérimentalement est donnée par :

$$f_c = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{3F_0^{1/6}}{4\pi^{3/2}\rho^{1/2}R^{4/3}} \left(\frac{4E}{3(1-\nu^2)} \right)^{1/3} \quad (1.12)$$

A cette fréquence, le nombre d'onde de coupure correspond à la limite de la première zone de Brillouin et vaut $k_c = \frac{\pi}{2R}$. Une estimation de la fréquence de coupure d'une chaîne où $R = 0.5 \text{ cm}$, $F_0 = 10 \text{ N}$, $\rho = 4000 \text{ kg/m}^3$, $E = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ et $\nu = 0.21$ donne $f_c \simeq 16 \text{ kHz}$. Sur la figure 1.3, est représentée la dépendance de la pulsation sur le nombre d'onde dans la première zone de Brillouin. Le rapport ω/k donne la vitesse de phase de l'onde acoustique dans la chaîne et la tangente à la courbe représentée sur la figure 1.3 $\partial\omega/\partial k$ donne la vitesse de groupe. Ces vitesses sont représentées en fonction de la pulsation sur la figure 1.4.

La vitesse de phase acoustique dans la chaîne, dans la limite basse fréquence, est bien plus faible que la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans le matériau constituant les billes du fait de

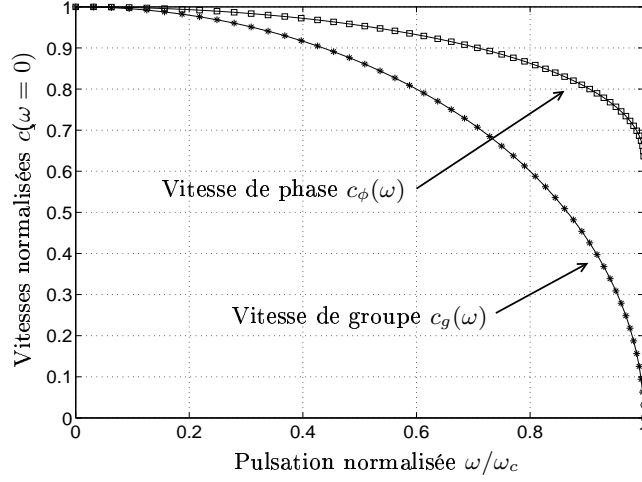


FIG. 1.4: Vitesses de phase et de groupe issues de la relation de dispersion 1.10.

la relativement faible raideur des contacts comparée au matériau des billes, et elle s'écrit :

$$c_{1D} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k} = 2R\sqrt{\frac{K}{m}} = R\omega_c = \frac{3F_0^{1/6}}{2\sqrt{\pi\rho}R^{1/3}} \left(\frac{4E}{3(1-\nu^2)} \right)^{1/3} \quad (1.13)$$

La vitesse de phase de l'onde acoustique en fonction de la fréquence dans la chaîne se déduit de la relation de dispersion (1.10) :

$$c_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_c}{k} |\sin(kR)| \quad (1.14)$$

A la fréquence nulle, cette vitesse vaut bien :

$$c_\phi(0) = R\omega_c \quad (1.15)$$

d'où une autre expression utile pour la vitesse de phase en fonction de la fréquence :

$$c_\phi(\omega) = c_\phi(0) \frac{\omega/\omega_c}{\arcsin(\omega/\omega_c)} \quad (1.16)$$

Pour estimation, la vitesse $c_\phi(0)$ vaut environ 500 m/s ($R = 0.5$ cm, $F_0 = 10$ N, $\rho = 4000$ kg/m³, $E = 6 \cdot 10^{10}$ Pa et $\nu = 0.21$)

La vitesse de groupe, quant à elle, a la forme suivante :

$$c_g(\omega) = c_\phi(0) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \quad (1.17)$$

Lorsque ω tend vers 0, les vitesses de groupe et de phase sont égales. Lorsque ω tend vers ω_c la vitesse de groupe tend vers 0, l'énergie ne se propage plus dans la chaîne.

Ces relations bien connues en physique du solide seront utilisées dans la suite du document. En effet, la connaissance de ces résultats dans le cas d'un réseau unidimensionnel est importante pour une application éventuelle aux milieux tridimensionnels. Peu de modèles ou d'expériences de dispersion de vitesse existent dans ce type de milieux, ainsi, la dispersion de vitesse modélisée en une dimension nous donne un point de départ à l'étude de l'antenne paramétrique effectuée dans les chapitres suivants.

Une relation de dispersion "complète", prenant en compte les modes évanescents qui apparaissent au-delà de la fréquence de coupure, est établie dans le chapitre 3 et est analysée en détail.

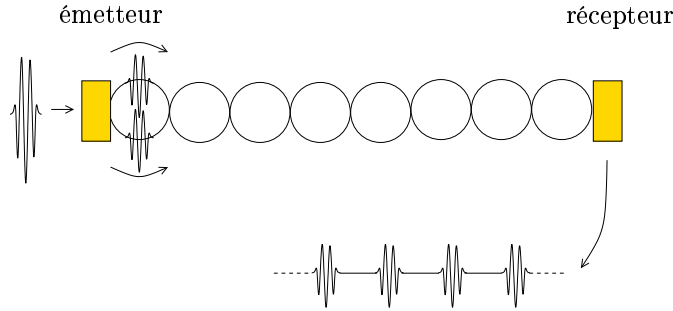


FIG. 1.5: Représentation schématique de la génération et de l'observation d'ondes de surface sphérique de Rayleigh excitées par des ondes longitudinales de hautes fréquences dans une chaîne de billes unidimensionnelle.

1.3.2 Caractéristiques de la propagation acoustique

Ces dernières années ont vu un nombre croissant d'expériences dans le domaine de la propagation acoustique dans les réseaux unidimensionnels de billes [DeB00, Cos97, Cos99]. Elles diffèrent les unes des autres par la nature des signaux étudiés (fréquence, amplitude, forme) et sur les effets de la propagation considérés (non-linéarité, conversions de modes, dispersion de vitesse). Certaines de ces expériences, qui peuvent fournir des éléments de réflexion et de compréhension sur les caractéristiques de la propagation tridimensionnelle, vont être abordées dans la suite.

L'idée première de ce types d'expériences est d'idéaliser le problème de la propagation acoustique dans les milieux granulaires en éliminant un certain nombre de comportements particuliers liés au caractère tri-dimensionnel des milieux granulaires : arrangement aléatoire des grains, chargements différents des contacts, etc...

1.3.2.1 Ondes de surface

M. De Billy [DeB00] a mené des expériences dans des chaînes comportant typiquement de une à une dizaine de billes, pour des fréquences d'excitation bien supérieures à la fréquence de coupure f_c des modes acoustiques longitudinaux (billes métalliques de diamètre 8 mm, force statique de 30 N, fréquence d'excitation 2.2 MHz). Dans cette configuration où plusieurs longueurs d'ondes acoustiques sont contenues dans un diamètre de bille, des ondes de surface de Rayleigh sont générées par conversion de mode à chaque contact entre billes. Plusieurs moyens permettent de s'assurer de la nature de ces ondes, comme la sensibilité du signal à l'état de surface des billes ou le déphasage de $\pi/2$ des ondes à chaque contact. Notons que ce type d'ondes de surface sphérique a déjà été observé à l'échelle d'une seule bille par excitation opto-acoustique et détection optique [Roy87].

A hautes fréquences d'excitation ($f \gg f_c$), plusieurs types de modes de vibration des billes peuvent apparaître [Hla02] :

- les modes de Rayleigh pour lesquels une onde de surface se propage autour de la bille alors que le centre reste immobile.
- Les modes de "whispering gallery".
- Les modes de respiration, qui correspondent à une vibration radiale de la bille.

Les fréquences de résonance de chaque mode ainsi que les nombres d'onde associés peuvent être calculés numériquement par la méthode des éléments finis [Hla02]. Par conséquent, dans une chaîne de billes comme celle de la figure 1.2, ayant une périodicité de $2R$, il est possible d'obtenir les relations de

dispersion de chaque mode de propagation. Ces modes de vibration ont des fréquences de résonance bien supérieures à la fréquence de coupure f_c des modes longitudinaux.

1.3.2.2 Relation vitesse de propagation - force statique

D'autres expériences tentent de vérifier la pertinence du modèle du contact de Hertz pour décrire le comportement élastique de la chaîne de billes. Parmi elles, l'influence de la force statique appliquée à la chaîne de billes sur la vitesse de propagation acoustique a été publiée par C. Coste *et al.* [Cos99]. Une dépendance de la vitesse en $F_0^{1/6}$ est bien observée, comme prédit par l'équation (1.13). Cependant, lorsque des matériaux avec des états de surface altérés (par exemple par oxydation) sont utilisés, cette dépendance s'écarte de $F_0^{1/6}$. Il en est de même dans la zone de plasticité des contacts. Pour les billes de verre, dans une gamme de force statique allant de $F_0 = 44 \text{ N}$ à $F_0 = 578 \text{ N}$, une dépendance de la vitesse de propagation en $F_0^{1/6}$ est bien observée [Cos99]. La théorie de Hertz est donc bien adaptée dans ce cas.

De façon équivalente, une dépendance de la fréquence de coupure des modes longitudinaux de la chaîne sur la force statique F_0 est observée en $F_0^{1/6}$, comme prédit par la théorie de Hertz [Cos95].

1.3.2.3 Propagation de solitons

Dans les chaînes de billes élastiques, l'existence de solitons (type d'onde dont le profil reste identique lors de sa propagation dans un milieu nécessairement non linéaire et dispersif) a été prédite par V. F. Nesterenko [Nes83]. Leur observation expérimentale a été faite par C. Coste *et al.* [Cos97]. Ces ondes non linéaires sont générées par un impact mécanique sur la première bille de la chaîne et grâce aux contacts non linéaires. Une des particularités des solitons est qu'ils peuvent se propager lorsque la force statique appliquée sur la chaîne est nulle ($F_0 = 0$), ce qui est impossible pour les modes longitudinaux linéaires (selon l'équation (1.13) si $F_0 \rightarrow 0$ alors $c_\phi \rightarrow 0$) [Has99].

Des études numériques sur ce même type de configuration mettent en avant l'utilisation possible de solitons pour détecter des impuretés dans la chaîne de type défaut de masse [Sen98, Has00]. L'effet du croisement de solitons a été étudié numériquement [Man00]. Dans une configuration de chaîne verticale, l'effet de la gravité sur la propagation des solitons a aussi fait l'objet d'une étude numérique [Hon00].

En conclusion, un certain nombre de modèles, expériences ou travaux numériques existent sur la propagation d'ondes élastiques dans les chaînes de billes. L'ensemble de ces résultats fournit des éléments de réflexion et de compréhension sur les phénomènes plus complexes et moins maîtrisés qui apparaissent dans les milieux tri-dimensionnels. De plus, ils offrent la possibilité plus générale de l'étude d'un réseau non linéaire, comportant des spécificités comme l'existence d'un grand nombre de modes de propagation (ondes de Rayleigh, modes de respiration, ...) ou encore une non-linéarité de Hertz (avec la possibilité de perte de contact entre les billes à cause de l'onde élastique). Certains problèmes d'acoustique concernant les effets non linéaires "classiques" (génération d'harmoniques supérieurs ou de sous-harmoniques, interactions paramétriques) ou moins classiques (transfert de modulation par exemple) restent ouverts.

1.4 Acoustique des milieux granulaires non consolidés tridimensionnels

Un milieu granulaire désordonné, tridimensionnel et non consolidé présente un grand nombre de comportements particuliers. Il peut-être facilement obtenu en entassant des billes dans un récipient de façon aléatoire. Le fluide saturant les billes supposées rigides peut être de l'air ou de l'eau par exemple. L'influence de ce fluide saturant est déterminante sur la nature physique de la propagation acoustique (diffusion, absorption, vitesse de propagation) en jouant en particulier sur les couplages acoustiques qui existent entre ce fluide et les billes. Il est donc nécessaire de distinguer les cas où le couplage est négligeable des cas où ce couplage n'est pas négligeable.

Dans un premier temps sont présentés quelques comportements élastiques caractéristiques des milieux mésoscopiques mis en évidence ces dernières années. Ensuite, le phénomène particulier de la diffusion acoustique dans les milieux granulaires est discuté. Enfin, dans une dernière section, les non-linéarités acoustiques qui sont susceptibles d'apparaître dans les milieux granulaires sont décrites.

1.4.1 Structures des assemblages granulaires

1.4.1.1 Milieux réguliers / milieux aléatoires

Plusieurs types de milieux réguliers peuvent être réalisés avec des billes identiques. Les structures régulières possibles sont au nombre de quatre, l'arrangement cubique simple, cubique centré, cubique faces centrées, et hexagonal compact [Ash02, Ric00]. Une illustration de ces arrangements réguliers de base est réalisée sur la figure 1.6.

Dans un milieu granulaire régulier soumis par exemple à une contrainte isotrope, les contraintes sont égales pour chaque contact du milieu. Dans le tableau 1.4.1.1, sont regroupés les nombres de coordination (nombre de contact par bille) et les compacités (rapport du volume occupé par les billes au volume total) de chaque structure.

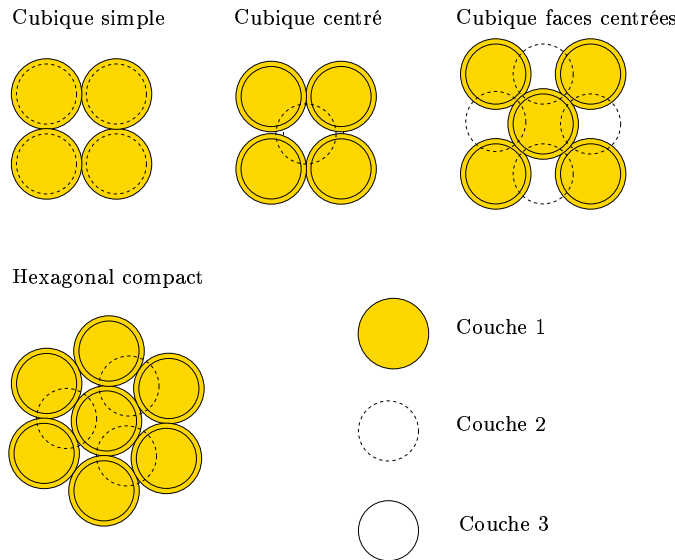


FIG. 1.6: Représentation des différents arrangements réguliers possibles.

Cependant, en raison des imperfections des billes, du mode de conception ou de la stabilité du milieu,

les arrangements de sphères sont très souvent désordonnés. Dans ce cas, les propriétés des arrangements sont différentes de celles d'arrangements réguliers. Le nombre de coordination et la compacité dépendent de la configuration du milieu et sont compris entre des valeurs limites empiriques, présentées dans le tableau 1.4.1.1.

Type d'arrangement	Nombre de coordination	Compacité
Cubique simple	6	$\pi/6 \simeq 0.52$
Cubique centré	8	$\pi\sqrt{3}/8 \simeq 0.68$
Cubique faces centrées	12	$\pi\sqrt{2}/6 \simeq 0.74$
Hexagonal compact	12	$\pi\sqrt{2}/6 \simeq 0.74$
Désordonné	4 - 8	$0.56 \rightarrow 0.64$

TAB. 1.1: *Propriétés des différents types d'arrangements de billes identiques.*

1.4.1.2 Chaînes de force

Dans un milieu granulaire désordonné, les contraintes ne sont pas distribuées uniformément. En effet, le milieu s'écarte du réseau régulier de billes où les contraintes sont les mêmes pour chaque bille, pour des raisons géométriques de localisation des billes. Par des expériences numériques ou des expériences de mécanique statique, des réseaux de contraintes ou chaînes de contraintes ont été mis en évidence. Il apparaît que ces réseaux sont très sensibles aux paramètres du système et sont de plus susceptibles d'influencer de façon importante la propagation acoustique [Her98].

Par exemple, sous l'effet de la force de gravitation, le réseau de contraintes internes peut être calculé numériquement pour un matériau granulaire dans différentes configurations : nombre de couches de billes variable, arrangements réguliers, arrangements aléatoires, formes macroscopiques différentes [Bar00, Cat98, Edw99, Lud97, Mak00, Sil02]. Pour les arrangements réguliers de disques en deux dimensions ou de sphères en trois dimensions, les contraintes observées sont bien supportées de la même façon par toutes les billes. En revanche, lorsque les arrangements s'éloignent du réseau régulier par la présence de "défauts" de localisation de billes, les contraintes ne sont plus supportées uniformément [Rad96]. Il apparaît dans le milieu granulaire, des lignes privilégiées de fortes contraintes. Ce champ de contraintes a une structure très complexe [Bla01, Mue98], difficile à caractériser statistiquement [Cop96, Edw99], et comporte des corrélations spatiales importantes [Soc98, Cla97]. La figure 1.7 illustre ce caractère des milieux granulaires.

Un aspect qui pose un problème fondamental pour la modélisation du réseau de contraintes macroscopique est que l'effet de petites fluctuations à un endroit du milieu granulaire peut avoir des conséquences importantes sur le réseau de force même éloigné de ce lieu de fluctuations [Soc98, Cla97, Cla98]. Ce comportement chaotique implique un certain nombre de comportements spécifiques [Beh99] : prédictabilité limitée, grande sensibilité aux paramètres expérimentaux (pression, température, humidité ...) [Liu92].

Dans certaines expériences où une image directe du champ de contraintes est disponible (par élastographie d'un milieu 2-D par exemple [Jae96a]), il a été montré que les chaînes de contraintes ont une longueur de corrélation qui est uniquement limitée par la taille du système, donc très grande devant la taille des billes. Dans une configuration verticale de milieu granulaire, où la gravitation est la seule cause importante de contrainte statique, le réseau de contraintes est orienté principalement verticalement [Eri02]. Le champ de contraintes moyen (sur une région grande devant la taille des billes mais petite par rapport à l'ensemble du milieu) n'est pas le même dans tout le matériau. Il existe

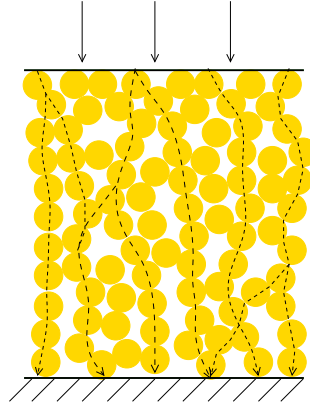


FIG. 1.7: Réseau de chaînes de force créé par l'application d'une contrainte statique uniaxiale.

une dépendance de la contrainte statique en fonction de la profondeur z . C'est le problème non trivial des contraintes supportées par un matériau granulaire dans un silo [Cla99, Ova02, Van00]. De façon générale, la contrainte moyenne augmente en fonction de la profondeur jusqu'à un maximum à la profondeur z_m , puis reste quasi-constante au delà de la profondeur z_m . La masse apparente du milieu granulaire mesurée au fond du récipient est inférieure à sa masse réelle totale. Ce seuil est attribué au fait que les contraintes verticales sont entièrement supportées à partir de z_m par les parois du récipient contenant le milieu granulaire non consolidé. Les grains, dans ce cas, s'organisent de façon à former des "voutes", c'est à dire des chemins de contraintes orientés vers les bords du récipient. Les contraintes verticales sont alors supportées par friction sur les bords du récipient [Cla99, Van00, Bid93].

Le milieu granulaire est composé de grains et, dans notre cas, d'un fluide saturant ces grains. Si un matériau granulaire de ce type est excité par un transducteur au contact des grains, de l'énergie acoustique est transmise dans les grains et dans le fluide qui les saturent. Il apparait alors, comme dans tout milieu poreux lorsque sa structure est excitée, un couplage de modes entre le mode dit "solidien" (l'énergie acoustique transite principalement à travers les billes) et le mode dit "aérien" ou fluide (l'énergie transite principalement dans l'air ou autre fluide saturant les billes). Ce couplage est d'autant plus efficace que les impédances acoustiques de chaque constituant sont proches. Pourtant, ce phénomène de couplage a été observé entre de l'air et des billes de verre avec une configuration de type antenne paramétrique [Mou01]. Le signal basse fréquence émis comportait deux parties distinctes correspondant aux deux modes acoustiques cités : le mode solidien et le mode aérien. Il faut néanmoins considérer que ce couplage est très peu efficace, et affecte peu la propagation de chaque mode.

1.4.1.3 Dynamique lente, effets de mémoire et hystérésis

Ces effets ont été observés dans les milieux géologiques pour les ondes sismiques à partir du milieu des années 70 [McK74, Sha94]. Depuis une dizaine d'années, de nombreuses expériences sont menées dans les milieux mésoscopiques en général. Elles mettent en évidence un comportement élastique de dynamique logarithmique avec des temps de relaxation très longs devant les temps caractéristiques des excitations (période de l'onde acoustique), ce qui amène à qualifier ces phénomènes de dynamique lente.

Les expériences de compaction de milieux granulaires non-consolidés par vibration ou excitation à l'aide d'une onde acoustique en sont un exemple [Kni95, Now98] : une expérience de vibration du milieu granulaire par impulsions mécaniques orientées verticalement montre une dépendance logarithmique de

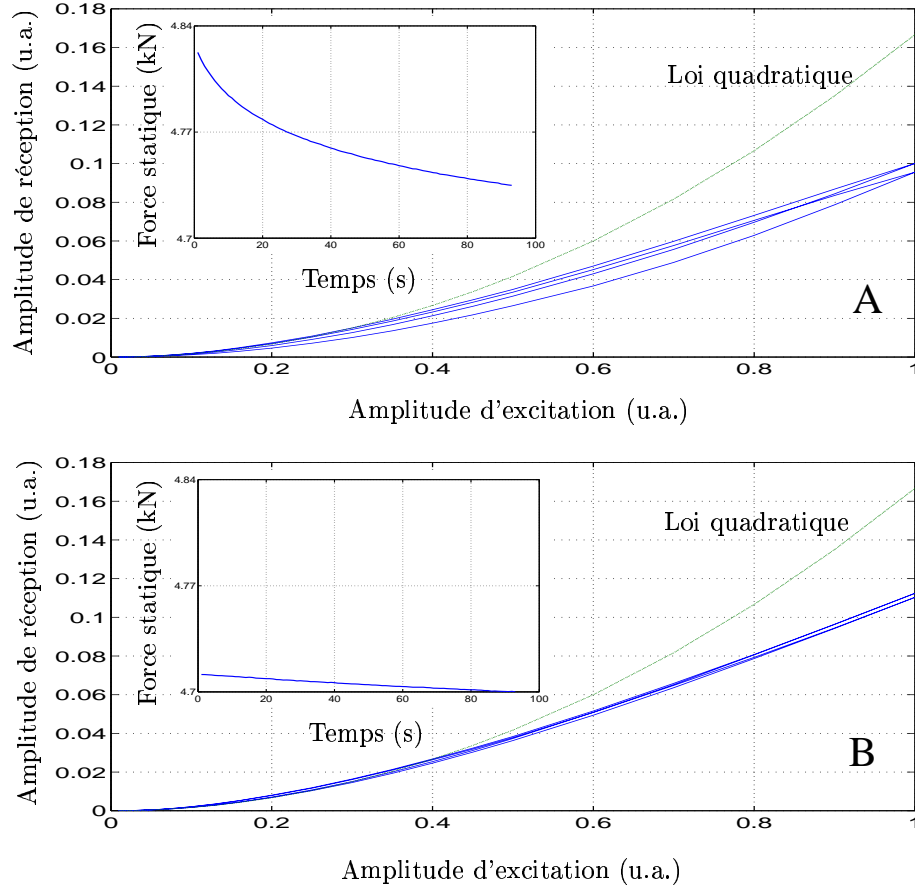


FIG. 1.8: Amplitude de réception (à 10 kHz) en fonction de l'amplitude d'excitation (à 45 kHz et 55kHz) pour plusieurs cycles d'augmentation et de diminution de l'amplitude d'excitation. La loi quadratique est donnée pour comparaison. Dans l'insert A, la force statique évolue en fonction du temps, le milieu vient d'être préparé, et un hystérésis est observé sur l'amplitude du signal reçu. Dans l'insert B, la même expérience réalisée ~ 1 h plus tard est présentée. La force statique se stabilise et l'hystérésis disparaît.

la compacité du milieu en fonction du nombre d'impulsions données [Pra00, Jos00]. Il y a compaction du milieu granulaire avec les vibrations jusqu'à une valeur asymptotique de la compacité, proche du maximum pour un milieu désordonné qui est de 0.64. La dynamique de relaxation est extrêmement lente en fonction du nombre d'impulsions données. Ce nombre doit atteindre plusieurs milliers pour que le milieu s'approche de sa densité finale. L'intensité des impulsions influe directement sur le temps de relaxation de ce phénomène [Now98].

Une mise en évidence équivalente de ce phénomène de dynamique lente est la mesure de la vitesse de propagation d'une perturbation acoustique en fonction de la contrainte statique appliquée sur le milieu granulaire [Hol81, Mou01]. Les vitesses mesurées ne sont pas égales pour une même contrainte statique selon que l'on se trouve dans une phase de chargement ou de déchargement du milieu. La vitesse de propagation n'est pas seulement reliée à la contrainte statique appliquée sur le milieu, mais aussi au nombre moyen de contacts par bille, et donc à la densité [God90]. Ce cycle d'hystérésis de la vitesse de propagation acoustique en fonction de la charge statique montre que l'histoire du chargement

est conservée dans le milieu.

Pour les matériaux consolidés, d'autres expériences sont possibles. La mesure de la fréquence de résonance du matériau donne une indication sur l'évolution temporelle de son module d'élasticité. Par exemple R. Guyer *et al.* [Guy95], ont présenté des résultats sur le décalage de la fréquence de résonance en fonction du temps, observé après l'arrêt d'une excitation acoustique sinusoïdale forte. La variation de la fréquence de résonance est logarithmique en fonction du temps, avec un temps de relaxation de l'ordre de plusieurs minutes.

Un exemple de dynamique lente associée à une variation lente de la densité du milieu, induite en partie par une onde acoustique intense, est présenté sur la figure 1.8. Le milieu granulaire non-consolidé, composé de billes de verre (diamètre ~ 0.15 mm) dans l'air, est soumis à une force statique d'environ 5 kN. Une onde acoustique longitudinale (composée des fréquences 45 et 55 kHz) est générée à l'aide d'un transducteur ultrasonore piezo-électrique. L'amplitude de cette onde est augmentée puis diminuée par cycles successifs. La fréquence différence 10 kHz, créée par effets non linéaires est captée au bout d'une propagation de ~ 20 cm (une description plus précise du protocole expérimental est effectuée dans les chapitres 2 et 4). Juste après la confection du milieu granulaire (figure 1.8 insert A), la force statique varie en fonction du temps, et les cycles d'augmentation et de diminution de l'amplitude d'excitation exhibent un comportement hystérétique ainsi qu'une dérive. L'épaisseur du milieu étant fixée, la force statique captée est liée à la compacité du milieu. Au bout d'environ 1 h, la force statique est presque stabilisée et la dynamique en amplitude du signal reçu n'a pratiquement plus de comportement hystérétique (figure 1.8 insert B). Le milieu a atteint un état d'équilibre, la force extérieure ne diminue plus, la densité du milieu se stabilise.

Ces diverses expériences, aux résultats étonnamment similaires, n'ont pas de justification théorique claire à l'heure actuelle. Le ou les phénomènes physiques mis en jeu ne sont pas identifiés précisément, et sont peut-être de nature variable selon le matériau considéré. Des approches phénoménologiques, permettent tout de même de rendre compte qualitativement de ces résultats expérimentaux [Guy95].

1.4.2 Processus de diffusion acoustique

La diffusion acoustique est un phénomène qui apparait dans les milieux inhomogènes lorsque la longueur d'onde λ de l'onde acoustique devient comparable à la taille des inhomogénéités ou diffuseurs. La diffusion est dite faible lorsque l'effet de la diffusion est faible sur la propagation acoustique. C'est souvent le cas lorsque la longueur d'onde λ de l'onde acoustique reste très supérieure à la taille des inhomogénéités. La diffusion est dite simple lorsqu'il n'est survenu qu'un seul événement de diffusion sur le trajet de l'onde considéré, et elle est appelée multiple lorsque plusieurs événements de diffusion ont eu lieu. Le phénomène de diffusion acoustique qualifie l'étalement spatial de l'énergie acoustique de l'onde incidente par le diffuseur. Il en découle une perte d'énergie de l'onde incidente dans la direction initiale de sa propagation et une perte de cohérence dans les autres directions.

La diffusion par un obstacle cylindrique ou sphérique plongé dans un milieu homogène de propagation est un problème connu. L'expression de la pression acoustique diffusée, pour une onde incidente initialement plane et d'amplitude unitaire, s'écrit :

$$p(\omega, \vec{r}) = e^{i\vec{k}_0 \vec{r}} + f(\theta) \frac{e^{i\vec{k}_0 \vec{r}}}{r^{(d-1)/2}} \quad (1.18)$$

où \vec{r} est le vecteur position, ω la pulsation de l'onde acoustique, \vec{k}_0 le vecteur d'onde, d la dimension du milieu considéré (bidimensionnel $d = 2$, tridimensionnel $d = 3$), et $f(\theta)$ l'amplitude de diffusion, fonction de l'angle d'émergence de l'onde diffusée (voir la figure (1.9)).

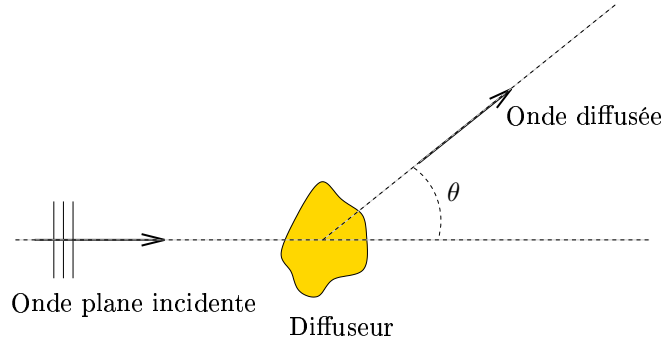


FIG. 1.9: Diffusion d'une onde plane par un obstacle.

La quantité dépendante de la fréquence, qui rend compte de la capacité de diffusion d'un obstacle est la section efficace totale de diffusion σ_T qui s'écrit :

$$\sigma_T = \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \quad (1.19)$$

Des formules analytiques existent pour accéder à l'amplitude de diffusion et donc à la section efficace de diffusion dans le cas de diffuseurs de formes simples : cylindres, sphères. Des modèles de diffusion multiple [She95, Lag96] permettent de prendre en compte l'interaction successive de l'onde acoustique avec différents diffuseurs et ainsi de décrire les régimes de diffusion forte ($\lambda \approx R$). Parmi ces modèles, l'approximation de diffusion indépendante (independent scattering approximation) est couramment utilisée pour les milieux ayant des faibles densités de diffuseurs [Lag96]. Les corrélations spatiales ou diffusions récurrentes entre les diffuseurs y sont négligées.

La diffusion de Rayleigh, qui fournit des formules analytiques simples pour l'atténuation par diffusion dans les milieux contenant un grand nombre de diffuseurs, apparaît lorsque la longueur d'onde λ est très supérieure au rayon R des diffuseurs. La diffusion se comporte alors de façon dipolaire. Il est possible dans certains cas, de définir un milieu effectif dans lequel une onde cohérente se propage comme dans un milieu homogène, mais où les constantes de propagation ont été renormalisées à cause de l'effet de la diffusion [Der01a]. La partie imaginaire du nombre d'onde effectif associé, qui correspond à l'atténuation par diffusion de Rayleigh, varie en ω^4 dans un milieu tridimensionnel et pour des diffuseurs sphériques. Ce résultat bien connu va nous servir de point de départ pour l'estimation des différents régimes de propagation acoustique dans les matériaux granulaires.

Supposons que le milieu granulaire est excité avec un transducteur qui est au contact des billes et du fluide saturant. Avant de commencer à décrire le phénomène de diffusion dans les milieux granulaires, il est nécessaire de distinguer deux cas bien distincts dans la physique de la diffusion : le cas du milieu granulaire saturé par un fluide d'impédance acoustique proche de celle des billes, et le cas du milieu granulaire saturé par un fluide d'impédance acoustique négligeable devant celle des billes. Dans le premier cas, il y a couplage acoustique important entre les deux constituants du matériau granulaire. Il a été montré [Pag95, Pag97, Wea95] que l'énergie acoustique se propage principalement dans le fluide (eau par exemple). Le phénomène de diffusion peut s'interpréter relativement simplement : l'onde acoustique qui se propage dans le fluide est diffusée par les billes sphériques selon le schéma de la figure 1.9. Cependant, il n'existe pas de modèle analytique permettant de décrire l'effet de cet ensemble dense de billes sur la propagation acoustique. En effet, il est très difficile de prendre en compte les corrélations spatiales entre diffuseurs (diffusions récurrentes), la diffusion d'une onde non plane par

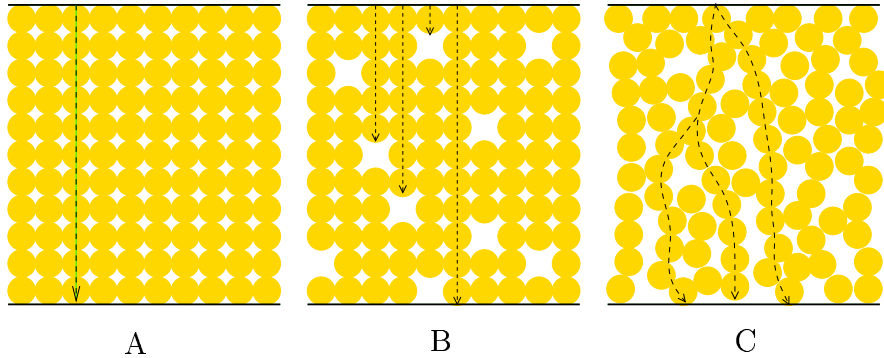


FIG. 1.10: Illustration de différents niveaux de désordres dans les milieux granulaires. *A* est un milieu régulier dans lequel une perturbation acoustique se propage balistiquement. *B* est initialement un milieu régulier auquel des billes ont été enlevées. Dans ce cas, des événements de diffusion peuvent avoir lieu à l'échelle d'une bille. *C* est un milieu désordonné. Un réseau de chaînes de force apparaît. L'énergie de la perturbation acoustique est principalement transmise le long de ces chaînes de force. Une autre échelle caractéristique est donc susceptible d'apparaître pour la diffusion acoustique.

un obstacle . . . , phénomènes qui apparaissent dans les milieux denses.

Lorsque le fluide a une impédance beaucoup plus faible que les billes, le couplage acoustique est faible. La majeure partie de l'énergie de l'onde acoustique transite dans les billes et à travers leurs contacts. Dans ce cas, le phénomène de diffusion est beaucoup plus difficile à interpréter. Le désordre, responsable de la diffusion, peut être défini comme l'écart des caractéristiques du milieu par rapport à un arrangement régulier de billes. Il existe deux types de désordre dans les milieux granulaires [Bid93] : le premier est un désordre géométrique lié à la position des centres des billes. Le second désordre est une conséquence du premier mais est bien spécifique aux milieux granulaires. C'est le désordre des contacts intergrains. Tous les contacts ne sont pas équivalents, certains sont plus contraints que d'autres et ils peuvent avoir des orientations différentes. Précédemment, il a été montré que la microstructure du matériau joue un rôle prépondérant sur son comportement macroscopique. Dans les milieux granulaires, la plupart des processus physiques dépend des contacts entre billes : transport électrique, distribution de contraintes, non-linéarité, . . . Ce désordre de contacts est responsable entre autres de la formation du réseau de contraintes évoqué précédemment. Les mécanismes de la diffusion ne sont, dans ce cas, plus clairement identifiés. Le milieu peut être vu comme une percolation où les chemins privilégiés de propagation sont les chemins de contraintes [Hid02]. La description topologique de ces chemins en fonction des paramètres du milieu est très difficile à réaliser. Un effet remarquable de cette diffusion particulière est qu'elle est susceptible d'apparaître dans les matériaux granulaires dès les longueurs d'ondes λ très supérieures aux rayons R des billes. La dimension pertinente pour la diffusion n'est plus le rayon R des billes mais une dimension plus grande, caractéristique du réseau de chaînes de contraintes, et comparable à λ lors de l'apparition des premiers effets de diffusion. Il ne faut pas oublier les effets de conversions de modes (onde longitudinale-onde de cisaillement) aux contacts de billes, qui peuvent être vus comme des événements de diffusion puisque conséquents à un contact oblique et donc à un désordre de contact.

Des expériences de diffusion d'ondes acoustiques existent dans les matériaux granulaires dans les deux configurations évoquées : propagation dans le fluide saturant [Sch84, Pag95, Wea95, Win84], et propagation dans les billes [Jia99]. Ces deux types d'expériences font apparaître un caractère diffusif des ondes acoustiques, bien décrit par l'approximation de diffusion. L'approximation de diffusion dans

un milieu granulaire saturé d'eau a été testée [Pag95, Pag97]. X. Jia *et al.* ont observé une partie cohérente et une partie incohérente sur un signal acoustique dans un matériau granulaire contraint et saturé d'air [Jia99]. Cela confirme entre autre, que les effets de diffusion sont similaires dans ce type de milieux et dans les milieux multi-diffusants plus simples à décrire analytiquement comme les émulsions diluées ou encore des forêts de cylindres [Der01a, Der01b]. Ces observations laissent penser que la diffusion associée à l'onde acoustique qui se propage à travers les billes peut être décrite avec les mêmes outils mathématiques que la diffusion acoustique "classique".

Afin de caractériser la diffusion et de modéliser son effet sur les interactions paramétriques dans les milieux granulaires, un paramètre est utilisé dans la suite : le temps caractéristique de diffusion τ_s . Bien sûr, sa relation aux paramètres physiques du milieu et de l'onde acoustique est difficile à obtenir. Pour commencer, la loi de variation issue de la diffusion Rayleigh, i.e. $\tau_s \sim 1/\omega^4$ est utilisée. Il faut cependant se souvenir que ce paramètre τ_s dépend potentiellement du rayon des billes R , de l'arrangement du milieu (lignes de contraintes), de la contrainte statique appliquée sur le milieu P_0 , de l'amplitude de l'onde acoustique. Cette dernière dépendance engendrerait un phénomène de diffusion acoustique non linéaire.

1.4.3 Description de la non-linéarité

Les matériaux mésoscopiques présentent des caractéristiques non linéaires particulières : dynamique lente, hystérésis, très haute non-linéarité. Cette non-linéarité ne peut pas être expliquée avec la théorie classique de non-linéarité atomique. En effet la non-linéarité classique observée dans les cristaux ou les milieux homogènes est associée à l'anharmonicité du potentiel inter-atomique, et ne peut pas donner lieu à une non-linéarité d'ensemble aussi haute que celle observée dans les matériaux mésoscopiques (paramètre de non-linéarité quadratique $\Gamma_2 \sim 10^3 - 10^4$). Ces matériaux mésoscopiques doivent leur comportement élastique à des éléments de taille moyenne (méso) comprise entre l'échelle atomique et l'échelle de la longueur d'onde acoustique considérée. Le comportement très hautement non linéaire de ces matériaux est associé à la présence d'inclusions compliantes ou "molles", plongées dans une matrice "rigide". En effet, l'application d'une contrainte sur le matériau macroscopique entraîne des déformations très importantes au niveau de ces inclusions compliantes, et très faibles dans la matrice rigide. Localement, chacune de ces inclusions compliantes, à cause de la forte contrainte, réagit non linéairement et dévie de la loi de Hooke. Ceci implique, comme présenté par la suite dans un exemple phénoménologique simple, une très haute non-linéarité pour le matériau dans son ensemble. Cette non-linéarité, décrite classiquement par le paramètre Γ_2 (paramètre ou coefficient de non-linéarité quadratique), peut être de trois ordres de grandeur supérieure aux non-linéarités quadratiques des milieux homogènes comme l'eau ou l'air. Dans les milieux endommagés, les inclusions compliantes sont typiquement des fissures ou délaminations. Dans les milieux granulaires, ces inclusions compliantes sont les contacts entre les grains et en particulier les contacts faiblement pré-contraints qui sont plus compliantes que les contacts fortement précontraints (voir l'équation (1.9)).

Lorsqu'une telle non-linéarité de l'équation d'état existe, la non-linéarité cinématique du terme convectif (qui apparaît dans les équations de l'acoustique en raison de la description Eulérienne) est négligeable puisque le paramètre effectif de non-linéarité associé vaut 1 [Rud78].

1.4.3.1 Non-linéarité des milieux micro-inhomogènes

Un modèle unidimensionnel simple, proposé par V. Zaitsev [Zai96] et I. Belyaeva [Bel97], permet d'expliquer de manière phénoménologique la très haute non-linéarité observée dans les matériaux mésoscopiques. Le milieu élastique est modélisé par une chaîne linéaire de masses égales reliées entre elles par des ressorts de longueur au repos ℓ . L'idée importante du modèle repose sur la présence d'un

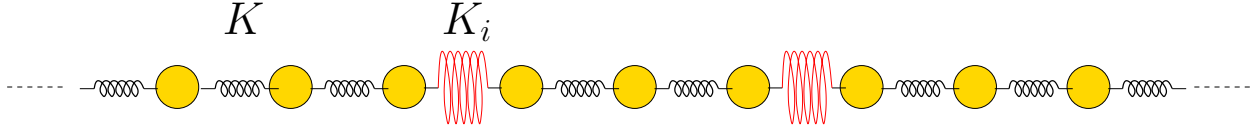


FIG. 1.11: *Modèle unidimensionnel phénoménologique pour modéliser la non-linéarité des milieux mésoscopiques.*

certain nombre de ressorts avec des raideurs très faibles par rapport à d'autres. Ils modélisent les inclusions compliantes des matériaux mésoscopiques. La constante de raideur des inclusions "molles" est K_i et la constante de raideur de la matrice rigide (les autres ressorts) est K (voir la figure 1.11). La relation $K_i = \mu K$ avec μ un petit paramètre est donc vérifiée. La densité linéaire des éléments de la chaîne est N pour les éléments rigides de raideur K et N_i pour les éléments compliantes de raideur K_i . Supposons une perturbation élastique dont la longueur d'onde est très supérieure à la taille ℓ d'un élément. La force élastique quasi-statique F pour chaque élément peut alors s'écrire :

$$F = KX = K_i X_i \quad , \quad (1.20)$$

où X est l'élongation d'un ressort rigide et X_i est l'élongation d'un ressort compliant. Cette égalité implique des élongations différentes pour les éléments rigides et pour les éléments compliantes :

$$X_i = \frac{K}{K_i} X = \frac{X}{\mu} \gg X \quad . \quad (1.21)$$

L'élongation totale X_T de la chaîne comportant N_T éléments est alors égale à :

$$X_T = \sum_{i=1}^{N=N_T-N_i} X + \sum_{i=1}^{N_i} X_i = XN \left[1 + \frac{N_i}{N} \frac{1}{\mu} \right] \quad . \quad (1.22)$$

La déformation de la chaîne se déduit facilement :

$$\varepsilon = \frac{X}{\ell} \left[1 + \frac{\nu_r}{\mu} \right] \quad , \quad (1.23)$$

où $\nu_r = N_i/N$ est la densité relative d'inclusions compliantes. Le petit paramètre μ est fixé. Une des conséquences de ce résultat 1.23 est que dans le cas d'une faible densité d'inclusions compliantes, $\nu_r \ll 1$, leur présence n'affecte pas la déformation moyenne.

Maintenant, chaque ressort est caractérisé par une légère déviation par rapport à la loi de Hooke linéaire. Une relation contrainte - déformation non linéaire est alors écrite, comportant des non-linéarités classiques, quadratiques, cubiques, etc ... :

$$\sigma = E_i \varepsilon \left(1 + \sum_n \Gamma_n \varepsilon^{n-1} \right) \quad , \quad (1.24)$$

où E_i est le module d'élasticité de l'inclusion et Γ_n est le coefficient sans dimension de non-linéarité d'ordre n , $n > 1$. Il est supposé de plus que ces coefficients Γ_n prennent des valeurs "classiques", i.e. $\Gamma_n \sim 10^0$, comme pour les milieux homogènes.

Il est possible de montrer que Γ_n^{moyen} , qui représente le coefficient de non-linéarité effective d'ordre n du matériau est égal à $\alpha \Gamma_n$, avec,

$$\alpha = \frac{1 + \nu_r/\mu^n}{[1 + \nu_r/\mu]^n} \quad , \quad (1.25)$$

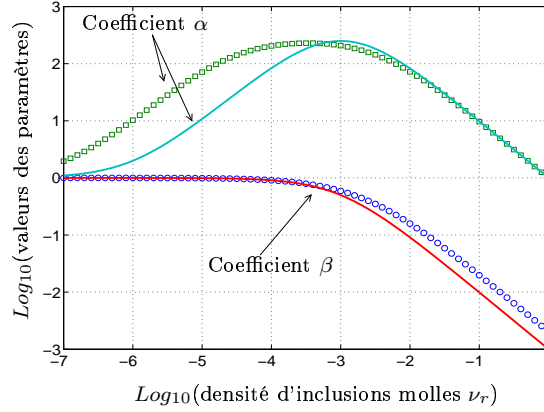


FIG. 1.12: Comportement des coefficients α et β en fonction de la densité relative ν_r d'inclusions compliantes pour $n = 2$ (coefficient de non-linéarité quadratique). Les lignes continues correspondent à $\mu = 10^{-3}$ et les cercles et carrés correspondent à la distribution statistique de raideurs relatives d'inclusions molles tracée sur la figure 1.13.

et que le module d'élasticité moyen E^{moyen} est égal à βE avec,

$$\beta = [1 + \nu_r/\mu]^{-1} . \quad (1.26)$$

Le coefficient α représente l'écart de la non-linéarité du matériau en fonction de la concentration d'inclusions compliantes par rapport à la non-linéarité "classique". Le coefficient β représente l'écart du module d'élasticité linéaire en fonction de la concentration d'inclusions compliantes par rapport au module d'élasticité d'un milieu homogène. Sur la figure (1.12), la non-linéarité du milieu peut être deux à trois ordres de grandeur plus importante que dans un milieu classique. Le coefficient α du matériau augmente rapidement, dès les très faibles concentrations d'inclusions compliantes ($\nu_r = 10^{-6}$), contrairement au module d'élasticité linéaire M_{moyen} qui reste constant jusqu'à des densités ν_r de $10^{-4} - 10^{-3}$. Ce modèle phénoménologique explique la grande sensibilité des méthodes non linéaires dans les milieux mésoscopiques par rapport aux méthodes linéaires dans le cas où la densité de défauts est faible. Une densité optimale d'inclusions existe pour avoir la plus haute non-linéarité effective possible. Elle correspond au maximum de la courbe qui représente le paramètre α . Au delà de cette densité optimale, la non-linéarité effective baisse jusqu'à devenir faible. C'est à ce moment que les méthodes linéaires deviennent sensibles à la présence des inclusions compliantes. Une distribution statistique du paramètre μ peut aussi être introduite dans ce modèle. Un exemple de distribution est tracé sur la figure 1.13, et le résultat correspondant pour les paramètres α et β sur la figure 1.12. L'effet obtenu est encore plus probant.

1.4.3.2 Non-linéarités spécifiques des milieux granulaires

La structure des milieux granulaires désordonnés et non consolidés étant connue en principe sur certains aspects (différents types de contacts par exemple), il est possible d'identifier certaines causes et l'existence de certains types de non-linéarités.

Tout d'abord la non-linéarité de Hertz due au comportement mécanique des contacts, joue un rôle important. Si une contrainte statique suffisante existe sur les contacts, cette non-linéarité de Hertz peut être développée en série pour obtenir une non-linéarité quadratique.

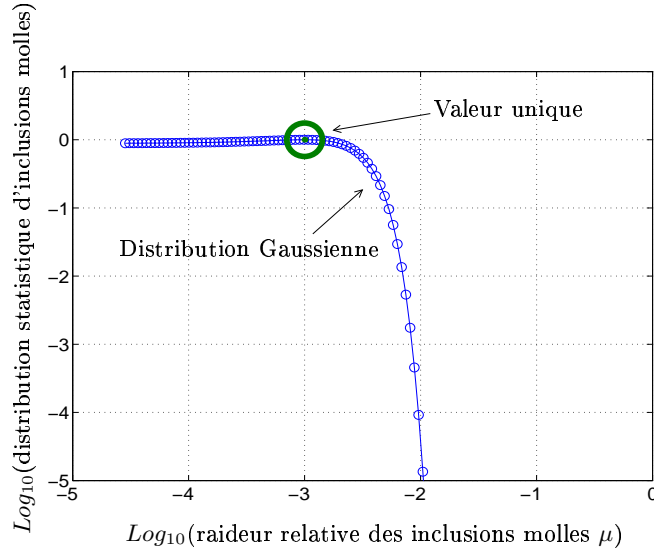


FIG. 1.13: Distributions statistiques des valeurs de raideurs relatives μ d'inclusion compliant. Le gros cercle correspond à une valeur unique $\mu = 10^{-3}$. La courbe est une Gaussienne, nulle en dessous de $\mu \simeq 10^{-4.7}$. Les coefficients α et β correspondants sont tracés sur la figure 1.12 en carrés et cercles, respectivement.

Sous contrainte de cisaillement, les contacts peuvent avoir un comportement hystérétique, à cause du comportement de Hertz-Mindlin ou plus généralement en raison des glissements solides des contacts. Dans ce cas, chaque contact peut être vu comme un élément hystérétique de base et l'état du milieu peut alors être décrit par son espace de Preisach-Mayergoyz [Hol81]. Cette non-linéarité peut alors être prise en compte grâce à un modèle phénoménologique [Hol81, Guy95]. D'autres modèles théoriques ou numériques ont été développés sur la non-linéarité hystérétique quadratique [Gus02].

Certains phénomènes peuvent a priori faire apparaître une non-linéarité cubique, comme dans les milieux homogènes [Nau98].

Enfin, le phénomène de clappement des contacts (ouverture et fermeture du contact au passage d'une onde acoustique) est un autre type de non-linéarité et est décrit dans la dernière section. Sur la figure 1.14 sont représentées ces non-linéarités dans le plan contrainte - déformation, aux signes près.

1.4.3.2.1 Non-linéarité de Hertz / non-linéarité quadratique En raison de la géométrie des contacts entre billes, la relation contrainte - déformation de Hertz (déjà rencontrée indirectement dans l'équation (1.4)), peut décrire le comportement élastique d'un milieu granulaire régulier [Bel94] :

$$\sigma_0 = -C(-\varepsilon_0)^{3/2} \quad , \quad (1.27)$$

où $C = \frac{\tilde{n}cE}{3\pi(1-\nu^2)}$ est une constante positive avec \tilde{n} le nombre de coordination moyen dans le milieu, c la compacité du milieu, E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau constituant les billes. D'autres modèles similaires de milieu effectif pour les propriétés élastiques des assemblages granulaires sont disponibles, prenant en compte en particulier l'anisotropie, ou les forces tangentielles au niveau des contacts [Dig81, Duf57, Joh98, Lei94, Wal87].

Si une perturbation acoustique est introduite, cette relation prend la forme :

$$\sigma = -C(-\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)^{3/2} \quad , \quad (1.28)$$

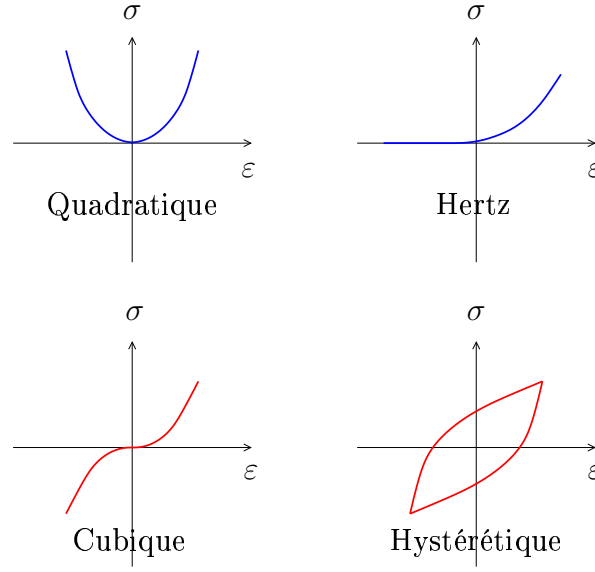


FIG. 1.14: Les non-linéarités susceptibles d'apparaître dans les milieux granulaires.

où $\tilde{\varepsilon}$ désigne la déformation acoustique et σ la contrainte totale (statique + dynamique). Si l'excitation de déformation acoustique est faible devant la déformation statique des contacts $|\tilde{\varepsilon}| \ll |\varepsilon_0|$, un développement de Taylor de cette dernière expression peut être effectué avec le petit paramètre $\tilde{\varepsilon}$:

$$\sigma = -C \left[(-\varepsilon_0)^{3/2} - \frac{3}{2}(-\varepsilon_0)^{1/2}\tilde{\varepsilon} + \frac{3}{8}(-\varepsilon_0)^{-1/2}\tilde{\varepsilon}^2 + \dots \right] \quad , \quad (1.29)$$

ou encore pour la partie dynamique de la contrainte uniquement,

$$\tilde{\sigma} = \frac{3}{2}C(-\varepsilon_0)^{1/2}\tilde{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{4\varepsilon_0}\tilde{\varepsilon} + \dots \right] \quad . \quad (1.30)$$

Par analogie avec un développement classique en non-linéarités de type puissances successives,

$$\tilde{\sigma} = E\tilde{\varepsilon} [1 + \Gamma_2\tilde{\varepsilon} + \Gamma_3\tilde{\varepsilon}^2 + \dots] \quad , \quad (1.31)$$

il est possible d'identifier le paramètre de non-linéarité quadratique des contacts de Hertz pré-contraints $\Gamma_2 = -\frac{1}{4\varepsilon_0}$. Ainsi, la non-linéarité quadratique d'un milieu régulier, d'une chaîne de billes, ou d'un contact seul, varie comme l'inverse de la déformation statique appliquée. Moins le contact est pré-contraint (comprimé), plus il se comporte de façon non linéaire. Par exemple, pour une déformation statique de l'ordre de $\varepsilon_0 \simeq 10^{-4}$ appliquée expérimentalement dans le cadre de ce travail, le paramètre de nonlinéarité quadratique vaut $\Gamma_2 \simeq 2500$.

Cette relation contrainte - déformation (1.31) est le point de départ du modèle théorique d'antenne paramétrique dans les milieux granulaires présenté dans le chapitre 2. Elle correspond à une non-linéarité quadratique classique, observée dans les milieux homogènes. Cependant, il faut garder à l'esprit que le paramètre non linéaire associé à cette nonlinéarité quadratique ($\Gamma_2 \sim 10^3 - 10^4$) est très supérieur aux paramètres classiques ($\Gamma_2 \sim 10^0$).

Comme la non-linéarité du milieu est modélisée par une non-linéarité quadratique (lorsque $|\tilde{\varepsilon}| \ll |\varepsilon_0|$), des phénomènes d'acoustique non linéaire classiques peuvent apparaître. Sur la figure 1.15,

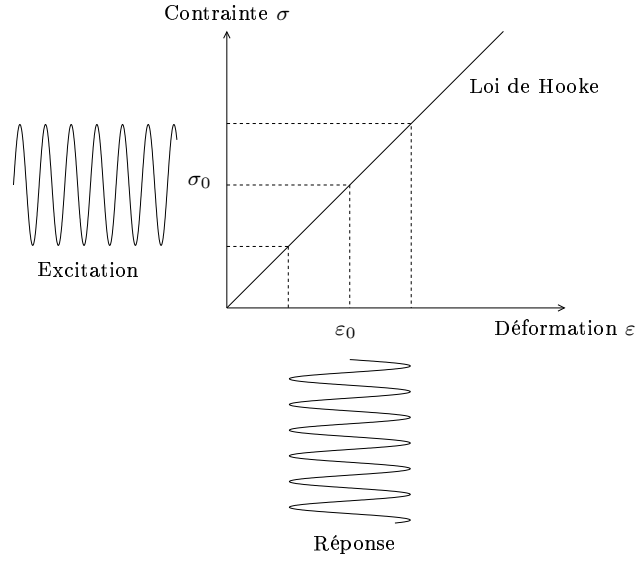


FIG. 1.15: Dans un milieu linéaire, la déformation est proportionnelle à la contrainte (loi de Hooke), il n'y a pas de phénomène de rectification (terme usité en optique).

lorsqu'une contrainte sinusoïdale est appliquée dans un milieu linéaire, caractérisé par la loi de Hooke (contrainte et déformation sont proportionnelles), la réponse du milieu ε est sinusoïdale. En revanche, sur la figure 1.16, lorsqu'une non-linéarité quadratique est superposée à la loi de Hooke, une excitation σ sinusoïdale implique une réponse ε non sinusoïdale. En particulier, le milieu passe en moyenne d'une déformation ε_0 à une déformation ε'_0 . Il y a dilatation du milieu, ou rectification du signal [Rud78].

Le même raisonnement est possible en terme d'énergie potentielle E_p . Comme $\sigma = \frac{\partial E_p}{\partial \varepsilon}$, la non-linéarité quadratique de la relation contrainte - déformation correspond au terme cubique de la relation énergie - déformation. Sur la figure 1.17, l'énergie potentielle est représentée en fonction de la déformation. Pour de petites déformations, l'approximation harmonique ($E_p \propto \varepsilon^2$) du potentiel est suffisante. Pour de fortes déformations, ce potentiel devient anharmonique, le terme ε^3 cubique devient important, le milieu se dilate en moyenne. A une toute autre échelle de fréquence, c'est le phénomène de la dilatation thermique dans les solides, associé à l'anharmonicité du potentiel d'interaction interatomique subis par les phonons thermiques.

1.4.3.2.2 Modélisation du clappement Le phénomène de clappement apparaît lorsque la déformation acoustique est supérieure à la déformation statique du contact considéré. Il correspond à l'ouverture puis à la fermeture du contact sous l'action de l'onde acoustique. A l'échelle d'un contact, ce phénomène est facilement décrit en introduisant la distribution de Heaviside notée H dans la relation de Hertz :

$$\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma} = C(\epsilon_0 + \tilde{\epsilon})^{3/2} H(\epsilon_0 + \tilde{\epsilon}) \quad (1.32)$$

Par convention, dans cette section, une compression correspond à $\sigma_0 > 0$ et $\epsilon_0 > 0$. Si $|\tilde{\epsilon}| \ll |\epsilon_0|$, il n'y a pas de clappement, la relation contrainte - déformation peut se développer en série de Taylor et la non-linéarité peut être ramenée à une non-linéarité quadratique. Si en revanche, la plupart du temps $|\tilde{\epsilon}| \gg |\epsilon_0|$, alors,

$$\sigma \simeq C(\tilde{\epsilon})^{3/2} H(\tilde{\epsilon}) \quad (1.33)$$

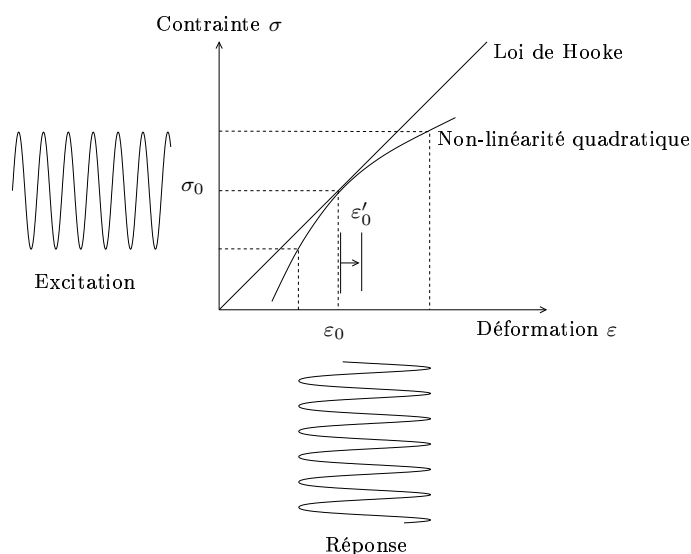


FIG. 1.16: Dans un milieu comportant une non-linéarité quadratique, parmi les phénomènes d'acoustique non linéaire, le phénomène de rectification (dilatation ou encore auto-démodulation d'amplitude) prend place.

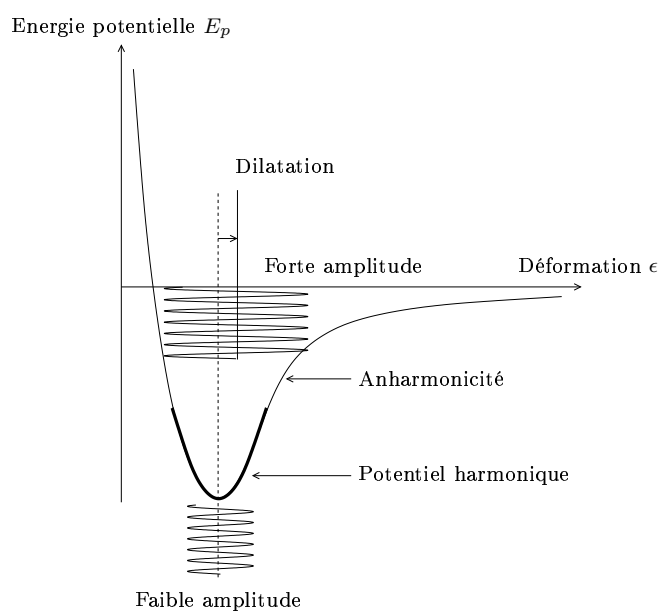


FIG. 1.17: La non-linéarité quadratique dans l'équation d'état contrainte - déformation correspond au terme cubique de la relation énergie - déformation. L'anharmonicité du potentiel d'interaction entraîne le phénomène de dilatation (rectification).

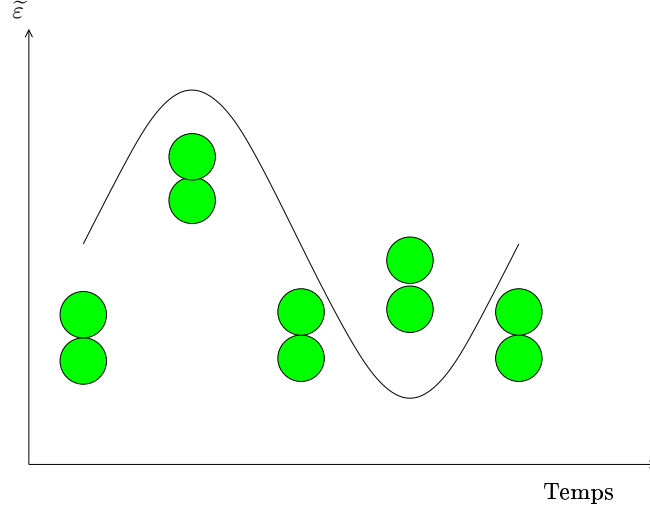


FIG. 1.18: Illustration du phénomène de clappement sur une période de l'onde acoustique.

L'amplitude de l'harmonique 2 générée grâce à cette non-linéarité spécifique (1.33) peut-être obtenue en calculant le coefficient de la série de Fourier de la contrainte (1.33) associé à l'harmonique 2 (2ω) et en considérant une excitation sinusoïdale $\tilde{\varepsilon}_a \sin \theta$, où $\theta = \omega t$:

$$\begin{aligned}\sigma(2\omega) &\simeq \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C(\tilde{\varepsilon}_a \sin \theta)^{3/2} H(\tilde{\varepsilon}_a \sin \theta) \cos(2\theta) d\theta \right] \cos(2\omega t) \quad , \\ \sigma(2\omega) &\simeq \left[\frac{C\tilde{\varepsilon}_a^{3/2}}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^{3/2} \cos(2\theta) d\theta \right] \cos(2\omega t) \quad , \\ \sigma(2\omega) &\propto \tilde{\varepsilon}_a^{3/2} \cos(2\omega t) \quad .\end{aligned}\tag{1.34}$$

L'intégrale restante peut s'exprimer à l'aide d'intégrales elliptiques. Ce résultat (1.34) montre que l'amplitude de l'harmonique 2 dépend de l'amplitude à la puissance 3/2 de l'onde acoustique fondamentale (voir l'annexe A).

De même, il est possible d'appliquer cette opération dans le cas de la génération de la fréquence différence $\omega - \omega \rightarrow 0$ associée au phénomène de rectification. Dans ce cas, c'est la composante constante (indépendante de ω) qu'il faut extraire de la relation (1.33) :

$$\begin{aligned}\sigma(0) &\simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(\tilde{\varepsilon}_a \sin \theta)^{3/2} H(\tilde{\varepsilon}_a \sin \theta) d\theta \quad , \\ \sigma(0) &\simeq \frac{C\tilde{\varepsilon}_a^{3/2}}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^{3/2} d\theta \quad , \\ \sigma(0) &\propto \tilde{\varepsilon}_a^{3/2} \quad .\end{aligned}\tag{1.35}$$

A un facteur numérique près, le comportement en amplitude d'excitation dans le cas du phénomène de rectification est le même que dans le cas de la génération de l'harmonique 2. Sans clappement,

lorsque $|\tilde{\varepsilon}| \ll |\varepsilon_0|$, l'amplitude de l'harmonique 2 (ou de la fréquence différence) est obtenue par la même méthode et est proportionnelle à $\tilde{\varepsilon}_a^2$.

Sur la figure 1.18 est représenté le phénomène de clappement à l'échelle d'une période acoustique. Ce comportement spécifique des matériaux granulaires est approfondi dans le chapitre 4. En particulier, dans un milieu granulaire désordonné, il existe une proportion importante de contacts dits "faibles", qui sont faiblement pré-contraints, et qui clappent pour des amplitudes d'excitation acoustique modérées. Il est alors nécessaire de prendre en compte ces contacts à travers une distribution de pré-déformation des contacts dans le milieu.

1.5 Conclusion

A toutes les échelles, du microscopique au macroscopique, les milieux granulaires présentent des comportements particuliers. La difficulté et l'intérêt pour décrire la propagation acoustique dans de tels milieux proviennent principalement du fait que ces différents comportements ou phénomènes agissent parfois simultanément : non-linéarité, diffusion, dispersion de vitesse, absorption ...

Par conséquent, des phénomènes nouveaux sur la propagation acoustique et notamment sur la propagation non linéaire sont susceptibles d'être mis en évidence. Leur modélisation doit nécessairement tenir compte des différents aspects spécifiques des milieux granulaires (ou plus généralement mésoscopiques) dont quelques-uns ont été présentés dans ce chapitre.

Dans le chapitre 2, l'influence de la diffusion sur le fonctionnement de l'antenne paramétrique est étudié analytiquement et expérimentalement.

Dans le chapitre 3, l'influence de la dispersion de vitesse et du caractère évanescent des modes de propagation longitudinaux sur le fonctionnement de l'antenne paramétrique dans une chaîne 1-D de billes est étudiée analytiquement et numériquement.

Enfin, dans le chapitre 4, le rôle du clappement est étudié, notamment grâce aux ondes de cisaillement, toujours avec le principe de l'antenne paramétrique. La sensibilité de la méthode aux chaînes de force et à l'anisotropie du milieu est démontrée.

Bibliographie

- [Ash02] N. W. Ashcroft et N. D. Mermin, “*Physique des solides*”, (EDP Sciences, France), (2002).
- [Bar00] S. G. Bardenhagen, J. U. Brackbill et D. Sulsky, “*Numerical study of stress distribution in sheared granular materials in two dimensions*”, Phys. Rev. E **62**(3), 3882-3890 (2000).
- [Beh99] R. P. Behringer, D. Howell, L. Kondic, S. Tennakoon et C. Veje, “*Predictability and granular materials*”, Physica D **133**, 1-17 (1999).
- [Bel94] I. Yu. Belyaeva, V. Yu. Zaitsev et E. M. Timanin, “*Experimental study of nonlinear elastic properties of granular media with nonideal packing*”, Acoust. Phys. **40**(6), 789-793 (1994).
- [Bel97] I. Yu. Belyaeva et V. Yu. Zaitsev, “*Nonlinear elastic properties of microinhomogeneous hierarchically structured media*”, Acoust. Phys. **43**(5), 510-515 (1997).
- [Bid93] D. Bideau et A. Hansen (eds.), “*Disorder and granular media*”, Random materials and processes, H. E. Stanley et E. Guyon (Series eds.), Elsevier Science Publishers (Amsterdam, The Netherlands), (1993).
- [Bla01] D. L. Blair, N. W. Mueggenburg, A. H. Marshall, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Force distributions in three-dimensional granular assemblies : effects of packings order and interparticle friction*”, Phys. Rev. E **63**, 041304 (2001).
- [Buc00] M.J. Buckingham, “*Wave propagation, stress relaxation, and grain-to-grain shearing in saturated, unconsolidated marine sediments*”, J. Acous. Soc. Am., 108, 2796-2815 (2000).
- [Cat98] M. E. Cates, J.P. Wittmer, J.-P. Bouchaud et P. Claudin, “*Jamming, force chains, and fragile matter*”, Phys. Rev. Lett. **81**, 1841 (1998).
- [Cla97] P. Claudin et J.-P. Bouchaud, “*Static avalanches and giant stress fluctuation in silos*”, Phys. Rev. Lett. **78**(2), 231-234 (1997).
- [Cla98] P. Claudin, J.-P. Bouchaud, M. E. Cates et J. P. Wittmer, “*Models of stress fluctuations in granular media*”, Phys. Rev. E **57**(4), 4441-4457 (1998).
- [Cla99] P. Claudin, “*La physique des tas de sable*”, Annales de Physique **24**(2) (1999).
- [Cop96] S. N. Coppersmith, C.-h. Liu, S. Majumbar, O. Narayan et T. A. Witten, “*Model for force fluctuations in bead packs*”, Phys. Rev. E **53**(5), 4673-4685 (1996).
- [Cos95] C. Coste, E. Falcon et S. Fauve, “*Propagation d’ondes non linéaires dans une chaîne de billes en contact de Hertz*”, dans “des géomatériaux aux ouvrages”, édité par C. Petit, G. Pijaudier-Cabot, J. M. Reynouard (Hermès, Paris), p. 33 (1995).
- [Cos97] C. Coste, E. Falcon et S. Fauve, “*Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact*”, Phys. Rev. E **56**(5), 6104-6117 (1997).
- [Cos99] C. Coste et B. Gilles, “*On the validity of Hertz contact law for granular material acoustics*”, Eur. Phys. J. B **7**, 155-168 (1999).
- [DeB00] M. de Billy, “*Experimental study of sound propagation in a chain of spherical beads*”, J. Acoust. Soc. Am. **108**(4), 1486-1495 (2000).
- [DeG99] P. G. de Gennes, “*Granular matter : a tentative view*”, Rev. Mod. Phys. **71**, S374 (1999).
- [Der01a] A. Derode, A. Tourin, et M. Fink, “*Random multiple scattering of ultrasound. I. Coherent and ballistic waves*”, Phys. Rev. E **64**, 036605 (2001).
- [Der01b] A. Derode, A. Tourin, et M. Fink, “*Random multiple scattering of ultrasound. II. Is time reversal a self-averaging process ?*”, Phys. Rev. E **64**, 036606 (2001).
- [Dig81] P. J. Digby, “*The effective elastic moduli of porous granular rocks*”, J. Appl. Mech. **48**, 803-808 (1981).

- [Duf57] J. Duffy et R. D. Mindlin, “*Stress-strain relations and vibrations of a granular medium*”, J. Appl. Mech. **24**, 585-593 (1957).
- [Edw99] S. F. Edwards et D. V. Grinev, “*Statistical mechanics of stress transmission in disordered granular arrays*”, Phys. Rev. Lett. **82**(26), 5397-5400 (1999).
- [Eri02] J. M. Erikson, N. W. Mueggenburg, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Force distribution in three-dimensional compressible granular packs*”, Phys. Rev. E **66**, 040301(R) (2002).
- [God90] J. D. Goddard, “*Nonlinear elasticity and pressure dependent wave speeds in granular media*”, Proc. R. Soc. Lond. A **430**, 105-131 (1990).
- [Gol02] C. Goldenberg et I. Goldhirsch, “*Force chains, microelasticity, and macroelasticity*”, Phys. Rev. Lett. **89**(8), 084302 (2002).
- [Gus02] V. Gusev et V. Aleshin, “*Strain wave evolution equation for nonlinear propagation in materials with mesoscopic mechanical elements*”, J. Acoust. Soc. Am. **112**(6), 2666-2679 (2002).
- [Guy95] R. A. Guyer, K. R. McCall et G. N. Boitnott, “*Hysteresis, discrete memory and nonlinear wave propagation in rock : a new paradigm*”, Phys. Rev. Lett. **74**(17), 3491-3494 (1995).
- [Has99] E. Hascoët, H. J. Herrmann et V. Loreto, “*Shock propagation in a granular chain*”, Phys. Rev. E **59**(3), 3202-3206 (1999).
- [Has00] E. Hascoët et H. J. Herrmann, “*Shocks in non-loaded bead chain with impurities*”, Eur. Phys. J. B **14**, 183-190 (2000).
- [Her98] H. J. Herrmann, J.-P. Hovi et S. Luding (eds.), “*Physics of granular media*”, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht), (1998).
- [Hid02] R. C. Hidalgo, C. U. Grosse, F. Kun, H. W. Reinhardt et H. J. Herrmann, “*Evolution of percolating force chains in compressed granular media*”, Phys. Rev. Lett. **89**, 205501 (2002).
- [Hla02] A.-C. Hladky-Hennion, F. Cohen-Tenoudji, A. Devos et M. de Billy, “*On the existence of subresonance generated in a one-dimensional chain of identical beads*”, J. Acoust. Soc. Am. **112**(3), 850-855 (2002).
- [Hol81] D. J. Holcomb, “*Memory, relaxation, and microfracturing in dilatant rock*”, J. Geophys. Res. **86**(B7), 6235-6248 (1981).
- [Hon00] J. Hong, H. Kim et J.-P. Hwang, “*Characterization of soliton damping in the granular chain under gravity*”, Phys. Rev. E **61**(1), 964-967 (2000).
- [Jae96a] H. M. Jaeger, S. R. Nagel et R. B. Behringer, “*The physics of granular materials*”, Physics Today, April 31-38 (1996).
- [jae96b] H. M. Jaeger, S. R. Nagel et R. P. Behringer, “*Granular solids, liquids, and gases*”, Rev. Mod. Phys. **68**, 1259-1273 (1996).
- [Jia99] X. Jia, C. Caroli et B. Velicky, “*Ultrasound propagation in externally stressed granular media*”, Phys. Rev. Lett. **82**(9), 1863-1866 (1999).
- [Joh97] D. L. Johnson et A. N. Norris, “*Rough elastic spheres in contact : memory effects and the transverse force*”, J. Mech. Phys. Solids **45**(6), 1025-1036 (1997).
- [Joh98] D. L. Johnson, L. M. Schwartz, D. Elata, J. G. Berryman, B. Hornby et A. N. Norris, “*Linear and nonlinear elasticity of granular media : stress-induced anisotropy of a random sphere pack*”, J. Appl. Mech. **65**, 380-388 (1998).
- [Joh85] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, (Cambridge University Press, Cambridge), (1985).
- [Joh54] K. L. Johnson, “*Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces*”, Proc. R. Soc. London., Ser. A **230**, 531-548 (1954).
- [Jos00] C. Josserand, A. V. Tkachenko, D. M. Mueth et H. M. Jaeger, “*Memory effects in granular materials*”, Phys. Rev. Lett. **85**(17), 3632-3635 (2000).
- [Khi01] Y. Khidas, “*Etude expérimentale du frottement et des rotations dans des milieux granulaires modèles*”, Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes 1, UFR Structure et propriétés de la matière, 21 septembre (2001).
- [Kni95] J. B. Knight, C. G. Frandrich, C. Ning Lau, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Density relaxation in a vibrated granular material*”, Phys. Rev. E **51**(5), 3957-3963 (1995).
- [Lag96] A. Lagendijk et B. A. van Tiggelen, “*Resonant multiple scattering of light*”, Phys. Rep. **270**(3), 143-216 (1996).
- [Lan86] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, *Theory of elasticity*, (Pergamon Press, Oxford), (1986).

- [Lei94] M. Leibig, “*Model for the propagation of sound in granular materials*”, Phys. Rev. E **49**(2), 1647-1656 (1994).
- [Liu92] C.H. Liu et S.R. Nagel, “*Sound in sand*”, Phys. Rev. Lett. **68**, 2301-2304 (1992).
- [Lov99] G. Lovoll, K. J. Maloy et E. G. Flekkoy, “*Force measurements on static granular materials*”, Phys. Rev. E **60**(5), 5872-5878 (1999).
- [Lud97] S. Luding, “*Stress distribution in static two dimensional granular model media in the absence of friction*”, Phys. Rev. E **55**(4), 4720-4729 (1997).
- [McK74] B. McKavanagh et F. D. Stacey, “*Mechanical hysteresis in rocks at low strain amplitudes and seismic frequencies*”, Phys. Earth and Planet. Int. **8**, 246-250 (1974).
- [Mak00] H. A. Makse, D. L. Johnson et L. M. Schwartz, “*Packing of compressible granular materials*”, Phys. Rev. Lett. **84**(18), 4160-4163 (2000).
- [Man00] M. Manciu, S. Sen et A. J. Hurd, “*Crossing of identical solitary waves in a chain of elastic beads*”, Phys. Rev. E **63**, 016614 (2000).
- [Mel94] S. Melin, “*Wave propagation in granular assemblies*”, Phys. Rev. E **49**(3), 2353-2361 (1994).
- [Min49] R. D. Mindlin, “*Compliance of elastic bodies in contact*”, J. Appl. Mech. **71**, 259-268 (1949).
- [Mou01] A. Moussatov, B. Castagnède et V.E. Gusev, “*Observation of nonlinear interaction of acoustic waves in granular materials : demodulation process*”, Phys. Lett. A **283**, 216-223 (2001).
- [Mue98] D. M. Mueth, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Force distribution in a granular medium*”, Phys. Rev. E **57**(3), 3164-3169 (1998).
- [Mue02] N. W. Mueggenburg, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Stress transmission through three-dimensional ordered granular arrays*”, Phys. Rev. E **66**, 031304 (2002).
- [Nau98] K. A. Naugolnykh et L. A. Ostrovsky, *Nonlinear Waves Processes in Acoustics*, (Cambridge University Press, Cambridge), (1998).
- [Nes83] V. F. Nesterenko, “*Propagation of nonlinear compression pulses in granular media*”, J. Appl. Mech. and Tech. Phys. **24**(4), 567-575 (1983).
- [Nix99] S. A. Nixon et H. W. Chandler, “*On the plasticity and elasticity of dilatant granular materials*”, J. Mech. Phys. Solids **47**, 1397 (1999).
- [Nov97] B.K. Novikov, O.V. Rudenko et V.I. Timochenko, *Nonlinear Underwater Acoustics*, (ASA, New-York), (1987).
- [Now98] E. R. Nowack, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Density fluctuations in vibrated granular materials*”, Phys. Rev. E **57**(2), 1971-1982 (1998).
- [Ova02] G. Ovarlez, “*Statique et rhéologie d’un milieu granulaire confiné*”, Thèse de Doctorat de l’Université de Paris XI, UFR Scientifique d’Orsay, 24 juin (2002).
- [Pag95] J.H. Page, H.P. Schriemer, A.E. Bailey et D.A. Weitz, “*Experimental test of the diffusion approximation for multiplied scattered sound*”, Phys. Rev. E **52**(3), 3106-3114 (1995).
- [Pag97] J.H. Page, H.P. Schriemer, I. P. Jones, P. Sheng, et D.A. Weitz, “*Classical wave propagation in strongly scattering media*”, Physica A **241**, 64-71 (1997).
- [Pra00] A. Prados, J. J. Brey et B. Sanchez-Rey, “*Hysteresis in vibrated granular media*”, Physica A **284**, 2877-2898 (2000).
- [Rad96] F. Radjai, M. Jean, J.-J. Moreau et S. Roux, “*Force distribution in dense two-dimensional granular systems*”, Phys. Rev. Lett. **77**(2), 274-277 (1996).
- [Rad98] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean et J.-J. Moreau, “*Bimodal character of stress transmission in granular packings*”, Phys. Rev. Lett. **80**(1), 61-64 (1998).
- [Ric00] P. Richard, “*Etude de la géométrie de milieux granulaires modèles tridimensionnels par simulation numérique*”, Thèse de Doctorat de l’Université de Rennes 1, UFR Structure et propriétés de la matière, 23 juin (2000).
- [Roy87] D. Royer, E. Dieulesaint, X. Jia et Y. Shui, “*Optical generation and detection of surface acoustic waves on a sphere*”, Appl. Phys. Lett. **52**(9), 706-708 (1987).
- [Rud78] O. V. Rudenko et S. I. Soluyan, *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*, (Consultants Bureau, New-York), (1978).
- [Sch84] L. Schwartz et T. J. Plona, “*Ultrasonic propagation in close-packed disordered suspensions*”, J. Appl. Phys. **55**(11), 3971-3977 (1984).

- [Sen98] S. Sen, M. Manciu et J. D. Wright, “*Solitonlike pulses in perturbed and driven Hertzian chains and their possible applications in detecting buried impurities*”, Phys. Rev. E **57**(2), 2386-2397 (1998).
- [Sha94] M. M. Sharma et A. N. Tutuncu, “*Grain contact adhesion hysteresis : a mechanism for attenuation of seismic waves*”, Geophys. Res. Lett. **21**(21), 2323-2326 (1994).
- [She95] P. Sheng, “*Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena*”, (Academic Press, New-York), (1995).
- [Sil02] L. E. Silbert, G. S. Grest et J. W. Landry, “*Statistics of the contact network in frictional and frictionless granular packings*”, Phys. Rev. E **66**, 061303 (2002).
- [Soc98] J. E. S. Socolar, “*Average stresses and force fluctuations in noncohesive granular materials*”, Phys. Rev. E **57**(3), 3204-3215 (1998).
- [Tou01] V. Tournat, “*Acoustique non linéaire pour la caractérisation de matériaux*”, Rapport d'avancement des travaux n°1, contrat DGA n° 00.34.026.00.470.75.65, 58 pages, Octobre (2001).
- [Van00] L. Vanel, P. Claudin, J.-P. Bouchaud, M. E. Cates, E. Clément et J. P. Wittmer, “*Stresses in silos : comparison between theoretical models and new experiments*”, Phys. Rev. Lett. **84**(7), 1439-1442 (2000).
- [Wal87] K. Walton, “*The effective elastic moduli of random packing of spheres*”, J. Mech. Phys. Solids **35**(2), 213-226 (1987).
- [Wea95] R.L. Weaver et W. Sachse, “*Diffusion of ultrasound in a glass bead slurry*”, J. Acoust. Soc. Am. **97**(4), 2094-2102 (1995).
- [Win84] K. W. Winkler et W. F. Murphy, “*Scattering in glass beads : effects of frame and pore fluid compressibilities*”, J. Acoust. Soc. Am. **76**(3), 820-825 (1984).
- [Zai95] V. Yu. Zaitsev, “*Nonideally packed granular media : numerical modeling of elastic nonlinear properties*”, Acoust. Phys. **41**(3), 385-391 (1995).
- [Zai96] V. Yu. Zaitsev, “*A model of anomalous elastic nonlinearity of microinhomogeneous media*”, Acoust. Lett. **19**(9), 171-174 (1996).

Chapitre 2

Antenne paramétrique en milieu multidiffusant

2.1 Introduction

Historiquement, le phénomène non linéaire d'auto-démodulation d'amplitude sur lequel l'antenne paramétrique est basée a été découvert lors d'expériences menées dans l'eau [Zve99, Nov87], mais l'antenne paramétrique peut être utilisée dans un milieu homogène non linéaire, et nous allons le voir par la suite, dans les milieux non linéaires inhomogènes.

Les premières explications des phénomènes physiques mis en jeu dans l'auto-démodulation d'amplitude furent publiées au début des années 60 par P. J. Westervelt puis H. O. Berkay (des résultats théoriques ont été obtenus indépendamment par V. A. Zverev et A. I. Kalachev dans les mêmes années, pour une revue du cheminement scientifique voir [Zve99]). Ensuite, de nombreux travaux ont été effectués, expérimentaux et théoriques, dont les principaux résultats peuvent être trouvés dans le livre "Nonlinear underwater acoustics" de B. K. Novikov, O. V. Rudenko et V. I. Timoshenko [Nov87].

Dans un premier temps, le principe de l'antenne paramétrique en émission est décrit et différents régimes classiques de fonctionnement sont présentés. Dans un second temps, une approche théorique de base est présentée pour modéliser l'influence de la diffusion acoustique dans le milieu sur le fonctionnement de l'antenne paramétrique. Une analyse du résultat obtenu est ensuite réalisée, permettant d'identifier des transitions dans ce fonctionnement, transitions obtenues en variant certains paramètres du modèle développé. Enfin, des résultats expérimentaux, menés dans un assemblage non-consolidé de billes de verre, sont présentés et discutés.

2.2 Principe de l'antenne paramétrique en émission

2.2.1 Cas de deux fréquences de pompage

L'antenne paramétrique consiste en un transducteur qui génère des ondes acoustiques hautes fréquences (HF), et un volume de milieu non linéaire d'étendue ℓ , où ℓ est une longueur caractéristique d'atténuation de l'intensité des ondes acoustiques HF. Ces ondes acoustiques HF sont appelées ondes primaires (ce sont les premières rayonnées dans le milieu, voir la figure 2.1), ou ondes de pompage (ce sont elles qui fournissent/pompent l'énergie acoustique au milieu). L'onde primaire doit au moins comporter deux fréquences différentes afin de générer un signal démodulé dynamique, mais elle peut être de formes très diverses. Le cas le plus simple consiste en une onde primaire composée de deux HF proches, f_1 et f_2 . Si les effets non linéaires sont suffisamment importants (notamment avec une non-linéarité paire), de l'énergie provenant des ondes primaires de fréquences f_1 et f_2 est transférée vers de nouvelles fréquences d'ondes acoustiques qui n'étaient pas présentes à l'émission : $2f_1$, $2f_2$, $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 - f_1$, $f_2 - f_2$. En raison de l'augmentation de l'absorption en fonction de la fréquence, les ondes acoustiques de hautes fréquences f_1 , f_2 , $f_1 + f_2$, $2f_1$, $2f_2$, sont atténuées beaucoup plus rapidement que l'onde acoustique de fréquence différence $f_1 - f_2$. Par conséquent, seule l'onde acoustique de basse fréquence $f_1 - f_2$ se propage en dehors de la région d'interaction non linéaire d'étendue ℓ . Cette région d'interaction non linéaire joue le rôle de source pour l'onde démodulée BF $f_1 - f_2$. Sur la figure 2.1, les régions d'existence des différentes ondes sont représentées schématiquement.

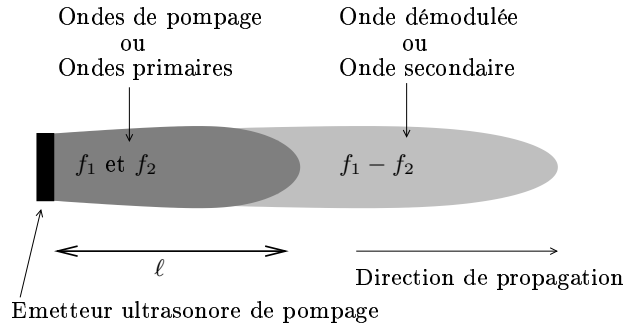


FIG. 2.1: Représentation schématique de l'antenne paramétrique en émission.

Sur la figure 2.2, la répartition spatiale des amplitudes des ondes acoustiques HF et BF est tracée à un instant t donné. Le transducteur émetteur HF est placé à la distance $z = 0$. En cette position, le signal démodulé est nul.

2.2.2 Signaux démodulés large bande

Il est possible d'utiliser d'autres types de signaux d'excitation pour l'onde primaire, contenant un nombre de fréquences plus élevé. En particulier, pour un intérêt de traitement analytique, des signaux de type sinus modulé en amplitude par une fonction gaussienne seront utilisés dans la suite :

$$\begin{aligned} s(t) &= Ae^{-\frac{t^2}{\tau_m^2}} \sin(2\pi f_p t) \\ S(f) &= Be^{-(f-f_p)^2 \frac{\tau_m^2}{4}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

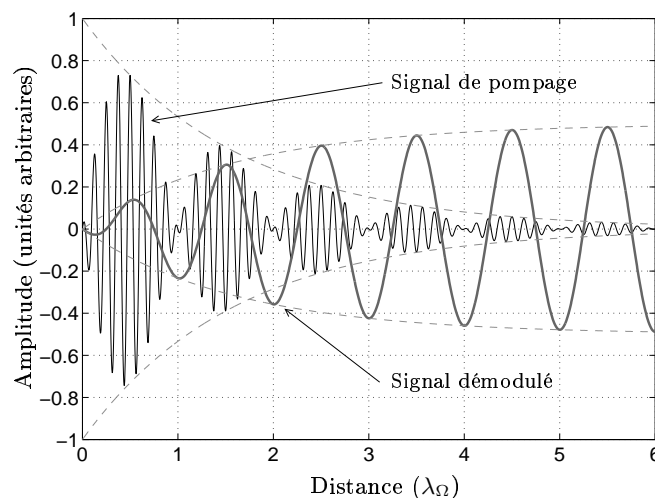


FIG. 2.2: *profils instantanés à un temps t donné des ondes primaires et démodulées (déplacements acoustiques) en fonction de la distance à l'émetteur mesurée en longueurs d'ondes démodulées $BF \lambda_\Omega$.*

où $s(t)$ est le signal temporel d'amplitude A , $S(f)$ est une fonction gaussienne centrée sur la fréquence de pompage f_p et qui correspond à la transformée de Fourier de $s(t)$ d'amplitude B , τ_m est le temps caractéristique de modulation de l'onde de pompage et correspond à la largeur caractéristique de la Gaussienne de modulation (la fréquence de pompage f_p est ici et dans la suite confondue avec la fréquence porteuse du paquet d'onde HF, les effets de dispersion au sein de ce paquet d'onde étant négligés). Dans ce cas, toutes les fréquences du spectre continu initial interagissent entre elles pour générer les basses fréquences (BF) (voir la figure 2.3). Le profil du signal BF obtenu est, selon les processus physiques mis en jeu et selon la grandeur physique mesurée (déplacement acoustique, vitesse, accélération, ...), proportionnel à des dérivées temporelles de la fonction de modulation de l'intensité de pompage HF [Zai99a]. Par conséquent, le processus de génération d'une onde acoustique BF par une antenne paramétrique peut être interprété comme un processus d'auto-démodulation d'amplitude. La désignation "rectification" est aussi utilisée pour ce même phénomène, notamment en optique. Le signal BF généré par une antenne paramétrique, est donc appelé signal démodulé ou secondaire (ou bien encore rectifié).

En changeant la forme de l'enveloppe, il est possible de générer un signal BF démodulé avec une grande variété de formes temporelles (et donc différentes compositions spectrales) dans certaines limites liées aux phénomènes physiques mis en jeu et autres limites de natures technologiques.

2.2.3 Régimes de fonctionnement

Différents régimes de fonctionnement de l'antenne paramétrique existent. Dans le cas général, c'est la longueur caractéristique la plus courte d'un phénomène (ou le temps caractéristique) qui implique le régime de fonctionnement. Les longueurs caractéristiques qui interviennent dans les modèles courants sont [Nov87] : la longueur d'absorption de l'intensité de pompage ℓ_a , la longueur de diffraction des ondes primaires (ou de pompage) $\ell_d = \frac{1}{2}ka^2$ (où k est le nombre d'onde de l'onde primaire et a le rayon caractéristique de l'émetteur), la longueur de diffraction des ondes secondaires L_d , et éventuellement des longueurs caractéristiques associées à la dispersion de vitesse dans le milieu. Dans le cas d'un milieu multi-diffusant, une longueur caractéristique est introduite dans la suite, la longueur caractéristique

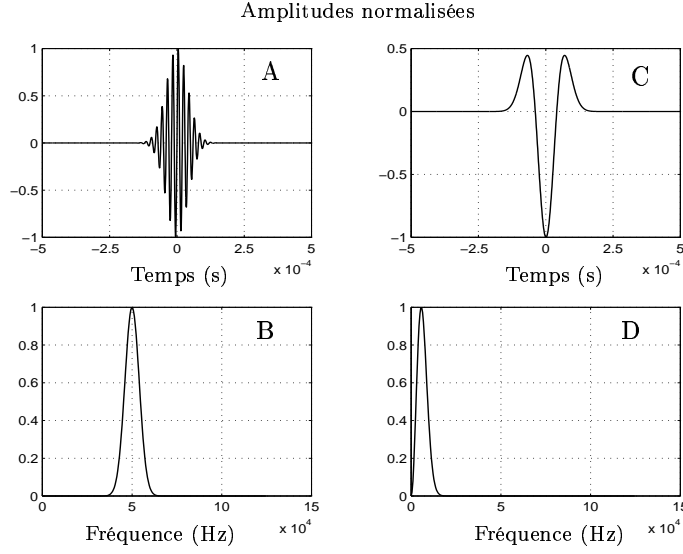


FIG. 2.3: Signal de pompage de type sinus HF modulé en amplitude par une gaussienne (signal temporel en A, spectre d'amplitude en B). Exemple de signal démodulé correspondant au signal de pompage, signal temporel en C (dérivée seconde de la Gaussienne de modulation), et spectre d'amplitude en D.

de diffusion ou libre parcours moyen de diffusion des ondes de pompage ℓ_s .

Deux régimes de fonctionnement distincts, susceptibles d'être rencontrés dans les expériences, sont présentés maintenant. Ils sont historiquement les premiers à avoir été mis en évidence et sont appelés le régime de Westervelt et le régime de Berkay [Nov87]. Pour une revue de ces modèles, se reporter aux références [Nov87, Nau98].

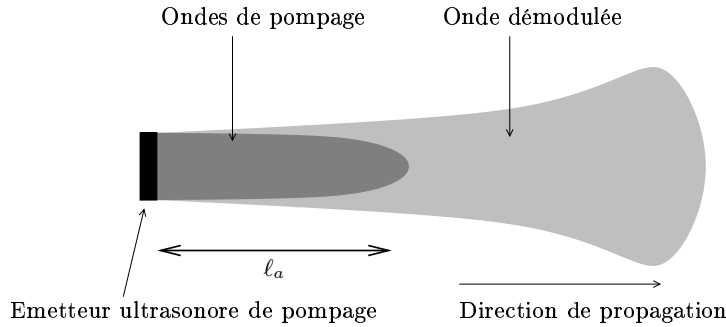


FIG. 2.4: Représentation schématique de l'antenne paramétrique en émission dans le régime de Westervelt. Les conditions de fonctionnement vérifient : $(\Omega/\omega)\ell_a \ll \ell_d$.

Sur la figure 2.4 les zones d'existence des ondes de pompage et de l'onde démodulée dans le régime de fonctionnement de Westervelt sont représentées schématiquement. Dans le régime de Westervelt, l'interaction non linéaire des ondes de pompage HF se produit principalement dans leur champ proche, lorsque le faisceau d'ondes est encore collimaté. Dans ce cas, la longueur de diffraction de ce faisceau, définie précédemment comme $\ell_d(\omega) = \frac{1}{2}k(\omega)a^2$ (où ω est la pulsation des ondes primaires), est bien supérieure au facteur $(\Omega/\omega)\ell_a$ où ℓ_a est la longueur caractéristique d'absorption des ondes de pompage

HF.

La transition entre le régime de Westervelt et le régime de Berktaÿ a lieu pour $(\Omega/\omega)\ell_a \simeq \ell_d$. Le facteur (Ω/ω) est par définition supérieur à 1, et peut être dans certaines configurations très supérieur à 1.

Si l'enveloppe de l'intensité de pompage est notée $\tilde{f}(\Omega, \tau_m)$ dans le domaine fréquentiel ou $f(t, \tau_m)$ dans le domaine temporel, le signal de pression acoustique dans l'axe de symétrie du transducteur émetteur (supposé à symétrie cylindrique et à directivité de type Gaussienne) en dehors de la région source et sans dispersion de vitesse est alors proportionnel à [Nov87],

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\Omega(\Omega, \tau_m) &\propto -\Omega^2 \tilde{f}(\Omega, \tau_m) \\ P_\Omega(t, \tau_m) &\propto \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, \tau_m) \quad .\end{aligned}\tag{2.2}$$

Dans le régime de Berktaÿ (voir figure 2.5), les ondes de pompage sont fortement diffractées et faiblement atténuées ($\ell_d \ll (\Omega/\omega)\ell_a$). Le signal démodulé est donc généré principalement dans un champ diffracté d'ondes HF. Dans ce cas, le signal démodulé est relié à l'enveloppe de l'intensité de pompage par les relations (respectivement dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel) :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\Omega(\Omega, \tau_m) &\propto -i\Omega \tilde{f}(\Omega, \tau_m) \\ P_\Omega(t, \tau_m) &\propto \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau_m) \quad .\end{aligned}\tag{2.3}$$

Ainsi, dans les expériences et les modèles considérés dans ce document, une intégration (ou une dérivation) du signal temporel démodulé BF peut intervenir en raison du passage entre le régime de fonctionnement de Westervelt vers le régime de Berktaÿ (ou inversement). Cette transition peut être réalisée par exemple, dans un milieu homogène, en diminuant la fréquence de pompage et en gardant la fréquence de modulation constante, ce qui a l'effet simultané d'augmenter la longueur d'absorption ℓ_a , d'augmenter le facteur (Ω/ω) et de diminuer la longueur de diffraction du faisceau de pompage ℓ_d .

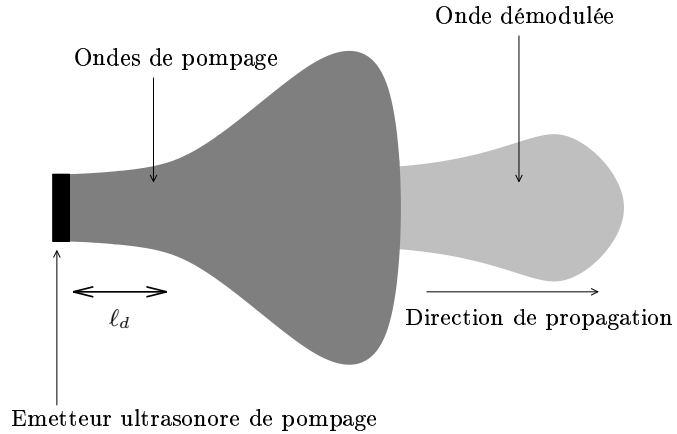


FIG. 2.5: Représentation schématique de l'antenne paramétrique en émission dans le régime de Berktaÿ. Les ondes de pompage sont diffractées avant d'être absorbées ($\ell_d \ll (\Omega/\omega)\ell_a$ d'où $\ell_d \ll \ell_a$).

Une autre longueur caractéristique peut intervenir pour les processus non linéaires mis en jeu dans le fonctionnement de l'antenne paramétrique. C'est la longueur caractéristique de formation de choc ℓ^{nl} . Cette longueur a été estimée (voir annexe B) grâce au paramètre de non-linéarité quadratique

du milieu et à l'amplitude de déformation maximum utilisée dans les expériences. Elle reste dans tous les cas expérimentaux présentés dans ce document supérieure à la distance d'observation, et à la longueur caractéristique d'absorption ou de diffraction. Les effets non linéaires discutés ne sont donc pas influencés par cette distance caractéristique.

Dans les milieux inhomogènes comme les milieux granulaires, lorsque la longueur d'onde de pompage diminue et s'approche des dimensions caractéristiques des inhomogénéités du milieu, le paramètre ℓ_s (longueur caractéristique de diffusion) peut devenir le plus petit des paramètres caractéristiques, et le processus paramétrique est alors influencé par la diffusion de l'onde de pompage. L'objectif principal du modèle développé dans la suite est de décrire le régime diffusif et l'influence de la transition entre le régime de propagation balistique et ce régime de diffusion dans le transport des ondes HF sur le signal démodulé.

D'autres effets physiques sont susceptibles d'influencer le processus d'auto-démodulation. Ils sont répertoriés et discutés dans la section 2.6 de ce chapitre.

Il existe d'autres types d'interactions paramétriques, mis en oeuvre ces dernières années, où des ondes qui ont un rapport de fréquences élevé sont mélangées [Bar01a, Bar01b, Jac03]. Par exemple, une onde primaire entretenue de haute fréquence interagit non linéairement avec une impulsion de basse fréquence se propageant collinéairement. Le résultat de l'interaction est une modulation de phase du signal de haute fréquence. De cette modulation de phase, il est possible d'extraire des informations sur le paramètre de non-linéarité du milieu de propagation. Ces autres méthodes ne sont pas étudiées dans le présent travail de thèse, où seul l'effet d'auto-démodulation d'amplitude est considéré, mettant en jeu des fréquences hautes suffisamment proches pour générer une fréquence différence suffisamment basse.

2.3 Modèle d'antenne paramétrique dans les milieux granulaires

Un modèle théorique d'antenne paramétrique dans les milieux dispersifs et diffusifs est développé. Il prédit une dépendance du profil de l'onde démodulée sur le régime de transport de l'onde de pompage HF (balistique/diffusif). Les profils et les spectres des signaux BF reçus contiennent en général des informations sur l'absorption, la diffusion, et la dispersion de vitesse des ondes acoustiques de pompage HF, et donc sur le milieu granulaire.

2.3.1 Approche de base

Le but de l'analyse présentée ici est de comprendre comment des ondes acoustiques BF, excitées par un processus non linéaire de démodulation d'ondes acoustiques HF modulées en amplitude, dépendent du régime de propagation des composantes HF. Est-il possible d'utiliser les signaux paramétriques BF pour avoir la solution du problème inverse, c'est à dire avoir la connaissance du régime de propagation des ondes acoustiques HF ?

Pour avoir des réponses qualitatives à ces questions, un modèle analytique simple est développé permettant d'analyser ce processus de démodulation. Ce modèle est susceptible d'être largement amélioré en conjonction avec des investigations expérimentales. En d'autres termes, les hypothèses menant au modèle peuvent être modifiées si nécessaire.

Ces hypothèses de départ sont les suivantes : la propagation des ondes acoustiques HF et BF est traitée comme si elle avait lieu dans un milieu effectif homogène. Il est attribué à ce milieu une absorption et une dispersion de vitesse dépendantes de la fréquence. Ce phénomène de dispersion est une manifestation de la microstructure du milieu granulaire, qui est composé de billes de dimensions finies. La dispersion de vitesse augmente lorsque les HF approchent de la fréquence de coupure du milieu [DeB00] proportionnelle à l'inverse du rayon des billes (voir le premier chapitre). Le fait que l'arrangement des billes ne soit pas régulier est pris en compte en introduisant la possibilité pour les ondes acoustiques d'être diffusées sans absorption. Cette diffusion dépend de la fréquence et est supposée contribuer à rendre aléatoire la direction de propagation des ondes HF. Par conséquent, la diffusion contribue à l'atténuation des ondes acoustiques HF initiales (qui se propagent de façon balistique) et génère un champ HF diffusé, qui de façon générale transporte l'énergie quasi-balistiquement [Tou00], par diffusion [Jia99, Pag95, Wea95, Sch97, Zha99], ou peut être localisé [Wea95, Fen93].

Le processus analysé ici est initié par l'émission d'une onde acoustique longitudinale dans un milieu granulaire, se propageant principalement à travers les billes (mode solidien). Le mode acoustique aérien (qui transporte l'énergie principalement à travers l'air saturant les billes) qui est aussi excité dans le processus de démodulation [Mou01], est négligé. Pour une première approche, les ondes acoustiques de cisaillement, qui existent aussi dans les milieux granulaires sont complètement négligées [Min49, Joh54, Whi83]. Les ondes de cisaillement peuvent être excitées par conversion de mode lors de la diffusion des ondes de compression. Il est à supposer qu'à partir d'un temps suffisamment long, il y a équipartition d'énergie entre les ondes longitudinales et de cisaillement dans le champ diffusif dû à la diffusion multiple [Wea95, Hen01]. L'énergie acoustique est donc supposée être transportée uniquement par les ondes longitudinales.

La non-linéarité de l'équation d'état qui mène au processus de démodulation est supposée être associée avec la non-linéarité de Hertz, décrivant le contact entre billes sous contrainte normale [Joh85, Lan86]. La non-linéarité quadratique est uniquement considérée [Zai99b, Mou01, Bel93]. En tenant compte des hypothèses formulées ci-dessus, l'équation du mouvement pour un solide élastique

est tout d'abord écrite sous la forme [Roy96] :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad , \quad (2.4)$$

où ρ_0 est la densité du milieu à l'équilibre, U_i sont les composantes du vecteur déplacement \vec{U} , et σ_{ij} est le tenseur des contraintes. La description des ondes longitudinales est obtenue en appliquant l'opérateur divergence à l'équation (2.4).

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{div} \vec{U}) = \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad , \quad (2.5)$$

La densité d'énergie élastique est modélisée par son expansion jusqu'au terme cubique en déformation :

$$W = \rho_0 c_0^2 \left[\frac{1}{2} (\text{div} \vec{U})^2 - \frac{\Gamma_2}{3} (\text{div} \vec{U})^3 \right] \quad , \quad (2.6)$$

où c_0 est la vitesse du son et Γ_2 le paramètre de non-linéarité quadratique du milieu granulaire. La relation contrainte - déformation correspondant à l'équation (2.6) a la forme :

$$\sigma_{ij} = \rho_0 c_0^2 \left[(\text{div} \vec{U}) - \Gamma_2 (\text{div} \vec{U})^2 \right] \delta_{ij} \quad . \quad (2.7)$$

Il faut noter que dans les équations (2.6) et (2.7), la non-linéarité cinématique est considérée comme négligeable devant la non-linéarité des contacts de Hertz [Zai99a, Whi83, Bel92]. La relation contrainte - déformation a été présentée au chapitre précédent pour les contacts de Hertz :

$$\sigma_{ij}^H = -B \left(-\text{div} \vec{U}^H \right)^\kappa \delta_{ij} \quad , \quad (2.8)$$

avec la constante B proportionnelle aux modules élastiques du matériau constituant les billes [Min49, Joh85, Whi83, Bel93], et la constante κ comprise entre 3/2 et 2 [Jia99, Cos99, God90], toutes les deux dépendantes de l'arrangement des billes [God90, Guy90]. La contrainte initiale ou de façon équivalente la pression hydrostatique initiale P_0 sont décrites par :

$$\sigma_{ij}^{in} = -B \left(-\text{div} \vec{U}^{in} \right)^\kappa \delta_{ij} = -P_0 \delta_{ij} \quad . \quad (2.9)$$

Un développement de cette relation contrainte - déformation autour de la condition initiale de contrainte statique, en considérant de plus une perturbation acoustique est écrite sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^H - \sigma_{ij}^{in} \simeq \kappa B^{1/\kappa} P_0^{(\kappa-1)/\kappa} \left[(\text{div} \vec{U}) - \frac{\kappa-1}{2} B^{1/\kappa} P_0^{-1/\kappa} (\text{div} \vec{U})^2 \right] \quad , \quad (2.10)$$

où $|\text{div} \vec{U}| \equiv |\text{div} \vec{U}^H - \text{div} \vec{U}^{in}| \ll |\text{div} \vec{U}^{in}|$. La comparaison des équations (2.7) et (2.10) fournit les dépendances sur la pression hydrostatique de la vitesse de propagation acoustique basse fréquence et de la non-linéarité quadratique effective. En particulier, dans le cas d'un arrangement parfait sans pertes de contacts entre les billes [Bel93, Whi83, Cos99] $\kappa = 3/2$, $c_0 \propto P_0^{1/6}$, $\Gamma_2 \propto P_0^{-2/3}$. Sous certaines conditions expérimentales, une dépendance proche de $c_0 \propto P_0^{1/4}$ est observée [Jia99]. Cela peut provenir de la dépendance du nombre actif de contacts sur la pression statique [God90] ou de la déviation au niveau du contact seul de la loi de Hertz due aux aspérités des billes [God90]. Ce cas correspond à $\kappa = 2$ et $\Gamma_2 \propto P_0^{-1/2}$.

En substituant la relation contrainte - déformation (2.7) dans (2.4), l'équation d'onde non linéaire est déduite :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta + \hat{L} \right] (\text{div} \vec{U}) = -c_0^2 \Gamma_2 \Delta (\text{div} \vec{U})^2 \quad , \quad (2.11)$$

où un opérateur linéaire intégro-différentiel \hat{L} est ajouté pour tenir compte de la possible dispersion de vitesse, de l'absorption, et de la diffusion des ondes acoustiques. En suivant l'approche traditionnelle [Nov87], la solution de l'équation (2.11) est présentée comme une superposition d'un champ d'ondes primaires HF (noté \vec{U}_ω) et d'un champ d'ondes secondaires BF (noté \vec{U}_Ω), avec $\vec{U} = \vec{U}_\Omega + \vec{U}_\omega$. La séparation des équations pour \vec{U}_Ω et pour \vec{U}_ω se fait par moyennage sur une période de l'onde HF, et en négligeant l'excitation des harmoniques supérieurs dans le champ HF [Nov87].

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta + \hat{L} \right] (\text{div} \vec{U}_\omega) = 0 \quad (2.12)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta + \hat{L} \right] (\text{div} \vec{U}_\Omega) = -c_0^2 \Gamma_2 \Delta \langle (\text{div} \vec{U}_\omega)^2 \rangle \quad . \quad (2.13)$$

L'équation (2.12) décrit la propagation balistique, l'absorption et la diffusion d'ondes acoustiques HF (éventuellement modulées en amplitude) rayonnées dans le milieu par un émetteur. L'équation (2.13) décrit l'excitation des ondes acoustiques BF grâce au processus de démodulation non linéaire. La notation $\langle \dots \rangle$ est utilisée pour désigner l'opération de moyennage sur une période de l'onde HF. Pour simplifier, la dispersion, l'absorption et la diffusion de l'onde BF sont négligées. Si le terme de droite de l'équation (2.13) est comparé avec la présentation de la densité d'énergie potentielle élastique dans l'équation (2.6), il est possible d'approximer ce terme de droite par $-\frac{2}{\rho_0} \Delta \langle W_\omega \rangle$, où W_ω est l'énergie potentielle du champ acoustique HF. En prenant en compte le fait que l'énergie potentielle acoustique du paquet d'onde est égale à son énergie cinétique (en moyenne sur une période), et en supposant une géométrie unidimensionnelle, l'équation (2.13) est réécrite sous la forme :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] U_\Omega = -\frac{\Gamma_2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \langle \overline{W}_\omega \rangle \quad , \quad (2.14)$$

où U_Ω est la composante selon x du déplacement BF et $\langle \overline{W}_\omega \rangle = 2 \langle W_\omega \rangle = \rho_0 \langle (\frac{\partial U_\omega}{\partial t})^2 \rangle \equiv \rho_0 \langle v_\omega^2 \rangle$ est la densité d'énergie totale du champ acoustique HF (U_ω et v_ω sont respectivement le déplacement et la vitesse particulière du champ acoustique HF). En accord avec l'équation (2.14), le processus de démodulation a lieu dans les régions de variation spatiale de la densité d'énergie HF.

L'équation pour le transport d'énergie par un paquet d'onde acoustique plane HF, issue de (2.12), a la forme :

$$c_g(\omega) \frac{\partial}{\partial x} \langle W_{\omega b} \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{\omega b} \rangle + \frac{1}{\tau(\omega)} \langle W_{\omega b} \rangle = 0 \quad , \quad (2.15)$$

où $c_g(\omega)$ est la vitesse de groupe de l'onde acoustique à la fréquence porteuse ω , et $\tau(\omega)$ est le temps caractéristique d'atténuation, dépendant de la fréquence, et qui incorpore à la fois l'absorption (prise en compte avec le temps caractéristique $\tau_a(\omega)$) et la diffusion (prise en compte avec le temps caractéristique $\tau_s(\omega)$), avec la relation $\tau^{-1}(\omega) = \tau_a^{-1}(\omega) + \tau_s^{-1}(\omega)$. Cette équation (2.15) est valable pour un paquet d'onde, c'est à dire lorsque ω est petit devant $1/\tau_m$. Notons qu'un possible étalement du paquet d'onde HF, causé par la dispersion de vitesse de groupe, est négligé dans l'équation (2.15). L'indice "b" dans l'équation (2.15) indique que cette équation est valable seulement pour des paquets

d'ondes HF qui se propagent balistiquement. Les ondes diffusées sont supposées se propager de façon diffusive tel que leur transport d'énergie est décrit par une équation de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{\omega d} \rangle = D(\omega) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle W_{\omega d} \rangle - \frac{1}{\tau_a(\omega)} \langle W_{\omega d} \rangle + \frac{1}{\tau_s(\omega)} \langle W_{\omega d} \rangle \quad , \quad (2.16)$$

où l'indice “ d ” est utilisé pour désigner la densité d'énergie acoustique qui est diffusée et provenant du champ acoustique cohérent HF, et $D(\omega)$ désigne le coefficient de diffusion de l'énergie de l'onde HF. Ce coefficient de diffusion est égal à $D = c_e l^*/3$, où c_e est la vitesse de propagation de l'énergie, qui est définie comme le rapport du flux d'énergie sur la densité d'énergie, et l^* est le libre parcours moyen de transport (ou la distance que les ondes doivent parcourir avant que leur direction de propagation soit complètement rendue aléatoire) [Pag95, Sch97]. Il apparait que dans les milieux fortement diffusants, la vitesse de l'énergie c_e diffère légèrement de la vitesse de groupe c_g [Sch97]. Pour cette analyse, le coefficient de diffusion est simplement présenté sous la forme :

$$D \equiv d c_g^2(\omega) \tau_s(\omega) \quad , \quad (2.17)$$

où $d \sim 1$ est une constante sans dimension. Les équations (2.15) et (2.16), en modélisant la transition du régime balistique au régime de diffusion par un simple temps de relaxation (temps caractéristique de diffusion $\tau_s(\omega)$), simplifient largement la réalité, en ignorant en particulier complètement les effets cohérents intermédiaires [Tou00, Der01a]. Cependant, ce modèle est susceptible de décrire correctement les caractéristiques qualitatives de base de l'effet paramétrique étudié.

2.3.2 Solution pour le déplacement démodulé

Les conditions aux limites pour le flux d'énergie au niveau de l'émetteur acoustique placé dans le plan $x = 0$ sont :

$$\begin{aligned} c_g(\omega) \langle W_{\omega b} \rangle &= I_\omega f(t/\tau_m) \quad , \\ D_\omega \frac{\partial}{\partial x} \langle W_{\omega d} \rangle &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.18)$$

où I_ω désigne l'intensité des ondes acoustiques HF émises par un transducteur dans le milieu granulaire et $f(t/\tau_m)$ décrit la modulation de l'intensité du paquet d'onde HF (τ_m est le temps de modulation caractéristique). La seconde condition limite pour l'équation (2.16)

$$\langle W_{\omega d}(x \rightarrow \infty) \rangle \rightarrow 0 \quad , \quad (2.19)$$

est utilisée pour prendre en compte la diminution d'énergie transportée par les ondes HF due à leur absorption. Les solutions des équations (2.15) et (2.16) dans le domaine fréquentiel, soumises aux conditions limites (2.18) et (2.19) sont :

$$\langle \widetilde{W}_{wb} \rangle = \frac{I_\omega}{c_g(\omega)} \tilde{f}(\Omega) e^{\left[-\frac{1}{c_g(\omega)} \left(\frac{1}{\tau(\omega)} - i\Omega\right)\right]} , \quad (2.20)$$

$$\langle \widetilde{W}_{wd} \rangle = \frac{I_\omega}{c_g(\omega) D(\omega) \tau_s(\omega)} \tilde{f}(\Omega) \frac{1}{\frac{1}{c_g^2(\omega)} \left(\frac{1}{\tau(\omega)} - i\Omega\right)^2 - \frac{1}{D(\omega)} \left(\frac{1}{\tau_a(\omega)} - i\Omega\right)} \times \\ \left\{ \frac{\frac{1}{c_g(\omega)} \left(\frac{1}{\tau(\omega)} - i\Omega\right)}{\sqrt{\frac{1}{D(\omega)} \left(\frac{1}{\tau_a(\omega)} - i\Omega\right)}} e^{-\sqrt{\frac{1}{D(\omega)} \left(\frac{1}{\tau_a(\omega)} - i\Omega\right)} x} - e^{-\frac{1}{c_g(\omega)} \left(\frac{1}{\tau(\omega)} - i\Omega\right) x} \right\} , \quad (2.21)$$

où

$$\langle \widetilde{W}_{wb,d} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \langle W_{wb,d} \rangle e^{i\Omega t} dt , \\ \tilde{f}(\Omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\Omega t} dt .$$

L'énergie totale du champ acoustique HF, qui est composée d'une partie balistique et d'une partie diffusive est substituée dans la partie droite de l'équation (2.14) :

$$\langle \overline{W}_\omega \rangle = \langle W_{wb} \rangle + \langle W_{wd} \rangle .$$

La solution de l'équation (2.14) satisfaisant à la condition limite $U_\Omega(x=0) = 0$ au niveau de l'émetteur acoustique HF et à la condition de Sommerfeld à l'infini, a la forme

$$\tilde{U}_\Omega \equiv \tilde{U}_\Omega e^{-i\frac{\Omega}{c_0}x} \equiv \tilde{U}_{\Omega b} + \tilde{U}_{\Omega d} \cong \\ \cong \frac{\Gamma_2 I_\omega}{\rho_0 c_0^2 c_g(\omega)} \tilde{f}(\Omega) \frac{\frac{1}{c_g(\omega)} \left(\frac{1}{\tau(\omega)} - i\Omega\right)}{\frac{1}{c_g^2(\omega)} \left(\frac{1}{\tau(\omega)} - i\Omega\right)^2 + \frac{\Omega^2}{c_0^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{\tau_s(\omega) \left(\frac{1}{\tau_a(\omega)} + \frac{D(\omega)\Omega^2}{c_0^2} - i\Omega\right)} \right\} , \quad (2.22)$$

où $\tilde{U}_\Omega \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} U_\Omega e^{i\Omega t} dt$. En conséquence, \tilde{U}_Ω désigne le spectre de l'impulsion acoustique BF générée par effet paramétrique dans le système de coordonnées se déplaçant à la vitesse des ondes acoustiques BF. La solution (2.22) est valable en dehors du "corps" de l'antenne paramétrique, qui en accord avec (2.21), est limité dans l'espace par les inégalités $x \leq \max\{c_g(\omega)\tau, \sqrt{D(\omega)\tau_a(\omega)}\}$. Il y a deux contributions au signal paramétrique BF (désignées par $\tilde{U}_{\Omega b}$ et $\tilde{U}_{\Omega d}$ dans l'équation (2.22)) venant de la démodulation des champs acoustiques HF balistique et diffusif respectivement. C'est le premier terme entre accolades qui correspond à la contribution du champ acoustique HF balistique. Par conséquent, l'équation (2.22) peut être réécrite comme

$$\tilde{U}_\Omega = \tilde{U}_{\Omega b} + \tilde{U}_{\Omega d} = \tilde{U}_{\Omega b} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{\tau_s(\omega)}}{\frac{1}{\tau_a(\omega)} + \frac{D(\omega)\Omega^2}{c_0^2} - i\Omega} \right\} . \quad (2.23)$$

En accord avec les solutions obtenues (2.22) et (2.23), le spectre du signal démodulé contient des informations sur la dispersion, l'absorption, la diffusion et le régime de diffusion du champ acoustique HF. Quelle est la sensibilité du signal démodulé sur ces différents paramètres, et comment peuvent-ils être obtenus expérimentalement ?

2.4 Analyse des différents régimes

2.4.1 Démodulation de la partie balistique de l'onde de pompage

Dans cette section, la contribution $\tilde{U}_{\omega b}$, excitée par démodulation des ondes balistiques HF est analysée. Les notations suivantes sont introduites,

$$\begin{aligned}\tau_{\pm} &\equiv \tau \left(1 \pm \frac{c_g(\omega)}{c_0} \right) , \\ V_0 &\equiv \frac{\Gamma_2 I_{\omega}}{2\rho_0 c_0^2} ,\end{aligned}\tag{2.24}$$

pour les temps caractéristiques et l'amplitude caractéristique de la vitesse particulière de l'onde acoustique BF. Le spectre de la vitesse particulière $\tilde{V}_{\Omega b} \equiv -i\Omega \tilde{U}_{\Omega b}$ est, avec ces notations, écrit sous la forme :

$$\tilde{V}_{\Omega b} = V_0 \tilde{f}(\Omega) \tau(\omega) \left[\frac{1}{\tau_-(\omega)} \frac{\Omega}{\left(\Omega + i \frac{1}{\tau_-(\omega)} \right)} + \frac{1}{\tau_+(\omega)} \frac{\Omega}{\left(\Omega + i \frac{1}{\tau_+(\omega)} \right)} \right] .\tag{2.25}$$

La séparation du temps caractéristique d'atténuation $\tau(\omega)$ en deux temps caractéristiques $\tau_{\pm}(\omega)$ est due à la présence de la dispersion de vitesse de propagation dans le milieu granulaire ($c_g(\omega) \neq c_0$) [Has99, Mou98]. Dans cette analyse, l'inégalité $\frac{\partial c_g(\omega)}{\partial \omega} < 0$ est supposée vérifiée dans toute l'étendue fréquentielle étudiée. En accord avec l'équation (2.24), $\tau_+(\omega) \geq \tau_-(\omega)$. Il est supposé que qualitativement $\tau_+(\omega)$ se rapproche de $\tau_-(\omega)$ lorsque ω se rapproche de la fréquence de coupure ω_c , et que, par conséquent, $c_g(\omega) \rightarrow 0$. L'analyse est limitée aux modes acoustiques HF propagatifs ($\omega < \omega_c$), les modes évanescents ne sont pas considérés ici.

En supposant qu'en général, l'inégalité $\frac{1}{\tau_+(\omega)} \ll \frac{1}{\tau_-(\omega)}$ a lieu, il est possible de séparer le spectre de l'équation (2.25) en trois régions caractéristiques par des fortes inégalités :

$$\tilde{V}_{\Omega b} \cong V_0 \tilde{f}(\Omega) \times \begin{cases} 2(-i\Omega\tau(\omega)) & \text{si } \Omega \ll \frac{1}{\tau_+(\omega)} \leq \frac{1}{\tau_-(\omega)} , \\ (-i\Omega\tau(\omega)) & \text{si } \frac{1}{\tau_+(\omega)} \ll \Omega \ll \frac{1}{\tau_-(\omega)} , \\ \frac{\tau(\omega)}{\tau_-(\omega)} & \text{si } \frac{1}{\tau_+(\omega)} \leq \frac{1}{\tau_-(\omega)} \ll \Omega . \end{cases}\tag{2.26}$$

Le régime intermédiaire $\frac{1}{\tau_+(\omega)} \ll \Omega \ll \frac{1}{\tau_-(\omega)}$ est absent lorsque l'inégalité $\frac{1}{\tau_+(\omega)} \ll \frac{1}{\tau_-(\omega)}$ n'est pas vérifiée. Si $f(\theta) \equiv f(t/\tau_m)$ est une fonction de modulation de type gaussienne ou lorentzienne par exemple, d'une durée caractéristique τ_m , alors, dans le domaine temporel, les régimes caractéristiques de l'équation (2.26) peuvent être décrits comme

$$V_{\Omega b} \cong V_0 \times \begin{cases} 2\left(\frac{\tau(\omega)}{\tau_m}\right) \frac{\partial f}{\partial \theta} & \text{si } \tau_m \gg \tau_+(\omega) \geq \tau_-(\omega) , \\ \left(\frac{\tau(\omega)}{\tau_m}\right) \frac{\partial f}{\partial \theta} & \text{si } \tau_+(\omega) \gg \tau_m \gg \tau_-(\omega) , \\ \frac{\tau(\omega)}{\tau_-(\omega)} f & \text{si } \tau_+(\omega) \geq \tau_-(\omega) \gg \tau_m . \end{cases}\tag{2.27}$$

Selon l'équation (2.27), le profil de l'impulsion acoustique démodulée BF est fortement dépendant de la relation entre les temps caractéristiques du paquet d'onde HF, τ_m et $\tau_-(\omega)$. Le profil $V_{\Omega b}(\theta)$ de la vitesse particulière associée à l'impulsion BF reproduit l'enveloppe $f(\theta)$ du paquet d'onde HF si $\tau_-(\omega) \gg \tau_m$, et est proportionnel à la dérivée de l'enveloppe $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$ si $\tau_-(\omega) \ll \tau_m$. Le troisième régime de l'équation (2.27) n'existe pas s'il n'y a pas de dispersion de vitesse (lorsque $c_g(\omega) = c_0$, $\tau_-(\omega) = 0$

et l'inégalité $\tau_-(\omega) \gg \tau_m$ n'est jamais vérifiée). C'est le cas pour l'antenne paramétrique dans l'eau en l'absence de bulles d'air [Nov87]. Par conséquent, les dépendances significatives du profil du signal démodulé sur les paramètres du milieu granulaire sont une importante manifestation des propriétés dispersives de ce milieu.

Une observation expérimentale de cet effet peut être utilisée pour extraire des informations sur les paramètres du milieu granulaire. Les conditions suffisantes pour observer la transformation de $V_{\Omega b} \sim \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$ en $V_{\Omega b} \sim f(\theta)$ peuvent être formulées comme suit : supposons pour commencer que $\tau_a(\omega) \ll \tau_s(\omega)$. Avec l'analyse, présentée par la suite, de la contribution $\tilde{V}_{\Omega d}$ venant du champ acoustique diffusif sur le signal total, il apparait que cette contribution est complètement négligeable ($|\tilde{V}_{\Omega d}| \ll |\tilde{V}_{\Omega b}|$) à toutes les fréquences sous la condition $\tau_a(\omega) \ll \tau_s(\omega)$. Pour une analyse qualitative, $\tau_s(\omega)$ est associé à une diffusion de type Rayleigh ($\tau_s(\omega) \sim \frac{1}{\omega^4}$) [Jia99], et une dépendance linéaire en fréquence (fréquence cyclique) est utilisée pour l'absorption $\tau_a(\omega) \sim \frac{1}{\omega}$ [Whi83, Zai99b]. Ensuite, l'inégalité $\tau_a(\omega_{in}) \ll \tau_s(\omega_{in})$ est supposée vérifiée pour une onde acoustique HF si la fréquence initiale ω_{in} est suffisamment éloignée de la fréquence de coupure ω_c ($\omega_{in} \ll \omega_c$). À cette fréquence, la dispersion est considérée faible $c_g(\omega) \simeq c_0$ et donc, $\tau_-(\omega_{in}) \simeq \tau_a(\omega_{in}) \left(1 - \frac{c_g(\omega_{in})}{c_0}\right) \ll \tau_a(\omega_{in})$. En choisissant un nombre suffisamment grand n de périodes d'ondes HF dans le paquet d'onde HF initial $\tau_m^{in} \equiv n \left(\frac{2\pi}{\omega_{in}}\right)$, il est toujours possible de réaliser la condition $\tau_m^{in} \gg \tau_-(\omega_{in})$. Si alors la fréquence de l'onde de pompage ω est augmentée (en gardant n fixé), le temps de modulation τ_m diminue pendant que le temps caractéristique $\tau_-(\omega)$ augmente. En fait, si pour estimation, la relation de dispersion d'une chaîne périodique de billes sphériques est utilisée [Has99] (voir le chapitre 1), alors $c_g(\omega) = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$ et $\frac{\partial \tau_-(\omega)}{\partial \omega} = \frac{\tau_a(\omega)}{|\omega|} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} > 0$ pour toutes les fréquences. Il en découle qu'en augmentant ω jusqu'à une fréquence finale ω_f suffisamment haute, la condition $\tau_m^f = n \left(\frac{2\pi}{\omega_f}\right) \ll \tau_-(\omega_f)$ est réalisée. Selon l'équation (2.27), la transformation du profil démodulé BF de $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$ à $f(\theta)$ devrait être observée autour de la fréquence critique ω_{cr} , où $\tau_m(\omega_{cr}) \sim \tau_-(\omega_{cr}) \sim \tau_a(\omega_{cr}) \left(1 - \frac{c_g(\omega_{cr})}{c_0}\right)$ est vérifiée. L'observation de cette transformation procure des informations sur l'absorption et la dispersion d'ondes acoustiques HF. Il faut noter que la transformation du profil BF est accompagnée par une augmentation significative de l'amplitude du signal proportionnelle à

$$\frac{\tau(\omega_f)}{\tau_-(\omega_f)} \cdot \frac{\tau_m(\omega_{in})}{\tau(\omega_{in})} = \frac{1}{1 - \frac{c_g(\omega_{in})}{c_0}} \frac{\tau_m(\omega_{in})}{\tau(\omega_{in})} \gg 1 \quad .$$

Du point de vue physique, l'intégration additionnelle du signal BF, dans le cas où la dispersion de vitesse est importante, est liée à l'absence de synchronisation entre la source non linéaire du signal démodulé $\frac{\partial}{\partial x} \langle W_{\omega b} \rangle$ (ondes HF qui se propagent à la vitesse $c_g(\omega)$), et le signal démodulé lui-même $V_{\Omega b}$ (qui se propage à la vitesse c_0). En fait, $\tau_-(\omega)$ est une mesure de la séparation temporelle entre les fronts d'ondes acoustiques HF et BF qui est établie avant l'atténuation du paquet d'onde HF (c'est-à-dire au bout d'un temps de l'ordre du temps caractéristique d'atténuation $\tau(\omega)$).

Sur la figure (2.6) est présentée la transformation du signal démodulé prédite par la solution de l'équation (2.25). Les profils obtenus numériquement sont tracés en fonction du temps normalisé t/τ_m pour cinq valeurs de la fréquence normalisée de l'onde de pompage : $\omega/\omega_c = 0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$. La fonction de modulation $f(\theta)$ est une Gaussienne de durée caractéristique égale à 10 périodes de l'onde HF. La constante C du temps caractéristique d'absorption $\tau_a(\omega) = C/\omega$ est choisie pour satisfaire l'inégalité initiale $\tau_m \gg \tau_-$. Pour une fréquence faible d'onde de pompage de 0.01, le profil en ligne

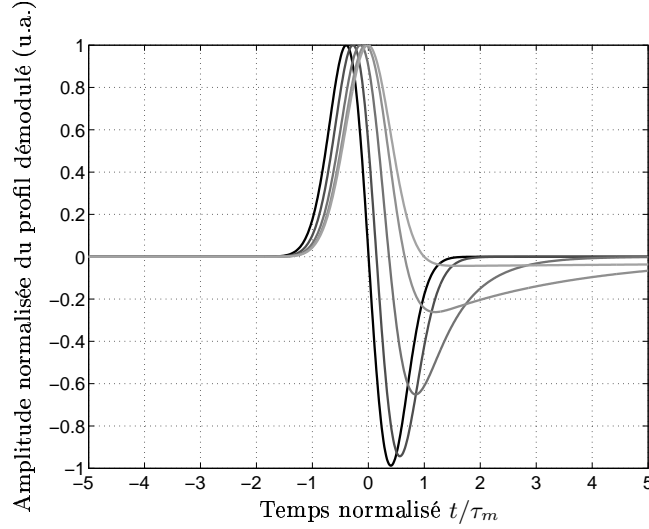


FIG. 2.6: Transformation du signal démodulé prédite par la solution de l'équation (2.25) pour différentes fréquences de pompage : de la courbe noire à la courbe gris clair, $\omega/\omega_c = 0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$.

noire (voir la figure (2.6)) est proportionnel à la dérivée première de la fonction de modulation $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$. Lorsque la fréquence de l'onde de pompage est augmentée, en gardant constant le nombre n de périodes de l'onde HF contenues dans la durée de la modulation, la transition de $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$ à $f(\theta)$ est réalisée : pour la fréquence normalisée d'onde de pompage $\omega/\omega_c = 0.1$ en ligne gris foncé, jusqu'à $\omega/\omega_c = 0.4$ en ligne gris clair. Autour de la fréquence $\omega/\omega_c = 0.6$, le profil est proportionnel à $f(\theta)$. La transition de $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$ à $f(\theta)$ due à la dispersion de vitesse est donc obtenue avec une augmentation de la fréquence de l'onde de pompage HF.

Pour conclure sur l'analyse de la contribution au signal démodulé provenant de la partie balistique du champ acoustique HF, il faut signaler que $\tilde{V}_{\Omega b}$ contient certainement de l'information sur l'atténuation des ondes HF, même dans le domaine de fréquences $\Omega \ll \frac{1}{\tau_-(\omega)}$ (2.26). Cependant, dans l'équation (2.27), la transition du régime $\tau_m \gg \tau_+(\omega)$ au régime $\tau_m \ll \tau_+(\omega)$ est surtout accompagnée par une variation de l'amplitude du signal sans transformation significative de l'enveloppe.

2.4.2 Démodulation de la partie diffusive de l'onde de pompage

La contribution $\tilde{V}_{\Omega d}$ au signal total $\tilde{V}_{\Omega} = \tilde{V}_{\Omega b} + \tilde{V}_{\Omega d}$ par démodulation du champ acoustique HF diffusif diffère de $\tilde{V}_{\Omega b}$ seulement par un multiplicateur spectral additionnel $\frac{\tau_s^{-1}(\omega)}{\left(\tau_a^{-1}(\omega) + D(\omega) \frac{\Omega^2}{c_0^2} - i\Omega\right)}$ (voir le second terme sous l'accolade dans les équations (2.22) et (2.23)). En utilisant la notation (2.17), l'équation (2.23) est réécrite sous la forme :

$$\tilde{V}_{\Omega} = \tilde{V}_{\Omega b} \left\{ 1 + \frac{1}{\frac{\tau_s(\omega)}{\tau_a(\omega)} + d \left(\frac{c_g(\omega)}{c_0} \right)^2 (\Omega \tau_s(\omega))^2 - i\Omega \tau_s(\omega)} \right\}. \quad (2.28)$$

Dans cette équation (2.28), $d \sim 1$ et $\left(\frac{c_g(\omega)}{c_0} \right)^2 \leq 1$. La contribution provenant de la partie diffusive du champ acoustique HF est donc complètement négligeable si $\tau_a(\omega) \ll \tau_s(\omega)$ ou si $\tau_m \sim \frac{1}{\Omega} \ll \tau_s(\omega)$ (le second terme entre accolades de l'équation (2.28) est petit devant 1). Chacune de ces deux conditions

a un sens physique clair : $\tilde{V}_{\Omega d}$ est négligeable si les ondes HF sont absorbées avant d'être diffusées ($\tau_a(\omega) \ll \tau_s(\omega)$), ou si la diffusion n'a pas lieu pendant l'action du paquet d'onde HF sur le milieu non linéaire ($\tau_m \sim \frac{1}{\Omega} \ll \tau_s(\omega)$). Dans les deux cas, la contribution de la partie balistique du champ acoustique HF domine. La condition nécessaire pour observer expérimentalement $\tilde{V}_{\Omega d}$ peut alors être formulée comme $\tau_s(\omega) \leq \tau_a(\omega)$ et $\tau_s(\omega) \leq \frac{1}{\Omega}$. En supposant qu'en général, l'inégalité $\frac{1}{\tau_a(\omega)} \ll \frac{1}{\tau_s(\omega)}$ est vérifiée (parce que $\frac{1}{\tau_a(\omega)} \sim \omega$, alors que $\frac{1}{\tau_s(\omega)} \sim \omega^4$), il est possible de séparer grâce à de fortes inégalités le spectre de l'équation (2.28) en trois régions caractéristiques

$$\tilde{V}_{\Omega} = \tilde{V}_{\Omega b} \times \begin{cases} \frac{\tau_a(\omega)}{\tau_s(\omega)} & \text{si } \Omega \ll \frac{1}{\tau_a(\omega)} \ll \frac{1}{\tau_s(\omega)} \\ \frac{1}{-i\Omega\tau_s(\omega)} & \text{si } \frac{1}{\tau_a(\omega)} \ll \Omega \ll \frac{1}{\tau_s(\omega)} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{\tau_a(\omega)} \ll \frac{1}{\tau_s(\omega)} \ll \Omega \end{cases} \quad (2.29)$$

Dans les deux premières régions spectrales de l'équation (2.29), la contribution du champ diffusif HF domine ($|\tilde{V}_{\Omega d}| \gg |\tilde{V}_{\Omega b}|$), dans la troisième région spectrale, la contribution du champ balistique HF domine ($|\tilde{V}_{\Omega d}| \ll |\tilde{V}_{\Omega b}|$). Dans le domaine temporel, les régimes caractéristiques de (2.29) peuvent être réécrits comme

$$V_{\Omega} = \begin{cases} \frac{\tau_a(\omega)}{\tau_s(\omega)} V_{\Omega b} & \text{si } \tau_m \gg \tau_a(\omega) \gg \tau_s(\omega) \\ \frac{\tau_m}{\tau_s(\omega)} \int_{-\infty}^{\theta} V_{\Omega b}(\theta') d\theta' & \text{si } \tau_a(\omega) \gg \tau_m \gg \tau_s(\omega) \\ V_{\Omega b} & \text{si } \tau_a(\omega) \gg \tau_s(\omega) \gg \tau_m \end{cases} \quad (2.30)$$

Selon l'équation (2.30), il y a une différence importante entre les profils démodulés BF issus de la propagation balistique ou de la diffusion des champs acoustiques HF uniquement si $\tau_a(\omega) \gg \tau_m \gg \tau_s(\omega)$. Cette dernière inégalité donne la condition nécessaire pour observer des signaux BF proportionnels à la primitive de l'enveloppe du paquet d'onde et excités par la démodulation d'ondes HF diffusives.

Du point de vue expérimental, il est important de comprendre i) Comment la transition entre les deux premiers régimes de l'équation (2.30) où la contribution du champ diffusif HF domine, peut être observée. ii) Comment la transition entre les signaux dominés par le champ HF diffusif et les signaux dominés par le champ HF balistique (le premier et le second régime de l'équation (2.30)) peut être observée.

L'inégalité $\tau_a(\omega_{in}) \gg \tau_s(\omega_{in})$ est supposée vérifiée à la fréquence initiale ω_{in} , si celle-ci est suffisamment proche de la fréquence de coupure ω_c [Jia99] (parce que le temps caractéristique de diffusion $\tau_s(\omega) \sim \frac{1}{\omega^4}$ diminue plus vite avec l'augmentation de la fréquence que le temps caractéristique d'absorption $\tau_a(\omega) \sim \frac{1}{|\omega|}$). Lorsque la condition $\tau_a(\omega_{in}) \gg \tau_m^{in} = n_{in} \left(\frac{2\pi}{\omega_{in}} \right) \gg \tau_s(\omega_{in})$ est vérifiée alors, le profil du signal démodulé est proportionnel à $\int_{-\infty}^{\theta} V_{\Omega b}(\theta') d\theta'$. La transition vers le profil $V_{\Omega} \sim V_{\Omega b}(\theta)$ peut alors être effectuée simplement en augmentant la durée τ_m du paquet d'onde HF. Le passage d'un nombre n_{in} de périodes HF contenues dans le paquet d'onde à un nombre final n_f , pour lequel l'inégalité $\tau_m^f = n_f \left(\frac{2\pi}{\omega_{in}} \right) \gg \tau_a(\omega_{in})$ commence à être vérifiée est donc effectué. Comme l'inégalité $\tau(\omega) \leq \min(\tau_a(\omega), \tau_s(\omega))$ est réalisée, alors dans les deux régimes considérés, l'inégalité $\tau_m \gg \tau_+(\omega) \geq \tau_-(\omega)$ est vérifiée. Donc, selon l'équation (2.30), dans les deux régimes $V_{\Omega b} \simeq 2 \left(\frac{\tau(\omega)}{\tau_m} \right) \frac{\partial f}{\partial \theta}$. La transition de $\tau_a(\omega_{in}) \gg \tau_m^{in} \gg \tau_s(\omega_{in})$ à $\tau_m^f \gg \tau_a(\omega_{in}) \gg \tau_s(\omega_{in})$ se manifeste alors par une dérivation du profil initial BF

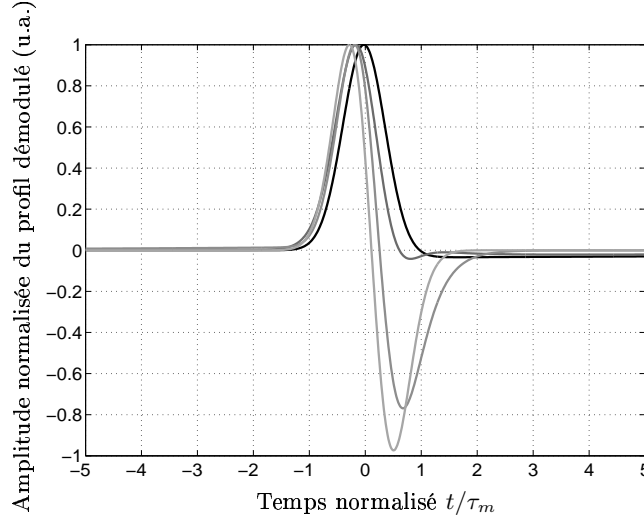


FIG. 2.7: Transformation du signal démodulé prédite par la solution de l'équation (2.28). Les nombres de périodes de sinus HF comprises dans le temps de modulation sont de la ligne noire à la ligne gris clair respectivement : $n = 5, 100, 500, 5000$. $\omega/\omega_c = 0.9$.

$$\begin{aligned} V_{\Omega i} &\simeq V_{\Omega di} \simeq 2f(\theta) \quad , \\ V_{\Omega f} &\simeq V_{\Omega df} \simeq 2 \frac{\tau_a(\omega_{in})}{\tau_{mf}} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad . \end{aligned} \quad (2.31)$$

La transformation du profil du signal démodulé doit être observée pour n_{cr} , satisfaisant la condition $n_{cr} \left(\frac{2\pi}{\omega_{in}} \right) \sim \tau_a(\omega_{in})$ et est accompagnée (voir l'équation (2.31)) par une diminution de l'amplitude du signal proportionnelle à $\frac{\tau_m^f}{\tau_a(\omega_{in})} \gg 1$. L'évaluation de cette transformation donne des informations sur le temps d'absorption $\tau_a(\omega)$ des ondes acoustiques HF. Le rôle du paramètre $\frac{\tau_a(\omega)}{\tau_m}$ dans cette transformation (qui a lieu entre des régimes dominés par la démodulation d'un champ acoustique HF diffusif) est similaire (du point de vue physique) au rôle du paramètre $\frac{\tau_R}{\tau_L}$ dans l'excitation optique d'impulsions acoustiques par génération de plasma électron-trou dans les semi-conducteurs [Gus98]. Ici, τ_L est la durée de l'impulsion laser et τ_R est le temps de recombinaison du plasma électron-trou généré.

Sur la figure (2.7), est présentée la transformation du signal paramétrique prédite par la solution de l'équation (2.28), dans le cas où la contribution au signal démodulé provient principalement du champ HF diffusif. La fonction de modulation est une gaussienne de durée caractéristique $\tau_m = n \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)$. Les vitesses particulières des signaux sont normalisées. La fréquence de l'onde de pompage est choisie proche de la fréquence de coupure, $\omega = 0.9\omega_c$. Les temps caractéristiques de diffusion et d'absorption sont tels qu'ils satisfont l'inégalité $\tau_a(\omega_{in}) \gg \tau_m(\omega_{in}) \gg \tau_s(\omega_{in})$ pour la fréquence initiale ω_{in} et pour le nombre initial de périodes HF dans le paquet d'onde n_{in} . Les constantes C_1 et C_2 de $\tau_a(\omega) = \frac{C_1}{\omega}$ et $\tau_s(\omega) = \frac{C_2}{\omega^4}$ sont donc déterminées grâce à l'inégalité initiale. Lorsque le nombre n de périodes HF est augmenté, la durée du paquet d'onde augmente et finit par devenir supérieure au temps d'absorption $\tau_a(\omega_{in})$. Ceci mène à l'inégalité finale $\tau_m(\omega_f) \gg \tau_a(\omega_{in}) \gg \tau_s(\omega_{in})$, qui correspond à la condition pour observer un profil démodulé proportionnel à $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$. La transition de $f(\theta)$ à $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$ est alors bien obtenue

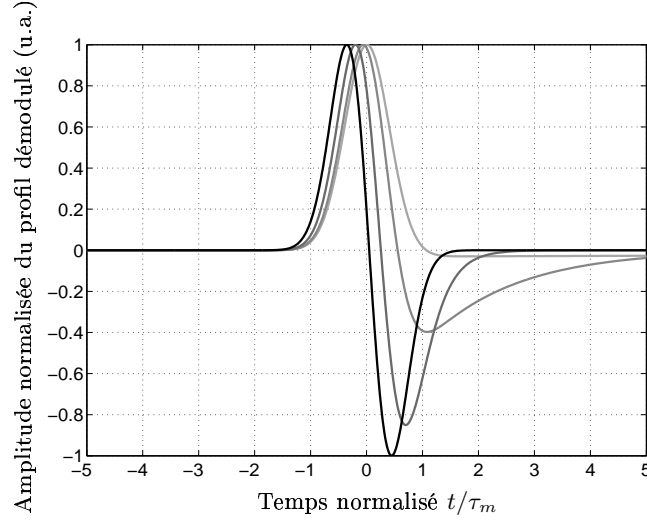


FIG. 2.8: Transformation du signal démodulé prédite par la solution de l'équation (2.28) obtenue avec différentes fréquences : du gris clair au noir, $\omega/\omega_c = 0.9, 0.65, 0.3, 0.1$.

dans cette opération. Pour $n = 5$ le signal est proportionnel à $f(\theta)$ alors qu'il se rapproche de $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$ pour $n = 5000$.

2.4.3 Transition ondes de pompage balistiques \rightarrow diffusives

Pour observer la transition du régime dominé par le transport diffusif de l'énergie des HF vers le régime dominé par le transport balistique des HF, il est possible de commencer avec la condition initiale $\tau_a(\omega_{in}) \gg \tau_m^{in} = n_{in} \left(\frac{2\pi}{\omega_{in}} \right) \gg \tau_s(\omega_{in})$. Mais cette fois-ci, il est utile de diminuer la fréquence de l'onde de pompage ω sans changer le nombre n de périodes HF contenues dans le paquet d'onde ($n = n_{in} = \text{const}$). Dans ce cas, $\tau_a(\omega)$ et $\tau_m(\omega)$ vont augmenter proportionnellement à $\frac{1}{\omega}$, alors que $\tau_s(\omega)$ va augmenter plus rapidement ($\sim \frac{1}{\omega^4}$), ce qui va inévitablement mener au régime $\tau_a(\omega_f), \tau_s(\omega_f) \gg \tau_m^f = n_{in} \left(\frac{2\pi}{\omega_f} \right)$ pour une fréquence finale $\omega = \omega_f$. Selon l'équation (2.30), la transformation du profil démodulé de $V_\Omega = \int_{-\infty}^{\theta} V_{\Omega b}(\theta') d\theta'$ vers $V_\Omega \sim V_{\Omega b}(\theta)$ devrait être observée. Il faut se souvenir qu'avec la condition $\tau_a(\omega_{in}) \gg \tau_m^{in} = n_{in} \gg \tau_s(\omega_{in})$, l'inégalité $\tau_m^{in} \gg \tau_+(\omega_{in}) \gg \tau_-(\omega_{in})$ est vérifiée, et le profil initial est décrit par la première expression de l'équation (2.31). Lorsque la fréquence de pompage est diminuée, il est supposé que pour la fréquence finale ω_f la dispersion est si faible que c'est l'inégalité $\tau_+(\omega_f) \gg \tau_m^f \gg \tau_-(\omega_f)$ plutôt que l'inégalité $\tau_+(\omega_f) \gg \tau_-(\omega_f) \gg \tau_m^f$ qui est vérifiée. Par conséquent, selon l'équation (2.27) et l'équation (2.30), le profil final BF est décrit par

$$V_\Omega^f \simeq V_{\Omega b}^f \simeq \frac{\tau(\omega_f)}{\tau_m^f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (2.32)$$

Les équations (2.30) et (2.32) montrent que la transition du régime dominé par les ondes HF diffusives vers le régime dominé par les ondes HF balistiques, a lieu pour ω_{cr} , qui peut être estimée de $\tau_m^{cr} \equiv n_{in} \frac{2\pi}{\omega_{cr}} \sim \tau_s(\omega_{cr})$. Cette transition se manifeste par la dérivation du signal démodulé et par l'augmentation de son amplitude proportionnelle à $\frac{\tau(\omega_f)}{\tau_m^f} \gg 1$. L'observation de cette transition donne des informations sur le temps caractéristique $\tau_s(\omega)$ des ondes HF.

Sur la figure (2.8), la transformation du signal démodulé due à la transition du régime dominé par la diffusion des ondes HF vers le régime dominé par la propagation balistique des ondes HF est présentée. La condition initiale $\tau_a(\omega_{in}) = C_1/\omega_{in} \gg \tau_m^{in} = n_{in} \left(\frac{2\pi}{\omega_{in}} \right) \gg \tau_s(\omega_{in}) = C_2/\omega_{in}^4$ et la fréquence initiale de l'onde de pompage $\omega_{in} = 0.9\omega_c$, permettent de déterminer les constantes C_1 et C_2 . La fréquence de l'onde de pompage est ensuite diminuée à partir de $\omega_{in} = 0.9\omega_c$ jusqu'à $\omega_f = 0.1\omega_c$ en gardant le nombre n de périodes contenues dans le paquet d'onde HF constant. Ceci mène à la condition finale $\tau_a(\omega_f), \tau_s(\omega_f) \gg \tau_m^f = n_{in} \left(\frac{2\pi}{\omega_f} \right)$. La transition du profil $f(\theta)$ au profil $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}$ est obtenue entre la fréquence de pompage $\omega = 0.9\omega_c$ en ligne grise et la fréquence $\omega = 0.1\omega_c$ en ligne noire.

Cependant, la situation dans laquelle l'état final où l'inégalité $\tau_+(\omega_f) \gg \tau_-(\omega_f) \gg \tau_m^f$ est vérifiée, peut en principe aussi avoir lieu. Dans ce cas, la dérivation du profil BF qui intervient dans la transition entre diffusion et propagation balistique (prédite dans l'équation (2.30)) peut être masquée par l'intégration du profil BF due aux effets de dispersion de vitesse (prédits dans l'équation (2.27)). Il est donc beaucoup plus difficile d'extraire des informations sur les paramètres du milieu lorsque différents effets physiques influencent simultanément le fonctionnement de l'antenne paramétrique. Pour l'analyse de ces situations, il est nécessaire de disposer de modèles plus précis pour la dépendance en fréquence de l'absorption des ondes acoustiques, de la diffusion et de la vitesse de propagation.

Les effets prédits de dérivation ou d'intégration du profil démodulé lorsque les caractéristiques de l'onde de pompage (ω, τ_m) varient, peuvent aussi être masqués par les effets de diffraction qui apparaissent dans une configuration géométrique tridimensionnelle.

Les constantes C, C_1 et C_2 , qui apparaissent dans les expressions des paramètres caractéristiques d'absorption ou de diffusion, peuvent prendre des valeurs différentes selon la configuration du milieu. Par exemple, si la pression statique appliquée sur l'assemblage granulaire est variée, ce sont ces constantes qui sont modifiées pour prendre en compte la variation induite d'absorption ou de diffusion. D'autres facteurs expérimentaux peuvent intervenir dans ces constantes comme l'état de surface des billes par exemple.

2.5 Résultats expérimentaux

2.5.1 Dispositif expérimental

Un dispositif expérimental d'utilisation souple, qui permet de mener plusieurs types d'expériences a été choisi : plusieurs types de matériaux granulaires sont disponibles (assemblages de billes de verre de 2 mm et 0.15 mm de diamètre), différents fluides saturants les billes, différentes contraintes statiques, différentes distances de propagation, différents types d'émetteurs et de récepteurs. Tous ces paramètres variables de l'expérience font qu'il y a un grand nombre de régimes à étudier. Les résultats présentés ici portent sur l'étude d'une configuration particulière : matériau granulaire sec non-consolidé, constitué de billes de verre de diamètre 0.15 mm , avec des contraintes statiques allant de 7.2 Pa à 72 kPa (forces statiques appliquées entre 1 et 10 kN) et pour des distances de propagation allant de 4 à 30 cm . Différentes possibilités offertes dans le choix du transducteur de réception ont été testées : accéléromètre, transducteur ultrasonore piezo-électrique identique à l'émetteur, film PVDF, vibromètre laser. L'émission étant assurée par des transducteurs piezo-électriques longitudinaux de type Panametrics V3052 (réponse large bande centrée sur 100 kHz , de rayon $\sim 2\text{ cm}$).

La connaissance de la réponse en fréquence du transducteur de réception est nécessaire pour avoir accès au signal acoustique présent dans le milieu et pour pouvoir comparer ce dernier au modèle théorique développé dans ce chapitre. Les films PVDF disponibles au laboratoire ont une réponse quasi-plate sur une large gamme de fréquences mais supportent mal la contrainte statique sur leurs électrodes. Pour une utilisation fiable, ce type de récepteur ne peut s'utiliser qu'en surface du matériau granulaire, là où les contraintes statiques sont les plus faibles, lorsque les seules contraintes dans le milieu sont dues à la pesanteur.

L'accéléromètre a une réponse quasi-plate en fréquence mais avec une relativement faible bande passante (de quelques Hz à 20 kHz) et une sensibilité limitée. Il peut être utilisé en surface comme le film PVDF ainsi qu'immergé dans le milieu. Sa réponse peut-être considérée comme fiable tant que la longueur d'onde acoustique est grande devant ses dimensions, ce qui limite son application. Cependant, ce récepteur est très utile pour calibrer des récepteurs plus sensibles et qui sont utilisés dans la suite.

Le transducteur piezo-électrique n'a pas de réponse plate en fréquence. Le domaine d'utilisation en réception (basses fréquences $0 \rightarrow 20\text{ kHz}$) se situe sur le bord inférieur de la bande passante du transducteur. Sa réponse en fonction de la fréquence, dans ce régime, est monotone jusqu'aux très basses fréquences (moins de 500 Hz). L'intérêt de ce transducteur est sa grande sensibilité et la possibilité de l'immerger totalement dans le milieu. Il supporte très bien les pressions statiques importantes. Nous avons utilisé principalement ce transducteur, tout en vérifiant la forme qualitative des signaux avec les autres capteurs. En particulier, plusieurs expériences qualitatives ont montré que la forme temporelle de signaux brefs accélérométriques présentent une dérivée additionnelle par rapport à la forme des signaux issus de ce transducteur. Il est donc assimilé à un capteur de vitesse. Pour des ondes planes, dans un milieu sans dispersion, la pression acoustique p peut s'exprimer en fonction de la vitesse particulière acoustique, $p = \rho c_0 v = \rho c_0 \partial U / \partial t$, ainsi qu'en fonction de la déformation acoustique dans le milieu $p = -\rho c_0^2 \varepsilon$, où ρ et c_0 sont respectivement la densité au repos et la vitesse de propagation acoustique du milieu.

Sur la figure 2.9, le schéma du dispositif expérimental de mesures est présenté. Les signaux générés sont de type sinus HF modulé en amplitude par une fonction Gaussienne (voir début du chapitre 2). Ils sont envoyés à un amplificateur de puissance avec un gain de 53 dB (classe A), puis au transducteur piezo-électrique large bande centré sur 100 kHz dans l'air, par l'intermédiaire d'une boîtier d'adaptation d'impédance pour une meilleure efficacité. Après réception par le transducteur, les signaux BF sont filtrés puis amplifiés par un pré-amplificateur faible bruit (de gain maximum 60 dB). Ces signaux sont

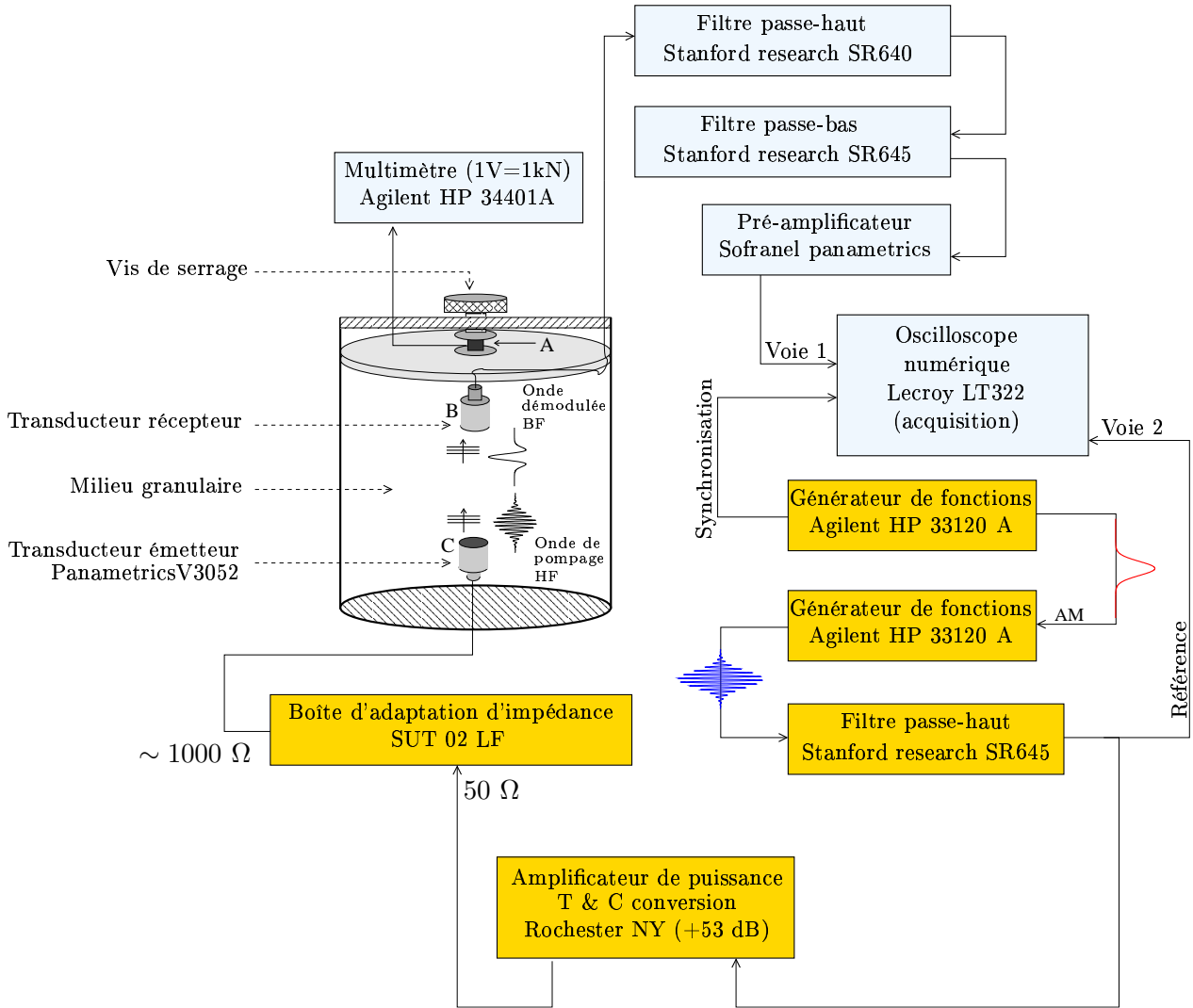


FIG. 2.9: Schéma du dispositif expérimental de mesures. Le capteur de force statique est désigné par A.

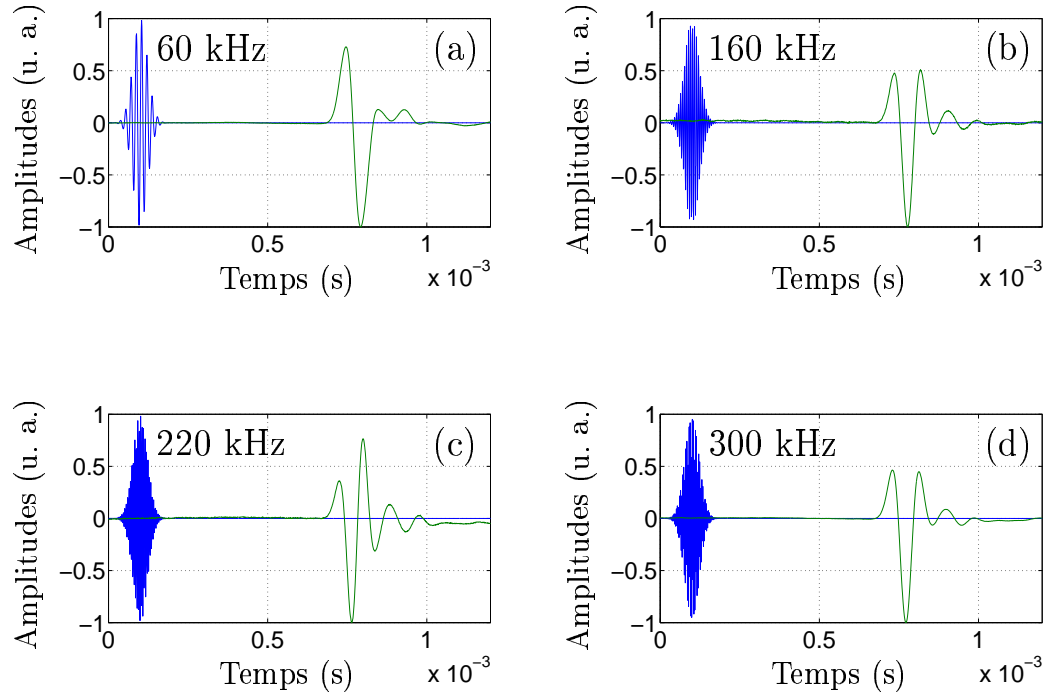


FIG. 2.10: Signaux temporels de pompe et démodulés pour quatre fréquences de pompe différentes. Les amplitudes sont normalisées. La pression statique appliquée vaut environ $P_0 \simeq 10 \text{ kPa}$ et la distance de propagation est de $d \simeq 20 \text{ cm}$.

visualisés avec un oscilloscope numérique avec lequel un moyennage temporel est effectué sur plusieurs impulsions reçues (de l'ordre de 1000). Le spectre d'amplitude peut aussi être observé en remplaçant l'oscilloscope par un analyseur de spectres.

2.5.2 Influence du régime de transport de l'onde de pompe

Une expérience intéressante consiste à modifier le régime de transport de l'onde de pompe (changement de l'absorption, de la diffusion et de la vitesse de propagation) en faisant varier la fréquence du signal émis, sans changer la fonction de modulation en amplitude. Dans cette expérience, la fréquence de pompe initiale est de $f_p = 60 \text{ kHz}$ puis cette fréquence est augmentée par pas de 20 kHz jusqu'à $f_p = 300 \text{ kHz}$. Comme les signaux expérimentaux sont a priori reçus en dehors de la région d'interaction non linéaire, et dans le champ lointain, le signal démodulé BF est diffracté, ce qui implique une dérivation supplémentaire des signaux par rapport au cas unidimensionnel du modèle analytique développé précédemment [Gus93, Nov87].

L'onde de pompe est initialement modulée par une fonction Gaussienne. Ce choix est motivé par la simplicité de l'opération de transformée de Fourier appliquée à une fonction Gaussienne, ainsi que par la forme analytique relativement simple de ses dérivées successives.

Sur la figure 2.10, sont tracés pour quatre fréquences de pompe différentes ($f_p = 60, 160, 220$, et 300 kHz) mais avec une modulation identique, les signaux électriques de pompe et les signaux démodulés associés, retardés du temps de propagation dans le milieu granulaire. Une dérivée première de Gaussienne est pratiquement observée pour le signal démodulé tracé dans la partie (a) de la figure 2.10, correspondant à une fréquence de pompe $f_p = 60 \text{ kHz}$. Pour $f_p = 160 \text{ kHz}$, dans la partie (b)

Fréquence de pompage	Ordre de dérivation	Temps de modulation τ_m	Temps de vol τ_0
60 (kHz)	1,25	0,38 (10^{-4} s)	0,780 (10^{-3} s)
80 (kHz)	1,35	0,37 (10^{-4} s)	0,779 (10^{-3} s)
100 (kHz)	1,45	0,35 (10^{-4} s)	0,776 (10^{-3} s)
120 (kHz)	1,65	0,34 (10^{-4} s)	0,776 (10^{-3} s)
140 (kHz)	1,85	0,34 (10^{-4} s)	0,775 (10^{-3} s)
160 (kHz)	2,05	0,34 (10^{-4} s)	0,778 (10^{-3} s)
180 (kHz)	1,95	0,33 (10^{-4} s)	0,774 (10^{-3} s)
200 (kHz)	2,2	0,33 (10^{-4} s)	0,774 (10^{-3} s)
220 (kHz)	2,7	0,33 (10^{-4} s)	0,776 (10^{-3} s)
240 (kHz)	2,5	0,33 (10^{-4} s)	0,772 (10^{-3} s)
260 (kHz)	1,95	0,33 (10^{-4} s)	0,768 (10^{-3} s)
280 (kHz)	1,95	0,33 (10^{-4} s)	0,770 (10^{-3} s)
300 (kHz)	1,95	0,33 (10^{-4} s)	0,768 (10^{-3} s)

TAB. 2.1: Variation des paramètres de l'ajustement en fonction de la fréquence de pompage

de la figure 2.10, le signal démodulé reçu est proportionnel à la dérivée seconde d'une Gaussienne. Une dérivation du signal démodulé s'est donc produite entre $f_p = 60 \text{ kHz}$ et $f_p = 160 \text{ kHz}$. Si la fréquence de pompage (assimilée ici à la fréquence porteuse ou fréquence centrale du paquet d'onde de pompage) est encore augmentée, une dérivée troisième de Gaussienne apparaît pour $f_p = 220 \text{ kHz}$ (partie (c) de la figure 2.10). Enfin, autour de la fréquence $f_p = 300 \text{ kHz}$, une dérivée seconde est observée (partie (d) de la figure 2.10). Ainsi, deux dérivations suivies d'une intégration du signal démodulé sont observées en augmentant la fréquence de pompage de $f_p = 60 \text{ kHz}$ à $f_p = 300 \text{ kHz}$.

Afin de confirmer cette observation qualitative, un traitement numérique simple a été implémenté. L'ordre de dérivation temporelle partielle p a été utilisé pour obtenir un profil temporel modélisé (dérivée partielle d'une Gaussienne) le plus proche possible des profils temporels expérimentaux. Pour ce faire, la transformée de Fourier de l'enveloppe de modulation peut être écrite sous la forme $S(f) = TF[s(t)] = (-j2\pi f)^p e^{-\frac{f^2 \tau_m^2}{4}} e^{-2\pi j f \tau_0}$ où τ_0 est le temps de vol du signal et τ_m le temps caractéristique de l'enveloppe de modulation (durée caractéristique du signal démodulé). Le paramètre caractéristique τ_m , utilisé dans le calcul de minimisation est en fait un paramètre fixé par la forme du signal de pompage émis. Il est donc a priori connu, variable expérimentalement, et selon le modèle développé précédemment dans ce chapitre, il est à la fois caractéristique du signal de pompage et du signal démodulé. Cependant, d'autres phénomènes, non pris en compte dans le modèle développé sont susceptibles de se manifester, et c'est pour cette raison que ce paramètre est pris comme ajustable.

Les résultats du traitement numérique sont présentés dans le tableau 2.1 pour 12 valeurs de fréquences de pompage entre $f_p = 60 \text{ kHz}$ et $f_p = 300 \text{ kHz}$. Globalement, une faible décroissance des paramètres de temps τ_0 et τ_m est observée. Les variations de l'ordre de dérivation p confirment les observations qualitatives réalisées sur la figure 2.10. Pour $f_p = 60 \text{ kHz}$, l'ordre de dérivation p est proche de 1 (1.25), puis il augmente avec la fréquence de pompage : à $f_p = 160 \text{ kHz}$, $p \simeq 2.05$ (dérivée seconde) jusqu'à $f_p = 220 \text{ kHz}$ où $p \simeq 2.7$ (proche d'une dérivée troisième). Enfin, il diminue pour se stabiliser autour de 2 pour $f_p = 300 \text{ kHz}$ (dérivée seconde).

Sur la figure 2.11, les signaux démodulés issus de trois fréquences de pompage différentes (avec la même enveloppe de modulation) sont superposés afin de comparer facilement leurs temps de vols. Les profils de ces signaux sont proches de la dérivée troisième d'une Gaussienne et ne varient pas de

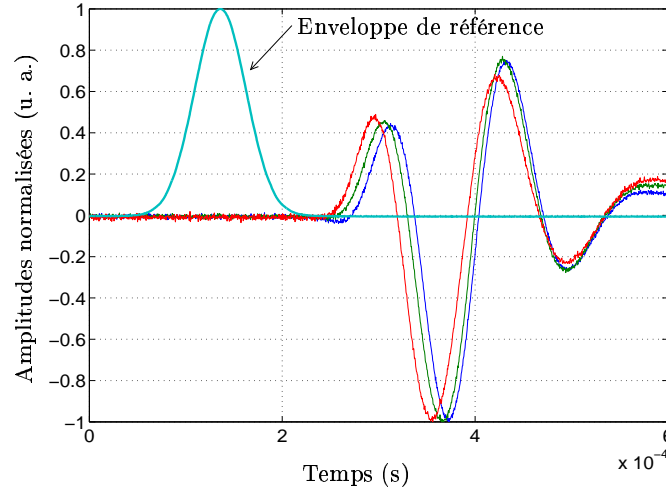


FIG. 2.11: Signaux démodulés pour trois fréquences de pompage différentes : $f_p = 170, 200$ et 230 kHz . Les temps de vol des signaux diminuent lorsque la fréquence de pompage augmente. La modulation du signal de pompage est tracée pour donner une référence. $P_0 \simeq 300 \text{ kPa}$, et $d \simeq 12 \text{ cm}$ (autre configuration expérimentale que celle présentée sur la figure 2.10).

façon importante. Le signal démodulé associé à la fréquence de pompage $f_p = 230 \text{ kHz}$ exhibe un front montant qui arrive en premier, suivi du signal démodulé issu du paquet d'onde à la fréquence $f_p = 200 \text{ kHz}$ puis du signal associé à $f_p = 170 \text{ kHz}$. Ce comportement met bien en valeur la décroissance des paramètres temporels τ_0 et τ_m observée dans le tableau 2.1 (ce résultat étant cependant obtenu dans une configuration expérimentale différente).

Ce comportement de dérivation et intégration du signal temporel démodulé n'a pas été observé précédemment. Il est certainement associé aux divers mécanismes physiques présents dans les milieux granulaires, qui influencent le fonctionnement de l'antenne. Une description qualitative de ces effets et de leur influence sur l'antenne paramétrique est réalisée dans la section suivante en vue d'interpréter les résultats expérimentaux obtenus.

2.6 Analyse et discussion

Une synthèse des effets physiques susceptibles d'influencer le fonctionnement de l'antenne et de leurs conséquences sur le profil du signal démodulé est maintenant nécessaire afin d'interpréter, au moins qualitativement, les transitions observées expérimentalement. Cette synthèse est réalisée ici et résumée dans le tableau 2.2.

La dispersion de vitesse (qui joue un rôle lorsque $\tau_- \gg \tau_m$), grâce à la différence entre la vitesse de groupe du paquet d'onde de pompage $c_g(\omega)$ et c_0 , la vitesse de phase du signal démodulé, peut entraîner une intégration du profil temporel démodulé.

La diffusion des ondes de pompage, d'après le modèle développé précédemment, est susceptible, lorsque $\tau_m \ll \tau_s \ll \tau_a$ passe à $\tau_s \ll \tau_m \ll \tau_a$, de fournir une intégration du signal démodulé.

La diffraction du faisceau d'ondes de pompage (lorsque $(\Omega/\omega)\ell_a \gg \ell_d$, régime de Berkay), entraîne une intégration du signal démodulé en comparaison avec le régime de Westervelt.

L'observation du signal démodulé dans son champ proche peut entraîner une intégration du profil, en comparaison avec une observation largement en dehors de la région d'interaction non linéaire. C'est un effet purement lié au caractère tridimensionnel du faisceau d'onde démodulée.

Finalement, la condition limite pour le signal démodulé, au niveau de la surface de l'émetteur d'ondes de pompage, est considérée comme rigide dans le modèle théorique développé. Pourtant, cette condition n'est pas parfaitement réalisée dans les expériences menées. En effet, le rapport d'impédance acoustique entre le milieu granulaire et la surface du transducteur lui-même n'est pas nécessairement petit dans les configurations expérimentales, et tout particulièrement à basse fréquence. Une surface parfaitement libre entraînerait une dérivation du signal démodulé. Cette condition peut être partiellement réalisée lorsque la longueur de l'antenne se raccourcit, et que les effets cumulatifs de propagation ne sont plus efficaces, devenant comparables à l'effet de la réflexion sur la surface "quasi-libre" pour les ondes de basse fréquence se propageant dans le sens opposé aux ondes de pompage.

Il faut cependant rester prudent dans les éventuelles manifestations de ces effets physiques notamment lorsque plusieurs d'entre eux ont lieu simultanément. Cependant, il arrive que ces effets puissent être distingués sans ambiguïté grâce aux conditions expérimentales pour lesquelles ils interviennent ou non. Par exemple, le régime de diffusion des ondes de pompage est totalement incompatible avec les effets de dispersion associés à des effets cumulatifs d'ondes propagatives.

Dans les expériences présentées précédemment, le comportement de l'antenne dans le régime de Westervelt, sans influence des effets physiques sub-mentionnés, se traduit comme dans l'eau, par une dérivée seconde du profil d'intensité de pompage pour le signal démodulé observé sur l'axe de propagation. C'est le cas dans les expériences présentées pour $f_p \simeq 160 \text{ kHz}$ où $p \simeq 2$. Cela signifie qu'à plus basse fréquence de pompage, le profil est intégré, puisqu'il est proportionnel à la dérivée première d'une Gaussienne. Plusieurs effets physiques sont donc candidats pour cette intégration du signal. Tout d'abord, la diffusion des ondes de pompage, qui apparaît lorsque la longueur d'onde de pompage devient comparable à une dimension caractéristique d'inhomogénéités dans le milieu, n'est pas le bon candidat. La manifestation possible de la diffusion des ondes de pompage sur le signal démodulé a été analysée dans la section 2.4.3. Il est prédit que la diffusion des ondes de pompage mène à l'intégration du profil démodulé lorsque la fréquence de pompage est augmentée (la longueur d'onde de pompage se rapproche de la taille des inhomogénéités du milieu). C'est ici une dérivation du signal qui est observée avec l'augmentation de la fréquence de pompage, contrairement à l'effet possible de la diffusion des ondes de pompage sur le signal démodulé.

Le second candidat pourrait être le passage du régime de Berkay à $f_p = 60 \text{ kHz}$ au régime de Westervelt à $f_p = 160 \text{ kHz}$. Cependant, avec les estimations de la longueur de diffraction à $f_p = 60 \text{ kHz}$ et de la longueur d'absorption de l'onde de pompage, $\ell_d = \pi f_p / c(\omega_p) a^2 \simeq 25 \text{ cm}$ et $20 \text{ cm} \lesssim \ell_a \lesssim 50 \text{ cm}$,

Effet physique considéré	Conditions de manifestation	Effet sur le signal démodulé (sur l'axe)	Fréquence de pompage
Dispersion de vitesse	$\tau_- \gg \tau_m$	intégration	f_p "basses"
Diffusion des ondes de pompage	$\tau_s \ll \tau_m \ll \tau_a$	intégration	f_p "hautes"
Régime de Berklay	$(\Omega/\omega)\ell_a \gg \ell_d$	intégration	f_p "basses"
Champ proche pour le faisceau BF	$\ell_a \sim d$	intégration	f_p "basses"
Condition limite libre en $z = 0$	$\lambda_\Omega \geq \ell_a, \ell$	dérivation	f_p "hautes"

TAB. 2.2: Effets physiques susceptibles d'influencer le fonctionnement de l'antenne paramétrique. Les effets sur le signal démodulé sont donnés relativement au régime de Westervelt classique (sans dispersion, diffusion et pour une condition limite "rigide" en $z = 0$). Le signal de pression est alors proportionnel à la dérivée seconde de la fonction de modulation.

la condition nécessaire $(\Omega/\omega)\ell_a \gg \ell_d$ n'est pas remplie dans les expériences. L'antenne paramétrique opère donc toujours dans le régime de Westervelt dans les expériences présentées.

Le signal démodulé, lorsque la fréquence de pompage est faible (typiquement autour de 60 kHz) peut ne pas être capté dans son champ lointain, c'est à dire peut ne pas être diffracté. En effet, la longueur d'atténuation, principalement associée à l'absorption dans ce cas, n'est pas très inférieure à la distance d'observation ($d \simeq 20 \text{ cm}$). Cependant, la transition observée vers la dérivée seconde d'une Gaussienne, caractéristique d'une observation dans le champ lointain du signal démodulé (régime de Westervelt), est progressive jusqu'à $f_p = 160 \text{ kHz}$. Des estimations expérimentales effectuées pour de faibles distances de propagation (typiquement $3 - 5 \text{ cm}$) ont démontré que la distance caractéristique d'atténuation pour une fréquence de 100 kHz est de seulement quelques centimètres (environ 5 cm , maximum 10 cm selon la configuration). Il est donc difficile de justifier que l'observation du signal démodulé se fait dans son champ proche à ces fréquences de pompage (à $f_p = 100 \text{ kHz}$ l'ordre de dérivation $p \simeq 1.45$), qui sont atténuées bien avant la distance d'observation. Le signal démodulé dispose, dans ce cas, d'une distance de propagation libre suffisante pour être diffracté.

Le dernier candidat susceptible d'expliquer l'intégration qui intervient pour les plus faibles fréquences de pompage est la dispersion de vitesse. En utilisant le modèle de dispersion de vitesse d'une chaîne de billes unidimensionnelle (présenté dans le chapitre 1), il est possible d'estimer les valeurs des paramètres du modèle développé précédemment dans ce chapitre $\tau_-(\omega)$ avec $c_g(\omega)$, c_0 et τ . En prenant une longueur d'absorption ℓ_a estimée de l'ordre de 30 cm , le temps caractéristique d'atténuation (principalement par absorption à ces fréquences) vaut alors $\tau \simeq \ell_a/c_g(\omega) \simeq 0.3/300 = 10^{-3} \text{ s}$, ce qui est de l'ordre de grandeur du temps de modulation τ_m . Cependant, un autre facteur apparaît dans le temps caractéristique $\tau_-(\omega)$, c'est la différence de vitesses $c_0 - c_g(\omega)$ qui est très faible pour les basses fréquences de pompage impliquées ici, la fréquence de coupure du milieu étant $f_c = c_0/(2\pi R) \simeq 500 \text{ kHz}$. Ainsi, le modèle de dispersion d'une chaîne unidimensionnelle de billes ne permet pas d'expliquer l'intégration du signal démodulé observée pour les faibles fréquences de pompage. Cependant, la dispersion de vitesse dans le milieu tridimensionnel peut être influencée par certaines caractéristiques des arrangements granulaires. La première est la possibilité d'une diffusion acoustique qui peut avoir une influence faible sur l'atténuation mais une influence non négligeable sur la vitesse de propagation de l'onde cohérente qui se propage dans le milieu effectif. Comme présenté dans le chapitre 1, cette dif-

fusion est très difficile à caractériser, et donc la loi de dispersion de vitesse difficile à modéliser. La seconde caractéristique des arrangements granulaires, est la présence d'un désordre de contacts. Certains contacts sont plus contraints statiquement (ou pré-contraints) que d'autres et vice-versa. En particulier, environ la moitié des contacts compris dans le milieu granulaire sont dits "faibles", c'est à dire plus faiblement pré-contraints que la moyenne. L'influence de ces contacts faibles, dont le rôle sur les effets non linéaires est important (voir le chapitre 4 et les annexes A et B) est de diminuer la raideur du milieu. Une chaîne unidimensionnelle, constituée de ces contacts faibles répartis tout les trois ou quatre contacts, pourrait être modélisée du point de vue de la dispersion par une périodicité égale à $4 - 8R$ au lieu de $2R$, avec des raideurs équivalentes plus faibles (associées aux contacts faibles) et des masses plus élevées $2 - 4 m$, associées aux groupes de billes fortement pré-contraintes entre elles et intervenant faiblement dans l'élasticité effective du milieu. Ces trois nouveaux facteurs, périodicité du réseau, raideur et masse de chaque élément, varient dans le même sens, celui d'augmenter la dispersion de vitesse en basses fréquences, puisque la fréquence de coupure est susceptible d'être diminuée d'un ordre de grandeur. Cette plus grande dispersion de vitesse (plus grande différence entre $c_g(\omega)$ et c_0) autorise, avec les estimations de τ_- correspondantes, l'intégration partiellement réalisée expérimentalement du profil démodulé. Les conditions d'obtention de cette transition sur les paramètres du modèle sont énoncées dans la section 2.4.1. Comme ce processus est cumulatif, les ondes de pompage doivent se propager sur une distance d'accumulation minimum pour que l'effet de la dispersion se manifeste. Si les ondes de pompage sont atténuées avant cette distance d'accumulation, l'intégration associée à la dispersion n'a pas lieu, même si la différence de vitesses de propagation entre sources non linéaires et signal démodulé est de plus en plus importante en augmentant la fréquence de pompage. L'influence de la dispersion de vitesse (intégration du profil démodulé) disparaît donc lorsque l'atténuation HF augmente, i.e. lorsque la fréquence de pompage est augmentée. Ainsi, l'intégration du signal démodulé disparaît lorsque la fréquence de pompage est augmentée de 60 kHz à 160 kHz , ce qui revient à une dérivation.

Une autre observation qui est en accord avec cette interprétation est la diminution du paramètre d'ajustement τ_m lorsque la fréquence de pompage est augmentée pour les plus faibles valeurs de f_p (voir le tableau 2.1). Cet "élargissement" du signal démodulé peut provenir d'un phénomène non pris en compte dans le modèle développé qui est la dispersion de vitesse de groupe. Dans ce cas, le paquet d'onde de pompage peut être modélisé par un temps caractéristique de modulation qui augmente avec la distance de propagation, pour tenir compte de l'étalement spatial de ce paquet au cours de sa propagation à cause de la dispersion de vitesse. L'élargissement du paquet d'onde HF lors de sa propagation implique un élargissement du signal démodulé généré. Cette effet disparaît lorsque la distance d'accumulation nécessaire pour le processus de dispersion n'est plus atteinte par les ondes de pompage, atténuées sur une distance inférieure.

La grande difficulté est de ne pas disposer, dans la littérature, de données expérimentales fiables sur la dispersion de vitesse dans les milieux considérés sur une grande plage de fréquences (typiquement de quelques kHz à 150 kHz au moins). Les deux candidats possibles, la dispersion de vitesse et l'observation du signal démodulé dans son champ proche, permettent d'obtenir des informations importantes sur le champ de hautes fréquences grâce à la dérivation du profil démodulé observée lorsque la fréquence de pompage passe de 60 kHz à 160 kHz . Ceci pourra se faire, à terme, par minimisation des erreurs entre le modèle développé (avec la prise en compte de la géométrie tridimensionnelle) et les profils expérimentaux. Les paramètres d'ajustement sont alors (connaissant le temps caractéristique de modulation τ_m , la vitesse de phase à basse fréquence c_0 et le diamètre du transducteur de pompage), le temps caractéristique d'atténuation $\tau(\omega)$ et la vitesse de groupe du paquet d'onde de pompage $c_g(\omega)$.

Entre les fréquences de pompage $f_p = 160 \text{ kHz}$ et $f_p = 220 \text{ kHz}$, une dérivation additionnelle du profil démodulé est observée (voir la figure 2.10 et l'ordre de dérivation du profil démodulé p dans le

tableau 2.1).

Le seul effet permettant d'expliquer cette dérivation additionnelle est, conformément aux éléments collectés dans le tableau 2.2, la condition limite en $x = 0$, à la surface du transducteur de pompage. Dans le modèle présenté dans ce chapitre, cette condition limite est prise "rigide" (condition limite de Neumann, i.e. le déplacement démodulé en $x = 0$ est nul). Cependant, en comparant les impédances acoustiques du milieu de propagation Z (le milieu granulaire) et de la surface du transducteur émetteur Z_0 , il est évident que cette condition limite adoptée dans le modèle n'est pas parfaitement réalisée du point de vue expérimental, surtout aux basses fréquences du signal démodulé considérées ici. Pour simple estimation, $Z = \rho c_0 \simeq 5 \cdot 10^5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ et $Z_0 \simeq 2 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ (lames d'adaptation d'impédance du transducteur piezo-électrique). Lorsque les ondes de pompage pénètrent suffisamment profondément dans le milieu granulaire, l'effet de la condition limite en $x = 0$ peut ne pas être très important sur le signal démodulé à cause des effets non linéaires synchrones cumulatifs qui sont mis en jeu au cours de la propagation vers les x positifs. En effet, le signal démodulé est accumulé dans la direction de propagation des sources non linéaires (x positifs), et la réflexion sur la surface de la partie du signal démodulé qui s'est propagée en premier lieu vers les x négatifs et qui est excitée sans synchronisme devient négligeable. Lorsque les ondes de pompage ne pénètrent pas profondément dans le milieu granulaire, les effets cumulatifs ne peuvent plus prendre place, l'effet de la réflexion sur la surface émettrice, et donc de la condition limite en $x = 0$ devient important. Autrement dit, lorsque la fréquence de pompage augmente, la longueur caractéristique d'atténuation (par absorption et diffusion) des ondes de pompage, diminue, et l'influence de la condition limite en $x = 0$ est de plus en plus importante. Une condition limite "libre" en $x = 0$ (condition de Dirichlet, contraintes de l'onde démodulée nulles) entraîne une dérivation du signal démodulé sur l'axe de propagation [Gus93]. Pour $f_p = 220 \text{ kHz}$, l'ordre de dérivation (voir le tableau 2.1) est de 2.7, ce qui correspond presque à une dérivation supplémentaire du profil démodulé par rapport à $f_p = 160 \text{ kHz}$ pour laquelle $p \simeq 2$. Entre ces deux fréquences de pompage, la région des sources non linéaires est encore raccourcie, ce qui inhibe les effets cumulatifs de génération du signal démodulé. La région source devient quasi-surfacique, et se limite au voisinage du transducteur émetteur.

Enfin, entre $f_p = 220 \text{ kHz}$ et $f_p = 300 \text{ kHz}$, une intégration est observée, ou du moins, un retour à une dérivée seconde de Gaussienne pour le profil démodulé [Tou02a]. A 300 kHz , la longueur d'onde de pompage est de l'ordre de 1 mm , c'est à dire environ dix fois supérieure au rayon des billes. Les inhomogénéités du milieu associées à l'arrangement désordonné des billes sont donc de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Le phénomène de diffusion des ondes de pompage, déjà mis en évidence expérimentalement [Jia99], est donc susceptible d'être responsable de l'intégration observée, conformément aux prédictions théoriques de ce chapitre (section 2.4.3). Si le paramètre τ_m est pris de l'ordre de $0.5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ comme dans les expériences présentées, le paramètre caractéristique d'absorption τ_a doit lui être très supérieur pour permettre l'observation de l'intégration du profil démodulé, ce qui implique $\tau_a \gtrsim 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Ceci correspond à une longueur caractéristique d'absorption, de l'ordre de 10 cm avec $c_g \simeq 200 \text{ m/s}$. Le paramètre caractéristique de diffusion τ_s doit quant à lui être très inférieur à τ_m , ce qui implique $\tau_s \lesssim 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, et une longueur caractéristique de diffusion $\ell_s \lesssim 1 \text{ mm}$. Ces estimations confirment bien que l'atténuation des ondes de pompage, pour ces hautes fréquences, est principalement associée à la diffusion.

Il faut noter, que parmi les différents phénomènes qui peuvent influencer le profil du signal démodulé, peu sont amenés à se manifester par une intégration du signal démodulé lorsque la fréquence de pompage est augmentée. Le passage du régime de Berktaÿ au régime de Westervelt se manifeste par une dérivation du signal démodulé. Le passage de l'observation en champ proche à l'observation en champ lointain qui est susceptible d'arriver lorsque la fréquence de pompage est augmentée se manifeste aussi par une dérivation. L'influence de la condition limite en $z = 0$ pour le signal démodulé considérée

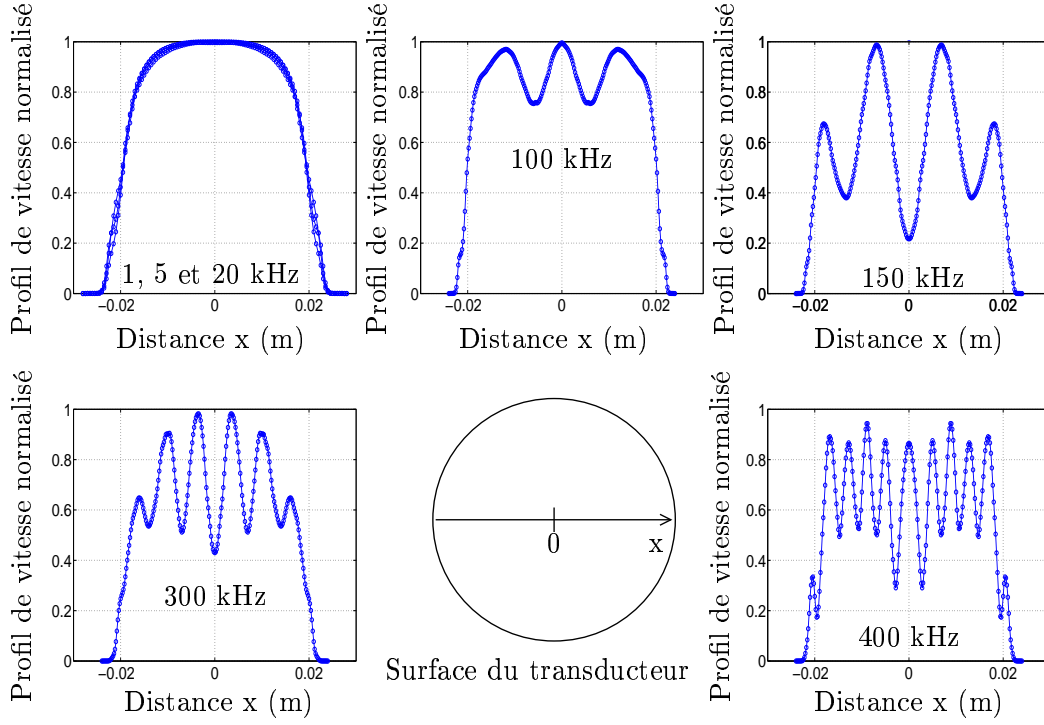


FIG. 2.12: *Profils de vitesse sur le transducteur émetteur pour différentes fréquences de pompage.*

dans le modèle a aussi le même sens de variation, une dérivation du signal démodulé est obtenue lorsque la fréquence de pompage est augmentée. La dispersion de vitesse est susceptible d'impliquer une intégration avec l'augmentation de la fréquence de pompage. Cependant, aux fréquences de pompage à laquelle se situe cette transition (intégration), les distances de pénétration des ondes de pompage sont très faibles ($\sim 1 - 2 \text{ cm}$), ce qui interdit complètement l'accumulation nécessaire aux phénomènes de dispersion pour se manifester sur le signal démodulé.

Par conséquent, dans l'état actuel de cette recherche, seule la transition balistique \rightarrow diffusion dans le transport des ondes de pompage permet d'expliquer l'intégration du signal temporel démodulé en accord avec le modèle développé dans ce chapitre. Dans les fluides homogènes, ce type de transition (intégration) de profil temporel du signal démodulé, lorsque la fréquence de pompage est augmentée n'a jamais été observée.

Une étude numérique de modélisation de l'antenne paramétrique tridimensionnelle sur la base du modèle développé dans ce chapitre a été réalisée en collaboration avec V. Aleshin [Tou02b]. Un des résultats issu de cette étude a montré que dans la configuration expérimentale utilisée, le profil de vitesse à la surface du transducteur émetteur (modèle V3052) n'a pas d'influence notable sur la forme du signal démodulé. Par l'intermédiaire de la puissance rayonnée, l'amplitude du signal démodulé est influencée, mais en aucun cas la forme du profil démodulé. Sur la figure 2.12 sont tracés différents profils de vitesse pour différentes fréquences de pompage. Ces profils obtenus expérimentalement ont été implémentés dans le code numérique développé lors de cette étude par V. Aleshin. Il est intéressant de noter que le profil de vitesse à basses fréquences ($1 - 20 \text{ kHz}$) est pratiquement constant, comme attendu. En considérant les transducteurs réciproques, ceci permet de s'assurer que la directivité en réception ne varie pas sur l'ensemble des fréquences du signal démodulé ($1 - 15 \text{ kHz}$). De plus, l'influence des dimensions de la membrane réceptrice du transducteur sur le profil du signal démodulé a été

numériquement testée. Les profils démodulés obtenus numériquement pour un transducteur ponctuel et avec le transducteur utilisé dans les expériences menées sont identiques. En effet, le rayon de la membrane réceptrice est le plus souvent inférieur à la longueur d'onde du signal démodulé.

2.7 Conclusion et perspectives

Un modèle de base pour l'antenne paramétrique dans les milieux granulaires a été développé. Il prend en compte la dispersion de vitesse, l'absorption et la diffusion acoustique qui peuvent prendre place dans les milieux désordonnés. Les hypothèses énoncées ont pour but de permettre un développement analytique poussé et ainsi de dégager les comportements de base de cette antenne paramétrique dans un tel milieu. Des transitions dans le profil démodulé, reçu sur l'axe de propagation, associées à des dérivations ou des intégrations selon le sens de variation des paramètres caractéristiques sont prédites. Ce modèle utilise des dépendances simples en fréquence pour l'absorption et la diffusion ainsi que pour la dispersion de vitesse. Il souffre de la méconnaissance de ces effets physiques linéaires, difficiles à étudier dans les milieux granulaires. Cependant, ce modèle offre un point de départ prometteur pour une modélisation numérique dans laquelle la géométrie tridimensionnelle du problème pourrait être prise en compte. Certaines hypothèses simplificatrices peuvent aussi être éliminées, comme le type de non-linéarité (uniquement quadratique ici), comme l'absence de dispersion ou d'absorption pour l'onde démodulée, ou comme l'absence d'effets de cohérences des ondes de pompage diffusées.

Du point de vue expérimental, trois transitions successives du profil démodulé avec l'augmentation de la fréquence de pompage ont été observées pour la première fois (deux dérivations et une intégration). Un traitement numérique simple permet de confirmer ce comportement. Les principales limitations expérimentales qui n'autorisent pas la mise en place des transitions opérées dans la partie théorique de ce chapitre sont associées à la dimension finie du récipient utilisé et aux caractéristiques du transducteur récepteur. Les variations de fréquence de démodulation s'en trouvent limitées : cette fréquence ne peut pas être trop basse à cause des réflexions sur les parois du récipient et à cause de la très faible efficacité du transducteur récepteur en-dessous de 500Hz . Cette fréquence est limitée aussi par l'atténuation dans le milieu qui empêche la propagation sur une longue distance des ondes de haute fréquence. Les résultats de cette première étude expérimentale sont ensuite analysés afin d'interpréter les transitions observées du profil démodulé. Les phénomènes physiques susceptibles d'influencer le processus d'auto-démodulation et leurs effets sur le signal démodulé sont synthétisés. Ces phénomènes sont ensuite discutés, et ceux intervenants dans les transitions observées sont identifiés. La première dérivation du profil démodulé, obtenue en augmentant la fréquence de pompage, est potentiellement associée à deux phénomènes : au passage de l'observation de l'onde démodulée en champ proche à son observation en champ lointain à cause de l'augmentation de l'atténuation des ondes de pompage, et à l'influence de la dispersion de vitesse qui disparaît lorsque la distance d'accumulation nécessaire à se phénomène pour se manifester est limitée par l'atténuation des ondes de pompage. La seconde dérivation obtenue, se superposant éventuellement à la première pour les fréquences intermédiaires, est attribuée au rôle de la condition limite à la surface du transducteur de pompage (en $x = 0$) pour l'onde démodulée. Le rôle de cette condition limite qui n'est pas parfaitement rigide expérimentalement, devient important lorsque la distance de pénétration des ondes de pompage diminue et que les phénomènes de synchronisme disparaissent. Enfin, la dernière transition obtenue, correspondant à une intégration du signal démodulé avec l'augmentation de la fréquence de pompage est associée sans ambiguïté possible à la transition balistique \rightarrow diffusion dans le transport des ondes de pompage, au vu des phénomènes physiques répertoriés ici. Cette nouvelle observation confirme la prédiction théorique de la transition balistique \rightarrow diffusion dans le transport des ondes de pompage effectuée dans ce chapitre.

Un travail est en cours, dans lequel le profil de vitesse sur le transducteur émetteur est pris en compte, le caractère tridimensionnel, la réponse en fréquence précise du transducteur récepteur [Tou02b]. Les développements théoriques possibles sont la prise en compte du phénomène de clappement sur la non-linéarité mise en jeu, ou encore la prise en compte des ondes de cisaillement, de l'anisotropie de contraintes présente dans le milieu ou du caractère évanescent des ondes de pompage.

Ces aspects, parfois dans des cadres plus particuliers, font l'objet des études menées et présentées dans les chapitres suivants.

Bibliographie

- [Bar01a] C. Barrière et D. Royer, “*Diffraction effects in the parametric interaction of acoustic waves : application to measurements of the nonlinearity parameter B/A in liquids*”, IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr. **48**(6), 1706-1715, (2001).
- [Bar01b] C. Barrière, X. Jacob et D. Royer, “*Nonlinear parameter measurement in liquids and gels using the parametric interaction*”, 17th International Congress on Acoustics, Rome, Italie, 2-7 Septembre (2001).
- [Bel92] I.Y. Belyaeva, L.A. Ostrovsky and E.M. Timanin, “*Experiments on harmonic generation in grainy media*”, Acoust. Lett. **15**(11), 221-224 (1992).
- [Bel93] I.Y. Belyaeva, V.Y. Zaitsev et L.A. Ostrovsky, “*Nonlinear acousto-elastic properties of granular media*”, Acoust. Phys. **39**, 11-15 (1993).
- [Bog92] A.N. Bogdanov et A.I. Skvortsov, “*Nonlinear shear waves in granular medium*”, Sov. Phys. Acoust. **38**, 224-226 (1992).
- [Buc97] M.J. Buckingham, “*Theory of acoustic attenuation, dispersion, and pulse propagation in unconsolidated granular materials including marine sediments*”, J. Acoust. Soc. Am. **102**, 2579-2596 (1997).
- [Buc00] M.J. Buckingham, “*Wave propagation, stress relaxation, and grain-to-grain shearing in saturated, unconsolidated marine sediments*”, J. Acoust. Soc. Am. **108**, 2796-2810 (2000).
- [Cos99] C. Coste et B. Gilles, “*On the validity of Hertz contact law for granular material acoustics*”, Eur. Phys. J. B **7**, 155-168 (1999).
- [DeB00] M. de Billy, “*Experimental study of sound propagation in a chain of spherical beads*”, J. Acoust. Soc. Am. **108**(4), 1486-1495 (2000).
- [Der01a] A. Derode, A. Tourin, et M. Fink, “*Random multiple scattering of ultrasound. I. Coherent and ballistic waves*”, Phys. Rev. E **64**, 036605 (2001).
- [Der01b] A. Derode, A. Tourin, et M. Fink, “*Random multiple scattering of ultrasound. II. Is time reversal a self-averaging process ?*”, Phys. Rev. E **64**, 036606 (2001).
- [Fen93] S. Feng, D. Sornette, “*Can sound be localized in granular media ?*”, Phys. Lett. A **184**, 127-130 (1993).
- [God90] J. D. Goddard, “*Nonlinear elasticity and pressure dependent wave speeds in granular media*”, Proc. R. Soc. Lond. A **430**, 105-131 (1990).
- [Gus93] V.E. Gusev et A.A. Karabutov, *Laser Opto-acoustics*, (AIP, New-York), (1993).
- [Gus98] V.E. Gusev, “*Parametric acoustic source in a medium with hysteretic quadratic non-linearity*”, Acoust. Lett. **22**(2), 30-34 (1998).
- [Guy90] E Guyon, S Roux, A Hansen, D Bideau, J -P Troadec et H Crapo, “*Non-local and non-linear problems in the mechanics of disordered systems : application to granular media and rigidity problems*”, Rep. Prog. Phys. **53**, 373-419 (1990).
- [Gra91] I.S. Graham, L. Piché, D. Levesque et M. Grant, Phys. Rev. B **43**, 10769 (1991).
- [Has99] 35E. Hascoët, H. J. Herrmann et V. Loreto, “*Shock propagation in a granular chain*”, Phys. Rev. E **59**(3), 3202-3206 (1999).
- [Hen01] R. Hennino, N. Trégourès, N. M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, B. A. van Tiggelen et R. L. Weaver, “*Observation of equipartition of seismic waves*”, Phys. Rev. Lett. **86**, 3447 (2001).
- [Jac03] X. Jacob, C. Barrière et D. Royer, “*Acoustic nonlinearity parameter measurements in solids using the collinear mixing of elastic waves*”, Appl. Phys. Lett. **82**(6), 886-888 (2003).
- [Jia99] X. Jia, C. Caroli et B. Velicky, “*Ultrasound propagation in externally stressed granular media*”, Phys. Rev. Lett. **82**(9), 1863-1866 (1999).

- [Jia01] X. Jia, "Ultrasound propagation in disordered granular media", in *Granular State*, edited by S. Sen and H. Hunt, Mat. Res. Soc. Symp. Proc., vol. 627, (2001).
- [Joh54] K. L. Johnson, "Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces", Proc. R. Soc. London., Ser. A **230**, 531-548 (1954).
- [Joh85] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, (Cambridge University Press, Cambridge), (1985).
- [Lan86] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, *Theory of elasticity*, (Pergamon Press, Oxford), (1986).
- [Lis01] S.A. Lisina, A.I. Potapov et V.F. Nesterenko, "A nonlinear granular medium with particle rotation : a one-dimensional model", Acoust. Phys. **47**, 598-606 (2001).
- [Liu92] C.H. Liu et S.R. Nagel, "Sound in sand", Phys. Rev. Lett. **68**, 2301-2304 (1992).
- [Liu93] C.H. Liu et S.R. Nagel, "Sound in a granular material : Disorder and nonlinearity", Phys. Rev. B **48**, 15646-15650 (1993).
- [Mat99] A.L. Matveev, V.E. Nazarov, A.I. Potapov, I.A. Soustova et A.M. Sutin, "Experimental investigation of nonlinear acoustic scattering in a layer of dry sand", Acoust. Phys. **45**, 483-487 (1999).
- [Min49] R. D. Mindlin, "Compliance of elastic bodies in contact", J. Appl. Mech. **71**, 259-268 (1949).
- [Mou98] A. Moussatov, L. Guillon, C. Ayrault et B. Castagnède, "Experimental study of the dispersion of ultrasonic waves in sandy sediments", C.R. Acad. Sci. Paris, série IIb, **326**, 433-439 (1998).
- [Mou01] A. Moussatov, B. Castagnède et V.E. Gusev, "Observation of nonlinear interaction of acoustic waves in granular materials : demodulation process", Phys. Lett. A **283**, 216-223 (2001).
- [Nau99] K.A. Naugolnykh, S.V. Egerev, I.B. Esipov et K.A. Matveev, "Nonlinear propagation of laser-generated sound pulses in a water and granular medium", J. Acoust. Soc. Am. **106**, 3135-3142 (1999).
- [Nau98] K. A. Naugolnykh et L. A. Ostrovsky, *Nonlinear Waves Processes in Acoustics*, (Cambridge University Press, Cambridge), (1998).
- [Nov87] B.K. Novikov, O.V. Rudenko et V.I. Timochenko, *Nonlinear Underwater Acoustics*, (ASA, New-York), (1987).
- [Pag95] J.H. Page, H.P. Schriemer, A.E. Bailey et D.A. Weitz, "Experimental test of diffusion approximation for multiply scattered sound", Phys. Rev. E **52**, 3106-3114 (1995).
- [Pag96] J. H. Page, Ping Sheng, H. P. Schriemer, I. Jones, Xiaodun Jing et D. A. Weitz, "Group velocity in strongly scattering media", Science **271**, 634-637 (1996).
- [Pot96] A.V. Potapov et C.S. Campbell, "Propagation of elastic waves in deep vertically shaken particle beds", Phys. Rev. Lett. **77**, 4760-4763 (1996).
- [Roy96] D. Royer et E. Dieulesaint, "Ondes élastiques dans les solides. Tome I - Propagation libre et guidée.", (Collection Enseignement de la physique, Masson, Paris), (1996).
- [Sch97] H.P. Schriemer, M. L. Cowan, J. H. Page, P. Sheng, Z. Liu et D. A. Weitz "Energy velocity of diffusing waves in strongly scattering media", Phys. Rev. Lett. **79**, 3166-3169 (1997).
- [Tou00] A. Tourin, M. Fink et A. Derode, "Multiple scattering of sound", Waves in Random Media **10**, R31 (2000).
- [Tou02] V. Tournat, V. E. Gusev et B. Castagnède, "Influence of ballistics to diffusion transition in primary wave propagation on parametric antenna operation in granular media", Phys. Rev. E **66**, 041303 (2002).
- [Tou03] V. Tournat, B. Castagnède, V. E. Gusev et P. Béquin, "Self-demodulation acoustic signatures for nonlinear propagation in glass beads", C. R. Mécanique **331**, 119-125 (2003).
- [Tou01a] V. Tournat, V.E. Gusev, et B. Castagnède, "Parametric antenna in granular media", International Congress of Acoustics, Rome, Septembre (2001).
- [Tou01b] V. Tournat, A. Moussatov, B. Castagnède, et V.E. Gusev, "Parametric antenna in a granular medium", Ultrasonics International, Delft, Juillet (2001).
- [Tou02a] V. Tournat, V.E. Gusev, et B. Castagnède, "Antenne paramétrique dans les milieux granulaires : influence du régime de transport des ondes de pompage de haute fréquence", Congrès Français d'Acoustique, Lille, Avril (2002).
- [Tou02b] V. Tournat, V. Aleshin, V. Gusev et B. Castagnède, "Experimental and numerical study on parametric antenna operation in granular materials", 16th International Symposium on Nonlinear Acoustics, Moscou, Août (2002).
- [Wea82] R.L. Weaver, "On diffuse waves in solid media", J. Acoust. Soc. Am. **71**, 1608-1609 (1982).

- [Wea95] R.L. Weaver et W. Sachse, “*Diffusion of ultrasound in a glass bead slurry*”, J. Acoust. Soc. Am. **97**(4), 2094-2102 (1995).
- [Whi83] J.E. White, *Underground Sound Application of Seismic Waves*, (Elsevier, Amsterdam), (1983).
- [Zai99a] V.Y. Zaitsev, A.B. Kolpakov et V.E. Nazarov, “*Self-demodulation of acoustic pulses in river sand : Experiment*”, Acoust. Phys. **45**, 202-208 (1999).
- [Zai99b] V.Y. Zaitsev, A.B. Kolpakov et V.E. Nazarov, “*Self-demodulation of acoustic pulses in river sand. Theory*”, Acoust. Phys. **45**, 305-310 (1999).
- [Zha99] Z.Q. Zhang, I. P. Jones, H. P. Schriemer, J. H. Page, D. A. Weitz et P. Sheng, “*Wave transport in random media : the ballistic to diffusive transition*”, Phys. Rev E **60**, 4843-4850 (1999).
- [Zim92] S.V. Zimenkov, V.E. Nazarov et J. S. Wood, “*Nonlinear acoustical effects in sand*”, Sov. Phys. Acoust. **38**(6), 612-613 (1992).
- [Zve99] V. A. Zverev, “*How the idea of a parametric acoustic array was conceived*”, Acoust. Phys. **45**(5), 611-618 (1999).

Chapitre 3

Antenne paramétrique dans une chaîne granulaire 1-D

3.1 Introduction

Bien que les premiers résultats théoriques sur la propagation non linéaire d'ondes dans les chaînes granulaires unidimensionnelles aient été obtenus il y a plus de 20 ans [Nes83], il reste encore une activité soutenue dans ce domaine de recherche [Cos97, Cos99, Liu92, Liu93, Has99, deB99]. L'intérêt porté à ces études est lié au fait qu'un grand nombre de matériaux naturels ou technologiques sont composés de grains et qu'ils peuvent être testés expérimentalement par les ondes élastiques (sismique, acoustique sous-marine pour le diagnostic des sédiments, contrôle industriel en temps réel, etc ...). Les ondes élastiques ont déjà démontré de fortes aptitudes dans le contrôle ou l'évaluation de ces matériaux granulaires [Whi83], cependant, une meilleure compréhension de la propagation acoustique dans ce type de milieux est nécessaire, en particulier lorsque la diffusion, la dispersion de vitesse, l'absorption ou les effets non linéaires apparaissent.

Le comportement élasto-dynamique des milieux granulaires tridimensionnels constitue un problème complexe en raison du nombre important de paramètres méconnus associés par exemple à la distribution statistique des formes de billes, de leurs tailles, associés aux matériaux impliqués, aux contacts entre les billes, à la géométrie de l'assemblage ou encore à la structure des chaînes de force [Cos99]. Ces caractéristiques peuvent mener à des phénomènes spécifiques lors de la propagation d'ondes élastiques, comme la génération de bruit observée dans [Liu92] ou par exemple à une grande sensibilité de la propagation acoustique aux variations de température [Liu93]. A l'inverse, un problème réaliste plus simple pour les études expérimentales et théoriques sur la propagation d'ondes élastiques consiste à considérer une chaîne uni-dimensionnelle (1-D), faite de billes sphériques élastiques et identiques en contact. D'une certaine manière, le fait de chercher à modéliser la propagation d'ondes élastiques dans les matériaux granulaires par la propagation dans un système périodique 1-D peut paraître assez rudimentaire. Cependant, il est communément admis que les résultats fondamentaux obtenus dans une géométrie uni-dimensionnelle peuvent être utiles pour l'analyse des problèmes tri-dimensionnels (3-D) [Has99, Cos99]. De plus, Les caractères discrets et non linéaires du milieu 1-D étudié dans ce chapitre, représentent un problème fondamental d'intérêt pour l'étude générale des réseaux non linéaires [deB99, Mar71].

La propagation dans les assemblages granulaires est fondamentalement non linéaire en raison de l'interaction non linéaire entre deux billes élastiques adjacentes, interaction qui peut être décrite grâce à la loi de Hertz [Joh85, Lan86]. La validité de ce modèle pour une chaîne de billes a été

testée expérimentalement [Cos99]. Un des premiers travaux sur les effets non linéaires dans les chaînes granulaires 1-D a porté sur la propagation de solitons [Nes83]. Depuis, des études théoriques, numériques et expérimentales sur la collision de solitons [Man00], la rétro-diffusion [Has00], et la détection d'impuretés grâce aux solitons [Sen98] ont été réalisées. En parallèle, d'autres effets non linéaires ont été observés et modélisés dans des configurations tri-dimensionnelles comme l'auto-action d'une onde acoustique [Zai99a], la génération d'harmoniques ou encore l'auto-démodulation d'amplitude dans le sable [Bel94, Zai99b, Zai99c].

De même, les propriétés linéaires pour décrire la propagation d'ondes élastiques dans une configuration de chaîne 1-D ont donné lieu à de nombreuses investigations comme la dispersion de vitesse [deB99], la diffusion par des inhomogénéités [Has00], la propagation d'ondes de cisaillement ou d'ondes de Rayleigh [deB99]. Dans ce dernier cas, les ondes de Rayleigh sont obtenues avec une excitation longitudinale à hautes fréquences, telles que la longueur d'onde de la perturbation élastique dans le matériau constituant les billes soit petite devant le diamètre des billes. Pour ces hautes fréquences, d'autres modes acoustiques de propagation comme les modes de respiration par exemple, évoqués au chapitre 1, peuvent aussi apparaître [Hla02]. À plus basses fréquences, une caractéristique remarquable, parmi celles prédites et observées, est la transition des modes longitudinaux propagatifs vers des modes évanescents lorsque la fréquence des ondes dépasse la fréquence de coupure de la chaîne [Bri56] (voir le chapitre 1). Cette fréquence de coupure dépend de quelques paramètres identifiés : la contrainte statique longitudinale appliquée à la chaîne, le rayon des billes et les propriétés élastiques du matériau constituant les billes (module d'Young et coefficient de Poisson). Il est aussi possible d'obtenir la valeur de la fréquence de coupure à partir de la vitesse des ondes élastiques à basse fréquence (qui dépend des paramètres précédents) et du rayon des billes. Par conséquent, la fréquence de coupure est une source d'information sur les propriétés de la chaîne granulaire.

Une des difficultés expérimentales avec les ondes évanescentes provient du fait que ces ondes sont atténuées sur une distance de quelques diamètres de billes, et par conséquent, elles sont difficiles à détecter. La méthode proposée ici permet d'obtenir des informations sur le mode de transport d'ondes de hautes fréquences (propagatif / évanescent), en utilisant l'effet non linéaire d'auto-démodulation (antenne paramétrique en émission). Cet effet d'acoustique non linéaire, décrit au début du chapitre 2, est brièvement rappelé ici : des ondes intenses (ondes de pompage ou ondes primaires), modulées en amplitude et de hautes fréquences (HF) sont tout d'abord rayonnées dans le milieu non linéaire de propagation. Grâce à la non-linéarité quadratique du milieu, différentes composantes spectrales, par exemple ω_1 et ω_2 , peuvent interagir. Cette interaction produit les nouvelles composantes spectrales $\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1$, $2\omega_2$, et aussi la fréquence différence $\omega_1 - \omega_2$. Cette fréquence différence est significativement plus basse que ω_1 et ω_2 si $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$. Comme l'atténuation (provenant de l'absorption et de la diffusion) augmente avec la fréquence, seule la composante spectrale de basse fréquence (BF) $\omega_1 - \omega_2$ peut se propager sur une grande distance. De plus, la directivité de ce signal BF rayonné de façon non linéaire profite de la haute directivité des ondes primaires HF [Nov87].

Pour l'analyse menée ici, il est important de constater que la fréquence différence, générée par l'interaction de deux ondes de pompage évanescents, peut être propagative et peut transporter de l'information sur ces modes évanescents en dehors de leur région de localisation. Il faut aussi noter que l'analyse est menée pour des ondes faiblement non linéaires, et que la non-linéarité quadratique ne représente qu'une faible perturbation de la solution linéaire. Dans ce cas, les effets comme la "supra-transmission" non linéaire dans la bande interdite grâce aux modes non linéaires n'est pas attendue [Gen02]. Cependant, la transmission d'énergie dans la chaîne est possible grâce aux effets non linéaires, si l'excitation de modes évanescents mène à l'excitation de modes propagatifs. Dans ce qui suit, il est démontré que le signal démodulé BF, pouvant a priori être transmis expérimentalement dans les chaînes de billes, est sensible à la transition entre des ondes primaires propagatives et des ondes

primaires évanescences. Cette transition se manifeste au moins par une forte décroissance de l'efficacité du processus non linéaire d'auto-démodulation.

Des simulations numériques sont réalisées pour des signaux démodulés ne contenant qu'une seule fréquence, puis pour des signaux démodulés de large bande, dans le but de décrire des situations réalisables dans les conditions expérimentales : les signaux mono-fréquentiels peuvent être analysés à l'aide d'un voltmètre vectoriel (lock-in amplifier) pour accéder à leur amplitude et à leur phase, et les signaux démodulés de large bande peuvent être visualisés dans le domaine temporel par un oscilloscope ou dans le domaine fréquentiel par un analyseur de spectres [Tou03]. L'influence de la dispersion de vitesse, de l'absorption et de la distance d'observation sur le signal démodulé est analysée pour des signaux mono-fréquentiels puis large bande.

Ce travail fait suite à une précédente étude, présentée au chapitre 1 portant sur l'influence de la transition entre des ondes de pompage propagatives et des ondes de pompage diffusives sur le signal démodulé BF [Tou02]. Seuls les modes propagatifs étaient considérés, c'est-à-dire les ondes de fréquences inférieures à la fréquence de coupure du milieu. Les conditions de manifestation de la transition balistique \rightarrow diffusion dans le transport des ondes de pompage sur la forme du signal démodulé ont été exprimées à l'aide de paramètres caractéristiques comme le temps caractéristique de diffusion, le temps caractéristique d'absorption et les vitesses de groupe et de phase. Il est démontré que la transition balistique \rightarrow diffusion se manifeste par une intégration temporelle du profil démodulé BF. Les expériences préliminaires menées, qui nécessitent un approfondissement, sont compatibles avec cette prédiction [Tou03].

Le but de l'étude menée dans ce chapitre 3 est de compléter la théorie développée dans le précédent chapitre et dans [Tou02], en prenant en compte les modes évanescents. La comparaison du comportement de l'antenne paramétrique dans une structure mécanique discrète et non linéaire avec le comportement dans un milieu élastique continu mais multi-diffusant est aussi l'un des objectifs de ce chapitre. En particulier, l'intérêt premier de ce travail est de comprendre comment la transition entre ondes de pompage HF propagatives et évanescences se traduit sur le signal démodulé, et si cette transition est différente de celle due au passage entre propagation balistique et diffusion des ondes de pompage.

Dans la section 3.2, l'équation non linéaire du mouvement de la chaîne est tout d'abord établie dans l'approximation quadratique. Ensuite, en utilisant la relation de dispersion de la chaîne pour les modes propagatifs et évanescents, la solution du déplacement démodulé BF provenant de deux fréquences de pompage est présentée.

Dans la section 3.3, l'analyse de ce résultat est menée dans différents cas limites : pour les ondes de pompage propagatives (régime faiblement dispersif et régime fortement dispersif), les ondes évanescences, et en particulier, pour les fréquences de pompage situées au voisinage de la fréquence de coupure. Le comportement de la force non linéaire et le comportement de l'onde démodulée dans la région d'interaction non linéaire sont aussi brièvement analysés.

La section 3.4 présente les résultats numériques pour deux types de signaux de pompage le premier étant composé seulement de deux fréquences et le second étant un paquet d'onde Gaussien (une onde sinusoïdale modulée en amplitude par une fonction Gaussienne). L'influence de la dispersion (pour les ondes de pompage propagatives) sur l'amplitude et le profil du signal démodulé est étudiée. Ensuite des résultats sur l'influence de la transition entre ondes de pompage propagatives et évanescences sont présentés. Enfin, la comparaison de cette transition avec la transition balistique \rightarrow diffusion du chapitre précédent est discutée.

3.2 Théorie

3.2.1 Principe de l'antenne paramétrique en émission

Grâce à la non-linéarité (ou anharmonicité) du réseau, une onde HF monochromatique intense à la fréquence ω crée une force non linéaire statique moyenne. Ce phénomène a lieu par exemple dans le cadre de la théorie de la conduction de la chaleur avec la présence de phonons thermiques aboutissant à la dilatation dans les solides. Lorsque l'onde porteuse monochromatique HF est lentement modulée en amplitude, la force non linéaire est elle aussi lentement modulée. Par conséquent, une onde BF est générée de façon non linéaire dans le milieu, à la fréquence de la modulation.

Il est possible d'utiliser différents profils de modulation d'amplitude. Traditionnellement, la modulation sinusoïdale d'une onde porteuse harmonique est décrite par $(1 + m \cos(\omega_m t)) \cos(\omega t)$, où m est l'indice de modulation, ω_m est la fréquence de modulation ω est la fréquence porteuse. Le spectre d'un tel signal comporte trois composantes, ω , $\omega - \omega_m$ et $\omega + \omega_m$. Un autre type de modulation peut être obtenu grâce au phénomène de battement entre deux hautes fréquences proches ω_1 et ω_2 . Dans ce cas, le spectre du signal de pompage n'est seulement composé que de deux fréquences ω_1 et ω_2 , et la modulation d'amplitude du signal total est la conséquence des variations de phases relatives entre les deux signaux individuels, étant alternativement en phase et en opposition de phase.

Dans un milieu avec une non-linéarité quadratique dans la relation contrainte - déformation (correspondant au terme cubique dans la relation énergie potentielle - déformation), le principe de superposition n'est plus applicable, et des ondes qui ont des fréquences différentes peuvent interagir. Ce phénomène est communément dénommé le mélange de fréquences.

Pour deux hautes fréquences proches émises ω_1 et ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$), le principe de conservation de l'énergie implique que les fréquences $\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1$, $2\omega_2$, 0 et $\omega_1 - \omega_2$, qui est une onde de basse fréquence (si $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$), sont générées. Comme l'atténuation augmente avec l'augmentation de la fréquence, seule la composante BF peut se propager sur une longue distance et éventuellement être captée. Par conséquent, le signal primaire HF émis, composé de ω_1 et ω_2 , est auto-démodulé de façon non linéaire vers un signal à la fréquence $\Omega = \omega_1 - \omega_2$.

Un autre régime possible de génération BF par l'antenne paramétrique [Nov87] est le mode impulsif, dans lequel un paquet d'onde primaire HF est émis. Pour la simplicité des développements analytiques, des fonctions de modulation Gaussienne de l'onde porteuse sont considérées dans la suite. La dépendance du déplacement mécanique d'ondes de pompage en fonction du temps, ainsi que le spectre associé peuvent être modélisés par :

$$U(t) = A \cos(\omega_0 t) e^{-\frac{t^2}{2\tau_m^2}}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{U}(\omega) = A \tau_m \sqrt{2\pi} e^{-(\omega - \omega_0)^2 \frac{\tau_m^2}{2}}, \quad (3.2)$$

où τ_m est le temps caractéristique de modulation du paquet d'onde initialement émis et ω_0 la fréquence centrale de ce paquet. Dans ce cas, le mélange de fréquences a lieu entre chaque paire de fréquence du spectre Gaussien. Par conséquent, la solution $U_\Omega^{gauss}(n, t, \omega_0, \tau_m)$ (où n est la coordonnée d'espace) pour la démodulation du paquet d'onde Gaussien HF est en relation avec la solution $U_\Omega(n, t, \omega_0, \Omega)$ décrivant l'excitation de la fréquence différence $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, dans le cas d'un mélange de deux fréquences. L'intégration suivante doit être réalisée :

$$U_\Omega^{gauss}(n, t, \omega_0, \tau_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_\Omega(n, t, \omega_0, \Omega) e^{-\Omega^2 \tau_m^2} d\Omega, \quad (3.3)$$

où $\omega_0 = \omega_1$ et $\omega_0 - \Omega = \omega_2$ et où $e^{-\Omega^2 \tau_m^2}$ est proportionnel au spectre de l'enveloppe de l'intensité de pompage. Dans la section "Analyse" 3.3 de ce chapitre, le déplacement démodulé $U_\Omega(n, t, \omega_0, \Omega)$

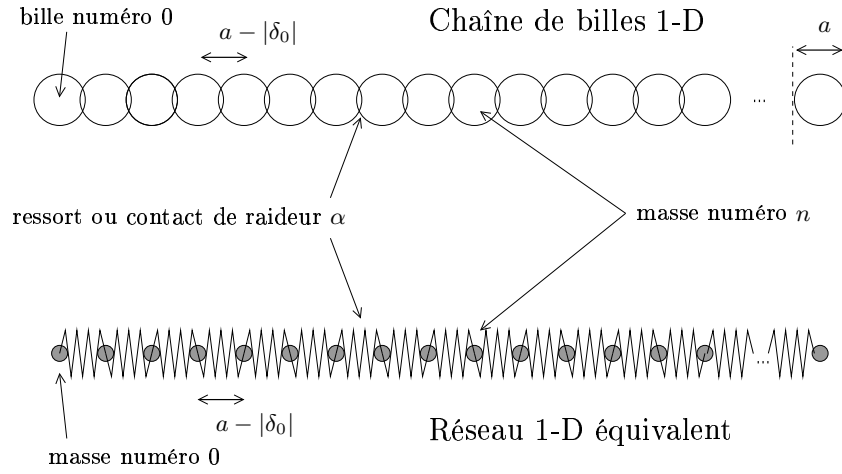


FIG. 3.1: Schéma du problème considéré.

sera exprimé grâce à une fonction de transfert $G(\omega_0, \Omega)$. Par conséquent, un changement dans la dépendance en Ω de $G(\omega_0, \Omega)$ va se traduire par une modification de la forme temporelle du profil démodulé $U_{\Omega}^{gauss}(n, t, \omega_0, \tau_m)$.

3.2.2 Approximation quadratique de l'équation du mouvement

Le problème considéré porte sur la propagation d'ondes élastiques dans une chaîne semi-infinie 1-D de sphères identiques, comme il est illustré sur la figure 3.1. Dans la suite, seuls les phénomènes qui ont lieu à des échelles de temps beaucoup plus longues que le temps de vol d'une onde acoustique dans le matériau constituant les billes sur un diamètre de bille (c'est à dire à des échelles de temps inférieures à $10^{-6}s$ pour des billes de verre de diamètre $a = 2mm$), sont considérés. Les phénomènes étudiés peuvent donc être considérés comme quasi-statiques pour la déformation à l'échelle d'une bille, mais ceci n'implique pas que la longueur d'onde d'une onde élastique dans la chaîne soit grande devant le diamètre des billes a (la vitesse de propagation acoustique dans la chaîne est très inférieure à la vitesse de propagation acoustique dans le matériau constituant les billes). Ainsi, le caractère discret de la chaîne est toujours considéré. Comme les déformations élastiques sont concentrées au voisinage du lieu de contact entre deux billes, il est possible de modéliser la chaîne granulaire 1-D comme une chaîne de masses ponctuelles $m = \pi a^3 \rho / 6$ (où ρ est la densité du matériau constituant les billes) attachées entre elles par des ressorts identiques non linéaires ayant une relation force - déplacement de Hertz [Lan86, Joh85] :

$$F_0 + F_d \propto (|\delta_0| + \delta_d)^{3/2} \quad , \quad (3.4)$$

où F_0 est la force statique appliquée sur la chaîne, F_d est une petite force dynamique superposée, δ_0 est la déviation statique de la distance inter-billes à partir de a (caractéristique de la chaîne non chargée avec $F_0 = 0$) et δ_d ($|\delta_d| \ll |\delta_0|$) est la perturbation associée à l'onde acoustique. En considérant le cas $F_0 \gg F_d$, la relation (3.4) peut être développée en séries :

$$F_0 + F_d \propto |\delta_0|^{3/2} + \frac{3}{2} |\delta_0|^{1/2} \delta_d + \frac{3}{8} |\delta_0|^{-1/2} \delta_d^2 + \dots \quad . \quad (3.5)$$

Le premier terme non linéaire de ce développement contient δ_d^2 , qui est quadratique. Ce développement de la relation force - déformation entre deux billes peut aussi être obtenu à partir de la relation énergie

potentielle - déplacement pour la totalité de la chaîne ou du réseau 1-D équivalent (voir figure 3.1) :

$$E_p = E_{p0} + \frac{\alpha}{2!} \sum_n [U(n) - U(n+1)]^2 + \frac{\beta}{3!} \sum_n [U(n) - U(n+1)]^3 + \dots \quad (3.6)$$

Dans cette équation, $U(n)$ représente le déplacement de la masse (ou bille) numéro n , α est la constante élastique linéaire d'un contact et β est paramètre de non-linéarité quadratique du même contact. Le terme cubique de l'équation (3.6) correspond à la non-linéarité quadratique de l'équation (3.5). De cette relation non linéaire, il est possible de déduire l'équation du mouvement non linéaire au second ordre en coordonnées discrètes pour chaque masse de la chaîne :

$$m \frac{\partial^2 U(n)}{\partial t^2} = F(n) = - \frac{\partial E_p}{\partial U(n)} = \alpha [U(n+1) - 2U(n) + U(n-1)] - \frac{\beta}{2} [U(n+1) - 2U(n) + U(n-1)] [U(n+1) - U(n-1)] \quad (3.7)$$

Les solutions de cette équation du mouvement non linéaire pour le phénomène d'auto-démodulation sont obtenues avec la méthode des approximations successives [Nov87].

3.2.3 Relation de dispersion pour les ondes acoustiques dans la chaîne

En premier lieu, les propriétés linéaires d'un réseau régulier 1-D sont rappelées, et en particulier, la relation de dispersion. Ces propriétés linéaires concernant la propagation d'ondes élastiques dans les réseaux uni-dimensionnels de masses et de ressorts identiques ont été beaucoup étudiées [Bri56]. La relation de dispersion est obtenue de l'équation du mouvement linéaire de la chaîne $\forall n$ (la partie linéaire de l'équation (3.7)) :

$$m \frac{\partial^2 U(n)}{\partial t^2} - \alpha [U(n+1) - 2U(n) + U(n-1)] = 0 \quad (3.8)$$

Les modes propres de la chaîne infinie sont obtenus sous la forme $U(n) = \tilde{A}(\omega) e^{i\omega t - ikan}$, où ω est la pulsation, $\tilde{A}(\omega)$ l'amplitude spectrale, et k le nombre d'onde complexe. En substituant la dernière forme de $U(n)$ dans l'équation (3.8), la relation de dispersion bien connue, rencontrée au chapitre 1, est obtenue :

$$\omega^2 = \frac{4\alpha}{m} \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) \quad (3.9)$$

En introduisant les notations $\omega_c = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ pour la pulsation de coupure, c'est-à-dire la fréquence maximum des ondes propagatives, et $k_c = \frac{\pi}{a}$ pour le nombre d'onde (réel) maximum des ondes propagatives, il est possible de réécrire la relation (3.9) sous la forme suivante :

$$\sin^2 \left(\frac{\pi k}{2 k_c} \right) = \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \quad (3.10)$$

Des solutions purement réelles pour le nombre d'onde k existent seulement si $|\omega| \leq \omega_c$. Dans ce cas, la relation de dispersion est :

$$\frac{\pi k}{2 k_c} = \pm \arcsin \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (3.11)$$

où le signe “+” correspond aux ondes se propageant vers la droite (direction positive) et le signe “−” correspond aux ondes se propageant vers la gauche (direction négative). En ne considérant que les ondes se propageant vers la droite, la relation de dispersion est obtenue :

$$k = \frac{2}{\pi} k_c \arcsin \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad \text{pour} \quad -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \quad . \quad (3.12)$$

Si $|\omega| > \omega_c$, l'équation (3.10) n'a pas de solution purement réelle. Il est nécessaire de considérer le nombre d'onde k sous la forme $k = k' + ik''$ où k' et k'' sont réels. Alors, à l'aide de l'équation (3.10), il est possible d'écrire une expression valable pour le nombre d'onde évanescent, sous la forme :

$$k = k_c \text{sign}(\omega) - i \frac{2}{\pi} k_c \text{arcosh} \left(\frac{|\omega|}{\omega_c} \right) \quad \text{pour} \quad |\omega| > \omega_c \quad . \quad (3.13)$$

Il faut noter que l'équation (3.13) décrit la dispersion des modes évanescents qui sont atténués dans la direction positive, c'est-à-dire lorsque n augmente. La description complète de la relation de dispersion de la chaîne est donnée par la combinaison de l'équation (3.12) et de l'équation (3.13).

3.2.4 Solution pour l'onde auto-démodulée

Une antenne paramétrique émet des signaux de basse fréquence (signaux démodulés) grâce à l'auto-démodulation non linéaire (rectification) d'ondes intenses de hautes fréquences, modulées en amplitude (ondes primaires), et rayonnées en premier lieu dans le milieu. Par conséquent, dans la région d'interaction, il existe une grande différence d'amplitude entre les ondes primaires et l'onde démodulée. En utilisant la méthode des approximations successives, c'est-à-dire en considérant que dans la région d'interaction, les ondes primaires ont une amplitude beaucoup plus grande que les ondes démodulées non linéairement, l'équation au premier ordre d'approximation pour les ondes primaires HF est équivalente à l'équation (3.8), avec la notation $U \equiv U_\omega$ pour désigner le déplacement associé aux ondes primaires intenses. Afin de décrire l'excitation du milieu par deux hautes fréquences, la condition limite suivante, pour la masse numéro 0 située à la limite de la chaîne infinie, est utilisée (voir figure 3.1),

$$U_\omega(n=0, t) = \Re e[A_{\omega_1}(0)e^{i\omega_1 t} + A_{\omega_2}(0)e^{i\omega_2 t}] \quad . \quad (3.14)$$

Dans cette équation, $A_{\omega_1}(0)$ et $A_{\omega_2}(0)$ sont les amplitudes complexes des ondes aux fréquences ω_1 et ω_2 à la limite $n=0$. La solution de l'équation (3.8) satisfaisant cette condition limite et la condition de Sommerfeld à l'infini dans la direction positive est :

$$U_\omega(n, t) = \Re e[A_{\omega_1}(0)e^{i\omega_1 t - ik(\omega_1)an} + A_{\omega_2}(0)e^{i\omega_2 t - ik(\omega_2)an}] \quad , \quad (3.15)$$

où $k(\omega)$ obéit à la relation de dispersion décrite par l'équation (3.12) et l'équation (3.13).

A cause du phénomène de battement entre ω_1 et ω_2 , le signal total est équivalent à un signal HF modulé en amplitude.

Le déplacement démodulé BF U_Ω est obtenu à partir de l'équation au second ordre d'approximation :

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 U_\Omega(n)}{\partial t^2} &= \alpha [U_\Omega(n+1) - 2U_\Omega(n) + U_\Omega(n-1)] = \\ &= \frac{\beta}{2} [U_\omega(n+1) - 2U_\omega(n) + U_\omega(n-1)] [U_\omega(n+1) - U_\omega(n-1)] \quad , \end{aligned} \quad (3.16)$$

où la solution pour U_ω est substituée dans le membre de droite de l'équation (3.7), alors que la contribution de U_Ω aux termes non linéaires est négligée. En ne retenant seulement que les termes à

la fréquence différence $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, il est possible de réécrire le membre de droite de l'équation (3.16) comme :

$$2\beta \Im m \left\{ A_{\omega_1}(0) A_{\omega_2}^*(0) e^{i\Omega t - i[k_1 - k_2^*]an} \left[\cos\left(\frac{k_1 + k_2^*}{2}a\right) - \cos\left(\frac{k_1 - k_2^*}{2}a\right) \right] \sin\left(\frac{k_1 - k_2^*}{2}a\right) \right\} , \quad (3.17)$$

où $k_2 = k(\omega_2)$, $k_1 = k(\omega_1)$ et k_2^* est le complexe conjugué de k_2 . La solution générale de l'équation (3.16) est la somme de la solution générale de l'équation homogène pour les ondes de fréquence Ω se propageant dans la direction positive et d'une solution particulière de l'équation inhomogène :

$$\begin{aligned} U_{\Omega}(n, t, \omega_1, \omega_2) &= \Im m[\underline{U}_{\Omega}(n, \omega_1, \omega_2) e^{i\Omega t}] , \\ \underline{U}_{\Omega}(n, \omega_1, \omega_2) &= C_1 e^{-ik(\Omega)an} + C_2 e^{-i\Delta k an} , \\ C_2 &= \frac{\beta A_{\omega_1}(0) A_{\omega_2}^*(0) \left[\cos\left(\frac{k_1 + k_2^*}{2}a\right) - \cos\left(\frac{k_1 - k_2^*}{2}a\right) \right] \sin\left(\frac{k_1 - k_2^*}{2}a\right)}{2\alpha \left[\sin^2\left(\frac{\Delta k}{2}a\right) - \frac{\Omega^2}{\omega_c^2} \right]} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ici, $\Delta k = k_2^* - k_1$, C_1 et C_2 sont deux constantes. En supposant qu'il y a absence de mouvement BF à la limite $n = 0$, la relation $C_1 = -C_2$ est vérifiée. La solution pour le déplacement démodulé prend alors la forme finale :

$$U_{\Omega}(n, t, \omega_1, \omega_2) = \Im m \left\{ \frac{\beta A_{\omega_1}(0) A_{\omega_2}^*(0) \left[\cos\left(\frac{k_1 + k_2^*}{2}a\right) - \cos\left(\frac{k_1 - k_2^*}{2}a\right) \right] \sin\left(\frac{k_1 - k_2^*}{2}a\right)}{2\alpha \left[\frac{\Omega^2}{\omega_c^2} - \sin^2\left(\frac{\Delta k}{2}a\right) \right]} [1 - e^{i[k(\Omega) - \Delta k]an}] e^{i(\Omega)t - ik(\Omega)an} \right\} . \quad (3.19)$$

3.3 Analyse

Dans cette section, le résultat théorique (3.19) est analysé dans plusieurs cas limites, pour des ondes de pompage propagatives et évanescentes. En premier lieu, la force non linéaire responsable du processus de démodulation est simplifiée, ce qui permet de comprendre ses comportements de base. En dehors de la région d'existence de cette force, l'analyse du déplacement démodulé issu d'ondes de pompes propagatives est ensuite menée. La sous-section 3.3.2 comporte l'analyse qualitative du comportement du signal démodulé à l'intérieur de la région des sources non linéaires propagatives. Pour finir, l'analyse du déplacement démodulé issu d'ondes de pompes évanescentes est réalisée.

3.3.1 Analyse de la force non linéaire

En accord avec l'équation (3.7), l'expression de la force non linéaire, quadratique en déplacement, agissant au niveau de la bille (ou masse) numéro n s'écrit :

$$F_{NL}(n) = -\frac{\beta}{2}[U(n+1) - 2U(n) + U(n-1)][U(n+1) - U(n-1)] \quad (3.20)$$

L'expression suivante du déplacement au niveau de la bille n ,

$$U(n) = \Re \left\{ A_{\omega_1}(0)e^{i\omega_1 t - ik(\omega_1)an} + A_{\omega_2}(0)e^{i\omega_2 t - ik(\omega_2)an} \right\} \quad (3.21)$$

solution de l'équation de propagation linéaire (3.8) dans le cas de deux fréquences d'excitation ω_1 et ω_2 , est reportée dans l'expression (3.20). En ne retenant que les termes à la fréquence différence $\Omega = \omega_2 - \omega_1$, la force non linéaire (3.20) se réécrit sous la forme suivante :

$$F_{NL} = 2\beta \Re \left\{ iA_{\omega_1}(0)A_{\omega_2}^*(0)e^{i\Omega t - i(k_1 - k_2^*)an} \left[\cos\left(\frac{k_1 - k_2^*}{2}a\right) - \cos\left(\frac{k_1 + k_2^*}{2}a\right) \right] \sin\left(\frac{k_1 - k_2^*}{2}a\right) \right\} \quad (3.22)$$

Lorsque ω_1 tend vers ω_2 ($\Omega = \omega_2 - \omega_1$ tend vers 0), cette force se simplifie sous la forme :

$$F_{NL} \simeq -2\beta \Re \left\{ A_{\omega_1}(0)A_{\omega_2}^*(0)e^{i\Omega t} \right\} e^{-2|k''(\omega)|an} [\cos(k'(\omega)a) - \cosh(|k''(\omega)|a)] \sinh(|k''(\omega)|a) \quad (3.23)$$

où $k'(\omega) \simeq k'(\omega_1) \simeq k'(\omega_2)$ et $k''(\omega) \simeq k''(\omega_1) \simeq k''(\omega_2)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde de l'onde de pompage de haute fréquence $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$. Dans la limite basse fréquence $\omega \ll \omega_c$ et atténuation faible $|k''|/|k'| \ll 1$, une forme encore plus simple de la force non linéaire responsable du processus de démodulation apparaît :

$$F_{NL} \simeq \frac{a\beta}{\ell_a(\omega)} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \Re \left\{ A_{\omega_1}(0)A_{\omega_2}^*(0)e^{i\Omega t} \right\} e^{-\frac{an}{\ell_a(\omega)}} \quad (3.24)$$

Cette force non linéaire est proportionnelle au coefficient de non-linéarité quadratique β , à l'inverse de la longueur d'atténuation caractéristique de l'intensité haute fréquence $\ell_a(\omega)$. Cette force décroît avec la distance comme $e^{-\frac{an}{\ell_a(\omega)}}$.

Si les phases des ondes de pompage en $n = 0$ sont prises nulles, les amplitudes complexes $A_{\omega_1}(0)$ et $A_{\omega_2}^*(0)$ sont réelles, et la notation A_1, A_2 est dorénavant utilisée. Si de plus $A_1 = A_2$, le terme $A_1 A_2$ est égal à A^2 où $A = A_1 = A_2$ est l'amplitude d'excitation de l'onde à la fréquence ω_1 et de l'onde à la fréquence ω_2 . Dans ce cas, la force non linéaire (3.24) varie comme l'amplitude de l'onde de pompage au carré A^2 . Le régime BF ($\omega \ll \omega_c$) décrit par l'équation (3.24) est identique au régime 1-D (onde plane) de l'antenne paramétrique dans les milieux homogènes [Nov87].

3.3.2 Analyse du signal démodulé de basse fréquence

L'analyse du déplacement démodulé $U(n)$ de basse fréquence Ω , obtenu sous la forme de l'équation (3.19), est réalisé en premier lieu pour les ondes de pompage HF propagatives et en second lieu pour les ondes de pompage HF évanescentes. En dehors de la région d'excitation, i.e. lorsque le terme $e^{-\frac{an}{\ell_a(\omega)}}$ des équations (3.19) ou (3.24) tend vers 0 (les ondes de pompage sont suffisamment atténuées), la force non linéaire devient négligeable. L'onde démodulée BF est alors entièrement générée et elle se propage librement dans le milieu. Dans ce cas, l'onde démodulée $U(n)$ est égale à une fonction $G(\omega_1, \omega_2)$ multipliée par un terme de phase $[1 - e^{ik(\Omega)an - i\Delta kan}] e^{i\Omega t - ik(\Omega)an} \simeq e^{i\Omega t - ik(\Omega)an}$ qui décrit sa propagation dans le milieu dispersif. Cette fonction $G(\omega_1, \omega_2)$ représente donc une fonction spectrale de transfert décrivant le processus non linéaire d'excitation de la fréquence différence par auto-démodulation. Elle donne l'opportunité de trouver l'amplitude et la phase du signal démodulé à la fréquence $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ à partir de la connaissance des ondes de pompage émises aux fréquences ω_1 et ω_2 .

La fonction $G(\omega_0, \Omega) = G(\omega_1 = \omega_0, \omega_2 = \omega_0 - \Omega)$ peut aussi être utilisée pour l'analyse du cas dans lequel un paquet d'onde HF est utilisé comme signal de pompage. Dans ce cas, en accord avec l'équation (3.3) et la définition de $U_\Omega(n, t, \omega_1 = \omega_0, \omega_2 = \omega_0 - \Omega)$ dans l'équation (3.19), en dehors de la région source ($n \gg 1$),

$$U_\Omega(n \gg 1, t, \omega_0, \tau_m) = \Im \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_0, \Omega) e^{-\Omega^2 \tau_m^2} e^{i\Omega(t - \frac{k(\Omega)}{\Omega} an)} d\Omega \quad . \quad (3.25)$$

Par conséquent, le produit $2\pi G(\omega_0, \Omega) e^{-\Omega^2 \tau_m^2}$ représente le spectre de l'onde démodulée dans le système de coordonnées se déplaçant avec elle, lorsque $n \gg 1$. En d'autres termes, le spectre du signal démodulé peut être obtenu en multipliant le spectre de l'enveloppe d'intensité du paquet d'onde HF $e^{-\Omega^2 \tau_m^2}$ par la fonction $G(\omega_0, \Omega)$. C'est la raison pour laquelle $G(\omega_0, \Omega)$ est appelée fonction spectrale de transfert. Afin de comprendre la dynamique de la génération BF dans la région des sources non linéaires et notamment le rôle de la dispersion de vitesse, le terme de phase complet $[1 - e^{ik(\Omega)an - i\Delta kan}] e^{i\Omega t - ik(\Omega)an}$ sera analysé par la suite. Mais, en premier lieu, une analyse est faite de la seule fonction de transfert $G(\omega_1, \omega_2)$.

Pour l'analyse du processus de démodulation qui suit, les fréquences de pompage ω et le nombre d'onde associé sont normalisés respectivement par la fréquence de coupure ω_c et le facteur $\frac{2}{\pi} k_c$. L'avantage principal d'une telle normalisation, outre la simplification de la notation, est que les vitesses de phase c_ϕ et de groupe c_g sont égales à 1 lorsque la fréquence ω tend vers 0.

Lorsque ces normalisations sont effectuées, la fonction de transfert du processus de démodulation prend la forme générale suivante :

$$G(\omega_1, \omega_2) = \frac{\beta}{2\alpha} A^2 \frac{\{\cos(k_1 - k_2^*) - \cos(k_1 + k_2^*)\}}{\Omega^2 - \sin^2(k_1 - k_2^*)} \sin(k_1 - k_2^*) \quad . \quad (3.26)$$

3.3.2.1 Cas des ondes de pompage propagatives

Dans le cas des ondes de pompage propagatives, à l'inverse des ondes de pompage évanescentes pour lesquelles un développement exact plus poussé de la fonction de transfert G est possible, il est nécessaire de faire quelques hypothèses simplificatrices :

$$\begin{aligned} |\Omega| &\ll |\omega_1|, |\omega_2| \quad , \\ \omega_1 &= \omega \quad , \\ \omega_2 &= \omega - \Omega \quad , \quad \Omega > 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.27)$$

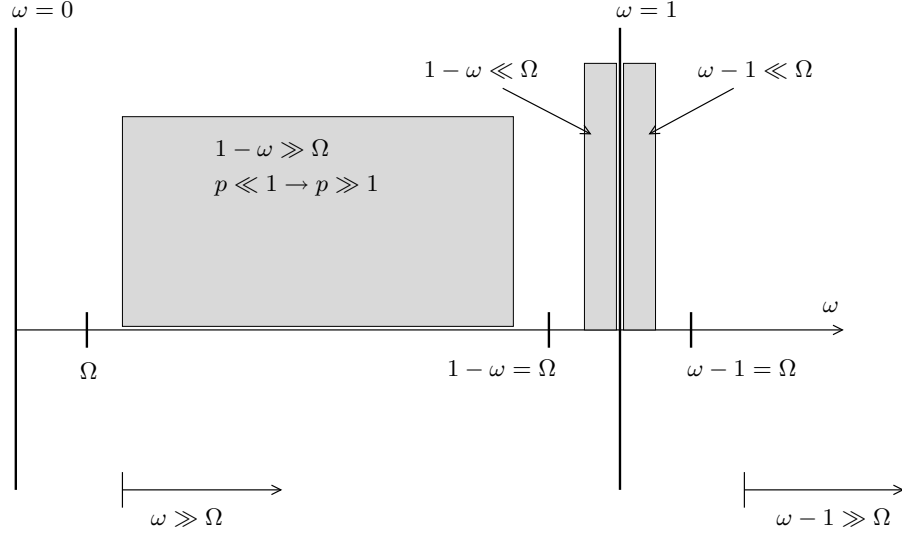


FIG. 3.2: Les différents cas limites de l'analyse du résultat (3.19)

La relation $0 < \Omega \ll \omega \leq 1$ est alors réalisée. En prenant en compte ces égalités et inégalités, chaque terme de la fonction de transfert (3.26) peut se simplifier.

En considérant que l'atténuation des ondes propagatives est suffisamment faible pour permettre leur propagation, i.e. le module de la partie imaginaire du nombre d'onde $|k''(\omega)| \ll 1$ et en négligeant la dispersion d'atténuation ($|k''(\omega)| \simeq |k''(\omega - \Omega)|$), la partie imaginaire de la différence $(k_1 - k_2^*)$ s'écrit $2i|k''(\omega)|$. En utilisant le développement de Taylor au premier ordre de la relation de dispersion pour le terme réel $(k_1' - k_2')$, valable pour $|\Omega| \ll |(\partial k'/\partial\omega)/(\partial^2 k'/\partial\omega^2)|$, ce terme s'écrit $k_1' - k_2' \simeq \Omega \frac{\partial k'}{\partial\omega}(\omega) \ll 1$. Dans ce cas,

$$\sin(k_1 - k_2^*) \simeq \Omega \frac{\partial k'}{\partial\omega}(\omega) + 2i|k''(\omega)| \quad (3.28)$$

$$\cos(k_1 - k_2^*) \simeq 1 \quad , \quad (3.29)$$

au premier ordre en $\Omega \frac{\partial k'}{\partial\omega}(\omega)$ et en $|k''(\omega)|$. Avec les mêmes approximations,

$$\begin{aligned} \cos(k_1 + k_2^*) &\simeq \cos(k_1' + k_2') \\ &\simeq \cos(2k'(\omega) - \Omega \frac{\partial k'}{\partial\omega}(\omega)) \simeq \cos(2\arcsin(\omega)) + \Omega \frac{\partial k'}{\partial\omega}(\omega) \sin(2\arcsin(\omega)) \\ &\simeq 1 - 2\omega^2 + 2\omega\sqrt{1 - \omega^2} \left(\Omega \frac{\partial k'}{\partial\omega}(\omega) \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.30)$$

En remplaçant les termes simplifiés (3.29) et (3.30) dans l'expression de la fonction de transfert (3.26), et en notant que $\frac{\partial k'}{\partial\omega}(\omega) = c_g^{-1}(\omega) = (1 - \omega^2)^{-1/2}$, une nouvelle expression pour la fonction de transfert G est obtenue :

$$G(\omega, \Omega) \simeq \frac{\beta}{\alpha} A^2 \omega^2 \frac{\frac{\Omega}{c_g(\omega)} + 2i|k''(\omega)|}{\left(\frac{\Omega}{c_g(\omega)} + 2i|k''(\omega)| \right)^2 - \Omega^2} \quad . \quad (3.31)$$

En utilisant la notation $\ell_a(\omega) = \frac{1}{2|k''(\omega)|}$ pour la longueur d'atténuation de l'intensité acoustique de

pompage, et en modifiant l'expression (3.31), cette dernière se réécrit :

$$G(\omega, \Omega) \simeq \frac{\beta}{\alpha} A^2 \omega^2 \frac{\frac{\Omega \ell_a(\omega)}{c_g(\omega)} + i}{\left[\Omega \frac{\ell_a(\omega)}{c_g(\omega)} (1 - c_g(\omega)) + i \right] \left[\Omega \frac{\ell_a(\omega)}{c_g(\omega)} (1 + c_g(\omega)) + i \right]} . \quad (3.32)$$

En introduisant le paramètre $p' = \frac{\ell_a(\omega)}{c_g(\omega)} \Omega = k(\Omega) \ell_a(\omega) \frac{c_\phi(\Omega)}{c_g(\omega)}$ dans cette dernière expression, la fonction G prend la forme :

$$G(\omega, \Omega) \simeq \frac{\beta}{\alpha} A^2 \omega^2 \ell_a(\omega) \frac{p' + i}{[p' (1 - c_g(\omega)) + i] [p' (1 + c_g(\omega)) + i]} . \quad (3.33)$$

En considérant que pour une analyse qualitative du comportement de cette fonction G , $1 + c_g(\omega)$ est du même ordre de grandeur que 1 ($0 \leq c_g(\omega) \leq 1$), l'expression (3.33) est finalement simplifiée sous la forme :

$$G(\omega, \Omega) \sim \frac{\beta}{\alpha} A^2 \omega^2 \ell_a(\omega) \frac{1}{p + i} , \quad (3.34)$$

où $p = p' (1 - c_g(\omega)) = \ell_a(\omega) k(\Omega) \frac{c_\phi(\Omega)}{c_g(\omega)} (1 - c_g(\omega))$ est un paramètre adimensionnel. Avec $\Omega \ll \omega \leq 1$, la relation $c_\phi(\Omega) \simeq c_\phi(0) = 1$ est vérifiée, et le paramètre p peut se réécrire sous la forme :

$$p \simeq \ell_a(\omega) k(\Omega) \frac{c_\phi(\Omega) - c_g(\omega)}{c_g(\omega)} . \quad (3.35)$$

Dans cette expression, $\frac{\ell_a(\omega)}{c_g(\omega)}$ représente le temps mis par le paquet d'onde de pompage HF pour parcourir sa région d'atténuation caractéristique. Le facteur $\frac{\ell_a(\omega)}{c_g(\omega)} (c_\phi(\Omega) - c_g(\omega))$ représente quant à lui la séparation spatiale caractéristique entre le paquet d'onde HF et le signal BF démodulé à l'échelle $\ell_a(\omega)$, c'est-à-dire à la limite de la région d'interaction non linéaire. Le paramètre p est alors proportionnel à cette distance mesurée en nombre de longueurs d'ondes acoustiques BF.

3.3.2.1.1 Premier cas limite. Lorsque $p \ll 1$, cette séparation spatiale est très petite devant la longueur d'onde $\lambda(\Omega)$ du signal démodulé, et la fonction de transfert prend la forme suivante :

$$G(\omega, \Omega) \sim -i \frac{\beta}{\alpha} A^2 \omega^2 \ell_a(\omega) . \quad (3.36)$$

Dans ce cas, la variation de l'amplitude du signal démodulé en fonction de la fréquence de pompage est régie par l'atténuation des ondes de pompage (paramètre $\omega^2 \ell_a(\omega)$). La dispersion de vitesse ne joue pas de rôle important soit parce que la longueur de l'antenne est trop faible, soit parce que la différence entre les vitesses $c_g(\omega)$ et $c_\phi(\Omega)$ est négligeable, pour entraîner une séparation spatiale suffisante entre le paquet d'onde HF et le signal démodulé BF à la sortie de la région d'interaction. La fonction G étant indépendante de la variable Ω , dans ce cas limite, le profil temporel du signal démodulé (dans le cas de la démodulation d'un paquet d'onde) reste inchangé qualitativement par rapport à la fonction de modulation initiale du signal de pompage.

Pour une longueur d'atténuation du type $\ell_a(\omega) \sim 1/\omega$ telle qu'elle est considérée par la suite et une amplitude d'excitation constante des ondes de pompes A , la fonction de transfert $G(\omega, \Omega)$ augmente linéairement avec la fréquence de pompage ω .

3.3.2.1.2 Second cas limite. Lorsque $p \gg 1$, cette séparation spatiale est très grande devant la longueur d'onde $\lambda(\Omega)$ du signal démodulé, et la fonction de transfert prend la forme suivante :

$$G(\omega, \Omega) \sim \frac{\beta}{\alpha} A^2 \omega^2 \ell_a(\omega) \frac{1}{p} = \frac{\beta}{\alpha} A^2 \frac{\omega^2 c_g(\omega)}{\Omega(1 - c_g(\omega))} \quad , \quad (3.37)$$

ou encore avec $c_g(\omega) = \sqrt{1 - \omega^2}$,

$$G(\omega, \Omega) \sim \frac{\beta}{\alpha} A^2 \frac{\omega^2 \sqrt{1 - \omega^2}}{\Omega(1 - \sqrt{1 - \omega^2})} \quad . \quad (3.38)$$

Ce développement est valable uniquement pour $1 - \omega \gg \Omega$, ce qui assure la validité du développement de Taylor de la relation de dispersion réalisé précédemment avec le petit paramètre Ω . D'ores et déjà, il est possible de dire que dans le cas d'une excitation de type paquet d'onde de pompage, le profil temporel du signal démodulé sera intégré à cause du facteur Ω au dénominateur de cette expression. Deux sous-cas limites (aboutissant à la même forme pour G) peuvent être identifiés dans l'expression (3.38) : le cas de faible dispersion de vitesse où $\omega \ll 1$ (dans ce cas $c_g(\omega) \simeq c_\phi(\Omega) \simeq 1$) et le cas de forte dispersion où ω est proche de 1 ($c_g(\omega) \ll c_\phi(\Omega)$) dans la limite tout de même où $1 - \omega \gg \Omega$.

Lorsque $\omega \ll 1$, la fonction G a la forme

$$G(\omega, \Omega) \sim \frac{\beta}{\alpha} A^2 \frac{1}{\Omega} \quad . \quad (3.39)$$

Les conditions $p \gg 1$ et $\omega \ll 1$ signifient que la longueur d'interaction non linéaire $\ell_a(\omega)$ est très grande devant la longueur d'onde du signal démodulé $\lambda(\Omega)$, i.e. malgré une faible différence de vitesse, la région d'interaction est suffisamment longue pour que la séparation spatiale caractéristique entre sources non linéaires et signal démodulé soit importante. Dans ce cas, la fonction $G(\omega, \Omega)$ est indépendante de la fréquence de pompage ω , i.e. en dehors des sources, l'amplitude du signal démodulé ne dépend pas de ω .

Lorsque ω tend vers 1 (avec toujours $1 - \omega \gg \Omega$), la fonction G a la forme similaire suivante

$$G(\omega, \Omega) \simeq \frac{\beta}{\alpha} A^2 \frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{\Omega} \quad . \quad (3.40)$$

La différence de vitesses $c_g(\omega)$ et $c_\phi(\Omega)$ est importante, ce qui assure une forte influence de la dispersion de vitesse sur le signal démodulé. Le facteur $\sqrt{1 - \omega^2}$ qui apparaît au numérateur de l'expression (3.40) décrit la décroissance de l'amplitude démodulée lorsque ω s'approche de la fréquence de coupure normalisée $\omega_c = 1$.

Dans ces deux derniers sous-cas limites, le comportement de G est identique, l'influence de la dispersion est importante et se traduit par une intégration temporelle du signal démodulé BF.

3.3.2.1.3 Limite ω tend vers 1. L'intérêt d'analyser ce cas limite, où la condition $\Omega \gg 1 - \omega$ est vérifiée (ω est très proche de la fréquence de coupure 1), est de vérifier la correspondance entre la limite haute fréquence de la zone propagative et la limite basse fréquence de la zone évanescence (cas étudié dans la section 3.3.2.3).

Lorsque $\Omega \gg 1 - \omega$, le développement sous forme de série de Taylor du terme $k'_1 - k'_2$ ne peut pas se faire avec le petit paramètre Ω , mais peut être réalisé avec le petit paramètre $1 - \omega$:

$$\begin{aligned} k'_1 - k'_2 &= k'(\omega) - k'(\omega - \Omega) = k'(1 - (1 - \omega)) - k'(1 - \Omega - (1 - \omega)) \\ &\simeq k'(1 - (1 - \omega)) - \left[k'(1 - \Omega) - (1 - \omega) \frac{\partial k'}{\partial \omega}(1 - \Omega) + \frac{1}{2} (1 - \omega)^2 \frac{\partial^2 k'}{\partial \omega^2}(1 - \Omega) + \dots \right] \\ &\simeq k'(1 - (1 - \omega)) - \left[k'(1 - \Omega) - \frac{(1 - \omega)}{\sqrt{2\Omega}} \simeq -\sqrt{2\Omega} + \sqrt{2(1 - \omega)} \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Une simplification apparaît en utilisant le développement limité de la fonction $\arcsin(1-x)$ (qui intervient dans la relation de dispersion (3.9)) lorsque $x \ll 1$: $\arcsin(1-x) \simeq \pi/2 + \sqrt{2x} + \dots$

La dernière expression de (3.41), combinée avec ce développement de \arcsin , devient

$$k'_1 - k'_2 \simeq -\sqrt{2\Omega} + \dots \quad , \quad (3.42)$$

et les termes suivants, qui apparaissent dans la forme générale de la fonction de transfert (3.26) prennent les formes :

$$\begin{aligned} \sin(k_1 - k_2^*) &\simeq \sin(-\sqrt{2\Omega} - 2i|k''(\omega)|) \simeq -\sqrt{2\Omega} - 2i|k''(\omega)| \\ \cos(k_1 - k_2^*) &\simeq 1 - 2\sin^2\left(\frac{k_1 - k_2^*}{2}\right) \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\Omega} + 2i|k''(\omega)|\right)^2 \\ \cos(k_1 + k_2^*) &\simeq \cos(k'_1 + k'_2) \simeq -1 + \Omega \quad . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ces expressions limites (3.43) sont reportées dans l'équation (3.26) pour donner une nouvelle expression de la fonction de transfert G :

$$G(\omega, \Omega) \simeq \frac{\beta}{\alpha} A^2 \frac{\sqrt{2\Omega} + 2i|k''(\omega)|}{\Omega^2 - \left[\sqrt{2\Omega} + 2i|k''(\omega)|\right]^2} \quad . \quad (3.44)$$

Comme $\Omega \ll 1$, le terme Ω^2 au dénominateur de cette expression est toujours négligeable devant Ω . La notation $2|k''(\omega)| = 1/\ell_a(\omega)$ est ré-introduite, et G se simplifie :

$$G(\omega, \Omega) \simeq -\frac{\beta}{\alpha} A^2 \frac{1}{\sqrt{2\Omega} + 2i|k''(\omega)|} \quad . \quad (3.45)$$

Ou encore, en introduisant le paramètre adimensionnel $P = \sqrt{\frac{\Omega}{2}}\ell_a(\omega)$, G s'écrit simplement :

$$G(\omega, \Omega) \simeq -\frac{\beta}{2\alpha} A^2 \ell_a(\omega) \frac{1}{P + i} \quad . \quad (3.46)$$

Lorsque la condition $1 - \omega \gg \Omega$ est réalisée, ce qui était le cas dans la sous-section précédente 3.3.2.1.1, la haute fréquence caractéristique de pompage est $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega + \omega - \Omega}{2} \simeq \omega$, lorsque $\Omega \ll \omega$. A l'inverse, dans la présente analyse, la condition $1 - \omega \ll \Omega$ implique que la fréquence caractéristique de pompage est maintenant $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega + \omega - \Omega}{2} = \frac{2 + 2(1 - \omega) - \Omega}{2} \simeq 1 - \frac{\Omega}{2}$. Dans le cas limite présent $1 - \omega \ll \Omega$, le paramètre p utilisé pour l'analyse du cas $1 - \omega \gg \Omega$ précédent peut être réécrit comme :

$$p = \ell_a(\omega) \frac{\Omega}{c_\Phi(\Omega)} \frac{c_\Phi(\Omega) - c_g(\omega)}{c_g(\omega)} \simeq \ell_a(\omega) \frac{\Omega}{c_g(1 - \Omega/2)} \quad , \quad (3.47)$$

avec $c_\Phi(\Omega) \simeq 1$ et $c_g(\omega) \simeq c_g(1 - \Omega/2) \rightarrow 0$. Finalement, comme $c_g(1 - \Omega/2) \simeq \sqrt{1 - (1 - \Omega/2)^2} \simeq \sqrt{\Omega}$, le paramètre précédent p est équivalent au nouveau paramètre P . L'interprétation physique de ces paramètres est donc identique.

Lorsque $P \ll 1$, le déphasage entre sources non linéaires et signal démodulé à la limite de la région d'interaction est faible, et la fonction de transfert prend la forme :

$$G(\omega, \Omega) \simeq -i \frac{\beta}{2\alpha} A^2 \ell_a(\omega) \quad . \quad (3.48)$$

Cette fonction est proportionnelle à $\ell_a(\omega)$ et ne dépend pas de Ω . Ce cas limite correspond bien à la limite $p \ll 1$, $1 - \omega \gg \Omega$, expression (3.36).

Lorsque $P \gg 1$, le déphasage entre sources non linéaires et signal démodulé à la limite de la région d'excitation est important, la fonction de transfert prend la forme :

$$G(\omega, \Omega) \simeq -\frac{\beta}{2\alpha} A^2 \frac{1}{\sqrt{\Omega}} . \quad (3.49)$$

Dans ce cas, le facteur $1/\sqrt{\Omega}$ assure l'intégration partielle (d'ordre 1/2) d'un profil temporel, démodulé à partir d'une onde de pompage de type paquet d'onde.

3.3.2.2 Comportement dans la région des sources non linéaires

L'analyse du résultat (3.19) dans la région des sources non linéaires, c'est-à-dire lorsque $|e^{ik(\Omega)an-i\Delta kan}|$ n'est pas très inférieur à 1, se justifie pour des ondes de pompage propagatives. Pour des ondes de pompage évanescentes, atténuées sur une distance de quelques billes, la région source est si limitée dans l'espace que l'on se trouve presque toujours en dehors. Le résultat (3.19) étant le produit du terme de phase $[1 - e^{ik(\Omega)an-i\Delta kan}] e^{i\Omega t - ik(\Omega)an}$ et de la fonction de transfert $G(\omega, \Omega)$ étudiée précédemment pour les ondes de pompage propagatives, il reste le terme de phase à analyser. Le terme $e^{i\Omega t - ik(\Omega)an}$ décrit la propagation de l'onde BF démodulée dans la chaîne. Il reste à analyser le terme $1 - e^{ik(\Omega)an-i\Delta kan}$, et par conséquent à faire émerger le comportement de la phase notée Φ suivante :

$$\Phi = (\Delta k - k(\Omega))an . \quad (3.50)$$

Dans la limite où l'atténuation des ondes de pompage est faible, le module du terme $e^{ik(\Omega)an-i\Delta kan}$ est proche de 1. Dans l'analyse qui suit, la partie imaginaire du nombre d'onde propagatif est négligée. $\Delta k = k'(\omega_1) - k'(\omega_2)$ peut être simplifié si $k'(\omega_1 = \omega + \Omega/2)$ et $k'(\omega_2 = \omega - \Omega/2)$ sont développés en séries de Taylor (sous la condition $1 - \omega \gg \Omega$). Dans ce cas, $\Delta k \simeq \Omega/c_g(\omega)$ jusqu'au troisième ordre en Ω , où $c_g(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial k}(\omega)$ est, rappelons-le, la vitesse de groupe du paquet d'onde de pompage HF.

Le nombre d'onde $k(\Omega)$ est égal à $\Omega/c_\Phi(\Omega)$, où $c_\Phi(\Omega)$ est la vitesse de phase à la basse fréquence Ω . Cette vitesse de phase est obtenue à partir de la relation de dispersion (3.9) et s'exprime sous la forme $c_\Phi(\Omega) = \Omega/\arcsin(\Omega) \simeq 1$ pour $\Omega \ll 1$. La vitesse de groupe se dérive aussi de la relation de dispersion (3.9) et est égale à $c_g(\omega) = c_\Phi(0)\sqrt{1 - \omega^2}$. Par conséquent, la phase (3.50) à analyser peut se réécrire avec des quantités normalisées :

$$\Phi = -2\Omega \left(1 - \frac{1}{c_g(\omega)}\right) n . \quad (3.51)$$

Si cette phase est égale à $-2\pi\ell$ (respectivement $-(2\pi + 1)\ell$) avec $\ell \in \mathbb{N}$, le terme $1 - e^{ik(\Omega)an-i\Delta kan}$ du résultat (3.19) est minimum (respectivement maximum). Les fréquences de pompage pour lesquelles un minimum est obtenu, satisfont alors la relation suivante,

$$\omega = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\pi\ell}{\Omega n}\right)^{-2}} , \quad (3.52)$$

ou encore, les distances pour lesquelles un minimum est obtenu sont :

$$n = \frac{\pi\ell}{\Omega} (1 - (1 - \omega^2)^{-1/2})^{-1} . \quad (3.53)$$

Si l'absorption des ondes de pompage est prise en compte, le terme $1 - e^{ik(\Omega)an - i\Delta kan}$ a des minima ou des maxima moins marqués car le module de $e^{ik(\Omega)an - i\Delta kan}$ n'est plus égal à 1 mais devient inférieur. Son comportement dépend de la différence entre la vitesse de phase BF du signal démodulé $c_\Phi(0) \simeq 1$ et la vitesse de groupe HF des sources non linéaires $c_g(\omega)$. Dans la région d'existence des sources non linéaires, l'apparition d'une succession de minima et de maxima dans l'amplitude du signal démodulé BF est donc un effet de dispersion de vitesse associé à l'asynchronisme entre les sources non linéaires et le signal démodulé.

3.3.2.3 Cas des ondes de pompage évanescentes

Les ondes de pompage deviennent évanescentes lorsque la fréquence de pompage ω est supérieure à la fréquence de coupure de la chaîne granulaire ω_c . Elles sont alors localisées au voisinage de l'émetteur de pompage. Par conséquent, le signal démodulé est en pratique toujours observé en dehors de la région d'interaction non linéaire (le module du terme $e^{-i\Delta kan}$ de l'équation (3.19) est très inférieur à 1).

Comme dans l'analyse de la démodulation d'ondes propagatives, il est possible de repartir de l'expression générale de la fonction de transfert (3.26) pour l'analyse de la démodulation des ondes évanescentes. Fréquences et nombres d'ondes sont donc normalisés respectivement par ω_c et $2k_c/\pi$. La relation de dispersion normalisée, pour les modes évanescents ($\omega > 1$), s'écrit alors :

$$k(\omega) = \frac{\pi}{2} - i \operatorname{arcosh}(\omega) \quad . \quad (3.54)$$

En posant $\omega_2 = \omega$ et $\omega_1 = \omega + \Omega$ avec $\Omega > 0$, la fonction de transfert (3.26) peut se réécrire comme une fonction de ω et Ω . Les développements exacts suivants

$$\begin{aligned} \sin(k_1 - k_2^*) &= i\omega\sqrt{(\omega + \Omega)^2 - 1} + i(\omega + \Omega)\sqrt{\omega^2 - 1} \\ \cos(k_1 - k_2^*) &= \omega(\omega + \Omega) + \sqrt{(\omega + \Omega)^2 - 1}\sqrt{\omega^2 - 1} \\ \cos(k_1 + k_2^*) &= -\omega(\omega + \Omega) + \sqrt{(\omega + \Omega)^2 - 1}\sqrt{\omega^2 - 1} \quad , \end{aligned}$$

sont substitués dans l'équation (3.26) pour donner une forme exacte de la fonction de transfert pour des ondes de pompage évanescentes :

$$G(\omega, \Omega) = -i\frac{\beta}{\alpha}A^2 \frac{\omega(\omega + \Omega) \left[\omega\sqrt{(\omega + \Omega)^2 - 1} + (\omega + \Omega)\sqrt{\omega^2 - 1} \right]}{\Omega^2 + \left[\omega\sqrt{(\omega + \Omega)^2 - 1} + (\omega + \Omega)\sqrt{\omega^2 - 1} \right]^2} \quad . \quad (3.55)$$

En prenant en compte le fait que $\Omega \ll \omega$, et pour des fréquences de pompage suffisamment éloignées de la fréquence de coupure ($\omega - 1 \gg \Omega$) cette expression devient :

$$G(\omega, \Omega) \simeq -i\frac{\beta}{\alpha}A^2 \frac{\omega}{2\sqrt{\omega^2 - 1}} \quad . \quad (3.56)$$

Il est intéressant de remarquer que dans ce cas, lorsque ω devient grande par rapport à la fréquence de coupure $\omega_c = 1$, le module $|G(\omega, \Omega)| \sim \frac{\beta}{\alpha} \frac{A^2}{2}$ est indépendant de la fréquence de pompage ω ainsi que de la fréquence différence Ω . Les sources non linéaires sont localisées sur la surface ce qui inhibe les effets de dispersion de vitesse et d'atténuation. A l'inverse, toujours en considérant que $\Omega \ll \omega$, mais pour des fréquences de pompage très proches de la fréquence de coupure ($\omega - 1 \ll \Omega$), la fonction de transfert vaut :

$$G(\omega, \Omega) \simeq -i\frac{\beta}{\alpha}A^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega}} \quad . \quad (3.57)$$

La limite (3.56) montre que dans le cas de la démodulation d'un paquet d'onde de pompage HF, le déplacement temporel démodulé aura un profil identique à la fonction de modulation de ce paquet d'onde HF, en raison de l'absence de dépendance en Ω . Au contraire, la limite (3.57), assure que le profil du signal temporel démodulé est partiellement intégré à cause de la présence du terme $\sqrt{\Omega}$ au dénominateur.

Pour l'analyse du signal démodulé à partir d'ondes de pompage évanescences, la convention $\omega_2 = \omega$ et $\omega_1 = \omega + \Omega$ avec $\Omega > 0$ a été utilisée, alors que pour l'analyse du signal démodulé à partir d'ondes de pompage propagatives c'est la convention $\omega_1 = \omega$ et $\omega_2 = \omega - \Omega$ avec $\Omega > 0$ qui a été utilisée. La comparaison du résultat (3.57) obtenu dans la limite évanescence $\omega \rightarrow 1$, $\omega > 1$ et du résultat (3.49) obtenu dans la limite propagative $\omega \rightarrow 1$, $\omega < 1$, doit donc être effectuée en changeant dans l'un des deux cas Ω par $-\Omega$. Ceci fait apparaître un facteur $-i$ dans la fonction de transfert où $-\Omega$ est introduit (en raison du facteur $(\Omega)^{-1/2}$ qui apparaît dans ces cas limites), et les deux résultats concordent bien. La continuité de $G(\omega, \Omega)$ à la transition de $\omega < 1$ à $\omega > 1$ par ces cas limites est confirmée par les résultats numériques prenant en compte l'expression complète (3.19) sur la figure 3.6.

3.3.2.4 Analyse qualitative générale de la dépendance du signal démodulé sur ω et Ω

Le déplacement démodulé est dans le cas général proportionnel à

$$\underline{U}_\Omega \sim \frac{F_{NL}(n=0, \omega, \Omega)}{\Omega^2 - \sin^2(\Delta k)} \quad , \quad (3.58)$$

où F_{NL} est la force non linéaire impliquée dans le processus d'auto-démodulation (la dépendance temporelle $e^{i\Omega t}$ est omise). Le dénominateur de type "résonant" est habituel pour les processus forcés. Dans le cas limite $\omega \ll 1$ (le paramètre adimensionnel $p \ll 1$), caractérisé par un rôle négligeable des effets de dispersion, le dénominateur décrit les effets de synchronisme et l'effet final est proportionnel à la distance de leur accumulation, c'est à dire proportionnel à la longueur de l'antenne $\ell_a(\omega)$:

$$\frac{1}{\Omega^2 - \sin^2(\Delta k)} \sim \ell_a(\omega) \lambda(\Omega) \quad . \quad (3.59)$$

A l'inverse, dans le cas limite $\omega \gg 1$, il n'y a pas d'effets d'accumulation du signal, simplement parce que l'antenne est limitée à un seul (le premier) ressort non linéaire près de la surface. Dans cette limite,

$$\sin^2(\Delta k) \simeq -\sinh^2(2|k''(\omega)|) \sim e^{4|k''(\omega)|} \sim \omega^4 \quad (3.60)$$

domine fortement dans le dénominateur résonant, et les conditions d'accumulation du signal diminuent rapidement avec l'augmentation de ω .

Cependant, en accord avec l'équation (3.58), non seulement l'accumulation du signal mais aussi l'amplitude des forces doivent être comparées dans ces deux cas limites. La force non linéaire agissant sur la bille numéro n est égale à la différence entre les forces appliquées sur ses deux côtés. A partir de l'équation (3.7),

$$F_{NL}(n) \sim [U_\omega(n+1) - U_\omega(n)]^2 - [U_\omega(n) - U_\omega(n-1)]^2 \quad , \quad (3.61)$$

dans la limite basse fréquence ($\omega \ll 1$), chaque déformation

$$[U_\omega(n+1) - U_\omega(n)]/a \quad \text{et} \quad [U_\omega(n) - U_\omega(n-1)]/a \quad ,$$

est inversement proportionnelle à la longueur d'onde acoustique HF, ce qui est proportionnel à ω . La différence entre les forces appliquées à la bille de chaque côté est contrôlée par l'absorption de l'onde

HF, ou par la différence entre les hautes fréquences, c'est à dire par Ω . Ceci implique, dans la limite $\omega \ll 1$,

$$F_{NL} \sim \omega^2 \max \{k(\Omega), k''(\omega)\} \quad .$$

Dans le cas d'une antenne avec $\ell_a(\omega) \gg \lambda(\Omega)$ (faible atténuation des ondes de pompage) [Nov87],

$$F_{NL} \sim \omega^2 k(\Omega) \quad (3.62)$$

Par conséquent, à l'aide des équations (3.58), (3.59) et (3.62),

$$\underline{U}_\Omega \sim \omega^2 \ell_a(\omega) \quad , \quad (3.63)$$

ce qui est le résultat classique pour l'antenne paramétrique 1-D dans les milieux homogènes [Nov87].

Dans la limite $\omega \gg 1$, la situation est différente. La force F_{NL} de l'équation (3.61) est contrôlée par le déplacement de la seule première bille, d'où la relation,

$$F_{NL}(n=0, \omega, \Omega) \sim -U_\omega^2(-1) \sim e^{4|k''(\omega)|} \sim \omega^4 \quad . \quad (3.64)$$

La localisation de la force qui mène à la dépendance $\sim \omega^4$ au dénominateur est donc complètement compensée par l'augmentation de l'amplitude de la force ($\sim \omega^4$) décrite par l'équation (3.64). Par conséquent, dans le régime $\omega \gg 1$, \underline{U}_Ω ne dépend ni de Ω ni de ω .

Cette analyse qualitative confirme le résultat obtenu précédemment sur la base des expansions asymptotiques. Dans le domaine de fréquences intermédiaires $\omega \sim 1$ (ou, en général, lorsque les paramètres adimensionnels p ou P ne sont pas petits), l'influence de la dispersion de vitesse sur la fonction de transfert $G(\omega_0, \Omega)$ doit être prise en compte.

3.4 Traitement numérique et résultats

Comme précédemment, les fréquences et nombres d'onde sont normalisés, pour les calculs numériques et dans la présentation des résultats. Les quantités variables expérimentalement comme la fréquence de pompage ω , la fréquence de modulation Ω , ou encore la distance d'observation n (nombre de billes) sont utilisées dans la suite pour faire varier les paramètres adimensionnels du problème, p , P , ou passer d'un cas limite analysé précédemment à un autre. L'atténuation des ondes de pompage propagatives est prise en compte grâce à une partie imaginaire du nombre d'onde de la forme $|k''(\omega)| = C\omega$ où C est une constante. Cette dépendance en fréquence de l'atténuation a été observée expérimentalement dans les milieux granulaires tridimensionnels [Whi83]. Cependant, il est possible d'introduire dans ce formalisme toute sorte de fonction pour décrire l'atténuation, y compris non-monotone comme pour les phénomènes de relaxation.

3.4.1 Influence de la distance d'observation

Afin de comprendre les différents régimes de la génération par l'antenne paramétrique du signal démodulé de basse fréquence, il est intéressant de tracer l'amplitude de ce signal en fonction de la distance d'observation, et notamment dans la région d'existence des sources non linéaires.

3.4.1.1 Cas de deux fréquences de pompage

Dans le cas de deux fréquences de pompage ω_1 et ω_2 proches (et donc d'une seule fréquence démodulée $\Omega \ll \omega_1, \omega_2$), l'amplitude du signal démodulé est tracée en fonction de la distance pour différentes valeurs du paramètre adimensionnel p , sur la figure 3.3. Dans ce calcul, $\Omega \simeq 8.10^{-4}$, et $C = 2.10^{-7}$. Comme $\Omega \ll \omega_1, \omega_2$, on peut considérer pour la discussion que $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega$. Sur la figure 3.3, quatre courbes en lignes continues sont tracées et correspondent à quatre valeurs du paramètre adimensionnel $p \simeq 0.15, 0.65, 1.85, 13$ obtenues en variant la fréquence de pompage respectivement comme $\omega \simeq 8 \cdot 10^{-2}, 3 \cdot 10^{-1}, 6 \cdot 10^{-1}, 0.98$. Pour ces fréquences de pompage respectives la longueur d'atténuation de l'intensité de pompage (longueur de l'antenne paramétrique) en terme de nombre de billes, vaut $\ell_a(\omega)/a \simeq 3.2 \cdot 10^4, 0.8 \cdot 10^4, 0.4 \cdot 10^4, 0.23 \cdot 10^4$. En grande partie, l'observation du signal démodulé se fait donc dans la région d'interaction non linéaire entre les ondes de pompage. Pour $p \ll 1$, l'amplitude démodulée est proportionnelle à la distance ($|1 - e^{ik(\Omega)an - i\Delta kan}| = |1 - e^{\xi n}| \simeq |1 - 1 - \xi n| \simeq |\xi n|$). Pour $p \gg 1$, la même dépendance est observée sur une distance de quelque centaines de billes, mais un phénomène de saturation apparaît. L'amplitude démodulée ne dépasse plus alors une valeur maximum, et oscille entre des minima et des maxima locaux. Comme cela a été discuté dans la section 3.3.2.2, ce comportement est associé à la dispersion de vitesse entre les sources qui se propagent à la vitesse $0 \leq c_g(\omega) \leq 1$ et le signal démodulé qui se propage à la vitesse $c_\Phi(\Omega) \simeq 1$. Selon l'équation (3.53) issue de l'analyse du terme de phase du déplacement démodulé (3.19), le premier minimum, pour $\ell = -1$, $\Omega \simeq 8 \cdot 10^{-4}$ et $\omega \simeq 0.98$ doit apparaître à la distance $n \simeq 1100$, et les minima suivants à des multiples entiers de cette distance. Ce comportement est bien observé pour $p \simeq 13$ sur la figure 3.3.

Pour comparaison, l'amplitude du signal démodulé par deux ondes de pompage évanescentes ($\omega \simeq 1, 083$) est tracée en ligne pointillée sur la même figure 3.3. L'amplitude est constante dès quelques billes, i.e. en dehors de la région d'existence des ondes de pompage, et l'efficacité de l'antenne paramétrique reste faible.

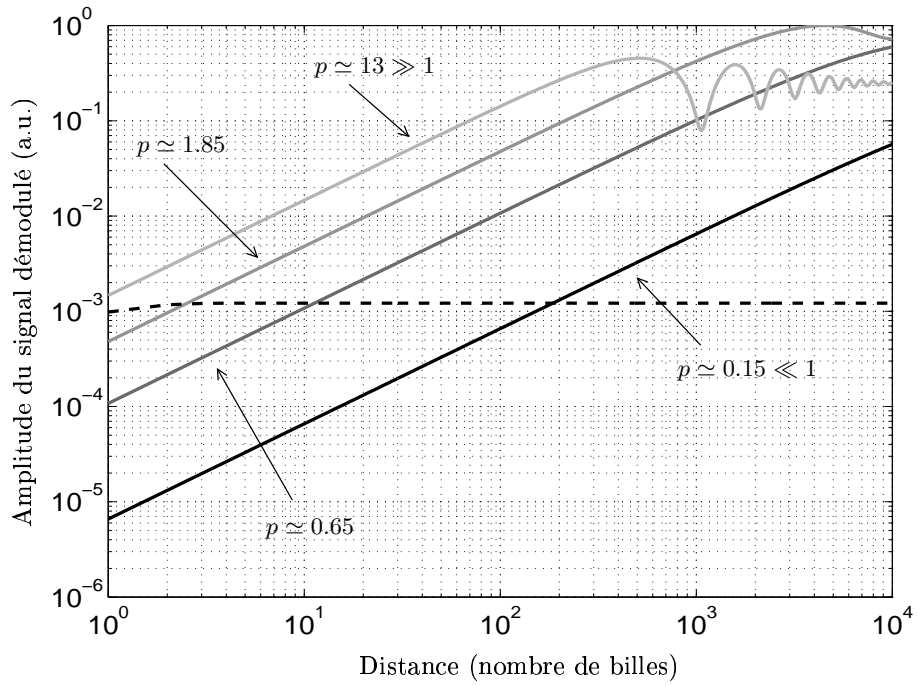


FIG. 3.3: Amplitude du déplacement démodulé en fonction de la distance d'observation en nombre de billes n pour quatre valeurs du paramètre adimensionnel p . Pour comparaison, l'amplitude du signal démodulé à partir d'ondes de pompage évanescentes et tracée en ligne pointillée.

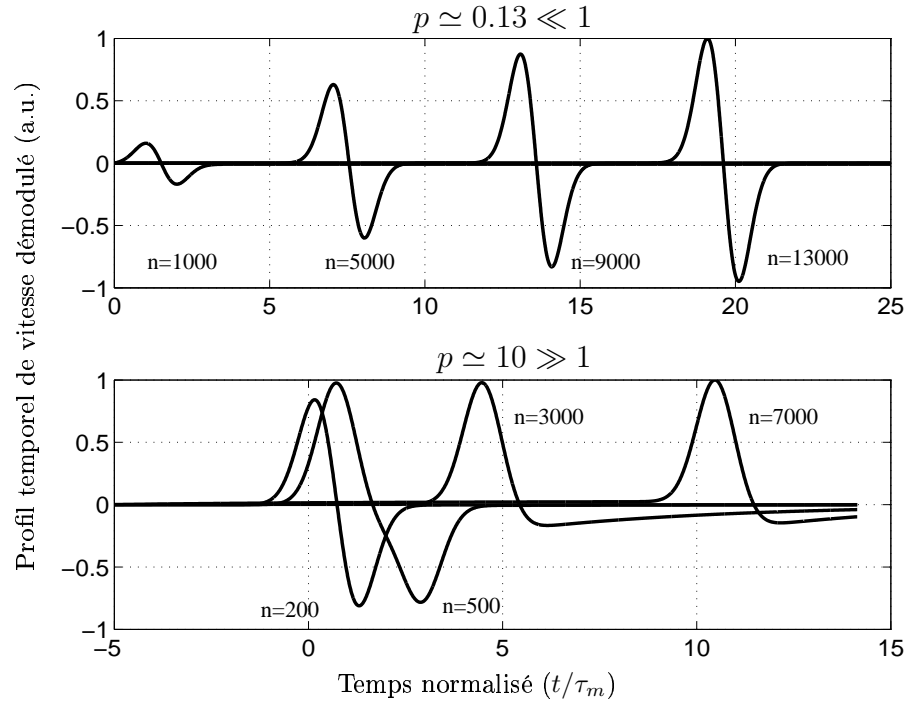


FIG. 3.4: Evolution du profil temporel démodulé de vitesse avec la distance d'observation dans les deux cas limites $p \ll 1$ et $p \gg 1$.

3.4.1.2 Cas d'un paquet d'onde Gaussien de pompage

Dans le cas de la démodulation d'un paquet d'ondes de pompage de spectre Gaussien (ou de façon équivalente de fonction temporelle de modulation Gaussienne), la manifestation des effets mentionnés précédemment est différente. En effet, la dispersion de vitesse ne donne pas lieu à des minima ou maxima d'amplitudes pour le déplacement démodulé, mais à une saturation et à un étalement du profil temporel de ce signal. Ce comportement est directement lié au fait que les sources non linéaires se propagent plus lentement que le signal qu'elles génèrent ($c_g(\omega) < c_\Phi(\Omega)$). C'est ce qui est illustré sur la figure 3.4, où les profils temporels de la vitesse acoustique sont tracés pour différentes distances, et dans deux cas limites $p \ll 1$ et $p \gg 1$. Les résultats et cas limites issus de l'analyse ont été réalisés pour le déplacement acoustique alors que ce sont des profils de vitesse qui sont tracés sur les figures suivantes pour des questions de convergence numérique et de lisibilité. Les expressions issues de la section analyse sont donc à multiplier par un facteur $-i\Omega$.

L'étalement du profil temporel Gaussien de déplacement démodulé correspond à une intégration de ce profil, ce qui représente aussi une intégration du profil de vitesse démodulée, i.e. un passage de la dérivée première de la fonction de modulation Gaussienne à la dérivée d'ordre nul. Pour $p \gg 1$ ($\omega \simeq 0.97$, $\Omega = 1.7 \cdot 10^{-3}$, $C = 5 \cdot 10^{-7}$) sur la figure 3.4, l'intégration du profil de vitesse est observée entre les distances d'observations $n = 200$ et $n = 7000$. De plus, à cause de ce phénomène d'asynchronisme, une saturation rapide de l'amplitude du signal démodulé est observée dès une distance égale à quelques centaines de billes. Ce qui n'est pas le cas lorsque les effets de la dispersion de vitesse ne sont pas importants ($p \ll 1$, $\omega \simeq 0.083$ sur la figure 3.4). L'amplitude du signal démodulé n'est pas saturée aussi rapidement, et le profil temporel reste inchangé, proportionnel à la dérivée première de la fonction de modulation Gaussienne.

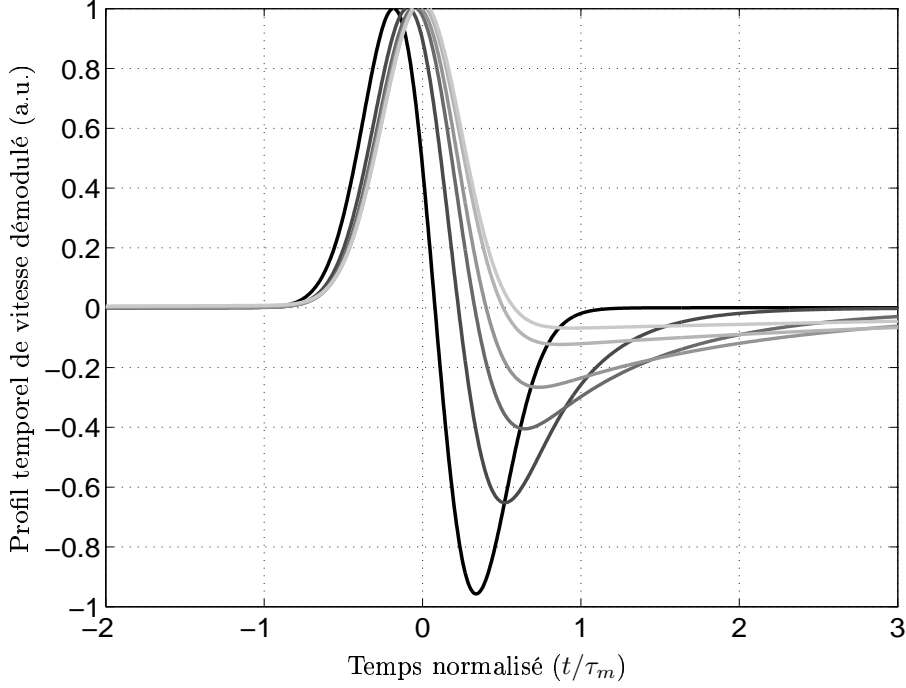


FIG. 3.5: Transition associée à la dispersion de vitesse pour le profil de vitesse démodulée à partir d'ondes de pompage propagatives. Le paramètre p vaut du noir au gris clair respectivement 0.16 0.73 1.6 2.76 6.6 12.2, $C = 2 \cdot 10^{-7}$, et $\Omega \simeq 1.7 \cdot 10^{-3}$.

3.4.2 Transition associée à la dispersion de vitesse

Sans changer la distance d'observation du signal démodulé, il est tout de même possible d'obtenir une transition dans la forme du profil temporel de vitesse démodulée en changeant un paramètre du signal de pompage comme la fréquence centrale du paquet d'onde ou encore le temps caractéristique de modulation $\tau_m \sim 1/\Omega$. Sur la figure 3.5, une telle transition est représentée, pour laquelle le paramètre adimensionnel p varie de $p \simeq 0.16$ à $p \simeq 12.2$ en changeant la fréquence porteuse du paquet d'onde Gaussien entre $\omega \simeq 0.083$ et $\omega \simeq 0.97$. Ces cas limites correspondent respectivement aux expressions (3.36) et (3.38) de la fonction de transfert $G(\omega, \Omega)$ du processus d'auto-démodulation. Pour $p \ll 1$, $G(\omega, \Omega) \sim \omega^2 \ell_a(\omega)$, alors que pour $p \gg 1$, $G(\omega, \Omega) \sim \omega^2 c_g(\omega) / \Omega(1 - c_g(\omega))$, ce qui assure une intégration du signal démodulé. Au moment de la transition (intégration du profil de vitesse), le paramètre adimensionnel p est de l'ordre de 1, ce qui permet de déterminer le paramètre mal connu $\ell_a(\omega) \simeq c_g(\omega) / k(\Omega)(1 - c_g(\omega))$, puisque les autres sont contrôlés (ω , Ω).

Il est important de noter que cette transition $p \ll 1 \rightarrow p \gg 1$ réalisée en augmentant la fréquence porteuse ω est équivalente qualitativement à la même variation pour le paramètre p réalisée en augmentant la largeur spectrale associée à Ω (ou en diminuant le temps caractéristique de modulation $\tau_m \sim 1/\Omega$). La réalisation de cette transition grâce à τ_m pour différentes valeurs de la fréquence porteuse ω pourrait permettre d'extraire la dépendance fréquentielle de l'atténuation des ondes de pompage $\ell_a(\omega)$.

3.4.3 Transition propagatif \rightarrow évanescent

Lorsque les ondes de pompage ne sont plus propagatives mais sont localisées dans l'espace au voisinage de l'émetteur, les phénomènes cumulatifs associés à la dispersion de vitesse disparaissent. Ce brusque changement dans le transport des ondes de pompage est une source d'informations sur le milieu, et plus particulièrement sur sa microstructure.

3.4.3.1 Cas de deux fréquences de pompage

La formule complète (3.19) est utilisée pour tracer l'amplitude du signal démodulé en fonction de la fréquence de pompage sur la figure 3.6. La distance d'observation est $n = 5000$, la constante d'atténuation $C = 5 \cdot 10^{-7}$, et les fréquences démodulées $\Omega \simeq 1.7 \cdot 10^{-4}, 8.3 \cdot 10^{-4}, 3.3 \cdot 10^{-3}, 8.3 \cdot 10^{-3}$. Dans ces quatre cas, une chute d'au moins un ordre de grandeur en amplitude du signal démodulé est observée à la transition entre ondes de pompage propagatives et évanescentes qui apparaît à $\omega = 1$. Dans une configuration où le déphasage entre sources non linéaires et signal démodulé est important sur une grande partie de la bande propagative ($\Omega \simeq 8.3 \cdot 10^{-3}$), la chute d'amplitude à la transition est plus faible en raison de la saturation de l'effet de démodulation pour les ondes propagatives. Cependant, lorsque le déphasage entre sources non linéaires et signal démodulé est faible sur la majeure partie de la bande propagative ($\Omega \simeq 1.7 \cdot 10^{-4}$), cette chute d'amplitude atteint trois ordres de grandeur.

Comme dans le cas $p \gg 1$ de la figure 3.3, une succession de minima et de maxima est observée pour les plus grandes valeurs de Ω sur la figure 3.6. Le même phénomène est responsable de ce comportement, i.e. la dispersion de vitesse qui entraîne un asynchronisme entre sources non linéaires et signal démodulé, étant alternativement en phase et en opposition de phase. La formule (3.52) permet d'évaluer ces minima, ce qui pour $n = 5000$, et $\Omega \simeq 8.3 \cdot 10^{-3}$ donne un premier minimum à $\omega \simeq 0.37$. Ce résultat concorde bien avec la courbe correspondante sur la figure 3.6, ligne noire.

A la transition, $\omega = 1$, et $k(\omega) = 2/a$, ce qui permet d'obtenir des paramètres comme la raideur des contacts α , la force statique exercée sur la chaîne, le diamètre a des billes à partir des équations (1.12), (1.9) et (1.13) du chapitre 1.

3.4.3.2 Cas d'un paquet d'onde Gaussien de pompage

En ce qui concerne le profil du signal démodulé à partir de l'émission d'un paquet d'onde Gaussien de pompage, sa forme peut évoluer lors de la transition entre ondes de pompage propagatives et évanescentes. Sur la figure 3.7, trois transitions sont tracées, chacune pour un ordre de grandeur du paramètre adimensionnel p , de $p \gg 1$ en passant par $p \simeq 1$ jusqu'à $p \ll 1$. Trois fréquences porteuses sont utilisées pour chaque transition, $\omega \simeq 0.67$ et 0.83 qui correspondent à des ondes propagatives et $\omega \simeq 1.083$ qui correspond à des ondes évanescentes. La valeur de la constante d'atténuation reste inchangée et est égale à $C = 10^{-6}$.

Pour faire passer le paramètre p de $p \ll 1$ à $p \gg 1$, le temps caractéristique de modulation est varié de $\tau_m \simeq 8.3 \cdot 10^{-2}$ à $\tau_m \simeq 3.3 \cdot 10^{-5}$ avec $\omega \simeq 0.67$, et $C = 10^{-6}$. Lorsque $p \gg 1$, le changement de profil démodulé associé à la transition entre des ondes de pompage propagatives vers des ondes de pompage évanescentes est représenté sur la figure 3.7, fenêtre A. Comme les effets de dispersion de vitesse dans la zone propagative sont importants ($p \gg 1$, cas limite (3.38)), le profil de vitesse est intégré et est proportionnel à la fonction Gaussienne. Le profil de vitesse démodulée à partir d'ondes de pompage évanescentes est, quant à lui, proportionnel à la dérivée première d'une Gaussienne lorsque la fréquence de pompage est suffisamment éloignée de la fréquence de coupure (voir le cas limite (3.56)). La transition de la zone propagative vers la zone évanescente pour les ondes de pompage se manifeste

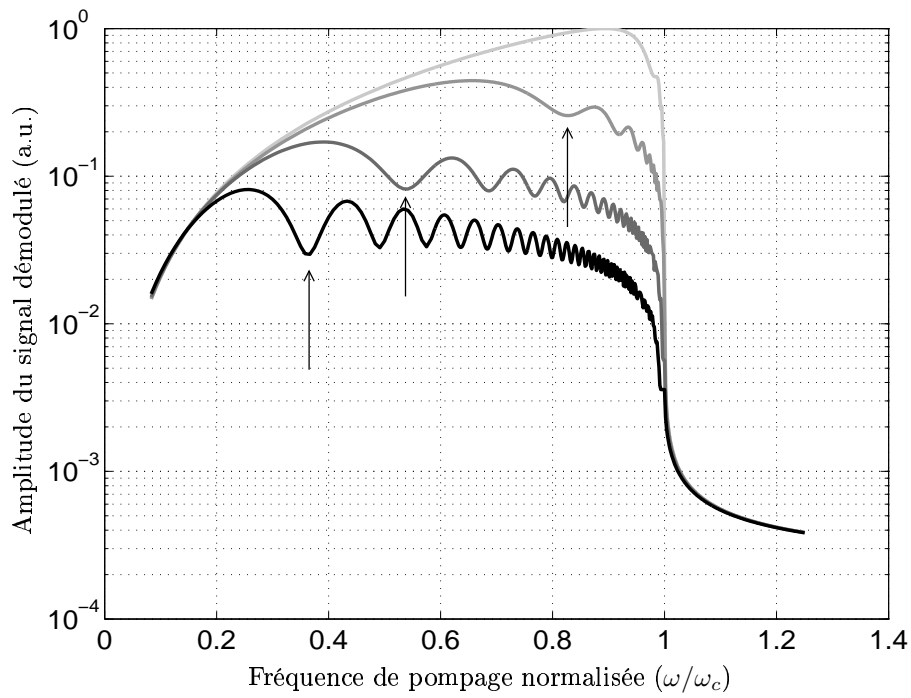


FIG. 3.6: Transition entre la génération du signal démodulé par des ondes de pompage propagatives et par des ondes de pompage évanescentes. La distance d'observation est fixée à $n = 5000$, la constante d'atténuation $C = 5 \cdot 10^{-7}$, et les fréquences démodulées valent respectivement $\Omega \simeq 1.7 \cdot 10^{-4}, 8.3 \cdot 10^{-4}, 3.3 \cdot 10^{-3}$ et $8.3 \cdot 10^{-3}$ du gris clair au noir.

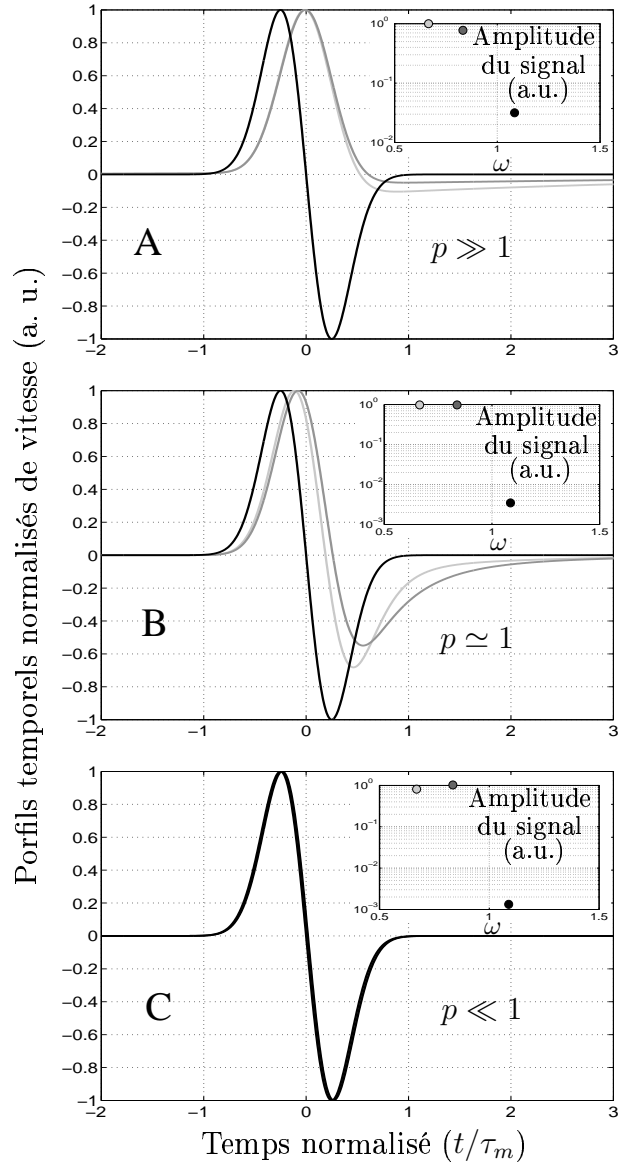


FIG. 3.7: Transition entre la génération du signal démodulé par un paquet d'ondes de pompage propagatives et par un paquet d'ondes de pompage évanescents en dehors de la région d'interaction pour trois valeurs du paramètre adimensionnel p . Les insertions représentent les amplitudes des signaux démodulés et donnent ainsi une estimation de la chute d'amplitude à la transition.

donc, dans ce cas, par une dérivation du profil temporel démodulé. La figure insérée montre aussi une forte chute de l'efficacité de l'antenne lors de cette transition.

Lorsque $p \simeq 1$, l'intégration due à la dispersion de vitesse se manifestant entre les sources non linéaire HF et le signal démodulé est partielle. La transition dans la forme du profil existe toujours mais est moins nette que dans le cas $p \gg 1$. Cependant, le signal étant moins saturé en amplitude à cause de la dispersion de vitesse, la chute d'amplitude est plus importante que dans le cas $p \gg 1$ (voir l'insertion de la fenêtre B).

Finalement lorsque $p \ll 1$, aucune transition dans la forme du profil temporel de vitesse démodulée ne se manifeste. Que ce soit pour des ondes de pompage propagatives ou évanescentes, le profil de vitesse est proportionnel à la dérivée première de la fonction Gaussienne (fenêtre C de la figure 3.7). C'est cependant dans ce cas limite que la chute d'efficacité de l'antenne paramétrique est la plus forte comme il est illustré dans l'insertion C. Il faut noter aussi que dans ce cas limite, l'amplitude du signal démodulé augmente pratiquement tout le temps dans la région propagative avec la fréquence de pompage, ce qui n'était pas le cas pour $p \gg 1$, où une région importante comportait une décroissance de la fonction de transfert $G(\omega\Omega)$ en fonction de la fréquence de pompage à cause de la dispersion de vitesse. Dans la région évanescente, l'amplitude démodulée décroît tout le temps en fonction de la fréquence de pompage ω .

En définitive, la transition entre ondes de pompage propagatives et évanescentes se manifeste soit par une dérivation du profil temporel démodulé et une chute d'amplitude d'un ordre de grandeur ($p \gg 1$), soit par une chute d'amplitude uniquement, de plus de deux ordres de grandeur ($p \ll 1$).

Sur les figures 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 sont tracés les profils temporels de déplacements démodulés en fonction de la distance à l'émetteur de pompage pour quatre fréquences de pompage différentes. Sur la figure 3.8, la fréquence de pompage est faible $\omega = 1/12$, leur atténuation est donc relativement faible ($C = 10^{-6}$) ainsi que les effets de dispersion de vitesse ($p \simeq 0.14$). Après une distance de propagation de $n = 5000$ billes, l'amplitude du profil démodulé augmente toujours en fonction de la distance, les sources non linéaires sont encore actives. En l'absence d'effets de dispersion importants, la forme qualitative du profil démodulé reste inchangée.

Sur la figure 3.9, la fréquence de pompage est augmentée $\omega = 5/12$. L'amplitude du signal démodulé, à cause de la plus faible étendue de la région source non linéaire et des effets de dispersion de vitesse qui limitent l'efficacité de l'auto-démodulation ($p \simeq 0.8$), est saturée à partir de la distance de $n = 1000 - 2000$ billes. De plus, les effets de dispersion modifient, comme prédit précédemment, la forme du profil démodulé. Les sources non linéaires se propageant plus lentement que le signal démodulé qu'elles génèrent, un phénomène de traînage commence à se faire ressentir sur le profil du déplacement démodulé.

Sur la figure 3.10, ce phénomène est plus marqué à cause de la plus grande influence de la dispersion ($p \simeq 3.4$) sur le processus d'auto-démodulation. Dès les premières centaines de billes, le signal démodulé atteint son amplitude maximale et son profil définitif.

Sur la figure 3.11, les ondes de pompage sont évanescentes ($\omega = 16/15$). La région source est localisée sur les premières billes. Le signal démodulé est proportionnel à la fonction Gaussienne de modulation de l'intensité de pompage dès les premières billes et son profil ne varie plus avec la distance.

Dans le chapitre précédent, l'analyse du résultat pour l'antenne paramétrique dans un milieu multi-diffusant a été réalisée dans des cas limites similaires. Tout d'abord, la démodulation des ondes balistiques de pompage HF dans un milieu homogène dispersif a été analysée. Une transition dans le profil temporel démodulé était prédite lorsqu'un asynchronisme entre les sources non linéaires créées par les ondes de pompage HF et l'onde démodulée (à cause de la dispersion de vitesse) avait le temps de s'accumuler avant que les ondes de pompage soient atténuées. Cette transition est équivalente à la transition $p \ll 1 \rightarrow p \gg 1$ analysée dans ce chapitre. Le phénomène de dispersion de vitesse se

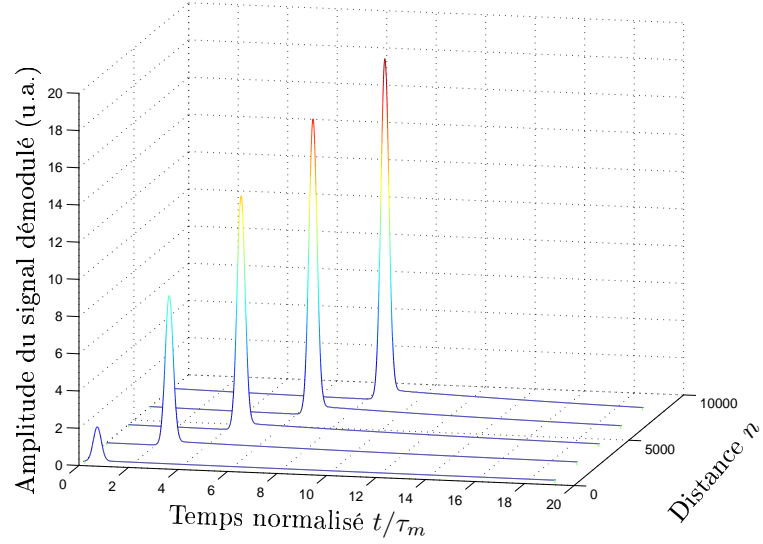


FIG. 3.8: Evolution du profil temporel du déplacement démodulé en fonction de la distance en nombre de billes à partir de la source d'ondes de pompage. $\omega = 1/12$. $p \simeq 0.14$.

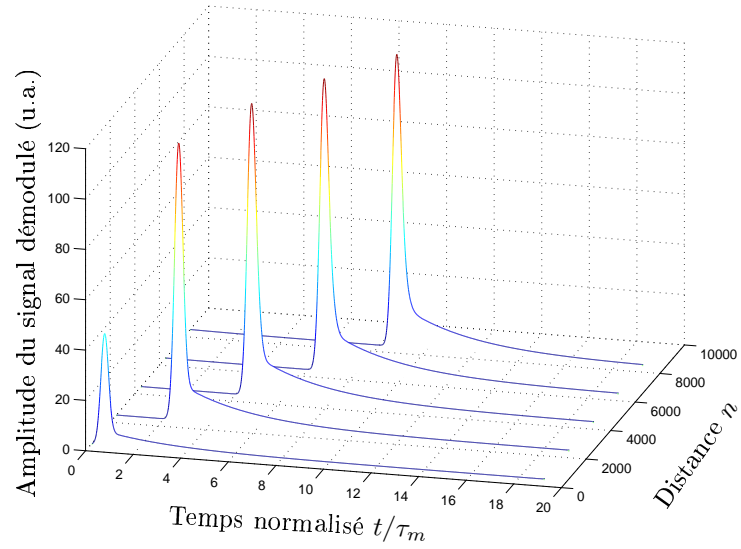


FIG. 3.9: Evolution du profil temporel du déplacement démodulé en fonction de la distance en nombre de billes à partir de la source d'ondes de pompage. $\omega = 5/12$. $p \simeq 0.8$.

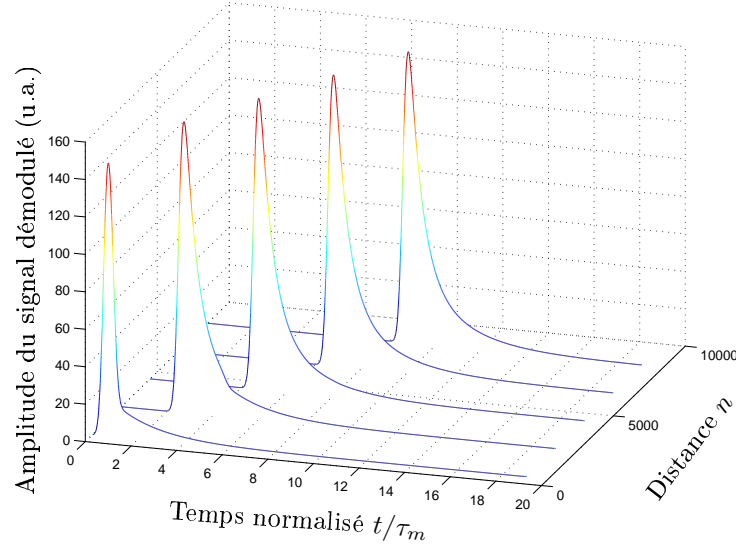


FIG. 3.10: Evolution du profil temporel du déplacement démodulé en fonction de la distance en nombre de billes à partir de la source d'ondes de pompe. $\omega = 10/12$. $p \simeq 3.4$.

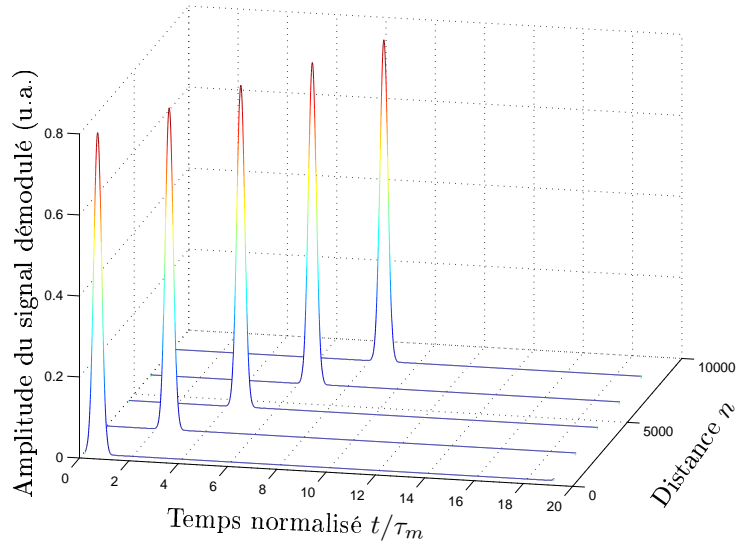


FIG. 3.11: Evolution du profil temporel du déplacement démodulé en fonction de la distance en nombre de billes à partir de la source d'ondes de pompe. $\omega = 16/15$.

manifeste par une intégration du profil démodulé BF. Cette transition fournit des informations sur l'atténuation de la composante balistique des ondes primaires, et sur la différence de vitesse entre les ondes primaires HF et l'onde démodulée (par l'intermédiaire du paramètre p). Ces résultats sont concordants avec les résultats présents, principalement en raison de la même relation de dispersion pour les ondes propagatives.

Ensuite, la démodulation d'ondes de pompage diffusives a été analysée. La dérivation du profil démodulé a été prédite dans le cas de la diffusion des ondes de pompage HF lorsque la durée du paquet d'onde initialement émis était augmenté à partir d'une valeur suffisamment faible. Cette transition fournit des informations sur le temps caractéristique d'absorption $\tau_a(\omega)$ des ondes primaires HF.

Finalement, les manifestations de la transition balistique \rightarrow diffusion dans le transport des ondes de pompage sur le profil du signal démodulé ont été analysées. Les conditions sur les temps caractéristiques de diffusion, d'absorption, et de modulation ont été établies, pour lesquelles la transition balistique \rightarrow diffusion dans le transport des ondes de pompage se traduit par une transformation du profil démodulé. La transition balistique \rightarrow diffusion est accompagnée par l'intégration du profil démodulé BF. Cette transformation du signal BF fournit des informations sur le temps caractéristique de diffusion τ_s des ondes primaires.

Plusieurs différences sont à noter par rapport au chapitre précédent où l'influence de la transition balistique \rightarrow diffusion dans le transport des ondes de pompage sur la génération du signal démodulé a été étudiée. Tout d'abord, alors que la transition propagatif \rightarrow évanescent se manifeste par une dérivation du profil temporel démodulé (ou partielle ou absente), la transition balistique \rightarrow diffusion se manifeste par une intégration du profil démodulé (ou partielle ou absente). Ensuite, la transition balistique \rightarrow diffusion, qui ne peut avoir lieu que dans un milieu désordonné, n'apparaît pas à partir d'une fréquence de pompage précise, mais elle apparaît plutôt progressivement. À l'inverse la transition propagatif \rightarrow évanescent apparaît, dans un milieu régulier, sur une très petite échelle, à la fréquence de coupure. Finalement, dans un milieu granulaire tridimensionnel avec un arrangement aléatoire, les deux phénomènes peuvent coexister, la transition balistique \rightarrow diffusion étant associée au désordre du milieu alors que la transition propagatif \rightarrow évanescent est associée au caractère régulier du réseau.

3.5 Conclusion

Un modèle théorique qui décrit le phénomène non linéaire d'auto-démodulation d'amplitude dans une chaîne granulaire a été développé. Ce modèle prend en compte la relation de dispersion associée à la nature discrète du réseau, et prend en compte les modes évanescents pour les ondes HF. Grâce à une intégration de la solution analytique obtenue pour le déplacement démodulé dans le cas de deux fréquences de pompage, l'auto-démodulation de paquets d'onde Gaussiens a été considérée. Le comportement de l'amplitude du signal démodulé BF est étudié en fonction de la fréquence des ondes primaires, la distance de propagation et l'absorption.

La transition entre des ondes primaires propagatives et des ondes primaires évanescentes se manifeste dans chaque cas par une forte diminution de l'amplitude du signal démodulé. Dans des cas particuliers, le profil temporel démodulé peut être dérivé (figure 3.6 et figure 3.7) lorsque les ondes primaires deviennent évanescentes.

La dispersion de vitesse, en raison de l'asynchronisme entre les sources non linéaires HF et l'onde démodulée BF, sature le processus d'auto-démodulation d'amplitude. Parmi ses manifestations, une succession de minima et de maxima dans le comportement en amplitude du signal démodulé à partir de deux fréquences de pompage est prédite ou encore une saturation d'amplitude et un étalement de la largeur de l'impulsion de déplacement pour un signal provenant de la démodulation d'un paquet d'onde de pompage.

Ce modèle a pour originalité de toujours conserver le caractère discret du réseau, tout en étudiant ses propriétés non linéaires.

Bibliographie

- [Bel94] I.Y. Belyaeva, V.Y. Zaitsev et E.M. Timanin, “*Experimental study of nonlinear elastic properties of granular media with nonideal packing*”, Acoust. Phys. **40**, 789-793 (1994).
- [Bri56] L. Brillouin et M. Parodi, *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*, (Masson, Paris), (1956).
- [Cos97] C. Coste, E. Falcon et S. Fauve, “*Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact*”, Phys. Rev. E **56**, 6104-6117 (1997).
- [Cos99] C. Coste et B. Gilles, “*On the validity of Hertz contact law for granular material acoustics*”, Eur. Phys. J. B **7**, 155-168 (1999).
- [deB99] M. de Billy, “*Experimental study of sound propagation in a chain of spherical beads*”, J. Acoust. Soc. Am. **108**, 1486-1495 (2000).
- [Gen02] F. Geniet et J. Leon, “*Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain*”, Phys. Rev. Lett. **89**, 134102 (2002).
- [Has99] E. Hascoët, H.J. Herrmann et V. Loreto, “*Shock propagation in a granular chain*”, Phys. Rev. E **59**, 3202-3206 (1999).
- [Has00] E. Hascoët et H. J. Herrmann, “*Shocks in non-loaded bead chain with impurities*”, Eur. Phys. J. B. **14**, 183-190 (2000).
- [Hla02] A.-C. Hladky-Hennion, F. Cohen-Tenoudji, A. Devos et M. de Billy, “*On the existence of subresonance generated in a one-dimensional chain of identical beads*”, J. Acoust. Soc. Am. **112**, 850 (2002).
- [Joh85] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, (Cambridge University Press, Cambridge), (1985).
- [Lan86] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, *Theory of elasticity*, (Pergamon Press, Oxford), (1986).
- [Liu92] C.H. Liu et S. R. Nagel, “*Sound in sand*”, Phys. Rev. Lett. **68**, 2301-2304 (1992).
- [Liu93] C.H. Liu et S.R. Nagel, “*Sound in a granular material : Disorder and nonlinearity*”, Phys. Rev. B **48**, 15646-15650 (1993).
- [Man00] M. Manciu, S. Sen, et A. J. Hurd, “*Crossing of identical solitary waves in a chain of elastic beads*”, Phys. Rev E **63**, 016614 (2000).
- [Mar71] A. A. Maradudin, *Theory of lattice dynamics in the harmonic approximation*, (Academic Press, New-York and London), (1971).
- [Nes83] V.F. Nesterenko, “*Propagation of nonlinear compression pulses in granular media*”, J. Appl. Mech. and Tech. Phys. **24**, 567 (1983).
- [Nov87] B.K. Novikov, O.V. Rudenko et V.I. Timochenko, *Nonlinear Underwater Acoustics*, (ASA, New-York), (1987).
- [Sen98] S. Sen, M. Manciu et J.D. Wright, “*Solitonlike pulses in perturbed and driven Hertzian chains and their possible applications in detecting buried impurities*”, Phys. Rev E **57**, 2386-2397 (1998).
- [Tou02] V. Tournat, V.E. Gusev et B. Castagnède, “*Influence of ballistics to diffusion transition in primary wave propagation on parametric antenna operation in granular media*”, Phys. Rev. E **66**, 041303 (2002).
- [Tou03] V. Tournat, B. Castagnède, V.E. Gusev et P. Béquin, “*Self-demodulation acoustic signatures for nonlinear propagation in glass beads*”, C.R. Mecanique **331**, 119-125 (2003).
- [Tou03(s)] V. Tournat, V. Gusev et B. Castagnède, “*Influence of transition from propagative to evanescent primary elastic waves on the nonlinear self-demodulation process in a 1D granular chain*”, soumis à Phys. Rev. E, 2003.

- [Tou03a] V. Tournat, P. Béquin, B. Castagnède et V. Gusev, “*On the possible applications of the nonlinear acoustic phenomena for the evaluation of the granular materials*”, Emerging Technologies in Non-Destructive Testing, Salonique, Grèce, 24-26 mai (2003).
- [Whi83] J.E. White, *Underground Sound Application of Seismic Waves*, (Elsevier, Amsterdam), (1983).
- [Zai99a] V.Y. Zaitsev, V.E. Nazarov et V.I. Talanov, “*Experimental study of the self action of seismoacoustic waves*”, Acoust. Phys. **45**, 720-726 (1999).
- [Zai99b] V.Y. Zaitsev, A.B. Kolpakov et V.E. Nazarov, “*Self-demodulation of acoustic pulses in river sand : Experiment*”, Acoust. Phys. **45**, 202-208 (1999).
- [Zai99c] V.Y. Zaitsev, A.B. Kolpakov et V.E. Nazarov, “*Self-demodulation of acoustic pulses in river sand. Theory*”, Acoust. Phys. **45**, 305-310 (1999).

Chapitre 4

Antenne paramétrique avec des ondes de pompage de cisaillement

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents 2 et 3, l'antenne paramétrique acoustique en émission est présentée comme une méthode expérimentale adaptée à l'évaluation des milieux non linéaires où l'atténuation des ondes acoustiques est forte. C'est le cas des milieux granulaires pour des fréquences d'excitation suffisamment hautes, lorsque l'absorption, la diffusion ou le caractère évanescent des ondes acoustiques contribuent à l'atténuation. En soumettant le milieu à une perturbation acoustique de hautes fréquences, sensible à la micro-structure du milieu, il est possible, grâce à la méthode de l'antenne paramétrique, de générer des ondes acoustiques de basses fréquences, faiblement atténuées, et dont les caractéristiques dépendent de cette micro-structure [Zai99a, Zai99b, Zai95].

L'intérêt d'utiliser des ondes de pompage HF de cisaillement pour l'antenne paramétrique peut se justifier a priori par les arguments suivants : dans les milieux homogènes et isotropes, le phénomène d'auto-démodulation d'amplitude (principe de l'antenne paramétrique) bien que théoriquement possible [Zar71], est très peu efficace avec des ondes de pompage transverses. L'antenne paramétrique avec ondes de pompage de cisaillement est donc susceptible d'être efficace dans les milieux où une anisotropie ou bien des inhomogénéités sont présentes, menant à une conversion des modes transverses vers les modes longitudinaux. L'antenne paramétrique avec ondes de pompage de cisaillement, lorsqu'il y a conversion de modes vers des ondes longitudinales, met en jeu le phénomène de dilatance, c'est à dire la tendance d'expansion/dilatation d'un milieu soumis à une contrainte de cisaillement [Rey1885].

Les contacts faibles, dont la déformation statique est plus faible que la déformation statique moyenne de l'ensemble des contacts du milieu, présentent une non-linéarité quadratique plus élevée que les contacts forts, ceux dont la pré-déformation statique est plus élevée que la moyenne (voir le chapitre 1). Il est démontré dans la section suivante que les processus non linéaires sont très sensibles à la présence de contacts faibles qui existent dans les milieux granulaires non-réguliers, contrairement aux processus linéaires qui sont surtout sensibles aux contacts forts.

Les chaînes de force, qui apparaissent dans les milieux granulaires sous contrainte statique, font intervenir des contacts forts. Une contrainte statique anisotrope appliquée au milieu entraîne une anisotropie de ces chaînes de force, et par conséquent une anisotropie de la non-linéarité effective du milieu. Selon leur polarisation, des ondes transversales, propagées dans une même direction mais avec des polarisations différentes, vont subir au cours de leur propagation, une influence différente des non-linéarités anisotropes présentes dans le milieu.

L'influence du phénomène non linéaire de clappement (ouverture et fermeture des contacts sous l'action de l'onde acoustique) est analysée. Ce phénomène fait intervenir une transition claire dans la dynamique de croissance de l'amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude d'excitation des ondes de pompage HF.

4.1.1 Rôle des contacts “faibles” dans les arrangements granulaires

Concernant les propriétés mécaniques macroscopiques linéaires (incluant les propriétés acoustiques) des milieux granulaires tri-dimensionnels, il est convenu que ce sont les contacts forts, intervenant dans les chaînes de force, qui jouent un rôle primordial. De nombreux travaux ont été réalisés dans ce domaine, portant en particulier sur la caractérisation des chaînes de force [Mak00, Hid02], la mesure et la modélisation des distributions de contacts [Rad96, Lud97, Mue98] (nombre de contacts dans le milieu en fonction de leur déformation statique ou contrainte statique). Sur la figure 4.1 sont représentés schématiquement dans l'espace des déformations statiques, les domaines associés aux contacts faibles et aux contacts forts.

Pour la caractérisation des contacts faibles, dont rappelons-le, les déformations statiques sont plus faibles que la déformation moyenne, les résultats obtenus sont moins nombreux et souvent en contradiction, notamment en raison des faibles sensibilités des méthodes expérimentales [Eri02, Lov99, Bla01] ou à cause de la divergence numérique des calculs de modélisation des milieux granulaires vers ces faibles contacts [Rad96, Sil02, Bar00]. Ces différences se traduisent par divers comportements des distributions de contacts (abordées dans la prochaine section) lorsque la déformation statique des contacts tend vers zéro (distribution constante, divergente, ou convergente vers zéro). Cependant, pour l'étude des effets d'acoustique non linéaire dans les milieux granulaires, nous montrons que ces contacts faibles jouent un rôle important.

Le point de départ est obtenu, dans le cas le plus simple des contacts identiques (milieu granulaire régulier), grâce à la non-linéarité de Hertz. La relation contraintes-déformations d'un matériau granulaire régulier peut s'écrire sous la forme déjà rencontrée [Zai95] :

$$\sigma = bn\varepsilon^{3/2}H(\varepsilon) \quad , \quad (4.1)$$

où le facteur b dépend des modules élastiques des billes, et n est le nombre moyen de contacts par bille. La fonction de Heaviside $H(\varepsilon)$ indique que seuls les contacts comprimés contribuent aux contraintes dans le matériau. Par convention, dans la suite des développements, une compression correspond à σ , $\varepsilon > 0$.

La déformation statique ε_0 du matériau (équivalente à la déformation statique moyenne des contacts dans un milieu régulier) détermine le module élastique linéaire $d\sigma(\varepsilon_0)/d\varepsilon$ pour des déformations et contraintes acoustiques de faible amplitude $|\tilde{\varepsilon}| \ll |\varepsilon_0|$ et $|\tilde{\sigma}| \ll \sigma_0 \equiv \sigma(\varepsilon_0)$, respectivement.

Dans les milieux granulaires non réguliers (ils sont plus fréquemment rencontrés dans la réalité), une proportion de contacts plus faiblement pré-contraints (\equiv contraints statiquement) que la moyenne existe [Cop96, Rad98], et contribue à la contrainte résultante $\sigma(\varepsilon)$. Pour une démonstration qualitative du rôle de ces contacts faibles, seule une fraction additionnelle de faibles contacts est introduite pour le moment. En séparant explicitement les parties statique et dynamique des champs, la relation contraintes-déformations peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = bn_0(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2}H(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}) + bn_1(\mu\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2}H(\mu\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}) \quad . \quad (4.2)$$

Les nombres moyens n_0 et n_1 de contacts forts et faibles par bille sont comparables [Rad98]. Cela est estimé par des modélisations numériques et des données sur les vitesses de propagations acoustiques.

Le coefficient adimensionnel $|\mu| \ll 1$ caractérise le chargement de la fraction additionnelle de faibles contacts.

La prise en compte des “trous” ou “gaps” initiaux, se refermant sous l’action de l’onde acoustique d’amplitude de déformation $|\tilde{\varepsilon}| > |\mu|\varepsilon_0$ pour former des contacts, est possible en considérant que $\mu < 0$. Pour les considérations qualitatives présentes, ces “trous” ne sont pas pris en compte.

Dans le cas des contacts faiblement pré-contraints $0 < \mu \ll 1$ et $|\tilde{\varepsilon}| \ll |\mu|\varepsilon_0$, les dérivées successives par rapport à $\tilde{\varepsilon}$ de l’équation (4.3) suivante caractérisent les modules élastiques linéaires et non linéaires du matériau :

$$\frac{d^m \tilde{\sigma}}{d\tilde{\varepsilon}^m}(\varepsilon_0) \sim b n_0 \left(1 + \frac{n_1}{n_0} \mu^{3/2-m}\right) \varepsilon_0^{3/2-m} . \quad (4.3)$$

Le module élastique linéaire correspond à $m = 1$, et le module élastique non linéaire quadratique correspond à $m = 2$. Ces modules s’écrivent donc respectivement :

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\varepsilon}}(\varepsilon_0) \sim b n_0 \left(1 + \frac{n_1}{n_0} \mu^{1/2}\right) \varepsilon_0^{1/2} \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\sigma}}{d\tilde{\varepsilon}^2}(\varepsilon_0) \sim b n_0 \left(1 + \frac{n_1}{n_0} \mu^{-1/2}\right) \varepsilon_0^{-1/2} . \quad (4.5)$$

Comme $n_1 \sim n_0$, la contribution relative des contacts faibles par rapport aux contacts forts pour le module d’élasticité linéaire ($m = 1$) est donc de l’ordre de $\mu^{1/2} \ll 1$. Les contacts faibles ne jouent donc pas un rôle important pour les propriétés élastiques linéaires du milieu granulaire. A l’inverse, la contribution relative des contacts faibles par rapport aux contacts forts pour le module d’élasticité non linéaire quadratique ($m = 2$) est de l’ordre de $\mu^{-1/2} \gg 1$. Les contacts faibles jouent donc un rôle prépondérant dans les propriétés élastiques non linéaires des milieux granulaires.

4.1.2 Distributions de contacts

Les distributions de contacts représentent le nombre de contacts qui apparaissent dans le milieu granulaire en fonction de leur déformation statique, de leur contrainte statique ou de leur force statique. Le plus souvent, les échelles de déformations, de contraintes ou de forces statiques sont normalisées par rapport à leur valeur moyenne dans le milieu. Dans la suite, la déformation statique des contacts est normalisée par rapport à la valeur moyenne ε_0 , et est donc caractérisée par la variable μ qui traduit l’écart de la déformation statique du contact considéré à la déformation statique moyenne. Les formes des distributions de contacts sont obtenues par modélisation numérique complète des assemblages granulaires [Rad96, Lud97, Cop96, Sil02, Bar00] ou par des expériences statiques dans lesquelles la détection est effectuée à l’aide de papier de carbone [Mue98, Bla01, Eri02, Lov99]. Chaque trace laissée par le carbone sur une feuille de papier disposée au fond ou sur les parois latérales d’un conteneur rigide correspond à un contact de bille. La surface de chaque trace est liée à la force (contrainte ou déformation) statique du contact. Un traitement d’image permet de décompter les taches selon leur surface et donc de remonter à la distribution des contacts dans le milieu.

Les méthodes expérimentales, principalement axées vers la caractérisation des chaînes de force et donc des contacts forts, sont capables de détecter des forces descendant jusqu’à 0.1 fois la force statique moyenne [Eri02, Lov99, Bla01].

Les simulations numériques de milieux granulaires montrent que le nombre de contacts faibles n_1 est légèrement supérieur au nombre de contacts forts n_0 qui ne représentent qu’environ 40% des contacts du milieu [Rad98, Cop96]. La contribution des contacts faibles au signal non linéaire doit donc, selon l’équation (4.3) et la discussion qui lui est associée, dominer à partir d’amplitudes de déformations d’excitation de l’ordre de $\mu \leq 0.1 - 0.01$. De telles déformations correspondent à des forces encore plus

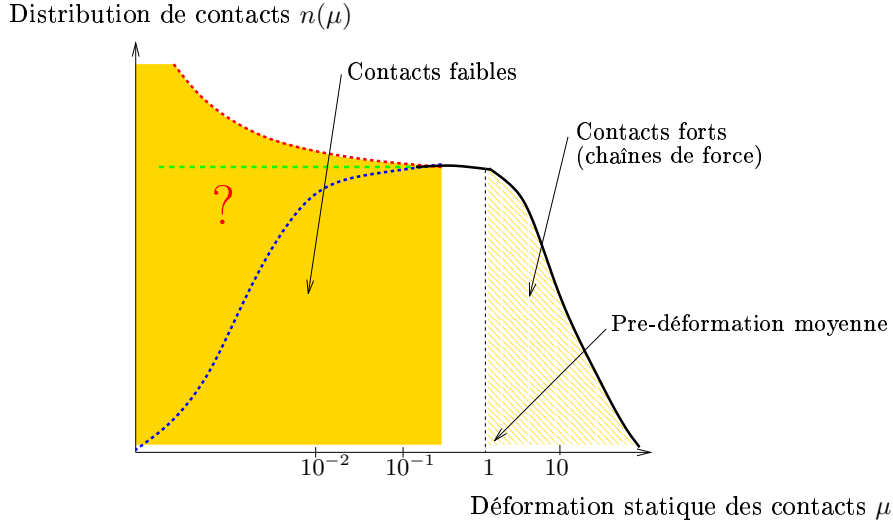


FIG. 4.1: Différentes distributions de déformations de contacts. Pour $\mu > 1$, la forme de la distribution est bien modélisée. En revanche, pour $\mu < 1$, plusieurs comportements sont rencontrés dans la littérature.

faibles de l'ordre de $f/f_0 \leq 0.03 - 0.001$, qui se trouvent bien en-dessous des valeurs qui sont obtenues dans les expériences statiques actuelles [Mue98, Bla01, Eri02].

Dans les considérations qui suivent, la distribution de déformations (et non de forces) de contacts va être considérée, ce qui facilite l'interprétation des résultats obtenus, en particulier concernant le phénomène de clappement. Cette distribution est notée $n(\mu)$, avec la déformation statique moyenne qui correspond à $\mu = 1$.

Dans tous les cas, une décroissance exponentielle de cette distribution pour les forces statiques supérieures à la force statique moyenne ($\mu = 1$) est reportée dans la littérature. De façon générale, ce comportement peut être décrit par la forme suivante de la distribution de déformation :

$$n(\mu) \propto e^{-\alpha_1(\mu-1)^{\alpha_2}} \quad \mu \geq 1, \quad (4.6)$$

avec α_1 et α_2 deux constantes proches de 1 qui dépendent par exemple, outre les différentes méthodes expérimentales ou numériques utilisées, de la friction dans le milieu. Les valeurs utilisées dans la suite sont fixées à $\alpha_1 = 1.4$ et $\alpha_2 = 3/2$ [Sil02]. L'influence de ces constantes sur la modélisation et les considérations qui suivent est minime. En effet, des formes qualitatives de distributions très différentes au-dessus de la valeur moyenne $\mu = 1$ ($n(\mu) = 0$ pour $\mu \geq 1$ par exemple) n'ont que très peu d'influence sur les résultats obtenus dans la suite.

Sur la figure 4.1 est représentée une distribution de déformations de contacts. Alors que la forme qualitative de cette distribution est bien décrite pour $\mu > 1$, plusieurs comportements distincts sont rencontrés selon les travaux reportés pour $\mu < 1$.

Les estimations de la déformation statique moyenne du milieu ε_0 ont été menées à l'aide des formules de modélisation des propriétés mécaniques et élastiques des assemblages granulaires issues de [Bel94] (voir le chapitre 1), du modèle de Hertz [Joh85], et de mesures directes de déformation statique de l'assemblage soumis à une force extérieure.

La contrainte minimum appliquée sur le milieu dans les expériences présentées par la suite est de $\sim 7 \text{ kPa}$ ce qui correspond à une déformation statique moyenne estimée à $\varepsilon_0 \simeq 0.43 \cdot 10^{-4} \pm 0.15 \cdot 10^{-4}$.

La contrainte maximum, quant à elle, est de $\sim 72 \text{ kPa}$, ce qui représente une déformation statique moyenne de $\varepsilon_0 \simeq 2.0 \cdot 10^{-4} \pm 0.15 \cdot 10^{-4}$. Pour une contrainte uniaxiale extérieure de $\sim 29 \text{ kPa}$, typique des expériences présentées dans la suite, la déformation statique moyenne est estimée à $\varepsilon_0 \simeq 1.1 \cdot 10^{-4} \pm 0.15 \cdot 10^{-4}$.

4.2 Expériences

4.2.1 Dispositif expérimental

Deux configurations expérimentales ont été retenues. Chronologiquement, la première est une configuration de propagation acoustique verticale, c'est à dire selon la direction d'application de la contrainte statique uniaxiale, et est décrite sur la figure 4.2. Le milieu granulaire non-consolidé est composé de billes de verre de diamètre $2 \pm 0.1 \text{ mm}$. Il est contenu dans un récipient plastique cylindrique de 50 cm de haut et de 46 cm de diamètre, fermé par un disque de plexiglass permettant de transmettre la contrainte statique extérieure. Cette contrainte est appliquée par une vis métallique millimétrique et est mesurée à l'aide d'un capteur de force statique de bande utile $1 \rightarrow 10 \text{ kN}$. Ceci correspond à des contraintes allant de 7.2 kPa à 72 kPa pour cette configuration expérimentale, ou encore à des vitesses de phase BF de l'ordre de $200 - 350 \text{ m/s}$.

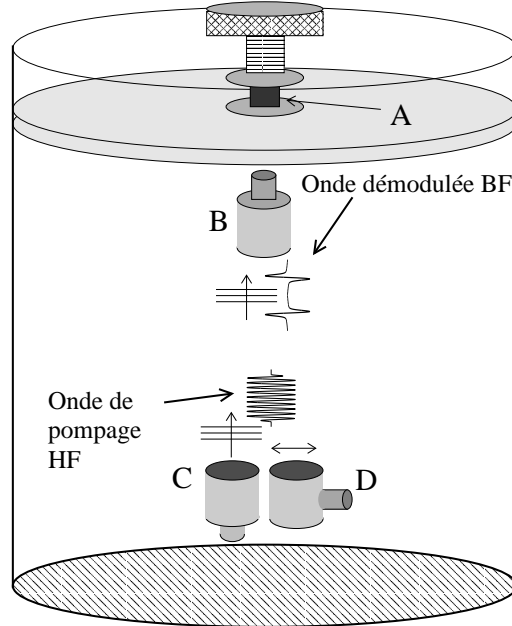


FIG. 4.2: Configuration de l'expérience de propagation verticale. A est le capteur de force, C est l'émetteur longitudinal, D est l'émetteur de cisaillement et B est le récepteur longitudinal. La distance de propagation est de 16 cm .

Afin d'émettre les ondes de pompage de hautes fréquences, un transducteur longitudinal et un transducteur de cisaillement sont placés au fond du récipient et orientés selon son axe vertical vers le haut (transducteurs C et D sur la figure 4.2). Les transducteurs sont large bande, de fréquence centrale 100 kHz , d'ouverture $\sim 3.8 \text{ cm}$ pour le transducteur longitudinal (Panametrics V3052) et $\sim 2.6 \text{ cm}$ pour le transducteur de cisaillement (Panametrics videoscanner V1548). En réception, un transducteur longitudinal est utilisé, identique à celui utilisé en émission, est placé en haut du récipient et est orienté vers le bas (transducteur B sur la figure 4.2). La distance de propagation entre les émetteurs et le récepteur est alors de 16 cm . Un analyseur Stanford Research Systems (SR 785) est utilisé pour l'acquisition des signaux et la mesure d'amplitude à la fréquence du signal démodulé. Les erreurs de mesure associées à l'électronique du dispositif expérimental sont inférieures à la taille des symboles utilisés dans la représentation des résultats suivants.

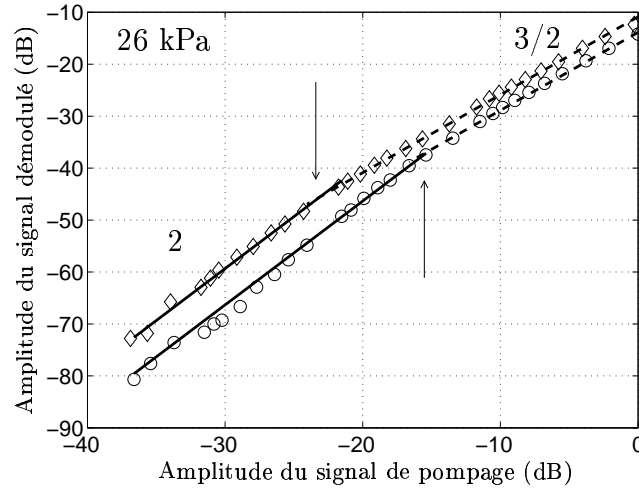


FIG. 4.3: Amplitude des signaux démodulés (~ 5 kHz) en fonction de l'amplitude de pompe (~ 80 kHz) pour une configuration de propagation verticale. L'excitation est longitudinale pour les cercles, et transverse pour les losanges. La contrainte statique appliquée est de 26 kPa. Les flèches indiquent les transitions entre un comportement quadratique et un comportement en puissance $3/2$.

4.2.2 Dynamique de croissance des signaux démodulés

Les ondes de pompes HF de cisaillement et longitudinales sont démodulées grâce à la non-linéarité des contacts présents dans le milieu granulaire. Il est important de mentionner que les ondes de pompe de cisaillement sont capables de mettre en jeu une non-linéarité de Hertz en raison de l'inclinaison des surfaces des contacts inter-grains (due au désordre présent dans le milieu) par rapport à la direction du cisaillement. Il peut donc exister une composante de contrainte normale à la surface du contact, et donc un comportement de Hertz, avec une excitation transverse.

La longueur caractéristique d'atténuation des ondes de pompe HF est estimée de l'ordre de quelques centimètres (typiquement 2–4 cm). La fréquence porteuse utilisée dans l'expérience présentée est de 80.192 kHz. Cette fréquence porteuse est modulée en amplitude à 5.12 kHz, ce qui fixe à la même fréquence l'onde BF démodulée.

Dans cette expérience, l'antenne paramétrique opère dans le régime de Westervelt [Nov97], les ondes de pompe sont atténuées avant d'être diffractées. Dans ce cas, et lorsque l'influence de la dispersion de vitesse sur le fonctionnement de l'antenne est faible, les profils des signaux démodulés sont proportionnels à la dérivée seconde de l'enveloppe du signal de pompe.

Sur la figure 4.3 sont présentées les dépendances de l'amplitude du signal démodulé en fonction des amplitudes de pompe HF de cisaillement et longitudinales obtenues pour une pression statique appliquée de 26 kPa.

La référence utilisée pour l'échelle d'amplitude de pompe en décibels (figure 4.3) correspond à l'amplitude électrique maximale appliquée aux transducteurs émetteurs. Ainsi, le maximum d'amplitude d'émission est 0 dB. La référence utilisée pour l'échelle d'amplitude démodulée en décibels est arbitraire. Une estimation obtenue par une mesure au vibromètre laser de la vitesse à la surface des transducteurs émetteurs donne une valeur de la déformation acoustique induite maximale en émission, $\tilde{\varepsilon}_a^{max} \simeq 1 \cdot 10^{-4}$ à 80 kHz (transducteurs émetteurs de cisaillement et longitudinal). Le caractère purement transverse de l'excitation par l'émetteur ultrasonore de cisaillement a été vérifié par la même

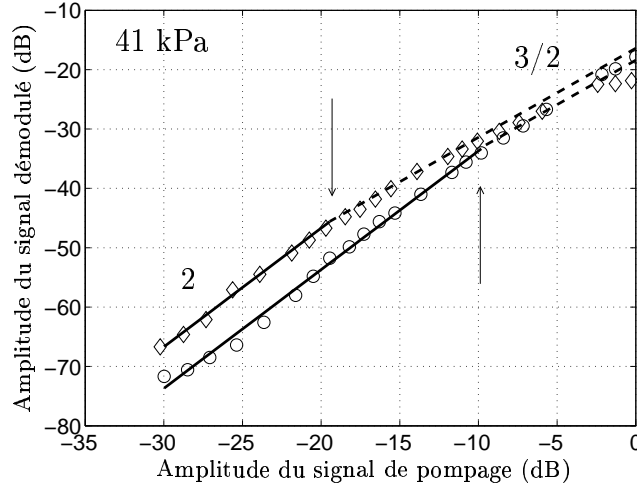


FIG. 4.4: Amplitude des signaux démodulés (~ 5 kHz) en fonction de l'amplitude de pompage (~ 80 kHz) pour une configuration de propagation verticale. L'excitation est longitudinale pour les cercles, et transverse pour les losanges. La contrainte statique appliquée est de 41 kPa. Les flèches indiquent les transitions entre un comportement quadratique et un comportement en puissance $3/2$.

technique.

Il faut remarquer que la déformation statique moyenne des contacts est estimée très proche de la déformation acoustique de pompage maximale. Ainsi, l'amplitude d'excitation de 0 dB correspond non seulement à l'amplitude de déformation acoustique de pompage maximale, mais aussi à la déformation statique moyenne des contacts (pour $P_0 \simeq 29$ kPa).

Sur la figure 4.3, le principal résultat est la croissance initialement quadratique de l'amplitude démodulée avec une transition vers une croissance suivant une loi puissance $3/2$ correspondant à la non-linéarité de Hertz avec clappement (voir le chapitre 1). Ce comportement n'a pas été observé par V. Zaitsev *et al.* [Zai99b], qui ont travaillé dans un milieu granulaire composé de sable naturel. Dans ce type de milieu, avec une dispersion forte de la taille des grains et une grande irrégularité de leurs formes, les contacts faibles sont plus nombreux, et seule une dynamique de croissance du signal démodulé en puissance $3/2$ a été observée. Outre l'observation de cette transition dans notre cas, le point important est que cette transition a lieu pour des amplitudes de déformation acoustique de pompage de l'ordre de 15 – 25 dB avant l'amplitude d'excitation maximum (ou de façon équivalente 15 – 25 dB avant la déformation statique moyenne des contacts).

Les contacts de Hertz produisent une réponse non linéaire qui dépend fortement du rapport entre le paramètre normalisé de déformation statique du contact μ et l'amplitude de pompage normalisée $\tilde{\varepsilon}_a/\varepsilon_0$ appliquée. Pour un contact avec $\mu > \tilde{\varepsilon}_a/\varepsilon_0$, le signal démodulé dépend de l'amplitude de pompage comme $\sim \tilde{\varepsilon}_a^2$, alors que pour $\mu < \tilde{\varepsilon}_a/\varepsilon_0$ c'est la non-linéarité associée au clappement $\sim (\mu\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2}H(\mu\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})$ qui domine, produisant un signal démodulé dont l'amplitude varie comme $\sim \tilde{\varepsilon}_a^{3/2}$. Ainsi, le changement de comportement quadratique $\rightarrow 3/2$ environ 20 dB en dessous de ε_0 est une signature de la présence des faibles contacts dans le milieu, et indique une localisation importante de la fonction de distribution $n(\mu)$ lorsque μ tend vers 0. Ce point est discuté plus en détails dans la section modélisation 4.3.

Lorsque la contrainte statique appliquée est augmentée, (41 kPa sur la figure 4.4), la déformation statique moyenne des contacts augmente, et la transition entre un comportement quadratique et un

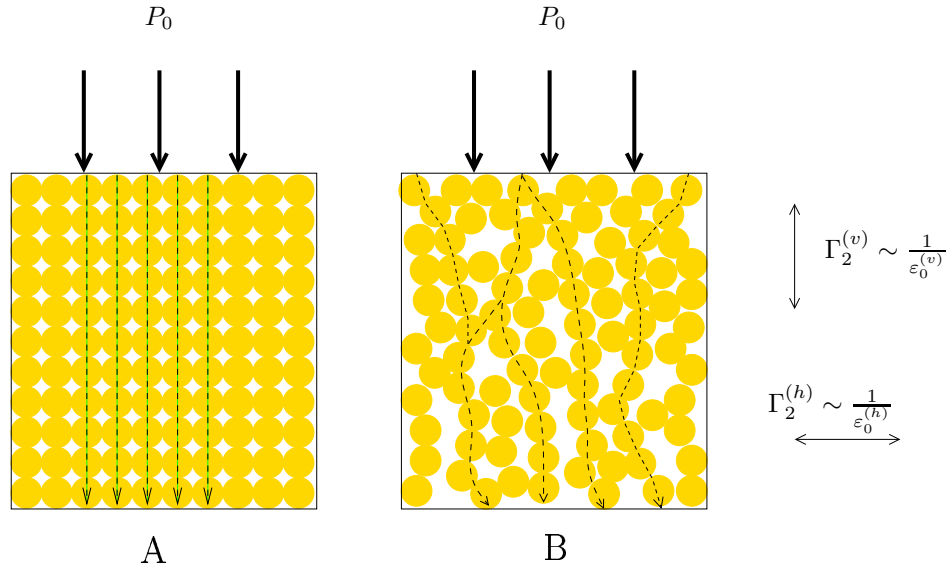


FIG. 4.5: Illustration de l'anisotropie du paramètre de non-linéarité quadratique. Lorsqu'une contrainte statique uniaxiale P_0 est appliquée verticalement sur l'assemblage granulaire, elle donne lieu à une anisotropie des chaînes de force, qui sont orientées préférentiellement verticalement (flèches pointillées). La déformation statique moyenne $\varepsilon_0^{(v)}$ des contacts orientés verticalement est donc plus élevée que la déformation statique moyenne $\varepsilon_0^{(h)}$ des contacts orientés horizontalement que ce soit dans un milieu régulier (A) ou désordonné (B). Ceci implique une anisotropie du paramètre de non-linéarité quadratique $\Gamma_2^{(v)} < \Gamma_2^{(h)}$.

comportement en puissance $3/2$ de l'amplitude démodulée a lieu pour des amplitudes de pompage plus élevées (typiquement $+5$ dB par rapport à 26 kPa sur la figure 4.3). En effet, le phénomène de clappement responsable de la dynamique de croissance du signal démodulé en puissance $3/2$, apparaît pour des amplitudes d'excitation plus élevées à cause d'une déformation statique moyenne des contacts plus élevée.

Dans les deux cas des figures 4.3 et 4.4, l'amplitude du signal démodulé provenant d'ondes de pompage de cisaillement est supérieure (du moins dans la zone quadratique) à l'amplitude du signal démodulé provenant d'ondes de pompage longitudinales. Ce comportement est interprété comme étant une conséquence de la présence de chaînes de force orientées préférentiellement verticalement en raison de la contrainte statique uniaxiale appliquée verticalement. Une anisotropie des déformations statiques des contacts est ainsi créée et entraîne une anisotropie de la non-linéarité. Les contacts plus faiblement pré-déformés ayant une non-linéarité plus importante que les contacts fortement pré-déformés (impliqués dans les chaînes de force), la non-linéarité dans le plan horizontal est plus élevée que la non-linéarité dans la direction verticale (voir la figure 4.5). Dans cette configuration de propagation verticale, les ondes de pompage de cisaillement sont donc soumises, en moyenne, à une non-linéarité plus forte que les ondes de pompage longitudinales, ce qui explique cette différence dans les amplitudes des signaux démodulés des figures 4.3 et 4.4.

L'anisotropie non linéaire (et linéaire) induite par le chargement extérieur uni-axial (illustrée sur la figure 4.5) joue donc un rôle important sur le processus de démodulation selon la polarisation des ondes de pompage. Cet effet est analysé plus en détail dans la section 4.2.4.

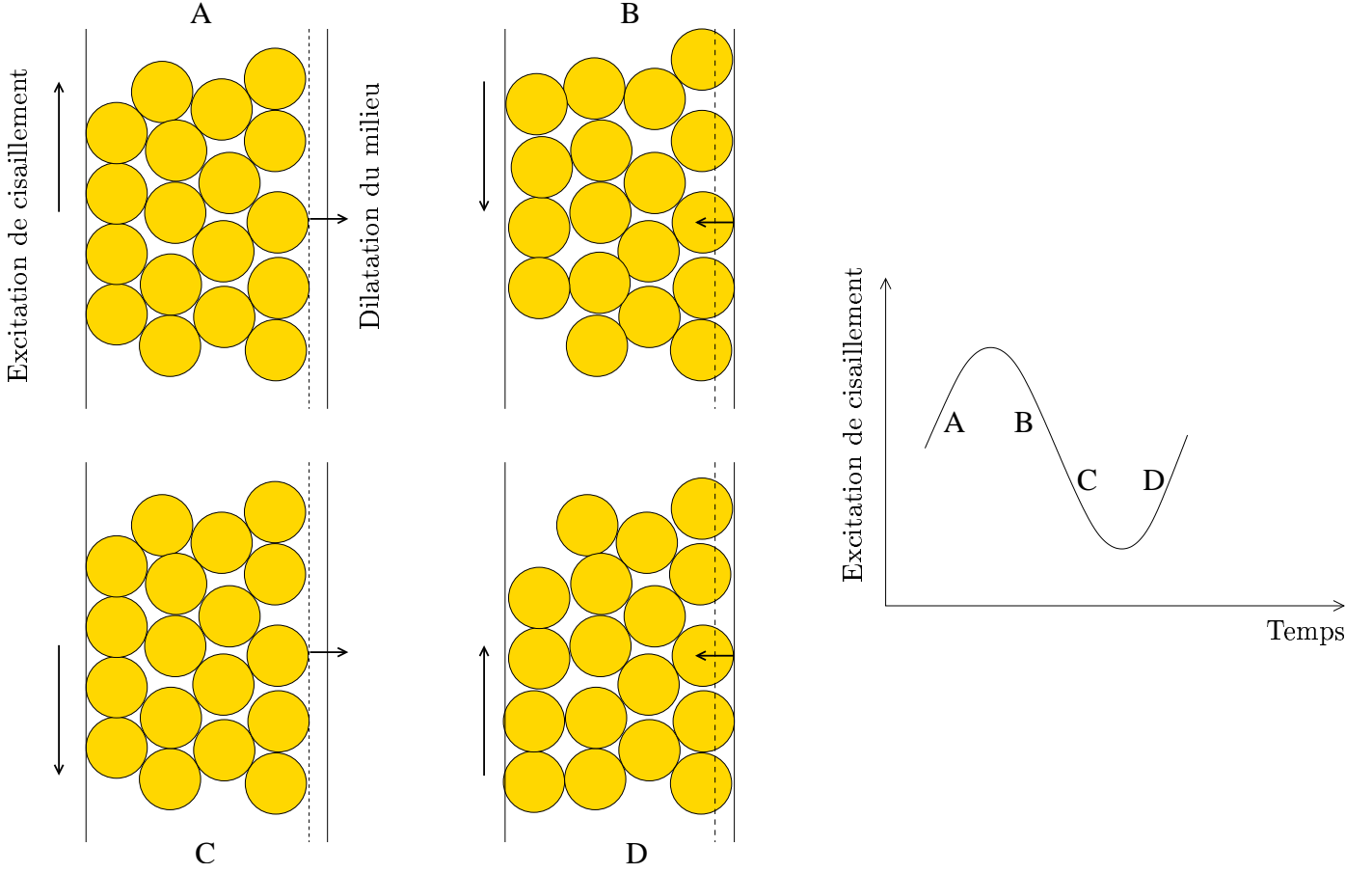


FIG. 4.6: Illustration de la dilatance sur une période de l'onde acoustique de cisaillement.

4.2.3 Dilatance non linéaire

Les observations expérimentales de démodulation d'ondes de cisaillement vers des ondes longitudinales n'indiquent aucun signe d'une dilatance linéaire du matériau granulaire jusqu'à des déformations acoustiques de pompage de $\tilde{\varepsilon}_a \sim \varepsilon_0 \sim 10^{-4}$ [Rey1885, God90]. La dilatance de Reynolds pour des déformations quasi-statiques de grains rigides sans friction [Rey1885] peut être comprise qualitativement avec des considérations purement cinématiques (roulement et glissement des grains). La cinématique du réarrangement de billes incompressibles soumises à une infiniment faible perturbation prédit une expansion volumétrique linéaire ($\sim |\tilde{\varepsilon}_a|$) du milieu sous une contrainte de cisaillement. Une telle dépendance linéaire et paire, doit produire un signal démodulé longitudinal proportionnel à l'amplitude de pompage de cisaillement (figure 4.6).

Dans les expériences menées, il s'avère que le signal démodulé reçu est longitudinal. En effet, des tests de polarisation à l'aide d'un transducteur récepteur de cisaillement ont permis de vérifier que le signal démodulé n'est pas polarisé orthogonalement à sa direction de propagation. De plus, la phase du signal électrique démodulé issu d'un transducteur récepteur de cisaillement est inversée lorsque ce transducteur est incliné légèrement dans un sens ou dans un autre relativement à l'émetteur (voir la figure 4.7 partie A). Dans cette opération, la phase d'un signal acoustique longitudinal apparaît, par exemple, positive (ou respectivement négative) en sortie électrique du transducteur récepteur de

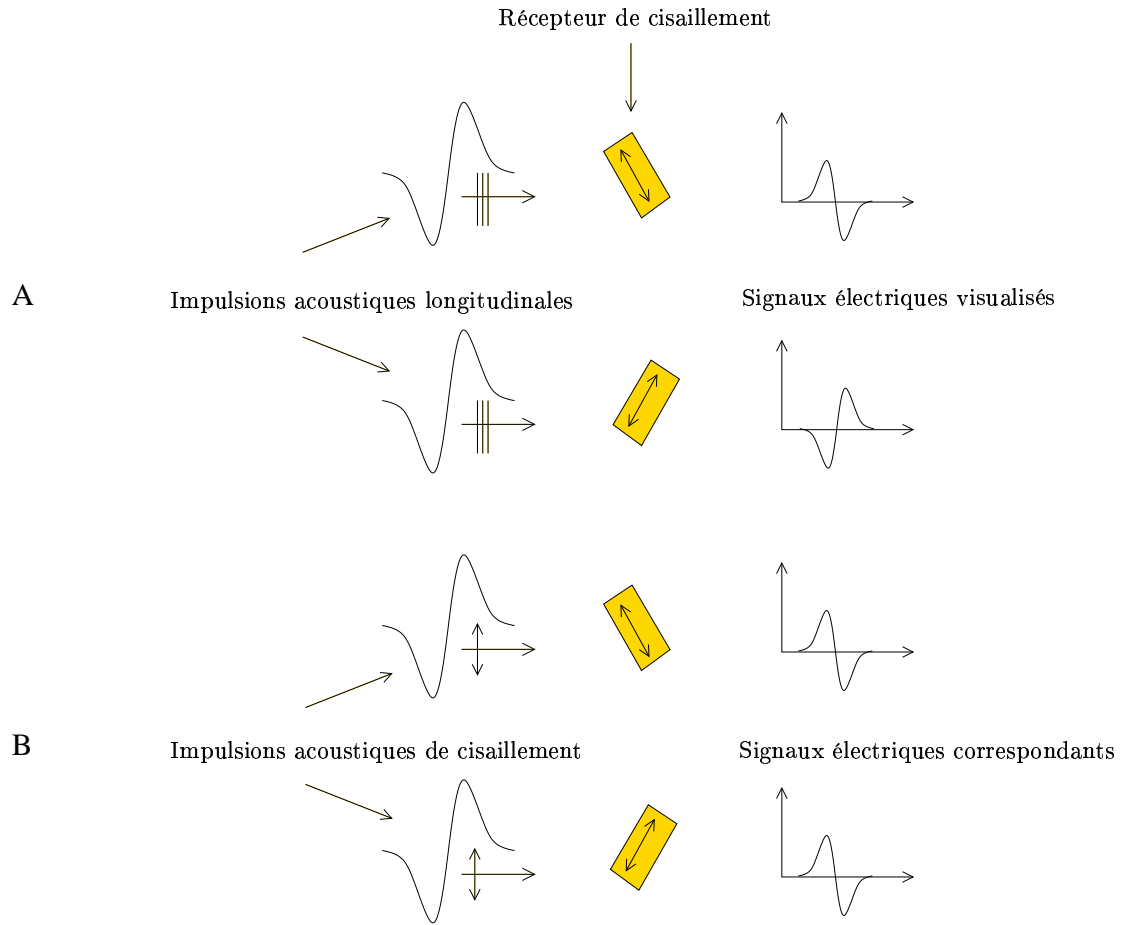


FIG. 4.7: Tests de polarisation permettant de vérifier le caractère longitudinal de l'onde acoustique démodulée issue d'ondes de pompage de cisaillement. Le cas A a été observé. Le cas B n'a pas été observé.

cisaillement avec une inclinaison donnée (en considérant que la longueur d'onde acoustique est grande devant le diamètre de la membrane du transducteur). Lorsque cette inclinaison est inversée, la phase de la sortie électrique est inversée et devient négative (ou respectivement positive). La projection du déplacement acoustique de compression parallèlement à la membrane du récepteur de cisaillement est inversée dans cette opération ce qui explique ce changement de phase (cas de la figure 4.7 partie A). Ce comportement n'a pas lieu lorsqu'un transducteur longitudinal est utilisé en réception, la projection du déplacement de compression orthogonalement à sa membrane restant pratiquement inchangé pour différentes inclinaisons. Enfin, si le signal acoustique était de caractère transverse (de cisaillement), le même changement d'inclinaison d'un transducteur de cisaillement en réception, pour une même polarisation de l'onde et du transducteur de cisaillement dans le plan d'onde, n'entraînerait pas de changement de phase du signal électrique délivré par le transducteur (voir la figure 4.7 partie B).

D'autres expériences permettant de corroborer ces observations ont été réalisées. Les temps de vol de signaux démodulés issus d'ondes de pompage longitudinales ou de cisaillement sont pratiquement identiques. Ceci indique que le signal démodulé issu des ondes de pompage de cisaillement ne peut pas avoir de caractère transverse, auquel cas sa vitesse de propagation serait plus faible que celle du signal

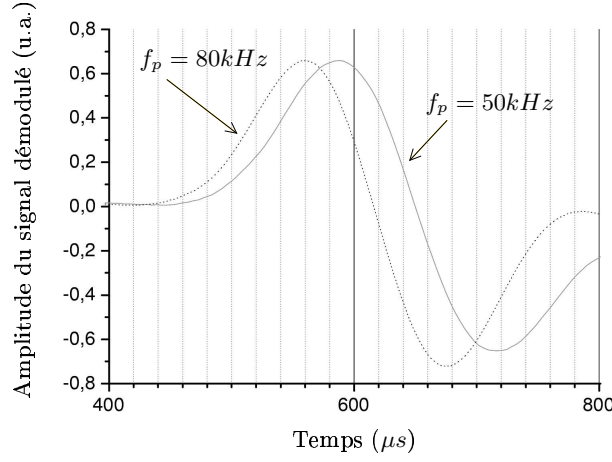


FIG. 4.8: Signaux temporels impulsionnels démodulés, captés par un transducteur longitudinal et issus d'ondes de pompage de cisaillement aux fréquences porteuses de $f_p = 80 \text{ kHz}$ et $f_p = 50 \text{ kHz}$.

démodulé longitudinal (environ 1,5 fois moins). La faible distance d'atténuation des ondes de pompage (i.e. la région source non linéaire est peu étendue spatialement), ne permet pas d'observer une différence notable entre les temps d'arrivée des signaux démodulés issus d'ondes de pompage longitudinales ou issus d'ondes de pompage de cisaillement.

La distance caractéristique d'atténuation des ondes de pompage de cisaillement peut être augmentée en diminuant la fréquence de pompage. Sur la figure 4.8, sont tracés les signaux démodulés issus de paquets d'onde de pompage de cisaillement à deux fréquences porteuses différentes, 50 kHz et 80 kHz . Pour une fréquence porteuse de 50 kHz , la longueur d'atténuation des ondes de pompage de cisaillement est d'environ 10 cm . Sur cette distance de propagation, le signal démodulé est "porté" à la vitesse des ondes de pompage de cisaillement, et au-delà de cette distance, il se propage à sa vitesse de phase longitudinale, plus élevée. Pour une fréquence porteuse de 80 kHz , la longueur d'atténuation des ondes de pompage de cisaillement est d'environ $2 - 4 \text{ cm}$, plus faible que précédemment. Le signal démodulé est alors "porté" à la vitesse des ondes de pompage de cisaillement sur une distance plus faible que pour 50 kHz , et le reste de la distance de propagation totale est parcouru à la vitesse de l'onde longitudinale BF. Par conséquent, ce signal démodulé, issu d'ondes de pompage de fréquence porteuse 80 kHz arrive plus tôt que celui issu d'ondes de pompage à la fréquence porteuse 50 kHz . Ce comportement n'a pas été observé avec les ondes de pompage longitudinales dans cette configuration expérimentale.

Ces observations signifient que les expériences menées mettent en jeu le phénomène de dilatance. Comme l'amplitude des signaux démodulés dépend de l'amplitude de pompage au carré ou à la puissance $3/2$, la dilatance observée est non linéaire. Une dilatance, quadratique en amplitude d'excitation, produite par des chargements périodiques a déjà été observée [Nix99]. Cependant, cette description est réalisée dans un régime quasi-statique et pour des déformations de l'ordre de $|\epsilon| \propto 0.01 - 0.04$, c'est à dire plus de deux ordres de grandeur supérieurs aux déformations appliquées ici.

Les expériences menées ici montrent donc pour la première fois un effet de dilatance non linéaire dans un régime dynamique. En particulier, la dilatance qui suit une loi en puissance $3/2$ est directement associée au clappement des contacts. Ces contacts clappants peuvent être interprétés comme le

démarrage des collisions de particules dans un gaz avec l'élévation de la température, dont le rôle est joué par la densité d'énergie acoustique dans le milieu granulaire. En raison d'un caractère purement répulsif des interactions individuelles entre chaque grain, ces collisions mènent dans tous les cas à une expansion moyenne du milieu, indépendamment de la manière dont a été initiée l'oscillation excitatrice. Par conséquent, la transition entre un comportement quadratique et un comportement en puissance $3/2$ dans la dynamique de croissance du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage, peut être vue comme un précurseur de la transition solide \rightarrow gaz d'un assemblage granulaire, induite par sollicitation acoustique.

4.2.4 Caractérisation de l'anisotropie des chaînes de force

Le fait que les ondes de cisaillement soient polarisées offre une autre possibilité intéressante d'appliquer l'effet non linéaire d'auto-démodulation pour caractériser l'anisotropie des contacts dans le milieu, comme par exemple la présence d'une orientation préférentielle des chaînes de force le long de la direction d'application de la contrainte statique. Comme la non-linéarité de chaque contact est inversement proportionnelle à sa pré-déformation statique, un milieu granulaire anisotrope doit présenter différentes non-linéarités effectives pour différentes polarisations d'ondes de cisaillement. En particulier, dans notre configuration expérimentale, la contrainte statique est appliquée sur le matériau granulaire de façon uniaxiale à l'aide d'un piston, sur le plan supérieur du récipient cylindrique. Une telle contrainte donne lieu à la formation dans le milieu de chaînes de force préférentiellement orientées verticalement [Mak00, Hid02]. Ainsi, la pré-déformation statique des contacts orientés verticalement est en moyenne plus élevée que la pré-déformation statique des contacts orientés horizontalement. Ceci implique donc que la non-linéarité effective est plus forte dans la direction horizontale que dans la direction verticale, direction préférentielle des chaînes de force (comme illustré sur la figure 4.5).

La configuration expérimentale retenue pour mettre en évidence cette anisotropie est illustrée sur la figure 4.9. La direction de propagation est maintenant horizontale, deux transducteurs de cisaillement identiques sont utilisés pour la génération des ondes de pompage et un transducteur longitudinal est utilisé en réception.

Sur la figure 4.10, les amplitudes des signaux démodulés issus d'ondes de pompage de cisaillement polarisées verticalement (selon les chaînes de force) et horizontalement (orthogonalement aux chaînes de force) sont tracées. La fréquence de pompage est centrée sur 80.192 kHz et la fréquence démodulée vaut 5.12 kHz , comme pour l'expérience verticale précédente. Les références des amplitudes de pompage en dB sont identiques à celles des figures 4.3 et 4.4. Sur toute la gamme d'amplitude de pompage, le signal démodulé issu d'ondes de pompage polarisées orthogonalement aux chaînes de force (horizontalement) a un niveau plus élevé que celui issu des ondes de pompage polarisées selon les chaînes de force (verticalement). Cette différence peut atteindre 15 dB , ce qui est bien supérieur à la différence maximale de 1 dB observée lors d'une expérience de vérification menée avec les deux mêmes émetteurs dans une configuration de propagation verticale. Cette différence d'efficacité s'explique par le fait que la non-linéarité à laquelle sont soumises les deux polarisations d'ondes de cisaillement sont différentes. En effet, dans la direction verticale (selon les chaînes de force), les contraintes statiques sur les contacts sont plus fortes que dans la direction horizontale ce qui implique une non-linéarité effective plus faible ($\Gamma_2 \sim 1/\varepsilon_0$).

Comme précédemment, cette interprétation est étayée par une autre observation expérimentale qui est l'emplacement de la transition entre un comportement quadratique du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage et un comportement en puissance $3/2$, associé au phénomène de clappement des contacts. Sur la figure 4.10, comme indiqué par les flèches, cette transition se situe environ à -23 dB pour l'excitation polarisée horizontalement et à -15 dB pour l'excitation

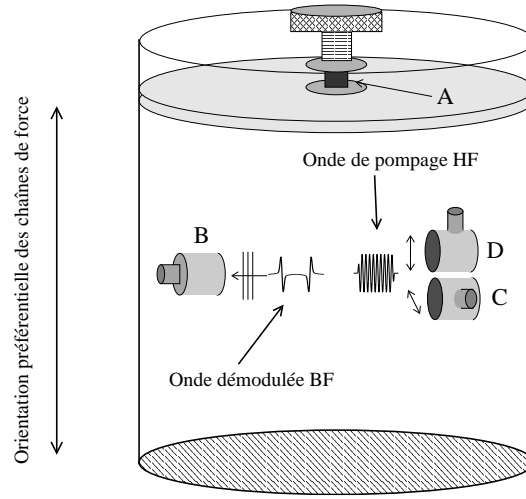


FIG. 4.9: Schéma de l'expérience de propagation dans la direction horizontale. A correspond au capteur de force statique, B est le récepteur longitudinal, C est l'émetteur de cisaillement polarisé horizontalement et D est l'émetteur de cisaillement polarisé verticalement. La distance de propagation est d'environ 16 cm.

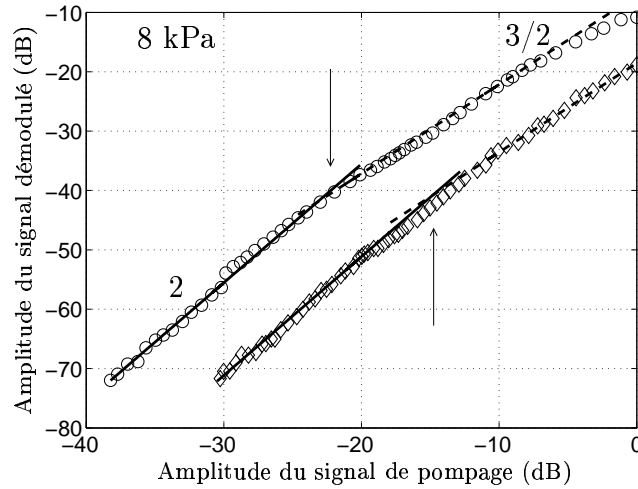


FIG. 4.10: Amplitude des signaux démodulés en fonction de l'amplitude de pompage (propagation horizontale). L'excitation de cisaillement est polarisée selon les chaînes de force (verticalement) pour les losanges, et est polarisée orthogonalement aux chaînes de force (horizontalement) pour les cercles. La contrainte statique uniaxiale appliquée est ~ 8 kPa.

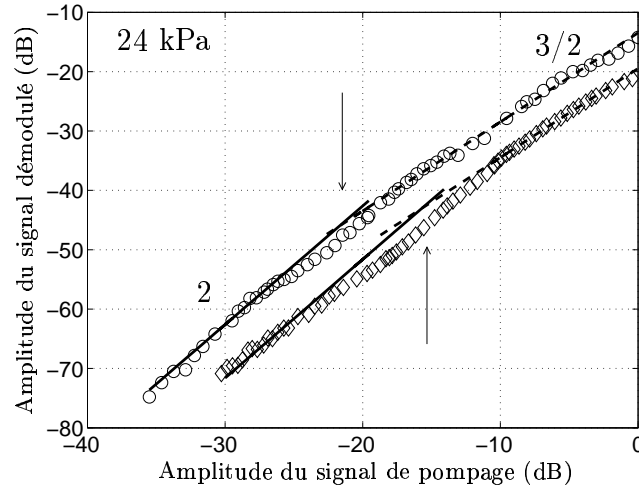


FIG. 4.11: Amplitude des signaux démodulés en fonction de l'amplitude de pompe (propagation horizontale). L'excitation de cisaillement est polarisée selon les chaînes de force (verticalement) pour les losanges, et est polarisée orthogonalement aux chaînes de force (horizontalement) pour les cercles. La contrainte statique uniaxiale appliquée est $\sim 24 \text{ kPa}$.

polarisée verticalement. Le phénomène de clappement devient donc important à partir d'amplitudes d'excitation plus faibles horizontalement que verticalement, ce qui est en accord avec le fait que les contacts orientés horizontalement sont moins pré-contraints que les contacts orientés verticalement. La mesure de la différence entre les emplacements des transitions $2 \rightarrow 3/2$ pour les deux polarisations d'excitation permet d'estimer l'anisotropie du paramètre non linéaire effectif, induite dans le milieu par le chargement uniaxial. Cette anisotropie non linéaire est directement liée à l'anisotropie linéaire par la relation qui existe entre déformation statique des contacts ε_0 et paramètre non linéaire quadratique effectif Γ_2 . Ainsi, l'anisotropie non linéaire observée dans les conditions du résultat expérimental présenté sur la figure 4.10 vaut environ 8 dB . Ces considérations quantitatives, cependant, sont effectuées dans l'hypothèse simplificatrice d'une distribution de déformations de contacts dont la forme ne varie pas en fonction de la déformation statique moyenne (c'est à dire $n(\mu)$ ne dépend pas de ε_0).

Sur la figure 4.11, la même expérience a été menée, mais avec une contrainte statique plus élevée, égale à 24 kPa . Dans ce cas, les transitions $2 \rightarrow 3/2$ dans l'amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompe se situent environ à -22 dB et -15 dB pour l'excitation polarisée horizontalement et pour l'excitation polarisée verticalement, respectivement. Une anisotropie du paramètre non linéaire effectif de 7 dB est observée. La transition $2 \rightarrow 3/2$ du signal démodulé issu d'ondes de pompe polarisées verticalement (losanges sur la figure 4.11) n'est cependant pas bien définie en raison d'un comportement particulier de la dynamique de croissance en amplitude du signal démodulé autour de cette transition. Ce comportement se retrouve dans la modélisation qui suit cette section pour certaines formes de la distribution de contacts dans le milieu. L'amplitude du signal démodulé issu d'ondes de pompe polarisées horizontalement est toujours supérieure à celle du signal démodulé issu d'ondes de pompe polarisées verticalement d'environ 10 dB .

Sur la figure 4.12, la contrainte statique a encore été augmentée, pour atteindre 64 kPa . La différence entre les amplitudes des signaux démodulés issus d'ondes de pompe polarisées horizontalement et verticalement varie entre 10 dB et 15 dB sur toute la gamme d'amplitude de pompe. Les transitions $2 \rightarrow 3/2$ sont situées à -23 dB et à -8 dB pour les excitations polarisées horizontalement et

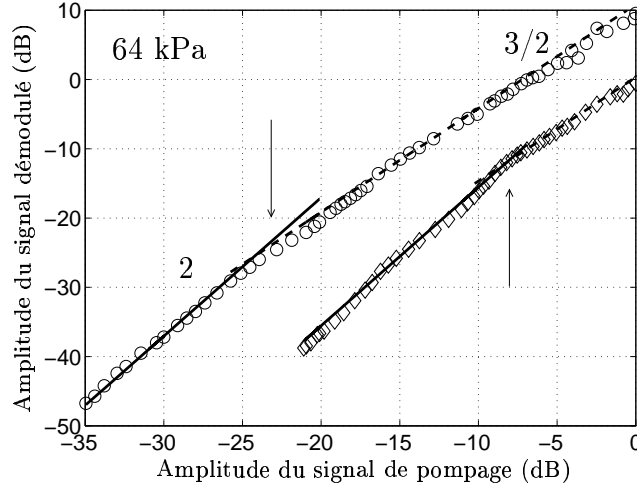


FIG. 4.12: Amplitude des signaux démodulés en fonction de l'amplitude de pompage (propagation horizontale). L'excitation de cisaillement est polarisée selon les chaînes de force (verticalement) pour les losanges, et est polarisée orthogonalement aux chaînes de force (horizontalement) pour les cercles. La contrainte statique uniaxiale appliquée est $\sim 64 \text{ kPa}$.

verticalement, respectivement. L'anisotropie non linéaire induite atteint alors 15 dB . La transition associée à la polarisation verticale a lieu à de plus fortes amplitudes de pompage pour une contrainte statique de 64 kPa que pour une contrainte statique de 24 kPa ou encore 8 kPa . Les contacts verticaux, plus fortement pré-contraints, sont en effet plus difficile à faire clapper, et une amplitude d'excitation plus forte est nécessaire.

L'ensemble de ces résultats est cohérent avec les deux principales observations et interprétations qui leur sont associées : l'emplacement de la transition $2 \rightarrow 3/2$ dans la dynamique de croissance du signal démodulé est interprété comme une manifestation du phénomène de clappement dans le milieu et fournit une estimation de l'anisotropie induite dans le milieu par le chargement uni-axial. La différence d'efficacité du processus de démodulation selon la polarisation verticale ou horizontale des ondes de pompage de cisaillement est une manifestation de l'anisotropie non linéaire présente dans le milieu, et peut permettre également de la caractériser.

Afin de mieux comprendre l'influence des contacts faibles dans le milieu sur le processus non linéaire de démodulation, et ainsi de les caractériser à travers la distribution de déformations de contacts, un modèle simple d'antenne paramétrique avec prise en compte du phénomène de clappement et de la forme de la distribution de contacts $n(\mu)$ est maintenant développé.

4.3 Modélisation

Une modélisation à degré de complexité croissante de l'antenne paramétrique dans les milieux granulaires prenant en compte le phénomène de clappement est présentée. Le point de départ de ce modèle est la relation contrainte - déformation de Hertz, qui s'écrit dans le cas statique sous la forme déjà rencontrée [Joh85] :

$$\sigma_0 = B(\varepsilon_0)^{3/2} \quad . \quad (4.7)$$

Lorsqu'une perturbation dynamique (onde acoustique) vient s'ajouter à la contrainte statique, dans la limite fréquentielle de perturbation quasi-statique par rapport aux temps caractéristiques du problème, la relation contrainte - déformation de Hertz se réécrit sous la forme [Zai99a, Bel93] :

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = B(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2} \quad . \quad (4.8)$$

Afin de prendre en compte la possibilité pour les contacts, de clapper, c'est à dire de s'ouvrir et de se refermer sous l'action de l'onde acoustique, la fonction de Heaviside traduisant le fait qu'aucune contrainte n'existe lorsque le contact est ouvert, est introduite [Bel94] :

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = B(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2} H(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}) \quad , \quad (4.9)$$

ou encore,

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = B\varepsilon_0^{3/2} \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} H\left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right) \quad . \quad (4.10)$$

A partir de maintenant, la déformation statique ε_0 est supposée représenter la déformation statique moyenne des contacts, et la constante B peut éventuellement être modifiée pour tenir compte des paramètres effectifs du milieu (voir le chapitre 1).

Dans un arrangement désordonné, les contacts n'ont pas une déformation statique égale mais une distribution statistique de déformations de contacts existe. Cette distribution déjà présentée et discutée précédemment est notée $n(\mu)$ où μ représente le rapport entre la déformation du contact considéré et la déformation moyenne des contacts ε_0 . Dans ce cas, la contrainte totale est égale à :

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = B_0 \int_0^{+\infty} n(\mu) \left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} H\left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right) d\mu \quad , \quad (4.11)$$

avec $B_0 = B\varepsilon_0^{3/2}$

Afin de ne considérer que la partie dynamique de la contrainte $\tilde{\sigma}$, la partie statique σ_0 est retranchée de part et d'autre du signe égal de l'équation précédente (4.11) :

$$\tilde{\sigma} = B_0 \int_0^{+\infty} n(\mu) \left[\left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} H\left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right) - \mu^{3/2} \right] d\mu \quad . \quad (4.12)$$

Si l'excitation de déformation acoustique est sinusoïdale $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_a \sin(\theta)$, la contrainte associée s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = B_0 \int_0^{+\infty} n(\mu) \left[\left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}_a \sin(\theta)}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} H\left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}_a \sin(\theta)}{\varepsilon_0}\right) - \mu^{3/2} \right] d\mu \quad . \quad (4.13)$$

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale, le signal démodulé est de fréquence nulle, donc statique. Cependant, cette approche utilisant une excitation simple permet de rendre compte de l'amplitude du signal démodulé puisqu'un facteur 2 seulement existe entre une amplitude démodulée dynamique (issue de plusieurs fréquences de pompage) et une amplitude démodulée statique (issue d'une seule fréquence

de pompage). Pour avoir accès uniquement à la composante de basse fréquence de la contrainte, un moyennage temporel sur une période de l'onde de pompage est effectué. Il permet d'éliminer la composante à la fréquence de pompage (en moyenne nulle sur une période) ainsi que les harmoniques supérieurs éventuellement générés.

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle \sim B_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} n(\mu) \left[\left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0} \sin(\theta) \right)^{3/2} H\left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0} \sin(\theta) \right) - \mu^{3/2} \right] d\mu d\theta, \quad (4.14)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne sur une période de l'onde de pompage HF. Cette équation (4.14) est utilisée dans la suite pour les simulations numériques de l'antenne paramétrique dans des milieux avec différentes distributions statistiques de contacts $n(\mu)$.

Une autre étape permet de prendre en compte l'influence de l'atténuation des ondes de pompage sur le processus de démodulation modélisé par l'équation (4.14). Une décroissance exponentielle des ondes de pompage sur une longueur caractéristique ℓ_a est introduite avec le facteur d'amplitude $\tilde{\varepsilon}_a$. L'intégration sur la coordonnée spatiale x est alors effectuée :

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle \sim B_0 \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} n(\mu) \left[\left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0} \sin(\theta) e^{-\frac{x}{\ell_a}} \right)^{3/2} H\left(\mu + \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0} \sin(\theta) e^{-\frac{x}{\ell_a}} \right) - \mu^{3/2} \right] d\mu d\theta dx. \quad (4.15)$$

Plusieurs résultats montrent que la distribution de forces de contact $n(f)$, pour des forces inférieures à la valeur moyenne du milieu f_0 présente un plateau $n(f) = \text{const.}$. Pour les contacts de Hertz, $f \sim \varepsilon^{3/2}$, ce qui signifie qu'une distribution $n(f)$ constante pour $f < f_0$ correspond à une distribution décroissante de déformation $n(\mu) \sim \mu^{-1/2}$. Pour une distribution $n(f) \sim f^{-1/3}$ en-dessous de f_0 , divergente pour les faibles forces mais intégrable, la distribution de déformation $n(\mu)$ correspondante est constante en-dessous pour $\mu < 1$.

L'implémentation numérique de la formule (4.14) a été effectuée pour différentes formes de la distribution statistique de déformations de contacts $n(\mu)$. Dans un premier temps, seule une portion de contacts faibles est ajoutée formellement en-dessous d'une valeur de μ égale à 0.1. Cette opération permet de montrer entre autres, que le nombre de contacts faibles est prépondérant sur l'apparition de la transition quadratique \rightarrow puissance 3/2 dans la dépendance en amplitude du signal démodulé, et que la forme elle-même de la distribution vers les faibles contacts est moins importante.

Sur la figure 4.13, sont représentées simultanément la distribution de contacts $n(\mu)$ utilisée pour le calcul de l'amplitude démodulée en fonction de μ , et l'amplitude démodulée associée en fonction de l'amplitude de pompage HF, $\frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0}$. Les échelles en décibels pour les abscisses μ et $\frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0}$ sont confondues en accord avec les estimations effectuées. Les échelles pour les ordonnées sont aussi présentées en décibels, la distribution de contacts étant normalisée par rapport au nombre de contacts du milieu et la référence en amplitude du signal démodulé étant quelconque. La distribution de déformations de contacts considérée, sur la figure 4.13, a la particularité d'être uniforme en-dessous de la valeur $\mu = 1$. Au-dessus de cette valeur, la décroissance est exponentielle avec le paramètre μ . La forme exacte, c'est à dire les valeurs des coefficients ou puissances intervenants dans l'exponentielle décroissante sont différents selon les approches effectuées. Comme discuté précédemment, il apparaît de toutes façons que la dépendance de la transition quadratique \rightarrow 3/2 dans l'amplitude démodulée est très faiblement sensible à la forme de la distribution de déformations au-delà de $\mu = 1$. Pour le calcul présenté sur la figure 4.13,

$$n(\mu) \propto \begin{cases} 1 & \mu < 1 \\ e^{-1,4(\mu-1)^{3/2}} & \mu \geq 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

La dépendance de l'amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage est quadratique dès les très faibles amplitudes de pompage (-40 dB) jusqu'à la transition (indiquée par

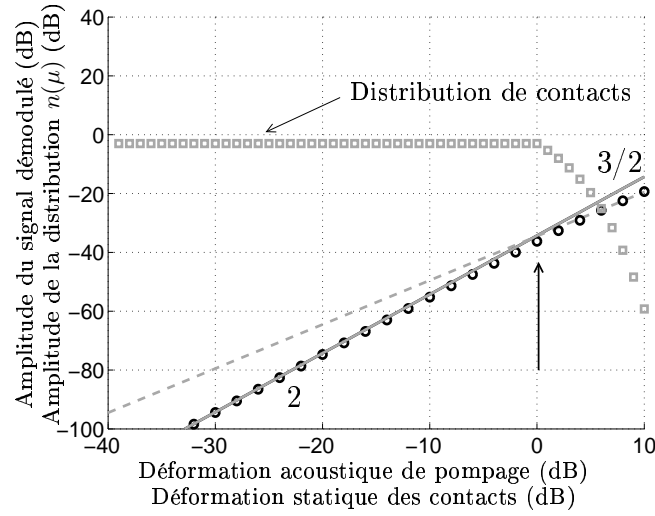


FIG. 4.13: Amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompe pour une distribution de déformations de contact uniforme en-dessous de la moyenne ε_0 (0 dB).

la flèche sur la figure 4.13) à une dépendance en puissance $3/2$ autour de 0 dB d'excitation. Il est bien entendu que le fait d'exciter le milieu granulaire à l'amplitude 0 dB ou à une amplitude supérieure remet en cause le modèle utilisé ici. En effet, à ces amplitudes, la structure du milieu granulaire, les chaînes de force, sont susceptibles d'être modifiées par l'action de l'onde acoustique, et dans ce cas, la distribution de contacts $n(\mu)$ est dépendante de l'excitation acoustique. Les résultats qui correspondent aux amplitudes d'excitation supérieures à 0 dB sont donc à considérer avec prudence.

En comparant cette simulation (figure 4.13) avec les résultats expérimentaux (qui sont tracés sur les figures 4.10 et 4.11 par exemple), il apparaît que la transition quadratique $\rightarrow 3/2$ dans la dépendance en amplitude de pompe du signal démodulé, transition associée au clappement des contacts, a lieu 15 – 20 dB avant l'amplitude de pompe maximale expérimentale 0 dB. Le nombre de contacts clappants (contacts faibles) n'est donc pas suffisant dans la distribution $n(\mu) = cste$ lorsque $\mu < 1$ pour faire apparaître la dépendance en puissance $3/2$ bien avant une amplitude d'excitation de 0 dB.

Le fait que l'amplitude démodulée croisse de façon quadratique malgré le clappement de certains contacts faibles (ceux pour qui $\mu < \tilde{\varepsilon}_a/\varepsilon_0$) provient de l'augmentation progressive des contacts clappants avec l'amplitude de pompe $\tilde{\varepsilon}_a/\varepsilon_0$. Le signal démodulé résultant, même provenant de contacts clappants, croît donc plus vite que $\tilde{\varepsilon}_a^{3/2}$ et reste pratiquement quadratique jusqu'à $\tilde{\varepsilon}_a/\varepsilon_0 = 1$ (0 dB). A partir de cette amplitude de pompe, environ la moitié des contacts présents dans le milieu au repos clappe et le signal varie comme $\tilde{\varepsilon}_a^{3/2}$.

Afin de comprendre l'influence des faibles contacts sur l'amplitude du signal démodulé, une portion de ces contacts est ajoutée formellement à la distribution $n(\mu)$. En effet, pour obtenir une transition $2 \rightarrow 3/2$ pour de plus faibles amplitudes de pompe, la distribution $n(\mu)$ doit comporter une plus grande proportion de contacts faibles, et suffisamment localisée vers les faibles valeurs de μ . Sur la figure 4.14, une portion de faibles contacts a été ajoutée en dessous de $\mu = 0.1$. La distribution utilisée pour le calcul a la forme :

$$n(\mu) \propto \begin{cases} 10 & \mu < 0.1 \\ 1 & 0.1 < \mu < 1 \\ e^{-1,4(\mu-1)^{3/2}} & \mu \geq 1 \end{cases} \quad (4.17)$$

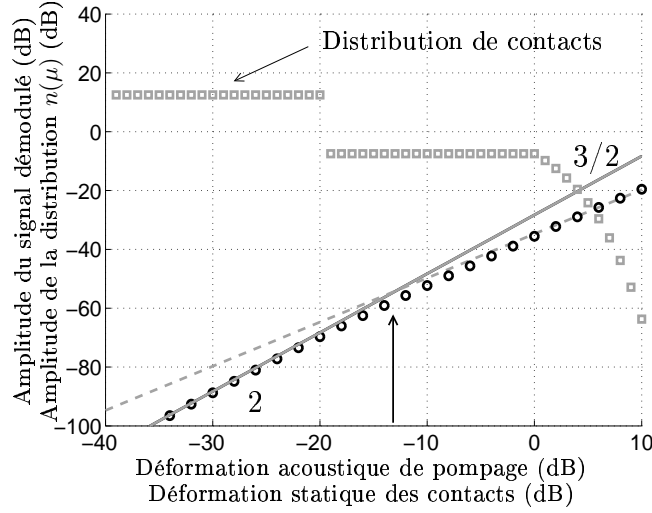


FIG. 4.14: Amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage pour une distribution de déformations de contact qui présente une portion supplémentaire de contacts faibles à partir de $\mu = 0.1$.

Dans ce cas, le nombre de contacts compris entre $0 < \mu < 0.1$ est sensiblement égal au nombre de contact compris entre $0.1 < \mu < 1$ et entre $1 < \mu < +\infty$. Ceci indique que pour une amplitude d'excitation de $\frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0} \simeq 0.1$ environ un tiers des contacts clappe, et que pour $\frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0} \simeq 0.5 \simeq -14 \text{ dB}$, c'est la moitié des contacts qui clappent. L'amplitude de pompage $\frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0}$ à laquelle se produit la transition $2 \rightarrow 3/2$ sur la figure 4.14 se situe environ à -12 dB , ce qui correspond à une proportion de contacts clappants se situant autour de la moitié du nombre total de contacts. Si la portion de contacts comprise entre $0 < \mu < 0.1$ est augmentée, la transition $2 \rightarrow 3/2$ va avoir lieu pour des amplitudes de pompage plus faibles que -12 dB . C'est le cas sur la figure 4.15 où la transition $2 \rightarrow 3/2$ a lieu dès -17 dB d'amplitude de pompage. A l'inverse, si la portion de contacts comprise entre $0 < \mu < 0.1$ est diminuée, comme c'est le cas dans la simulation tracée sur la figure 4.16, la transition a lieu pour des amplitudes de pompage supérieures (typiquement -5 dB).

Les détails fins de la distribution $n(\mu)$ pour $\mu \ll 1$ sont difficiles à reconstruire parce que les contacts faibles se manifestent à travers une intégrale de la distribution de contact (voir l'équation (4.14)). Le problème inverse qui consiste à trouver la forme de la distribution de contacts (notamment vers les faibles contacts) à partir de la dynamique de croissance du signal démodulé est donc a priori difficile à réaliser de façon précise avec les résultats expérimentaux obtenus ici.

D'autres formes plus réalistes de la distribution de contacts peuvent être implémentées dans ce calcul. En particulier, certaines distributions ne font apparaître aucune échelle particulière associée au milieu, contrairement à la forme de distribution déjà utilisée ici, où une portion de contacts faibles a été ajoutée en dessous de $\mu = 0.1$. C'est le cas des fonctions puissance, de la forme $n(\mu) = \mu^\kappa$ (pour $\mu < 1$) où κ peut prendre des valeurs positives (fonction croissante) ou des valeurs négatives (fonction décroissante, divergente en $\mu = 0$). Comme le cas $\kappa = 0$ a été tracé sur la figure 4.13, et ne présente pas une localisation suffisante vers les faibles contacts pour permettre une transition $2 \rightarrow 3/2$ avant une amplitude de pompage de 0 dB , seules les valeurs négatives de κ , qui mènent à une divergence de $n(\mu)$ lorsque $\mu \rightarrow 0$, sont réalistes pour être en accord avec les expériences réalisées..

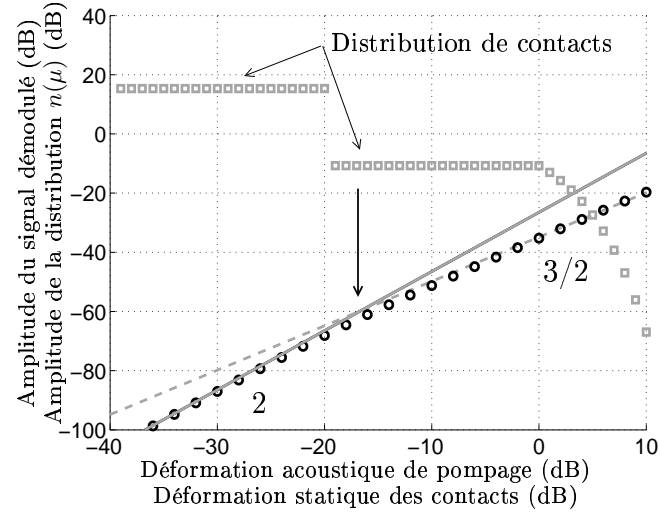


FIG. 4.15: Amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage pour une distribution de déformations de contact qui présente une portion supplémentaire de contacts faibles à partir de $\mu = 0.1$.

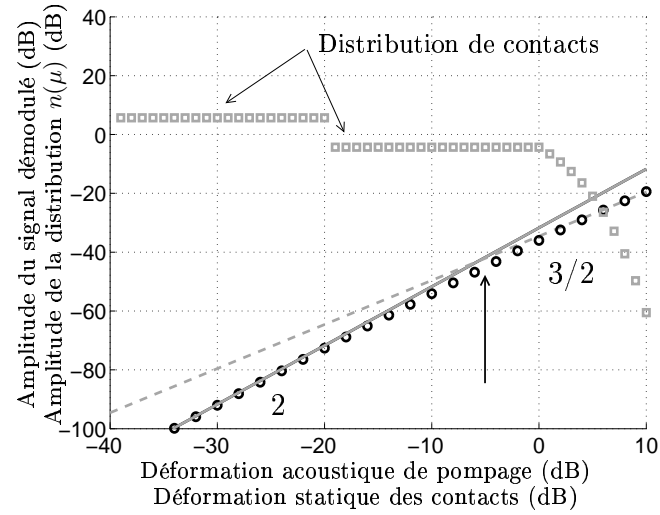


FIG. 4.16: Amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage pour une distribution de déformations de contact qui présente une portion supplémentaire de contacts faibles à partir de $\mu = 0.1$.

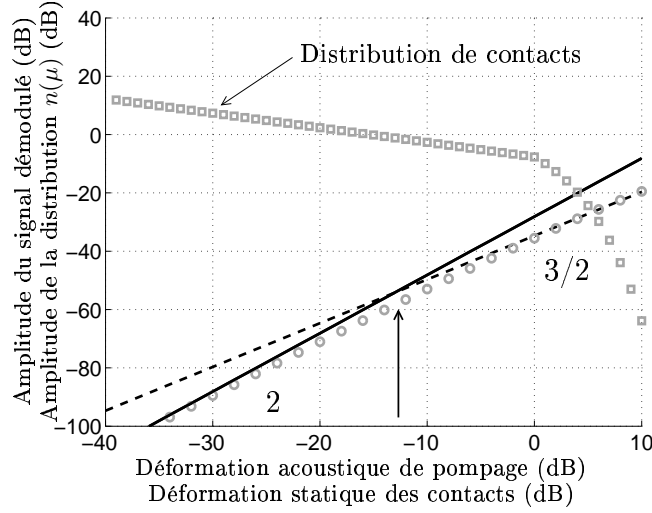


FIG. 4.17: Distribution de déformations de contacts de type puissance $n(\mu) \propto \mu^\kappa$ pour $\mu < 1$ avec $\kappa = -0.5$ et dynamique en amplitude du signal démodulé qui lui est associée.

Sur la figure 4.17, la distribution suivante a été utilisée :

$$n(\mu) \propto \begin{cases} \mu^{-0.5} & \mu < 1 \\ e^{-1,4(\mu-1)^{1/2}} & \mu \geq 1 \end{cases} \quad (4.18)$$

Comme la force est liée à la déformation du contact par la relation de Hertz $f \propto \mu^{3/2}$, la distribution de forces de contacts correspondant à cette distribution de déformation de contacts est de la forme $f^{\kappa-1/3}$ pour $\mu < 1$. Pour $\kappa = -1/2$, la distribution de force est donc en $f^{-1/3-1/2} = f^{-5/6}$. Elle reste intégrable, ce qui est nécessaire pour assurer un nombre de contact fini dans le milieu. L'amplitude de pompage à laquelle se produit la transition est environ de -12 dB , ce qui correspond aux expériences menées notamment pour 8 kPa et 24 kPa (figures 4.10 et 4.11).

Dans le cas déjà étudié $n(\mu) = \text{cte}$ pour $\mu < 1$ ($\kappa = 0$), la distribution de force a la forme $n(f) \propto f^{-1/3}$. Cette distribution, divergente lorsque $f \rightarrow 0$ ne présente cependant pas de localisation suffisante vers les faibles contacts pour que le clappement induise une transition $2 \rightarrow 3/2$ avant 0 dB d'amplitude d'onde de pompage (figure 4.13).

A l'inverse, si la distribution de contacts est trop bien localisée vers $\mu = 0$, la transition $2 \rightarrow 3/2$ apparaît pour des amplitudes de pompage très faibles. C'est le cas lorsque $\kappa = -1$ par exemple, sur la figure 4.18, où la transition apparaît vers -35 dB . De toutes façons, cette forme de distribution entraîne une divergence du nombre de contacts dans le milieu puisque la distribution de forces de contacts $n(f)$ est proportionnelle à $f^{-4/3}$.

Une distribution plus réaliste ($\kappa = -1/3$), qui de plus fournit des résultats en accord quantitatif avec les expériences menées, est utilisée pour le calcul et tracée sur la figure 4.19. La transition $2 \rightarrow 3/2$ est alors située à -7 dB d'amplitude de pompage. C'est l'amplitude de pompage maximum associée à une transition $2 \rightarrow 3/2$, observée pour une contrainte statique élevée de 64 kPa (figure 4.12). Cela signifie que la distribution de contact peut difficilement, dans nos conditions expérimentales, être moins bien localisée vers les faibles contacts. La puissance $\kappa = -1/3$ représente une distribution $n(f)$ proportionnelle à $f^{-2/3}$.

Dans la section suivante, les résultats expérimentaux sont discutés du point de vue des éventuelles

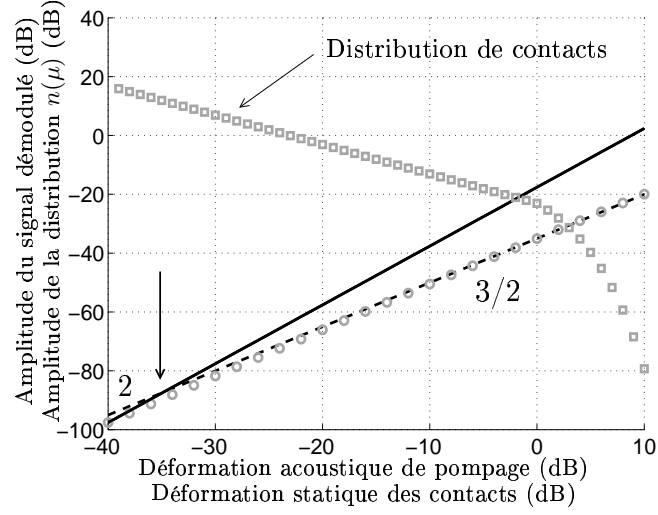


FIG. 4.18: *Distribution de déformations de contacts de type puissance $n(\mu) \propto \mu^\kappa$ pour $\mu < 1$ avec $\kappa = -1$ et dynamique en amplitude du signal démodulé qui lui est associée.*

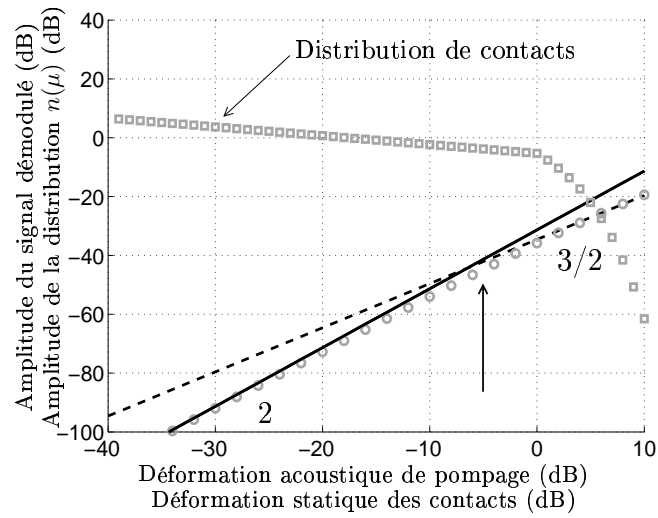


FIG. 4.19: *Distribution de déformations de contacts de type puissance $n(\mu) \propto \mu^\kappa$ pour $\mu < 1$ avec $\kappa = -0.3$ et dynamique en amplitude du signal démodulé qui lui est associée.*

applications, des problèmes rencontrés ou des améliorations à apporter.

4.4 Discussion

La méthode de préparation du milieu granulaire non-consolidé joue un rôle important sur la répétabilité des résultats expérimentaux. Un des indicateurs de la stabilité du milieu granulaire est la pression statique captée par l'intermédiaire du capteur de force. La dérive de la pression statique mesurée en fonction du temps suit une loi logarithmique. Lorsque la pression statique ne varie pratiquement plus en fonction du temps (au bout de plusieurs heures typiquement), le milieu peut être considéré comme stabilisé. Malgré cela, une petite perturbation extérieure, comme un impact mécanique sur le récipient par exemple, relance le milieu dans une phase de relaxation logarithmique visible sur la pression statique captée. Après un nombre donné d'impacts, ceux-ci n'ont plus d'influence sur l'état du milieu, et c'est à ce moment que les expériences présentées dans ce document ont été menées.

L'histoire du chargement du milieu a une influence sur sa structure [Jos00, Now98, Kni95], ce qui peut se traduire par des contraintes résiduelles horizontales importantes dans le cas d'une faible contrainte statique précédée par une forte contrainte statique verticale. Dans ce type de configurations, où une diminution de pression statique appliquée est réalisée juste avant l'expérience de dynamique en amplitude du signal démodulé, les résultats obtenus sont différents de ceux présentés. Par exemple, la transition $2 \rightarrow 3/2$ peut avoir lieu d'abord pour la polarisation verticale d'onde de pompage de cisaillement et ensuite pour la polarisation horizontale. Comme aucun autre moyen de mesure expérimental des contraintes dans le milieu granulaire n'est disponible, il n'a pas été possible de confronter les résultats obtenus avec une structure connue du milieu, et ainsi, de valider les observations effectuées. Cependant, la robustesse de cette technique permet de penser que dans ce cas précis, les contraintes statiques résiduelles (et en particulier les chaînes de force horizontales) sont susceptibles d'être les supports de la mémoire du milieu quant à l'histoire de son chargement et doivent être présentes dans le milieu.

L'influence de la préparation du milieu sur la forme de la distribution de contacts n'est pas triviale à décrire et n'a pas été étudié en détail à notre connaissance. Il est à supposer qu'à pression statique égale, un empilement granulaire compact stabilisé comporte plus de contacts qu'un empilement granulaire non-compact. Cependant, il est difficile d'en déduire la proportion relative de contacts faibles et de contacts forts par exemple, ou encore le comportement de la distribution vers les faibles déformations de contacts. Ce travail nécessite une grande rigueur dans le protocole expérimental à mettre en oeuvre.

Le problème inverse qui consiste à déduire à partir de la dynamique de croissance du signal démodulé, la distribution de contacts dans le milieu est éventuellement envisageable. La forme qualitative de la distribution peut-être déduite de l'amplitude de pompage à la transition $2 \rightarrow 3/2$ et la valeur moyenne de déformation statique dans le milieu déduite de l'amplitude absolue du signal démodulé. Cependant la structure fine de la distribution est difficile à retrouver en raison de l'intégration spatiale sur le milieu et donc sur la distribution, effectuée lors du processus de démodulation. C'est alors l'intégrale de la distribution sur les déformations statiques qui est importante à une amplitude de pompage donnée, ce qui a priori ne permet pas avec cette seule information de déterminer les différentes structures locales de cette distribution. La mesure complémentaire de la phase du signal démodulé est une information importante qui est peut-être à même d'apporter une solution à ce problème inverse par l'intermédiaire du formalisme de Fourier. Des formules analytiques d'inversion ont été obtenues mais ne sont pas présentées dans ce document.

L'influence de la distance caractéristique d'atténuation de l'intensité de pompage ℓ_a sur l'emplacement de la transition $2 \rightarrow 3/2$ a été évaluée numériquement en utilisant la formule (4.15) du modèle développé. Sur la figure 4.20, trois dépendances de l'amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage sont tracées pour trois valeurs de la longueur ℓ_a . L'influence de l'atténuation de

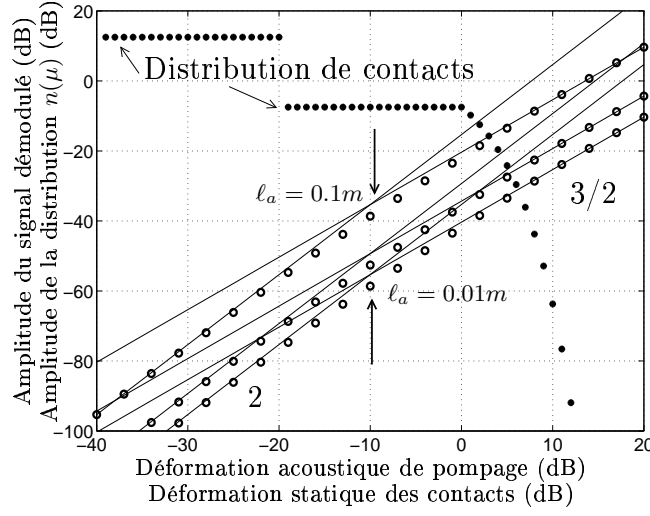


FIG. 4.20: Influence de la longueur caractéristique d'atténuation ℓ_a de l'intensité de pompage HF sur le signal démodulé BF. Les valeurs $\ell_a = 0.01, 0.05, 0.1$ sont utilisées dans la formule (4.15) pour une distribution de contacts (donnée sur cette figure) contenant une portion de contacts faibles en dessous de $\mu = 0.1$.

l'onde de pompage est donc très faible sur l'emplacement de la transition $2 \rightarrow 3/2$, une variation d'un facteur 10 (entre $0.01m$ et $0.1m$) de ℓ_a entraînant un déplacement de moins de 1 dB sur l'emplacement de la transition $2 \rightarrow 3/2$. Cependant, l'influence de l'atténuation HF sur le niveau absolu du signal démodulé n'est pas négligeable, le phénomène de démodulation étant cumulatif.

Les expériences présentées ont été effectuées pour des fréquences de pompage centrées sur 80.192 kHz , ce qui correspond à une longueur caractéristique d'atténuation pour l'intensité de pompage estimée à $2 - 4\text{ cm}$. Ces conditions, en conjonction avec le diamètre effectif du transducteur assurent un fonctionnement de l'antenne paramétrique dans un régime de Westervelt. Ce régime de fonctionnement, par opposition au régime de Berkta (voir le début du chapitre 2) est bien adapté à la détection/quantification de l'anisotropie du milieu, le faisceau ultrasonore de pompage étant collimaté (divergence faible du faisceau). Par conséquent, les nombres d'onde de pompage (et par la même occasion la polarisation des ondes de cisaillement) ont une direction bien définie. A l'inverse, dans le régime de Berkta où le signal démodulé est généré dans un champ diffracté d'onde de pompage, la direction de polarisation des ondes de pompage de cisaillement est mal définie, ce qui est moins favorable à une détection de l'anisotropie dans le milieu.

4.5 Conclusion

Les résultats obtenus montrent que l'effet d'auto-démodulation non linéaire est capable de caractériser sélectivement les faibles contacts présents dans les milieux granulaires non-consolidés. Afin d'expliquer les différences d'amplitudes du signal démodulé pour différentes polarisations d'ondes de pompage, et la transition claire $2 \rightarrow 3/2$, observée dans la dépendance en amplitude du signal démodulé en fonction de la déformation de pompage, et qui intervient bien avant la déformation statique moyenne, le milieu doit comporter un grand nombre de contacts faibles (autour de 60 % des contacts). De plus, ces contacts faibles doivent être suffisamment localisés vers les très faibles déformations statiques. En particulier, dans nos conditions expérimentales, une loi uniforme en déformations pour les faibles contacts (correspondant à une divergence en puissance $-1/3$ pour la distribution de forces) ne permet pas de décrire les comportements observés. Dans les milieux granulaires moins réguliers comme le sable naturel ou un milieu granulaire poly-disperse, le nombre de contacts faibles est encore supérieur et la localisation plus marquée, le comportement quadratique n'ayant pu être observé [Zai99b].

La détection et la quantification de l'anisotropie non linéaire présente dans le milieu est rendue possible grâce à deux observations distinctes. La première est la différence entre les niveaux des signaux démodulés issus de deux polarisations d'ondes de pompage de cisaillement différentes (parallèle et orthogonale aux chaînes de force). La seconde est la différence entre les emplacements des transitions puissance $2 \rightarrow 3/2$ dans le comportement de l'amplitude des signaux démodulés en fonction de l'amplitude de pompage. Ces deux indicateurs, cohérents entre eux dans les mesures effectuées, permettent d'accéder relativement précisément au niveau d'anisotropie du paramètre non linéaire effectif du milieu, et donc indirectement au niveau d'anisotropie linéaire. Les valeurs des anisotropies observées expérimentalement sont collectées dans le tableau 4.1.

Pression statique	8 kPa	24 kPa	64 kPa
Différence de niveaux à l'apparition de la transition $2 \rightarrow 3/2$ (rapport $\tilde{\varepsilon}_a^{(h)}/\tilde{\varepsilon}_a^{(v)}$)	8 dB	~ 7 dB	15 dB
Différence entre les niveaux des signaux démodulés issus des deux polarisations d'ondes de pompage dans la région de croissance quadratique (sans clappement)	12-14 dB	~ 9 dB	18-19 dB
Différence entre les niveaux des signaux démodulés issus des deux polarisations d'ondes de pompage à l'amplitude de pompage maximum (avec clappement)	8 dB	6 dB	11 dB
Niveau de déformation de pompage à l'apparition de la transition $2 \rightarrow 3/2$ pour le signal démodulé issu d'ondes de pompage polarisées selon les chaînes de force	-15 dB	~ -15 dB	-8 dB

TAB. 4.1: Récapitulation des différences entre la génération du signal démodulé par des ondes de pompage de cisaillement polarisées selon les chaînes de force et orthogonalement. L'ensemble de ces résultats permet de mesurer, par plusieurs observations concordantes, l'anisotropie du paramètre de non-linéarité quadratique dans le milieu, et d'obtenir indirectement la valeur de l'anisotropie linéaire. Les valeurs obtenues pour une pression statique de 24 kPa sont moins précises que pour les autres pressions statiques en raison de la forme particulière de la transition $2 \rightarrow 3/2$ observée.

Une modélisation du processus de démodulation, prenant en compte le phénomène de clappement et la forme de la distribution de contacts dans le milieu a été développé. Les conclusions obtenues sur les formes qualitatives des distributions de forces dans le milieu, et particulièrement vers les faibles contacts, sont en accord avec les résultats récents issus de simulations numériques [Sil02]. Cette méthode de mesure qualitative de la distribution de contacts est la première méthode acoustique mise en oeuvre, et est la plus précise vers les faibles contacts. Elle est susceptible de trouver des applications intéressantes dans le contrôle en temps réel des assemblages granulaires 3-D (silos par exemple), du point de vue de l'anisotropie ou de la compaction.

Pour la première fois, une dilatance non linéaire dynamique, pour de relativement faibles niveaux d'excitation, et proportionnelle à la puissance $3/2$ de l'amplitude de pompage a été observée. Ce comportement est associé au phénomène de clappement des contacts, phénomène qui peut être interprété comme le précurseur de la transition solide \rightarrow gaz granulaire, induit par la sollicitation acoustique.

Bibliographie

- [Bar00] S. G. Bardenhagen, J. U. Brackbill et D. Sulsky, “*Numerical study of stress distribution in sheared granular materials in two dimensions*”, Phys. Rev. E **62**(3), 3882-3890 (2000).
- [Bel93] I.Y. Belyaeva, V.Y. Zaitsev et L.A. Ostrovsky, “*Nonlinear acousto-elastic properties of granular media*”, Acoust. Phys. **39**, 11-15 (1993).
- [Bel94] I. Yu. Belyaeva, V. Yu. Zaitsev et E. M. Timanin, “*Experimental study of nonlinear elastic properties of granular media with nonideal packing*”, Acoust. Phys. **40**(6), 789-793 (1994).
- [Bel97] I. Yu. Belyaeva et V. Yu. Zaitsev, “*Nonlinear elastic properties of microinhomogeneous hierarchically structured media*”, Acoust. Phys. **43**, 594 (1997).
- [Bla01] D. L. Blair, N. W. Mueggenburg, A. H. Marshall, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Force distributions in three-dimensional granular assemblies : effects of packings order and interparticle friction*”, Phys. Rev. E **63**, 041304 (2001).
- [Cat98] M. E. Cates, J.P. Wittmer, J.-P. Bouchaud et P. Claudin, “*Jamming, force chains, and fragile matter*”, Phys. Rev. Lett. **81**, 1841 (1998).
- [Cla97] P. Claudin et J.-P. Bouchaud, “*Static avalanches and giant stress fluctuations in silos*”, Phys. Rev. Lett. **78**(2), 231-234 (1997).
- [Cla98] P. Claudin, J.-P. Bouchaud, M. E. Cates et J. P. Wittmer, “*Models of stress fluctuations in granular media*”, Phys. Rev. E **57**(4), 4441-4457 (1998).
- [Cop96] S. N. Coppersmith, C.-h. Liu, S. Majumbar, O. Narayan et T. A. Witten, “*Model for force fluctuations in bead packs*”, Phys. Rev. E **53**(5), 4673-4685 (1996).
- [DeG99] P. G. de Gennes, “*Granular matter : a tentative view*”, Rev. Mod. Phys. **71**, S374 (1999).
- [Edw99] S. F. Edwards et D. V. Grinev, “*Statistical mechanics of stress transmission in disordered granular arrays*”, Phys. Rev. Lett. **82**(26), 5397-5400 (1999).
- [Eri02] J. M. Erikson, N. W. Mueggenburg, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Force distribution in three-dimensional compressible granular packs*”, Phys. Rev. E **66**, 040301(R) (2002).
- [God90] J. D. Goddard, “*Nonlinear elasticity and pressure dependent wave speeds in granular media*”, Proc. R. Soc. Lond. A **430**, 105-131 (1990).
- [Gol02] C. Goldenberg et I. Goldhirsch, “*Force chains, microelasticity, and macroelasticity*”, Phys. Rev. Lett. **89**(8), 084302 (2002).
- [Her98] H. J. Herrmann, J.-P. Hovi et S. Luding (eds.), *Physics of dry granular media*, (Kluwer Academic Publishers, The Netherlands), (1998).
- [Hid02] R. C. Hidalgo, C. U. Grosse, F. Kun, H. W. Reinhardt et H. J. Herrmann, “*Evolution of percolating force chains in compressed granular media*”, Phys. Rev. Lett. **89**, 205501 (2002).
- [Joh85] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, (Cambridge University Press, Cambridge), (1985).
- [Jos00] C. Josserand, A. V. Tkachenko, D. M. Mueth et H. M. Jaeger, “*Memory effects in granular materials*”, Phys. Rev. Lett. **85**(17), 3632-3635 (2000).
- [Kni95] J. B. Knight, C. G. Frandrich, C. Ning Lau, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Density relaxation in a vibrated granular material*”, Phys. Rev. E **51**(5), 3957-3963 (1995).
- [Liu92] C.H. Liu et S.R. Nagel, “*Sound in sand*”, Phys. Rev. Lett. **68**, 2301-2304 (1992).
- [Lov99] G. Lovoll, K. J. Maloy et E. G. Flekkoy, “*Force measurements on static granular materials*”, Phys. Rev. E **60**(5), 5872-5878 (1999).

- [Lud97] S. Luding, “*Stress distribution in static two dimensional granular model media in the absence of friction*”, Phys. Rev. E **55**(4), 4720-4729 (1997).
- [Mak00] H. A. Makse, D. L. Johnson et L. M. Schwartz, “*Packing of compressible granular materials*”, Phys. Rev. Lett. **84**(18), 4160-4163 (2000).
- [Mue98] D. M. Mueth, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Force distribution in a granular medium*”, Phys. Rev. E **57**(3), 3164-3169 (1998).
- [Mue02] N. W. Mueggenburg, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Stress transmission through three-dimensional ordered granular arrays*”, Phys. Rev. E **66**, 031304 (2002).
- [Nem84] S. Nemat-Nasser et K. Takahashi, “*Liquefaction and densification of sand*”, J. Geotech. Engin. **110**, 1291-1306 (1984).
- [Nix99] S. A. Nixon et H. W. Chandler, “*On the elasticity and plasticity of dilatant granular materials*”, J. Mech. Phys. Solids **47**, 1397-1408 (1999).
- [Nov97] B.K. Novikov, O.V. Rudenko et V.I. Timochenko, *Nonlinear Underwater Acoustics*, (ASA, New-York), (1987).
- [Now98] E. R. Nowack, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger et S. R. Nagel, “*Density fluctuations in vibrated granular materials*”, Phys. Rev. E **57**(2), 1971-1982 (1998).
- [Rad96] F. Radjai, M. Jean, J.-J. Moreau et S. Roux, “*Force distribution in dense two-dimensional granular systems*”, Phys. Rev. Lett. **77**(2), 274-277 (1996).
- [Rad98] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean et J.-J. Moreau, “*Bimodal character of stress transmission in granular packings*”, Phys. Rev. Lett. **80**(1), 61-64 (1998).
- [Rey1885] O. Reynolds, “*On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact with experimental observations*”, Philos. Mag. **20**, 469-481 (1885).
- [Sil02] L. E. Silbert, G. S. Grest et J. W. Landry, “*Statistics of the contact network in frictional and frictionless granular packings*”, Phys. Rev. E **66**, 061303 (2002).
- [Tou03] V. Tournat, B. Castagnède, V. E. Gusev et P. Béquin, “*Self-demodulation acoustic signatures for nonlinear propagation in glass beads*”, C. R. Mecanique **331**, 119-125 (2003).
- [Tou03(s1)] V. Tournat, V. Zaitsev, V. Gusev, V. Nazarov P. Béquin et B. Castagnède, “*Probing granular media by acoustic parametric emitting antenna : weak contacts, nonlinear dilatancy and polarization anisotropy*”, soumis à Phys. Rev. Lett. (2003).
- [Tou03(s2)] V. Tournat, V. E. Gusev, V. Yu. Zaitsev et B. Castagnède, “*Acoustic second harmonic generation with shear to longitudinal mode conversion in granular media*”, soumis à Europhys. Lett. (2003).
- [Tou03(s3)] V. Tournat, V. E. Gusev et B. Castagnède, “*Subharmonics and noise excitation in transmission of acoustic wave through unconsolidated granular medium*”, soumis à Phys. Lett. A (2003).
- [Tou03(s4)] V. Tournat, V. Zaitsev, V. Gusev, V. Nazarov P. Béquin et B. Castagnède, “*Probing force chains and inter-particle contacts in granular materials by nonlinear shear waves*”, World Congress on Ultrasonics, Paris, 7-10 Septembre (2003).
- [Zai99a] V.Y. Zaitsev, A.B. Kolpakov et V.E. Nazarov, “*Self-demodulation of acoustic pulses in river sand : Experiment*”, Acoust. Phys. **45**, 202-208 (1999).
- [Zai99b] V.Y. Zaitsev, A.B. Kolpakov et V.E. Nazarov, “*Self-demodulation of acoustic pulses in river sand. Theory*”, Acoust. Phys. **45**, 305-310 (1999).
- [Zai02] V. Zaitsev, V. Gusev et B. Castagnède, “*Luxemburg-Gorky effect retooled for elastic waves : a mechanism and experimental evidence*”, Phys. Rev. Lett. **89**, 105502 (2002).
- [Zai95] V. Yu. Zaitsev, “*Nonideally packed granular media : numerical modeling of elastic nonlinear properties*”, Acoust. Phys. **41**, 385-391 (1995) ;
- [Zar71] L. K. Zarembo et V. A. Krasilnikov, “*Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids*”, Sov. Phys. Uspekhi **13**, 778-797 (1971).

Conclusion générale

Dans ce travail de thèse, le phénomène non linéaire d'auto-démodulation d'amplitude dans les milieux granulaires non-consolidés, phénomène à la base du fonctionnement de l'antenne paramétrique en émission, a été étudié théoriquement, expérimentalement et numériquement. Après avoir présenté et discuté les principaux phénomènes physiques qui prennent place dans ce type de milieux au chapitre 1, et ceci plus particulièrement du point de vue de l'acoustique non linéaire, un premier modèle a été développé dans le chapitre 2, sur le fonctionnement de l'antenne paramétrique dans un milieu absorbant, dispersif et multidiffusant. Ce modèle, qui fournit une base de réflexion et d'analyse, repose sur une formulation en énergie potentielle du terme source non linéaire de l'équation de propagation acoustique. Des transitions dans le profil temporel du signal démodulé (signal émis par l'antenne) sont prédites pour certaines inégalités entre les paramètres caractéristiques du modèle. Ces transitions sont typiquement des dérivations ou des intégrations du profil temporel et sont associées aux effets de dispersion de vitesse dans le milieu ou de diffusion des ondes primaires. Des expériences ont été menées dans un matériau granulaire composé de billes de verre. En augmentant la fréquence des ondes de pompage, deux dérivations du profil démodulé suivies d'une intégration ont été observées. Un traitement numérique simple et une analyse qualitative de ces transitions ont permis de mettre en évidence d'autres phénomènes susceptibles de faire apparaître des transitions dans le profil du signal démodulé. Ces aspects, dont certains sont liés aux réalités des conditions expérimentales, font l'objet d'un travail de modélisation numérique plus poussé, qui devrait permettre à terme, de résoudre le problème inverse. Ce dernier consiste à obtenir des informations (comme le temps caractéristique d'absorption, de diffusion, ou la vitesse de propagation par exemple) sur des ondes de hautes fréquences fortement atténuées (ondes de pompage) grâce à l'observation du signal de basse fréquence, issu de ces ondes de pompage par effet non linéaire, et pouvant se propager sur une distance plus longue. Parmi les transitions observées en augmentant la fréquence de pompage, une intégration du profil temporel démodulé, associée à la transition entre propagation balistique et diffusion des ondes de pompage, a été observée pour la première fois et est en accord avec le modèle théorique développé.

Dans un milieu ordonné, l'une des caractéristiques acoustiques, évoquée au chapitre 1, est l'impossibilité pour des ondes longitudinales de fréquence supérieure à la fréquence de coupure de se propager. Ces ondes deviennent évanescentes. L'influence de cette propriété sur l'effet d'auto-démodulation d'amplitude a donc été étudiée théoriquement et numériquement dans le chapitre 3. Une configuration simplifiée de chaîne uni-dimensionnelle de billes élastiques (chaîne granulaire) a été retenue. Tout en conservant le caractère discret du réseau considéré, l'analyse du résultat théorique obtenu pour deux fréquences de pompage a été réalisée. Un travail numérique a été nécessaire afin de modéliser l'auto-démodulation d'une onde de pompage de type paquet d'onde Gaussien, et donc d'un signal démodulé impulsionnel. Des transitions analogues à celles prédites dans le modèle développé au chapitre 2 ont été mises en évidence. La transition propagatif \rightarrow évanescent dans le caractère des ondes de pompage se traduit par une chute de l'efficacité de l'antenne, et dans certains cas, se traduit par une dérivation du

profil démodulé. Alors que la transition balistique \rightarrow diffusion dans le transport des ondes de pompage (étudiée au chapitre 2) est associée au désordre présent dans le milieu, et peut se traduire par une intégration du profil démodulé, la transition propagatif \rightarrow évanescent (étudiée dans le chapitre 3) est elle associée au caractère ordonné du milieu, et peut se traduire par une dérivation du profil démodulé.

Dans le chapitre 4, un autre aspect, non abordé dans les chapitres précédents, a été considéré. Des ondes de cisaillement sont utilisées en émission, comme ondes de pompage, pour la première fois dans le fonctionnement de l'antenne paramétrique. Par de nombreux tests expérimentaux concordants, le signal démodulé issu des ondes de pompage de cisaillement a été identifié comme étant longitudinal. Un phénomène nouveau de dilatance non linéaire a pu ainsi être mis en évidence expérimentalement, conséquence de l'efficacité avérée de l'antenne paramétrique dans ce régime de fonctionnement. En faisant varier la polarisation de l'émetteur d'ondes de pompage de cisaillement, une variation de cette efficacité a été observée. Ce comportement a été expliqué par la présence d'une anisotropie du paramètre de non-linéarité quadratique induite par l'application d'une contrainte statique uniaxiale sur l'assemblage granulaire. Cette contrainte statique uniaxiale forme un réseau de chaînes de force orientées préférentiellement dans la direction de cette contrainte. Les contacts entre billes sont donc plus fortement pré-contraints (contraints statiquement) selon cette direction préférentielle, qu'orthogonalement à cette direction. Conformément à la relation qui existe entre pré-contrainte et paramètre de non-linéarité quadratique d'un contact de Hertz (relation présentée au chapitre 1), ceci entraîne une non-linéarité quadratique "effective" plus forte orthogonalement que parallèlement aux chaînes de force. Une autre observation expérimentale effectuée pour la première fois est la transition dans l'amplitude du signal démodulé en fonction de l'amplitude de pompage, d'un comportement quadratique vers un comportement en puissance $3/2$.

Le comportement quadratique, typique des contacts ayant une déformation statique supérieure à la déformation acoustique, laisse progressivement place au comportement en puissance $3/2$, typique du phénomène de clappement qui apparaît lorsque la déformation acoustique est supérieure à la déformation statique des contacts. La transition $2 \rightarrow 3/2$ fournit donc des informations sur les déformations statiques des contacts dans le milieu. L'apparition de cette transition, pour une excitation environ 10 fois plus faible que la déformation statique moyenne des contacts a des implications sur la distribution de contacts dans le milieu, qui doit nécessairement être croissante vers les faibles contacts.

D'autres travaux expérimentaux et de modélisation ont été réalisés pendant les trois années de cette thèse sur les effets non linéaires dans les matériaux granulaires non-consolidés. La génération d'harmoniques supérieurs, à partir d'ondes de pompage de cisaillement a été étudiée expérimentalement puis modélisée (voir l'annexe A). Un nouveau comportement a été mis en évidence sur la dynamique en amplitude de l'harmonique 2 longitudinal généré à partir d'une onde fondamentale de cisaillement. Des battements en fonction de l'amplitude d'excitation sont observés, et expliqués en considérant la dispersion de vitesse dans le milieu et le phénomène de clappement des contacts faibles. Les mêmes implications qu'au chapitre 4 sur la distribution des déformations de contacts dans le milieux sont énoncées.

Le phénomène de génération de sous-harmoniques et de génération de bruit a aussi été étudié expérimentalement, et interprété qualitativement (voir l'annexe B). Le rôle des contacts faibles est ici prépondérant sur la dynamique non linéaire de l'assemblage granulaire. Le phénomène de clappement est interprété comme le début de la transition solide \rightarrow gaz du milieu granulaire, composé de billes élastiques en interaction (comme dans le chapitre 4).

Les perspectives de ce travail de thèse peuvent avoir plusieurs orientations possibles. Du point de vue fondamental, d'autres effets non linéaires, comme le transfert de modulation par exemple, déjà observé dans des configurations de type "résonance", restent à tester dans les milieux granulaires, dans des configurations de type "propagation". Des problèmes faisant intervenir l'interaction non linéaire de faisceaux d'onde non-collinéaires, de surcroît avec des ondes polarisées, restent ouverts expérimentalement et théoriquement. Des mesures de directivité de l'antenne paramétrique, délicates à mettre en oeuvre expérimentalement, peuvent faire apparaître des phénomènes nouveaux, non observés dans les milieux homogènes, comme une sensibilité particulière à la fréquence de pompage (à cause de la diffusion) ou à l'amplitude de pompage (à cause du phénomène de clappement). En outre, le caractère anisotropique (linéaire et non linéaire) des chaînes de force, spécifiques aux milieux granulaires, offre la possibilité de développements analytiques nouveaux sur les effets non linéaires. Les nouvelles connaissances pour la réalisation de milieux granulaires tri-dimensionnels réguliers, et ceci à des échelles très diverses, permettent d'envisager l'étude fondamentale de réseaux acoustiques non linéaires aux propriétés particulières : possibilité de clappement, de conversion de modes, ... Enfin, de nombreux paramètres sont susceptibles d'influencer la propagation acoustique, comme la nature du fluide saturant les billes, ou le taux d'humidité, et leurs effets restent à étudier de façon plus approfondie.

Du point de vue des perspectives d'applications des résultats obtenus lors de cette thèse, il est possible d'entrevoir des applications dans le contrôle en temps réel des assemblages granulaires (silos, génie des matériaux). Des applications potentielles à la géophysique pour la caractérisation des sédiments marins ou le diagnostic des sols peuvent être envisagées. Comme le paramètre de non-linéarité d'un milieu est une des caractéristiques de ce milieu, il peut faire l'objet d'une mesure par l'intermédiaire de l'antenne paramétrique. Dans les milieux inhomogènes, comme les tissus biologiques, l'imagerie du paramètre de non-linéarité peut apporter des informations complémentaires aux mesures classiques de modules élastiques linéaires. Le même type d'applications est envisageable pour le contrôle des matériaux endommagés, pour lesquels des réponses non linéaires fortes, localisées au niveau des défauts, sont attendues. De plus, l'antenne paramétrique est susceptible d'être bien adaptée à l'imagerie des matériaux proche de leur surface, c'est-à-dire sur une distance de l'ordre de la longueur caractéristique d'atténuation des ondes de pompage de hautes fréquences. La localisation et l'imagerie des fissures dans les matériaux endommagés en est le but à plus long terme. Il faut noter que plusieurs travaux de cette thèse sont transposables au diagnostic des matériaux fissurés, notamment sur les modes évanescents qui peuvent être créés au niveau des fissures, sur l'influence des conversions de modes de cisaillement vers des modes longitudinaux, ceci toujours au niveau des fissures, ou encore sur les contacts de Hertz avec clappement (ouverture et fermeture partielles des fissures).

Annexe A

Article soumis à Europhys. Lett. (2003) sur le phénomène de génération de l'harmonique 2 dans les matériaux granulaires.

Comme dans le chapitre 4, l'influence des contacts faibles sur les processus d'acoustique non-linéaire est importante. Le clappement de ces contacts faibles fait apparaître un phénomène de battement de l'amplitude de l'harmonique 2 longitudinal reçu en fonction de l'amplitude de l'onde fondamentale de cisaillement émise.

Acoustic second harmonic generation with shear to longitudinal mode conversion in granular media

V. TOURNAT¹, V.E. GUSEV¹, V.YU. ZAITSEV² and B. CASTAGNÈDE¹

¹ *Université du Maine, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9, France*

² *Institute of Applied Physics, 46 Uljanova Street, Nizhny Novgorod, 603950 Russia*

PACS. 83.80.Fg – Granular solids.

PACS. 81.05.Rm – Porous materials; granular materials.

PACS. 43.25.+y – Nonlinear acoustics.

Abstract. – Excitation of longitudinal acoustic wave at the 2nd harmonic by sinusoidal shear acoustic wave in a granular material is reported. The amplitude of the 2nd harmonic exhibits beatings (typical to nonlinear processes in dispersive media), which is observed not as a function of the distance from emitter, but with increasing amplitude of the primary (pump) shear wave. The effect is attributed to varying contribution of clapping intergrain contacts to the total nonlinearity of the medium with increasing pump amplitude, which modifies the effective length of the nonlinear interaction. This is consistent with the idea that in granular assemblages there is an important amount of contacts loaded much weaker than in average.

Introduction. – Second harmonic excitation is a classical nonlinear effect which is useful, for example, for frequency-up conversion in optics [1,2] and material characterization in acoustics [3–5]. The efficiency of the transformation of the pump wave at fundamental frequency ω into its 2nd harmonic at frequency 2ω is determined not only by the local nonlinearity of a medium, but also depends on the possibility to synchronously accumulate locally excited 2ω -waves. The synchronism conditions are closely related to the wave velocity dispersion in the medium. In the case of collinear wave interaction, the nonlinear sources at 2ω (produced by the pump wave) propagate with the phase velocity of the pump wave $c(\omega) = \omega/k(\omega)$, while the excited second harmonic propagates with velocity $c(2\omega) = 2\omega/k(2\omega)$. Here k denotes the wavenumber. If $c(\omega) \neq c(2\omega)$ (i.e. $\Delta k \equiv k(2\omega) - 2k(\omega) \neq 0$) the beating of the forced and free waves occurs. Such beating is a hallmark of dispersive nonlinear interactions [1, 2, 6, 7]. This leads to periodic spatial modulation of the 2ω amplitude along the interaction length, and the beating spatial period limits the accumulation (coherence) length of the second harmonic by $L_c = \pi/\Delta k$. In optics, where the attenuation of the pump wave is negligible, the length of the nonlinear crystal should be optimized correspondingly.

In acoustics, the dispersion is usually much less than in optics, and the process of the 2ω excitation in a homogeneous medium is commonly considered as a quasi-synchronous one with 2ω -wave accumulation limited by the pump wave absorption or diffraction. Dispersion is characteristic of acoustic modes in waveguides, where the periodic spatial modulation of sum- and difference-frequency sound amplitude was experimentally observed [6]. A similar effect

was reported for Rayleigh surface waves for which the dispersion was introduced by loading the substrate with a thin film [7, 8]. It was demonstrated experimentally that dispersion suppresses higher harmonics generation in surface acoustic waves [9].

In the present letter we describe observations of beatings in the amplitude of the second harmonic excited in a granular medium. There are two important differences between the references cited above and our experiments.

First, the asynchronism between the nonlinear force and the second harmonic wave in our experiments is not due to velocity dispersion for a particular acoustic mode, but due to the mode conversion in the nonlinear process. It is well known that the excitation of the longitudinal acoustic wave at 2ω by the shear acoustic pump wave at ω is theoretically allowed in solids [3]. However, to the best of our knowledge, this process has never been experimentally observed because of weak nonlinearity of homogeneous solids and large difference between the velocities c_L and c_S of longitudinal (L) and shear (S) waves [3]. The first of these two factors (limiting 2ω -wave amplitude) was overcome in our experiment by choosing the granular material in which the nonlinear parameter exceeds those typical to consolidated homogeneous materials by two to four orders in magnitude (depending on the level of external static preloading) [10, 11].

Second, the beatings in 2ω amplitude are found not when the observation distance is varying, but when the amplitude of the pump shear wave is increased. Theoretical estimates presented below attribute this effect to the nonlinear transformation of the wave interaction region, which is due to the change in the mechanism of the 2ω excitation with the increasing pump amplitude.

Experiment. – The scheme of the experiment is shown in fig. 1. The emitter excited shear waves at frequency $f = 5.12\text{kHz}$ with vertical (V) or horizontal (H) polarization. For the transducer of a radius $a \simeq 2\text{cm}$ and the estimated length of the shear pump wave $\lambda_\omega \simeq 4.4\text{cm}$, the diffraction length $L_d \sim \pi a^2 / \lambda_\omega \sim 3\text{cm}$ is comparable to the transducer dimensions and is much less than 2ω -signal observation distance $R \simeq 16\text{cm}$ (see fig. 1). Consequently, the excitation of the second harmonic takes place in the essentially spherically-diverging pump-wave rather than in the plane-wave geometry. Variation of the external stress by an order of magnitude $7.2\text{ kPa} \leq P_0 \leq 72\text{ kPa}$ changed the average static strain from $\varepsilon_0 \simeq 7 \cdot 10^{-5}$ to $\varepsilon_0 \simeq 3.3 \cdot 10^{-4}$. Here and in the following, the compression corresponds to positive strain. The glass beads were of 2mm diameter. The receiver was created for the longitudinal polarization, so that its residual sensitivity to laterally polarized waves was significantly reduced. It was verified that the received signal at 2ω corresponded to L-wave, for which the signal propagation time and its polarization were checked. The observed mode conversion between the pump S-wave and the longitudinal 2nd harmonic is allowed by the symmetry considerations, whereas excitation of the shear 2nd harmonic in isotropic homogeneous materials is forbidden [3].

In fig. 1 parts (a) and (b), the dependence of the 2ω amplitude on the amplitude of the vertically polarized shear pump is presented. The beatings are clearly visible and reproducible. On the x-axis, 0dB corresponds to the maximal used pump strain amplitude about $\tilde{\varepsilon}_a^{\text{max}} \simeq 1.4 \cdot 10^{-5}$. It is more than an order of magnitude less than the average static strains in the medium ($2.3 \cdot 10^{-4}$ and $2.9 \cdot 10^{-4}$ for the applied static stresses 41 kPa and 60 kPa respectively). Thus on the x-axis the average static strain of the medium is located around $\sim 20\text{dB}$ and higher. In fig. 1(b) the measurements correspond to larger static preloading than in fig. 1(a). Comparison of the figures indicates the shift of the first local minimum (marked by vertical arrows) to higher pump amplitude for higher static strain.

In fig. 1(c) the dependence of 2ω longitudinal amplitude on the amplitude of the horizontally polarized shear pump wave is shown for the same static loading as in the case of

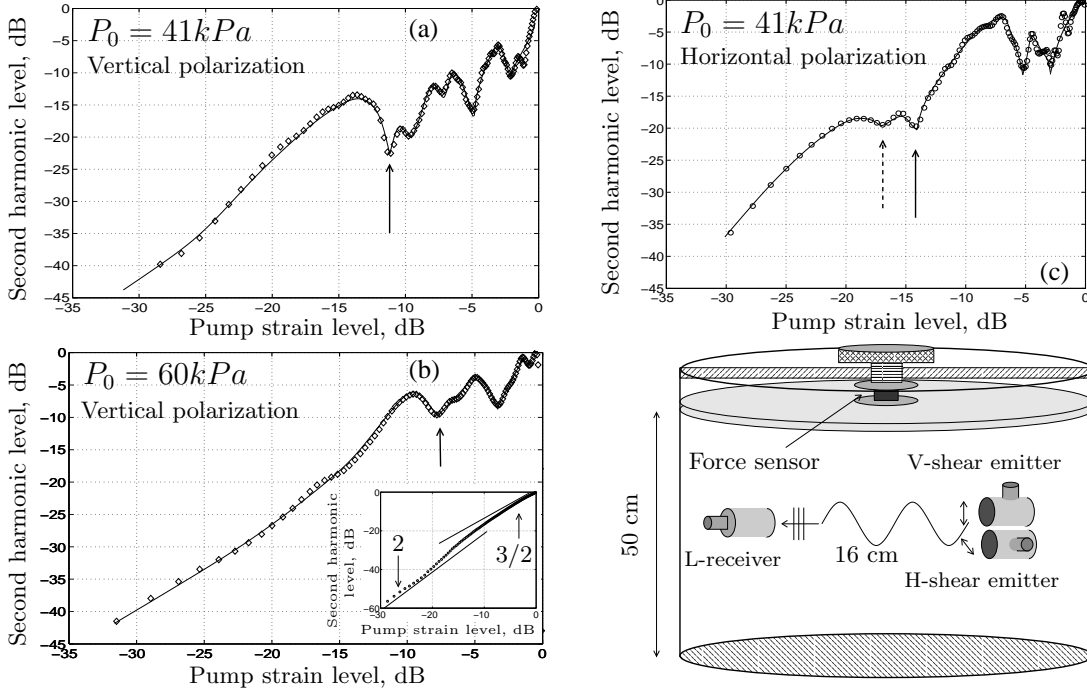


Fig. 1 – Scheme of the experiment and longitudinal second harmonic level as a function of the shear pump strain level. Vertically polarized pump (V-shear), plots (a) and (b). Horizontally polarized pump (H-shear), plot (c). Insert in plot (b) is for longitudinal pump.

vertical polarization in fig. 1(a). Comparison of the figures demonstrates that the first minimum appears for the horizontally polarized pump at smaller amplitudes than for the vertically polarized.

Discussion. – Our theoretical analysis attributes the beating in the 2nd harmonic amplitude to the unproportional modification of the spatial distribution of the nonlinear 2ω sources with increasing pump amplitude. Both nonlinear acoustic experiments in granular media and their theoretical interpretations indicate that, at sufficiently strong excitation, the weak clapping inter-grain contacts can provide competitive [12,13] or even dominant [11] contribution to the nonlinear part of the stress-strain relation $\sigma(\varepsilon)$ if compared with the contribution from contacts which remain closed during the whole period of acoustic loading. Indeed, in real granular materials, there is a significant portion of contacts with loading much weaker than in average [11,12], which essentially contribute to the resultant non-linearity of $\sigma(\varepsilon)$. Let us model for simplicity the distribution of weak contacts by a single fraction statically pre-loaded by the strain $\mu\varepsilon_0$ (which for $\mu \ll 1$ is significantly lower than the average loading ε_0). Separating out explicitly the static (σ_0, ε_0) and oscillatory ($\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}$) parts of the stress and strain, the stress-strain relation may be rewritten as:

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = bn_0(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2}H(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}) + bn_1(\mu\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2}H(\mu\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}) \quad (1)$$

Here $H(\dots)$ is the Heaviside function; n_0 and n_1 are the mean numbers of average loaded and weak contacts per grain, and factor b depends on elastic moduli of individual grains and the porosity of the packing. Estimates based on wave velocities data in grainy materials indicate

that $n_{0,1}$ may be comparable ($n_0 \sim n_1$) [13]. Nondimensional coefficient $|\mu| \ll 1$ characterizes the extent of unloading of the softer fraction. The power $3/2$ in eq. 1 corresponds to the classical Hertzian nonlinearity. Below, we consider only positive $0 < \mu \ll 1$ corresponding to initially weakly compressed contacts. Then for $|\tilde{\varepsilon}| \ll \mu \varepsilon_0$ the first and higher derivatives of eq. (1) with respect to $\tilde{\varepsilon}$ characterize the linear and nonlinear elastic moduli of the material, respectively:

$$\frac{\partial^m \tilde{\sigma}(\varepsilon_0)}{\partial \tilde{\varepsilon}^m} \sim b n_0 \left(1 + \frac{n_1}{n_0} \mu^{3/2-m}\right) \varepsilon_0^{3/2-m} \quad (2)$$

Thus for the linear modulus ($m = 1$) the relative contribution of the weak contacts is $\sim \mu^{1/2} \ll 1$ and may be negligible. In contrast, for the quadratic ($m = 2$) nonlinear modulus responsible for 2ω excitation, the contribution of the weak fraction is $\sim \mu^{-1/2} \gg 1$ and thus may strongly dominate over the nonlinearity of the average-loaded contacts.

For a propagating wave beam containing initially one or several sinusoidal waves, the aforementioned material nonlinearity results in the creation of running virtual nonlinear sources. These sources radiate combination frequencies, for example, higher harmonics $n\omega$ of a sinusoidal pump. In underwater acoustics, this effect is known as parametric sound radiation, and is mostly used for the frequency down-conversion via difference frequency $\omega_1 - \omega_2$ generation ($|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$, when $\omega_1 \sim \omega_2$). In liquids, where shear waves do not propagate, the nonlinearity of the state equation is almost perfectly quadratic in the acoustic strain, and the effect allows for a relatively simple but quite rigorous description. Using the perturbation approach, the stress in the nonlinearly radiated wave may be expressed in the integral form:

$$\sigma^{nl}(\vec{r}) = \Re e \frac{1}{4\pi} \int Q(\vec{r}') \frac{e^{ik_{rad}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \quad (3)$$

where the integration is performed over the volume of the nonlinear sources $Q(\vec{r}') \equiv Q(x', y', z')$ created in the medium by the primary (pump) beam; \vec{r} is the position of the observation point, k_{rad} is the wave number of the nonlinearly radiated signal (for example of the second harmonic). For liquids, the nonlinear source Q is proportional to the square of the primary wave amplitude: $Q \sim [\tilde{\varepsilon}_a e^{-i\omega t + ikr'}]^2$. In liquids both the primary and the nonlinearly radiated waves are of L-type and due to the absence of dispersion the co-propagating interacting waves are synchronous. This formally means that the oscillating exponential factors in the nonlinear source and in the radiated wave can perfectly compensate each other.

For the experiments in granular solids, the situation is more complex because of the nonlinear conversion between L- and S-waves. However, for the qualitative understanding of the observed beating effect we may omit the detailed discussion of coupling between S- and L-modes (having different polarizations) and will focus on the phase synchronism between the running nonlinear sources and the radiated wave. The integral solution in form of eq. (3) is sufficient for our purpose to discuss the phase properties of the integrand and its functional amplitude behavior in order to explain the beating effect. Concerning the absolute level of the radiated harmonic, certainly the coupling between S- and L-modes with different polarizations may additionally affect the numeric factors compared with those in solution (3).

In the considered case the nonlinear sources propagate with the phase velocity of the S-wave, so that the nonlinear source for the 2nd harmonic $Q \sim e^{-i2\omega t + i2k_S(\omega)r'}$, where the wavenumber $k_S = \omega/c_S(\omega)$. The radiated second harmonic of the L-wave propagates with another phase velocity c_L and wavenumber $k_{rad} = k_L(2\omega) = 2\omega/c_L(2\omega)$. The oscillating factors of the source and the radiated harmonic thus do not compensate each other and produce beating $\sim e^{i\Delta k r'} = e^{i[k_L(2\omega) - 2k_S(\omega)]r'}$ under the integral. The half spatial period of

the beatings limits the distance over which the contributions of the nonlinear sources can be synchronously accumulated. Another important difference from liquids is that, in the granular material, the nonlinear source remains quadratic only for small enough amplitudes $\tilde{\varepsilon}_a$ of the pump-strain, $\tilde{\varepsilon}_a/\varepsilon_0 \ll \mu$. In this case the expansion of eq. 1 leads to the nonlinear source of the form $Q = Q_2 \sim (3/16)(\mu\varepsilon_0)^{-1/2}\tilde{\varepsilon}_a^2$. For stronger $\tilde{\varepsilon}_a > \mu\varepsilon_0$ the nonlinearity is progressively becoming of the clapping type (see the Heaviside function in eq. (1)). Thus, after singling out the 2ω Fourier harmonic, the nonlinear source corresponding to the essentially clapping regime of the weak contacts takes the form: $Q = Q_{3/2} \sim (3/4\pi)\tilde{\varepsilon}_a^{3/2}$. The magnitudes of the nonlinear source in the two regimes coincide at $\tilde{\varepsilon}_a^{cr} \simeq 16\mu\varepsilon_0/\pi^2$, which we shall consider as the characteristic transition amplitude between the quadratic and clapping regimes. In this approximation, the interaction region in eq. (3) is subdivided into two parts corresponding to the quadratic/clapping regions of the nonlinear sources:

$$\tilde{\varepsilon}_a^{2\omega}(\vec{r}) \simeq \Re e \frac{const.}{4\pi} \left\{ \int_{r' < L_{cr}} Q_{3/2}(\vec{r}') \frac{e^{ik_{rad}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \int_{r' > L_{cr}} Q_2(\vec{r}') \frac{e^{ik_{rad}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \right\} \quad (4)$$

Schematically these regions are shown in fig. 2. At small-amplitude excitation, the clapping region does not exist at all. With increase of the pump amplitude the clapping region appears near the radiator and extends in the bulk, the transition distance L_{cr} being determined by condition $\tilde{\varepsilon}_a(r = L_{cr}) = 16\mu\varepsilon_0/\pi^2$. The pump wave (see the previous section) is spherically diverging, so that $\tilde{\varepsilon}_a(r) \simeq \tilde{\varepsilon}_a(r = L_d)L_d/r$. Note that $\tilde{\varepsilon}_a(r = L_d)$ is approximately equal to the pump wave amplitude at the radiator $\tilde{\varepsilon}_a(0)$. Performing the integration over the cross section of the pump beam and approximating $|\vec{r}-\vec{r}'| \simeq r$ in the denominators in eq. (4), the latter is reduced to:

$$\tilde{\varepsilon}_a^{2\omega}(R) \simeq const. \Re e \left\{ \frac{\tilde{\varepsilon}_a^{3/2}(0)}{\pi\sqrt{L_d}} \int_{L_d}^{L_{cr}} \frac{e^{i\Delta kz'}}{(z')^{1/2}} dz' + \frac{\tilde{\varepsilon}_a^2(0)}{4(\mu\varepsilon_0)^{1/2}} \int_{L_{cr}}^R \frac{e^{i\Delta kz'}}{z'} dz' \right\} \quad (5)$$

where $L_{cr} = \pi^2 L_d \tilde{\varepsilon}_a(0)/(16\mu\varepsilon_0)$. Thus at small amplitudes for which there is no clapping yet (and formally $L_{cr} < L_d$) the first integral vanishes and only the second quadratic in $\tilde{\varepsilon}_a$ term remains. Integral (5) is readily expressed via the Fresnel, Sine and Cosine integrals. In fig. 2, expression (5) is plotted for three values of the unloading parameter μ and other parameters close to those under the experimental conditions (observation length $R = 16\text{cm}$, $\Delta k = 95\text{ m}^{-1}$ corresponding to pump at 5.12 kHz, and $c_S = 225\text{ m/s}$, $c_L = 335\text{ m/s}$). The pump strain maximum $\tilde{\varepsilon}_a^{max}(0)$ (0 dB) is chosen an order of magnitude smaller than the static pre-strain ε_0 . The resultant behavior of the harmonic in fig. 2 essentially depends on μ . For example, for $\mu = 10^{-2}$ (in fig. 2) the initially quadratic and then oscillating dependence for the 2nd harmonic at higher pump amplitudes is qualitatively similar to the experimental curves shown in fig. 1 for the same pump-amplitude range.

In accordance with the proposed physical model, the nonlinear force (exciting 2ω) grows proportionally to $\tilde{\varepsilon}_a^2$ everywhere in space unless $\tilde{\varepsilon}_a$ near the emitting transducer exceeds $\tilde{\varepsilon}_a^{cr}$. After that, with increasing amplitude of pump wave in a larger and larger space region near the emitting transducer “clapping” nonlinearity dominates, and the force will grow $\sim \tilde{\varepsilon}_a^{3/2}$ (while the dependence $\sim \tilde{\varepsilon}_a^2$ will persist outside of this region). Due to slowing of the force growth near the emitter, the effective length L_{eff} of the nonlinear antenna emitting 2ω increases with pump wave amplitude. In fig 3, the distribution of the nonlinear force is presented for different ratios of $\tilde{\varepsilon}_a(0)/\tilde{\varepsilon}_a^{cr}$ in the case of spherical pump wave. Clearly, there is an increase

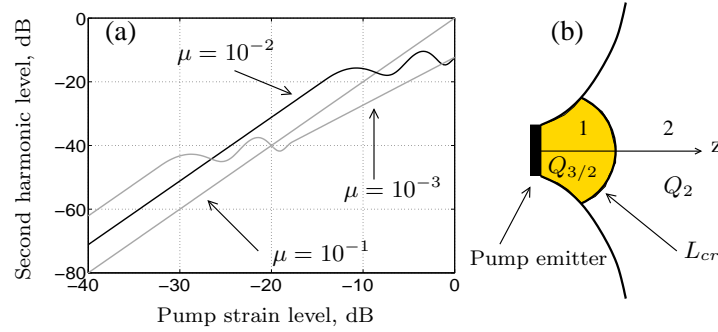


Fig. 2 – Insert (a), plots of result (5) for three values of the parameter μ ; insert (b), qualitative scheme of the nonlinear antenna.

in antenna length with increasing pump amplitude $L_{eff}^{(1)} < L_{eff}^{(2)} < L_{eff}^{(3)}$. The characteristic length of the force distribution plays here the role of the length of the frequency doubling crystal in nonlinear optics. Due to asynchronism between the 2ω longitudinal wave and the force created by shear waves the variation of this length leads to beatings in received second harmonic amplitude. In accordance with fig. 3, in a granular medium, the variation of the length of the nonlinear emitting antenna can be achieved by increasing pump wave amplitude.

Distance Δz between neighboring positions of L_{cr} corresponding to the successive extrema of the harmonic can be roughly estimated from the phasing condition $\Delta z \sim \pi/\Delta k \sim 3.3\text{cm}$. This means that, when the position L_{cr} of the clapping boundary gradually moves through the whole interaction length (following the increase in the pump amplitude), then, for the observation distance $R \sim 16\text{ cm}$, there could be not more than $\sim R/\Delta z \sim 4 - 5$ intermediate extrema. Further increase in the pump amplitude does not produce additional extrema, but should lead to the appearance of the smooth dependence with slope $3/2$, which indicates that the nonlinear sources are in the essentially clapping regime over the whole interaction length.

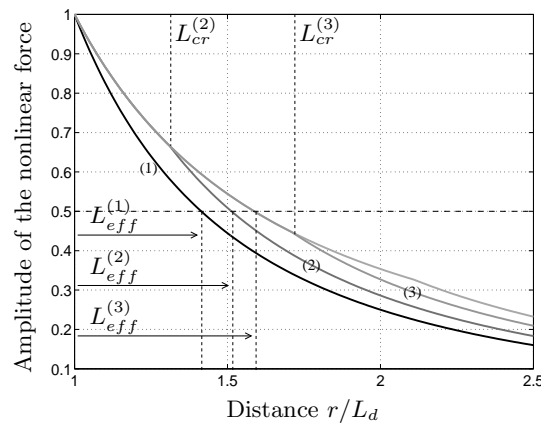


Fig. 3 – Antenna body transformation for different levels of emitted pump strains: $\tilde{\varepsilon}_a(0)/\tilde{\varepsilon}_a^{cr} = 1$ for curve (1), $\tilde{\varepsilon}_a(0)/\tilde{\varepsilon}_a^{cr} = 1.3$ for curve (2) and $\tilde{\varepsilon}_a(0)/\tilde{\varepsilon}_a^{cr} = 1.7$ for curve (3). Broadening of the antenna at the level $1/2$ is represented by the increasing of the effective lengths $L_{eff}^{(1)}$, $L_{eff}^{(2)}$ and $L_{eff}^{(3)}$ corresponding to the three increasing pump strain levels, respectively.

In fig. 2, the plot for $\mu = 10^{-3}$ demonstrates such a curve with completely developed beatings and slopes 2 and 3/2 before and after this region. When parameter μ is too large (insignificant unloading), the intermediate extrema may not appear at all for the amplitudes used (see fig. 2, curve $\mu = 10^{-1}$ with the quadratic slope over the whole amplitude range).

These examples demonstrate that the nonlinear beatings are rather sensitive to presence of weak contacts in granular packings. Thus the 2nd harmonic generation in shear waves provides a sensitive tool for evaluation of the weak inter-grain forces. The estimate $\mu = 10^{-2}$ obtained for the best agreement with the experimental observations, correlates well with data inferred from the experiments on the high-frequency pump demodulation in granular media [11].

The experimental observations that pump amplitude corresponding to the first minimum increases with external loading and is higher for vertical polarization of the shear pump than for the horizontal one are consistent with the ideas that increased loading makes it more difficult to initiate contact clapping ($\tilde{\varepsilon}_a^{cr}$ increases because ε_0 increases) and that due to preferential direction of loading (forced chains [14]) $\tilde{\varepsilon}_a^{cr}$ for vertically oriented contacts is larger than for the horizontal because ε_0 is larger for the former. The latter statement means that vertical loading induces anisotropy in the nonlinearity of the granular assemblage. The nonlinearity depends on the direction of particle displacement in the acoustic wave.

Conclusion. – Experimentally observed beatings in the second harmonic amplitude with increasing amplitude of the pump wave are attributed to asynchronous character of the process of 2ω excitation and the pump-induced variation of the 2ω effective excitation length. The variation of the effective length of the emitting antenna is attributed to increasing contribution of the clapping contacts to the nonlinear process.

* * *

This work is supported by a DGA contract No 00.34.026.00.470.75.65. and RFBR grant No 02-02-16237 (V.Z.).

REFERENCES

- [1] LAUTERBORN W., KURZ T., and WIESENFELDT M., *Coherent Optics, Fundamental and Applications*, edited by SPRINGER (Berlin) 1993.
- [2] SANTER E.G., *Nonlinear optics*, edited by JOHN WILEY & SONS (New-York) 1996.
- [3] ZAREMBO L.K., and KRASILNIKOV V.A., *Sov. Phys. Uspehi*, **13** (1971) 778.
- [4] YOST W.T., and CANTRELL J.H., in *Rev. Prog. QNDE*, edited by D.O. THOMPSON and D.E. CHIMENTI, Vol. **9** (Plenum Press, New-York) 1990, p. 1669-1676.
- [5] ZHENG Y., MAEV R.G., and SOLODOV I.YU., *Can. J. Phys.*, **77** (1999) 927.
- [6] HAMILTON M.F., IL'INSKII YU.A., and ZABOOSTKAYA E.A., in *Nonlinear Acoustics*, edited by M.F. HAMILTON and D.T. BLACKSTOCK (Academic Press, San Diego) 1997, p. 151-175.
- [7] MAYER A.P., *Phys. Rep.*, **256** (1995) 237.
- [8] LEAN E.G., and POWELL C.G., *Appl. Phys. Lett.*, **19** (1971) 356.
- [9] LEE J., SINGH M.P., and ZUCKER J., *Appl. Phys. Lett.*, **36** (1980) 896.
- [10] BELYAEVA I.YU., OSTROVSKY L.A., and TIMANIN E.M., *Acoust. Lett.*, **15** (1992) 221.
- [11] TOURNAT V. ET AL., *Phys. Rev. Lett.*, (submitted) .
- [12] BELYAEVA I.YU., ZAITSEV V.YU., and TIMANIN E.M., *Acoust. Phys.*, **40** (1994) 893.
- [13] ZAITSEV V.YU., *Acoust. Phys.*, **41** (1995) 439.
- [14] LIU C.-H., NAGEL S.R., SCHECTER D.A., COOPERSMITH S.N., MAJUMBDAR S., NAVAYAN O., and WITTEN T.A., *Science*, **269** (1995) 513.

Annexe B

Article soumis à Phys. Lett. A (2003) sur la génération de sous-harmoniques et de bruit dans les milieux granulaires.

Ces expériences et les interprétations des phénomènes de doublage de période et de route vers le chaos sont en accord avec l'analyse des résultats présentés dans le chapitre 4. Les contacts faibles du milieu granulaire non-consolidé sont les principaux responsables des effets non-linéaires observés.

Subharmonics and noise excitation in transmission of acoustic wave through unconsolidated granular medium

V. Tournat , V. E. Gusev , B. Castagnède

Université du Maine, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 09, France.

Abstract

First laboratory-scale experimental observation of both subharmonics excitation and significant increase in noise level caused by propagation of the acoustic wave in unconsolidated granular material is reported. The bifurcation phenomenon, taking place above a critical level of acoustic excitation (and opening the subharmonics route to chaos) is attributed to the interaction of acoustic wave with distributed system of highly nonlinear inter-grain contacts. The estimates demonstrated that these are weak contacts (loaded at least two orders of magnitude weaker than in average) that might be responsible for the observed nonlinear effects. The additional intermittent contacts created by the acoustic wave (which are open in the absence of acoustic loading) can also contribute. In the clapping (tapping) regime, each of these contacts individually is similar to an impact oscillator, for which the scenario of period doubling cascade and the transition to chaotic behavior has been predicted theoretically and observed experimentally earlier. The experiments confirm that the nonlinear interactions of acoustic waves in granular assemblages are highly sensitive to the fraction of weakly loaded (and unloaded) contacts, information on which is difficult to access by any other experimental methods.

Key words: Granular solids, Nonlinear acoustics, Nonlinear dynamics and nonlinear dynamical systems

PACS: 83.80.Fg, 43.25.+y, 05.45.-a.

1 Introduction

It had been already 25 years ago that theoretical discovery by Feigenbaum of certain universal properties in period-doubling bifurcations of iterated one-

Email address: `vincent.tournat@univ-lemans.fr` (V. Tournat).

dimensional maps had catalyzed an experimental search for analogous behaviors in various nonlinear systems [1]. In acoustics, subharmonic sound emission connected with period doubling bifurcations has been found in some musical instruments [2,3]. Bifurcations properties and routes to chaos in thermo-acoustic system has been studied [4,5]. A review on nonlinear dynamics in acoustics can be found in [6].

For the current communication, it is important that subharmonic route to chaos has been observed in acoustic wave propagation through a medium [7]. Acoustic turbulence (acoustic cavitation noise) in insonified fluids has been attributed to complex nonlinear oscillations dynamics of individual gas bubbles forced by the external sound field [7,8] (in superfluid helium-4 vortex line generation leads to quantum turbulence [9]). Only later, the theories based on the analysis of gas bubbles nonlinear oscillations have got experimental support from the observations of period doubling and chaos in the sonoluminescence from a single bubble [10].

The sequence of advances in acoustic evaluation of nonlinear dynamics of unconsolidated granular medium (where an individual intergrain contact may be expected to play the role of a bubble in fluid) is just the opposite one. First, the period doubling bifurcations [11,12] and transitions to chaos [13] have been observed experimentally in the dynamics of a single nonlinear contact. It should be noted that references [11,12] given here, have a tight relation with a whole body of publications on bouncing ball phenomenon and impact oscillations, respectively. It is also interesting that the vibration of an individual nanocontact in [11] has been forced by an incident acoustic wave. Earlier, sub-harmonics excitation and different regimes of transition to chaos has been reported for acoustically induced vibrations of a contact interface between solids [14–16]. The quasi-chaotic behavior has been observed in the interaction of an ultrasonics welding horn with the surface of a sample [17]. Finally, quite recently the excitation of the subharmonics has been observed in the interaction of both surface [18] and bulk [19] acoustic waves with individual cracks in the material. Thus, the period-doubling bifurcation and chaotic behavior is a well documented phenomenon in the interaction of the acoustic waves with individual contacts.

Experimental results reported below are believed to be the first laboratory-scale experimental observation of the interaction of acoustic wave with the distributed system of highly nonlinear contacts (which is a basic feature of unconsolidated granular materials). Both excitation of the subharmonics and significant increase in noise level with increasing amplitude of acoustic wave propagating through granular medium are observed. The influence of external loading on the bifurcation phenomenon is documented. It is expected that the laboratory scale nonlinear acoustic experiments of the type presented here and in [19] will be useful in the future for modeling of full-scale geophysical

experiments. For example, the excitation of subharmonics has been observed in full-scale geophysical experiments performed in natural environment (dynamic surface loading of fissile rock in active earthquake zones and in large underground excavations at 20-80 Hz with signal detection at distances of 400 m from loading source) [20]. In these experiments, the subsequent increase of dynamic loading above the threshold of subharmonic excitation has led to fast increase of the wide-band noise in the up-expanding frequency range. The observations have been attributed [20] to nonlinear dynamics of cracks.

2 Experiments

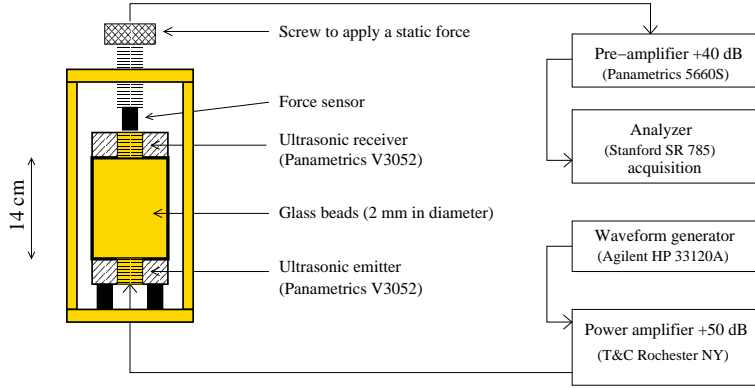


Fig. 1. Experimental setup.

The experiment is conducted in a cylindrical reservoir filled with glass beads of 2 mm in diameter (fig 1). It is possible to load this granular assemblage vertically with static pressure P_0 in the range $32kPa \leq P_0 \leq 320kPa$ providing estimated average static pre-loading strain ε_0 of Hertzian contacts in the range $1.8 \cdot 10^{-4} \leq \varepsilon_0 \leq 8.5 \cdot 10^{-4}$. Acoustic waves (longitudinal or shear) are emitted by transducers of 4 cm in diameter at fundamental (pump) frequencies f_0 of $12kHz$ or $10kHz$. The transmitted signal is received at a distance of 14 cm by a transducer predominantly sensitive to longitudinal acoustic waves. The maximum strain (for both longitudinal and shear) in the emitted acoustic wave is estimated to be about $\tilde{\varepsilon}_a^{max} \simeq 1.4 \cdot 10^{-5}$. For the typical values of velocities of acoustic waves (propagating in the granular skeleton) of the order of $c \simeq 450m/s$, this corresponds to maximum accelerations of $75m/s^2$ significantly exceeding one related to gravity.

In Fig. 2, the spectrum of the received signal is presented at different levels of acoustic excitation (acoustic wave amplitude is a control parameter). At low excitation level ($\tilde{\varepsilon}_a \simeq 4.4 \cdot 10^{-9}$, Fig. 2(a)) only the higher harmonics of the pump wave $n\omega_0$ ($n = 2, 4, \dots$) are visible in addition to fundamental frequency ($\omega_0 = 2\pi f_0$). At higher level of excitation ($\tilde{\varepsilon}_a \simeq 4.4 \cdot 10^{-7}$, Fig. 2(b)) subharmonic $\omega_0/2$ appears in the spectrum. In addition, it is possible to iden-

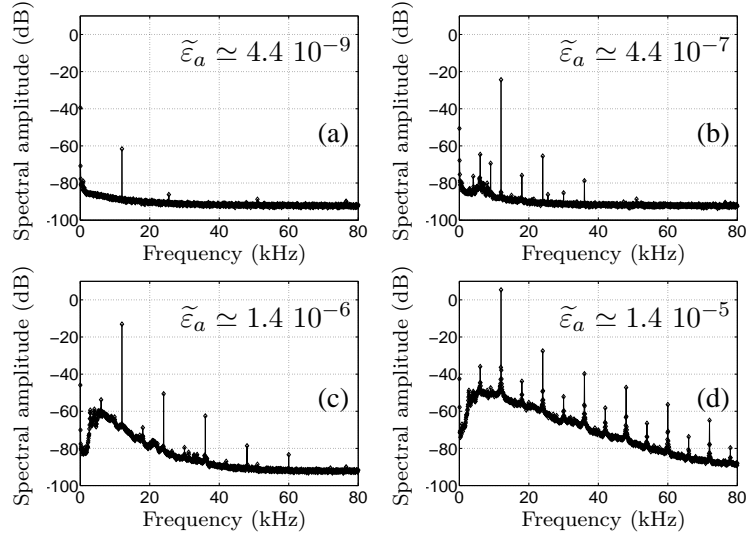


Fig. 2. Observed spectra for different strain amplitudes of fundamental pump wave at $f_0 = 12\text{kHz}$. The static pressure applied on the granular assemblage is $\simeq 300\text{kPa}$.

tify $3\omega_0/4$, $3\omega_0/2$ and $5\omega_0/2$. It seems that $\omega_0/4$ and higher order subharmonics ($\omega_0/8$, $\omega_0/16$, etc...) are not observed because of low sensitivity of receiver below $\leq 3\text{kHz}$ and because these subharmonics peaks fall on a low frequency noise shoulder. From Fig. 2(c,d) it is clear that subsequent increase in pump amplitude leads to preferential rise of this noise shoulder in comparison with the amplitudes of the subharmonics and only $\omega_0/2$ and $(2n+1)\omega_0/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), are clearly visible.

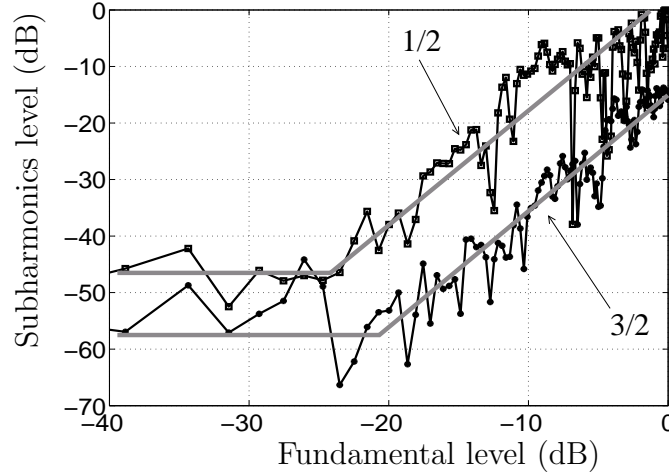


Fig. 3. Levels of received subharmonics 1/2 (in squares) and 3/2 (in circles) as a function of the fundamental (12 kHz) wave level. The fundamental level 0dB corresponds to $\tilde{\varepsilon}_a^{\text{max}} \simeq 1.4 \times 10^{-5}$. The applied static pressure $\simeq 200\text{kPa}$ corresponds to average static pre-strain $\varepsilon_0 \simeq 6.2 \times 10^{-4}$.

In Fig. 3, the measurements of subharmonic amplitude and that of $3\omega_0/2$ are presented as a function of pump wave amplitude. It is clear that the

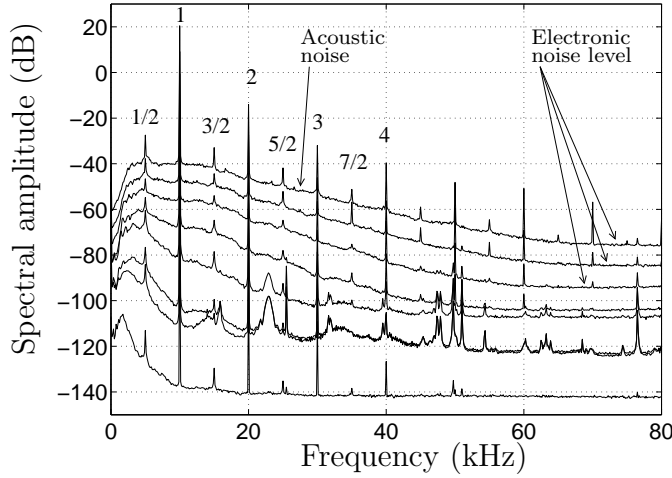


Fig. 4. Observed spectra for different applied static pressure. From the lower curve to the upper one, $P_0 \simeq 72, 91, 102, 138, 170, 213, 281$ and 313 kPa, respectively. The strain amplitude is $\tilde{\varepsilon}_a^{max} \simeq 1.4 \cdot 10^{-5}$ and the pump wave frequency is $f_0 = 10$ kHz.

appearance of $3\omega_0/2$ in the spectrum follows the period-doubling bifurcation.

In Fig. 4 the spectrum of the received signal is presented for the fixed amplitude of the insonification ($\tilde{\varepsilon}_a^{max} \simeq 1.4 \cdot 10^{-5}$) when another control parameter (average static loading) is varied. The broadening of the noise spectrum with increased static force is observed.

There are several other features in our data which show systematic behaviors. For example, monotonic increase in the amplitudes of harmonics and of the subharmonics as well as of noise with increase of either dynamic or static loading correlates with data presented in Fig. 2 and Fig. 4.

3 Discussion

It might be clear from the introduction that we attribute the observed period-doubling phenomena (in frequency response of the acoustic energy transport through granular medium) to nonlinear dynamics of inter-bead contacts. Several less or more plausible scenarios could be imagined at a qualitative level (Fig. 5). The first of them is possible for the individual beads, which are contacting with surrounding skeleton only due to gravity (Fig. 5(a), bead (1)).

This bead does not carry any load transmitted through the assemblage and might be called the “spectator” [21]. The accelerations in the acoustic field (estimated to be significantly higher than acceleration of gravity at the maximum level of excitation) will definitely cause bouncing of this “spectator” between the neighboring beads of the skeleton. Then the scenario of period-

doubling bifurcation may follow that of the bouncing ball phenomenon [11,22–24], through the restoring force on the bead flight might be provided not only by the gravitational acceleration g but also by the interaction of the flying “spectator” with the neighboring beads. More than one cycle of the acoustic motion may occur between the impacts of the “spectator” with the surrounding beads, and so the motion of the “spectator” can exhibit subharmonics of the exciting frequency. However, this scenario is less probable in comparison with some others because the number of beads, which are completely free of external loading is expected to be significantly lower than the number of beads that are carrying at least some load.

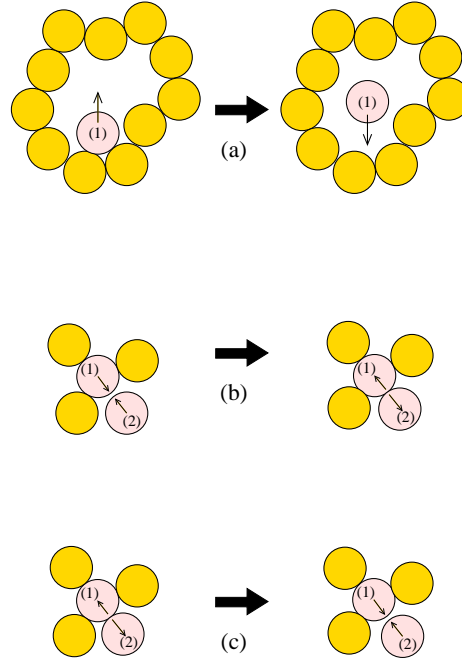


Fig. 5. Illustration of plausible scenarios responsible for the period-doubling bifurcation in the medium.

In Fig 5(b), the bead marked by (1) misses a single contact with the surrounding skeleton (with the bead marked by (2)). The acoustic loading may cause closing of the gap between the beads (1) and (2) at least during a part of the acoustic period (Fig. 2(b)). This contact might be called “weakly unloaded”. In this case, the scenario of period doubling cascade and the transition to chaotic behavior may follow those predicted theoretically [24–29] and observed experimentally [12,13] for the impact oscillations. The mathematical formalism of the theory of grazing bifurcations [12,30,31] could be useful for the understanding of the nonlinear dynamics at those levels of acoustic excitation when the tapping of one bead by another is just starting. It is important that the theory of the impact oscillations is sufficiently developed not only for absolutely rigid constraints but also for the impacting Hertzian contacts [29]. The period-doubling bifurcation in the dynamics of the impact oscillators leads to such dynamics that the contacts (1) and (2) are colliding only once

in two periods of forcing acoustic wave. Both theoretical investigations and experiments are usually limited to forcing frequencies that are of the order of the resonance frequency ω_{res} of the oscillators or higher [25–29]. The theoretical prediction of subharmonic oscillations for $\omega_0/\omega_{res} \gtrsim 1$ correlates with the expected relation of period-doubling bifurcation with subharmonic resonances [25] (similar to the situation in nonlinear vibrations of gas bubbles [8]). From this point of view, for the subharmonic excitation, the granular system should contain local oscillators with resonance frequencies ω_{res} of the order of or less than the acoustic loading frequency ω_0 . Using the measured value for sound velocity ($c \sim 450m/s$) and the value of bead diameter ($a = 2mm$) the resonance frequency of an element containing a contact and a bead supporting the average static deformation ε_0 is estimated by a cut-off frequency f_{cut} for a chain of beads as $f_{res} = f_{cut} = c/(\pi a) \sim 70kHz$. This value significantly exceeds the frequency of acoustic excitation $f_0 \sim 12kHz$. It can be concluded that these are the beads with contacts that are weakly loaded (in comparison with average) who contributes to subharmonic cascade leading to chaos. In particular, the contacts with the neighbors of the bead numbered (1) in Fig. 5(b) should be weak in comparison with average contacts. To estimate the preloading of the weak contacts providing the resonance frequency $f_{\mu'} \sim \mu' f_{res} \leq f_0$ (where $\mu' \simeq 2 \cdot 10^{-1}$) it should be taken into account that the resonance frequency is proportional to the square root of the rigidity. Then the rigidity of these contacts K_{μ} can be estimated as $K_{\mu} \sim \mu'^2 K_0 \sim 4 \cdot 10^{-2} K_0$, where K_0 is the rigidity of contacts subjected to average loading. Because for the nonlinear Hertzian contacts the rigidity is proportional to the square root of the preloading strain, then the preloading $\varepsilon_{\mu'}$ of these weak contacts can be estimated as $\varepsilon_{\mu'} \sim \mu'^4 \varepsilon_0 \lesssim 1.6 \cdot 10^{-3} \varepsilon_0$. Consequently, the individual beads interacting with the neighbors through these weak contacts are the most plausible candidates for realization of the impact oscillations scenario for period doubling cascade in granular medium. However, it is worth mentioning that the resonance frequency of an oscillator is inverse proportional to the square root of its mass. Consequently, the diminishing of the resonance frequency in comparison with one of a single bead in a linear chain (subjected to average loading) might be due not only to weakened contacts but also due to increased mass of an oscillator if it is composed of several beads (of a cluster). This is another opportunity to explain the existence in a granular assemblage of the oscillators with low resonance frequencies to be subjected to deeper theoretical analysis in the future.

Currently, it seems more plausible that low frequency resonances are due rather to weak contacts than to clustering of the beads. The recent experiments [32] on the demodulation of the acoustic waves in granular assemblages demonstrated that nearly half of the contacts are subjected to strains that are less than 10% of the average strain ε_0 . The transition in the amplitude of the demodulated signal from $\sim \tilde{\varepsilon}_a^2$ to $\sim \tilde{\varepsilon}_a^{3/2}$ related to the initiation of contacts clapping provides the estimate ($\tilde{\varepsilon}_a \sim 0.1\varepsilon_0$) for the characteristic strain

under which the weak contacts are localized. The experimental results on the excitation of the subharmonic and the theoretical estimates presented above demonstrate that these new nonlinear acoustic experiments are sensitive even to significantly weaker loaded contacts (with $\varepsilon_{\mu'} \sim 10^{-3}\varepsilon_0$).

An interesting point is that a significant part of the weakly loaded contacts with estimated preloading $\varepsilon_{\mu'} \lesssim 1.6 \cdot 10^{-3}\varepsilon_0$ is expected to start clapping themselves before the experimentally observed threshold $\tilde{\varepsilon}_a^{exp}$ for the subharmonic excitation ($\tilde{\varepsilon}_a^{exp} \sim 1.3 \cdot 10^{-3}\varepsilon_0$). This observation leads to the hypothesis that the existence of the initial gap between the contacts (Fig. 5(b)) is maybe not necessary. Another initial configuration of beads different from that in Fig. 5(b) is presented in Fig. 5(c). In comparison with the previous case, there is initial contact between the beads (1) and (2) but it can be easily opened by acoustic loading during a part of the acoustic loading period. This contact might be called “weakly loaded”. The difference between the clapping contacts in the configurations depicted in Fig. 5(b) and in Fig. 5(c) is that in the former clapping starts with increasing acoustic wave via a short period impact (grazing impact) while in the latter via a short period opening of the gap. The experiment on the interaction of the acoustic wave with the plane interface between two solids [14] indicate that this can lead to completely different scenarios of nonlinear dynamics when the amplitude of loading is further increased. It is expected that the scenarios in Fig. 5(b) and Fig. 5(c) are more probable than Fig. 5(a).

All of the proposed mechanisms of pronounced nonlinear dynamics (Fig. 5) are expected to be suppressed when the static loading increases (because the latter should induce diminishing in the number of weakly loaded contacts). That is why, the observed (Fig. 4) increase in the amplitude of the received signal (at fundamental frequency, at its superharmonics and subharmonics, and of the noise level) is believed to be due to even faster diminishing of the sound absorption and scattering with increasing compaction (consolidation) of the granular assemblage.

Another question worth discussing is whether the processes of synchronous amplification of the subharmonic are effective in the system under consideration or not? In other words if the subharmonic signal emitted by the clapping contacts might be significantly amplified in the field of the fundamental wave or not? It is well known that for the longitudinal waves the process of difference frequency generation is allowed in collinear geometry of ω and $\omega/2$ propagation $\omega_{LA} - (\omega/2)_{LA} \rightarrow (\omega/2)_{LA}$ [33]. The amplitude of the scattered subharmonic wave (in the right-hand-side) is proportional to the product of the amplitudes of the interacting pump wave (ω_{LA} -wave) and the initial subharmonic wave (in the left-hand-side). Because of this, it should be admitted that the number of subharmonic phonons can increase due to the interaction with the pump wave and that actually the $(\omega/2)_{LA}$ phonons can stimulate the following process of

spontaneous decay of the pump wave $\omega_{LA} \rightarrow (\omega/2)_{LA} + (\omega/2)_{LA}$. The latter process results in a net stimulated amplification of the subharmonic if the amplification in the nonlinear process over-compensates attenuation of $(\omega/2)_{LA}$. In the case of the shear pump wave, the process $\omega_{SA} - (\omega/2)_{LA} \rightarrow (\omega/2)_{LA}$ (and correspondingly, $\omega_{SA} \rightarrow (\omega/2)_{LA} + (\omega/2)_{LA}$) are forbidden in isotropic materials by the laws of momentum and energy conservation (not only in collinear wave interactions but also in non-collinear interactions as well [34]). Importantly, even if the considered processes are allowed, they do not seem to be relevant to our experiments. In fact, the shortest possible amplification length of the subharmonic can be estimated (by neglecting wave attenuation) as the distance of shock formation in the initially sinusoidal plane pump wave $\ell^{nl} \simeq \lambda_\omega / (2\pi\Gamma_2\tilde{\varepsilon}_a)$ [34]. Here, $\tilde{\varepsilon}_a$ is the strain amplitude in the pump wave and Γ_2 is the parameter of quadratic acoustic nonlinearity. The latter can be estimated for our system from the experiments [32] on the self-demodulation of high-frequency acoustic bursts to be $\Gamma_2 \lesssim 2.5 \cdot 10^3$ for the static pre-strain $\varepsilon_0 \sim 10^{-4}$. In the experiments presented above, the pre-strain is higher $6 \cdot 10^{-4} \lesssim \varepsilon_0 \lesssim 8.5 \cdot 10^{-4}$ (corresponding to $200kPa \lesssim P_0 \lesssim 300kPa$). Taking into account that the parameter of quadratic nonlinearity for non-clapping Hertzian contacts varies inverse proportionally to the square root of the pre-strain, we estimate $\Gamma_2 \lesssim 10^{-3}$. Consequently, the amplification length of the subharmonic is estimated as $\ell^{nl} \gtrsim 50cm$ for the maximum acoustic deformation $\tilde{\varepsilon}_a^{max} \simeq 1.4 \cdot 10^{-5}$ achieved in our experiments.

This length significantly exceeds not only the effective interaction length (controlled by the diffraction length of the pump wave $\sim 4cm$) but even the observation distance ($L \sim 14cm$). It is well known that the process of clapping, which is not taken into account here in the estimates of Γ_2 and ℓ^{nl} , tends to saturate the quadratic non-linearity [32], i.e. to produce a lower Γ_2 and a higher ℓ^{nl} compared to the non-clapping regime for the same applied dynamic strain. Moreover, if the 3-D geometry of the pump beam would be taken into account, i.e. the diminishing of the pump wave amplitude at the scale of the diffraction length, this would lead to even longer amplification lengths [34]. Consequently, the process of subharmonic amplification is estimated to be negligible in our experiment.

To finish the discussion it is worth mentioning that the goal and the results of the experiment describe above are completely different from well-known experiments [35,36] where the acoustic loading of the granular media at frequency $f_0 \sim 10kHz$ has been used to study the slow dynamics of granular assemblages through the measurements of low frequency (below $10Hz$) fluctuations in the transmitted acoustic signals. In our experiments this slow dynamics can also manifest itself as slow (at the time scale $\geq 2s$) fluctuations in the amplitudes of harmonics, subharmonics and noise level. It might be caused by structural relaxation of the bead assemblage under the acoustic activation [35]. Loosely packed glass beads are metastable and acoustic action might play the role of

an effective temperature [37] (i.e. of a source of thermal fluctuations) initiating the system rearrangement towards a stable state. The other mechanism of slow dynamics might be thermoelastic expansion of contacts (which are natural regions of strain concentration and acoustic energy absorption) [38]. However, more detailed discussion of our preliminary experimental results and estimates of the characteristic slow time scales are beyond the scope of the present communication.

4 Conclusions

The first experimental observation of the excitation of subharmonics above the critical amplitude of sinusoidal acoustic wave propagating in unconsolidated assemblage of beads is reported. With the increasing amplitude of the pump wave, the number of the detectable combination frequencies grows. The broadening of the frequency range, where combination frequencies are observed, is accompanied by broadening of the noise spectrum as well. Significant increase of the noise level with increasing pump amplitude is documented. The bifurcation phenomenon, opening the subharmonic route to chaos, is attributed to highly nonlinear forced oscillations of intermittent (clapping) contacts. These intermittent contacts appear or by opening (during part of the acoustic period) of the statically weakly loaded contacts (clapping) or by closing (during part of the acoustic period) of the tiny gaps between the neighbor grains (tapping). The bifurcation sequence for the tapping scenario is expected to qualitatively follow the one predicted theoretically and observed experimentally earlier for an individual impact oscillator. Both clapping and tapping has been observed before in the interaction of the acoustic wave with a single plane contact interface between two solids. However, the observations described above are believed to be the first where the acoustic wave interaction with a *distributed* system of nonlinear contacts leads to excitation of subharmonics and noise.

The conducted experiments confirm a predominant sensitivity of the nonlinear acoustic phenomenon to weakly loaded (and weakly “unloaded”) contacts, which might be forced to clapping (tapping) by the acoustic wave with an amplitude which is significantly less than the average loading. Further development of the nonlinear acoustic methods could provide a unique tool for the diagnostics of the contacts that are several orders of magnitude weaker than those carrying the average (static) load.

Acknowledgments

When conducting this research we greatly benefited from the fruitful discussions with V. Zaitsev and V. Nazarov (from the Institute of Applied Physics, Nyzhnii Novgorod, Russia). This work is supported by a contract with DGA No 00.34.026.00.470.75.65.

References

- [1] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19 (1978) 25.
- [2] C. Maganza, R. Caussé, F. Laloë, *Europhys. Lett.* 1 (1986) 295.
- [3] K. A. Legge, N. H. Fletcher, *J. Acoust. Soc. Am.* 86 (1989) 2439.
- [4] T. Yazaki, S. Takashima, F. Mizutani, *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 1108.
- [5] T. Yazaki, *Phys. Rev. E* 48 (1993) 1806.
- [6] W. Lauterborn, *Acustica - Acta Acustica* 82 (1996) S46.
- [7] W. Lauterborn, E. Cramer, *Phys. Rev. Lett.* 47 (1981) 1445.
- [8] W. Lauterborn, E. Suchla, *Phys. Rev. Lett.* 53 2304 (1984).
- [9] C. W. Smith, M. J. Tejjwani, D. A. Farris, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 492.
- [10] R. G. Holt, D. F. Gaitan, A. A. Atchley, J. Holzfuss, *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994) 1376.
- [11] N. A. Burnham, A. J. Kulik, G. Gremaud, G. A. Briggs, *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 5092.
- [12] J. de Weger, W. Van de Water, J. Molenaar, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 2030.
- [13] F. C. Moon, *Chaotic Vibrations. An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, (John Wiley & Sons, New-York, 1987).
- [14] I. Yu. Solodov, C. A. Vu, *Acoust. Phys.* 39 (1993) 476.
- [15] I. Yu. Solodov, *Ultrasonics* 36 (1998) 383.
- [16] B. A. Korshak, I. Yu. Solodov, E. M. Ballad, *Ultrasonics* 40 (2002) 707.
- [17] X. Han, Z. Zheng, L. D. Favro, R. L. Thomas, *Appl. Phys. Lett.* 81 (2002) 3188.
- [18] I. Yu. Solodov, B. A. Korshak, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 014303.
- [19] A. Moussatov, V. Gusev, B. Castagnède, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003) 124301.
- [20] V. A. Robsman, *Acoust. Phys.* 39 (1993) 176.

- [21] M. E. Cates, J. P. Wittmar, J.-P. Bouchaud, P. Claudin, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 1841.
- [22] A. B. Pippard, The Physics of Vibrations, (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
- [23] A. Mehta, J. M. Luck, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 393.
- [24] J. M. Luck, A Mehta, Phys. Rev. E 48 (1993) 3988.
- [25] J. M. T. Thompson, R. Ghaffari, Phys. Lett. A 91 (1982) 5.
- [26] H. M. Isomaki, J. VonBoehm, R. Rätty, Phys. Lett. A 107 (1985) 343.
- [27] F. Peterka, J. Vacik, J. Sound. Vib. 154 (1992) 95.
- [28] S. Foale, Proc. R. Soc. Lond. A 347 (1994) 353.
- [29] S. Foale, S. R. Bishop, Nonlinear Dynamics 6 (1994) 285.
- [30] A. B. Nordmarck, J. Sound Vibr. 145 (1991) 279.
- [31] W. Chin, E. Ott, H. E. Nusse, C. Grenogi, Phys. Lett. A 201 (1995) 197.
- [32] V. Tournat, V. Yu. Zaitsev, V. E. Gusev, V. E. Nazarov, P. Béquin, B. Castagnède, Phys. Rev. Lett. (submitted).
- [33] L. K. Zarembo, V. A. Krasilnikov, Sov. Phys. Uspekhi 13 (1971) 778.
- [34] O. V. Rudenko, S. I. Soluyan, Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics, (Consultants Bureau, New-York, 1978).
- [35] C.-h. Liu, S. R. Nagel, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 2301.
- [36] C.-h. Liu, S. R. Nagel, Phys. Rev. B 48 (1993) 15646.
- [37] M. Nicomedi, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 3734.
- [38] V. Yu. Zaitsev, V. E. Gusev, B. Castagnède, Phys. Rev. Lett. 90 (2003) 075501.

Index

- Amplitude de diffusion, 18
- Anharmonicit , 74
- Anisotropie, 111, 115
- Antenne paramétrique, 16, 35–37, 72, 74, 103
- Approximation de diffusion indépendante, 19
- Approximation quasi-statique, 22
- Arrangements réguliers, 14
- Atténuation, 120
- Auto-démodulation, 35–37, 72

- Berkta , 35

- Chaîne de billes, 9, 13, 76
- Chaînes de force, 15, 115
- Clappement, 24, 26, 29
- Coefficient de diffusion, 44
- Coefficient de Poisson, 6, 72
- Compacité, 15, 18
- Compaction, 16
- Constante de raideur, 9
- Contact de Hertz, 13, 42
- Contact entre billes élastiques, 6
- Contacts faibles, 104
- Contacts forts, 104
- Contrainte statique uniaxiale, 16
- Conversion de mode, 12
- Corrélations spatiales, 15, 19
- Couplage acoustique, 14, 19, 20
- Couplage de modes, 16
- Cubique centré, 15
- Cubique faces centrées, 15
- Cubique simple, 15

- Désordre des contacts, 20
- Désordre géométrique, 20
- Défaut de masse, 13
- Déformation statique, 110
- Déformations plastiques, 8
- Déplacement démodulé, 44
- Densité d'énergie élastique, 42

- Densité d'énergie acoustique, 44
- Diffusion acoustique, 14, 18, 20, 21, 41
- Diffusion de Rayleigh, 19
- Diffusion multiple, 19
- Dilatance, 112, 114
- Dispersion de vitesse, 11, 92, 114
- Dispositif expérimental, 108
- Distribution de contacts, 105, 119–124
- Distribution de Heaviside, 26
- Dynamique lente, 18

- Effets thermo-élastiques, 8
- Elastographie, 15
- Elements mésoscopiques, 21
- Energie potentielle, 26, 42
- Equation du mouvement, 75

- Fluide saturant, 14, 16, 20
- Flux d'énergie, 44
- Force axiale, 7
- Force statique, 13
- Force tangentielle, 7
- Fréquence de coupure, 10, 12, 72
- Fréquence de résonance, 12
- Fréquence différence, 18, 28, 36, 72
- Fréquence porteuse, 43
- Friction, 8, 16

- Harmonique 2, 26
- Hexagonal compact, 15
- Histoire du milieu, 127
- Hystérésis, 8, 17, 18, 23

- Impédance acoustique, 16, 19

- Longueur d'absorption, 37
- Longueur d'atténuation, 114, 127
- Longueur de corrélation, 15
- Longueur de diffraction, 37
- Longueur de diffusion, 40

- Masse apparente, 16
- Milieu effectif, 19
- Milieu granulaire désordonné, 14
- Milieu poreux, 16
- Milieus réguliers, 14
- Modes évanescents, 77
- Modes acoustiques longitudinaux, 12
- Modes de Rayleigh, 12
- Modes de respiration, 9, 12
- Module d'Young, 6, 72
- Module de cisaillement, 7
- Modules élastiques, 105

- Nombre d'onde, 10
- Nombre d'onde de coupure, 10
- Nombre d'onde effectif, 19
- Nombre de coordination, 15
- Non-linéarité, 21, 41
- Non-linéarité atomique, 21
- Non-linéarité cinématique, 21
- Non-linéarité de Hertz, 23
- Non-linéarité quadratique, 24, 74
- Non-linéarités acoustiques, 14

- Onde cohérente, 19
- Onde démodulée, 36
- Ondes de pompage, 36, 72, 114
- Ondes de pompage évanescents, 86
- Ondes de Rayleigh, 12
- Ondes de surface, 12
- Ondes primaires, 36, 72

- Paramètre de non-linéarité, 22
- Paramètre de non-linéarité quadratique, 25
- Phénomène de battement, 77, 86
- Polarisation, 112, 115
- Potentiel anharmonique, 26
- Potentiel harmonique, 26
- Préparation du milieu, 127
- Problème inverse, 127
- Propagation balistique, 43
- Pulsation, 10
- Pulsation de coupure, 10

- Quasi-statique, 75

- Régime balistique, 41
- Régime de Berkta, 39
- Régime de Westervelt, 38
- Réseau unidimensionnel, 11
- Rectification, 37
- Relation énergie potentielle - déplacement, 76
- Relation contrainte - déformation, 24, 42, 74
- Relation déplacement - force, 6
- Relation de dispersion, 9–11, 76

- Section efficace de diffusion, 19
- Signal démodulé, 37
- Signal secondaire, 37
- Silo, 16
- Solitons, 13
- Sources non linéaires, 85

- Temps caractéristique de diffusion, 21
- Temps de modulation, 44
- Temps de relaxation, 16
- Théorie de Hertz, 6, 13
- Théorie de Hertz-Mindlin, 6, 8
- Transport d'énergie, 43
- Type d'arrangement, 15

- Vitesse de groupe, 10, 11, 43
- Vitesse de phase, 10, 11
- Vitesse de propagation, 17

- Westervelt, 35

- Zone de Brillouin, 10
- Zone de contact, 7
- Zone de plasticité, 13