



# CONCEPTION, RÉALISATION ET CARACTÉRISATION D'UN HAUT-PARLEUR ULTRA-DIRECTIF BASÉ SUR L'AUTO-DÉMODULATION NON LINÉAIRE

Alexandre Ritty

## ► To cite this version:

Alexandre Ritty. CONCEPTION, RÉALISATION ET CARACTÉRISATION D'UN HAUT-PARLEUR ULTRA-DIRECTIF BASÉ SUR L'AUTO-DÉMODULATION NON LINÉAIRE. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2007. Français. tel-00201456

**HAL Id: tel-00201456**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00201456>**

Submitted on 29 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

LE MANS, FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT

*Spécialité : Acoustique*

présentée par

**Alexandre RITTY**

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

---

CONCEPTION, RÉALISATION ET CARACTÉRISATION D'UN  
HAUT-PARLEUR ULTRA-DIRECTIF BASÉ SUR  
L'AUTO-DÉMODULATION NON LINÉAIRE

---

Soutenue le 22 juin 2007

devant le jury composé de

<b>P. CERVENKA</b>	Directeur de Recherche, LMP, Paris	Rapporteur
<b>G. PLANTIER</b>	Enseignant Chercheur HDR, ESEO, Angers	Rapporteur
<b>X. MEYNIAL</b>	Professeur, Société Active Audio	Président du jury
<b>V. GUSSEV</b>	Professeur, LPEC, Le Mans	Examineur
<b>B. CASTAGNEDE</b>	Professeur, LAUM, Le Mans	Directeur de thèse
<b>P. HAMERY</b>	Chercheur, ISL, St Louis	Co-directeur de thèse
<b>B. GAZENGEL</b>	Maître de conférences, LAUM, Le Mans	Co-directeur de thèse
<b>P. LOTTON</b>	Chargé de recherche CNRS, LAUM, Le Mans	Co-directeur de thèse

“J’ai vu plus loin que les autres parce que je me suis juché sur les épaules de géants.”

*Isaac Newton*

## Remerciements

- Merci à l'ISL de m'avoir proposé ce vaste sujet et plus particulièrement à Pascal Hamery pour son encadrement sans lequel rien n'aurait été possible.
- Merci au LAUM pour m'avoir accueilli en son sein et notamment Bernard Castagnède, mon directeur de thèse, Pierrick Lotton et Bruno Gazengel, mes co-encadrants, pour leur disponibilité et leurs encouragements.
- Merci à tous ceux, scientifiques ou non, avec qui j'ai discuté de mes travaux de m'avoir permis d'ordonner et même parfois clarifier mes idées.
- Merci au groupe APC de l'ISL pour la bonne ambiance qui y règne et pour avoir mis à ma disposition du matériel de mesure de pointe sans lequel l'observation de certains phénomènes aurait été laborieuse.
- Merci à Gilbert Brom, Claude Beck, Jean-Paul Schmitt, Kevin Meder et l'atelier central de l'ISL pour leur contribution à la réalisation et la mise en oeuvre des différents prototypes tous plus compliqué les uns les autres.
- Merci à Sebastien De Mezzo et Thiery Broglin, pour leurs conseils en électronique et leurs aide pour mettre en place les chaines de mesure.
- Merci une nouvelle fois à Gilbert Brom, Claude Beck et Sebastien De Mezzo pour avoir accepté de faire des doubles journées pour m'accompagner lors des mesures de nuit.
- Merci à ma famille et mes amis pour leur soutien et leur compréhension.



# Table des matières

Liste des notations . . . . .	v
Table des figures . . . . .	vii
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Propagation non linéaire</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Non-linéarité de propagation dans l'air . . . . .	5
1.2.1 Paramètres utiles dans l'étude de la propagation non linéaire . . . . .	6
1.2.2 Propagation non linéaire . . . . .	7
1.2.3 Interaction non linéaire . . . . .	12
1.3 Conclusion sur l'antenne paramétrique . . . . .	18
<b>2 Antennes de haut-parleurs</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	21
2.2 Modèles de rayonnement en champ lointain . . . . .	21
2.2.1 Sources ponctuelles . . . . .	21
2.2.2 Sources "pistons" . . . . .	25
2.3 Choix d'une configuration . . . . .	27
2.3.1 Démarche . . . . .	27
2.3.2 Étude de deux configurations . . . . .	28
2.4 Conclusion et application au cas de l'étude . . . . .	30
<b>3 Étude du transducteur mono cellule</b>	<b>33</b>
3.1 Introduction . . . . .	33
3.2 Cahier des charges et transducteurs choisis pour l'étude . . . . .	33
3.2.1 Contraintes liées à l'application . . . . .	33
3.2.2 Transducteur retenu pour l'étude . . . . .	34
3.3 Modèle du transducteur élémentaire . . . . .	35
3.3.1 Comportement statique de la membrane . . . . .	36
3.3.2 Comportement dynamique . . . . .	39

3.4	Évaluation des modèles . . . . .	47
3.5	Étude paramétrique - Dimensionnement . . . . .	50
3.6	Conclusion . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Conditionnement du signal</b>	<b>55</b>
4.1	Méthodes existantes . . . . .	55
4.1.1	Application d'une racine carrée . . . . .	56
4.1.2	Modulation à Bande Latérale Unique (BLU) . . . . .	57
4.1.3	Pseudo-Bande Latérale Unique . . . . .	58
4.2	Performances comparées des traitements . . . . .	59
4.2.1	Indicateurs de qualité des traitements . . . . .	59
4.2.2	Travaux déjà réalisés . . . . .	61
4.2.3	Cas de l'émission d'une fréquence pure : étude analytique . . . . .	62
4.2.4	Cas des signaux multicomposantes : étude numérique . . . . .	63
4.3	discussion sur le choix d'un conditionnement . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Prototype d'antenne paramétrique</b>	<b>69</b>
5.1	Le transducteur électroacoustique . . . . .	69
5.1.1	Description du transducteur . . . . .	69
5.1.2	Caractérisation en régime linéaire . . . . .	72
5.2	Caractérisation de l'antenne paramétrique . . . . .	77
5.2.1	Signaux de synthèse . . . . .	77
5.2.2	Le conditionneur réalisé . . . . .	81
5.3	Conclusion . . . . .	85
	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Détails des calculs liés à la théorie des réseaux</b>	<b>89</b>
A.1	réseaux rectilignes . . . . .	89
A.2	réseaux à deux dimensions . . . . .	91
<b>B</b>	<b>Résolution du problème de Hencky</b>	<b>95</b>
<b>C</b>	<b>Modèle du transducteur : approche différentielle</b>	<b>99</b>
C.1	Équation du mouvement du fluide dans la cavité . . . . .	99
C.2	Données du problème . . . . .	100
C.2.1	Condition aux limites dans la cavité . . . . .	100
C.2.2	Équation de la membrane . . . . .	100
C.3	Résolution du problème . . . . .	101
C.3.1	Forme de la vitesse suivant z . . . . .	101

---

C.3.2	Équations de propagation . . . . .	101
C.4	Résolution . . . . .	103
<b>D</b>	<b>Modèle du transducteur : approche intégrale</b>	<b>109</b>
D.1	Équations de comportement . . . . .	109
D.2	Fonction de Green de la cavité . . . . .	110
D.3	Solution du problème . . . . .	111
<b>E</b>	<b>Éstimation des distorsions : signal d'entrée composé de trois fréquences</b>	<b>115</b>
<b>F</b>	<b>Description détaillé de l'électronique</b>	<b>119</b>
<b>G</b>	<b>Plan du prototype de haut-parleur directif</b>	<b>121</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>





# Liste des notations

$\alpha$	coefficient d'absorption de l'air
$\beta$	$1 + B/2A = (1 + \gamma)/2$ , coefficient de non linéarité
$\gamma$	rapport des chaleurs spécifiques
$\Gamma, G$	nombre de Goldberg (nombre de Reynolds acoustique)
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$	déformations radiale et tangentielle en coordonnées polaires
$\zeta$	viscosité de volume
$\eta$	viscosité de cisaillement
$\kappa$	conductivité thermique
$\lambda$	longueur d'onde
$\nu_m$	coefficient de poisson de la membrane (PVDF)
$\rho_0$	masse volumique de l'air au repos
$\rho_m$	masse volumique de la membrane (PVDF)
$\sigma_r, \sigma_\theta$	contraintes radiale et tangentielle en coordonnées polaires
$\tau$	variation de température
$\Phi$	potentiel de vitesse
$\omega_p$	pulsation (ondes primaires)
$\omega_d$	pulsation (ondes démodulés, ondes secondaires basses fréquences)
$a$	rayon de la membrane/cavité
$b$	$\zeta + \frac{4}{3}\eta + \kappa(C_v^{-1} - C_p^{-1})$ , paramètre de viscosité et de conductivité thermique
$c_0$	célérité du son dans l'air
$c_m$	célérité du son dans la membrane (PVDF)
$C_v, C_p$	chaleurs spécifiques isochore et isobar
$d_{ij}$	coefficient piézoélectrique
$E_m$	module de Young de la membrane (PVDF)
$G, \Gamma$	nombre de Goldberg (nombre de Reynolds acoustique)
$h(\theta)$	fonction de directivité
$h$	épaisseur de la membrane
$k$	nombre d'onde
$l_\alpha$	distance caractéristique d'absorption

$l_{div}$	distance caractéristique de divergence
$l_p$	distance caractéristique de non linéarité
$l_v$	$(4\eta/3 + \zeta)/(\rho c)$ , distance caractéristique de viscosité
$l'_v$	$\eta/(\rho c)$ , distance caractéristique réduite de viscosité
$l_h$	$\kappa/(\rho c C_p)$ , distance caractéristique des effets thermiques
$l_C$	profondeur de la cavité
$M$	nombre de Mach acoustique
$M_a$	masse molaire de l'air
$N$	nombre de Kholkhlov
$P$	différence de pression statique entre les deux faces de la membrane
$p$	pression acoustique
$p_e, p_i$	pression acoustique rayonnée, pression acoustique dans la cavité
$R$	rayon de courbure de la membrane
$R_0$	distance de Rayleigh
$R_c$	distance de collimation
$R_g$	constante des gaz parfaits
$S$	surface de la source
$T$	température
$T_m$	tension de la membrane
$T_0, T_e$	tension de la membrane au repos, et tension supplémentaire due à l'application d'un champ électrique
$u$	déplacement/déformée statique radial de la membrane
$U$	tension électrique appliquée à la membrane
$v$	vitesse particulaire
$v_m$	vitesse de la membrane
$V_0$	volume de la cavité
$w_s$	déplacement/déformée statique transverse de la membrane
$w_d$	déplacement/déformée dynamique de la membrane
$Z_e$	impédance acoustique de rayonnement

ANL	Armes Non Létales
BLU	modulation d'amplitude à Bande Latérale Unique
ISL	Institut franco allemand de recherche de Saint Louis
LAUM	Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine
PVDF	polyfluorure de vinylidène
RTC	Réseau Téléphonique Commuté
THD	Total Harmonique Distorsion

# Table des figures

1	Domaines rentrant en jeu dans les systèmes à antenne paramétrique . . . . .	3
1.1	Évolution de la forme d'une onde sinusoïdale . . . . .	8
1.2	Atténuation « supplémentaire » pour une onde plane. . . . .	9
1.3	Niveau de l'onde démodulée pour deux jeux d'ondes primaires de fréquences différentes. . . . .	15
1.4	Niveau de l'onde démodulée pour deux sources de dimensions différentes. . . . .	15
1.5	Niveau de l'onde démodulée pour des ondes primaires de niveaux différents. . . . .	16
1.6	Gabarit idéal du signal émis dans l'air. . . . .	18
1.7	Déformation de l'enveloppe due à l'apparition de chocs. . . . .	18
2.1	Réseau de $n$ sources ponctuelles. . . . .	22
2.2	Exemple de diagramme de directivité. . . . .	23
2.3	Types d'arrangements étudiés. . . . .	24
2.4	Définition des angles. . . . .	25
2.5	Description des notations. . . . .	26
2.6	Directivité de piston de différentes tailles. . . . .	27
2.7	Comparaison de la directivité de deux types de réseaux dans le plan $Oxz$ . . . . .	29
2.8	Comparaison de la directivité de deux types de réseaux dans le plan $Oyz$ . . . . .	29
2.9	Comparaison de la directivité d'un réseau hexagonal et d'un réseau rectangulaire. . . . .	29
2.10	Comparaison de la directivité d'un réseau de sources ponctuelles et d'un réseau de piston. . . . .	30
3.1	Coupe du transducteur à base de film PVDF. . . . .	36
3.2	Comparaison de la déformée statique mesurée et prédite par les modèles. . . . .	39
3.3	Prototype de validation du modèle démonté. . . . .	47
3.4	Comparaison de la vitesse au centre mesurée et des modèles pour $Ze = 0$ . . . . .	48
3.5	Comparaison de la vitesse au centre lors de la prise en compte de l'impédance de rayonnement. . . . .	49
3.6	Pression rayonnée à 1,5 m mesurée et calculée à l'aide des modèles développés. . . . .	50
3.7	Influence de la dépression sur la fréquence des deux premiers modes. . . . .	50
3.8	Influence du rayon sur la fréquence des deux premiers modes. . . . .	51
3.9	Influence de la profondeur de cavité sur la fréquence des deux premiers modes. . . . .	52

3.10	Débit volumique en fonction de la fréquence d'un transducteur prédit par les modèles.	52
4.1	Principe du traitement du signal avant l'émission.	56
4.2	Conditionnement basé sur l'équation de Berkday.	56
4.3	Distorsions dues à l'interaction fréquentielle.	57
4.4	Conditionnement basé sur la BLU.	58
4.5	Taux de distorsion estimé de l'onde démodulée.	65
4.6	Correction des distorsions résiduelles pour les conditionnements basés sur une BLU.	65
4.7	Évaluation de l'algorithme de correction des distorsions résiduelles.	66
4.8	Taux de distorsion pour la BLU et la pseudo-BLU.	66
5.1	Vu d'un prototype réalisé.	70
5.2	Schéma du socle arrière des différentes antennes.	70
5.3	Schéma de l'arrangement des trous de la plaque percée.	71
5.4	Schéma bloc de la chaîne de mesure.	72
5.5	Réponse fréquentielle de l'antenne 4 mm pour 2 dépressions.	73
5.6	Réponse fréquentielle de l'antenne pour différents diamètres de cellules.	73
5.7	Directivité de l'antenne de 4 mm aux fréquences de résonance.	74
5.8	Comparaison des directivités des deux antennes.	74
5.9	Comparaison des directivités calculée et mesurée.	75
5.10	Comparaison de la pression rayonnée dans l'axe mesurée et prédite par les modèles.	76
5.11	Évolution de la forme d'onde de la porteuse relevée en fonction de la distance.	78
5.12	Évolution du niveau sonore de l'onde démodulée en fonction du type de traitement utilisé.	78
5.13	Évolution du niveau sonore de l'onde démodulée pour deux fréquences différentes.	79
5.14	Évolution du niveau sonore de l'onde démodulée en fonction de l'antenne utilisé.	80
5.15	Comparaison de la directivité de l'onde démodulée et de la porteuse.	80
5.16	Directivité de l'onde démodulé à différentes distances.	81
5.17	Directivité de l'onde démodulée pour les deux antennes.	81
5.18	Comparaison du niveau de la porteuse et du signal démodulé théorique (atténuation atmosphérique classique) et mesuré.	82
5.19	Comparaison du niveau de la porteuse (36,5 kHz) et du signal démodulé (1 kHz) théorique (atténuation atmosphérique modifiée) et mesuré.	82
5.20	Schéma de principe de l'électronique réalisée.	83
5.21	Comparaison des signaux de synthèse et des signaux issus du conditionneur.	84
5.22	Comparaison des signaux issus de l'antenne 2 mm pour des signaux de synthèse et des signaux issus du conditionneur.	84
A.1	Réseau de n sources ponctuelles.	90
A.2	Définition des angles.	92

---

E.1	Taux de distorsion suivant le numéro du trio de fréquences appliqué à l'entrée de l'algorithme. . . . .	117
E.2	Taux de distorsion après application de trois itérations de correction pour la BLU et la pseudo-BLU. . . . .	117
F.1	Schéma du module racine du conditionnement du signal. . . . .	119
F.2	Schéma de la partie modulation et préamplification du conditionneur. . . . .	120



# Introduction

Parmi les recherches actuellement menées sur l'évolution des systèmes militaires de défense, l'étude et le développement des armes non létales (ANL) occupent une place stratégique importante. Ces armes (non létales) doivent permettre de contrôler certaines situations de crise en évitant au maximum les dommages collatéraux. Les modes d'action de ces armes peuvent prendre diverses formes : neutralisation du pouvoir de nuisance de l'adversaire, désinformation, usage de leurres visuels ou auditifs, etc. C'est dans le cadre de la mise au point d'ANL basées sur la désinformation et l'utilisation de leurres auditifs que l'ISL (Institut franco-allemand de recherche de Saint Louis) s'intéresse aux systèmes de restitution du son ultra-directif. En effet une source sonore de directivité étroite permet de diffuser des informations contradictoires à différents groupes de personnes ou également de projeter un « faisceau » sonore sur un objet qui diffuse alors le son en donnant l'impression que ce dernier provient de cet objet.

Les systèmes sonores directifs sont classiquement employés pour l'imagerie acoustique en milieu marin (océanographie), dans le corps (échographie) ou dans les solides (contrôle non destructif). Le principe de l'imagerie acoustique consiste à émettre une onde acoustique très directive et à enregistrer les réflexions dues à un changement brusque d'impédance acoustique. En mesurant les temps de retour et en répétant l'opération dans différentes directions, il est possible d'effectuer une cartographie des changements d'impédance (entre l'eau et les fonds marins ou entre différents tissus, par exemple). Les systèmes directifs sont également utilisés pour la restitution de sons audibles dans l'air, sous la forme de colonnes de haut-parleurs. Ils sont principalement employés à la sonorisation d'espaces clos possédant une forte réverbération afin d'y éviter des réflexions indésirables.

Il est possible de réaliser des systèmes directifs en utilisant le phénomène d'auto-démodulation d'amplitude mis en évidence grâce aux recherches menées en acoustique non linéaire. Cet effet repose sur le principe suivant : deux ondes de fort niveau et de fréquences proches (ondes primaires) interagissent au cours de leur propagation en raison de la non-linéarité du milieu, ce qui génère de nouvelles composantes fréquentielles (ondes secondaires). En particulier, une onde de fréquence basse (différence des deux fréquences d'émission) est générée. Tout se passe comme si l'onde de fréquence différence était émise par une série de sources virtuelles étalées sur une distance de l'ordre de la longueur d'atténuation des ondes primaires. Ce réseau de sources virtuelles est désignée par le terme antenne paramétrique. Par extension cette dénomination désigne communément l'ensemble du système



de diffusion.

L'antenne paramétrique possède la propriété de générer des ondes basses fréquences dont la directivité est proche de celle obtenue avec les ondes primaires. Dans le cas d'ondes primaires de fréquences élevées, il est ainsi possible d'émettre un signal basse fréquence de façon directive avec un émetteur de petites dimensions. Ceci s'avère par exemple utile pour sonder sélectivement un milieu (imagerie médical, océanographie, ...), ou pour réaliser des haut-parleurs directifs et explique le grand nombre d'études réalisées sur ce sujet.

Westervelt ([2], 1957) est le premier à étudier les sons de combinaison qui sont produits par interaction non linéaire, tout d'abord dans le cas de deux faisceaux croisés. Il montre que ces sons de combinaison ne diffusent pas en dehors de la zone d'intersection des faisceaux (étude reprise notamment dans les références [3, 4, 5]). Il s'intéresse ensuite à l'interaction de deux faisceaux colinéaires [6] et calcule les caractéristiques du « son de différence » obtenu. En 1962, Bellin et coll. [7] présente des résultats expérimentaux d'antenne paramétrique dans l'eau et dans l'air, mais dans le cas de l'air ses résultats sont peu concluants en raison d'un faible rapport signal sur bruit. Les études de l'antenne paramétrique en milieu sous-marins se sont donc rapidement développées [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Les études et les applications dans l'air n'ont été développées que plus récemment. Les premiers résultats probants d'antenne paramétrique dans l'air sont présentés par Bennet et Blackstock en 1975 [17] qui génèrent deux ondes de fort niveau (110 dB à 1 ft) à 18,6 kHz et 23,5 kHz et obtiennent des résultats proches de la théorie. En 1989, Yoneyama et coll. [18] s'intéresse à l'antenne paramétrique vue comme un haut-parleur directif. Il observe le signal démodulé et les distorsions émis par les interactions non linéaires d'une porteuse modulée en amplitude.

L'ISL a récemment entrepris des travaux pour évaluer l'intérêt d'utiliser l'antenne paramétrique comme haut-parleur directif. Dans ce cadre, deux prototypes industriels de technologies différentes ont été caractérisés expérimentalement de manière à connaître leurs directivités, réponses en fréquence et portées. Le premier système utilise des transducteurs piézocéramiques, le second des transducteurs piézoplastiques. Les directivités et portées mesurées sont similaires pour les deux prototypes. En revanche, le système à technologie piézocéramique présente une réponse plus accidentée [19]. Suite à ce travail, l'ISL a souhaité comprendre et maîtriser l'ensemble des phénomènes qui régissent le comportement d'un système utilisant des transducteurs piézoplastiques, les résultats de cette étude devant permettre de réaliser un haut-parleur directif à grande portée. Dans ce cadre les objectifs fixés par l'ISL sont :

- transmettre un signal de parole à 50 m à un niveau de 50 dB SPL,
- obtenir une bande passante allant de 300 Hz à 3,4 kHz,
- obtenir un demi-angle d'ouverture à -6 dB de 10 ° maximum,
- minimiser les distorsions.

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire est d'une part de proposer une modélisation des phénomènes mis en jeu, et, d'autre part, de concevoir et réaliser un prototype sur la base de ces modèles.

Cette étude aborde les différents aspects entrant en jeu (conditionnement du signal, transduction, propagation non linéaire) (FIG. 1). Elle suit la démarche nécessaire à la conception de l'antenne paramétrique répondant au cahier des charges, en partant du signal à produire pour définir la nature du champ d'onde primaire à émettre. Ensuite d'une part un système de transduction est étudié et d'autre part les prétraitements nécessaires à la diminution des distorsions sont présentés et évalués.

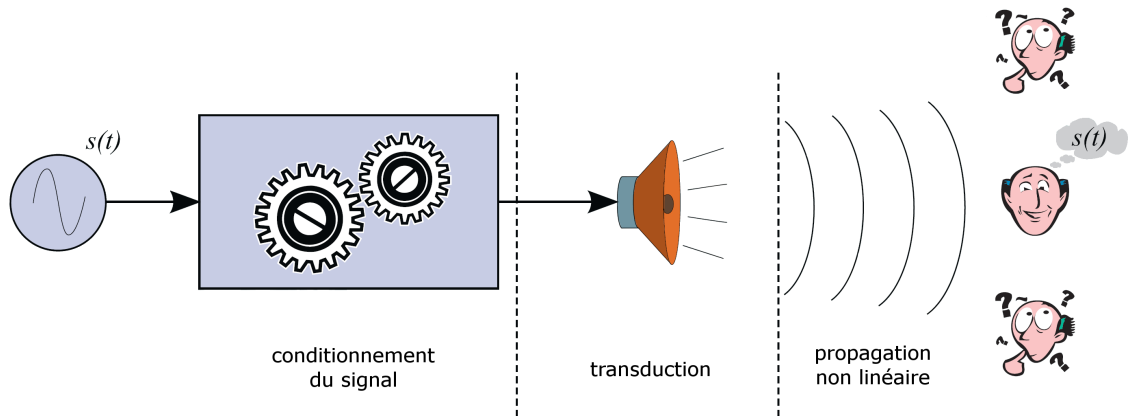


FIG. 1 – Domaines rentrant en jeu dans les systèmes à antenne paramétrique

En suivant cette démarche, le chapitre 1 s'intéresse à la propagation d'ondes de fort niveau dans l'air. L'étude de l'ensemble des phénomènes qui décrivent la transformation des ultrasons en sons audibles permet de caractériser le signal que doit émettre l'antenne paramétrique pour obtenir un signal de parole directif, d'une bonne portée et possédant un minimum de distorsion. La forme que prend ce signal émis conditionne les caractéristiques que doivent présenter les systèmes de transduction et de conditionnement du signal utilisés pour l'antenne paramétrique.

L'étude de la transduction regroupe celle de tous les éléments intervenant dans la transformation du signal électrique en signal acoustique. Cette étude n'a pas la prétention de couvrir l'ensemble des moyens de transduction, mais s'appuie sur les solutions utilisées dans les systèmes existants pour guider le choix d'un type de transduction. Elle est répartie sur deux chapitres. Dans un premier temps le chapitre 2 rappelle les propriétés d'un réseau de transducteurs. Ceci permet de définir un arrangement géométrique de sources pouvant répondre aux besoins en termes de champ d'onde primaire à émettre. Finalement les caractéristiques que doit posséder chacun des transducteurs composant ce réseau sont estimées.

Le chapitre 3 propose le choix d'un type de transducteur et réalise la modélisation de celui-ci. Une fois la modélisation éprouvée à l'aide d'un prototype, l'influence des différents paramètres est étudiée pour vérifier que ce type de transducteur peut répondre aux besoins exprimés dans le chapitre 2.

Le chapitre 4 vise à choisir un conditionnement du signal permettant de compenser les effets indésirables de la propagation non linéaire. Pour cela les différents conditionnements proposés dans la littérature sont présentés et un indicateur permettant de mesurer la distorsion des signaux traités est défini. L'efficacité des traitements est alors comparée par simulation ce qui permet de retenir une

méthode particulière.

Enfin, le dernier chapitre présente les deux prototypes d'antenne paramétrique réalisés. Dans un premier temps, la réponse des prototypes est caractérisée expérimentalement au voisinage de leur fréquence porteuse. Les résultats obtenus permettent d'une part de vérifier que ce prototype permet d'émettre le champ d'onde primaire nécessaire, d'autre part d'évaluer les modèles proposés aux chapitres 2 et 3. Dans un deuxième temps, le champ d'ondes démodulées est ensuite mesuré et comparé aux résultats attendus afin de conclure sur les éventuelles modifications nécessaires pour répondre au cahier des charges.

# Chapitre 1

## Propagation non linéaire

### 1.1 Introduction

L'interaction paramétrique non linéaire de deux ondes acoustiques dites « primaires » conduit à la génération d'ondes acoustiques, dites « ondes secondaires », dont les fréquences correspondent à la somme et la différence des fréquences des ondes « primaires ». L'émission paramétrique d'une onde de basse fréquence à partir de ce principe d'interaction de deux ondes de fréquences élevées, proches l'une de l'autre, a été particulièrement étudiée, car la directivité d'une telle onde est grande en regard de celles obtenues pour de telles basses fréquences avec des sources sonores classiques. L'émission paramétrique trouve alors des applications en acoustique sous-marine et dans le domaine de l'audible en milieu aérien.

L'étude des phénomènes non linéaires intervenant lors de la propagation d'une onde acoustique permet de comprendre les mécanismes de création des sons de basses fréquences et de prédire les déformations que subit le signal émis. Il est essentiel de bien comprendre ces phénomènes afin de pouvoir définir la forme du signal d'excitation nécessaire à la restitution du signal voulu. L'objet de ce chapitre est de mettre en évidence les paramètres importants du générateur acoustique qui permettent d'obtenir un signal basse fréquence se propageant sur une grande distance avec la meilleure directivité et le minimum de distorsions possible.

### 1.2 Non-linéarité de propagation dans l'air

La description de la propagation non linéaire d'une onde acoustique est souvent référencée dans la littérature, notamment pour des applications sous-marines [1]. Les phénomènes mis en oeuvre étant identiques pour l'air, à la valeur des paramètres (tel que la viscosité ou le coefficient de non-linéarité) près, la théorie développée pour la propagation non linéaire en milieu marin peut-être directement adaptée au cas de la propagation dans l'air. Cette théorie est brièvement rappelée dans ce paragraphe.

### 1.2.1 Paramètres utiles dans l'étude de la propagation non linéaire

Afin d'étudier la propagation non linéaire, il est nécessaire de développer les équations de propagation jusqu'au deuxième ordre. Pour faciliter leur manipulation quelques paramètres sont définis.

Le nombre de Mach acoustique  $M$  est défini comme étant le rapport de l'amplitude de la vitesse  $v$  des particules et de la vitesse du son  $c_0$ , ou également le rapport de l'amplitude de la pression acoustique  $p$  et de la quantité  $c_0^2 \rho_0$ , où  $\rho_0$  est la masse volumique du fluide,

$$M = \frac{v}{c_0} = \frac{p}{c_0^2 \rho_0}. \quad (1.1)$$

La distance de non-linéarité  $l_p$ , correspondant à la distance à partir de laquelle les effets non linéaires apparaissent, est définie par

$$l_p = \frac{\lambda}{\pi M(1 + \gamma)}, \quad (1.2)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques isobare  $C_p$  et isochore  $C_v$ . Elle est inversement proportionnelle à l'amplitude et à la fréquence de l'onde. En pratique, l'inégalité  $M \ll 1$  est toujours vérifiée, ce qui signifie que la distance  $l_p$  est supérieure à la longueur d'onde (TAB. 1.1).

M	$v$ [m/s]	$p$ [dB]	$l_p$	$l_p$ à 40 kHz	$l_p$ à 50 kHz	$l_p$ à 100 kHz
0,01	3,4	157	13 $\lambda$	11 cm	8 cm	4,5 cm
0,002	0,64	142	75 $\lambda$	67 cm	50 cm	28 cm
0,001	0,34	137	130 $\lambda$	1,14 m	85 cm	44 cm

TAB. 1.1 – Exemples de distances de non-linéarité, pour des valeurs de  $M$  et  $p$  données ( $v$  dépendant de  $M$  est donné à titre indicatif)

Le coefficient d'absorption  $\alpha$  qui traduit la perte énergétique de l'onde par relaxation thermique et visqueuse lors de son déplacement dans un milieu est défini par

$$\alpha = \frac{b\omega^2}{2c_0^3 \rho_0}, \quad (1.3)$$

où  $b$  est un paramètre incluant le coefficient de viscosité de volume  $\zeta$  et de cisaillement  $\eta$ , ainsi que celui de la conductivité thermique  $\kappa$ ,

$$b = \zeta + \frac{4\eta}{3} + \kappa(C_v^{-1} - C_p^{-1}). \quad (1.4)$$

L'inverse du coefficient d'absorption  $\alpha$  correspond à la distance de propagation  $l_\alpha$  pour laquelle l'amplitude de l'onde est divisée par  $e$ . Une faible valeur du coefficient d'absorption  $\alpha$  signifie que cette distance est plus grande que la longueur d'onde ( $l_\alpha = 1/\alpha \gg \lambda$ ).

Le nombre de Reynolds acoustique (ou nombre de Goldberg)  $G$  caractérise l'influence relative entre les effets dissipatifs (absorption) et les effets non linéaires et est donné par la relation suivante,

$$G = \frac{l_\alpha}{l_p} = \frac{vc_0 \rho_0}{b\omega} = \frac{p}{b\omega}. \quad (1.5)$$

Quand  $G \gg 1$ , les processus non linéaires dominent les processus dissipatifs, l'atténuation « supplémentaire » due aux effets non linéaires est alors importante par rapport à l'atténuation atmosphérique normale et une onde de choc apparaît avant que ce dernier phénomène ait pu se manifester de manière significative. Lorsque  $G \ll 1$ , la viscosité l'emporte sur la non-linéarité et l'absorption est plus rapide que l'accumulation des effets non linéaires : il n'y a pas de « choc ». Les exemples numériques suivants permettent de fixer les ordres de grandeur : à la fréquence  $f = 40$  kHz,  $G \approx 1$  pour un niveau de pression de 120 dB SPL et  $G \approx 13$  pour un niveau de pression de 140 dB SPL ; à la fréquence  $f = 50$  kHz,  $G \approx 3$  pour un niveau de pression de 140 dB SPL.

Pour l'étude de l'interaction non linéaire d'ondes acoustiques, il est intéressant de prendre en compte le rapport de l'amplitude de l'onde secondaire considérée ( $A_{\omega_d}$ ) générée dans le milieu et de celle de l'onde primaire ( $A_{\omega_p}$ ) rayonnée dans le milieu par la source sonore. Si la condition  $A_{\omega_d}/A_{\omega_p} \ll 1$  est vérifiée, la méthode des approximations successives peut être utilisée pour résoudre l'équation de propagation acoustique non linéaire [1]. Dans de nombreux cas, cette condition n'est pas vérifiée. Toutefois, si la pulsation  $\omega_d$  des ondes secondaires est petite par rapport à la pulsation  $\omega_p$  des ondes primaires ( $\omega_d \ll \omega_p$ ), cette méthode de résolution peut être utilisée.

Afin de faciliter l'étude, les ondes primaires peuvent être assimilées à des ondes planes. Il est alors utile de connaître la valeur de la distance de Rayleigh  $R_0$  sur laquelle l'onde est plane, définie par

$$R_0 = \frac{S}{\lambda_{\omega_p}} \quad (1.6)$$

où  $S$  est la surface de la source et  $\lambda_{\omega_p}$  est la longueur d'onde de l'onde primaire.

La distance de collimation  $R_c$  est une distance plus longue que la distance de Rayleigh  $R_0$  et correspond à la distance sur laquelle l'onde reste collimatée (les plans d'ondes sont toujours considérés comme parallèles entre eux), même si elle n'est plus plane. C'est sur cette distance qu'a lieu la plupart des interactions non linéaires. Cette distance  $R_c$  est donnée par

$$R_c = R_0 \frac{\omega_p}{\omega_d}. \quad (1.7)$$

## 1.2.2 Propagation non linéaire

Le contenu de ce paragraphe est largement inspiré des publications de Rudenko (1977, [20]) et Novikov (1987, [1]).

### 1.2.2.1 Description qualitative de la propagation

Dans le cas d'une propagation non linéaire ( $G \gg 1$ ), la vitesse locale de propagation des ondes n'est pas constante : elle varie avec la pression (et donc avec la masse volumique ou la vitesse particulière). Dans les régions où la variation de pression est positive, la vitesse de propagation est plus élevée que la célérité du son et inversement. Les maximums de pression se déplacent alors plus rapidement que les minimums. Une onde sinusoïdale subit donc une distorsion au cours de la propagation (premier stade de la FIG. 1.1) qui s'accroît jusqu'à ce que l'onde prenne l'allure de dents de scie après avoir

parcouru la distance  $l_p$ . C'est alors une onde de choc caractérisée par un saut de pression suivi d'une décroissance linéaire jusqu'au minimum de pression (deuxième stade). À ce phénomène correspond l'apparition d'harmoniques de la fréquence fondamentale (pour une onde en dents de scie parfaite, l'amplitude du  $n$ -ième harmonique est proportionnelle à  $1/n$ ).

L'atténuation est faible pendant le premier stade, mais croît fortement lorsque l'onde de choc est formée : d'une part, l'atténuation est plus importante aux fréquences élevées des harmoniques supérieures, d'autre part, l'apparition du choc se traduit par une saturation qui peut être vue comme une atténuation supplémentaire due uniquement aux effets non linéaires. L'amplitude de l'onde (ainsi que la distorsion) diminue alors lentement jusqu'à ce que la pression soit suffisamment faible pour que la propagation redevienne linéaire (troisième stade de la FIG. 1.1). Si les processus non linéaires dominent les processus dissipatifs ( $G \gg 1$ ), seule l'atténuation supplémentaire non linéaire peut être prise en compte. Il faut noter qu'en régime de choc faible la vitesse de propagation de l'onde reste identique à la célérité du son.

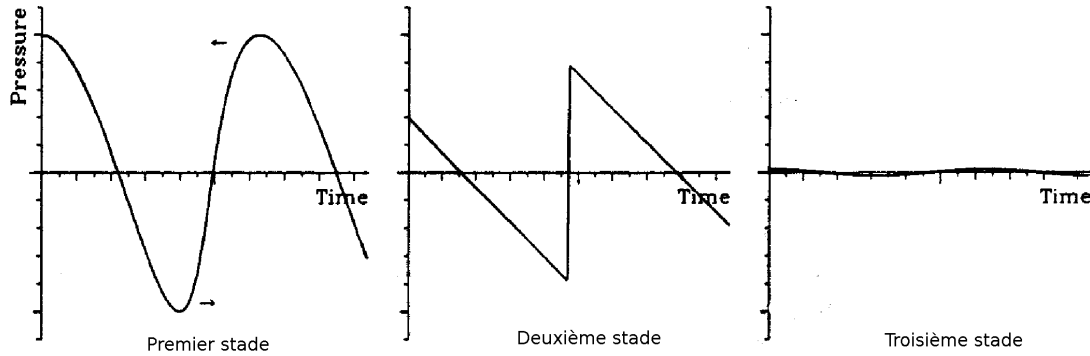


FIG. 1.1 – Évolution de la forme d'une onde sinusoïdale

Dans le cas où un choc est créé au cours de la propagation (la probabilité de cette occurrence étant d'autant plus élevée que le niveau d'émission est fort), la distance à laquelle débute le troisième stade ne change pas significativement en fonction du niveau d'émission : les distorsions non linéaires fixent une limite supérieure à l'intensité qui peut être transmise à une distance donnée (pour les distances supérieures à celle à laquelle débute le « choc »,  $z > l_p$ ). Une augmentation de l'amplitude de départ conduit donc à une installation plus précoce du choc (diminution de  $l_p$ ) et à des pertes plus importantes jusqu'à la fin du deuxième stade. L'atténuation non linéaire, due au « choc », peut se produire dans la région de Rayleigh ( $z < R_0$ ) ou au-delà. Si elle se produit dans la région de Rayleigh, l'antenne paramétrique est limitée par la saturation (dans l'autre cas elle est limitée par la diffraction).

En résumé, le niveau efficace de pression acoustique d'une onde plane demeure pratiquement constant pendant le premier stade (mais de plus en plus d'énergie est transférée aux harmoniques). Les distorsions non linéaires s'additionnent mais les fronts ne sont pas encore assez raides pour que des effets dissipatifs importants apparaissent.

Après la formation du choc, le niveau efficace décroît approximativement en  $1/z$  jusqu'à une limite

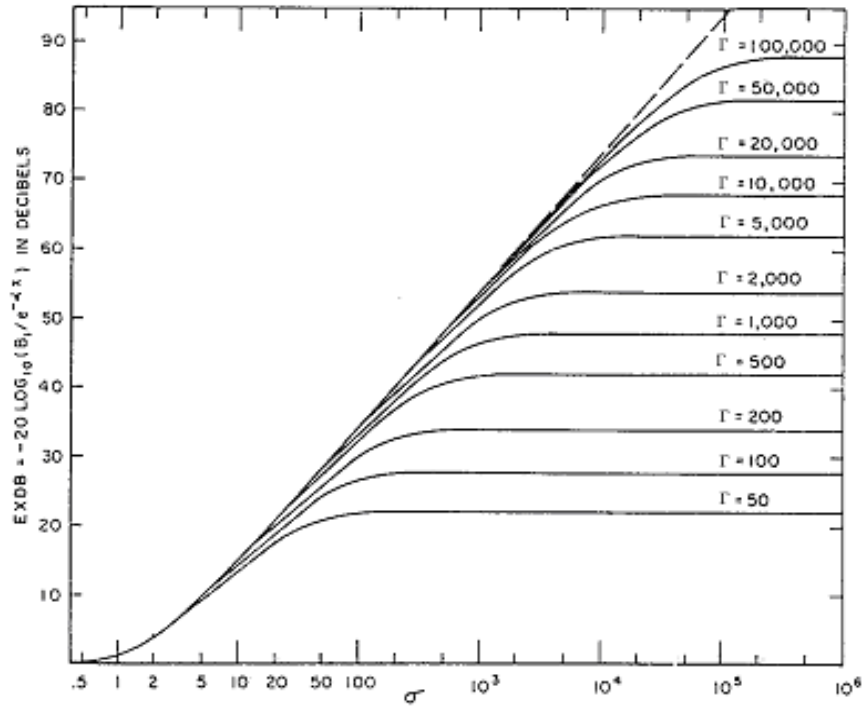


FIG. 1.2 – Atténuation « supplémentaire » pour une onde plane en fonction du nombre de Reynolds acoustique et de  $\sigma = z/l_p$ .

basse qui est atteinte pour deux fois l'inverse du coefficient d'absorption (cette diminution n'est pas due à l'expansion géométrique) (deuxième stade). Pendant ce stade, les effets non linéaires et les effets dissipatifs sont importants.

Enfin, l'atténuation finale est exponentielle (troisième stade).

Dans le cas de « faisceaux » d'ondes, la diffraction doit être prise en compte. La contribution relative des effets de la non-linéarité et de la diffraction est décrite par le nombre de Khokhlov  $N$  défini par

$$N = \frac{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}{\pi^2(\gamma + 1)M} = \frac{l_p}{l_{div}} \quad (1.8)$$

où  $l_p$  est la distance de formation du choc,  $l_{div}$  est la distance nécessaire pour transformer une onde plane en onde divergente sphériquement,  $a$  est le rayon du faisceau initial.

De grandes valeurs de  $N$  correspondent au cas où la diffraction domine et où la propagation peut être considérée comme linéaire avec les effets de diffraction usuels. Si  $N \ll 1$ , les effets non linéaires prédominent. À titre d'exemple, avec une antenne de 30 cm de diamètre émettant à 40 kHz,  $N \approx 0,01$  pour  $M = 0,01$  et  $N \approx 0,1$  pour  $M = 0,002$ . Dans ce cas, avec des fronts d'onde plans au départ, un choc se forme d'abord sur l'axe puisque l'amplitude est maximale à cet endroit. Comme la dissipation est également maximale au même endroit, le profil du faisceau s'aplatit et sa largeur augmente.



### 1.2.2.2 Équations de propagation

Afin de déterminer les équations de propagation d'une onde acoustique dans un fluide, les non-linéarités introduites par le milieu ainsi que celles découlant du mouvement des particules sont prises en compte. Dans le cas d'un fluide thermovisqueux, quatre équations sont nécessaires :

- la loi de conservation de la masse dans un fluide au repos :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.9)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse, et  $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  est la dérivée temporelle matérielle,

- l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \left( \frac{1}{3}\eta + \zeta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \eta \Delta \vec{v} \quad (1.10)$$

où  $\eta$  et  $\zeta$  sont les coefficients de viscosité de cisaillement et de volume,

- la loi de conservation de l'énergie :

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \kappa \Delta T + \frac{1}{2}\eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2 \quad (1.11)$$

où  $s$  est l'entropie,  $\kappa$  la conductivité thermique et  $T$  la température,

- l'équation d'état du fluide :

$$p = p(\rho, s). \quad (1.12)$$

Dans le cas, retenu dans la suite de ce paragraphe, où les processus sont considérés comme adiabatiques (seuls les effets dissipatifs dus à la viscosité étant pris en compte), l'équation (1.11) n'a pas lieu d'être écrite et la pression  $p$  ne dépend que de  $\rho$ .

L'onde acoustique correspond à de petites perturbations autour des valeurs au repos (notées avec un indice 0) des grandeurs caractéristiques du milieu,  $p = p_0 + p'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , le fluide étant supposé au repos la vitesse particulaire en l'absence d'onde acoustique est nulle :  $\vec{v} = \vec{v}'$ .

Grâce à un développement de Taylor à l'ordre 2 de l'équation d'état (1.12), l'expression suivante est obtenue :

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s,0} \rho' + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} \rho'^2. \quad (1.13)$$

En partant de l'égalité pour des transformations adiabatiques dans le cas de gaz parfaits ( $p\rho_0^\gamma = p_0\rho^\gamma$ ), la relation (1.13) s'écrit :

$$p' = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho' + \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma-1)p_0}{\rho_0^2} \rho'^2. \quad (1.14)$$

Or  $\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s,0} = c_0^2$  et, en introduisant le paramètre  $\frac{B}{A} = \frac{\rho_0}{c_0^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{s,0}$  caractérisant la non-linéarité thermodynamique du fluide, la relation (1.14) s'écrit :

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{B}{2A} \frac{c_0^2}{\rho_0} \rho'^2, \quad (1.15)$$

d'où, d'après les équations (1.14) et (1.15),  $c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$  et  $\frac{B}{A} = (\gamma - 1)$ .

Les équations traduisant les variations de la pression et non celles de la masse volumique sont obtenues en utilisant plutôt l'équation d'état sous la forme :

$$\rho' = \frac{p'}{c_0^2} - \frac{B}{2A} \frac{p'^2}{\rho_0 c_0^4}. \quad (1.16)$$

En substituant les relations des petites variations dans l'équation (1.9) et en séparant les termes d'ordre 1 dans le premier membre et ceux d'ordre 2 dans le second (les ordres supérieurs étant négligés), la loi de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\rho' \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho'. \quad (1.17)$$

En avançant l'hypothèse de se placer suffisamment loin de toute surface pour obtenir une propagation irrotationnelle, l'équation de Navier-Stokes (1.10) devient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' = -\rho' \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 \vec{\nabla} \vec{v}^2 + \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \Delta \vec{v}. \quad (1.18)$$

En utilisant l'équation d'état (1.16), il est possible d'éliminer  $\rho'$  dans les équations (1.17) et (1.18) ; elles deviennent :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\frac{p'}{c_0^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \frac{\vec{v}}{c_0^2} \cdot \vec{\nabla} p' + \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{B}{2A} \frac{\partial p'^2}{\partial t}, \quad (1.19)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' = -\frac{p'}{c_0^2} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 \vec{\nabla} \vec{v}^2 + \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \Delta \vec{v}. \quad (1.20)$$

Afin de conserver dans les premiers termes uniquement ceux correspondant à la pression, l'opérateur divergence est appliqué à l'équation (1.20) puis y est soustraite la dérivée seconde par rapport au temps de l'équation (1.19). Comme seuls les termes d'ordre inférieur ou égaux à 2 sont considérés, les relations linéaires suivantes sont utilisées afin de simplifier les termes d'ordre 2 :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Il en découle alors la relation :

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta p' = -Q \quad (1.22)$$

où  $Q$  désigne l'ensemble des termes non linéaires :

$$Q = \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{c_0^4 \rho_0} \frac{B}{2A} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} + \frac{\rho_0}{2} \Delta \vec{v}^2 + \rho_0 \vec{v} \cdot \Delta \vec{v}. \quad (1.23)$$

La méthode des « lentes variations de profil » est utilisée pour simplifier l'équation de propagation. Considérons un faisceau ultrasonore se propageant suivant l'axe  $z$ . L'onde est quasiment plane sur des distances comparables à la longueur d'onde, son profil ne se modifie de manière significative suivant l'axe  $z$  qu'après plusieurs fois la longueur d'onde. Ainsi, les variations transversales (suivant  $x$  et

$y$ ) sont plus rapides que celles intervenant dans la direction de propagation. Pour traduire cela, le changement de variables suivant est effectué :

$$p' = p'(\tau = t - \frac{z}{c_0}, \quad x' = \sqrt{\mu}x, \quad y' = \sqrt{\mu}y, \quad z' = \mu z). \quad (1.24)$$

En effectuant les changements de coordonnées et en négligeant les termes d'ordre 3, l'équation de propagation devient alors :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial z' \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p' + \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{1}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^3 p'}{\partial \tau^3} + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial \tau^2}, \quad (1.25)$$

où  $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x'^2 + \partial^2 / \partial y'^2$  est l'opérateur Laplacien transverse et  $\beta = 1 + B/2A$  est le coefficient de non-linéarité.

Cette équation est connue sous le nom de KZK (Khokhlov, Zabolotskaya, Kuznetsov) du nom de ses auteurs. Il est intéressant de noter que dans le cas où l'équation est considérée comme ne dépendant que d'une seule variable spatiale (onde plane :  $\Delta_{\perp} p' = 0$  et  $p' = p'(\tau, z')$ ), elle est équivalente à l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} - \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{1}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} - \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p'^2}{\partial \tau} = 0. \quad (1.26)$$

### 1.2.3 Interaction non linéaire

Si deux ondes de pulsations  $\omega_a$  et  $\omega_b$  (ondes primaires) se propagent dans un milieu non linéaire comme l'air, le principe de superposition ne s'applique plus et des sons de combinaison apparaissent (de pulsations  $n\omega_a + m\omega_b$ ,  $n$  et  $m$  étant des entiers).

Le « son de différence » (pulsation :  $\omega_d = \omega_a - \omega_b$ ) présente un intérêt particulier, car il est moins absorbé par le milieu que les ondes primaires ( $\omega_a$  et  $\omega_b$  sont supposées proches et situées dans le domaine ultrasonore pour obtenir une bonne directivité).

Puisqu'il n'y a pratiquement pas de dispersion dans l'air (la célérité du son ne dépend pas de la fréquence), les contributions au « son de différence », qui sont produites en tous les points du faisceau constitué par les sons primaires colinéaires, se propagent à leur tour (à la même vitesse) et interfèrent de manière « constructive » le long de ce faisceau. Du fait de ces interférences, et tant que le niveau des ondes primaires reste élevé (à faible distance de la source), le niveau du « son de différence » croît linéairement avec la distance à la source (principe de l'antenne paramétrique).

Les sources du « son de différence » étant distribuées le long de l'axe de propagation des ondes « primaires », en champ lointain les interférences constructives ne se produisent que dans un petit secteur angulaire autour de cet axe, et la largeur du faisceau du « son de différence » est beaucoup plus faible que si une source de la même taille émettait directement ce son (du fait de la diffraction due à la plus grande longueur d'onde).

Afin de connaître l'influence du champ d'onde primaire en termes de niveau, de fréquence et de dimension de l'émetteur sur le champ d'onde secondaire, il est nécessaire de résoudre l'équation de KZK. Des méthodes de résolutions numériques existent, mais demandent beaucoup de ressources.

Toutefois il est possible d'estimer l'influence de chacun de ces paramètres grâce à une méthode simple nommée approximation quasi-linéaire. Un autre facteur de l'auto-démulation non linéaire est l'apparition de distorsions dans le signal démodulé. L'étude de ces distorsions permet de définir quels types de prétraitements peuvent être utilisés afin de diminuer leur importance.

### 1.2.3.1 Résolution de l'équation de KZK, approximation quasi-linéaire

En première approximation dans le cas de non-linéarités faibles (pas de déformation de l'onde sur plusieurs longueurs d'onde) et de source axisymétrique, il est possible de résoudre l'équation de KZK (équ. (1.25)) grâce à une méthode dite quasi-linéaire [1, 21].

La méthode décrite ci-dessous ne concerne que la génération de la seconde harmonique lorsque une onde primaire de pulsation  $\omega$  est émise. La solution quasi-linéaire de la forme  $p = p_1 + p_2$  est considérée, où  $p_1$  représente la solution linéaire de l'équation de KZK (équ. (1.25)), et  $p_2$  est une petite correction de  $p_1$  à la fréquence de la seconde harmonique soit  $2\omega$  (valable uniquement si  $|p_2| \ll |p_1|$  le long de la zone d'interaction. Il est possible de décrire les pressions acoustiques par

$$p_n(r, z, \tau) = \frac{1}{2j} A_n(r, z) e^{jn\omega\tau} + c.c. \quad n = 1, 2, \quad (1.27)$$

où  $A_n$  est l'amplitude complexe de la pression et *c.c.* le complexe conjugué du terme précédent.

En utilisant ces expressions il est possible d'écrire l'équation de KZK (équ. (1.25)) sous la forme du système

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{j}{2k} \Delta_{\perp} A_1 + \alpha_1 A_1 = 0, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{j}{4k} \Delta_{\perp} A_2 + \alpha_2 A_2 = \frac{\beta k}{2\rho_0 c_0^2} A_1^2, \end{cases} \quad (1.28)$$

où  $\alpha_n$  est l'atténuation classique due aux effets viscothermiques à la fréquence  $n\omega$  et  $k = \omega/c_0$  est le nombre d'onde du fondamental.

Les deux équations du système sont linéaires (le terme  $A_1^2$  de la seconde équation étant calculé indépendamment). Elles peuvent être résolues classiquement avec l'aide des fonctions de Green. Soit  $G_n$  la fonction de Green, à la fréquence  $n\omega$ , solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial G_n}{\partial z} + \frac{j}{2nk} \Delta_{\perp} G_n + \alpha_n G_n = \frac{1}{2\pi r} \delta(r - r') \delta(z - z'), \quad (1.29)$$

il est possible de montrer que  $G_n$  est de la forme,

$$G_n(r, z|r', z') = \frac{jnk}{2\pi(z - z')} J_0 \left( \frac{nkrr'}{z - z'} \right) \exp \left[ -\alpha_n(z - z') - \frac{jnk(r^2 + r'^2)}{2(z - z')} \right]. \quad (1.30)$$

Le terme source pour le calcul de  $A_1$  est localisé en  $z' = 0$  (position de l'émetteur) et est donnée par  $A_1(r', 0)$  qui dépend du type d'émission (piston, gaussienne ...). Pour  $A_2$  le terme source est l'ensemble du faisceaux d'ondes primaires ( $A_1(r', z')$ ) jusqu'au point considéré. Les solutions du système d'équation (1.28) sont donc,

$$A_1(r, z) = 2\pi \int_0^{\infty} A_1(r', 0) G_1(r, z|r', 0) r' dr', \quad (1.31)$$

$$A_2(r, z) = \frac{\pi\beta k}{\rho_0 c_0^2} \int_0^z \int_0^\infty A_1^2(r', z') G_2(r, z|r', z') r' dr'. \quad (1.32)$$

Il est possible de suivre la même démarche pour obtenir l'expression intégrale des ondes secondaires différences et somme dans le cas de l'interaction de deux ondes de fréquences  $\omega_a$  et  $\omega_b$  en considérant

$$p_1(r, z, \tau) = \frac{1}{2j} [A_{1a}(r, z) e^{j\omega_a \tau} + A_{1b}(r, z) e^{j\omega_b \tau}] + c.c., \quad (1.33)$$

et

$$p_2(r, z, \tau) = \frac{1}{2j} [A_{2a}(r, z) e^{j2\omega_a \tau} + A_{2b}(r, z) e^{j2\omega_b \tau} + A_{2d}(r, z) e^{j\omega_d \tau} + A_{2s}(r, z) e^{j\omega_s \tau}] + c.c., \quad (1.34)$$

où l'indice  $d$  désigne l'onde différence ( $\omega_d = |\omega_a - \omega_b|$ ), et l'indice  $s$  désigne l'onde somme ( $\omega_s = |\omega_a + \omega_b|$ ). L'onde différence est alors donnée par

$$A_{2d}(r, z) = -\frac{\pi\beta k_d}{\rho_0 c_0^2} \int_0^z \int_0^\infty A_{1a}(r', z') A_{1b}^*(r', z') G_d(r, z|r', z') r' dr', \quad (1.35)$$

où  $G_d$  est donnée par l'équation (1.30) en remplaçant  $nk$  par  $k_d = \omega_d/c_0$ ,  $\alpha_n$  par  $\alpha_d$ , et l'exposant  $*$  indique que le complexe conjugué est considéré.

Une onde modulée en amplitude peut-être considérée comme une somme d'ondes primaires (le nombre de « fréquences primaires » étant supérieur à deux), à partir de l'équation (1.35) il est donc possible de connaître l'influence du champ d'ondes primaires sur le champ d'ondes démodulées.

La figure 1.3 montre la différence d'évolution du niveau d'une onde démodulée à 1 kHz, lorsqu'elle est générée par des ondes primaires de fréquence  $f_a = 40$  kHz et  $f_b = 41$  kHz ou  $f_a = 400$  kHz et  $f_b = 401$  kHz. Les ondes primaires sont émises par une source plane circulaire de rayon  $a = 12,5$  cm à un niveau de 130 dB SPL. Lorsque la fréquence des ondes primaires est grande, l'onde démodulée décroît plus rapidement. Ceci est dû à la longueur de la zone d'interaction des ondes primaires (distance sur laquelle l'onde démodulée est générée) qui diminue lorsque la fréquence des ondes primaires augmentent ( $\alpha$  croît en  $w^2$ ). Le choix de la fréquence porteuse pour le fonctionnement de l'antenne paramétrique est donc très important car sa longueur est limitée par l'atténuation des ondes primaires.

La figure 1.4 présente l'évolution du niveau d'une onde démodulée à 1 kHz, lorsqu'elle est générée par des ondes primaires de fréquence  $f_a = 40$  kHz et  $f_b = 41$  kHz émises par deux sources de rayon différents ( $a = 12,5$  cm et  $a = 6$  cm) à un niveau de 130 dB SPL. La différence de niveau des ondes démodulées générées est due à la section du « faisceau » d'ondes primaires, en raison de la surface sur laquelle a lieu l'intégration pour la détermination de l'onde démodulée (eq. (1.35)). D'autre part, la distance de collimation (eq. (1.7)) diminuant avec la surface de la source, la propagation des ondes primaires émises par la source de rayon 6 cm devient sphérique à une plus courte distance et leur niveau décroît donc plus rapidement que les ondes primaires émises par la source de rayon 12,5 cm.

La figure 1.5 montre l'évolution du niveau d'une onde démodulée à 1 kHz, lorsqu'elle est générée par des ondes primaires de fréquence  $f_a = 40$  kHz et  $f_b = 41$  kHz émises par une source de rayon  $a = 12,5$  cm à des niveaux de 136 dB SPL et 124 dB SPL à 1 m. L'atténuation atmosphérique classique ne dépendant pas de l'amplitude des ondes émises, dans les deux cas les ondes primaires décroissent

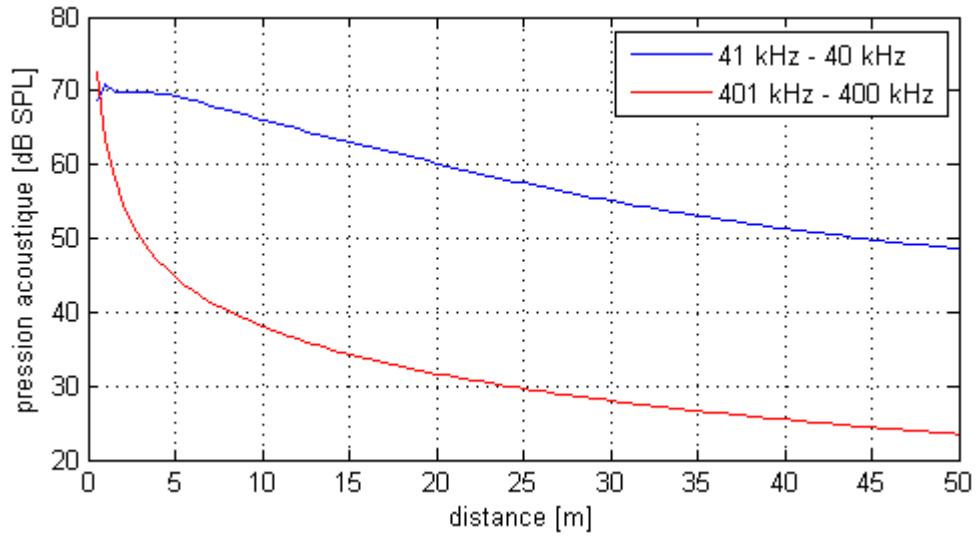


FIG. 1.3 – Niveau de l'onde démodulée à 1 kHz en fonction de la distance pour deux jeux d'ondes primaires de fréquences différentes ( $f_a = 40$  kHz,  $f_b = 41$  kHz et  $f_a = 400$  kHz,  $f_b = 401$  kHz), de niveau 130 dB SPL à 1 m, émises par une source plane circulaire de rayon 12,5 cm fonctionnant en piston.

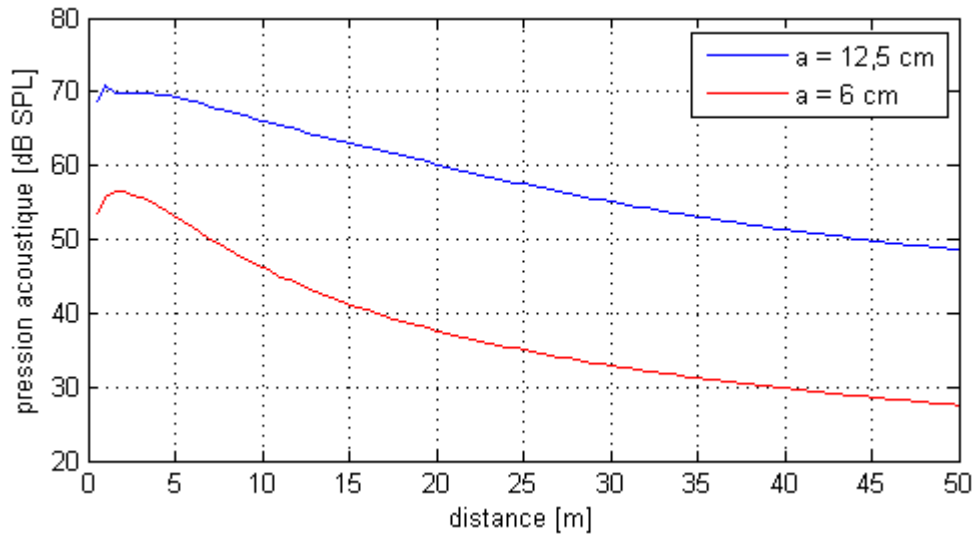


FIG. 1.4 – Niveau de l'onde démodulée à 1 kHz en fonction de la distance pour deux jeux d'ondes primaires de fréquences  $f_a = 40$  kHz et  $f_b = 41$  kHz, de niveau 130 dB SPL à 1 m, émises par deux sources planes circulaires de rayon 12,5 cm et 6 cm fonctionnant en piston.

de façon identique, ce qui se répercute sur l'évolution du niveau de l'onde démodulée. La considération des phénomènes non linéaires entraîne l'apparition d'une atténuation supplémentaire dépendant de l'amplitude qui n'est pas prise en compte par ce modèle, l'interprétation de ces courbes reste donc délicate.

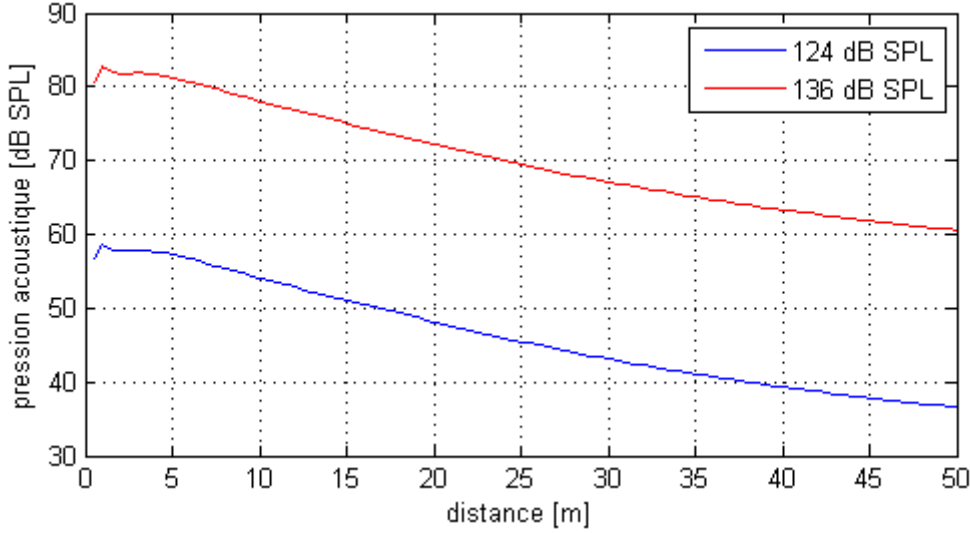


FIG. 1.5 – Niveau de l'onde démodulée à 1 kHz en fonction de la distance pour deux jeux d'ondes primaires de fréquences  $f_a = 40$  kHz et  $f_b = 41$  kHz, de niveaux différents (136 et 124 dB SPL à 1 m) émise par une source plane circulaire de rayon 12,5 cm fonctionnant en piston.

La section de la zone d'interactions non linéaires (liée aux dimensions de la source) influe sur le niveau de l'onde démodulée, tandis que sa longueur (liée à la fréquence des ondes primaires et aux dimensions de la source) définit son profil de décroissance. La directivité de l'onde démodulée est également améliorée lorsque les dimensions de la zone d'interaction augmentent. Concrètement la fréquence de l'onde porteuse est choisie entre 20 kHz (pour sortir du domaine audible) et 60 kHz (afin d'éviter de trop limiter la longueur de la zone d'interaction en raison de l'atténuation atmosphérique). Les dimensions du transducteur sont limitées à 30 cm maximum suivant une direction par les contraintes technologiques. D'après les courbes présentées le champ d'ondes primaires émis à 130 dB SPL à 1 m par une source plane circulaire de rayon 12,5 cm fonctionnant en piston et travaillant autour de 40 kHz (fréquence de l'onde porteuse) permet de répondre aux cahier des charges.

### 1.2.3.2 Distorsions induites par l'auto-démodulation

Afin d'utiliser une antenne paramétrique en tant que haut-parleur directif, il est nécessaire d'émettre un signal audible avec un minimum de distorsions. Un signal modulé en amplitude est composé de plusieurs composantes fréquentielles. Étant donné la nature de l'auto-démodulation, ces composantes fréquentielles se combinent entre elles et génèrent de nouvelles fréquences. Ces dernières correspondent au signal démodulé sur lequel se rajoute des distorsions.

En considérant un signal modulé en amplitude dont l'enveloppe est notée  $E$ , Berktaï montre en 1965 [8] que sur l'axe et en champ lointain le signal acoustique produit est donné par :

$$p_d(z, \tau, \theta = 0) = \frac{p_{\omega p}^2 S \beta}{16\pi \rho_0 c_0^4 z \alpha_p} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E^2(\omega_d \tau), \quad (1.36)$$

où  $\beta$  est le coefficient non linéaire,  $p_{\omega p}$  est l'amplitude de la porteuse,  $\alpha_p$  est l'atténuation de la porteuse et  $\tau$  est la coordonnée temporelle retardée.

L'amplitude du signal démodulé est proportionnelle à la dérivée seconde du carré de l'enveloppe du signal émis (équ. (1.36)). Concrètement, dans le cas d'un signal modulant harmonique et pour un coefficient de modulation égal à 1, l'enveloppe du signal est donnée par  $E(t) = A + A \cos \omega_d t$ , la dérivée seconde du carré de  $E(t)$  est

$$\frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2} = 2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} E + \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right)^2 \right) = -2A^2 \omega_d^2 [\cos(\omega_d t) + \cos(2\omega_d t)] \quad (1.37)$$

où les termes en  $\cos(\omega_d t)$  correspondent au signal utile et les termes en  $\cos(2\omega_d t)$  correspondent aux distorsions. La présence du carré de l'enveloppe dans l'équation (1.36) implique donc un taux de distorsions élevé. L'expérience montre que, en diminuant le taux de modulation, on réduit également la distorsion, mais au détriment du niveau sonore du signal démodulé. D'autres traitements permettant d'augmenter la qualité de la restitution du son en diminuant les distorsions dues à l'élévation au carré sont donc recherchés.

La dérivée seconde entraîne la multiplication de l'amplitude par  $\omega_d^2$ , ce qui implique une augmentation de l'efficacité de l'antenne paramétrique pour les fréquences élevées, correspondant à une pente de +12 dB par octave. Pour obtenir une efficacité équivalente, sans tenir compte des distorsions, quelle que soit la fréquence de travail, il faut donc compenser cette pente soit par un prétraitement consistant en un filtre ayant une pente opposée (deux filtres intégrateurs à la suite), soit idéalement grâce à un transducteur qui aurait une réponse en fréquence adaptée. Ceci est également vrai pour les signaux composés de plusieurs composantes fréquentielles étant donné que les combinaisons de fréquences dues à l'élévation au carré sont considérées comme des distorsions.

Étant donné qu'une modulation d'amplitude est appliquée, pour obtenir le signal  $s(t)$  à émettre, dans le domaine fréquentiel, le spectre du signal modulant est translaté autour de la fréquence de la porteuse. Le signal d'entrée étant réel l'amplitude de son spectre est pair. Le spectre résultant est donc bien symétrique par rapport à la fréquence de la porteuse  $f_p$  et le gabarit idéal à l'émission pour compenser la dérivée seconde est donc celui présenté par la figure 1.6.

### 1.3 Conclusion sur l'antenne paramétrique

Grâce à l'étude de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu non linéaire (ici l'air), quelques caractéristiques du générateur acoustique peuvent déjà être définies.



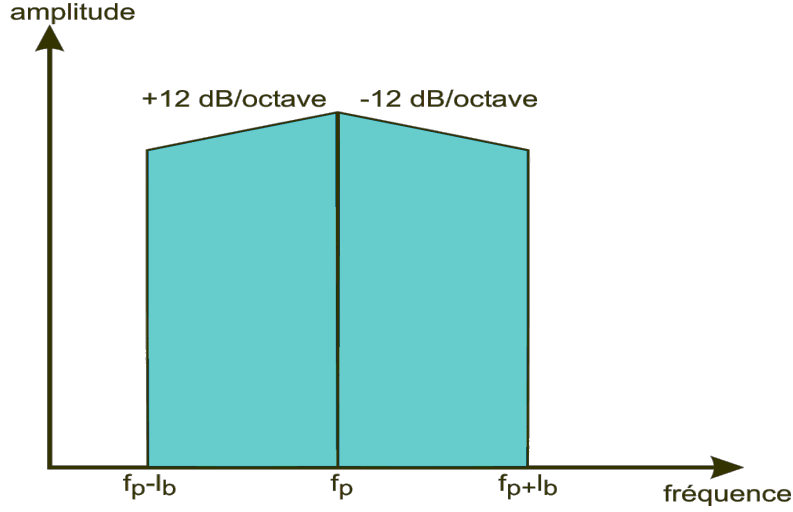


FIG. 1.6 – Gabarit idéal du signal émis dans l'air ( $f_p$  est la fréquence de porteuse et  $l_b$  est la largeur de bande à transmettre).

Afin d'obtenir une portée assez longue, des ondes sonores d'amplitude importante sont requises. Il est possible, dans ce but, d'augmenter la longueur de l'antenne paramétrique, c'est-à-dire la zone de l'espace où les interactions non linéaires des ondes primaires prennent place. La distance sur laquelle ces interactions existent est limitée par l'atténuation atmosphérique. Il est possible d'augmenter la puissance d'émission de la porteuse pour compenser la dissipation, mais alors l'apparition des chocs survient d'autant plus tôt, et le signal utile n'est plus démodulé (FIG. 1.7).

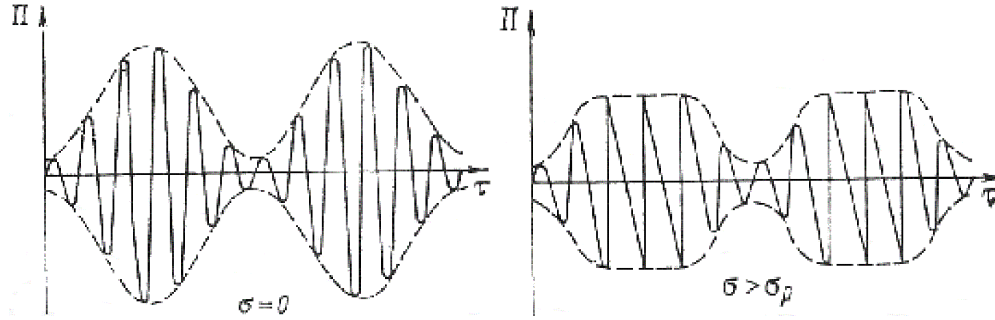


FIG. 1.7 – Déformation de l'enveloppe due à l'apparition de chocs ;  $\Pi = p'/p$  et  $\sigma = z/l_p$  [1].

L'atténuation atmosphérique étant proportionnelle au carré de la fréquence, une solution alternative à l'augmentation de puissance est de diminuer la fréquence de la porteuse, ce qui permet également d'augmenter la distance  $l_p$ . Typiquement, cette fréquence est comprise entre 30 et 60 kHz suivant la bande passante voulue.

La directivité de l'antenne, en ce qui concerne le signal utile, est liée à la fois à la longueur de l'antenne paramétrique (plus il y a de sources virtuelles, plus l'onde obtenue sera directive) et à la directivité des ondes primaires. Pour améliorer cette dernière, à taille d'émetteur constante, la fréquence d'émission doit être élevée (nécessité d'un compromis entre la directivité et la pénétration

dans l'air). Par ailleurs, plus la surface émettrice d'une source est grande, plus la directivité est importante.

La résolution de l'équation KZK (éq. 1.25) par la méthode quasi-linéaire a montré que le champ d'ondes primaires émis à 130 dB SPL à 1 m par une source plane circulaire de rayon 12,5 cm (soit environ 300 cm<sup>2</sup>) fonctionnant en piston et travaillant autour de 40 kHz (fréquence de l'onde porteuse) permet de répondre aux cahier des charges en termes niveau et de directivité de l'onde démodulée.



## Chapitre 2

# Antennes de haut-parleurs

### 2.1 Introduction

La réalisation d'un système de restitution du son directif, utilisant le principe des antennes paramétriques nécessite pour répondre aux besoins de l'ISL, d'utiliser un transducteur plan de surface  $300\text{ cm}^2$  fonctionnant en piston et émettant environ 130 dB SPL à 40 kHz et à 1 m. Cependant l'utilisation d'un unique transducteur ne permet pas d'émettre des niveaux suffisants à une fréquence élevée (40 kHz), notamment en raison de l'inertie des pièces mobiles. Afin d'obtenir une directivité étroite et des niveaux élevés, la solution la plus communément employée est la mise en réseau d'un grand nombre de petits transducteurs. Ce chapitre vise à définir un arrangement géométrique, et le débit minimal de chaque source permettant de générer un niveau de 130 dB SPL à 1 m tout en gardant une directivité comparable à celle du piston plan de  $300\text{ cm}^2$  à 40 kHz. Dans un premier temps les modèles de rayonnement des réseaux sont rappelés. Dans une seconde partie, le type d'arrangement géométrique est choisi de façon à répondre au cahier de charges en matière de directivité. Enfin le débit de chaque source est estimé de manière à obtenir le niveau de pression souhaité pour l'onde porteuse.

### 2.2 Modèles de rayonnement en champ lointain

Nous présentons ici succinctement la théorie des réseaux de sources, afin de rappeler les propriétés de la fonction de directivité d'un réseau rectiligne régulier d'une part et de la fonction de directivité d'un réseau à deux dimensions (rectangulaire et hexagonal) d'autre part.

#### 2.2.1 Sources ponctuelles

Dans un premier temps, les sources électroacoustiques étudiées sont assimilées à des sources ponctuelles. La gamme de fréquence d'étude est alors limitée, une source de dimensions finies pouvant être considérée comme ponctuelle si ses dimensions sont très petites devant la longueur d'onde émise.

La pression acoustique rayonnée par une telle source est donnée par

$$p(\vec{r}) = jk\rho_0 c_0 q_s \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}_s|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_s|}, \quad (2.1)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique du milieu au repos,  $c_0$  la célérité du son dans le milieu au repos,  $q_s$  le débit volumique de la source,  $\vec{r}_s$  le vecteur position de la source et  $\vec{r}$  le vecteur position du point d'observation.

### 2.2.1.1 Réseaux rectilignes

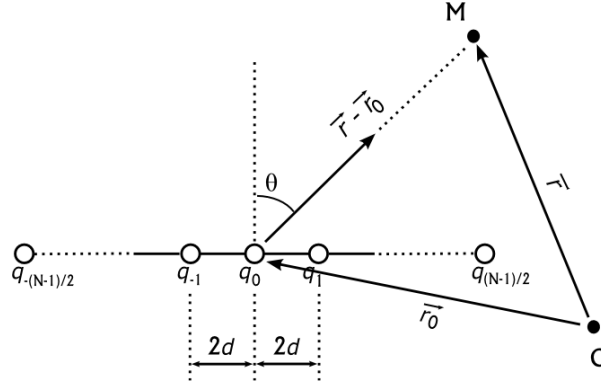


FIG. 2.1 – Réseau de  $n$  sources ponctuelles.

Soit un réseau linéaire de  $N$  sources ponctuelles de débits volumiques  $q_n$ , espacées deux à deux d'une distance  $2d$  (FIG. 2.1). La source  $n$  de débit  $q_n$  et à la position  $\vec{r}_n$ , rayonne une pression

$$p_n(\vec{r}) = jk\rho_0 c_0 q_n \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}_n|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_n|}. \quad (2.2)$$

De façon à faciliter l'écriture,  $N$  est supposé impair et l'indice  $n = 0$  correspond au centre du réseau. Il est toutefois possible de suivre la même démarche pour  $N$  pair (cf. annexe A). Lorsque la distance d'observation est grande devant la taille du réseau ( $|\vec{r} - \vec{r}_0| \gg 2(N-1)d$ ), la relation  $|\vec{r} - \vec{r}_n| = |\vec{r} - \vec{r}_0| + 2nd \sin \theta$ , avec  $\theta$  l'angle formé par la droite perpendiculaire au réseau et  $|\vec{r} - \vec{r}_0|$ , est vérifiée. Il est donc possible de décrire l'espace grâce à un système de coordonnées polaires, où  $r$  représente la distance entre le centre du réseau et la source ( $r = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ ) et  $\theta$  est l'angle formé par  $\vec{r} - \vec{r}_0$  et la normale au réseau. La pression rayonnée par le réseau en champ lointain étant la somme des pressions induites par chaque source, elle est donnée par

$$p(r, \theta) = jk\rho_0 c_0 \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \sum_n q_n \exp(-2jkd n \sin \theta), \quad (2.3)$$

ce qui correspond à une pression dans l'axe ( $\theta = 0$ ),

$$p_{ax}(r) = p(r, 0) = jk\rho_0 c_0 \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \sum_n q_n. \quad (2.4)$$

La fonction de directivité, définie comme le rapport de la pression dans la direction  $\theta$  et de la pression dans l'axe, est

$$h(\theta) = \frac{p(r, \theta)}{p_{ax}(r)} = \frac{1}{\sum_n q_n} \sum_n q_n \exp(-2jkdn \sin \theta). \quad (2.5)$$

Il est possible de faire varier la directivité grâce à une pondération en amplitude des sources du réseau [22]. Lorsque le réseau est composé de sources identiques ( $q_n = q \forall n$ ) la fonction de directivité s'écrit

$$h(\theta) = \frac{\sin(Nkd \sin \theta)}{N \sin(kd \sin \theta)}. \quad (2.6)$$

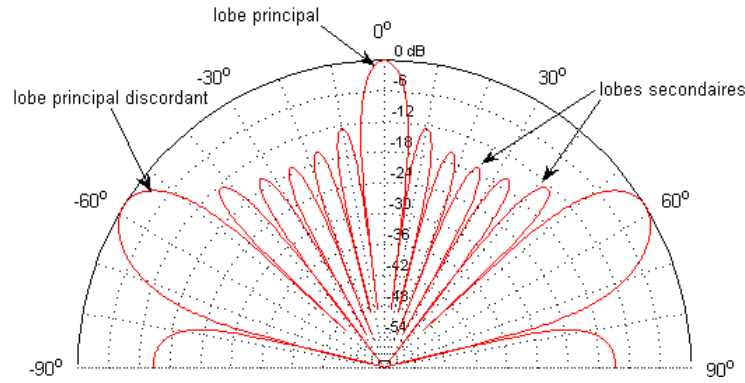


FIG. 2.2 – Exemple de diagramme de directivité pour  $f=40$  kHz,  $d=5$  mm et  $N=7$ .

Le dénominateur de  $h(\theta)$  ainsi que son numérateur s'annulent pour  $k d \sin \theta = m\pi$  avec  $m$  entier, dans ce cas  $h(\theta) = 1$  et un lobe principal apparaît. Dans l'axe ( $\theta = 0$ ) le lobe principal existe quelque soit la fréquence. Pour les fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist correspondant à  $f > mc/2d$ , des lobes principaux discordants (cf. FIG. 2.2) apparaissent aux angles  $\sin \theta_{pd} = m\lambda/(2d)$ . Les zéros de  $h(\theta)$  correspondent à l'annulation du numérateur lorsque le dénominateur est différent de zéro, ce qui se produit aux angles

$$\sin \theta_z = \frac{m}{N} \frac{\lambda}{2d}, \quad (2.7)$$

avec  $m$  entier non nul et non multiple de  $N$  (sinon le dénominateur s'annule). L'angle des lobes secondaires est alors donné par environ

$$\sin \theta_s = \frac{m + 1/2}{N} \frac{\lambda}{2d}, \quad (2.8)$$

avec  $m$  et  $m + 1$  entiers non nuls et non multiples de  $N$ . L'amplitude de ces lobes secondaires est quand à elle [23],

$$p_m(\theta_s) = \frac{p_{ax}}{N \sin\left(\frac{m+1/2}{N}\pi\right)}. \quad (2.9)$$

Pour les réseaux de grande dimension par rapport à la longueur d'onde ( $\lambda$ ), le demi-angle d'ouverture à -6 dB ( $\theta'$  avec  $h(\theta') = 0,5$ ) est donné approximativement par  $\theta' = \lambda/(2L)$  [24] où  $L$  est la longueur du réseau.

### 2.2.1.2 Réseaux à deux dimensions

Deux types de réseaux à deux dimensions sont étudiés ici. Le premier est l'arrangement le plus simple envisageable, à savoir le réseau rectangulaire. Il correspond à une disposition matricielle des sources possédant des distances inter-sources suivant  $x$  ( $2d_x$ ) et suivant  $y$  ( $2d_y$ ) pouvant être différentes (cf. FIG. 2.3 a). Le second est le réseau dit hexagonal qui est la combinaison de deux réseaux rectangulaires placés en quinconce, l'un de  $N \times M$  sources et l'autre de  $(N - 1) \times (M - 1)$  sources, les deux réseaux possédant les mêmes espacements  $d_x$  et  $d_y$  (cf. FIG. 2.3 b).

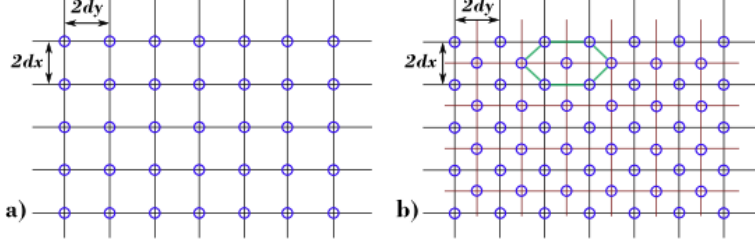


FIG. 2.3 – Types d'arrangements étudiés ; a) distribution rectangulaire, b) distribution hexagonale.

Le réseau hexagonal a l'avantage de maximiser le nombre de sources circulaires qu'il est possible de placer sur une surface donnée lorsqu'il faut tenir compte d'un écartement minimum entre les sources. Cet écartement minimum doit être pour des sources réelles (non ponctuelles) égal à deux fois le rayon d'une source afin d'éviter le chevauchement. Afin que les distances inter-sources soient égales il faut créer un hexagone régulier et pour cela il suffit de respecter l'égalité  $d_y = \sqrt{3}d_x$ .

Deffarges [25] précise que la directivité d'un réseau 2D est le produit de deux directivités dès lors qu'il existe un repère dans lequel les variables sont séparables. Ceci revient à dire que lorsque deux sources placées sur la même colonne (déplacement suivant  $x$ ) sont considérées, la différence de distance parcourue par l'onde acoustique pour arriver au point d'observation dépend d'un angle ( $\theta_x$ ) et lorsque deux sources placées sur la même ligne (déplacement suivant  $y$ ) sont considérées, la différence de trajet de l'onde dépend d'un autre angle ( $\theta_y$ ). Afin de suivre cette proposition, un repère cartésien dont l'origine est placée au centre du réseau est utilisé et les angles sont définis comme suit : le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  forme les angles  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  avec les axes correspondant ( $M_x = OM \cos(\varphi_x), M_y = OM \cos(\varphi_y), M_z = OM \cos(\varphi_z)$ ). Par souci de similitude avec le cas du réseau rectiligne nous considérons les angles  $\theta_x = \pi/2 - \varphi_x, \theta_y = \pi/2 - \varphi_y$  et  $\theta_z = \varphi_z$  (cf. fig. 2.4)

Cette définition des angles permet de montrer que pour les réseaux rectangulaires  $|\vec{r} - \vec{r}_{nm}| = r + 2nd_x \sin \theta_x + 2md_y \sin \theta_y$ , avec  $\vec{r}_{nm}$  le vecteur position de la source  $q_{nm}$  et  $r$  la distance entre le centre du réseau et le point d'observation. La pression rayonnée par le réseau peut s'écrire

$$p(r, \theta_x, \theta_y) = jk\rho_0 c_0 \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \sum_n \sum_m q_{nm} \exp(-2jk d_x n \sin \theta_x) \exp(-2jk d_y m \sin \theta_y). \quad (2.10)$$

Lorsque le réseau est composé de sources identiques ( $q_{nm} = q \forall n, m$ ), la pression dans l'axe est

$$p_{ax}(r) = jk\rho_0 c_0 \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} N M q, \quad (2.11)$$

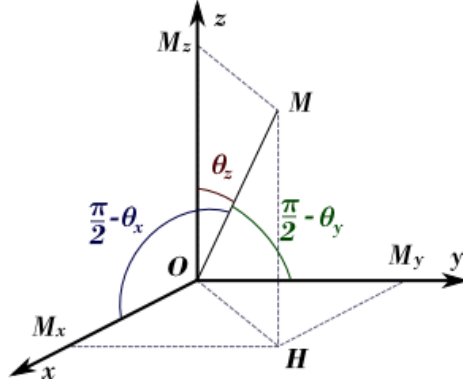


FIG. 2.4 – Définition des angles.

et la fonction de directivité est donnée par

$$h_r(\theta_x, \theta_y) = \frac{\sin(Nkd_x \sin \theta_x)}{N \sin(kd_x \sin \theta_x)} \frac{\sin(Mkd_y \sin \theta_y)}{M \sin(kd_y \sin \theta_y)}. \quad (2.12)$$

La fonction de directivité  $h_r(\theta_x, \theta_y)$  est la multiplication de deux termes similaires à la directivité d'un réseau rectiligne (équation (2.6))[25]. Le diagramme de directivité d'un réseau rectangulaire à  $\theta_x$  constant (réciproquement  $\theta_y$  constant) est donc équivalent à celui d'un réseau rectiligne.

Les réseaux hexagonaux étant composés de deux réseaux rectangulaires, l'un de  $N_1 \times M_1$  sources et l'autre de  $N_2 \times M_2$  sources (avec  $N_2 = N_1 - 1$  et  $M_2 = M_1 - 1$ ), la même démarche peut-être suivie. Pour un réseau de sources identiques ( $q_{n_1 m_1} = q_{n_2 m_2} = q \forall n_1, m_1, n_2, m_2$ ) la pression dans l'axe est donnée par (cf. détail annexe A)

$$p_{ax}(r) = jk\rho_0 c_0 \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} (N_1 M_1 + N_2 M_2) q, \quad (2.13)$$

et la fonction de directivité

$$\begin{aligned} h_h(\theta_x, \theta_y) &= \frac{1}{N_1 M_1 + N_2 M_2} \frac{\sin(N_1 kd_x \sin \theta_x)}{\sin(kd_x \sin \theta_x)} \frac{\sin(M_1 kd_y \sin \theta_y)}{\sin(kd_y \sin \theta_y)} \\ &+ \frac{1}{N_1 M_1 + N_2 M_2} \frac{\sin(N_2 kd_x \sin \theta_x)}{\sin(kd_x \sin \theta_x)} \frac{\sin(M_2 kd_y \sin \theta_y)}{\sin(kd_y \sin \theta_y)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

La fonction  $h_h$  présente des similitudes avec la fonction de directivité des réseaux rectangulaires. En effet, aux termes de normalisation près (tous les termes hors des sinus), elle correspond à la somme des fonctions de directivité des deux réseaux rectangulaires constituant le réseau hexagonal.

### 2.2.2 Sources "pistons"

Lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  n'est pas grande devant le rayon des sources, l'hypothèse des sources ponctuelles ne peut plus être retenue. Il est alors possible d'assimiler chaque source à un piston oscillant.



### 2.2.2.1 Rayonnement d'un piston

Afin de déterminer le rayonnement d'une surface vibrante  $S$ , celle-ci est considérée comme un réseau continu de sources élémentaire  $dS$  de débit  $dQ = v dS$ . Lorsque cette surface vibrante est située dans un écran infini rigide, la pression rayonnée est donnée par [26],

$$p(\vec{r}) = j \frac{k \rho c}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} v(\vec{r}_0) dS, \quad (2.15)$$

où  $\vec{r}_0$  est la position d'une source élémentaire située sur la surface vibrante et  $\vec{r}$  est la position du point d'observation situé dans le demi espace à l'avant de l'écran (cf. figure 2.5)

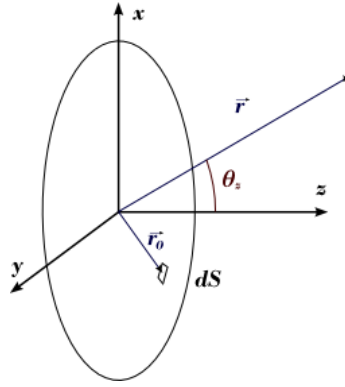


FIG. 2.5 – Description des notations.

Dans le cas d'un piston oscillant, la vitesse est constante sur l'ensemble de la surface ( $v(\vec{r}_0) = v_0$ ). En considérant un piston circulaire de rayon  $a$ , il existe une symétrie de révolution, et il est possible de décrire l'espace à l'aide des coordonnées  $\vec{r} = (r, \theta_z)$  où  $r$  est la norme de  $\vec{r}$ , et  $\theta_z$  l'angle entre  $\vec{r}$  et l'axe  $z$  perpendiculaire à  $S$ . La pression dans l'axe est alors donnée par,

$$p(r, 0) = j \frac{\rho c}{2} v_0 \frac{a}{r} k a e^{-jkr}, \quad (2.16)$$

et la fonction de directivité par

$$h_p(\theta_z) = 2 \frac{J_1(ka \sin(\theta_z))}{ka \sin(\theta_z)}. \quad (2.17)$$

La figure 2.6 montre la fonction de directivité du piston et illustre l'augmentation de la directivité lorsque la fréquence augmente. Lorsque  $a < \lambda/4$  le piston est quasi omnidirectionnel et peut être considéré comme une source ponctuelle.

### 2.2.2.2 Réseaux de pistons

La directivité du réseau de pistons est donnée, en champ lointain, par le produit de la directivité du réseau de sources ponctuelles équivalent ( $h$ ) et de la directivité d'un piston ( $h_p$ ) [23],

$$H(\theta_x, \theta_y) = h(\theta_x, \theta_y) h_p(\theta_z). \quad (2.18)$$

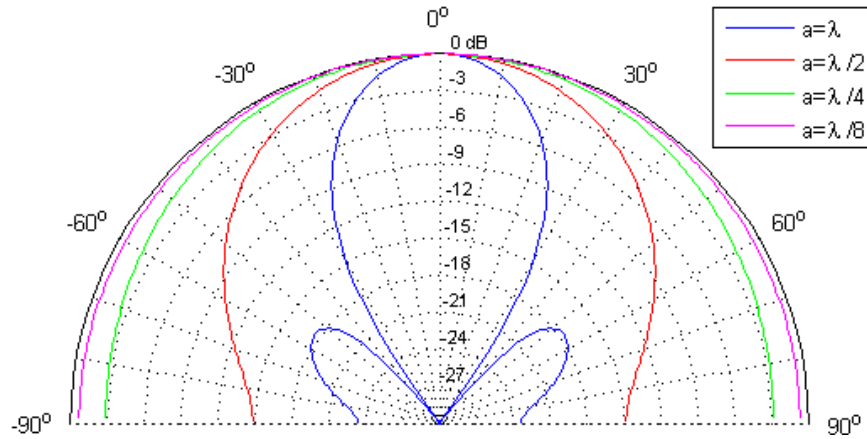


FIG. 2.6 – Directivité de piston de différentes tailles.

D'après la définition des angles donnée précédemment il est possible d'exprimer  $\theta_z$  par ( $\theta_z = \arccos \sqrt{1 - \sin^2(\theta_x) - \sin^2(\theta_y)}$ ). Si la longueur d'onde est grande devant le rayon des pistons ( $a < \lambda/4$ ) le piston est quasi omnidirectionnel ( $h_p \simeq 1$ ) et la directivité du réseau de pistons est bien égale à celle du réseau de sources ponctuelles équivalent.

## 2.3 Choix d'une configuration

Le chapitre portant sur la propagation non linéaire dans l'air (chap. 1) a permis de mettre en évidence que le champ d'ondes démodulées souhaité peut-être obtenu grâce à un champ d'ondes primaires généré par un piston plan de surface environ  $300 \text{ cm}^2$  émettant 130 dB SPL à 40 kHz et à 1 m. La configuration du réseau de transducteurs doit donc être choisie de manière à ce qu'un tel champ de pression soit généré.

### 2.3.1 Démarche

N'ayant pu trouver dans la littérature une étude comparative des deux types de réseaux présentés précédemment (rectangulaire et hexagonal), nous proposons ici de mettre en évidence les différences existantes entre ces deux configurations. Dans un premier temps elles sont comparées en utilisant l'hypothèse des sources ponctuelles, puis la prise en compte du modèle pistons plans est discutée.

Les paramètres importants des réseaux sont, la surface sur laquelle sont réparties les sources, la taille de chacune de ces sources, leur débit, leur nombre et leur disposition. À partir de ces données, il est possible de calculer le champ de pression rayonné par le réseau. Étant donné la nature des transducteurs que nous avons choisis d'étudier (cf. chapitre 3), les sources prises en compte sont circulaires et la surface maximum sur laquelle elles sont réparties est un carré de  $30 \times 30 \text{ cm}$  (dimensions maximum des films PVDF disponibles).

Dans ce paragraphe les deux réseaux présentés précédemment sont étudiés afin de déterminer

l'arrangement le mieux adapté pour obtenir une directivité comparable à celle du piston de surface  $300 \text{ cm}^2$  à 40 kHz, c'est à dire possédant un lobe principal avec un demi-angle d'ouverture à - 6 dB inférieur à  $2^\circ$  et ne présentant aucun lobe principal discordant. Le débit que doit générer chaque source pour obtenir un niveau d'émission adéquat dans l'axe (130 dB SPL à 1 m) est également défini dans ce paragraphe.

### 2.3.2 Étude de deux configurations

Dans le cas d'un réseau carré de dimension  $L \times L$ , la configuration rectangulaire ( $d_x = d_y$ ) permet de placer au mieux  $N_r = x^2$  sources ponctuelles, où  $x = 1 + L/2d_x$  est le nombre de sources suivant une dimension. Pour la configuration hexagonale ( $d_y = \sqrt{3}d_x$ ), il est possible de placer au mieux  $N_h = 2x^2/\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)x/\sqrt{3} + 1$  sources. Dans le cas de sources identiques, le niveau de pression rayonné dans l'axe ne dépend que du nombre de sources (éq. (2.11) et (2.13)). L'arrangement hexagonal permet de placer un plus grand nombre de sources. La différence maximale de niveau entre les deux configurations est donnée par le rapport  $G = 20 \log(N_h/N_r)$  lorsque  $x$  tend vers l'infini (réseau de grande taille ou très dense). Ceci montre que l'utilisation d'un arrangement hexagonal permet au mieux d'augmenter le niveau rayonné de 1,25 dB par rapport à l'arrangement rectangulaire. Cette différence n'est pas assez significative pour justifier à elle seule le choix de la configuration hexagonale.

Dans le cas de réseaux dont les dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde ( $L \gg \lambda$ ), le demi-angle d'ouverture à -6 dB ( $\theta'$  avec  $h(\theta') = 0,5$ ) est donné approximativement par  $\theta' = \lambda/(2L)$  [24], et ce quelque soit le nombre de sources sur cette longueur. Pour obtenir une demi-angle d'ouverture  $\theta'$  inférieur à  $2^\circ$  les dimensions du réseau suivant  $x$  et  $y$  devront être supérieures à 12,3 cm, ce qui est compatible avec les contraintes liées aux dimensions maximum des films PVDF.

Concernant la réjection des lobes principaux discordants, deux cas sont à distinguer. Le premier cas se rapporte aux réseaux dont la distance inter-sources est petite devant la longueur d'onde ( $d_x, d_y \ll \lambda/2$ , désignés par réseaux serrés). Le réseau peut-être assimilé à un transducteur unique de même surface que la surface effective du réseau (surface sur laquelle sont réparties les sources par opposition à la surface active) [25]. Il s'en suit que pour répondre au cahier des charges dans ce cas, il suffit de réaliser un réseau de  $300 \text{ cm}^2$  et cela quelque soit la configuration choisie.

Le second cas concerne les réseaux pour lesquels la distance inter sources est supérieure à la longueur d'onde ( $d_x, d_y > \lambda/2$ ). Dans cette configuration, les dénominateurs et numérateurs des fonctions de directivité s'annulent ensemble pour plusieurs valeurs de  $\theta_x$  et  $\theta_y$  (cf. § 2.2.1.1). Par exemple, dans le cas d'un écart inter-sources de 10 mm et pour une fréquence d'utilisation  $f = 40 \text{ kHz}$ , les résultats obtenus pour le réseau rectangulaire de  $11 \times 11$  sources avec  $d_x = d_y = 5 \text{ mm}$ , et pour le réseau hexagonal composé d'un premier réseau rectangulaire de  $11 \times 7$  sources et d'un second placé en quinconce de  $10 \times 6$  sources avec  $d_x = 5 \text{ mm}$   $d_y = \sqrt{3}d_x = 8,66 \text{ mm}$ , sont présentés aux figures 2.7, 2.8 et 2.9.

Dans le plan Oxz (FIG. 2.7), où les distances inter sources ( $d_x$ ) sont les même pour les deux

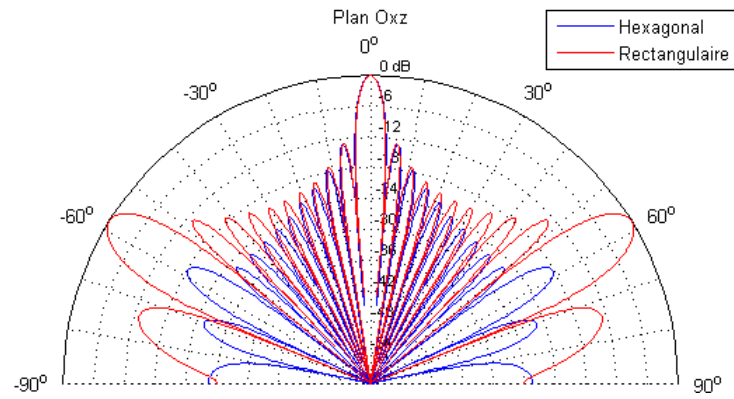


FIG. 2.7 – Comparaison de la directivité d'un réseau hexagonal et d'un réseau rectangulaire dans le plan  $Oxz$ .

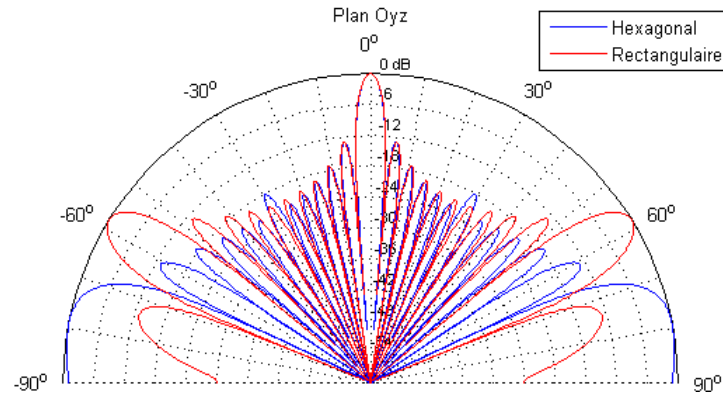


FIG. 2.8 – Comparaison de la directivité d'un réseau hexagonal et d'un réseau rectangulaire dans le plan  $Oyz$ .

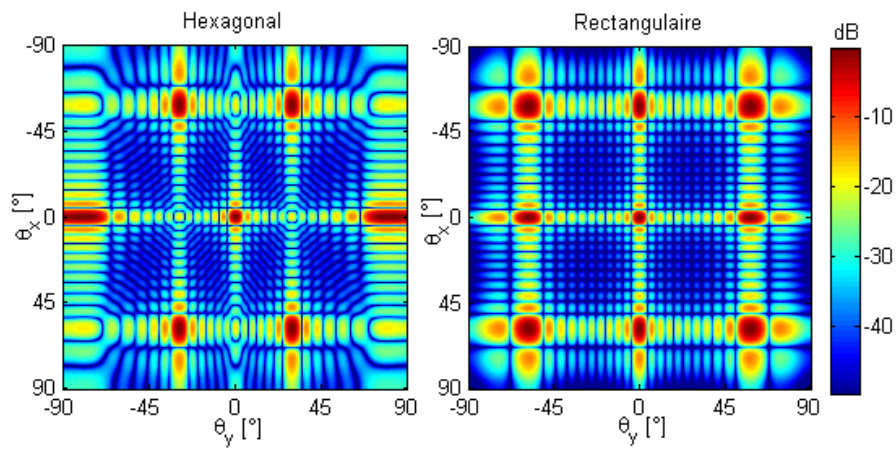


FIG. 2.9 – Comparaison de la directivité d'un réseau hexagonal et d'un réseau rectangulaire.

configurations, le réseau rectangulaire possède des lobes principaux discordants ( $h = 1$  hors de l'axe) à environ  $60^\circ$  de l'axe, alors que le réseau hexagonal réduit considérablement l'amplitude de ces lobes. Dans le plan Oyz (FIG. 2.8), les distances inter-sources sont différentes pour les deux configurations ( $d_y = 5$  mm pour le réseau rectangulaire et  $d_y = 8,66$  mm pour le réseau hexagonal). Les deux réseaux présentent des lobes principaux discordants, mais dans le cas du réseau hexagonal, l'angle pour lesquels ils apparaissent est plus grand. La figure 2.9 présente à titre indicatif les diagrammes de directivité « mis à plat » sur l'ensemble du demi espace pour les deux configurations.

L'arrangement hexagonal permet une meilleure réjection des lobes principaux discordants dans les cas où  $d_x, d_y > \lambda/2$  par rapport à l'arrangement rectangulaire. Dans la mesure du possible il reste préférable de se placer dans les conditions d'un réseau serré, toutefois le choix d'un écart inter sources aussi élevé est souvent lié à la dimension des sources utilisées, l'approximation des sources ponctuelles n'est donc plus appropriée et il est nécessaire de tenir compte de la directivité des sources elles-mêmes. Comme le montre la figure 2.10, en reprenant la configuration du réseau hexagonal présentée précédemment et en considérant des sources circulaires de rayon  $a = 5$  mm ( $a$  légèrement supérieur à  $\lambda/2$ ) vibrant en piston, l'amplitude des lobes de la fonction de directivité avec prise en compte des pistons est fortement diminuée pour les angles élevés ( $\sim -4$  dB pour  $\theta_y = 30^\circ$  et  $\sim -15$  dB pour  $\theta_y = 60^\circ$ ). En tenant compte de la dimension de chacune des sources et de leur directivité propre, la réjection des lobes principaux discordants est donc meilleure que ce que laisse envisager la modélisation tenant compte de l'hypothèse des sources ponctuelles.

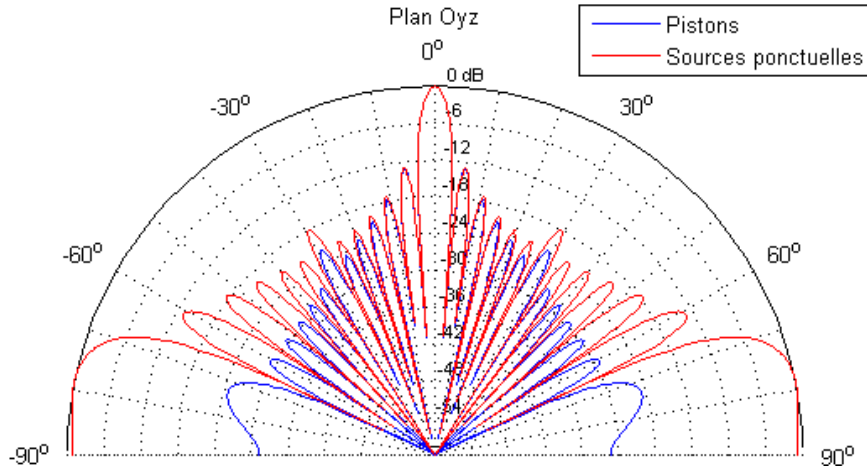


FIG. 2.10 – Comparaison de la directivité d'un réseau hexagonal de sources ponctuelles et d'un réseau de piston pour  $a \simeq \lambda/2$  (réseau hexagonal  $10 \times 7$  avec  $d_x = 5$  mm,  $d_y = 8,66$  mm et  $f = 40$  kHz).

## 2.4 Conclusion et application au cas de l'étude

Ce chapitre a permis de mettre en évidence les différences existant entre les réseaux rectangulaires et hexagonaux, ainsi que la possibilité d'utiliser l'approximation des sources ponctuelles pour des

sources de rayon inférieur au quart de la longueur d'onde (soit  $ka < \pi/2$ ). La configuration retenue est le réseau hexagonal car il permet, d'une part, une bonne réjection des lobes principaux discordants, et, d'autre part, de placer un maximum de sources sur une surface donnée (ce qui permet d'augmenter légèrement le niveau d'émission de l'antenne).

Si le choix de sources dont le rayon est  $a = 2$  mm est effectué (choix dépendant de la courbe de réponse des sources) et que les contraintes de fabrication obligent à laisser un interstice de longueur 2 mm, l'antenne hexagonale de  $30 \times 19$  sources avec  $d_x = 3$  mm et  $d_y = \sqrt{3}d_x = 5,2$  mm répond au cahier des charges en termes de directivité (demi-angle d'ouverture du lobe principal à -6 dB inférieur à  $2^\circ$ ). Afin de répondre au cahier des charges en terme de niveau d'émission (130 dB SPL à 1 m) chacune des sources constituant cette antenne doit générer un débit volumique de l'ordre de  $q \simeq 3.10^{-6}$  m<sup>3</sup>/s.



## Chapitre 3

# Étude du transducteur mono cellule

### 3.1 Introduction

Le système électroacoustique développé dans le cadre de ce travail est un réseau de haut-parleurs mis en oeuvre de manière à utiliser le principe non linéaire d'auto démodulation dans l'air. Le terme d'antenne paramétrique, originalement utilisé pour dénommer la zone de l'espace où se développe cette auto démodulation, est ici utilisé par extension pour dénommer le système électroacoustique étudié proprement dit. Cette antenne paramétrique est donc constituée d'un ensemble de transducteurs élémentaires dont le comportement doit être modélisé afin de permettre le dimensionnement de l'antenne. C'est le but de ce chapitre que de proposer une telle description théorique.

Dans une première partie, les contraintes imposées au transducteur et les choix technologiques qui en découlent sont présentés. Dans une deuxième partie, un modèle électroacoustique du transducteur élémentaire est proposé sur la base de travaux antérieurs disponibles dans la littérature. Enfin, sur la base de ce modèle, le dimensionnement d'un transducteur adapté à l'antenne paramétrique développé est proposé.

### 3.2 Cahier des charges et transducteurs choisis pour l'étude

#### 3.2.1 Contraintes liées à l'application

Compte tenu du principe de fonctionnement des antennes paramétriques et du cahier des charges défini dans l'introduction, les transducteurs utilisés pour l'antenne paramétrique développée dans le cadre de cette étude doivent répondre à un certain nombre d'exigences décrites ci-dessous.

- Du fait qu'une antenne paramétrique utilise une modulation d'amplitude, la bande passante des transducteurs utilisés doit être centrée autour de la fréquence porteuse. La largeur de cette bande passante dépend du signal à transmettre et du prétraitement que subit ce signal afin de limiter les distorsions induites par l'auto démodulation (cf. chapitre 5). Le signal à transmettre étant ici essentiellement de la parole, la bande de fréquences utilisée est la même qu'en téléphonie, c'est



à dire [300 - 3400 Hz]. Compte tenu des prétraitements envisagés, la largeur de bande passante des transducteurs doit alors être au minimum de 3,4 kHz (cas d'une modulation à bande latérale unique, cf. chapitre 5).

- La gamme de fréquence utile du transducteur doit se situer dans le domaine ultrasonore de manière à ce que la fréquence de la porteuse ne soit pas audible. Cependant, afin de conserver une grande zone de démodulation dans l'air (limitée par l'atténuation des ondes primaires), la fréquence porteuse ne doit pas être trop élevée (cf. chapitre 1). Concrètement, la gamme de fréquence utile de l'antenne paramétrique est choisie entre 30 kHz et 60 kHz.
- Le niveau sonore émis par un transducteur élémentaire doit être suffisant pour que les non linéarités de la propagation interviennent. Dans le cas de la configuration d'antenne choisie dans le chapitre précédent (arrangement hexagonal de sources de 2 mm de rayon réparties sur une surface d'environ 350 cm<sup>2</sup>), le débit  $q$  de chaque transducteur doit être de l'ordre de  $q = 3.10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ .

### 3.2.2 Transducteur retenu pour l'étude

Les transducteurs les plus couramment utilisés dans le domaine ultrasonore sont les transducteurs piézoélectriques, et parmi eux ceux qui font usage de matériaux piézocéramiques. Les coefficients de couplage électromécaniques des ces matériaux, notés  $d_{ij}$ , où  $i = 1, 2, 3$  et  $j = 1, 2, 3$  représentent respectivement les directions d'élongation du matériau et d'application du potentiel électrique dans un repère cartésien à trois dimensions, possèdent des valeurs relativement élevées, de l'ordre de 200 pC/N. Par contre, les transducteurs piézocéramiques fonctionnent sur une résonance dont le facteur de qualité est en général très élevé, ce qui correspond à une bande passante très étroite. De plus, ils possèdent une impédance mécanique élevée (rigidité et masse importantes), ce qui engendre un mauvais couplage à l'air.

D'autres transducteurs ultrasonores utilisent un film polymère piézoélectrique. Ce type de film piézoélectrique offre un meilleur couplage à l'air du fait de sa plus faible impédance mécanique (rigidité et masse faibles). De plus, il ne présente pas de résonances mécaniques très marquées, ce qui permet au transducteur de fonctionner sur une bande de fréquence relativement large autour d'une de ces résonances. Par contre, les coefficients de couplage électromécanique de ce type de matériau sont faibles, typiquement de l'ordre de 5 à 10 pC/N. Il existe plusieurs types de films de polymères piézoélectriques, notamment les films de polyfluorure de vinylidène (PVDF où PVF<sub>2</sub>) et les copolymères de fluorure de vinylidène et de trifluoroéthylène (P(VDF-TrFE) où P(VF<sub>2</sub>-VF<sub>3</sub>)). Ces derniers, n'étant apparus que plus récemment, ils ne sont pas encore couramment utilisés, contrairement au PVDF qui est présent dans de nombreuses applications (hydrophones, microphones, capteurs de pression, capteurs d'ondes de chocs, interrupteurs, sondes échographiques, sondes de contrôles non destructifs, ...) [27].

Bien que les valeurs de ses coefficients de couplage électromécanique soient faibles comparées à celles des céramiques piézoélectriques, le film de PVDF est le matériau retenu pour l'étude du fait de

son bon couplage à l'air et de son amortissement élevé permettant de limiter l'amplitude des résonances mécaniques. Ainsi, l'antenne paramétrique réalisée est constituée d'un film de PVDF plaqué sur un support percé de plusieurs trous de dimensions données et suivant une distribution prédéfinie. Chaque trou est fermé par une plaque rigide à une de ses extrémités et par le film PVDF à l'autre extrémité. Un vide partiel (appelé « dépression » dans la suite du document) est appliquée dans les cavités ainsi formées à l'arrière du film, afin de tendre le film et de lui donner une forme concave au niveau de chaque trou (FIG. 3.1). Le rayon de courbure obtenu permet de tirer partie de l'« activité » piézoélectrique suivant les deux axes principaux du film. Chaque trou associé à une portion concave du film PVDF constitue un transducteur élémentaire.

Le choix d'une distribution des transducteurs élémentaires, en fonction de la directivité voulue, a été présenté au chapitre précédent, et un débit minimum pour chaque transducteur a été défini. Reste qu'il faut dimensionner chaque transducteur élémentaire afin qu'il puisse fournir ce débit nécessaire au bon fonctionnement de l'antenne. Ce dimensionnement n'est possible qu'à la condition de disposer d'un modèle du comportement du transducteur. L'étude de ce modèle est présentée dans la suite de ce chapitre.

### 3.3 Modèle du transducteur élémentaire

L'étude des transducteurs électroacoustiques est communément réalisée à l'aide de schémas électriques équivalents en constantes localisées [22] traduisant les comportements électrique, mécanique et acoustique du système. Cette approche peut être utilisée dans le cas où la longueur d'onde reste grande devant les dimensions de l'objet étudié. De ce fait, la gamme fréquentielle d'étude s'étend jusqu'à la première fréquence de résonance du système. Dans le cas du transducteur étudié ici, cette approche est trop limitée pour permettre l'analyse des modes supérieurs de la membrane, modes qui peuvent être intéressants pour l'application à l'antenne paramétrique.

Ainsi, une approche qui n'est pas basée sur l'hypothèse de constantes localisées et qui met en oeuvre les équations de comportement d'une membrane couplée à une cavité est utilisée dans ce travail.

La description théorique du transducteur élémentaire présentée dans ce chapitre s'effectue en deux temps. Dans un premier temps, une étude statique est réalisée pour décrire la déformée de la membrane soumise à une différence de pression statique entre ses deux faces. Cette étude statique est nécessaire car, d'une part, elle permet d'estimer la tension mécanique de la membrane au repos, et d'autre part, elle permet de quantifier le terme excitateur piézoélectrique responsable du mouvement de la membrane en régime dynamique, terme qui est directement proportionnel au rayon de courbure de la membrane concave au repos. Dans un deuxième temps, le comportement dynamique de la membrane est étudié.

Cette description théorique (statique et dynamique) repose sur l'adaptation au cas du transducteur étudié de modèles disponibles dans la littérature. Ces modèles et leur adaptation sont décrits ci dessous.

### 3.3.1 Comportement statique de la membrane

Avant sa mise en forme grâce à une différence de pression entre ses deux faces, La membrane est considérée circulaire de rayon  $a$ , isotrope, sans prétension ou relâchement et encastrée sur sa périphérie. Lorsqu'une différence de pression  $P$  est appliquée entre ses deux faces, la membrane prend une forme assimilée ici à une calotte sphérique dont le rayon de courbure est noté  $R$  (FIG. 3.1). La déformée d'une membrane due à une différence de pression statique a donné lieu à plusieurs études disponibles dans la littérature. Hencky [28] ou Abram [29], par exemple, proposent une expression analytique de cette déformée en admettant l'hypothèse simplificatrice que la force résultante sur la membrane reste normale à la surface de la membrane au repos (c'est à dire toujours verticale, cf. FIG. 3.1). Par ailleurs, les contraintes radiales  $\sigma_r$  et azimutales  $\sigma_\theta$  sont considérées uniformes dans l'épaisseur  $h$  de la membrane (elles ne dépendent donc que des coordonnées  $r$  et  $\theta$ ) et la contrainte suivant  $z$ ,  $\sigma_z$ , est négligée. Le problème considéré possède une symétrie de révolution.

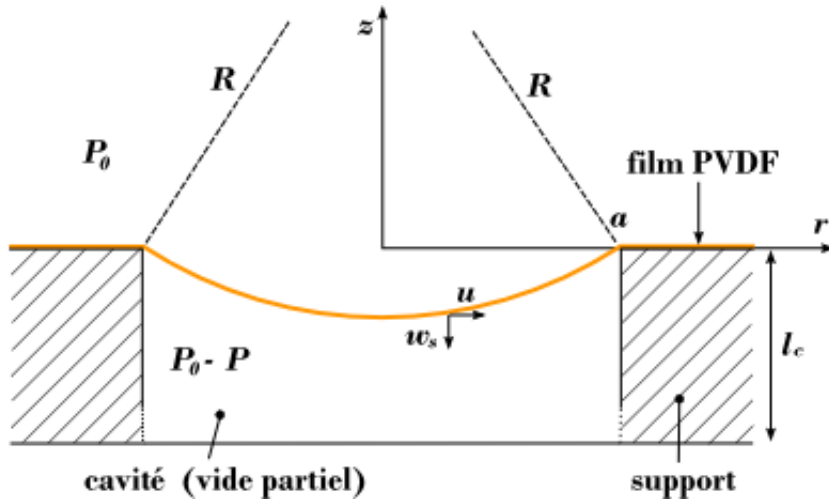


FIG. 3.1 – Coupe du transducteur à base de film PVDF.

Les déformations radiales et azimutales  $\varepsilon_r$  et  $\varepsilon_\theta$  et les contraintes  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$  s'expriment alors de la manière suivante [30],  $\forall r \in [0; a]$ ,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_s}{dr} \right)^2, \quad (3.1a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (3.1b)$$

$$\sigma_r = \frac{E_m h}{1 - \nu_m^2} (\nu \varepsilon_\theta + \varepsilon_r), \quad (3.2a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_m h}{1 - \nu_m^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r), \quad (3.2b)$$

où  $u$  est le déplacement radial de la membrane,  $w_s$  son déplacement transverse (FIG. 3.1),  $E_m$  son module de Young et  $\nu_m$  son coefficient de Poisson. L'équilibre radial est alors décrit par l'équation,

$$\sigma_\theta = \frac{d}{dr}(r\sigma_r), \quad (3.3)$$

et l'équilibre vertical par,

$$\sigma_r \frac{dw_s}{dr} = -\frac{Pr}{2}. \quad (3.4)$$

Étant donné l'encastrement à la périphérie de la membrane et la symétrie du problème, les conditions aux limites sont

$$w_s(a) = u(a) = 0, \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{dw_s}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (3.6)$$

En définissant les quantités sans dimensions  $W = w_s/a$ ,  $N = \sigma_r/(E_m h)$ ,  $R = r/a$  et  $q = Pa/(E_m h)$ , le système d'équation 3.1 à 3.4, peut s'écrire

$$R \frac{d}{dR} \left[ \frac{d}{dR}(RN) + N \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dR} \right)^2 = 0. \quad (3.7)$$

$$N \frac{dW}{dR} = -\frac{1}{2} q R. \quad (3.8)$$

La substitution de l'équation (3.8) dans l'équation (3.7) donne l'équation différentielle

$$N^2 \frac{d}{dR} \left[ \frac{d}{dR}(RN) + N \right] + \frac{1}{8} q^2 R = 0. \quad (3.9)$$

Hencky [28] suppose que les solutions des équations (3.9) et (3.8) peuvent s'écrire sous la forme polynomiale suivante,

$$N(R) = \frac{1}{4} q^{2/3} \sum_0^\infty b_{2n} R^{2n}, \quad (3.10)$$

$$W(R) = q^{1/3} \sum_0^\infty a_{2n} (1 - R^{2n+2}). \quad (3.11)$$

Les coefficients  $b_{2n}$  sont déterminés en reportant l'équation (3.10) dans l'équation (3.9), ce qui conduit à exprimer ces coefficients en fonction de  $b_0$ . L'utilisation des conditions aux limites (eq. (3.5) et (3.6)) permet ensuite d'exprimer  $b_0$  en fonction du coefficient de Poisson de la membrane supposé connu. Enfin, pour déterminer le déplacement, il suffit de reporter les équations (3.10) et (3.11) dans l'équation de l'équilibre vertical (3.4) afin de calculer les coefficients  $a_{2n}$  en fonction de  $b_0$  (exemple de résolution donné en annexe B).

Abram [29] propose une solution plus simple en considérant que la contrainte est indépendante de  $r$ , Il obtient alors l'expression de la déformée suivante,

$$w_s(r) = \sqrt[3]{\frac{1 - \nu_m}{E_m h} \frac{Pa^4}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right], \quad (3.12)$$

dans le cas où la membrane n'est ni prétendue, ni relâchée (membrane parfaite) avant l'application de la différence de pression  $P$ .

Fichter [31] propose de ne plus considérer la force résultante de la différence de pression comme étant verticale, mais comme étant en tout point normale à la surface de la membrane déformée. Les équations décrivant le problème sont alors identiques à celles présentées ci-dessous, excepté pour l'équation d'équilibre radial qui devient,

$$\sigma_\theta = \frac{d}{dr}(r\sigma_r) - Pr \frac{dw_s}{dr}. \quad (3.13)$$

Fichter considère des quantités sans dimensions légèrement différentes que celles de Hencky, à savoir  $R = r/a$ ,  $W = w_s/a$ ,  $N = \sigma_r/Pa$  et  $q = Pa/E_m h$ , et l'équivalent de l'équation (3.9) s'écrit alors,

$$N^2 \left( R^2 \frac{d^2 N}{dR^2} + 3R \frac{dN}{dR} \right) - \frac{1}{2} R^3 \frac{dN}{dR} + AR^2 N + \frac{1}{8} \frac{R^2}{q} = 0 \quad (3.14)$$

où  $A = (3 + \nu_m)/2$ .

Fichter suppose ensuite que  $N(R)$  est donné par le polynôme

$$N(R) = \sum_0^\infty b_{2n} R^{2n}, \quad (3.15)$$

et  $W(R)$  par

$$W(R) = \sum_0^\infty a_{2n} (1 - R^{2n+2}). \quad (3.16)$$

Les coefficients  $b_{2n}$  et  $a_{2n}$  sont ensuite déterminés en utilisant la même méthode que pour l'approche de Hencky. Les forces dues à une différence de pression entre les deux faces d'une membrane étant normales à la surface de la membrane, la solution proposée par Fichter est plus proche de la réalité physique. Toutefois elle donne lieu à des équations beaucoup plus complexes et la déformée statique  $w_s$  qui en résulte ne diffère de celle Hencky que pour de fortes différences de pression (de l'ordre du bar). L'utilisation de ce modèle n'est donc pas justifié dans le cadre de cette étude car les dépressions maximum utilisées sont de l'ordre de 200 mbar afin d'éviter d'endommager le film PVDF.

Dans la suite de l'étude, la déformée statique de la membrane est utilisée pour déterminer la tension linéique  $T_0$  du film au « repos » (en absence de champ électrique) et le terme moteur du mouvement de la membrane, qui est dû à une tension linéique dynamique  $T_e$  supplémentaire liée au champ électrique et aux propriétés piézoélectriques du film. De manière à simplifier le calcul de ces paramètres il est possible d'assimiler la déformée statique de la membrane à une calotte sphérique. Son rayon de courbure est donnée par

$$R = \frac{w_s^2(0) + a^2}{2w_s(0)}. \quad (3.17)$$

En prenant en compte cette hypothèse, il est possible d'exprimer  $T_0$  comme étant indépendant de  $r$  et donnée par [32],

$$T_0 = \frac{RP}{2}, \quad (3.18)$$

où  $P$  est la différence de pression entre l'avant et l'arrière du film.  $T_e$  est alors,

$$T_e = \frac{U d_{3,m} E_m}{1 - \nu_m}, \quad (3.19)$$

où  $U$  est la tension électrique aux bornes du film,  $d_{3,m}$  est le coefficient piézoélectrique de la membrane,  $E_m$  est le module de Young de la membrane et  $\nu_m$  est son coefficient de Poisson.

Compte tenu de cette simplification, seule la flèche ( $w_s(0)$ ) est importante dans les modèles statiques proposés. Le flèche prédite par le modèle d'Abram et celle prédite par le modèle de Hencky à l'ordre 6 ne diffèrent de la mesure que de 2% au maximum (FIG. 3.2). Cet écart n'étant pas significatif, le modèle d'Abram est retenu pour la suite de l'étude en raison de sa simplicité.

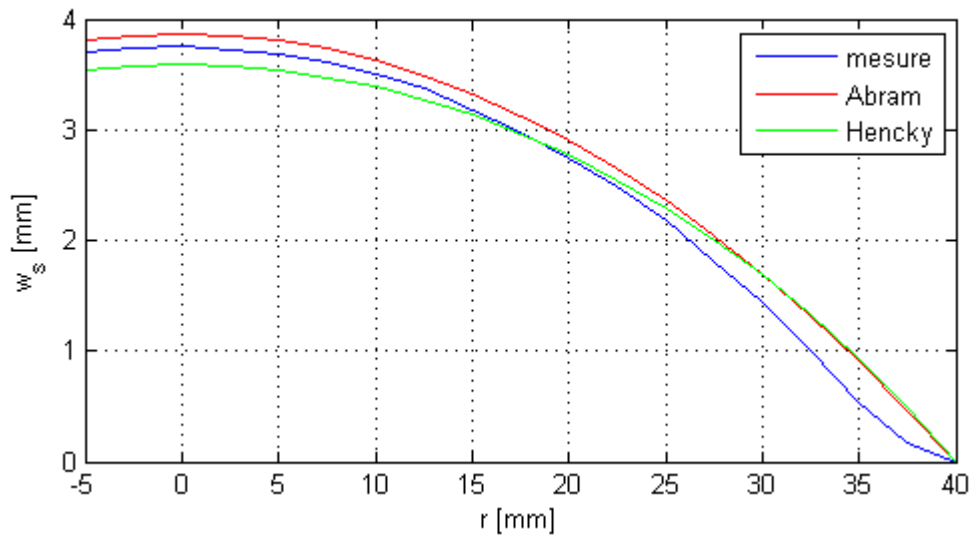


FIG. 3.2 – Comparaison de la déformée statique mesurée et prédite par les modèles d'Abram et d'Hencky à l'ordre 6, pour une cavité de rayon 4 cm et une dépression de 50 mbar.

### 3.3.2 Comportement dynamique

#### 3.3.2.1 les modèles disponibles

Le comportement dynamique d'une membrane plane tendue sur un cadre rigide (conditions de Dirichlet sur le contour de la membrane) dans le vide (pas de couplage avec le milieu ambiant) est bien connu et les modes propres de la membrane peuvent être décrits de manière analytique en fonction de la masse surfacique et de la tension mécanique de la membrane (par exemple [26]). Cette description est parfois utilisée en première approximation, pour étudier le comportement de membranes ou de parois minces.

Toutefois, de nombreuses applications (microphones, tympons ...) nécessitent la prise en compte d'un couplage avec une charge acoustique (cavité, rayonnement, ...) pour obtenir un modèle réaliste. Ledoux et coll. [33] modélise le comportement d'un tympan en partant de l'étude analytique de la

membrane dans le vide puis prend en compte l'influence de la cavité grâce à une méthode de petites perturbations. Dans le cadre de l'étude d'un microphone électrostatique, Zuckerwar [34] modélise le comportement d'une membrane couplée à une mince couche de fluide. Il détermine d'abord les modes de cavité puis il définit arbitrairement une forme de la vitesse de la membrane qu'il modifie en tenant compte des perturbations apportées par les modes de cavité. Ces travaux ont récemment été prolongés par ceux de Guianvarc'h et coll. [35] dans le cadre de l'étude de cavité de couplage acoustique. Baker et coll. [36] étudie la diffusion d'une onde réfléchie par une membrane tendue sur une cavité grâce à un modèle numérique prenant en compte à la fois les modes propres de la membrane et ceux de la cavité. Pour cela il différencie trois cas : la fréquence de l'onde incidente est soit « loin » de tout mode propre, soit « proche » d'un mode propre de membrane, soit encore proche d'un mode de cavité. Hamery et coll. [37], dans le cadre de l'étude de microphone miniature, décrit la pression dans la cavité à l'aide d'un double développement, l'un sur les modes de membrane, l'autre sur les modes axiaux de la cavité.

Des travaux concernant le comportement dynamique d'une membrane non plane sont également disponibles dans la littérature. Lerch [38] et Garner et coll. [32] proposent une telle étude pour une large gamme de fréquences mais négligent les couplages avec une cavité, tandis que Abram [29] et Davies et coll. [39] modélisent le mouvement d'une membrane couplée avec une cavité mais uniquement pour les basses fréquences (jusque la première résonance).

Dans le cadre de l'étude présentée ici, l'hypothèse d'une membrane plane est retenue et le couplage avec les charges acoustiques est pris en compte. Deux modèles sont proposés dans la suite de ce document, le premier reprend la démarche proposée par Hamery et coll. [37], et le second s'appuie sur la méthode utilisée par Guianvarc'h et coll. [35].

### 3.3.2.2 Le système étudié

L'étude dynamique du système vise à prédire les mouvements ( $w_d$ ) d'une membrane piézoélectrique tendue encastree sur sa périphérie et couplée à une cavité lorsqu'un champ électrique alternatif est appliqué (système présenté figure 3.1 mais en considérant la membrane comme plane). Étant données les symétries, le système de coordonnées cylindriques est utilisé avec pour origine le centre de la membrane, et les grandeurs étudiées sont considérées comme indépendantes de  $\theta$ .

L'équation différentielle régissant le mouvement de la membrane est

$$\begin{cases} T_0(\Delta + k_m^2)w_d(r) = p_e(r) - p_i(r, 0) + P_U, \\ w_d(a) = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $w_d$  est le mouvement de la membrane,  $T_0$  est la tension linéique de la membrane (déduite de l'étude statique),  $k_m^2 = \omega^2 \mu_m / T_0$  est le nombre d'onde de la membrane,  $\mu_m$  la masse surfacique de la membrane,  $p_i$  est la pression acoustique dans la cavité,  $p_e$  est la pression acoustique rayonnée dans le milieu, et  $P_U$  est la pression équivalente due à la tension électrique appliquée (terme source) qui s'écrit [32],

$$P_U = \frac{2T_e}{R} = \frac{2U d_{3,m} E_m}{R(1 - \nu_m)}, \quad (3.21)$$

où  $U$  est la tension électrique aux bornes du film,  $d_{3,m}$  est le coefficient piézoélectrique de la membrane,  $E_m$  est le module de Young de la membrane,  $\nu_m$  est son coefficient de Poisson, et  $R$  est son rayon de courbure dont la valeur est déduite de l'étude statique précédente.

Afin de simplifier l'équation différentielle,  $p_e$  est considéré comme étant le produit d'une impédance de rayonnement  $Z_e$  et de la vitesse de la membrane,  $p_e = j\omega Z_e w_d$ , ce qui permet d'intégrer ce terme dans un nombre d'onde modifié,

$$K^2 = k_m^2 - j\omega Z_e / T_0. \quad (3.22)$$

L'équation différentielle à résoudre devient donc

$$\begin{cases} T_0(\Delta + K^2)w_d(r) = P_U - p_i(r, 0). \\ w_d(a) = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Au système d'équations (3.23) est associé l'ensemble des équations qui décrivent le champ acoustique dans la cavité arrière. Deux approches sont proposées pour résoudre le problème couplé ainsi formé.

### 3.3.2.3 Approche différentielle

La description du comportement du transducteur étudié, présentée dans cette section, est essentiellement déduite des travaux de Hamery et coll. [37] portant sur la modélisation de nouveaux transducteurs miniatures aux fréquences élevées (proche ultrasonore). Ces travaux conduisent à un modèle analytique basé sur la résolution des équations fondamentales régissant le comportement du système. Ils prennent en particulier en compte les pertes viscothermiques dans l'air et les phénomènes liés aux couplages entre les différentes parties du système.

L'amplitude du mouvement dans le système étudié est supposée être suffisamment petite pour permettre une linéarisation des équations. Les variables décrivant l'état dynamique et thermodynamique du fluide sont l'écart instantané de pression  $p$ , la vitesse particulière  $\vec{v}$ , et l'écart instantané de température  $\tau$ . Les paramètres caractéristiques des propriétés et de la nature du fluide sont la valeur de la masse volumique  $\rho$ , les chaleurs massiques à pression constante et à volume constant  $C_p$  et  $C_V$ , leur rapport  $\gamma = C_p/C_V$  et le taux d'accroissement de pression par unité d'accroissement de température à volume constant  $\epsilon = (\partial P/\partial T)_\rho$ . Dans le cas où les phénomènes viscothermiques sont pris en compte le mouvement du fluide dans la cavité est régi par les équations [26] :

– équation de Navier-Stokes,

$$\partial_{ct}\vec{v} + \frac{1}{\rho c}\nabla p = \ell_v\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \ell'_v\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{v}), \quad (3.24)$$

où les longueurs caractéristiques sont définies comme suit,

$$\ell_v = \frac{1}{\rho c} \left[ \frac{4}{3}\eta + \zeta \right] \quad , \quad \ell'_v = \frac{\eta}{\rho c}. \quad (3.25)$$

où  $c$  est la vitesse adiabatique du son,  $\eta$  le coefficient de viscosité de cisaillement et  $\zeta$  le coefficient de viscosité de volume.



– équation de conservation de la masse,

$$\rho c \nabla \cdot \vec{v} + \gamma \partial_{ct}(p - \tau) = 0. \quad (3.26)$$

– équation de conduction de la chaleur,

$$(\partial_{ct} - \ell_h \Delta) \tau = \frac{\gamma - 1}{\epsilon \gamma} \partial_{ct} p, \quad (3.27)$$

où la longueur caractéristique est définie par,

$$\ell_h = \frac{\kappa}{\rho c C_p}, \quad (3.28)$$

où  $\kappa$  est le coefficient de conductivité thermique.

Il est possible de séparer la vitesse en deux composantes, la vitesse tourbillonnaire  $\vec{v}_v$ , due à la viscosité, et la vitesse laminaire  $\vec{v}_l$ , due au effets acoustiques et de la conduction de la chaleur ( $\vec{v} = \vec{v}_l + \vec{v}_v$ ). À l'aide des relations

$$\nabla \cdot \vec{v}_v = 0, \quad \nabla \wedge \vec{v}_l = 0, \quad (3.29)$$

il est possible de réécrire les relations (3.24), (3.26) et (3.27) sous la forme du système :

$$\partial_{ct} \tau - \frac{\rho c}{\gamma \epsilon} \nabla \cdot \vec{v}_l = \frac{1}{\epsilon} \partial_{ct} p, \quad (3.30)$$

$$(\partial_{ct} - \ell_h \Delta) \tau = \frac{\gamma - 1}{\epsilon \gamma} \partial_{ct} p, \quad (3.31)$$

$$(\partial_{ct} - \ell_v \Delta) \vec{v}_l = -\frac{1}{\rho c} \nabla p, \quad (3.32)$$

$$(\partial_{ct} - \ell'_v \Delta) \vec{v}_v = 0. \quad (3.33)$$

La conduction thermique et la chaleur spécifique par unité de volume du matériau constituant la membrane et les parois de la cavité étant d'un ordre de grandeur plus élevé que celles du fluide, la variation de température  $\tau$  peut-être considérée comme nulle sur ces surfaces. La composante de la vitesse particulaire normale aux surfaces délimitant la cavité doit être égale à celle des surfaces (nulle sur les surfaces fixes et égale à celle de la membrane en  $z = 0$ ). De plus la composante tangentielle de la vitesse particulaire est nulle sur l'ensemble des surfaces délimitant la cavité. Ces conditions se traduisent par :

$$\forall r, \quad \tau(r, 0) = \tau(r, -l_c) = 0, \quad (3.34)$$

$$\forall r, \quad v_r(r, 0) = v_z(r, -l_c) = 0, \quad (3.35)$$

$$\forall r, \quad v_r(r, -l_c) = 0, \quad (3.36)$$

$$\forall r, \quad v_z(r, 0) = \partial_t w_d(r), \quad (3.37)$$

$$\forall z, \quad v_r(a, z) = v_z(a, z) = 0, \quad (3.38)$$

$$\forall z, \tau(a, z) = 0. \quad (3.39)$$

L'ensemble des équations (3.29) à (3.39) associées à l'équation (3.23) constitue le système à résoudre pour décrire le déplacement de la membrane couplée à la cavité arrière.

D'après l'équation du mouvement de la membrane (3.23), les fonctions propres associées s'écrivent :

$$\begin{cases} (\Delta + K_{1n}^2)\Psi_{1n}(K_{1n}r) = 0, \\ \Psi_{1n}(K_{1n}a) = 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

où l'ensemble des  $\Psi_{1n}(K_{1n}r)$  forme une base orthonormée complète (l'indice « 1 » signifie que la fonction propre à laquelle il se rattache est solution du problème de Dirichlet pour la coordonnée  $r$ ).

Ainsi, la solution générale pour le déplacement de la membrane est écrite sous la forme du développement  $w_d(r) = \sum_n W_n \Psi_{1n}(K_{1n}r)$ , où

$$W_n = \int_0^a \frac{P_U - p_i(r, 0)}{T_0(K^2 - K_{1n}^2)} \Psi_{1n}(K_{1n}r) r dr. \quad (3.41)$$

La condition (3.37), traduisant le couplage entre la membrane et le fluide, doit être vérifiée pour toutes les valeurs de  $r$  sur la surface de la membrane. Cette condition est satisfaite en écrivant la vitesse particulière du fluide normale à l'interface  $z = 0$  sous la forme d'un développement sur les mêmes fonctions que la membrane :

$$v_z(r, 0) = \sum_n u_{1n}(0) \Psi_{1n}(K_{1n}r). \quad (3.42)$$

Ainsi, par prolongement, dans la hauteur de la cavité, pour toute valeur de  $z$ , cette vitesse peut s'écrire

$$v_z(r, z) = \sum_n u_{1n}(z) \Psi_{1n}(K_{1n}r) + V_z(r, z), \quad (3.43)$$

où la fonction  $V_z(r, z)$  doit être égale à zéro en  $z = 0$  ( $V_z(r, 0) = 0$ ).

Dès lors,  $V_z$  peut être développé sur les fonctions propres orthonormées  $u_{2n}(k_{2n}z)$  solutions du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} (\partial_{zz} + k_{2n}^2)u_{2n}(k_{2n}z) = 0, \\ u_{2n}(k_{2n}0) = 0, \\ u_{2n}(-k_{2n}l_c) = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Ainsi  $V_z$  s'écrit

$$V_z(r, z) = \sum_n \Psi_{2n}(r) u_{2n}(k_{2n}z). \quad (3.45)$$

Le potentiel des vitesses est relié à la vitesse laminaire par la relation  $\vec{v}_l = \nabla \Phi$ .

L'ensemble des grandeurs définissant le propagation (le potentiel des vitesses  $\Phi$ , la variation de pression  $p$  et la variation de température  $\tau$ ) sont la somme d'un terme acoustique (indice  $a$ , ou plus loin par l'indice de sommation  $l = 1$ ) et d'un terme « entropique » dû à la conduction de la chaleur (indice  $h$ , ou plus loin par l'indice de sommation  $l = 2$ ) et sont solutions des équations de propagation,

$$(\Delta + k_a^2)\Phi_a = 0, \quad (\Delta + k_h^2)\Phi_h = 0, \quad (3.46)$$

où

$$k_a^2 = \frac{k^2}{1 + jk(\ell_v + \ell_h(\gamma - 1)) - k^2\ell_h(\gamma - 1)(\ell_h - \ell_v)}, \quad (3.47)$$

et

$$k_h^2 = \frac{-jk}{\ell_h - jk\ell_h(\gamma - 1)(\ell_h - \ell_v)}, \quad (3.48)$$

où  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde, les quantités  $k_a$  et  $k_h$  représentent les nombres d'onde associés respectivement aux mouvements acoustique et entropique.

Compte tenu de l'équation de  $v_z$  ((3.43) et (3.45)) le potentiel des vitesses est développé de la manière suivante,

$$\Phi(r, z) = \sum_l \sum_n \Phi_{ln}(r, z), \quad (3.49)$$

où

$$\Phi_{ln}(r, z) = \Phi_{1ln}(k_{1ln}z)\Psi_{1n}(K_{1n}r) + \Phi_{2n}(k_{2n}z)\Psi_{2ln}(K_{2ln}r). \quad (3.50)$$

avec  $k_l^2 = k_{1ln}^2 + K_{1n}^2 = k_{2n}^2 + K_{2ln}^2$ , et  $u_{2n}$  est la dérivée par rapport à  $z$  de  $\Phi_{2n}$ .

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  compte tenu de la géométrie du système, le problème est indépendant de  $\theta$  et les fonctions propres normalisées s'écrivent,

$$\begin{cases} \Psi_{1n}(K_{1n}r) = N_{1n} J_0(K_{1n}r) = 0, \\ J_0(K_{1n}a) = 0, \end{cases} \quad (3.51)$$

où

$$N_{1n} = \frac{\sqrt{2}}{a |J_1(K_{1n}a)|}, \quad (3.52)$$

et

$$\begin{cases} \Phi_{2n}(k_{2n}z) = N_{2n} \cos(k_{2n}z) = 0 \\ k_{2n} = \frac{n\pi}{l_c} \end{cases} \quad (3.53)$$

où

$$N_{2n} = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0n}}{l_c}} \quad (3.54)$$

Le choix des termes  $\Phi_{1ln}$  et  $\Psi_{2ln}$  doit permettre de résoudre l'équation de propagation (3.46), ils sont de la forme,

$$\Phi_{1ln}(k_{1ln}z) = A_{1ln} \cos(k_{1ln}(z + l_c/2)) + B_{1ln} \sin(k_{1ln}(z + l_c/2)), \quad (3.55)$$

et

$$\Psi_{2ln}(K_{2ln}r) = A_{2ln} J_0(K_{2ln}r). \quad (3.56)$$

D'après les équations du mouvement du fluide (équations (3.30) à (3.33)), il est aisé de montrer que la variation de température est donnée par

$$\tau(r, z) = -\frac{j\rho c}{k\gamma\epsilon} \sum_l \sum_n \alpha_l k_l^2 \Phi_{ln}(r, z), \quad (3.57)$$

où

$$\alpha_l = \frac{\gamma - 1}{1 - j\gamma\ell_h k_l^2/k}, \quad (3.58)$$

et la pression par,

$$p(r, z) = -\frac{j\rho c}{k\gamma} \sum_l \sum_n (\alpha_l + 1) k_l^2 \Phi_{ln}(r, z). \quad (3.59)$$

De la même manière à l'aide des équations (3.33), (3.42) et (3.43) la vitesse tourbillonnaire suivant  $z$  ( $v_{vz}$ ) est de la même forme,

$$v_{vz}(r, z) = \sum_n [\Phi_{1vn}(k_{1vn}z) \Psi_{1n}(K_{1n}r) + \Phi_{2n}(k_{2n}z) \Psi_{2vn}(K_{2vn}r)], \quad (3.60)$$

avec  $k_v^2 = k_{1vn}^2 + K_{1n}^2 = k_{2n}^2 + K_{2vn}^2 = -i\rho\omega/\eta$ . Afin de résoudre l'équation  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  la composante suivant  $r$  de  $v_v$  est donnée par

$$v_{vr}(r, z) = \sum_n \left[ \frac{1}{K_{1n}^2} \partial_z \Phi_{1vn}(k_{1vn}z) \nabla \Psi_{1n}(K_{1n}r) - \frac{k_{2n}^2}{K_{2vn}^2} \Phi_{2n}(k_{2n}z) \nabla \Psi_{2vn}(K_{2vn}r) \right]. \quad (3.61)$$

La résolution du système formé par l'ensemble de ces équations et les conditions aux limites est détaillée dans l'annexe C et permet de déterminer les coefficients  $W_n$ ,

$$W_n = P_U S_{J1n} \frac{\sqrt{2}}{K_{1n} G_n} + j\omega P_U \frac{\mu_n}{G_n} \frac{\sum_n \frac{4b_{0n}}{aNG_n K_{1n}}}{1 - j\omega \sum_n S_{J1n} \frac{2\sqrt{2}b_{0n}\mu_n}{aNG_n}}, \quad (3.62)$$

où les coefficients  $N, G_n, b_{0n}, \mu_n$  sont détaillés en annexe C. Finalement le déplacement de la membrane est obtenu grâce à l'expression

$$w_d(r) = \sum_n W_n \Psi_{1n}(K_{1n}r). \quad (3.63)$$

### 3.3.2.4 Approche intégrale

La description du comportement de la cavité et de son influence sur les vibrations de la membrane présentée ici, est inspirée des travaux de Guianvarc'h et coll. [35] visant à décrire le champ de pression à l'intérieur d'une cavité de couplage acoustique utilisée pour l'étalonnage de microphones par la méthode de réciprocité. Ces travaux reposent sur une formulation intégrale du problème aux limites de la cavité. Plus particulièrement, ils prennent en compte l'existence de modes (radiaux) supérieurs négligés par la méthode classique qui repose uniquement sur la propagation d'ondes planes dans la cavité.

Les phénomènes viscothermiques sont négligés dans la description du fluide utilisée dans ce modèle. De plus il s'appuie sur une description en vitesse du mouvement de la membrane, l'équation (3.23) devient,

$$\begin{cases} T_0(\Delta_r + K^2)v_d(r) = j\omega(P_U - p_i(r, 0)) \\ v_d(a) = 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

La pression acoustique dans la cavité est donnée grâce à la formulation de Green, sachant qu'il n'existe pas de sources à l'intérieur de la cavité, la pression interne sur la membrane est,

$$p_i(r, \theta, 0) = -j\rho\omega \iint_S G(r, \theta, 0; r_0, \theta_0, 0) v_d(r_0, \theta_0) dS_0, \quad (3.65)$$

en faisant usage d'une fonction de Green satisfaisant les conditions aux frontières

$$\partial_{n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, z = 0 \quad (3.66)$$

$$\partial_{n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, z = -l_c \quad (3.67)$$

$$\partial_{n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, r = a. \quad (3.68)$$

La fonction de Green associée au problème s'écrit (cf. annexe D)

$$G(r, z; r_0, z_0) = \sum_{\nu} -\frac{\cos(k_{z0\nu}(z - l_c))}{k_{z0\nu} \sin(k_{z0\nu}l_c)} \frac{1}{\pi a^2 J_0^2(\gamma_{0\nu})} J_0(k_{w0\nu}r) J_0(k_{w0\nu}r_0), \quad (3.69)$$

et celle donnant l'expression de la pression interne sur la membrane est

$$G(r, 0; r_0, 0) = -\frac{1}{S_m} \sum_{\nu} \frac{J_0(k_{w0\nu}r) J_0(k_{w0\nu}r_0)}{k_{z0\nu} \tan(k_{z0\nu}l_c) J_0^2(\gamma_{0\nu})} \quad (3.70)$$

où  $S_m = \pi a^2$ , l'obtention de cette fonction de Green étant détaillée en annexe D.

De façon à estimer la solution de l'équation (3.64), la vitesse de la membrane  $v_d(r)$  est exprimée à l'aide de l'expression obtenue dans le cas d'une membrane oscillant dans le vide [32], à laquelle on ajoute l'effet de la lame d'air dans la cavité à l'arrière de la membrane,

$$v_d(r) = V_d \left[ 1 - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} \right] + \sum_{\nu \neq 0} U_{\nu} [J_0(k_{w0\nu}r) - J_0(k_{w0\nu}a)]. \quad (3.71)$$

Dans cette expression, le premier terme correspond à la réponse de la membrane dans le vide,  $K$  étant le nombre d'onde modifié de la membrane (éq. (3.22)), et le deuxième terme décrit l'effet des modes de cavité sur la membrane,  $k_{w0\nu}$  étant les valeurs propres associées à la cavité et satisfaisant la condition à la frontière ( $k_{w0\nu} = \gamma_{0\nu}/a$  où  $\gamma_{0\nu}$  représente le  $(\nu + 1)$ ème zéro de la dérivée première de la fonction de Bessel  $J_0$ ). L'expression de la pression acoustique dans la cavité au niveau de la membrane est donc

$$\begin{aligned} \frac{j\omega}{T_0} p_i(r, 0) &= -\frac{\omega^2 \rho}{T_0} \frac{1}{k_{z00} \tan(k_{z00}l_c)} \left[ V_d \left( 1 - \frac{2 J_1(Ka)}{Ka J_0(Ka)} \right) - \sum_{\nu' \neq 0} U_{\nu'} J_0(k_{w0\nu'}a) \right] \\ &- \frac{\omega^2 \rho}{T_0} \sum_{\nu \neq 0} \frac{J_0(k_{w0\nu}r)}{k_{z0\nu} \tan(k_{z0\nu}l_c)} \left[ -\frac{2\pi V_d Ka J_1(Ka)}{S_m(K^2 - k_{w0\nu}^2) J_0(Ka) J_0(k_{w0\nu}a)} + U_{\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

La résolution de ces équations, détaillée en annexe D, permet de déterminer l'expression de la vitesse de la membrane,

$$v_d(r) = \frac{j\omega P_U}{T_0} \frac{1 - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} + \sum_{\nu \neq 0} \frac{\alpha_{\nu}}{\beta_{\nu}} (J_0(k_{w0\nu}r) - J_0(k_{w0\nu}a))}{K^2 - K_0^2 - \sum_{\nu \neq 0} \beta_0 \frac{\alpha_{\nu}}{\beta_{\nu}} J_0(k_{w0\nu}a)}, \quad (3.73)$$

où les termes  $\alpha_{\nu}$ ,  $\beta_{\nu}$  et  $K_0$  sont donnés à l'annexe D.

### 3.4 Évaluation des modèles

Afin de pouvoir évaluer les modèles proposés ci-dessus, un prototype élémentaire est réalisé et caractérisé (FIG. 3.3). Ce prototype est composé d'une cavité de 8 cm de diamètre et de 2 cm de profondeur. Un capillaire est percé en paroi afin de pouvoir effectuer un vide partiel à l'intérieur de la cavité. Le film PVDF plaqué sur cette cavité est un film bi-étiré de 25  $\mu\text{m}$  d'épaisseur et métallisé sur ces deux faces. L'avantage du film bi-étiré est de pouvoir considérer que son comportement est isotrope suivant toutes les directions parallèles à sa surface.



FIG. 3.3 – Prototype de validation du modèle démonté.

La pression acoustique à l'intérieur de la cavité est mesurée à l'aide d'un microphone de type Knowles fg-3329 pouvant être déplacé sur un rayon à mi hauteur de la cavité, afin de pouvoir obtenir le profil radial de pression.

Les paramètres du film PVDF utilisés dans les modèles sont donnés dans le tableau 3.1.

Paramètres	$d_{3,m}$ [pC/N]	$E_m$ [GPa]	$\nu_m$
Données fabricant	3 - 5	1 - 4	0,3 - 0,5
Valeur retenue	5	3,1	0,3

TAB. 3.1 – Récapitulatif des paramètres du film PVDF,  $d_{3,m}$  est le coefficient piézoélectrique du film décrivant la force perpendiculaire à l'épaisseur obtenue lorsqu'une champ électrique suivant l'épaisseur est appliqué,  $E_m$  est le module de Young du film et  $\nu_m$  son coefficient de Poisson.

Les propriétés du film PVDF sont communiquées par le fabricant, mais restent sujettes à caution. Par ailleurs, la tension mécanique du film et le rayon de courbure sont des inconnues du problème.

N'ayant pas la possibilité de mesurer les propriétés mécaniques du film, elles peuvent toutefois être réévaluées à l'aide des résultats comparés des modèles statiques et des mesures de déformés statiques

pour plusieurs différences de pressions entre l'avant et l'arrière du film. Pour cela une méthode des moindres carrés est utilisée pour minimiser l'erreur entre la flèche de la membrane mesurée et celle issue des modèles présentés au § 3.3.1 pour différents couples de module de Young et coefficient de Poisson. Les valeurs issues de cette approche ( $E_m = 3,1$  GPa et  $\nu_m = 0,3$ ) sont utilisées dans les modèles de comportement dynamique.

La vitesse de la membrane du prototype est mesurée à l'aide d'un vibromètre laser à balayage *PSV-400* de Polytech. Il permet de relever la vitesse en fonction de la fréquence en différents points de la membrane, et de visualiser le mouvement de celle-ci. Les modèles sont ensuite comparés à ces mesures, afin de vérifier leur justesse. Étant donné que les modes azimutaux (suivant  $\theta$ ) sont négligés dans les modèles proposés, seule la vitesse au centre de la membrane est considérée.

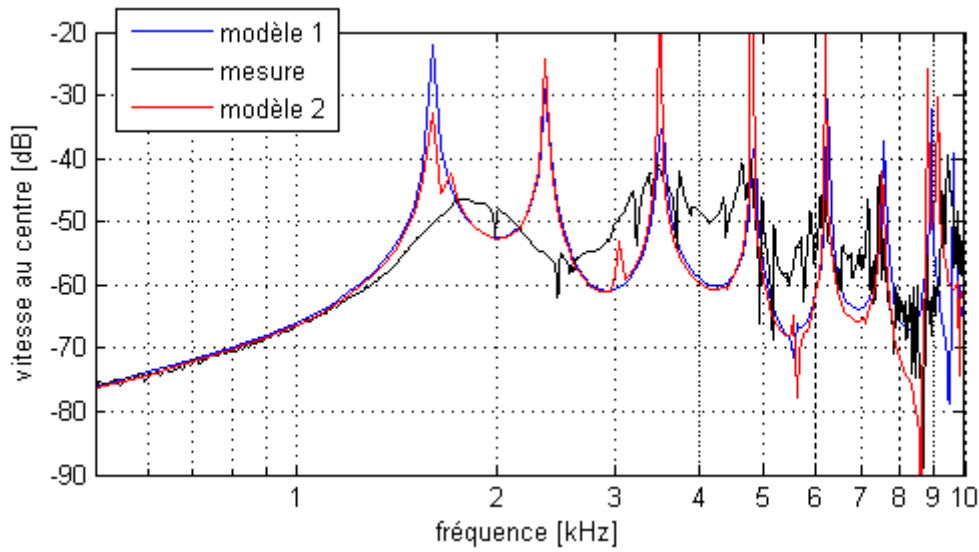


FIG. 3.4 – Comparaison de la vitesse au centre mesurée et des modèles pour  $Ze = 0$ .

La figure 3.4 montre la vitesse au centre mesurée d'une part, et calculée d'autre part lorsque l'impédance de rayonnement n'est pas prise en compte dans les modèles, ce qui explique la nature très résonante des courbes de réponses issues des deux modèles physiques. Les réponses en vitesse obtenues à l'aide des deux modèles permettent de calculer la vitesse moyenne sur la surface de la membrane (piston moyen) et ainsi d'utiliser dans les modèles l'impédance de rayonnement caractéristique du piston [26],

$$Z_e = \rho c \left( 1 - \frac{J_1(ka)}{ka} + j \frac{S_1(2ka)}{ka} \right), \quad (3.74)$$

où  $J_1$  est la fonction de Bessel de rang 1 et  $S_1$  la fonction de Struve de rang 1. Les résultats obtenus montrent que la prise en compte du rayonnement ajoute des pertes significatives au système et permet de prédire le comportement dynamique de la membrane pour des fréquences inférieures à la première fréquence de résonance (cf. FIG. 3.5). Pour les fréquences supérieures, il est difficile d'accorder de la confiance au modèle.

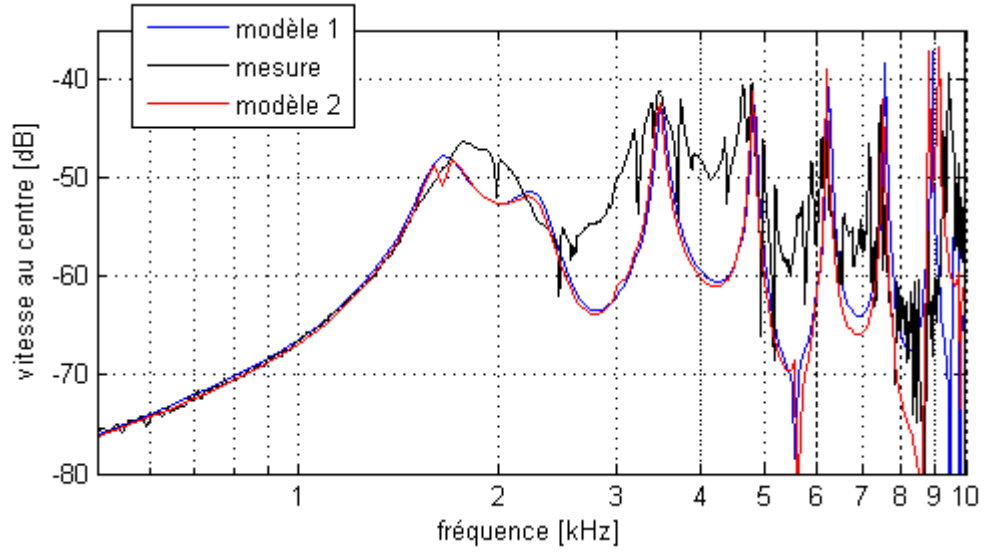


FIG. 3.5 – Comparaison de la vitesse au centre lors de la prise en compte de l'impédance de rayonnement.

Les différences observées entre les réponses calculée et mesurée sont analysées grâce à l'observation des déformées de la membrane. Lorsque les mouvements de la membrane sont visionnés à l'aide du vibromètre laser à balayage, il apparaît que les modes observés sont des combinaisons de plusieurs modes y compris des modes azimutaux. Les différences entre les modèles et la mesure peuvent provenir de ces combinaisons. Les modes azimutaux n'étant pas rayonnant en champ lointain (la vitesse moyenne sur la surface de la membrane, associé à ces modes azimutaux, est nulle), il s'avère intéressant de comparer la pression rayonnée mesurée et celle calculée à l'aide d'un modèle de rayonnement simplifié utilisant l'intégrale de Rayleigh [26].

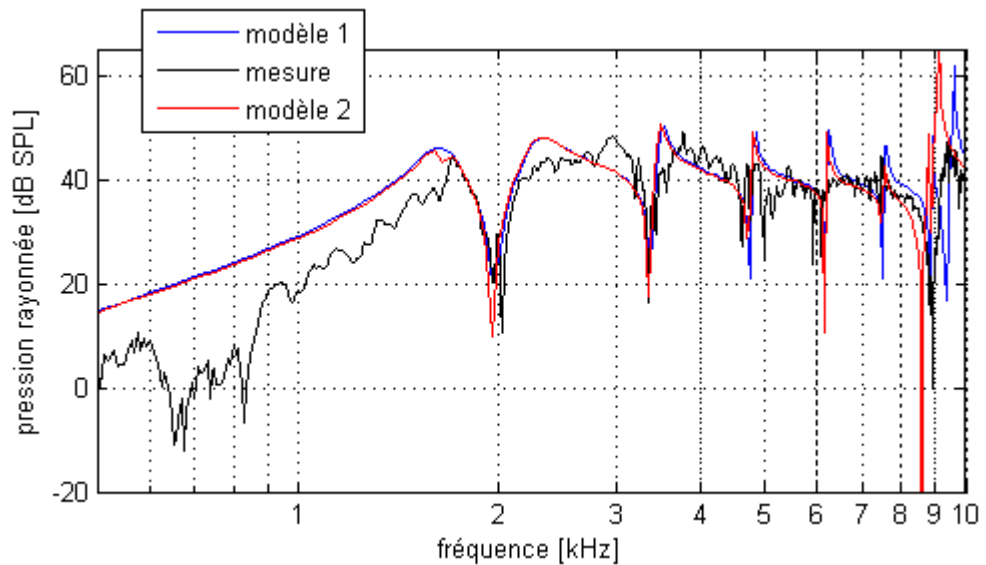


FIG. 3.6 – Pression rayonnée à 1,5 m mesurée et calculée à l'aide des modèles développés.



La figure 3.6 présente la pression rayonnée (en dB SPL) mesurée et calculée à l'aide des deux modèles à 1,5 m du prototype, pour une excitation d'amplitude 1 V. Les modèles montrent une bonne tendance pour les basses fréquences, les niveaux calculés étant néanmoins légèrement supérieurs aux niveaux mesurés (6 à 10 dB d'écart). Les modèles développés semblent suffisants pour prédire le comportement du transducteur au voisinage des trois premières résonances. Cependant, lorsque le nombre de modes augmente, des différences notables apparaissent. Afin d'améliorer encore ces modèles il serait sans doute nécessaire de prendre en compte la déformée statique de la membrane dans l'équation différentielle du mouvement et la description de la cavité, mais cela augmenterait la complexité des modèles, alors que les résultats obtenus semblent suffisants pour effectuer un dimensionnement dans le cadre de notre étude.

### 3.5 Étude paramétrique - Dimensionnement

Une fois évalués, les modèles sont utilisés afin d'étudier l'influence de différents paramètres (dimensions de la cavité, qualité du vide à l'intérieur de la cavité) sur la fréquence des deux premiers modes de résonance du transducteur, afin de pouvoir dimensionner le transducteur de manière à ce qu'il puisse répondre au cahier des charges.

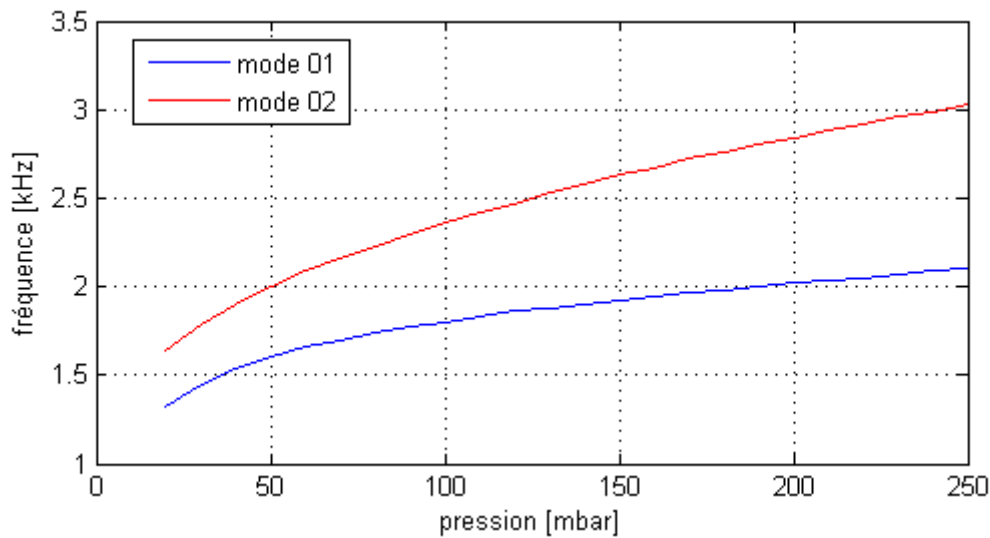


FIG. 3.7 – Influence de la dépression sur la fréquence des deux premiers modes d'un transducteur de 40 mm de rayon avec une cavité de 20 mm de profondeur.

L'influence de la différence de pression est présentée par la figure 3.7. La tension mécanique du film augmentant avec la dépression, les fréquences de résonance augmentent également. Le seul fait d'augmenter la différence de pression ne suffit néanmoins pas à atteindre le domaine de fréquence souhaité. En effet, les modèles ne prennent pas en compte la limite d'élasticité du film et une fois le domaine plastique atteint les propriétés mécaniques du film sont susceptibles de changer. Cette limite

d'élasticité n'est pas communiquée par le fabricant et est difficile à prévoir.

Les autres paramètres étudiés pour un type de film donné sont le rayon de la cavité (FIG. 3.8) et sa profondeur (FIG. 3.9). Pour une dépression donnée (ici 50 mbar), la fréquence des résonances augmente lorsque le rayon diminue. Concernant la profondeur la figure 3.9 montre que la fréquence

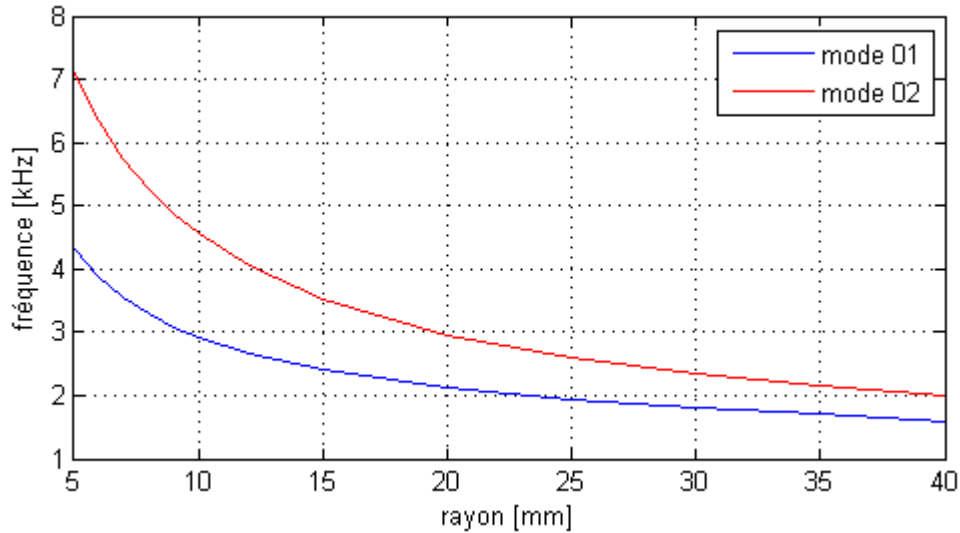


FIG. 3.8 – Influence du rayon sur la fréquence des deux premiers modes d'un transducteur avec une cavité de 20 mm de profondeur et une différence de pression de 50 mbar.

des résonance augmente jusqu'à une certaine valeur de la profondeur, dépendant du mode observé (environ 9 mm pour le premier mode et 7 mm pour le second) puis la fréquence diminue lorsque la profondeur augmente. Il faut toutefois garder à l'esprit que, étant donné que le film est aspiré à l'intérieur de la cavité par la différence de pression, la profondeur de cavité doit être suffisante pour éviter que le film n'entre en contact avec le fond rigide de la cavité. Il faut noter également que, dans le cas d'une profondeur faible, l'hypothèse d'un film plan avancée pour l'élaboration des modèles n'est plus justifiée si la flèche du film n'est plus négligeable devant la profondeur de cavité.

Après différents essais, l'utilisation des modèles pour dimensionner le transducteur montre (FIG. 3.10) que pour une cavité de rayon 2 mm et de profondeur 3 mm, et en appliquant une différence de pression de 250 mbar, la deuxième résonance répond au cahier des charges à savoir une fréquence de l'ordre de 30 kHz. Toutefois, pour obtenir un débit volumique de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$  il faut augmenter le niveau d'environ 47 dB, soit appliquer une tension électrique de l'ordre de 225 V. Cette tension est théoriquement applicable. En effet la tension électrique de claquage du PVDF est d'environ 200 kV/mm, ce qui correspond à une tension de 5 kV pour un film d'une épaisseur de 25  $\mu\text{m}$ .

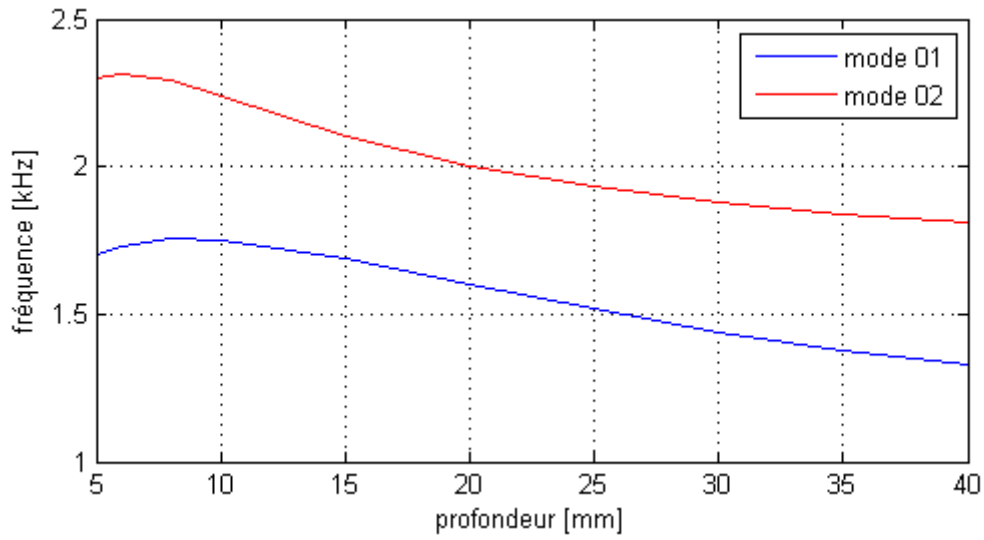


FIG. 3.9 – Influence de la profondeur de cavité sur la fréquence des deux premiers modes d'un transducteur de 40 mm de rayon avec une dépression de 50 mbar.

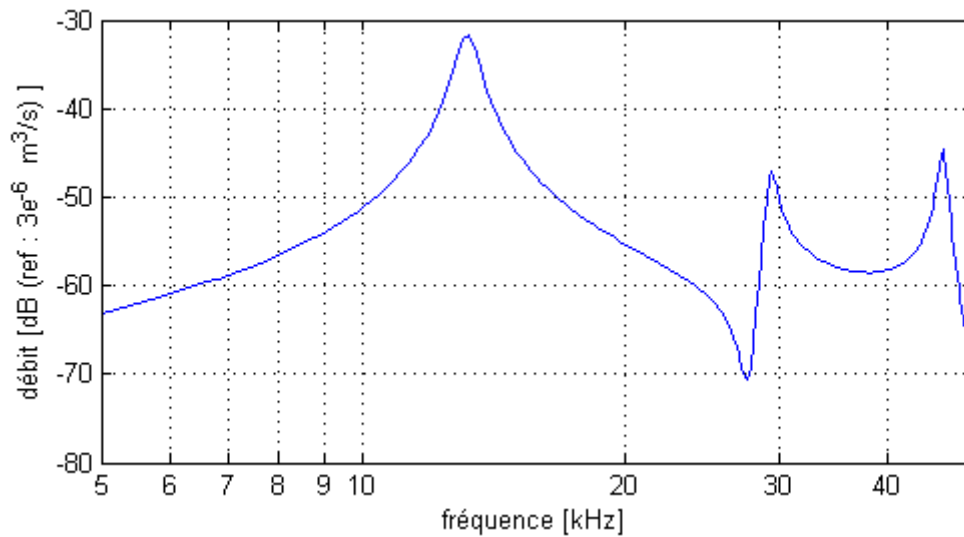


FIG. 3.10 – Débit volumique en fonction de la fréquence d'un transducteur de rayon 2 mm et de profondeur 3 mm, pour une dépression de 250 mbar et une tension d'excitation de 1 V, prédit par les modèles (en dB, référence  $3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ ).

## 3.6 Conclusion

Ce chapitre présente deux modèles physiques décrivant les transducteurs à base de film PVDF tendu sur une cavité et soumis à une différence de pression statique. Après avoir été évalués à l'aide d'un prototype de transducteur, ces modèles ont permis de mettre en évidence l'influence de différents paramètres tels que la différence de pression et les dimensions de la cavité sur la fréquence des résonances du transducteur. Ces modèles peuvent être également utilisés pour vérifier l'effet d'une variation d'épaisseur du film ou d'un changement de ces propriétés mécaniques (utilisation d'autres matériaux que le PVDF).

L'utilisation de ces modèles pour le dimensionnement du transducteur a conduit au choix d'une cavité de 2 mm de rayon et de 3 mm de profondeur, dans laquelle il règne une dépression relative de 250 mbar. Étant donné le choix de l'agencement de l'antenne formée par ces transducteurs (cf. chapitre 2) la tension électrique à appliquer pour obtenir un niveau de pression acoustique rayonnée suffisant et d'environ 225 V. En pratique, afin de diminuer cette tension, il est possible d'augmenter le nombre de sources de l'antenne et par la même occasion sa taille et sa directivité.



## Chapitre 4

# Conditionnement du signal

Les deux chapitres précédents (2 et 3) ont permis de définir la configuration géométrique du réseau de sources et le débit nécessaire à chacune de ces sources pour respecter les contraintes définies au début de l'étude. Les caractéristiques du transducteur électroacoustique étant à priori définies, ce chapitre vise à présenter les différentes méthodes de conditionnement du signal envisageables pour réduire les distorsions dues à la propagation non linéaire dans l'air. La première partie présente les méthodes usuellement utilisées dans la littérature. La deuxième partie définit un indicateur permettant de caractériser la distorsion de signaux multi-composantes et ainsi de comparer facilement différents traitements pour enfin définir celui à utiliser.

### 4.1 Méthodes existantes

Nous rapportons ici les diverses techniques de conditionnement du signal présentées dans la littérature pour réduire les distorsions introduites par l'auto-démodulation. Comme le montre le chapitre 1, si une simple modulation d'amplitude est appliquée à une fréquence porteuse ultrasonore, dont l'amplitude de pression à l'émission (sur le transducteur) est  $p_\omega$ , par le signal audible à produire  $f(\omega_d\tau)$ , le son auto-démodulé dans l'air se traduit par la pression acoustique

$$p_d(z, \tau, \theta = 0) = p_\omega^2 \frac{K}{z} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} f^2(\omega_d\tau) \quad (4.1)$$

où  $K$  est un coefficient qui dépend des propriétés du milieu (le coefficient d'absorption de l'onde dans le milieu, le coefficient de non-linéarité, sa masse volumique au repos et la célérité du son) et de la surface d'émission,  $z$  est la distance entre l'émetteur et le récepteur,  $\omega_d$  est la pulsation du signal audible (signal démodulé) et  $\tau$  est la coordonnée temporelle retardée ( $\tau = t - z/c_0$ ). L'équation (4.1) montre que le signal généré contient des distorsions gênantes (ordre 2) pour la compréhension de l'information transmise [18]. Toutefois les phénomènes mis en oeuvre étant connus, différents prétraitements visant à améliorer la restitution du signal sont envisageables. Il est important de noter que ce chapitre ne s'intéresse qu'à la correction des distorsions dues à la présence du carré de l'enveloppe du signal modulé

$f^2(\omega_d \tau)$  présent dans l'équation (4.1), la dérivée seconde par rapport au temps étant compensée par deux filtres intégrateurs du premier ordre (FIG. 4.1).

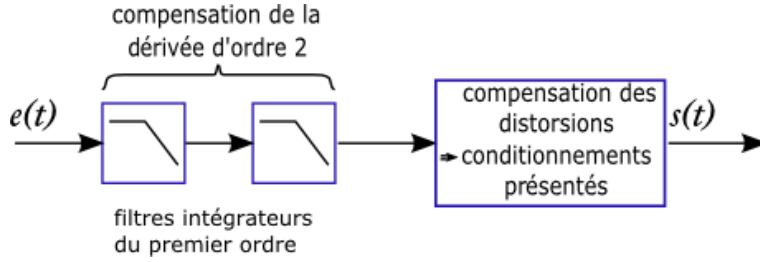


FIG. 4.1 – Principe du traitement du signal avant l'émission.

#### 4.1.1 Application d'une racine carrée

Afin de pouvoir transmettre des signaux complexes tels que la parole, Aoki et Kamakura [40, 41, 42] se basent sur les résultats obtenus par Berkta (éq. (4.1)) qui met en évidence que le signal démodulé est proportionnel au carré de l'enveloppe de l'onde émise. Ils proposent d'utiliser la racine carrée du signal à transmettre avant de moduler la porteuse (FIG. 4.2). Cette méthode est la plus citée dans la littérature. Par exemple Blackstock [43] et Pompei [44] l'utilisent également pour réduire la distorsion des antennes paramétriques auxquelles ils s'intéressent.

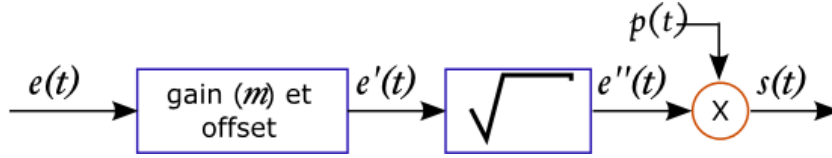


FIG. 4.2 – Conditionnement basé sur l'équation de Berkta.  $e(t)$  est le signal entrant,  $p(t)$  la porteuse et  $s(t)$  le signal émis.

Pour un signal entrant  $e(t) = A \cos(\omega t)$  de pulsation  $\omega$  et une porteuse  $p(t) = \cos(\omega_p t)$  de pulsation  $\omega_p$ , l'application d'un gain  $m$  (coefficient de modulation compris entre 0 et 1) et d'un offset  $A$  à  $e(t)$  conduit à réaliser le signal  $e'(t) = A[1 + m \cos(\omega t)]$ . L'utilisation d'un opérateur racine carrée permet de construire le signal  $e''(t) = \sqrt{A[1 + m \cos(\omega t)]}$ . Le signal de sortie du traitement s'écrit alors :

$$s_{rc}(t) = \cos(\omega_p t) \sqrt{A[1 + m \cos(\omega t)]}. \quad (4.2)$$

Il est intéressant de remarquer que le signal  $s_{rc}(t)$  est théoriquement à largeur spectrale infinie. Cet effet peut être illustré à l'aide d'un développement de Taylor dans le cas où le coefficient de modulation  $m$  est petit devant 1. Dans ce cas, le signal  $s_{rc}(t)$  s'écrit, à l'aide d'un développement à l'ordre 5 :

$$s_{rc}(t) \approx \cos(\omega_p t) \sqrt{A} \left[ 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \right] \quad (4.3)$$

où  $x = m \cos(\omega t)$ . Le signal  $s_{rc}(t)$  s'écrit donc

$$s_{rc}(t) \approx \cos(\omega_p t) \sqrt{A} \left[ 1 - m^2 \left( \frac{1}{16} + \frac{15m^2}{1024} \right) + \left( \frac{1}{2} + \frac{3m^3}{64} \right) \cos(\omega t) - m^2 \left( \frac{1}{16} + \frac{5m^2}{256} \right) \cos(2\omega t) + \frac{m^3}{64} \cos(3\omega t) - \frac{5m^4}{1024} \cos(4\omega t) \right]. \quad (4.4)$$

Cette équation montre bien l'apparition d'harmoniques. Bien que leur contribution diminue rapidement lorsque leur rang augmente, une bande passante suffisante est nécessaire pour obtenir une forme d'onde proche de la forme d'onde du signal  $s_{rc}(t)$ . Dans le cas où le coefficient de modulation  $m$  est proche de 1, seule une méthode numérique permet d'estimer le spectre de  $s_{rc}(t)$ .

En conclusion, l'utilisation d'un opérateur racine carrée nécessite d'utiliser en théorie un transducteur à bande passante infinie, ce qui présente un inconvénient majeur.

#### 4.1.2 Modulation à Bande Latérale Unique (BLU)

Afin d'essayer de s'affranchir de la difficulté occasionnée par la méthode utilisant la racine carrée (nécessité d'un transducteur à bande passante infinie), la deuxième des méthodes proposées s'appuie sur l'hypothèse que la non-linéarité de propagation de l'onde dans l'air se traduit par l'interaction des différentes composantes fréquentielles de cette onde (et non sur l'équation de Berkay (4.1)). En présence d'un signal de pulsation  $\omega_p$  modulé en amplitude par un signal de pulsation  $\omega$ ,  $e(t) = \cos \omega_p t (1 + m \cos \omega t)$ , l'interaction indésirable entre la bande latérale supérieure à la pulsation  $(\omega_p + \omega)$  et la bande latérale inférieure  $(\omega_p - \omega)$  crée des distorsions [18] (FIG. 4.3).

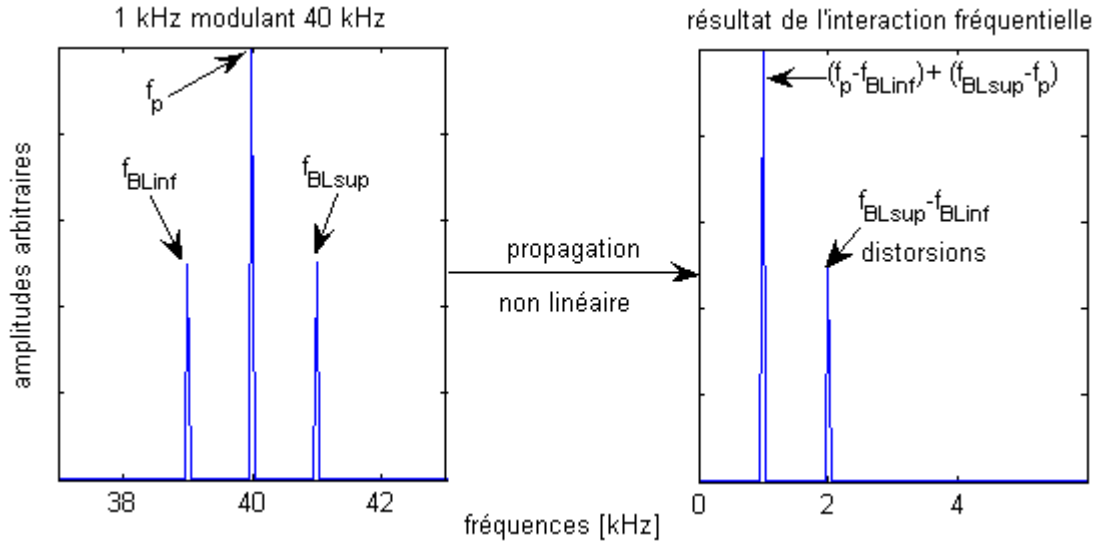


FIG. 4.3 – Distorsions dues à l'interaction fréquentielle ( $f_p$  = fréquence de la porteuse,  $f_{BLinf}$  = fréquence de la composante de la bande latérale inférieure,  $f_{BLsup}$  = fréquence de la composante de la bande latérale supérieure).

Afin de limiter les distorsions, une modulation d'amplitude à bande latérale unique (BLU) est



utilisée, ce qui présente également l'intérêt de diviser par deux la bande passante nécessaire pour transmettre le signal d'entrée  $e(t)$  de la BLU [45, 46].

Le principe de la BLU est illustré à la FIG. 4.4 . Le modèle de ce système est ici écrit en considérant un signal d'entrée  $e(t) = A \cos(\omega t)$  de pulsation  $\omega$ . La transformée de Hilbert du signal  $e(t)$  est tout d'abord calculée pour obtenir le signal complexe  $E(t) = A \cos(\omega t) + jA \sin(\omega t)$  associé à  $e(t)$ . L'application d'un gain  $m$  (coefficient de modulation compris entre 0 et 1), puis d'un offset de même valeur que l'amplitude de  $e(t)$  au signal complexe  $E(t)$ , conduit à  $E'(t) = A(1 + m \cos(\omega t) + jm \sin(\omega t))$ . Les signaux  $e_1(t) = A(1 + m \cos(\omega t))$  et  $e_2(t) = Am \sin(\omega t)$  sont ensuite obtenus en séparant les parties réelle et imaginaire de  $E'(t)$ . L'utilisation d'une porteuse  $p_1(t) = B \cos(\omega_p t)$  de pulsation  $\omega_p$  et de sa version déphasée de  $\pi/2$ ,  $p_2(t) = B \sin(\omega_p t)$  permet d'obtenir deux signaux  $e_1(t)p_2(t) = AB \sin(\omega_p t)(1 + m \cos(\omega t))$  et  $e_2(t)p_1(t) = ABm \cos(\omega_p t) \sin(\omega t)$  modulés en amplitude respectivement par le signal  $e_1(t)$  avec transmission de la porteuse et par le signal  $e_2(t)$  sans transmission de la porteuse. L'addition de ces deux signaux modulés permet d'obtenir le signal de sortie de la BLU :

$$s_{blu}(t) = AB[\sin(\omega_p t) + m \sin((\omega_p + \omega)t)], \quad (4.5)$$

comprenant une seule des bandes latérales du spectre (ici la bande supérieure).

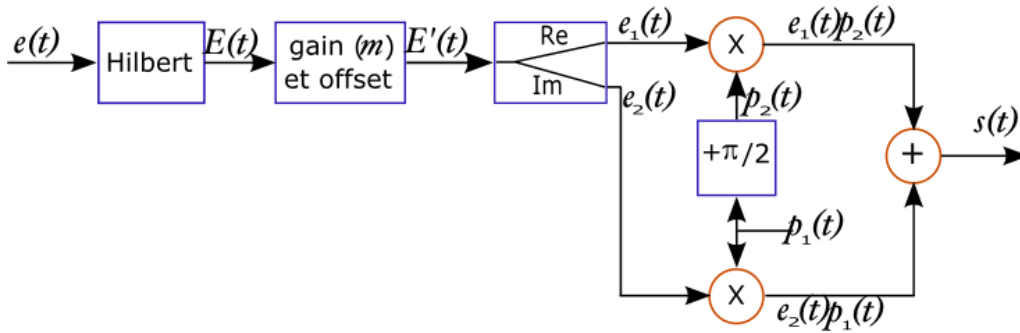


FIG. 4.4 – Conditionnement basé sur la BLU ( $e(t)$  est le signal entrant,  $p(t)$  la porteuse et  $s(t)$  le signal émis).

#### 4.1.3 Pseudo-Bande Latérale Unique

Il est possible d'obtenir une « pseudo-BLU » en filtrant une des bandes de fréquence du signal modulé en amplitude par une modulation classique. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser un filtre d'ordre suffisamment élevé pour que l'une des bandes soit effectivement négligeable devant l'autre. Il est intéressant de noter que, suivant sa réponse fréquentielle, le transducteur peut également faire office de filtre.

## 4.2 Performances comparées des traitements

L'objectif de ce paragraphe est de comparer les performances des trois méthodes de prétraitement présentées ci-dessus (§ 4.1). Dans un premier temps, les indicateurs permettant de qualifier la qualité des traitements dans le cas de signaux comportant une ou plusieurs composantes sont présentés et un indicateur est retenu. Dans un deuxième temps, les travaux présentés dans la littérature et portant sur l'évaluation des performances des différentes méthodes retenues dans ce travail sont exposées. Enfin, un travail complémentaire à celui déjà existant est proposé de façon à choisir une méthode au sens du critère retenu pour l'étude et d'estimer les effets d'une bande passante limitée.

Les performances des différents traitements de signaux sont étudiées en considérant que le transducteur présente une réponse idéale sur la bande de fréquence considérée, caractérisée par une fonction de transfert (rapport de la pression rayonnée et de la tension appliquée) possédant un module constant et une phase linéaire (retard pur). La bande passante finie du transducteur est prise en compte en utilisant un filtre passe bande de Butterworth d'ordre 8.

### 4.2.1 Indicateurs de qualité des traitements

L'estimation de la qualité des différents traitements appliqués avant l'émission du signal permet de quantifier les distorsions du signal auto-démodulé qui persistent malgré ces traitements. La norme CEI 268 (caractérisation des équipements pour les systèmes électroacoustiques) [47] définit des méthodes permettant d'estimer différentes grandeurs et notamment les distorsions.

Le premier des indicateurs proposé par la norme CEI 268 est le taux de distorsion harmonique total (THD pour *Total Harmonic Distorsion*). Le THD est estimé en excitant un système non linéaire par un signal d'entrée sinusoïdal. Le THD est le rapport de la valeur efficace des harmoniques supérieurs et de la valeur efficace du signal :

$$THD = 100 \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} S_n^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} S_n^2}} \quad (4.6)$$

où  $S_n$  représente la composante fréquentielle de rang  $n$  (0 étant la fondamentale) du signal (S).

Cet indicateur ne permet pas d'estimer l'ensemble des phénomènes dû aux non-linéarités des traitements et de l'auto-démodulation.

Dans le cas de signaux comportant deux composantes fréquentielles  $(f_1, f_2)$ , les non-linéarités entraînent l'apparition de fréquences de combinaison  $(nf_1 + mf_2)$ , avec  $n$  et  $m$  entier). Ce phénomène est connu sous le nom de distorsions d'intermodulation. Afin d'évaluer ces distorsions, la norme CEI 268 considère deux types particuliers de distorsions d'intermodulation : la distorsion de modulation et la distorsion de différence de fréquence. Les méthodes proposées pour mesurer ces grandeurs impliquent de choisir des valeurs particulières des fréquences  $f_1$  et  $f_2$  et de calculer un taux de distorsion uniquement pour quelques composantes fréquentielles de la distorsion obtenue, le même type de

rapport que pour le THD étant utilisé. Ceci permet d'éviter de devoir séparer les distorsions du signal utile en cas de recouvrement. Ces méthodes ne sont donc pas compatibles avec une étude sur l'ensemble de la bande de fréquences considérée et pour des signaux contenant plus de deux composantes fréquentielles (grand risque de recouvrement).

D'autres techniques permettent d'étudier les distorsions. Kaizer [48] propose par exemple d'utiliser les noyaux de Volterra. Ces méthodes sont complexes à mettre en oeuvre et ne sont pas justifiées pour une simple comparaison de l'efficacité des traitements. Elles sont par contre très utiles dans l'élaboration de systèmes de compensation de distorsions dont la nature n'est pas connue [49].

L'indicateur utilisé dans ce travail pour comparer les différents traitements est le taux de distorsion au sens de la norme CEI 268, à savoir :

$$TD = 100 \frac{\sqrt{\sum_1^{\infty} D_n^2}}{S} \quad (4.7)$$

où  $D_n$  est la valeur efficace de l'harmonique  $n$  dû à la distorsion et  $S$  celle du signal total. La difficulté réside dans la séparation des distorsions du signal « utile ».

Dans le cas d'une antenne paramétrique dont le signal d'entrée s'écrit

$$e(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t), \quad (4.8)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fréquences vérifiant  $f_1 < f_2$  et  $A$  et  $B$  deux amplitudes choisies arbitrairement, si le seul prétraitement appliqué à ce signal est une modulation d'amplitude avec conservation de la porteuse et un taux de modulation unitaire, le signal émis  $s_{am}(t)$  dans l'air est

$$s_{am}(t) = (e(t) + A + B) \cos(2\pi f_p t), \quad (4.9)$$

où  $f_p$  est la fréquence de la porteuse vérifiant  $f_1 < f_2 \ll f_p$ . L'enveloppe de  $s_{am}(t)$  est  $f(t) = e(t) + A + B$ . D'après l'équation de Berkta (éq. (4.1)), les distorsions du signal démodulé sont dues au carré de l'enveloppe donné dans ce cas par

$$\begin{aligned} f(t)^2 &= \left[ (A+B)^2 + \frac{1}{2}(A^2 + B^2) \right] + \{2(A+B)[A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)]\} \\ &+ AB \cos(2\pi(f_1 + f_2)t) + AB \cos(2\pi(f_2 - f_1)t) + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi 2f_1 t) + \frac{B^2}{2} \cos(2\pi 2f_2 t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le premier terme (entre crochet) est la composante continue qui disparaît en raison de la dérivée dans l'équation de Berkta. Le second terme (entre accolades) est le signal « utile » (correspondant au signal démodulé souhaité), les autres termes (en  $f_1 + f_2$ ,  $f_2 - f_1$ ,  $2f_1$  et  $2f_2$ ) correspondent aux distorsions. Dans la plupart des cas, le taux de distorsion peut facilement être évalué de manière automatique pour différents signaux d'entrée et différents prétraitements grâce au calcul du spectre du carré de l'enveloppe du signal émis en relevant les composantes fréquentielles inexistantes dans le signal d'entrée. L'équation (4.10) montre l'existence de distorsions aux fréquences  $2f_1$  et  $f_2 - f_1$ . Étant

donné le choix effectué sur les fréquence ( $f_1 < f_2$ ) celles-ci peuvent être égales respectivement à  $f_2$  et  $f_1$ . Dans ce cas il est nécessaire de pouvoir séparer la contribution des distorsions et celle du signal « utile » à la même fréquence pour pouvoir calculer le taux de distorsion. L'équation (4.10) montre que, dans le cas d'une modulation d'amplitude classique, la partie « utile » du signal démodulé est  $2(A + B)e(t)$ . Dans ce cas, si l'amplitude de  $e(t)$  est modifié par un facteur correctif  $C = 2(A + B)$ , il est possible d'extraire les distorsions du signal démodulé par une simple différence entre les signaux temporels  $f^2(t)$  et  $Ce(t)$ . Cependant, ce facteur correctif ne peut pas être employé dans tous les cas. En effet, le facteur d'amplitude entre le signal d'entrée  $e(t)$  et la partie « utile » du signal démodulé dépend du type de conditionnement et de la méthode de détection d'enveloppe utilisés.  $C$  est donc défini comme étant le rapport des valeurs efficaces des composantes « utiles » des deux signaux,

$$C = \frac{\sqrt{\sum_1^{\infty} U_{d_n}^2}}{\sqrt{\sum_1^{\infty} U_{e_n}^2}} \quad (4.11)$$

où  $U_{d_n}$  est la composante fréquentielle « utile » de rang  $n$  du signal démodulé et  $U_{e_n}$  celle du signal d'entrée.

L'avantage est de pouvoir effectuer un traitement automatique d'un grand nombre de cas et ce même dans le cas de signaux composés de plus de deux fréquences. La valeur efficace des différentes composantes fréquentielles est modifiée par cet algorithme, ce qui à pour conséquence que les taux de distorsion calculés ici ne peuvent être comparés à des taux de distorsion obtenus avec d'autres méthodes ; toutefois les comparaisons effectuées par la suite entre les différents traitements restent justifiées.

#### 4.2.2 Travaux déjà réalisés

Les travaux présentés dans la littérature portent sur l'étude de l'efficacité de différents traitements visant à réduire les distorsions. Les indicateurs utilisent le taux de distorsion harmonique d'ordre 2 ou le taux de distorsion harmonique total.

Yoneyama et coll. [18] s'appuie sur l'équation de Berkay (eq. (4.1)) et exprime analytiquement la distorsion harmonique d'ordre 2 (notée  $dh_2$ ) dans le cas d'une modulation d'amplitude classique. Il montre que  $dh_2 = 100m\%$ , où  $m$  est le coefficient de modulation. Ces résultats montrent qu'il est possible de réduire le taux de distorsion en diminuant le coefficient de modulation lorsqu'une modulation d'amplitude classique est utilisée. Toutefois, ceci est fait au détriment de l'amplitude de l'onde auto-démodulée.

Aoki et coll. [40] s'intéresse à l'antenne paramétrique lorsque le régime de choc apparaît (limites de l'application de l'équation de Berkay). Il présente des résultats expérimentaux, montrant que, lorsque l'amplitude de l'onde émise est trop faible pour qu'il y ait formation d'onde de choc, le taux de distorsion harmonique d'ordre 2 est plus faible pour une modulation d'amplitude BLU que pour

une modulation d'amplitude classique. La tendance s'inverse lorsque l'amplitude de l'onde primaire est supérieure au seuil nécessaire à la formation de chocs.

Kite et coll. [50] présente une série de résultats numériques pour le conditionnement basé sur la racine carrée. Il montre que l'efficacité de génération du signal audible augmente avec le facteur de modulation  $m$  et le rapport  $\Delta f/f_p$  où  $\Delta f$  est la largeur de la bande passante et  $f_p$  est la fréquence porteuse. Enfin, il montre que le THD augmente lorsque l'indice de modulation  $m$  augmente et diminue lorsque  $\Delta f/f_p$  augmente.

Les travaux présentés dans la littérature ne présentent pas, à notre connaissance, une synthèse des performances des différents conditionnements proposés dans le paragraphe 4.1. Ainsi, nous nous proposons de la réaliser en utilisant l'indicateur  $TD$  présenté à l'équation 4.7 dans le cas où le signal d'entrée comporte deux ou trois composantes. Dans un premier temps, nous analysons par une approche analytique l'effet des traitements dans le cas d'une excitation sinusoïdale.

#### 4.2.3 Cas de l'émission d'une fréquence pure : étude analytique

Les performances des conditionnements proposés sont étudiées en considérant un signal d'entrée  $e(t)$  à fréquence pure. Le signal de sortie  $s(t)$  des conditionnements étudiés est appliqué à l'équation de Berktaï pour évaluer l'intérêt du conditionnement dans ce cas simple.

Dans le cas de l'application d'une racine carrée au signal d'entrée  $e(t) = \cos(\omega t)$ , le signal de sortie est  $s_{rc}(t) = \cos(\omega_p t) \sqrt{1 + m \cos(\omega t)}$ , l'enveloppe  $f_{rc}(t)$  du signal est donc donnée par :

$$f_{rc}(t) = \sqrt{1 + m \cos(\omega t)}. \quad (4.12)$$

D'après l'équation de Berktaï (4.1), le signal démodulé  $s_{drc}(t)$  est défini, à une constante  $C(z)$  dépendante de la distance près, par :

$$s_{drc}(t) = C(z) \frac{\partial^2}{\partial t^2} f^2(t) = -C(z) \omega^2 m \cos(\omega t). \quad (4.13)$$

Seule la composante fréquentielle du signal d'entrée est transmise, le taux de distorsion est donc nul.

Dans le cas de la modulation BLU et pour le même signal d'entrée, le signal de sortie est  $s_{blu}(t) = \sin(\omega_p t) + m \sin((\omega_p + \omega)t)$ , il peut également s'écrire pour  $m = 1$  :

$$s_{blu}(t) = 2 \sin((\omega_p + \frac{\omega}{2})t) \cos(\frac{\omega}{2}t), \quad (4.14)$$

ce qui correspond à une modulation d'amplitude classique sans transmission de la porteuse, dont la pulsation de la porteuse est  $\omega'_p = \omega_p + \omega/2$ , et celle du signal modulant correspondant à  $\omega/2$ . Dans ce cas, l'enveloppe  $f_{blu}(t)$  du signal  $s_{blu}(t)$  est donnée par :

$$f_{blu}(t) = \left| 2 \cos(\frac{\omega}{2}t) \right|. \quad (4.15)$$

La valeur absolue d'un signal étant définie comme la racine carrée du signal élevé au carré,  $f_{blu}(t)$  peut également s'écrire :

$$f_{blu}(t) = \sqrt{4 \cos^2(\frac{\omega}{2}t)} = \sqrt{2(1 + \cos(\omega t))}. \quad (4.16)$$

Le signal démodulé  $s_{dblu}(t)$  est donc de la forme :

$$s_{dblu}(t) = -2C(z)\omega^2 \cos(\omega t) \quad (4.17)$$

et aucune composante fréquentielle due à des distorsions n'apparaît.

Dans le cas d'un signal d'entrée de fréquence pure, les deux types de conditionnements corrigent les distorsions dues à la présence du carré dans l'équation de Berkta. Le terme en  $\omega^2$  présent dans les équations (4.13) et (4.17) est dû à la dérivée seconde par rapport au temps et disparaît si le signal d'entrée  $e(t)$  est soumis à deux filtres intégrateurs du premier ordre avant les traitements décrits paragraphe 4.1.

La prise en compte d'une bande passante  $\Delta f$  limitée est difficile dans le cas d'une étude analytique. Dans le cas d'une modulation BLU, si  $\Delta f$  est supérieure à la largeur de bande du signal d'entrée  $e(t)$ , les résultats ne changent pas. Pour le prétraitement basé sur la racine carrée, la largeur de bande du signal d'entrée étant infinie du fait de l'opérateur racine carrée (cf. § 4.1.1), les performances du traitement peuvent être affectées par une bande passante limitée.

#### 4.2.4 Cas des signaux multicomposantes : étude numérique

Dans le cas où le signal d'entrée du conditionnement n'est pas à fréquence pure, une approche numérique permet de comparer les performances des traitements du signal. Les performances des traitements proposés (modulation BLU, modulation pseudo-BLU par filtrage ou application d'une racine carrée) sont ici évaluées à l'aide d'une simulation numérique. Celle-ci prend en compte la démodulation non linéaire en se basant sur l'équation de Berkta et la bande passante limitée du transducteur grâce à un filtre passe bande de Butterworth d'ordre 8 et de bande passante de 10 kHz centrée sur la fréquence de la porteuse.

Les signaux d'entrée sont composés de deux ou trois fréquences pures. Pour chacun de ces couples (ou « trios »), le taux de distorsion défini à l'équation (4.7) est calculé en omettant les éventuelles composantes fréquentielles au dessus de 20 kHz, étant donné qu'elles n'affectent pas la qualité de l'écoute. Les résultats obtenus pour les signaux comportant deux fréquences pures sont présentés au tableau 4.1 et à la figure 4.5. Les résultats obtenus pour les spectres comprenant trois fréquences sont rapportés en annexe E.

La figure 4.5 montre que le conditionnement consistant en une modulation d'amplitude BLU, basé sur la transformée d'Hilbert, est celui qui conduit aux résultats les moins satisfaisants. Le taux de distorsion est à peu près constant (environ 28%) excepté pour les signaux d'entrée dont les deux fréquences sont séparées d'une octave ( $f_2 = 2f_1$ ).

La figure 4.5 montre également que le conditionnement basé sur la racine carrée est très efficace, sauf lorsque les fréquences utilisées sont proches de la limite haute fréquence du transducteur (pour mémoire 5 kHz de part et d'autre de la fréquence de la porteuse). Ce conditionnement est donc celui à utiliser si la bande passante du transducteur est très supérieure à la largeur de bande du signal à transmettre.

Couple	Fréq. 1 [kHz]	Fréq. 2 [kHz]	TD BLU [% ]	TD pseudo-BLU [% ]	TD racine [% ]
1	0,5	1	19,98	14,99	0
2	0,5	2	28,28	19,81	0
3	0,5	3	28,27	21,12	5,43
4	0,5	4	28,25	23,37	5,30
5	0,5	5	28,31	25,41	26,97
6	1	2	19,98	15,01	0
7	1	3	28,26	24,13	6,03
8	1	4	28,27	22,38	6,48
9	1	5	28,29	24,34	22,09
10	2	3	28,29	17,83	6,57
11	2	4	20,05	13,53	7,43
12	2	5	28,31	20,90	24,46
13	3	4	28,23	16,29	12,11
14	3	5	28,25	17,36	18,52
15	4	5	28,32	15,36	15,81

TAB. 4.1 – Taux de Distorsion (TD) pour les différents conditionnements avec différents couples de fréquences

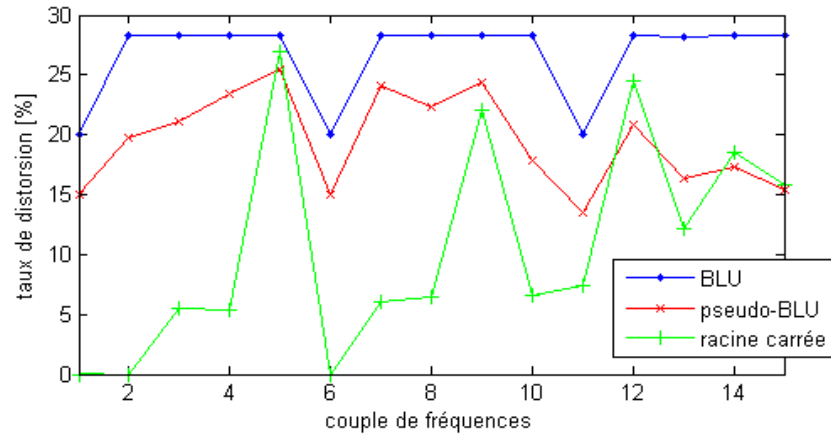


FIG. 4.5 – Taux de distorsion estimé de l'onde démodulée suivant le numéro du couple de fréquences appliqué à l'entrée de l'algorithme (cf. TAB. 4.1).

Le conditionnement basé sur une modulation BLU (ainsi que celui de la pseudo-BLU) peut être amélioré par un traitement présenté par la figure 4.6. Il consiste en l'application de la modulation BLU, puis une simulation de démodulation non linéaire est réalisée en utilisant l'équation de Berkay (4.1), afin de pouvoir définir la forme du signal démodulé. Les distorsions sont ensuite extraites par simple différenciation du signal d'entrée et du signal issu de la simulation de démodulation. Puis elles sont utilisées pour corriger le signal d'entrée du système avant de réeffectuer une modulation BLU. Ce traitement peut être appliqué plusieurs fois (traitement itératif) en extrayant pour chaque boucle les distorsions résiduelles et un corrigeant le signal au fur et à mesure. Comme le montre la figure 4.7, la qualité du signal transmis augmente dans la majorité des cas avec le nombre d'itérations.

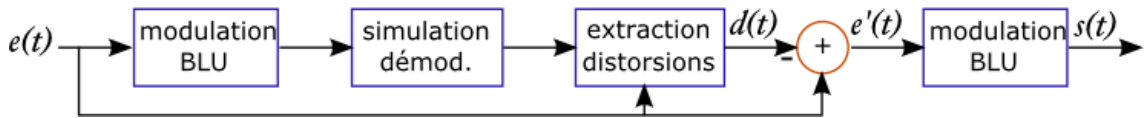


FIG. 4.6 – Correction des distorsions résiduelles pour les conditionnements basés sur une BLU.

La figure 4.8 compare les taux de distorsion obtenus pour la modulation BLU sans correction et avec correction après une ou trois itérations. Les résultats obtenus sont comparables à ceux obtenus pour le conditionnement basé sur la racine carrée. L'intérêt de cette correction itérative est de ne pas augmenter la bande passante nécessaire pour transmettre le signal, mais il demande un grand nombre de traitements.

### 4.3 discussion sur le choix d'un conditionnement

La comparaison des efficacités des trois conditionnements BLU, pseudo-BLU et racine carrée effectuée à l'aide de l'indicateur  $TD$  (cf. § 4.2.1) permet de dégager une méthode de traitement



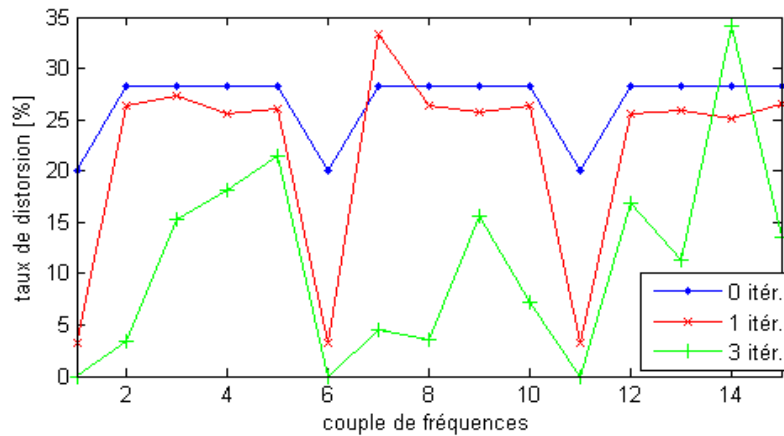


FIG. 4.7 – Taux de distorsion pour le conditionnement basé sur la modulation BLU sans correction (0 itération) et après une et trois itérations de l'algorithme de correction.

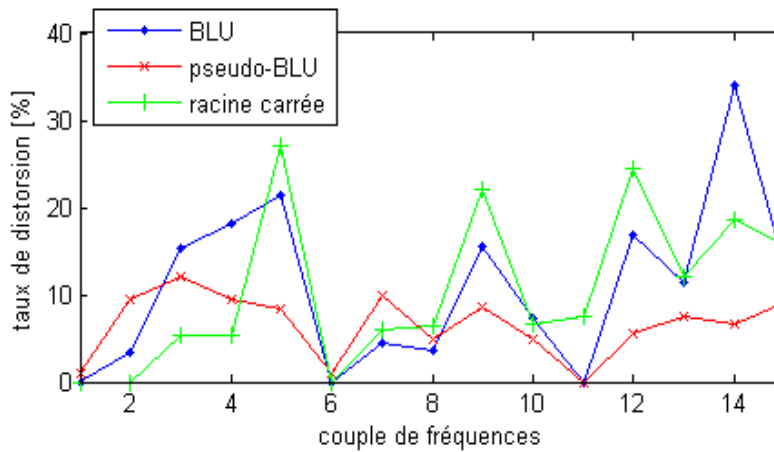


FIG. 4.8 – Taux de distorsion après application de trois itérations de correction pour la BLU et la pseudo-BLU.

adaptée au problème posé.

D'un point de vue général, la modulation d'amplitude BLU nécessite une bande passante (en général limitée par le transducteur) équivalente à la largeur de la bande de fréquence du signal à transmettre (ici inférieure à 5 kHz). L'application de la correction de type « racine carrée » conduit à une largeur de la bande de fréquence à transmettre théoriquement infinie (cf. § 4.1.1). En outre, ce conditionnement utilise une modulation d'amplitude classique, ce qui nécessite une bande passante supérieure à deux fois la largeur de la bande de fréquence à transmettre (2 bandes latérales). Le contenu spectral est donc nécessairement tronqué.

Dans le cas d'un signal d'entrée sinusoïdal et d'un transducteur à bande passante infinie, les traitements possèdent des efficacités identiques, la distorsion étant nulle.

Dans le cas d'un signal comportant plusieurs composantes et d'un transducteur à bande passante

finie (10 kHz), une étude numérique (§ 4.2.4) permet de comparer les valeurs des taux de distorsion obtenus pour les trois traitements. Les résultats obtenus montrent que l'application d'une racine carrée permet d'obtenir de très bons résultats ( $TD < 6\%$ ) tant que le signal à transmettre possède une largeur spectrale inférieure ou égale à 3 kHz, ceci pour une bande passante de 10 kHz. Il faut donc une bande passante environ égale à quatre fois la largeur de bande du signal à transmettre pour utiliser efficacement cette méthode. La modulation BLU présente des résultats plutôt médiocres ( $TD \approx 25\%$ ) sauf dans le cas de l'utilisation d'un traitement itératif des distorsions résiduelles ( $TD < 10\%$  qu'il est encore possible de diminuer suivant le nombre d'itérations). Ce traitement présente l'avantage de ne pas augmenter la bande passante nécessaire (égale à la largeur de bande du signal à transmettre), mais demande un plus grand temps de calcul (qui augmente avec le nombre d'itérations).

Pour conclure, si une grande bande passante est disponible, le meilleur choix est donc le conditionnement basé sur la racine carrée; par contre dans le cas d'une bande passante restreinte, il est quand même possible d'obtenir de bons résultats au détriment du temps de traitement en utilisant la modulation BLU corrigée.



## Chapitre 5

# Prototype d'antenne paramétrique

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux obtenus pour deux prototypes d'antenne de transducteurs réalisés à l'aide de films de PVDF. Dans un premier temps, les solutions technologiques utilisées pour fabriquer les prototypes sont présentées. Dans un second temps, la réponse électroacoustique de l'antenne est caractérisée en régime linéaire et comparée à la théorie développée dans les chapitres précédents. Enfin ces prototypes sont utilisés en tant qu'antennes paramétriques. Les signaux d'excitation utilisés sont d'une part des signaux de synthèse, d'autre part des signaux obtenus à l'aide d'un conditionneur basé sur le calcul de la racine carrée du signal voulu (cf. chapitre 4). Finalement les performances des deux antennes paramétriques sont comparées et discutées.

### 5.1 Le transducteur électroacoustique

#### 5.1.1 Description du transducteur

Deux prototypes d'antennes paramétriques ont été réalisés à l'ISL. Chacune d'elles est un réseau à deux dimensions (2D) de forme rectangle de transducteurs réalisés à l'aide de film de PVDF (FIG. 5.1). Le réseau de transducteurs est obtenu grâce à un réseau de cavités sur lequel est plaqué un film de PVDF. Une même dépression statique est appliquée dans l'ensemble des cavités. La portion de film PVDF placée devant chaque cavité prend alors une forme concave. Un réseau de transducteurs identiques est ainsi obtenu (sous réserve d'avoir un réseau de cavités identiques).

Les deux antennes sont composées de quatre éléments principaux (cf. plans en annexe G) : un socle arrière, une plaque percée de trous cylindriques, un film de PVDF métallisé sur ses deux faces et une pièce permettant de plaquer le film sur la plaque percée et de faire le contact électrique avec l'électrode avant du film. La première antenne possède des cavités de diamètre 4 mm (elle est désignée par « antenne 4 mm » dans la suite du document), tandis que la seconde a des cavités de diamètre 2 mm (désignée par « antenne 2 mm »).

Le socle arrière est une pièce en PVC rectangulaire de dimensions 300 mm par 295 mm. Comme le montre la figure 5.2, il comporte une rainure permettant d'y placer un joint torique qui assure

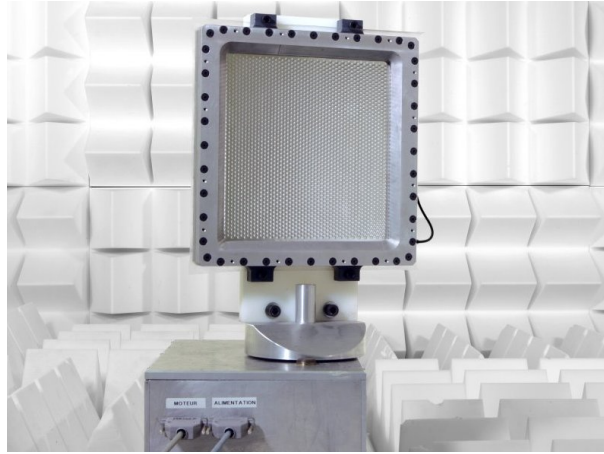


FIG. 5.1 – Vu d'un prototype réalisé.

le serrage du film et l'étanchéité du système. Il présente également un emplacement évidé de forme rectangulaire et de profondeur 3 mm, destiné à recevoir la plaque percée. Le fond de cet emplacement est percé d'un capillaire permettant de réaliser un vide partiel. Enfin une tige filetée appuyant sur la plaque percée est prévue afin de réaliser un contact électrique avec l'arrière du film de PVDF.

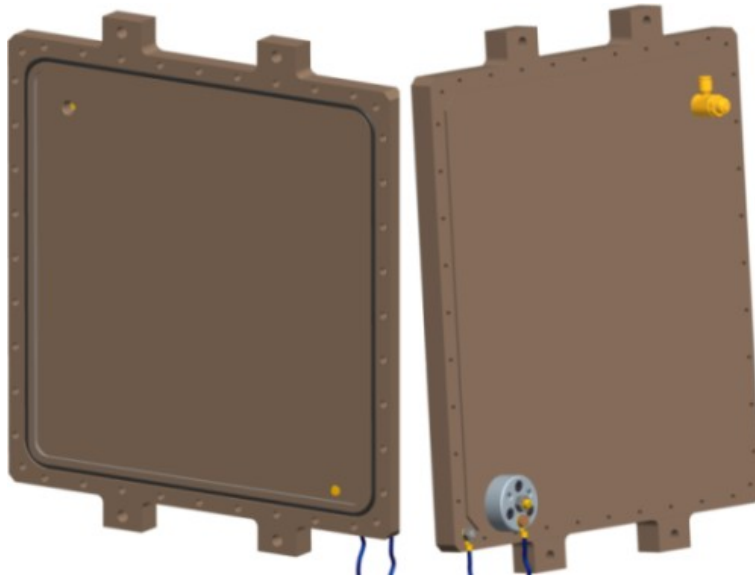


FIG. 5.2 – Schéma du socle arrière des différentes antennes.

La plaque percée, réalisée en Dural, est rectangulaire de longueur 260 mm, de largeur 255 mm et d'épaisseur 3 mm. Pour l'antenne 4 mm elle est percée de 2372 trous de diamètre 4 mm, ces derniers étant répartis sur une surface de 514 cm<sup>2</sup>. Pour l'antenne 2 mm, il s'agit de 6350 trous répartis sur 503 cm<sup>2</sup>. Pour les deux antennes l'arrangement choisi est un arrangement hexagonal régulier (FIG. 5.3), ceci afin de maximiser le nombre de trous (et par extension le nombre de transducteurs et donc la surface active) sur une surface donnée.

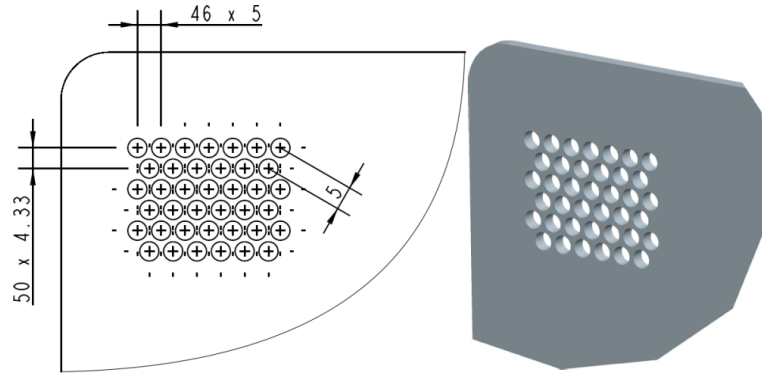


FIG. 5.3 – Schéma de l'arrangement des trous de la plaque percée de l'antenne 4 mm.

Une fois l'ensemble des pièces monté, la dépression se transmet à l'ensemble des cavités grâce aux aspérités de surface du socle arrière, ce qui permet de considérer, acoustiquement parlant, que les cavités sont fermées, la résistance de fuite étant *a priori* très élevée. Une attention toute particulière est apportée à la face sur laquelle repose le film afin d'éliminer toutes les arêtes dans le but d'éviter les accumulations de charges électriques et donc les risques d'arc électrique au travers du diélectrique (PVDF).

Le film de PVDF utilisé est un film biétiré de  $25\ \mu\text{m}$  d'épaisseur. Les grandeurs caractéristiques du PVDF (comme par exemple le module de Young) ne sont en général pas isotropes ; toutefois dans le cas d'un film biétiré, elles sont isotropes dans le plan de la surface du film. Par la suite, nous utilisons les caractéristiques données dans ce plan. Les caractéristiques mécaniques du film dépendent fortement de l'étirement. Les valeurs données dans la littérature sont les suivantes ; le coefficient de Poisson varie de 0,3 à 0,5 et le module de Young est compris entre 1 et 3 GPa. Le coefficient de piézoélectricité est  $d_{3i} = 3\ \text{pC/N}$  ( $i = 1, 2$ ) et la permittivité relative est  $\varepsilon_r = 12$ .

Le film est métallisé sur ses deux faces sur une surface inférieure à la surface totale. En pratique, les dimensions des métallisations sont 260 mm par 270 mm. Ainsi elles n'atteignent pas les vis de serrage et les risques de court-circuit sont évités. Le film métallisé se comporte électriquement comme un condensateur dont la capacité (mesurée) varie de 300 à 270 nF suivant la fréquence ce qui est confirmé par le modèle usuel  $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r S/d$  qui conduit à 298 nF (où  $\varepsilon_0 = 8,85\ \text{pF/m}$  est la permittivité du vide et  $\varepsilon_r = 12$  la permittivité relative du PVDF). Au vu de la nature hautement capacitive du film et des fréquences de travail (30-50 kHz) l'intensité électrique à délivrer à l'antenne est élevée (plusieurs ampères suivant la tension voulue).

Lors du montage des différents éléments des antennes, il est important de s'assurer qu'il n'y a pas de pli dans le film, d'une part pour obtenir un film aux propriétés mécaniques homogènes, d'autre part pour éviter que les plis ne forment des angles vifs dans le film. En effet ces angles vifs sont des points d'accumulation de charge et donc des risques de déclenchement d'arcs électriques entre les deux métallisations. De même il faut supprimer les poussières entre le film et la plaque percée, celles-ci créant un angle vif sur le film lorsqu'il est plaqué par la dépression sur la plaque percée.

### 5.1.2 Caractérisation en régime linéaire

La caractérisation des antennes en régime linéaire vise d'une part à déterminer pour chaque antenne la fréquence de la porteuse pour l'antenne paramétrique et d'autre part à vérifier que les bandes passantes et les directivités sont conformes au cahier des charges. Pour cela la réponse en pression dans l'axe est mesurée en fonction de la fréquence et la directivité est caractérisée pour des fréquences particulières. Ces mesures sont effectuées pour chaque antenne et pour différentes dépressions.

#### 5.1.2.1 Protocole de mesures

Les antennes sont fixées sur un pied permettant de placer le dispositif sur un plateau tournant (FIG. 5.1) afin de mesurer la directivité. Les acquisitions sont effectuées à l'aide d'un microphone *BK 1/4" 4938* placé à 2,5 m dans l'axe de l'antenne, d'un conditionneur *BK Nexus* et d'un analyseur de spectre *Stanford SR 780*. L'antenne est alimentée par un signal sinusoïdal fourni par le *SR 780* et amplifié par un amplificateur de puissance *Denton A350* capable de délivrer 350 W jusqu'à 50 kHz pour une charge de 8  $\Omega$ .

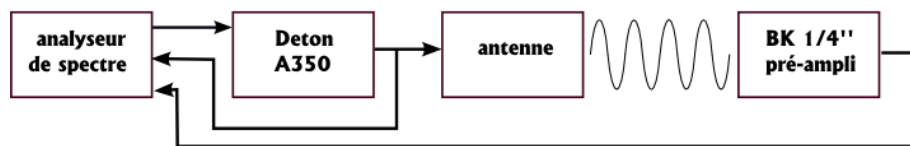


FIG. 5.4 – Schéma bloc de la chaîne de mesure utilisée pour caractériser la réponse du transducteur.

La chaîne de mesure est présentée à la figure 5.4. L'analyseur de spectre génère un sinus pas à pas entre 10 et 60 kHz. L'amplificateur alimente ainsi le transducteur par une tension proche de 25 Vrms ; Malgré les spécifications de l'amplificateur, la tension appliquée au transducteur reste constante jusqu'à 60 kHz. L'analyseur réalise la fonction de transfert entre le signal microphonique et la tension appliquée au transducteur. La fonction de transfert est mesurée pour différentes orientations du transducteur.

#### 5.1.2.2 Résultats

La figure 5.5 présente la réponse fréquentielle de l'antenne 4 mm pour deux valeurs de dépression. Ces deux réponses mesurées montrent qu'il est nécessaire d'utiliser une dépression d'au moins 250 mbar pour placer la première fréquence de résonance au dessus de 20 kHz. La différence de niveau entre l'amplitude des 2 courbes à leurs fréquences de résonance provient vraisemblablement d'une légère erreur d'alignement due à la manipulation de l'antenne lors du changement de la dépression.

La comparaison de la pression acoustique à 2,5 m en fonction de la fréquence pour les deux différentes antennes à dépression identique (FIG. 5.6) permet de justifier les choix de la fréquence de la porteuse utilisée pour le fonctionnement en tant qu'antenne paramétrique. L'antenne 4 mm présente deux pics sur la plage de fréquence. La fréquence du premier mode (mode 01) est faible (21,5 kHz). En effet si cette fréquence est utilisée pour la porteuse, une fois la modulation effectuée le spectre du

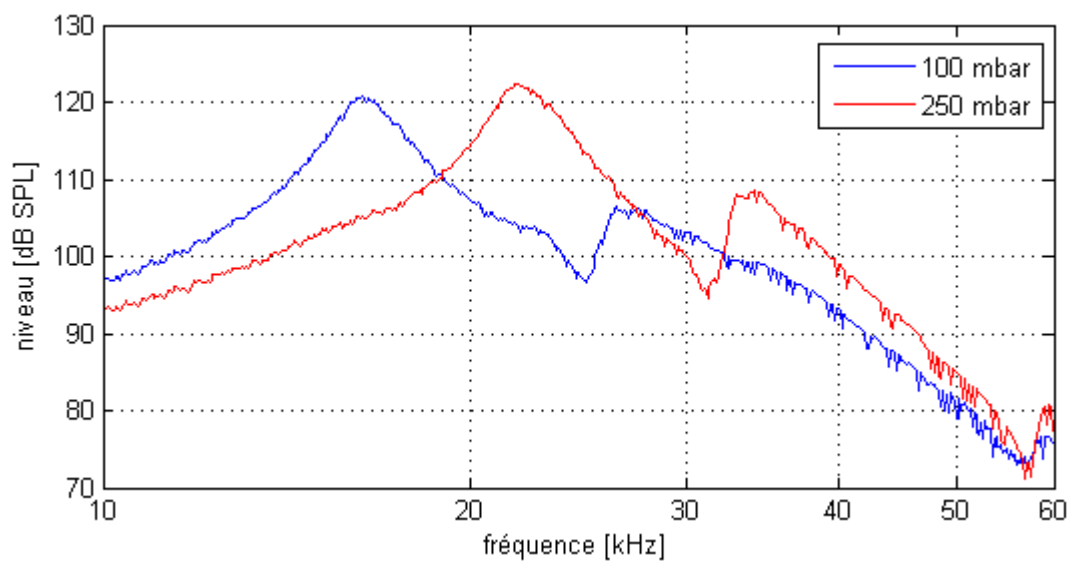


FIG. 5.5 – Réponse fréquentielle de l'antenne 4 mm pour 2 dépressions et une tension d'alimentation de 25 Vrms, mesurée à une distance de 2,5m.

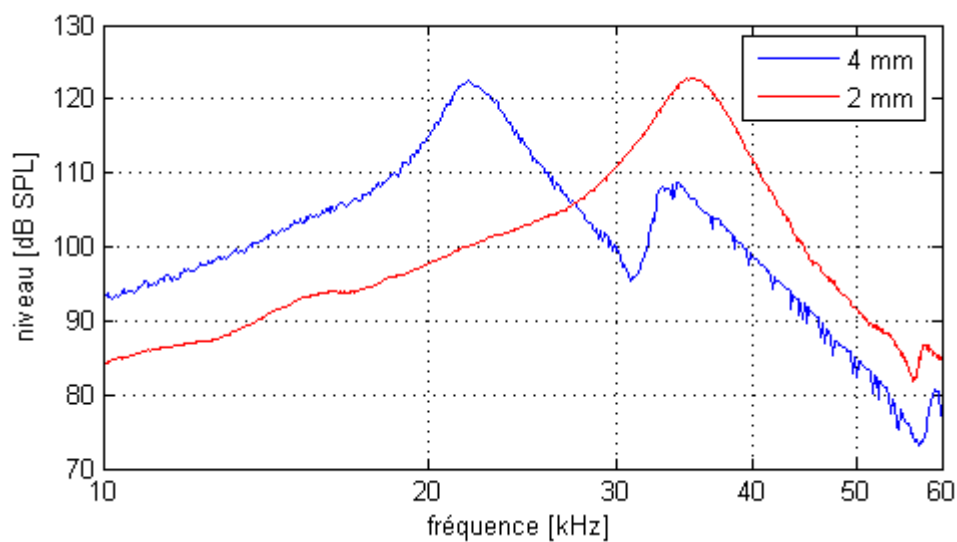


FIG. 5.6 – Réponse fréquentielle de l'antenne avec une dépression de 250 mbar pour différents diamètres de cellules et une tension de 25 Vrms, mesurée à 2,5m.



signal émis risque d'empiéter sur le domaine audible. La fréquence du deuxième pic (33,5 kHz) est exploitable. De plus son profil (chute rapide du niveau lorsque la fréquence diminue) est intéressant car il évite d'utiliser un filtre d'ordre élevé dans le cas d'un conditionnement à base d'une pseudo-BLU. Toutefois son niveau (108 dB SPL pour une tension d'excitation de 25 Vrms) étant trop faible pour répondre au cahier des charges, il faut augmenter la tension d'excitation. L'antenne 2 mm quant à elle ne présente qu'un seul pic de résonance sur la plage étudiée dont la fréquence est de 35,5 kHz et dont le niveau est de 123 dB SPL pour une excitation de 25 Vrms.

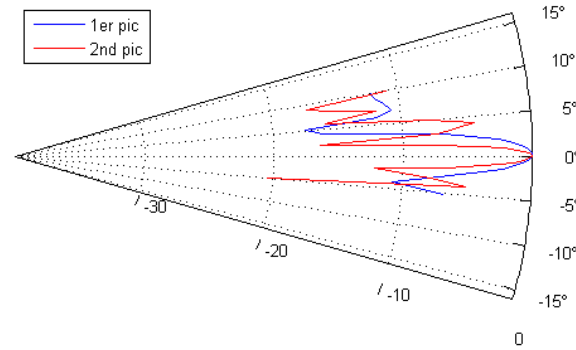


FIG. 5.7 – Directivité de l'antenne de 4 mm aux fréquences de résonance (22 kHz et 33,5 kHz) mesurée à 2,5 m pour une dépression de 250 mbar.

La figure 5.7 présente la directivité de l'antenne 4 mm pour les fréquences de résonance (22 kHz et 33,5 kHz FIG. 5.6) et montre que la directivité augmente avec la fréquence, ce qui est caractérisé par un lobe principal qui s'affine lorsque la fréquence augmente.

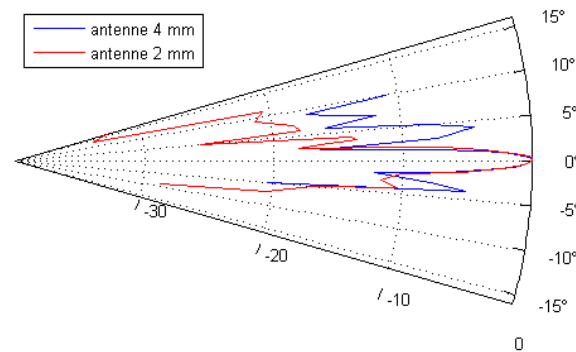


FIG. 5.8 – Comparaison des directivités à 2,5 m des deux antennes à leur fréquence respective de travail (33,5 kHz pour l'antenne 4 mm et 35,5 kHz pour l'antenne 2 mm).

La figure 5.8 présente la directivité des deux antennes à la fréquence utilisée pour la porteuse de chacune d'elles. Bien que cette fréquence est légèrement supérieur dans le cas de l'antenne 2 mm (35,5 kHz contre 33,5 kHz pour l'antenne 4 mm), le lobe principal a la même ouverture ( $1,5^\circ$  à -6 dB) pour les deux antennes. Ceci est du au fait que l'antenne 4 mm possède un réseau de transducteur sur une surface légèrement plus grande.

Pour conclure l'antenne 4 mm est utilisée en tant qu'antenne paramétrique avec une porteuse de fréquence 33,5 kHz. L'antenne 2 mm quant à elle fonctionne avec une porteuse de fréquence 35,5 kHz. L'amplificateur actuellement utilisé ne permet pas de fournir une tension supérieure à environ 100 Vrms. Le niveau émis par les deux antennes à leurs fréquences de travail n'est donc pas suffisant pour atteindre le niveau d'ondes primaires satisfaisant le cahier des charges (cf. chapitre 1), mais le phénomène d'auto-démodulation peut toutefois être observé.

### 5.1.2.3 Comparaison avec les modèles

La figure 5.9 présente les diagrammes de directivité mesuré et théorique de l'antenne 2 mm excitée à la fréquence de 35,5 kHz. Le diagramme théorique est obtenu en considérant le réseau constituant l'antenne c'est à dire un arrangement hexagonal de  $77 \times 42$  sources ponctuelles possédant des espacements  $d_x = 1,5$  mm et  $d_y = 2,6$  mm. La comparaison montre que le modèle de rayonnement du réseau de sources est satisfaisant pour estimer le diagramme de directivité à la fréquence de la porteuse.

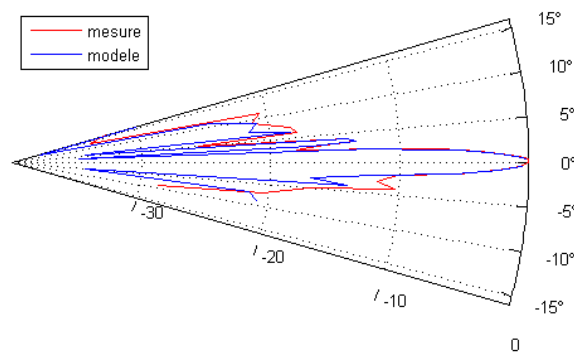


FIG. 5.9 – Comparaison des directivités calculée et mesurée à une distance de 2,5m pour l'antenne de 2 mm avec une dépression de 250 mbar.

Lorsque les modèles de transducteurs élémentaires (cf. chapitre 3) couplés avec le modèle de rayonnement du réseau dans l'axe (cf. chapitre 2) sont comparés avec les résultats des mesures, des différences apparaissent (cf. FIG. 5.10). Le niveau de pression rayonnée dans l'axe prédit à partir du débit de chaque source et du nombre de sources composant le réseau semble cohérent avec la mesure. Les fréquences de résonance par contre sont sous estimées par les modèles. Le problème est donc lié à la modélisation des transducteurs monocellules, dont certaines hypothèses ne doivent plus être valables lorsque les dimensions de la cavité diminuent.

Une mesure de la déformée statique a été effectuée afin de vérifier que les valeurs des paramètres mécaniques introduits dans les modèles et découlant de l'estimation de la flèche de la membrane sont corrects. Étant donné qu'il est difficile d'effectuer une mesure sur des cellules de diamètre 4 mm, des mesures ont été réalisées sur des cavités de diamètre 12 mm, mais aucune erreur significative n'a été observée entre la flèche mesurée et la flèche déterminée par le modèle. Les hypothèses avancées pour

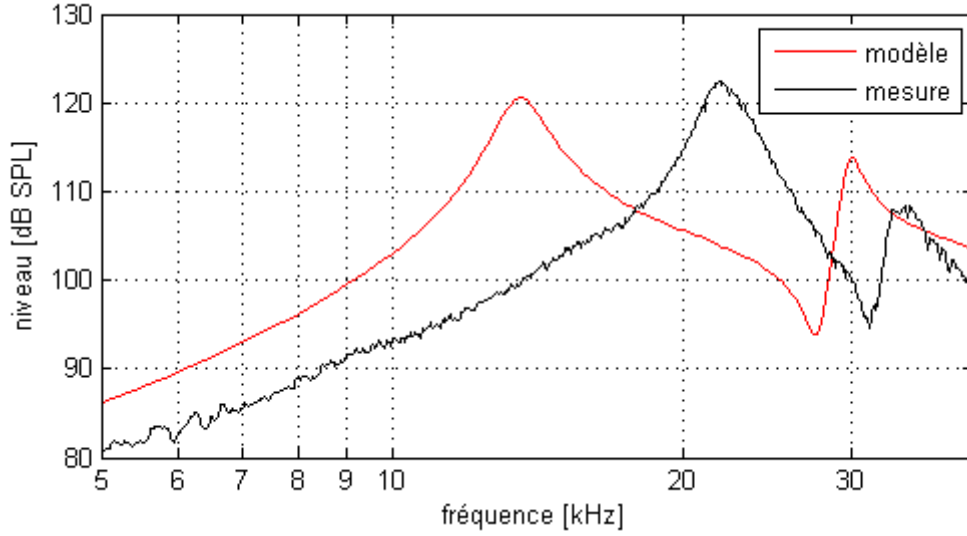


FIG. 5.10 – Comparaison de la pression rayonnée dans l'axe de l'antenne de 4 mm avec une dépression de 250 mbar mesurée et celle prédite par les modèles.

expliquer les différences constatées entre mesure et modèle sont :

- le modèle proposé au chapitre 3 ne prend pas en compte la forme de la membrane dans son équation de comportement. En effet d'après Garner et coll. [32], l'équation différentielle de la membrane ayant une forme de calotte sphérique dans le vide s'écrit,

$$\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) \partial_{rr} w_d(r) + \left(1 - \frac{3r^2}{2R^2}\right) \partial_r w_d(r) + k_m^2 \left(1 + \frac{r^2}{2R^2}\right) w_d(r) = \frac{P_U}{T_0}. \quad (5.1)$$

Dans le cas de cellules de 4 mm avec une dépression de 250 mbar  $R = 16,5$  mm,  $r$  étant compris entre 0 et 2 mm, l'erreur relative maximum effectué sur les coefficients de l'équation différentielle en considérant la membrane comme plane (eq. (3.23)) est donc de l'ordre de 2% ce qui n'est pas significatif au vu de l'erreur effectuée pour le prototype de validation des modèles (de l'ordre de 5% ).

- Le calcul de la tension mécanique  $T_0$  est erroné. En effet la membrane étant encastrée, elle présente un point d'inflexion. La négligence de celui-ci n'a que peu d'influence pour les transducteurs de grandes tailles, mais est peut-être la cause de l'erreur effectuée notamment sur le calcul de la tension de la membrane qui est un paramètre influant fortement sur la fréquence des différents modes. Étant donné que cette tension est difficilement mesurable, pour s'affranchir de cette hypothèse, il faudrait effectuer une étude plus poussée sur la déformée statique de la membrane ainsi que sur les contraintes s'appliquant à celle-ci.

## 5.2 Caractérisation de l'antenne paramétrique

Nous nous intéressons ici à caractériser le fonctionnement du système en tant qu'antenne paramétrique. Dans un premier temps, le transducteur (réseau de sources) est alimenté par un signal modulé en amplitude autour de la fréquence porteuse (33,5 kHz pour l'antenne 4 mm et 35,5 kHz pour l'antenne 2 mm). Ces signaux sont synthétisés numériquement. Dans un deuxième temps, le conditionneur de signal nécessaire au bon fonctionnement de l'antenne est caractérisé.

### 5.2.1 Signaux de synthèse

#### 5.2.1.1 Protocole de mesures

La caractérisation de la réponse de l'antenne paramétrique est effectuée en extérieur de façon à reproduire des conditions de champ libre sur une grande distance. Les mesures sont effectuées de nuit, la vitesse du vent étant plus faible qu'en journée. L'expérience est réalisée sur un sol herbeux afin de minimiser la restitution de la chaleur du soleil par le sol (gradient de température vertical) et les réflexions sur le sol.

La dépression pour les deux antennes est de 250 mbar, ce qui correspond à une fréquence de porteuse de 33,5 kHz pour l'antenne 4 mm et de 35,5 kHz pour l'antenne 2 mm. Les signaux d'excitation ont été préalablement synthétisés sur ordinateur. Chaque antenne est excitée par quatre signaux différents, possédant deux fréquences différentes (1 et 2 kHz) et étant conditionnés à l'aide des deux traitements décrits au chapitre 4 (racine et BLU). Un générateur de fonction *Agilent 33120A* permet de restituer les signaux préalablement enregistrés. L'amplificateur *Deton A350* est réglé de manière à être au maximum de ses possibilités (150 V et 9,5 A).

La pression acoustique est relevée à différentes distances (entre 50 cm et 25 m) par un microphone *BK 1/8" 4138* et par un microphone *BK 1/2" 4192*. Le *BK 1/8" 4138* est choisi pour sa grande bande passante (6,5 Hz - 140 kHz) afin de pouvoir observer l'apparition des harmoniques de la porteuse au fur et à mesure qu'elle se déforme en se propageant, mais sa sensibilité étant faible ( $\sim 1$  mV/Pa) le microphone *BK 1/2" 4192* est rajouté pour mesurer le niveau de l'onde démodulée et de ses harmoniques. Les signaux des deux microphones sont enregistrés par un système d'acquisition *LDS Nicolet Genesis* à une fréquence d'échantillonnage de 1 MHz. Les directivités de la porteuse et de l'onde démodulée sont également mesurées à 5 et 10 m pour le traitement basé sur la BLU et pour un signal d'excitation de fréquence 1 kHz.

#### 5.2.1.2 Résultats

La figure 5.11 représente la forme de la porteuse à différentes distances. Elle est représentée en fonction de la coordonnée temporelle ramenée au temps de propagation de l'onde aux différents points d'observation ( $\tau = t - z/c_0$  où  $z$  représente la distance de propagation et  $c_0$  la vitesse de propagation de l'onde dans l'air). Cette figure montre les différentes étapes de la propagation (cf. chapitre 1) :

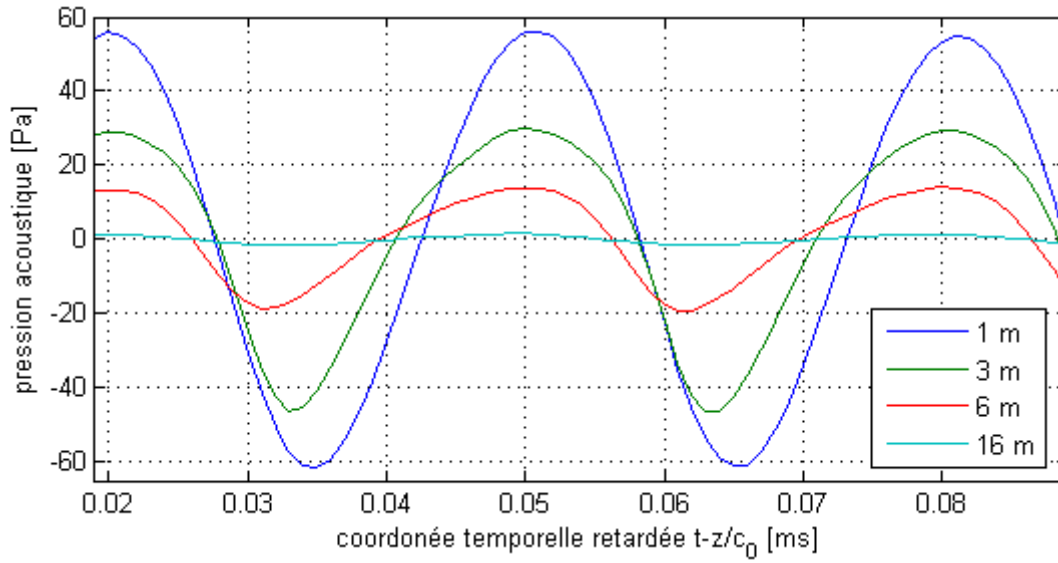


FIG. 5.11 – Évolution de la forme d'onde de la porteuse relevée en fonction de la distance.

à 1 m l'onde n'est pas encore déformée (sinus pur). À 3 m l'onde commence à se déformer, sa forme dans les régions de pression acoustique positive et négative n'est pas identique. À 6 m l'onde a quasiment la forme de N caractéristique du choc, la distance de choc est donc très proche des 6 m. À 16 m l'onde a retrouvé sa forme sinusoïdale après avoir été fortement atténuée.

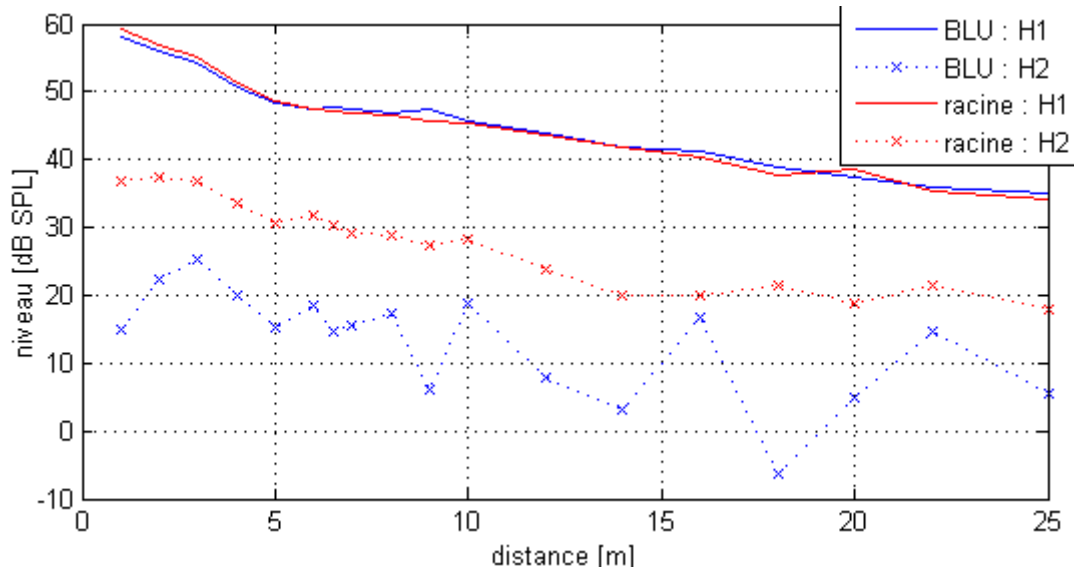


FIG. 5.12 – Évolution du niveau sonore de l'onde démodulée (1 kHz : H1) et de son premier harmonique (2 kHz : H2) en fonction de la distance et du type de traitement utilisé (Antenne 4 mm).

Les mesures représentées par la figure 5.12 sont effectuées avec la même antenne (antenne 4 mm) c'est à dire que la fréquence, le niveau et la directivité de la porteuse sont identiques pour l'ensemble des courbes. Les résultats obtenus montrent que le niveau du fondamental à 1 kHz est identique quelque

soit le traitement, l'efficacité d'auto-démodulation ne dépend donc pas du traitement. Le chapitre 4 montre que dans le cas d'un signal composé d'une fréquence pure et d'une bande passante limitée le conditionnement basé sur une BLU est optimal tandis que le traitement basé sur la racine carrée voit son efficacité affectée. Ces observations sont confirmées par l'expérience, en effet le premier harmonique dans le cas du conditionnement basé sur la racine carrée possède un niveau plus élevé que celui obtenu pour le conditionnement basé sur la BLU (qui est noyée dans le bruit de fond).

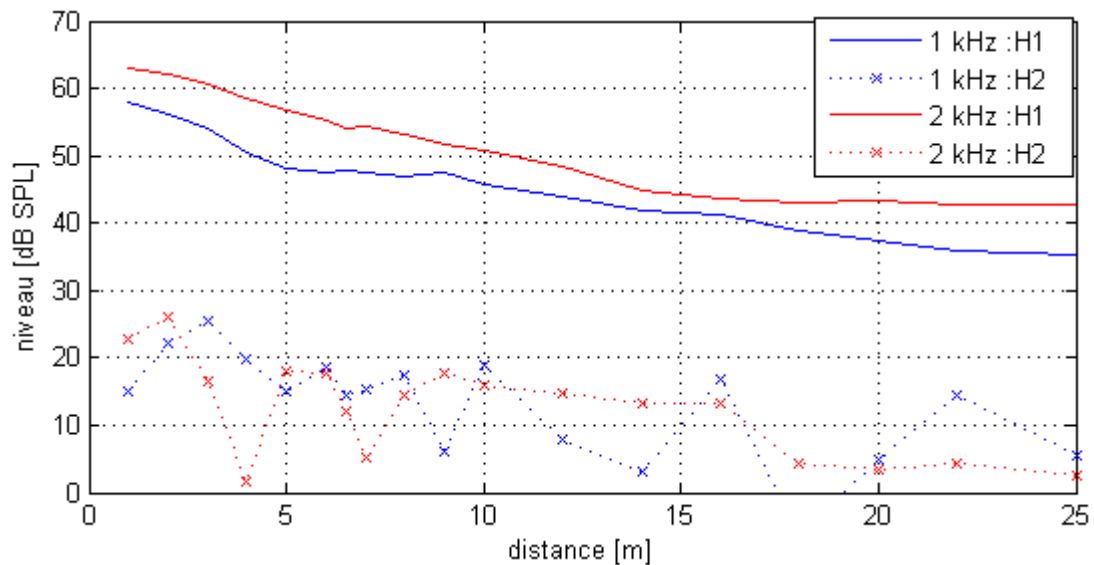


FIG. 5.13 – Évolution du niveau sonore de l'onde démodulée (H1) et de son premier harmonique (H2) pour deux fréquences différentes (1 et 2 kHz) en fonction de la distance (Antenne 4 mm).

La figure 5.13 présente la décroissance spatiale du niveau de la fondamentale de l'onde démodulée (notée H1) et du premier harmonique (noté H2) obtenu pour l'antenne 4 mm et un conditionnement BLU. Deux fréquences (1 kHz et 2 kHz) sont utilisées pour cette étude. Les résultats obtenus montrent que le niveau des deux fondamentales sont différents. Comme le suggère l'équation de Berkay (équ. (1.36)), l'efficacité d'auto-démodulation augmente avec la fréquence, ce qui n'a pas été pris en compte lors de la création des signaux de synthèse. La théorie veut que lorsque la fréquence de l'onde démodulée est doublée, son niveau est multiplié par 4, soit une augmentation de 12 dB, ce qui n'est pas le cas ici ; ceci est dû au fait que ce phénomène est compensé partiellement par la forme de la réponse fréquentielle de l'antenne (cf. FIG. 5.5). Le niveau du premier harmonique de chaque signal est du même ordre de grandeur que celui du bruit de fond.

La figure 5.14 présente la décroissance spatiale du niveau de la fondamentale de l'onde démodulée (notée H1) et du premier harmonique obtenus pour les antennes 2 mm et 4 mm dans le cas d'une excitation à 1 kHz et pour le conditionnement BLU. Les résultats obtenus montrent que l'antenne 2 mm permet d'émettre la fréquence fondamentale à un niveau supérieur d'environ 8 dB à celui obtenu par l'antenne 4 mm. En revanche le niveau du premier harmonique généré par l'antenne 2 mm est supérieur d'environ 25 dB à celui obtenu pour l'antenne 4 mm. En conclusion, l'antenne 2 mm permet de générer

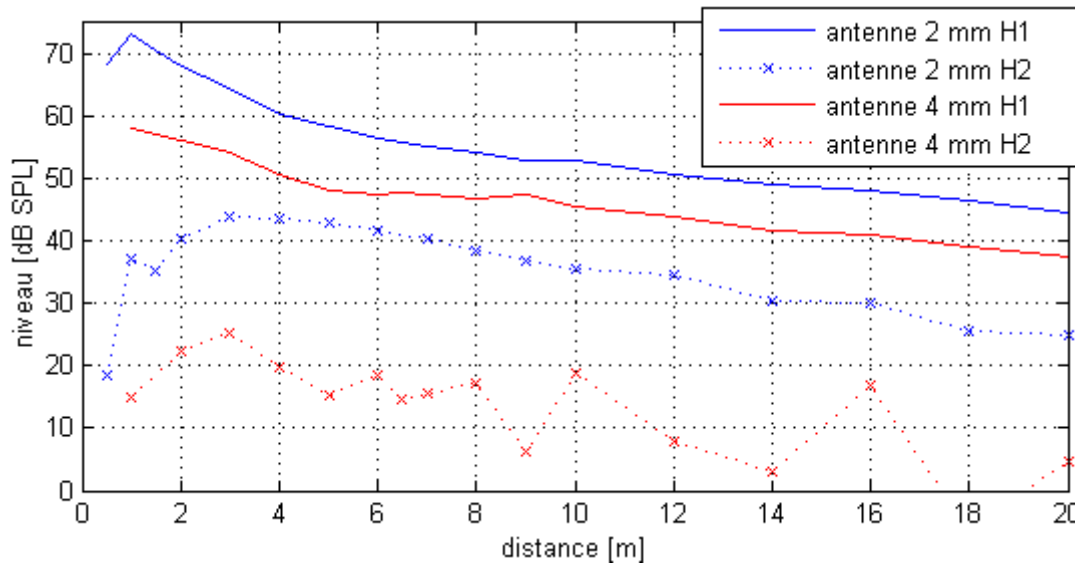


FIG. 5.14 – Évolution du niveau sonore de l'onde démodulée de 1 kHz (H1) et de sa première harmonique (H2) en fonction de la distance et de l'antenne utilisée (traitement : BLU).

un niveau de porteuse supérieur à celui généré par l'antenne 4 mm (15 dB). Ceci permet d'augmenter l'efficacité de la démodulation au détriment d'une augmentation de la distorsion.

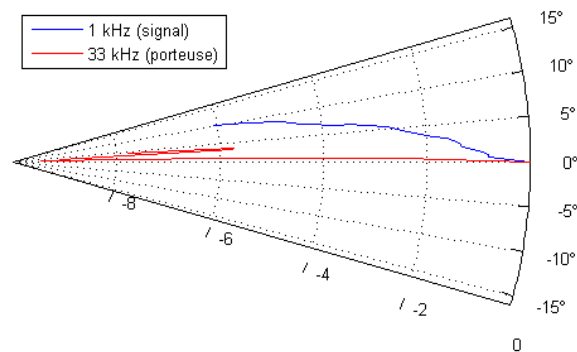


FIG. 5.15 – Comparaison de la directivité de l'onde démodulée de 1 kHz issue de l'antenne de 4 mm et de celle de la porteuse à 10 m.

La figure 5.15 compare la directivité à 10 m de l'onde démodulée, ici un sinus à 1 kHz à celle de la porteuse à 33 kHz. La directivité de la porteuse est équivalente à celle mesurée en chambre anéchoïque (FIG. 5.7) c'est à dire qu'elle présente un lobe principal d'ouverture à -6 dB d'environ 1,5° et le premier lobe secondaire autour de 4°. L'onde démodulée quant à elle ne présente qu'un seul lobe sur la plage angulaire de mesure et dont l'ouverture à -6 dB est de 10°.

D'après les résultats présentés à la figure 5.16 la directivité de l'onde démodulée n'est pas affectée par la distance, elle reste égale à 10°. Toutefois les mesures à 5 m présentent un niveau supérieur à 1° que dans l'axe ce qui est sans doute dû à une légère brise qui a dévié le « faisceau » acoustique, la directivité mesurée à 5 m serait donc plutôt de 9°.

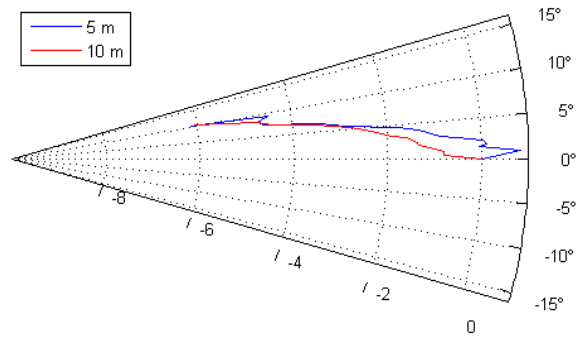


FIG. 5.16 – Directivité de l'onde démodulée de 1 kHz issue de l'antenne de 4 mm à différentes distances.

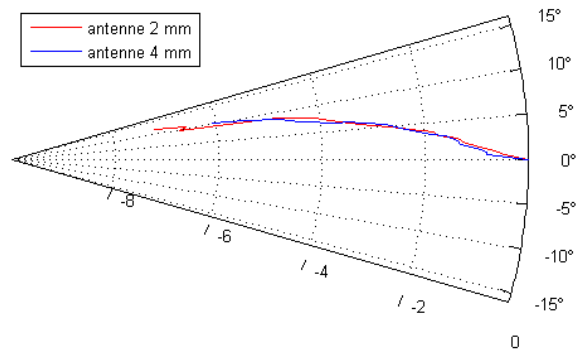


FIG. 5.17 – Directivité de l'onde démodulée de 1 kHz à 10 m pour les deux antennes.

La directivité en champ « lointain » (10 m) ne semble pas affectée par la différence d'antenne et donc de fréquence de la porteuse et de niveau d'émission. Les courbes de directivité de l'antenne 2 mm et de l'antenne 4 mm à 10 m se superposent parfaitement (FIG. 5.17).

### 5.2.1.3 Comparaison avec la théorie

Nous proposons ici de comparer les courbes de décroissance spatiale des niveaux de l'onde démodulée et de l'onde porteuse obtenues par la mesure d'une part, et à l'aide des modèles décrits au chapitre 1 d'autre part. La figure 5.18 présente les courbes de décroissance théoriques et expérimentales. Les résultats montrent que les niveaux mesurés sont inférieurs aux niveaux calculés (à 20 m, -20 dB pour la porteuse et l'onde démodulée). Lorsqu'une atténuation supplémentaire (de l'ordre de 15 dB, obtenue de manière à faire correspondre la théorie et la mesure), due aux effets non linéaires, est ajoutée de manière à obtenir une courbe de décroissance du niveau de la porteuse plus réaliste, la prédiction de l'onde démodulée par le modèle s'en trouve grandement améliorée (cf. FIG. 5.19).

### 5.2.2 Le conditionneur réalisé

Afin de pouvoir utiliser le prototype d'antenne paramétrique à l'aide de signaux réels (et non avec des signaux de synthèse), un conditionneur est réalisé. Par souci de simplicité nous avons choisi le



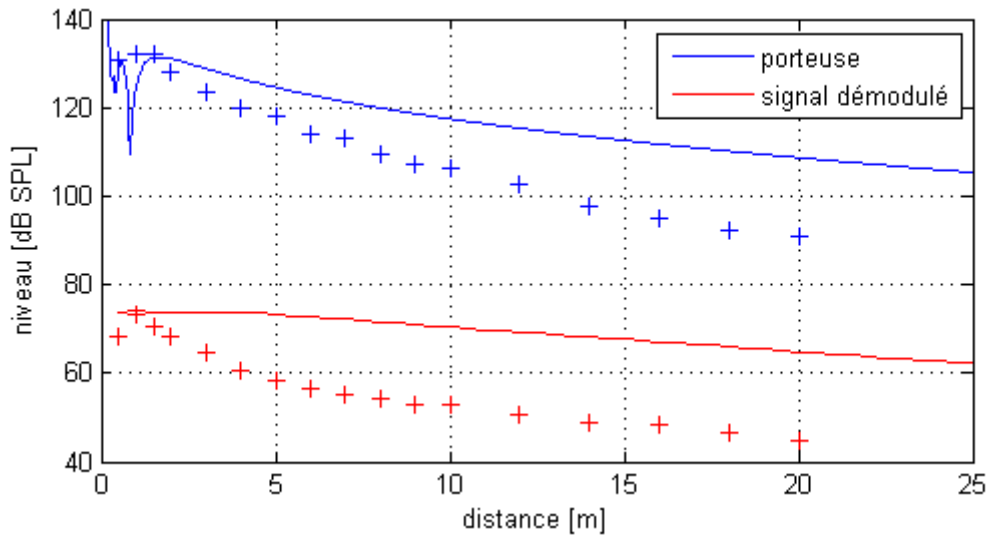


FIG. 5.18 – Comparaison du niveau de la porteuse (36,5 kHz) et du signal démodulé (1 kHz) théorique (atténuation atmosphérique classique) et mesuré (les traits continus représentant la théorie et les croix l'expérience).

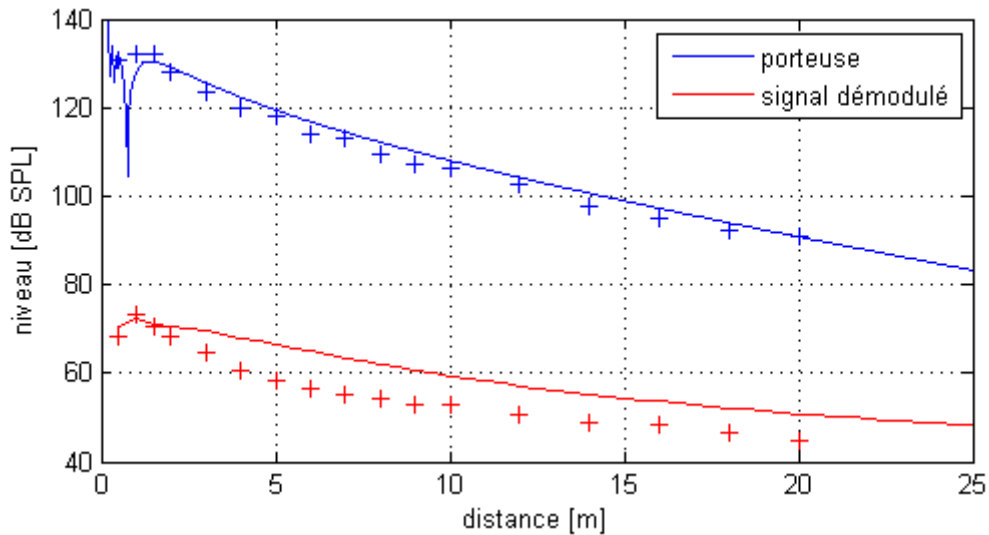


FIG. 5.19 – Comparaison du niveau de la porteuse (36,5 kHz) et du signal démodulé (1 kHz) théorique (atténuation atmosphérique modifiée) et mesuré (les traits continus représentant la théorie et les croix l'expérience).

conditionnement à base de la racine carrée. En effet le chapitre 4 démontre que pour des signaux complexes (plus d'une composante fréquentielle) le conditionnement basé sur la BLU requiert un traitement itératif pour compenser efficacement les distorsions et donc il est nécessaire d'utiliser un DSP. Le conditionnement basé sur la racine carrée quant à lui donne de bons résultats malgré une bande passante limitée et est réalisable à l'aide d'une électronique exclusivement analogique.

L'antenne paramétrique n'est pas caractérisée une nouvelle fois avec le conditionneur. Afin de vérifier le bon fonctionnement du conditionneur, les signaux issus de celui-ci sont comparés aux signaux de synthèse, puis le rayonnement de l'antenne est comparé lorsqu'elle est excitée par le conditionneur ou par les signaux de synthèse.

### 5.2.2.1 Description

Le conditionneur réalise le traitement basé sur la racine carrée (cf. chapitre 4) son schéma de principe est présenté à la figure 5.20. Il commence par appliquer un offset au signal d'entrée avant d'en calculer la racine carrée. Cette racine carrée est ensuite modulée en amplitude par une porteuse dont la fréquence est réglable sur une large bande (20-80 kHz) comprenant la fréquence de porteuse idéale pour chaque antenne. Le signal est amplifié pour choisir la gamme de tension de sortie. Néanmoins ceci ne suffit pas à alimenter directement les antennes, la sortie du conditionneur est donc une nouvelle fois amplifiée par l'amplificateur *Denton A350*. Le conditionneur est entièrement fabriqué grâce à de l'électronique analogique et est décrit en détail à l'annexe F.

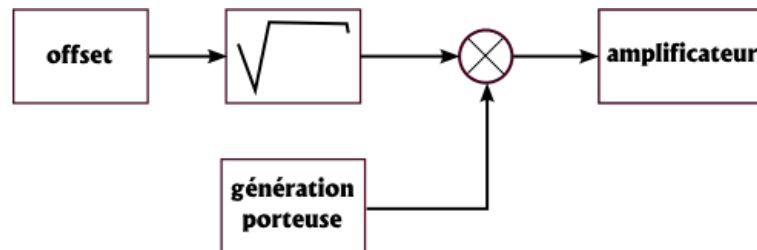


FIG. 5.20 – Schéma de principe de l'électronique réalisée.

### 5.2.2.2 Caractérisation du conditionneur

Le conditionneur fonctionne pour des signaux d'entrée dont la tension est comprise entre -0,5 et 0,5 V et dont la fréquence est supérieure à 300 Hz. Il a été testé avec succès pour des fréquences allant jusqu'à 5 kHz. La fréquence de la porteuse qu'il génère est réglable entre 20 et 80 kHz grâce à un potentiomètre mais concrètement nous n'utilisons que la plage 30-40 kHz. La tension de sortie du conditionneur est également réglable tout en restant comprise entre -15 et 15 V, mais il ne peut délivrer que quelques milliampères. L'ensemble de ces restrictions sont dues à des limitations technologiques et sont justifiées dans l'annexe F.

De façon à valider le principe du conditionneur, le spectre des signaux de sortie du conditionneur

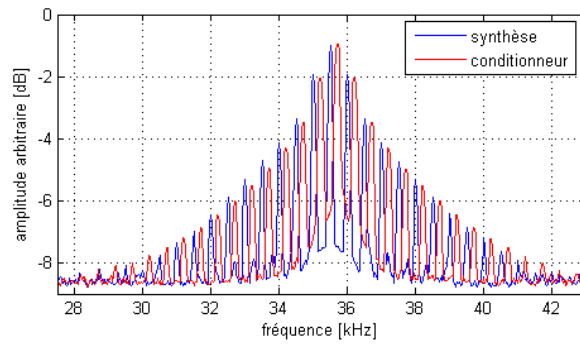


FIG. 5.21 – Comparaison des signaux de synthèse et des signaux issus du conditionneur dans le cas d'un signal d'entrée de 500 Hz.

est comparé au spectre des signaux de synthèse obtenus à l'aide de l'opérateur racine carrée. La figure 5.21 présente les résultats obtenus pour un signal sinusoïdal de 500 Hz modulant en amplitude une porteuse de 35,5 kHz. Les courbes sont identiques à la légère différence de fréquence porteuse près. Le conditionneur réalise donc une racine carrée parfaitement valide.

### 5.2.2.3 Validation du conditionneur en présence de l'antenne

Afin de valider le fonctionnement du conditionneur *in situ*, la sortie de celui-ci est connecté à l'entrée de l'amplificateur *Denton A350*, qui alimente l'antenne 2 mm placée dans la chambre anechoïque. Le signal de pression émis est mesuré par un microphone *BK 1/4" 4938* placé à 2,5 m et branché sur l'analyseur de spectre *Stanford SR 780* qui retourne le spectre du signal reçu par le microphone. Le conditionneur est ensuite remplacé par le générateur de fonction répétant les signaux de synthèse.

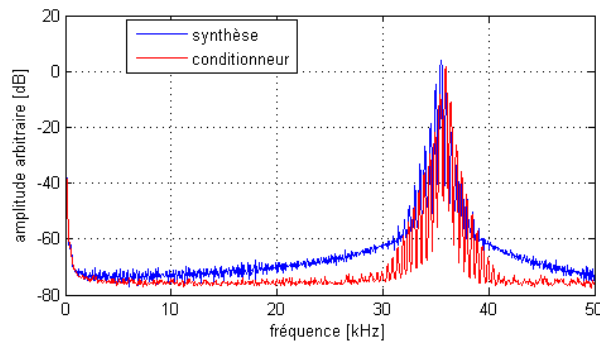


FIG. 5.22 – Comparaison des signaux issus de l'antenne 2 mm pour des signaux de synthèse et des signaux issus du conditionneur.

La figure 5.22 présente la densité spectrale de puissance des pressions acoustiques mesurées d'une part lorsque les signaux de synthèse sont utilisés, d'autre part lorsque le conditionneur est utilisé. La figure 5.22 montre que le conditionneur permet d'obtenir un spectre proche de celui obtenu à l'aide des signaux de synthèse. En outre le conditionneur masque moins les raies latérales que le système de

synthèse et fait ainsi mieux apparaître la modulation d'amplitude.

### 5.3 Conclusion

Ce chapitre présente le prototype d'antenne paramétrique réalisé. La caractérisation du réseau de transducteurs en émission directe a permis de mettre en évidence un problème d'estimation des fréquences de résonance du modèle physique de transducteurs développé au chapitre 3. Des causes possibles ont été avancées, notamment l'erreur réalisée lors de l'estimation de la tension linéique de la membrane ( $T_0$ ) qui joue un rôle important sur la fréquence de résonance du transducteur. Les essais d'auto-démodulation réalisés montrent l'apparition des ondes secondaires grâce à l'interaction des ondes primaires. Toutefois le cahier des charges n'est pas rempli en terme de niveau d'émission. En effet le niveau des ondes démodulées n'atteint pas les 50 dB SPL à 50 m. Ceci est dû à un choix de méthode de résolution de l'équation de KZK trop simpliste effectué au début de l'étude. Un premier conditionneur à base d'une racine carrée a été réalisé et son étude préliminaire montre qu'il devrait être capable d'effectuer le traitement nécessaire pour diminuer les distorsions.



# Conclusion

Ce travail a porté sur l'étude des antennes paramétriques utilisées comme haut-parleurs directifs. L'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu a été étudié afin de déterminer les paramètres importants et leur influence sur le signal démodulé.

Les principes de l'auto-démodulation d'amplitude et les équations qui la gouvernent ont été rappelés. Ceci a permis de définir les caractéristiques de l'onde porteuse et celles du traitement du signal connaissant les propriétés souhaitées du champ démodulé.

Les principes des réseaux de transducteurs ont été rappelés et utilisés pour définir un arrangement géométrique qui permette d'obtenir la directivité souhaitée.

Le comportement d'un transducteur élémentaire, constitué d'un film PVDF couplé à une cavité cylindrique où règne un vide partiel, a été étudié à l'aide de deux modèles. Le premier modèle s'appuie sur les résultats de travaux menés sur les microphones miniatures. Il décrit la pression dans la cavité à l'aide d'un double développement, l'un sur les modes de membrane, l'autre sur les modes axiaux de la cavité. Le deuxième modèle utilise une formulation de Green de la cavité et une expression de la vitesse de la membrane composée d'un terme traduisant la réponse de la membrane dans le vide et d'un autre terme traduisant le couplage avec la cavité. Un prototype de transducteur a été réalisé puis caractérisé de façon à évaluer ces modèles. Les résultats montrent une excellente concordance entre les deux modèles. Les pressions rayonnées mesurée et calculée présentent un écart significatif aux basses fréquences de 6 à 10 dB. En revanche les modèles donnent des tendances correctes à partir de la première fréquence de résonance. Cependant, l'application de ces modèles au rayonnement de petites dimensions (diamètre de 4 mm) ne permet pas de déterminer correctement les fréquences de résonance.

L'étude de deux méthodes de traitement du signal (opérateur racine carrée, BLU) a montré l'intérêt d'utiliser la racine carrée si la bande passante du transducteur est suffisamment large. Dans le cas contraire, la BLU doit être utilisée mais elle nécessite un temps de calcul important dû à un traitement itératif des distorsions.

Enfin deux prototypes ont été conçus, réalisés et caractérisés. Le premier est constitué de 2372 cellules de diamètre 4 mm, le second de 6350 cellules de 2 mm. Les deux prototypes utilisent un arrangement hexagonal, un film PVDF d'épaisseur 25  $\mu\text{m}$  et des cavités de profondeur 3 mm. Les résultats obtenus montrent que pour les ondes primaires (au voisinage de la fréquence porteuse) l'angle

d'ouverture à -6 dB est inférieur à  $2^\circ$ , le niveau est de 123 dB SPL à 2,5 m pour 25 Vrms (pour l'antenne 2 mm). Dans le cas d'une utilisation en antenne paramétrique, le signal démodulé présente à 1 kHz un angle d'ouverture à -6 dB de  $10^\circ$ , un niveau de 45 dB SPL à 20 m (pour une onde porteuse de fréquence 33,5 kHz et de niveau 132 dB SPL à 1 m émise par l'antenne 2 mm).

Le cahier des charges est partiellement respecté.

- L'angle d'ouverture obtenu expérimentalement correspond à celui attendu ( $10^\circ$ ),
- La réponse en fréquence de l'antenne paramétrique n'a pas été mesurée. Aucune conclusion ne peut donc être tirée sur ce point,
- Le niveau de l'onde démodulée est de 45 dB SPL à 20 m, ce qui est beaucoup plus faible que le niveau attendu (50 dB SPL à 50 m) bien que le niveau mesuré de l'onde porteuse corresponde à celui défini lors de l'étude (130 dB à 1 m). Cette différence non attendue est en grande partie à attribuer au fait que le modèle utilisé pour décrire les interactions non linéaires ne prenant pas en compte l'atténuation supplémentaire induite par la déformation de l'onde porteuse au cours de sa propagation.

En vue de compléter cette étude, une attention particulière devra être apportée d'une part aux modèles, d'autre part à la technologie.

Les modèles de comportement de transducteurs nécessitent de mieux estimer, par calcul ou mesure, la tension mécanique de la membrane soumise à une différence de pression. Cette amélioration devrait permettre de corriger, au moins en partie, les écarts constatés entre les fréquences de résonance théoriques et expérimentales. Par ailleurs, la prise en compte de l'atténuation due à la déformation de l'onde porteuse devrait permettre d'estimer plus précisément le niveau d'onde porteuse nécessaire.

D'un point de vue technologique, le conditionneur nécessite des améliorations permettant de supprimer les instabilités constatées (utilisation d'un DSP). D'autre part une électronique de puissance adaptée au caractère capacitif du transducteur devra être conçue afin de fournir une tension électrique plus importante et ainsi tester les limites des prototypes réalisés.

## Annexe A

# Détails des calculs liés à la théorie des réseaux

Cette annexe présente les calculs détaillés permettant d'obtenir la fonction de directivité de réseaux rectiligne, rectangle, et hexagonal de sources ponctuelles dans le cas du champ lointain.

### A.1 réseaux rectilignes

Afin d'obtenir le champ de pression rayonné par un réseau, il est nécessaire de sommer la contribution de chaque source du réseau. la pression est donc

$$p(\vec{r}) = jk\rho_0 c_0 \sum_n q_n \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}_n|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_n|}, \quad (\text{A.1})$$

où l'indice  $n$  décrit l'ensemble des sources,  $\vec{r}$  est le vecteur position du point d'observation  $M$ ,  $\vec{r}_n$  le vecteur position de la source  $n$  et donc  $|\vec{r} - \vec{r}_n|$  est la distance entre le point d'observation et la source  $n$ .

Dans le cas d'un réseau rectiligne, il existe une symétrie de révolution autour de l'axe formé par les différentes sources, le problème se limite donc à un problème à deux dimensions. L'espace est donc décrit à l'aide d'un repère polaire dont l'origine se situe au centre du réseau. Il convient de distinguer deux cas : le cas des réseaux possédant un nombre de source  $N$  impair où l'origine du repère se confond avec une source qui est désignée par l'indice 0 (cf. FIG. A.1) et le cas des réseaux possédant un nombre  $N$  pair de source pour lesquels l'origine du repère se trouve entre deux sources, dans ce cas il n'y a pas de source d'indice 0 et les sources d'indice 1 et -1 sont séparées par une distance égale à  $2d$  au centre de laquelle se trouve l'origine.

#### N impair

Le fait de se placer en champ lointain permet de considérer que les vecteurs  $(\vec{r} - \vec{r}_n)$  et  $(\vec{r} - \vec{r}_m)$  sont parallèles quelque soit  $n$  et  $m$ . La différence de trajet parcouru par une onde émise par la source





**N pair**

Dans le cas d'un réseau possédant un nombre de sources pair, il est nécessaire de considérer séparément les sources à droite (indice positif) et à gauche (indice négatif) du centre du réseau. la pression s'écrit alors

$$p(r, \theta) = A(r) \left[ \sum_{n=-1}^{-\frac{N}{2}} q_n \exp(-2jkd(n + 1/2) \sin \theta) + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} q_n \exp(-2jkd(n - 1/2) \sin \theta) \right], \quad (\text{A.9})$$

soit dans le cas de N sources identiques ( $q_n = q \quad \forall n$ ),

$$p(r, \theta) = A(r) 2q \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \cos(2kd(n - 1/2) \sin \theta). \quad (\text{A.10})$$

Les relations trigonométriques permettent d'écrire la relation précédente sous la forme,

$$p(r, \theta) = A(r) 2q \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} [\cos(2kdn \sin \theta) \cos(kd \sin \theta) + \sin(2kdn \sin \theta) \sin(kd \sin \theta)]. \quad (\text{A.11})$$

D'après les relations sur les séries de cosinus et de sinus,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \cos(n\alpha) = \frac{\sin(\frac{N}{2}\alpha) \cos(\frac{N-1}{2}\alpha)}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1, \quad (\text{A.12})$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sin(n\alpha) = \frac{\sin(\frac{N}{2}\alpha) \sin(\frac{N-1}{2}\alpha)}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (\text{A.13})$$

et des relations de la trigonométrie, l'expression de la pression devient,

$$p(r, \theta) = A(r) q \frac{\sin(kdN \sin \theta)}{\sin(kd \sin \theta)}. \quad (\text{A.14})$$

Celle-ci correspond à l'expression de la pression pour les réseaux possédant un nombre impair de sources (équ. (A.6)), l'expression de la directivité est donc également identique.

**A.2 réseaux à deux dimensions**

Les réseaux à deux dimensions correspondent à une répartition des sources ponctuelles sur le plan  $Oxy$ . Deux cas sont étudiés, les réseaux rectangulaires et les réseaux hexagonaux (cf. FIG. 2.3).

Afin de pouvoir reprendre le même type de raisonnement que pour les réseaux rectilignes, l'espace doit être décrit de manière à ce qu'un changement de source suivant  $y$  entraîne une différence de trajet parcouru dépendant d'un angle  $\theta_y$  et qu'un changement de source suivant  $x$  entraîne une différence de trajet parcouru dépendant d'un angle  $\theta_x$ . Pour cela les mêmes angles que Deffarges [25] sont utilisés, à savoir : le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  forme avec les axes les angles  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ , donc  $M_x = OM \cos(\varphi_x), M_y = OM \cos(\varphi_y), M_z = OM \cos(\varphi_z)$ . Par similitude avec le cas du réseau rectiligne, les conjugués par rapport à  $\pi/2$  des angles suivant  $x$  et  $y$  sont considérés ( $\theta_x = \pi/2 - \varphi_x$  et  $\theta_y = \pi/2 - \varphi_y$ ) et l'angle suivant  $z$  conserve la même définition ( $\theta_z = \varphi_z$ ) (cf. FIG. A.2)

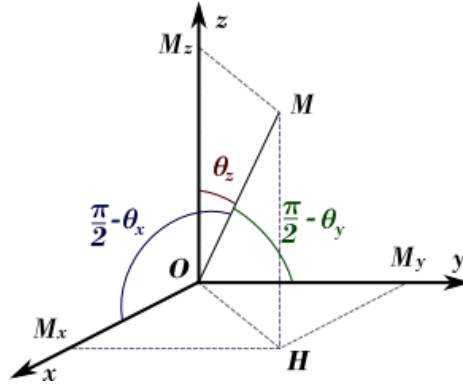


FIG. A.2 – Définition des angles.

### réseau rectangulaire

Le réseau rectangulaire correspond à un arrangement des sources assimilable à une matrice de  $N \times M$  sources dont l'écart entre elles est  $2d_x$  suivant  $x$  et  $2d_y$  suivant  $y$ . Seul le cas de  $N$  et  $M$  impairs est présenté ici sachant qu'il est possible de reprendre le même type de raisonnement que pour le cas du réseau rectiligne possédant un nombre de sources pairs si l'un ou l'autre (ou les deux) est pair. Étant donné la nature des angles considérés, il est aisé de montrer que  $|\vec{r} - \vec{r}_{nm}| = r + 2d_x n \sin \theta_x + 2d_y m \sin \theta_y$ , avec  $r = |\vec{r} - \vec{r}_{00}|$  la distance entre le centre du réseau et le point d'observation. La pression totale rayonnée par le réseau est,

$$p(\vec{r}) = jk\rho_0 c_0 \sum_n \sum_m q_{nm} \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}_{nm}|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_{nm}|}. \quad (\text{A.15})$$

Elle peut alors s'écrire,

$$p(r, \theta_x, \theta_y) = A(r) \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} q_{nm} \exp(-2jk d_x n \sin \theta_x) \exp(-2jk d_y m \sin \theta_y). \quad (\text{A.16})$$

Dans le cas où toutes les sources du réseau sont identiques ( $q_{nm} = q \quad \forall n, m$ ) et en suivant la même démarche que dans le cas du réseau rectiligne, il est aisé de montrer que

$$p(r, \theta_x, \theta_y) = A(r)q \frac{\sin(kd_x N \sin \theta_x)}{\sin(kd_x \sin \theta_x)} \frac{\sin(kd_y M \sin \theta_y)}{\sin(kd_y \sin \theta_y)}. \quad (\text{A.17})$$

La pression dans l'axe est donc,

$$p(r, 0, 0) = A(r)qNM, \quad (\text{A.18})$$

et la directivité,

$$h(\theta_x, \theta_y) = \frac{\sin(kd_x N \sin \theta_x)}{N \sin(kd_x \sin \theta_x)} \frac{\sin(kd_y M \sin \theta_y)}{M \sin(kd_y \sin \theta_y)}. \quad (\text{A.19})$$

## réseau hexagonal

Le réseau dit hexagonal est composé de deux réseaux rectangulaires en quinconce, l'un de  $N \times M$  sources et l'autre de  $N_2 \times M_2$  sources avec  $N_2 = N - 1$  et  $M_2 = M - 1$ . En posant,

$$\alpha_x(\theta_x) = 2kd_x \sin \theta_x, \quad \alpha_y(\theta_y) = 2kd_y \sin \theta_y, \quad (\text{A.20})$$

et en considérant le cas où  $N$  et  $M$  sont impaires l'expression de la pression rayonnée par le réseau hexagonal est,

$$\begin{aligned} p(r, \theta_x, \theta_y) = & A(r) \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} q_{nm} \exp(-jn\alpha_x(\theta_x)) \exp(-jm\alpha_y(\theta_y)) \\ & + A(r) \sum_{n_2=-\frac{N_2}{2}}^{-1} \sum_{m_2=-\frac{M_2}{2}}^{-1} q_{n_2m_2} \exp(-j(n_2 + \frac{1}{2})\alpha_x(\theta_x)) \exp(-j(m_2 + \frac{1}{2})\alpha_y(\theta_y)) \\ & + A(r) \sum_{n_2=-\frac{N_2}{2}}^{-1} \sum_{m_2=1}^{\frac{M_2}{2}} q_{n_2m_2} \exp(-j(n_2 + \frac{1}{2})\alpha_x(\theta_x)) \exp(-j(m_2 - \frac{1}{2})\alpha_y(\theta_y)) \\ & + A(r) \sum_{n_2=1}^{\frac{N_2}{2}} \sum_{m_2=-\frac{M_2}{2}}^{-1} q_{n_2m_2} \exp(-j(n_2 - \frac{1}{2})\alpha_x(\theta_x)) \exp(-j(m_2 + \frac{1}{2})\alpha_y(\theta_y)) \\ & + A(r) \sum_{n_2=1}^{\frac{N_2}{2}} \sum_{m_2=1}^{\frac{M_2}{2}} q_{n_2m_2} \exp(-j(n_2 - \frac{1}{2})\alpha_x(\theta_x)) \exp(-j(m_2 - \frac{1}{2})\alpha_y(\theta_y)). \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

Pour un réseau de sources identiques ( $q_{nm} = q_{n_2m_2} = q \quad \forall n, m, n_2, m_2$ ) et en reprenant la même démarche de calcul, la pression dans l'axe est

$$p(r, 0, 0) = A(r)(NM + N_2M_2)q, \quad (\text{A.22})$$

et la directivité,

$$h(\theta_x, \theta_y) = \frac{1}{NM + N_2M_2} \left[ \frac{\sin(Nkd_x \sin \theta_x)}{\sin(kd_x \sin \theta_x)} \frac{\sin(Mkd_y \sin \theta_y)}{\sin(kd_y \sin \theta_y)} + \frac{\sin(N_2kd_x \sin \theta_x)}{\sin(kd_x \sin \theta_x)} \frac{\sin(M_2kd_y \sin \theta_y)}{\sin(kd_y \sin \theta_y)} \right]. \quad (\text{A.23})$$



## Annexe B

# Résolution du problème de Hencky

La membrane est considérée circulaire de rayon  $a$ , isotrope, sans prétension ou relachement et est encastrée sur sa périphérie. Une différence de pression  $P$  est appliquée entre ces deux faces, la force résultante est supposée normale à la surface de la membrane au repos, et les contraintes  $\sigma$  sont réparties uniformément dans l'épaisseur  $h$  de la membrane. Le problème considéré possède une symétrie de révolution.

Les déformations  $\varepsilon$  et les contraintes  $\sigma$  s'expriment de la manière suivante [30],  $\forall r \in [0; a]$ ,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_s}{dr} \right)^2, \quad (\text{B.1a})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (\text{B.1b})$$

$$\sigma_r = \frac{E_m h}{1 - \nu_m^2} (\nu \varepsilon_\theta + \varepsilon_r), \quad (\text{B.2a})$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_m h}{1 - \nu_m^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \quad (\text{B.2b})$$

où  $u$  est le déplacement radial de la membrane,  $w_s$  son déplacement transverse,  $E_m$  son module de Young et  $\nu_m$  son coefficient de Poisson.

L'équilibre radial est alors décrit par l'équation,

$$\sigma_\theta = \frac{d}{dr}(r\sigma_r), \quad (\text{B.3})$$

et l'équilibre vertical par,

$$\sigma_r \frac{dw_s}{dr} = -\frac{Pr}{2}. \quad (\text{B.4})$$

Étant donné l'encastrement à la périphérie de la membrane et la symétrie du problème, les conditions aux limites sont

$$w_s(a) = u(a) = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\left. \frac{dw_s}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (\text{B.6})$$

En définissant les quantités sans dimensions  $W = w_s/a$ ,  $N = \sigma_r/(E_m h)$ ,  $R = r/a$  et  $q = Pa/(E_m h)$ , le système d'équation formé par les équations B.1 à B.4, peut s'écrire

$$R \frac{d}{dR} \left[ \frac{d}{dR} (RN) + N \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dR} \right)^2 = 0. \quad (\text{B.7})$$

$$N \frac{dW}{dR} = -\frac{1}{2} q R. \quad (\text{B.8})$$

La substitution de l'équation (B.8) dans l'équation (B.7) donne l'équation différentielle

$$N^2 \frac{d}{dR} \left[ \frac{d}{dR} (RN) + N \right] + \frac{1}{8} q^2 R = 0. \quad (\text{B.9})$$

Hencky [28] suppose que les solutions des équations (B.9) et (B.8) sont de forme polynomiale,

$$N(R) = \frac{1}{4} q^{2/3} \sum_0^\infty b_{2n} R^{2n}, \quad (\text{B.10})$$

$$W(R) = q^{1/3} \sum_0^\infty a_{2n} (1 - R^{2n+2}). \quad (\text{B.11})$$

La résolution de ce problème à l'ordre 4 conduit à réinjecter l'équation (B.10) dans l'équation (B.9), afin de déterminer les coefficients  $b_{2n}$  pour  $n$  compris entre 0 et 4, l'équation devient

$$(b_0 + b_2 R^2 + b_4 R^4 + b_6 R^6 + b_8 R^8)^2 (8b_2 R + 24b_4 R^3 + 48b_6 R^5 + 80b_8 R^7) = -8R. \quad (\text{B.12})$$

En développant le terme de gauche et en égalisant les coefficients de même puissance de  $R$ , il est possible d'exprimer les différents coefficients  $b_{2n}$  en fonction de  $b_0$ ,

$$b_2 = -\frac{1}{b_0^2}, \quad b_4 = -\frac{2}{3b_0^5}, \quad b_6 = -\frac{13}{18b_0^8}, \quad b_8 = -\frac{17}{18b_0^{11}} \quad (\text{B.13})$$

Les coefficient  $a_{2n}$  sont obtenus en injectant les équations (B.10) et (B.11) dans l'équation (B.8), qui devient

$$(b_0 + b_2 R^2 + b_4 R^4 + b_6 R^6 + b_8 R^8) (a_0 + 2a_2 R^2 + 3a_4 R^4 + 4a_6 R^6 + 5a_8 R^8) = 1. \quad (\text{B.14})$$

En développant le terme de gauche et en égalisant les coefficient de même puissance de  $R$ , il est possible d'exprimer les différents coefficients  $a_{2n}$  en fonction de  $b_0$ ,

$$a_0 = \frac{1}{b_0}, \quad a_2 = \frac{1}{2b_0^4}, \quad a_4 = \frac{5}{9b_0^7}, \quad a_6 = \frac{55}{72b_0^{10}}, \quad a_8 = \frac{7}{6b_0^{13}} \quad (\text{B.15})$$

En utilisant les équations (B.1), (B.2) et (B.3) il est possible de réécrire la condition aux limite sur le déplacement radial ( $u(a) = 0$ ) sous la forme

$$\left[ R \left( \frac{d(RN)}{dN} - \nu R \right) \right]_{R=1} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Puis en remplaçant  $N$  par sa valeur, le coefficient  $b_0$  est déterminé en fonction du coefficient de Poisson de la membrane supposé connu,

$$(1 - \nu)b_0 - (3 - \nu)\frac{1}{b_0^2} - (5 - \nu)\frac{2}{3b_0^5} - (7 - \nu)\frac{13}{18b_0^8} - (9 - \nu)\frac{17}{18b_0^{11}} = 0. \quad (\text{B.17})$$

La résolution de cette équation étant aisée numériquement mais assez fastidieuse algébriquement, elle n'est pas détaillée ici.





## Annexe C

# Modèle du transducteur : approche différentielle

Cette annexe présente l'ensemble des équations utilisées pour la résolution du problème présenté dans la section 3.3.2.2 à l'aide de l'approche différentielle

### C.1 Équation du mouvement du fluide dans la cavité

- Équation de Navier-Stokes :

$$\partial_{ct}\vec{v} + \frac{1}{\rho c}\nabla p = \ell_v\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \ell'_v\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{v}), \quad (\text{C.1})$$

avec les longueurs caractéristiques

$$\ell_v = \frac{1}{\rho c} \left[ \frac{4}{3}\eta + \zeta \right] \quad , \quad \ell'_v = \frac{\eta}{\rho c}. \quad (\text{C.2})$$

- Équation de conservation de la masse

$$\rho c\nabla\cdot\vec{v} + \gamma\partial_{ct}(p - \tau) = 0. \quad (\text{C.3})$$

- Équation de conduction de la chaleur

$$(\partial_{ct} - \ell_h\Delta)\tau = \frac{\gamma - 1}{\epsilon\gamma}\partial_{ct}p, \quad (\text{C.4})$$

avec la longueur caractéristique

$$\ell_h = \frac{\kappa}{\rho c C_p}. \quad (\text{C.5})$$

On sépare la vitesse en vitesse tourbillonnaire  $\vec{v}_v$  (due à la viscosité) et vitesse laminaire  $\vec{v}_l$  (due aux effets acoustique et de la conduction de la chaleur) ( $\vec{v} = \vec{v}_l + \vec{v}_v$ ). A l'aide des relations

$$\nabla\cdot\vec{v}_v = 0 \quad , \quad \nabla\wedge\vec{v}_l = 0, \quad (\text{C.6})$$

on peut réécrire les relations précédentes :

$$\partial_{ct}\tau - \frac{\rho c}{\gamma\epsilon}\nabla\cdot\vec{v}_l = \frac{1}{\epsilon}\partial_{ct}p, \quad (\text{C.7})$$

$$(\partial_{ct} - \ell_h\Delta)\tau = \frac{\gamma-1}{\epsilon\gamma}\partial_{ct}p, \quad (\text{C.8})$$

$$(\partial_{ct} - \ell_v\Delta)\vec{v}_l = -\frac{1}{\rho c}\nabla p, \quad (\text{C.9})$$

$$(\partial_{ct} - \ell'_v\Delta)\vec{v}_v = 0. \quad (\text{C.10})$$

## C.2 Données du problème

### C.2.1 Condition aux limites dans la cavité

La cavité est cylindrique (les dépendances en  $\theta$  sont négligées) et les bords sont rigides sauf sur la membrane ( $z = 0$ )

$$\forall r, \tau(r, 0) = \tau(r, -l_c) = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$\forall r, v_r(r, 0) = v_z(r, -l_c) = 0, \quad (\text{C.12})$$

$$\forall r, v_r(r, -l_c) = 0, \quad (\text{C.13})$$

$$\forall r, v_z(r, 0) = \partial_t w_d(r), \quad (\text{C.14})$$

$$\forall z, v_r(a, z) = v_z(a, z) = 0, \quad (\text{C.15})$$

$$\forall z, \tau(a, z) = 0, \quad (\text{C.16})$$

### C.2.2 Équation de la membrane

L'équation différentielle décrivant les mouvements de la membrane est

$$T_0(\Delta + k_m^2)w_d(r) = p_e(r) - p_i(r, 0) + P_U, \quad (\text{C.17})$$

avec  $w_d(a) = 0$  (membrane encastree),  $k_m^2 = \omega^2\mu_m/T_0$ ,  $p_i$  est la pression dans la cavité,  $p_e$  la pression sur la face avant de la membrane (dans un premier temps on considère  $p_e(r) = j\omega w_d(r)Z_e$ , on peut donc considérer  $K^2 = k_m^2 - j\omega Z_e/T_0$  à la place de  $k_m^2$ ), et  $P_U$  la "pression utile" due à la tension électrique appliquée (terme source).

Les fonctions propres associées s'écrivent :

$$\begin{cases} (\Delta + K_{1n}^2)\Psi_{1n}(K_{1n}r) = 0 \\ \Psi_{1n}(K_{1n}a) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

où  $\Psi_{1n}(K_{1n}a) = 0$  définit les  $K_{1n}$ . Le déplacement de la membrane est donné par  $w_d(r) = \sum_n W_n \Psi_{1n}(K_{1n}r)$ , où

$$W_n = \int_0^a \frac{P_U - p_i(r, 0)}{T_0(K^2 - K_{1n}^2)} \Psi_{1n}(K_{1n}r) r dr \quad (\text{C.19})$$

## C.3 Résolution du problème

### C.3.1 Forme de la vitesse suivant $z$

D'après la condition aux limites (C.14), la vitesse en  $z = 0$  peut s'écrire sur la même base de fonctions propres que la membrane,

$$v_z(r, 0) = \sum_n u_{1n}(0) \Psi_{1n}(K_{1n}r). \quad (\text{C.20})$$

Par prolongement sur la hauteur de la cavité cette relation devient

$$v_z(r, z) = \sum_n u_{1n}(z) \Psi_{1n}(K_{1n}r) + V_z(r, z), \quad (\text{C.21})$$

avec  $V_z(r, 0) = 0$ .

$V_z$  peut-être développé sur une base de fonctions propres suivant  $z$  :

$$V_z(r, z) = \sum_n \Psi_{2n}(r) u_{2n}(k_{2n}z), \quad (\text{C.22})$$

où  $u_{2n}(k_{2n}z)$  est solution de

$$\begin{cases} (\partial_{zz} + k_{2n}^2) u_{2n}(k_{2n}z) = 0, \\ u_{2n}(k_{2n}0) = 0, \\ u_{2n}(-k_{2n}l_c) = 0. \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

### C.3.2 Équations de propagation

On définit le potentiel des vitesses comme  $\vec{v}_l = \nabla \Phi$ . La variation de pression  $p$ , la variation de température  $\tau$  et le potentiel des vitesses  $\Phi$  sont la somme d'un terme acoustique (indice  $a$  ou  $l = 1$ ) et d'un terme dû à la conduction de la chaleur (indice  $h$  ou  $l = 2$ ) [26] et sont solution de l'équation de propagation :

$$(\Delta + k_a^2) \Phi_a = 0, \quad (\Delta + k_h^2) \Phi_h = 0 \quad (\text{C.24})$$

où

$$k_a^2 = \frac{k^2}{1 + jk(\ell_v + \ell_h(\gamma - 1)) - k^2 \ell_h(\gamma - 1)(\ell_h - \ell_v)}, \quad (\text{C.25})$$

et

$$k_h^2 = \frac{-jk}{\ell_h - jk\ell_h(\gamma - 1)(\ell_h - \ell_v)}, \quad (\text{C.26})$$

avec  $k = \omega/c$ .

D'après l'équation de  $v_z$  on peut écrire le potentiel des vitesses sous la forme,

$$\Phi(r, z) = \sum_l \sum_n \Phi_{ln}(r, z), \quad (\text{C.27})$$

où

$$\Phi_{ln}(r, z) = \Phi_{1ln}(k_{1ln}z) \Psi_{1n}(K_{1n}r) + \Phi_{2n}(k_{2n}z) \Psi_{2ln}(K_{2ln}r). \quad (\text{C.28})$$

avec  $k_l^2 = k_{1ln}^2 + K_{1n}^2 = k_{2n}^2 + K_{2ln}^2$  et  $u_{2n}$  est la dérivée suivant  $z$  de  $\Phi_{2n}$ .

En coordonnées cylindriques les fonctions propres sont,

$$\begin{cases} \Psi_{1n}(K_{1n}r) = N_{1n} J_0(K_{1n}r) = 0, \\ J_0(K_{1n}a) = 0, \end{cases} \quad (C.29)$$

où

$$N_{1n} = \frac{\sqrt{2}}{a |J_1(K_{1n}a)|}, \quad (C.30)$$

et

$$\begin{cases} \Phi_{2n}(k_{2n}z) = N_{2n} \cos(k_{2n}z) = 0, \\ k_{2n} = \frac{n\pi}{l_c}, \end{cases} \quad (C.31)$$

où

$$N_{2n} = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0n}}{l_c}}. \quad (C.32)$$

Afin de résoudre l'équation de propagation (C.24) les termes  $\Phi_{1ln}$  et  $\Psi_{2ln}$  sont de la forme

$$\Phi_{1ln}(k_{1ln}z) = A_{1ln} \cos(k_{1ln}(z + l_c/2)) + B_{1ln} \sin(k_{1ln}(z + l_c/2)), \quad (C.33)$$

et

$$\Psi_{2ln}(K_{2ln}r) = A_{2ln} J_0(K_{2ln}r). \quad (C.34)$$

D'après les équations du mouvement du fluide on peut écrire,

$$\tau(r, z) = -\frac{j\rho c}{k\gamma\epsilon} \sum_l \sum_n \alpha_l k_l^2 \Phi_{ln}(r, z), \quad (C.35)$$

avec

$$\alpha_l = \frac{\gamma - 1}{1 - j\gamma\ell_h k_l^2/k}, \quad (C.36)$$

et

$$p(r, z) = -\frac{j\rho c}{k\gamma} \sum_l \sum_n (\alpha_l + 1) k_l^2 \Phi_{ln}(r, z). \quad (C.37)$$

De même on peut démontrer que  $v_{vz}$  est de la forme,

$$v_{vz}(r, z) = \sum_n [\Phi_{1vn}(k_{1vn}z) \Psi_{1n}(K_{1n}r) + \Phi_{2n}(k_{2n}z) \Psi_{2vn}(K_{2vn}r)]. \quad (C.38)$$

avec  $k_v^2 = k_{1vn}^2 + K_{1n}^2 = k_{2n}^2 + K_{2vn}^2 = -i\rho\omega/\eta$ . Afin de résoudre l'équation  $\nabla \cdot \vec{v}_v = 0$  la composante suivant  $r$  de  $v_v$  est donnée par :

$$v_{vr}(r, z) = \sum_n \left[ \frac{1}{K_{1n}^2} \partial_z \Phi_{1vn}(k_{1vn}z) \nabla \Psi_{1n}(K_{1n}r) - \frac{k_{2n}^2}{K_{2vn}^2} \Phi_{2n}(k_{2n}z) \nabla \Psi_{2vn}(K_{2vn}r) \right]. \quad (C.39)$$

## C.4 Résolution

Étant donné le caractère évanescent des modes du second développement seul le mode  $n=0$  est considéré pour les termes de ce développement, d'où  $k_{2n} = 0$  et  $N_{2n} = 1/\sqrt{l_c}$ . On a donc les écritures simplifiées des relations  $K_{2ln} = k_l$ ,  $K_{2vn} = k_v$ ,  $\Phi_{2n} = 1/\sqrt{l_c}$ ,  $A_{2l0} = A_{2l}$ . On obtient donc les grandeurs,

$$\begin{aligned} v_{lr}(r, z) &= - \sum_{n,l} [A_{1ln} \cos(k_{1ln}(z + l_c/2)) + B_{1ln} \sin(k_{1ln}(z + l_c/2))] N_{1n} K_{1n} J_1(K_{1n}r) \\ &\quad - \sum_l \frac{A_{2l}}{\sqrt{l_c}} k_l J_1(k_l r) \end{aligned} \quad (C.40)$$

$$v_{lz}(r, z) = - \sum_{n,l} [A_{1ln} k_{1ln} \sin(k_{1ln}(z + l_c/2)) - B_{1ln} k_{1ln} \cos(k_{1ln}(z + l_c/2))] N_{1n} J_0(K_{1n}r) \quad (C.41)$$

$$v_{vr}(r, z) = \sum_n \frac{k_{1vn}}{K_{1n}} [A_{1vn} \sin(k_{1vn}(z + l_c/2)) - B_{1vn} \cos(k_{1vn}(z + l_c/2))] N_{1n} J_1(K_{1n}r) \quad (C.42)$$

$$v_{vz}(r, z) = \sum_n [A_{1vn} \cos(k_{1vn}(z + l_c/2)) + B_{1vn} \sin(k_{1vn}(z + l_c/2))] N_{1n} J_0(K_{1n}r) \quad (C.43)$$

$$\begin{aligned} \tau(r, z) &= - \frac{j\rho c}{k\gamma\epsilon} \sum_l \alpha_l k_l^2 \sum_n [A_{1ln} \cos(k_{1ln}(z + l_c/2)) + B_{1ln} \sin(k_{1ln}(z + l_c/2))] N_{1n} J_0(K_{1n}r) \\ &\quad - \frac{j\rho c}{k\gamma\epsilon} \sum_l \alpha_l k_l^2 \frac{A_{2l}}{\sqrt{l_c}} J_0(k_l r) \end{aligned} \quad (C.44)$$

$$\begin{aligned} p(r, z) &= - \frac{j\rho c}{k\gamma} \sum_l (\alpha_l + 1) k_l^2 \sum_n [A_{1ln} \cos(k_{1ln}(z + l_c/2)) + B_{1ln} \sin(k_{1ln}(z + l_c/2))] N_{1n} J_0(K_{1n}r) \\ &\quad - \frac{j\rho c}{k\gamma} \sum_l (\alpha_l + 1) k_l^2 \frac{A_{2l}}{\sqrt{l_c}} J_0(k_l r) \end{aligned} \quad (C.45)$$

On pose également :

$$C_{ln} = \cos k_{1ln} l_c/2, \quad S_{ln} = \sin k_{1ln} l_c/2, \quad (C.46)$$

et

$$C_{vn} = \cos k_{1vn} l_c/2, \quad S_{vn} = \sin k_{1vn} l_c/2, \quad (C.47)$$

Les conditions aux limites s'écrivent alors :

- C1 :  $\tau(r, 0) = 0$  projeté sur  $N_{1n} J_0(K_{1n}r)$  :

$$\sum_l \alpha_l k_l^2 \left[ A_{1ln} C_{ln} + B_{1ln} S_{ln} + A_{2l} S_{J1n} \sqrt{\frac{2}{l_c}} \frac{K_{1n}}{K_{1n}^2 - k_l^2} J_0(k_l a) \right] = 0, \quad (C.48)$$

avec  $S_{J1n}$  signe de  $J_1(K_{1n}a)$

- C2 :  $\tau(r, -l_c) = 0$  projeté sur  $N_{1n} J_0(K_{1n}r)$  :

$$\sum_l \alpha_l k_l^2 \left[ A_{1ln} C_{ln} - B_{1ln} S_{ln} + A_{2l} S_{J1n} \sqrt{\frac{2}{l_c}} \frac{K_{1n}}{K_{1n}^2 - k_l^2} J_0(k_l a) \right] = 0, \quad (C.49)$$

- C3 :  $v_r(r, 0) = 0$  projeté sur  $N_{1n} J_1(K_{1n}r)$  :

$$\sum_l \left[ A_{1ln} K_{1n} C_{ln} + B_{1ln} K_{1n} S_{ln} + A_{2l} S_{J1n} \sqrt{\frac{2}{l_c}} \frac{k_l^2}{(K_{1n}^2 - k_l^2)} J_0(k_l a) \right] + \frac{k_{1vn}}{K_{1n}} (-A_{1vn} S_{vn} + B_{1vn} C_{vn}) = 0, \quad (C.50)$$

- C4 :  $v_r(r, -l_c) = 0$  projeté sur  $N_{1n} J_1(K_{1n}r)$  :

$$\sum_l \left[ A_{1ln} K_{1n} C_{ln} - B_{1ln} K_{1n} S_{ln} + A_{2l} S_{J1n} \sqrt{\frac{2}{l_c}} \frac{k_l^2}{(K_{1n}^2 - k_l^2)} J_0(k_l a) \right] + \frac{k_{1vn}}{K_{1n}} (A_{1vn} S_{vn} + B_{1vn} C_{vn}) = 0, \quad (C.51)$$

- C5 :  $v_z(r, -l_c) = 0$  projeté sur  $N_{1n} J_0(K_{1n}r)$  :

$$\sum_l [k_{1ln} (A_{1ln} S_{ln} + B_{1ln} C_{ln})] + A_{1vn} C_{vn} - B_{1vn} S_{vn} = 0, \quad (C.52)$$

- C6 :  $v_z(r, 0) = j\omega w_d(r)$  projeté sur  $N_{1n} J_0(K_{1n}r)$  :

$$\sum_l [k_{1ln} (-A_{1ln} S_{ln} + B_{1ln} C_{ln})] + A_{1vn} C_{vn} + B_{1vn} S_{vn} = j\omega W_n, \quad (C.53)$$

- C7 :  $\tau(a, z) = 0$  :

$$\alpha_a k_a^2 A_{2a} J_0(k_a a) + \alpha_h k_h^2 A_{2h} J_0(k_h a) = 0, \quad (C.54)$$

- C8 :  $v_r(a, z) = 0$  intégré sur  $-l_c < z < 0$  :

$$\frac{2}{a} \sqrt{\frac{2}{l_c}} \sum_n \left[ \sum_l S_{J1n} \frac{K_{1n}}{k_{1ln}} A_{1ln} S_{ln} + S_{J1n} \frac{1}{K_{1n}} B_{1vn} S_{vn} \right] + \sum_l k_l A_{2l} J_1(k_l a) = 0. \quad (C.55)$$

D'après C7 on peut en déduire

$$A_{2h} = -\gamma_{ah} \frac{J_0(k_a a)}{J_0(k_h a)} A_{2a} \quad (C.56)$$

avec

$$\gamma_{ah} = \frac{\alpha_a k_a^2}{\alpha_h k_h^2}, \quad (C.57)$$

En considérant (C2-C1),

$$B_{1hn} = -\gamma_{ah} \frac{S_{an}}{S_{hn}} B_{1an}, \quad (C.58)$$

ainsi que (C4-C3),

$$A_{1vn} = \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}} \frac{S_{an}}{S_{vn}} (1 - \gamma_{ah}) B_{1an}, \quad (\text{C.59})$$

et (C5+C6),

$$2 \left[ k_{1an} C_{an} - S_{an} \gamma_{ah} \frac{C_{hn}}{S_{hn}} k_{1hn} + S_{an} (1 - \gamma_{ah}) \frac{C_{vn}}{S_{vn}} \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}} \right] B_{1an} = j\omega W_n, \quad (\text{C.60})$$

on peut en déduire,

$$B_{1an} = j\omega b_{an} W_n, \quad (\text{C.61})$$

$$B_{1hn} = j\omega b_{hn} W_n, \quad (\text{C.62})$$

$$A_{1vn} = j\omega a_{vn} W_n, \quad (\text{C.63})$$

avec

$$b_{an} = \frac{1}{2} \left[ k_{1an} C_{an} - S_{an} \gamma_{ah} \frac{C_{hn}}{S_{hn}} k_{1hn} + S_{an} (1 - \gamma_{ah}) \frac{C_{vn}}{S_{vn}} \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}} \right]^{-1}, \quad (\text{C.64})$$

$$b_{hn} = -b_{an} \gamma_{ah} \frac{S_{an}}{S_{hn}}, \quad (\text{C.65})$$

et

$$a_{vn} = b_{an} (1 - \gamma_{ah}) \frac{S_{an}}{S_{vn}} \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}}. \quad (\text{C.66})$$

En considérant la relation (C.56) ainsi que (C1+C2),

$$A_{1hn} = -\gamma_{ah} \frac{C_{an}}{C_{hn}} A_{1an} - D_1 A_{2a}, \quad (\text{C.67})$$

où

$$D_1 = S_{J1n} \frac{\gamma_{ah}}{C_{hn}} \sqrt{\frac{2}{l_c}} J_0(k_a a) \left[ \frac{K_{1n}}{K_{1n}^2 - k_a^2} - \frac{K_{1n}}{K_{1n}^2 - k_h^2} \right], \quad (\text{C.68})$$

(C3+C4),

$$B_{1vn} = -(1 - \gamma_{ah}) \frac{C_{an}}{C_{vn}} \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}} A_{1an} - D_2 A_{2a}, \quad (\text{C.69})$$

où

$$D_2 = S_{J1n} \sqrt{\frac{2}{l_c}} \frac{J_0(k_a a) K_{1n}}{C_{vn} k_{1vn}} \left[ \frac{k_a^2 - \gamma_{ah} K_{1n}^2}{K_{1n}^2 - k_a^2} + \gamma_{ah} \right], \quad (\text{C.70})$$

et(C5-C6),

$$\begin{aligned} & A_{1an} 2 \left[ k_{1an} S_{an} - C_{an} \gamma_{ah} \frac{S_{hn}}{C_{hn}} k_{1hn} + C_{an} (1 - \gamma_{ah}) \frac{S_{vn}}{C_{vn}} \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}} \right] \\ & + A_{2a} 2 (-S_{hn} k_{1hn} D_1 + S_{vn} D_2) = -j\omega W_n, \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

on peut en déduire,

$$A_{1an} = j\omega a_{an} W_n + \sigma_{an} A_{2a}, \quad (\text{C.72})$$

$$A_{1hn} = j\omega a_{hn} W_n + \sigma_{hn} A_{2a}, \quad (\text{C.73})$$



et

$$B_{1vn} = j\omega b_{vn} W_n + \sigma_{vn} A_{2a}, \quad (\text{C.74})$$

avec

$$a_{an} = -\frac{1}{2} \left[ k_{1an} S_{an} - C_{an} \gamma_{ah} \frac{S_{hn}}{C_{hn}} k_{1hn} + C_{an} (1 - \gamma_{ah}) \frac{S_{vn}}{C_{vn}} \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}} \right]^{-1}, \quad (\text{C.75})$$

$$a_{hn} = -a_{an} \gamma_{ah} \frac{C_{an}}{C_{hn}}, \quad (\text{C.76})$$

$$b_{vn} = -a_{an} (1 - \gamma_{ah}) \frac{C_{an}}{C_{vn}} \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}}, \quad (\text{C.77})$$

$$\sigma_{an} = (S_{hn} k_{1hn} D_1 - S_{vn} D_2) \left[ k_{1an} S_{an} - C_{an} \gamma_{ah} \frac{S_{hn}}{C_{hn}} k_{1hn} + C_{an} (1 - \gamma_{ah}) \frac{S_{vn}}{C_{vn}} \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}} \right]^{-1}, \quad (\text{C.78})$$

$$\sigma_{hn} = -\sigma_{an} \gamma_{ah} \frac{C_{an}}{C_{hn}} - D_1, \quad (\text{C.79})$$

et

$$\sigma_{vn} = -\sigma_{an} (1 - \gamma_{ah}) \frac{C_{an}}{C_{vn}} \frac{K_{1n}^2}{k_{1vn}} - D_2. \quad (\text{C.80})$$

En reprenant l'équation de la membrane (C.19) et en remplaçant  $p_i(r, 0)$  par sa valeur (C.45), on peut calculer l'intégrale. On obtient :

$$[T_0(K^2 - K_{1n}) - \chi_n] W_n = S_{J1n} \frac{\sqrt{2}}{K_{1n}} P_U + \mu_n A_{2a} \quad (\text{C.81})$$

avec

$$\chi_n = -\frac{\omega \rho c}{\gamma k} [k_a^2 (\alpha_a + 1) (a_{an} C_{an} + b_{an} S_{an}) + k_h^2 (\alpha_h + 1) (a_{hn} C_{hn} + b_{hn} S_{hn})] \quad (\text{C.82})$$

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{j\rho c}{\gamma k} k_a^2 (\alpha_a + 1) \left( \sigma_{an} C_{an} + S_{J1n} \sqrt{\frac{2}{l_c}} \frac{K_{1n}}{K_{1n}^2 - k_a^2} J_0(k_a a) \right) \\ &+ \frac{j\rho c}{\gamma k} k_h^2 (\alpha_h + 1) \left( \sigma_{hn} C_{hn} - S_{J1n} \gamma_{ah} \sqrt{\frac{2}{l_c}} \frac{K_{1n}}{K_{1n}^2 - k_h^2} J_0(k_h a) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

En injectant l'expression des  $A_{1an}$ ,  $A_{1hn}$ ,  $B_{1vn}$ ,  $A_{2a}$ , et  $W_n$  dans C8, on peut mettre  $A_{2a}$  sous la forme,

$$A_{2a} = j\omega P_U \frac{\sum_n \frac{4b_{0n}}{aNG_n K_{1n}}}{1 - j\omega \sum_n S_{J1n} \frac{2\sqrt{2}b_{0n}\mu_n}{aNG_n}} \quad (\text{C.84})$$

avec  $G_n = T_0(K^2 - K_{1n}) - \chi_n$ ,

$$b_{0n} = a_{an} \frac{S_{an} K_{1n}}{k_{1an}} + a_{hn} \frac{S_{hn} K_{1n}}{k_{1hn}} + b_{vn} \frac{S_{vn}}{K_{1n}}, \quad (\text{C.85})$$

$$N = -\frac{2\sqrt{2}}{a} \sum_n S_{J1n} \beta_{0n} - \sqrt{l_c} k_a J_1(k_a a) + \sqrt{l_c} k_h J_1(k_h a) \gamma_{ah} \frac{J_0(k_a a)}{J_0(k_h a)}, \quad (\text{C.86})$$

et

$$\beta_{0n} = \sigma_{an} \frac{S_{an} K_{1n}}{k_{1an}} + \sigma_{hn} \frac{S_{hn} K_{1n}}{k_{1hn}} + \sigma_{vn} \frac{S_{vn}}{K_{1n}}. \quad (\text{C.87})$$

Une fois le coefficient  $A_{2a}$  obtenu, on réinjecte dans (C.81) pour obtenir les  $W_n$

$$W_n = P_U S_{J1n} \frac{\sqrt{2}}{K_{1n} G_n} + j\omega P_U \frac{\mu_n}{G_n} \frac{\sum_n \frac{4b_{0n}}{aNG_n K_{1n}}}{1 - j\omega \sum_n S_{J1n} \frac{2\sqrt{2}b_{0n}\mu_n}{aNG_n}}. \quad (\text{C.88})$$



## Annexe D

# Modèle du transducteur : approche intégrale

Cette annexe présente l'ensemble des équations utilisées pour la résolution du problème présenté dans la section 3.3.2.2 à l'aide de l'approche intégrale

### D.1 Équations de comportement

L'équation du mouvement  $w_d$  de la membrane est donnée par

$$\Delta_r w_d + k_m^2 w_d = \frac{1}{T_0} \left( \frac{E_m}{1 - \nu_m} \frac{2d_{m,3}U}{R} - p_i(r, 0) + p_e(r, 0) \right), \quad (\text{D.1})$$

où  $\Delta_r$  est le Laplacien en coordonnées cylindriques suivant  $r$ . En notant

$$P_U = \frac{E_m}{1 - \nu_m} \frac{2d_{m,3}U}{R}, \quad (\text{D.2})$$

il vient

$$\Delta_r w_d + k_m^2 w_d = \frac{1}{T_0} (P_U - p_i(r, 0) + p_e(r, 0)). \quad (\text{D.3})$$

De façon à estimer la vitesse de la membrane  $v_d$ , l'effet de la pression rayonnée est négligé ce qui conduit à  $p_e = 0$ . L'équation régissant la vitesse de la membrane est alors

$$\Delta_r v_d(r) + k_m^2 v_d(r) = \frac{j\omega}{T_0} (P_U - p_i(r, 0)). \quad (\text{D.4})$$

La pression acoustique dans la cavité est donnée grâce à la formulation de Green

$$p_i(\vec{r}) = \iiint_D G(\vec{r}, \vec{r}_0) f(\vec{r}_0) dV + \iint_S [G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} p(\vec{r}_0) - p(\vec{r}_0) \partial_{n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0)] dS_0. \quad (\text{D.5})$$

Sachant qu'il n'existe pas de sources à l'intérieur de la cavité, l'équation D.5 s'écrit

$$p_i(\vec{r}) = \iint_S G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} p(\vec{r}_0) dS_0, \quad (\text{D.6})$$

en faisant usage d'une fonction de Green satisfaisant les conditions aux frontières,

$$\partial_{n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, z = 0 \quad (\text{D.7})$$

$$\partial_{n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, z = -l_c \quad (\text{D.8})$$

$$\partial_{n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, r = a. \quad (\text{D.9})$$

Le gradient de la pression étant donné par l'équation d'Euler,

$$\partial_{n_0} p(\vec{r}_0) = -jk\rho c v_d(\vec{r}_0). \quad (\text{D.10})$$

La vitesse étant choisie positive pour une orientation sortant du volume et la normale à la surface étant orientée dans le même sens que celui de la vitesse, la pression interne à la cavité s'écrit à la coordonnée  $\vec{r} = (r, \theta, z = 0)$

$$p_i(r, \theta, 0) = -j\rho\omega \iint_S G(r, \theta, 0; r_0, \theta_0, 0) v_d(r_0, \theta_0) dS_0. \quad (\text{D.11})$$

L'équation donnant la vitesse de la membrane s'exprime, en tenant compte du couplage avec la cavité

$$\Delta_r v_d(r, \theta) + k_m^2 v_d(r, \theta) + \frac{\omega^2 \rho}{T_0} \iint_S G(r, \theta, 0; r_0, \theta_0, 0) v_d(r_0, \theta_0) dS_0 = \frac{j\omega}{T_0} P_U. \quad (\text{D.12})$$

## D.2 Fonction de Green de la cavité

La fonction de Green du cylindre de rayon  $a$  et de longueur  $l_c$  est donnée sous forme d'un développement de fonctions propres orthonormées du cylindre par [35],

$$G(r, \theta, z; r_0, \theta_0, z_0) = \sum_{\mu, \nu} \sum_{t=c,s} g_{\mu\nu}(z, z_0) \psi_{\mu\nu}^t(r_0, \theta_0) \psi_{\mu\nu}^t(r, \theta), \quad (\text{D.13})$$

où les fonctions propres s'écrivent respectivement pour  $t = c$  (pour  $\cos \mu\theta$ ) et  $t = s$  (pour  $\sin \mu\theta$ )

$$\psi_{\mu\nu}^c(r, \theta) = \frac{1}{a_\mu b_{\mu\nu}} \cos \mu\theta J_\mu(k_{w\mu\nu} r), \quad (\text{D.14})$$

$$\psi_{\mu\nu}^s(r, \theta) = \frac{1}{a_\mu b_{\mu\nu}} \sin \mu\theta J_\mu(k_{w\mu\nu} r). \quad (\text{D.15})$$

$k_{w\mu\nu}$  sont les valeurs propres associées satisfaisant la condition à la frontière,

$$k_{w\mu\nu} = \frac{\gamma_{\mu\nu}}{a}, \quad (\text{D.16})$$

où  $\gamma_{\mu\nu}$  représente le  $(\nu + 1)$ ième zéro de la dérivée première de la fonction de Bessel  $J_\mu$ . Il est fait l'hypothèse dans ce problème que seul le mode azimutal est retenu ( $\mu = 0$ ). De fait les fonctions propres s'écrivent,

$$\psi_{0\nu}^c(r, \theta) = \frac{1}{a_0 b_{0\nu}} J_0(k_{w0\nu} r), \quad (\text{D.17})$$

$$\psi_{0\nu}^s(r, \theta) = 0. \quad (\text{D.18})$$

Les coefficients de normalisation  $a_\mu$  et  $b_{\mu\nu}$  sont donnés, pour  $\mu = 0$ , par

$$a_0^2 = 2\pi \quad (\text{D.19})$$

$$b_{0\nu} = \frac{a^2}{2} J_0^2(\gamma_{0\nu}). \quad (\text{D.20})$$

Les coefficients  $g_{\mu\nu}(z, z_0)$  du développement s'expriment pour  $z < z_0$  où  $z_0 = 0$  et en omettant les pertes viscothermiques (éq. 4.31b [35]),

$$g_{\mu\nu}(z, z_0) = -\frac{\cos(k_{z\mu\nu}(z - l_c))}{k_{z\mu\nu} \sin(k_{z\mu\nu} l_c)}, \quad (\text{D.21})$$

où

$$k_{z\mu\nu}^2 = k^2 - k_{w\mu\nu}^2. \quad (\text{D.22})$$

La fonction de Green associée au problème s'écrit donc pour  $\mu = 0$ ,

$$G(r, z; r_0, z_0) = \sum_{\nu} -\frac{\cos(k_{z0\nu}(z - l_c))}{k_{z0\nu} \sin(k_{z0\nu} l_c)} \frac{1}{\pi a^2 J_0^2(\gamma_{0\nu})} J_0(k_{w0\nu} r) J_0(k_{w0\nu} r_0), \quad (\text{D.23})$$

et celle donnant l'expression de la pression interne sur la membrane est,

$$G(r, 0; r_0, 0) = -\frac{1}{S_m} \sum_{\nu} \frac{J_0(k_{w0\nu} r) J_0(k_{w0\nu} r_0)}{k_{z0\nu} \tan(k_{z0\nu} l_c) J_0^2(\gamma_{0\nu})}, \quad (\text{D.24})$$

où  $S_m = \pi a^2$ .

Remarque : pour  $\nu = 0$  (pas de modes radiaux), il vient

$$G(r, 0; r_0, 0) = -\frac{1}{S_m} \frac{1}{k \tan(k l_c)} \quad (\text{D.25})$$

et la pression sur la membrane s'écrit

$$p_i(0) = -\frac{\rho c}{S_m} \frac{1}{j \tan(k l_c)} Q_m \quad (\text{D.26})$$

où  $Q_m$  est le débit de la membrane, ce qui est conforme avec les modèles d'ondes planes. Du reste le signe est cohérent avec les conventions choisies, une vitesse positive entraînant une dépression (pression négative).

### D.3 Solution du problème

De façon à estimer la solution de l'équation D.4, la vitesse de la membrane est exprimée à l'aide de l'expression obtenue dans le cas d'une membrane oscillant dans le vide [32], à laquelle on ajoute l'effet de la lame d'air dans la cavité à l'arrière de la membrane,

$$v_d(r) = V_d \left[ 1 - \frac{J_0(k_m r)}{J_0(k_m a)} \right] + \sum_{\nu \neq 0} U_\nu [J_0(k_{w0\nu} r) - J_0(k_{w0\nu} a)], \quad (\text{D.27})$$

où  $k_m$  est le nombre d'onde de la membrane donné par  $k_m = \omega \sqrt{\frac{\mu_m}{T_0}}$  avec  $\mu_m$  la masse surfacique,  $T_0$  la tension de la membrane, et les termes en  $J_0$  décrivant l'effet des modes de cavité sur la membrane. L'injection de cette formulation dans l'équation D.4 permet d'établir une expression de l'amplitude  $V_d$  en fonction des paramètres mécaniques de la membrane et des modes acoustiques de la cavité. La somme des deux premiers termes de l'équation D.4 s'écrivent,

$$\Delta_r v_d(r) + k_m^2 v_d(r) = k_m^2 V_d + \sum_{\nu \neq 0} U_\nu [(k_m^2 - k_{w0\nu}^2) J_0(k_{w0\nu} r) - k_m^2 J_0(k_{w0\nu} a)] . \quad (D.28)$$

Le terme dépendant de la pression dans la cavité de l'équation D.4 s'écrit

$$\frac{j\omega}{T_0} p_i(r, 0) = \omega^2 \frac{\rho}{T_0} \iint_S G(r, \theta, 0; r_0, \theta_0, 0) v_d(r_0, \theta_0) dS_0, \quad (D.29)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{j\omega}{T_0} p_i(r, 0) &= -\frac{\omega^2 \rho}{S_m T_0} \sum_\nu \frac{J_0(k_{w0\nu} r)}{k_{z0\nu} \tan(k_{z0\nu} l_c) J_0^2(\gamma_{0\nu})} \left[ V_d - \sum_{\nu' \neq 0} U_{\nu'} J_0(k_{w0\nu'} a) \right] I_1(\nu) \\ &- \frac{\omega^2 \rho}{S_m T_0} \sum_\nu \frac{J_0(k_{w0\nu} r)}{k_{z0\nu} \tan(k_{z0\nu} l_c) J_0^2(\gamma_{0\nu})} \left[ -\frac{V_d}{J_0(k_m a)} I_2(\nu) + \sum_{\nu' \neq 0} U_{\nu'} I_3(\nu, \nu') \right], \end{aligned} \quad (D.30)$$

avec

$$I_1(\nu) = \iint_S J_0(k_{w0\nu} r_0) dS_0, \quad (D.31)$$

$$I_2(\nu) = \iint_S J_0(k_{w0\nu} r_0) J_0(k_m r_0) dS_0, \quad (D.32)$$

$$I_3(\nu, \nu') = \iint_S J_0(k_{w0\nu} r_0) J_0(k_{w0\nu'} r_0) dS_0. \quad (D.33)$$

Ces intégrales sont simples à résoudre mais plusieurs cas doivent être pris en considération,

$$I_1(\nu) = \begin{cases} \pi a^2 & \text{si } \nu = 0, \\ \frac{a}{k_{w0\nu}} J_1(k_{w0\nu} a) = 0 & \text{si } \nu \neq 0, \end{cases} \quad (D.34)$$

$$I_2(\nu) = \begin{cases} \frac{2\pi a}{k_m} J_1(k_m a) & \text{si } \nu = 0, \\ \pi a^2 J_0^2(k_{w0\nu} a) & \text{si } \nu \neq 0 \text{ et } k_{w0\nu} = k_m; \\ \frac{k_m 2\pi a}{k_m^2 - k_{w0\nu}^2} J_1(k_m a) J_0(k_{w0\nu} a) & \text{si } \nu \neq 0 \text{ et } k_{w0\nu} \neq k_m, \end{cases} \quad (D.35)$$

$$I_3(\nu, \nu') = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu = 0, \\ 0 & \text{si } \nu \neq \nu', \\ \pi a^2 J_0^2(k_{w0\nu} a) & \text{si } \nu = \nu'. \end{cases} \quad (D.36)$$

L'expression de la pression acoustique dans la cavité au niveau de la membrane est donc

$$\begin{aligned} \frac{j\omega}{T_0} p_i(r, 0) &= -\frac{\omega^2 \rho}{T_0} \frac{1}{k_{z00} \tan(k_{z00} l_c)} \left[ V_d \left( 1 - \frac{2 J_1(k_m a)}{k_m a J_0(k_m a)} \right) - \sum_{\nu' \neq 0} U_{\nu'} J_0(k_{w0\nu'} a) \right] \\ &- \frac{\omega^2 \rho}{T_0} \sum_{\nu \neq 0} \frac{J_0(k_{w0\nu} r)}{k_{z0\nu} \tan(k_{z0\nu} l_c)} \left[ -\frac{2\pi V_d k_m a J_1(k_m a)}{S_m(k_m^2 - k_{w0\nu}^2) J_0(k_m a) J_0(k_{w0\nu} a)} + U_\nu \right]. \end{aligned} \quad (D.37)$$

D'après les équations (D.3) et (D.4) il est possible d'écrire,

$$\frac{j\omega}{T_0} (P_U - p_i(r, 0)) = k_m^2 V_d + \sum_{\nu \neq 0} U_\nu [(k_m^2 - k_{w0\nu}^2) J_0(k_{w0\nu} r) - k_m^2 J_0(k_{w0\nu} a)]. \quad (D.38)$$

En remplaçant  $p_i$  par sa valeur (éq. (D.37)) et en égalisant les termes dépendants de  $r$  et les termes constants sur le rayon, deux équations sont obtenues,

$$\begin{aligned} k_m^2 V_d - \sum_{\nu \neq 0} U_\nu k_m^2 J_0(k_{w0\nu} a) &= \frac{\omega^2 \rho}{T_0 k_{z00} \tan(k_{z00} l_c)} \left[ V_d \left( 1 - \frac{2 J_1(k_m a)}{k_m a J_0(k_m a)} \right) - \sum_{\nu' \neq 0} U_{\nu'} J_0(k_{w0\nu'} a) \right] \\ &+ \frac{j\omega P_U}{T_0}, \end{aligned} \quad (D.39)$$

et

$$\sum_{\nu \neq 0} U_\nu (k_m^2 - k_{w0\nu}^2) J_0(k_{w0\nu} r) = \frac{\omega^2 \rho}{T_0} \sum_{\nu \neq 0} \frac{J_0(k_{w0\nu} r)}{k_{z0\nu} \tan(k_{z0\nu} L)} \left[ U_\nu - \frac{2\pi V_d k_m a J_1(k_m a)}{S_m(k_m^2 - k_{w0\nu}^2) J_0(k_m a) J_0(k_{w0\nu} a)} \right]. \quad (D.40)$$

En posant,

$$\alpha_\nu = \frac{2\omega^2 \rho k_m J_1(k_m a)}{a T_0 k_{z0\nu} \tan(k_{z0\nu} l_c) (k_m^2 - k_{w0\nu}^2) J_0(k_m a) J_0(k_{w0\nu} a)}, \quad (D.41)$$

et

$$\beta_\nu = k_m^2 - k_{w0\nu}^2 - \frac{\omega^2 \rho}{T_0 k_{z0\nu} \tan(k_{z0\nu} l_c)}, \quad (D.42)$$

l'équation (D.40) permet de trouver la relation simple,

$$U_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} V_d. \quad (D.43)$$

L'équation (D.39) peut s'écrire,

$$V_d(k_m^2 - K_0^2) = \frac{j\omega P_U}{T_0} + \sum_{\nu \neq 0} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} V_d J_0(k_{w0\nu} a) \beta_0, \quad (D.44)$$

avec

$$K_0^2 = \frac{\omega^2 \rho}{T_0 k_{z00} \tan(k_{z00} l_c)} \left( 1 - \frac{2 J_1(k_m a)}{k_m a J_0(k_m a)} \right) \quad (D.45)$$

En injectant les relations (D.43) et (D.44), dans l'expression de  $v_d(r)$  (D.3), il est possible de déterminer l'équation régissant la vitesse de déplacement de la membrane en fonction de la position sur le rayon,

$$v_d(r) = \frac{j\omega P_U}{T_0} \frac{1 - \frac{J_0(k_m r)}{J_0(k_m a)} + \sum_{\nu \neq 0} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} (J_0(k_{w0\nu} r) - J_0(k_{w0\nu} a))}{k_m^2 - K_0^2 - \sum_{\nu \neq 0} \beta_0 \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} J_0(k_{w0\nu} a)}. \quad (D.46)$$





## Annexe E

# Éstimation des distorsions : signal d'entrée composé de trois fréquences

Afin de vérifier l'efficacité des différents conditionnements pour une complexité des signaux d'entrée encore supérieure à celle du paragraphe 4.2.4, l'algorithme de simulation est attaqué avec des signaux composés de trois composantes fréquentielles, dont les valeurs sont données dans le tableau E.1. Les résultats obtenus, pour les modulations BLU et pseudo-BLU sans correction et pour le conditionnement basé sur l'application d'une racine carrée, sont présentés dans le tableau E.1 et la figure E.1. Comme pour les signaux composés d'un couple de fréquences, le conditionnement le moins performant est celui basé sur la BLU, tandis que celui basé sur la racine carrée voit son efficacité fortement diminuée lorsque une ou plusieurs composantes fréquentielles se rapprochent de la limite de la bande passante. Toutefois, le traitement de correction de la BLU et de la pseudo-BLU reste efficace comme le montre la figure E.2.

Trio	Fréq. 1 [kHz]	Fréq. 2 [kHz]	Fréq. 3 [kHz]	TD BLU [% ]	TD pseudo-BLU [% ]	TD racine [% ]
1	0,5	1	2	17,34	18,20	0
2	0,5	1	3	21,53	20,81	2,17
3	0,5	1	4	21,51	22,36	5,34
4	0,5	1	5	21,52	21,77	25,02
5	0,5	2	3	24,97	21,46	3,86
6	0,5	2	4	21,52	18,10	5,68
7	0,5	2	5	24,99	21,36	23,33
8	0,5	3	4	24,98	23,25	8,41
9	0,5	3	5	25,03	21,61	22,18
10	0,5	4	5	25,02	24,57	19,13
11	1	2	3	20,41	13,20	2,55
12	1	2	4	17,34	19,59	6,09
13	1	2	5	21,48	23,80	24,12
14	1	3	4	17,34	16,14	6,24
15	1	3	5	32,28	26,88	20,36
16	1	4	5	17,27	13,91	19,70
17	2	3	4	29,68	19,83	9,16
18	2	3	5	17,28	12,88	19,91
19	2	4	5	21,47	16,28	19,52
20	3	4	5	32,23	18,38	19,14

TAB. E.1 – Taux de Distorsion (TD) pour les différents conditionnements avec différents trios de fréquences

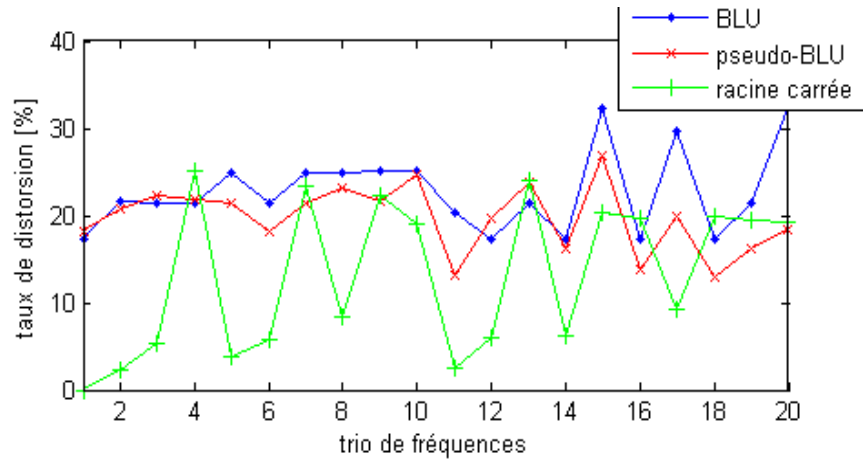


FIG. E.1 – Taux de distorsion suivant le numéro du trio de fréquences appliqué à l'entrée de l'algorithme (cf. TAB. E.1).

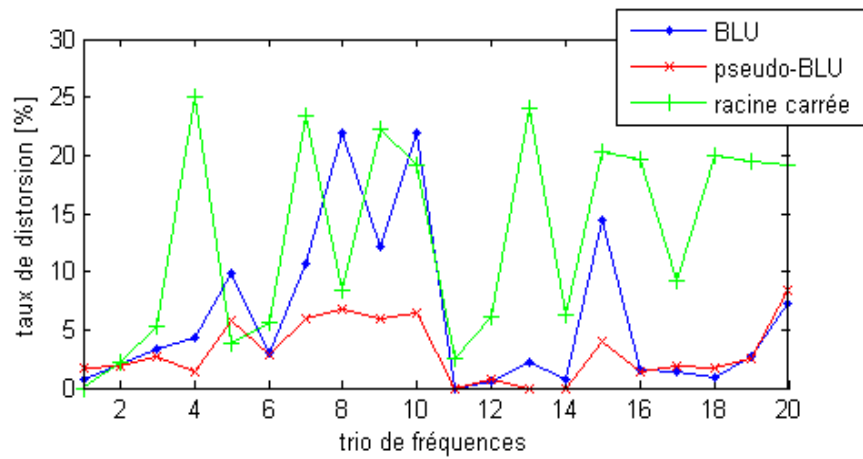


FIG. E.2 – Taux de distorsion après application de trois itérations de correction pour la BLU et la pseudo-BLU.



## Annexe F

# Description détaillé de l'électronique

Dans cette annexe le conditionneur réalisé est présenté. Il est séparé en deux modules, le premier permet d'effectuer la racine carrée du signal entrant tandis que le second génère la sinusoïde servant de porteuse, multiplie celle-ci par la sortie du module de la racine carrée et permet de choisir une gamme de tension de sortie.

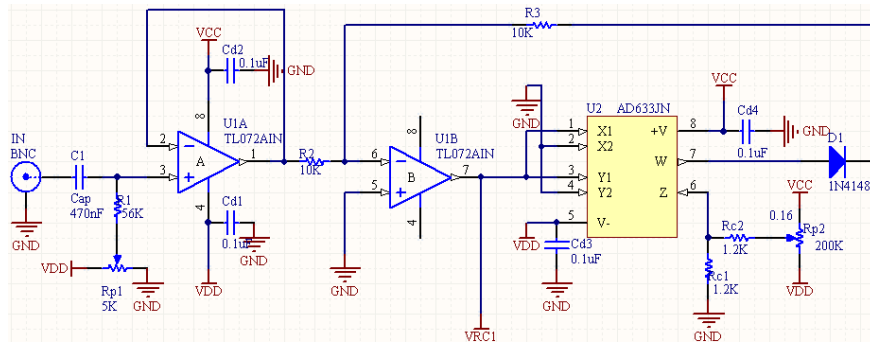


FIG. F.1 – Schéma du module racine du conditionnement du signal.

La figure F.1 présente le schéma électrique du module racine carrée du conditionneur. Il se compose de deux fonctions : l'addition d'un offset au signal d'entrée et le calcul de la racine carrée proprement dite. Cette dernière est réalisée grâce à un amplificateur opérationnel ( $U1B$  sur le schéma) et d'un multiplieur  $AD633$  ( $U2$ ). Le schéma est issu de la documentation de l' $AD633$  et effectue l'opération  $VRC1 = \sqrt{-10 \cdot V_{1,U1A}}$  où  $V_{1,U1A}$  est la tension à la sortie de l'amplificateur opérationnel  $U1A$  qui doit donc être exclusivement négative. Le pont diviseur de tension attaquant l'entrée  $Z$  de l' $AD633$  permet d'ajuster, à l'aide du potentiomètre  $Rp2$ , la fonction racine carrée réalisée. L'offset est obtenu grâce à un pont diviseur sur l'alimentation négative du circuit ( $VDD$ ). Il sert à avoir un signal exclusivement négatif à l'entrée de la fonction racine carrée et sa valeur, définie par la gamme de tension d'entrée voulue, est réglable à l'aide du potentiomètre  $Rp1$ . L'amplificateur opérationnel  $U1A$  n'est qu'un suiveur permettant d'avoir une impédance infinie à la sortie du pont diviseur de tension et donc d'avoir une valeur d'offset ne dépendant pas de l'intensité nécessaire à piloter la fonction racine

carrée. De même le condensateur  $C1$  permet de séparer la tension continue de l'entrée du circuit.

Le test de l'électronique réalisée a mis en évidence quelques problèmes dans ce module. Le premier est dû à l'instabilité de la boucle de rétroaction englobant le multiplieur ( $U2$ ) et l'amplificateur opérationnel ( $U1B$ ). Lorsque l'alimentation symétrique  $+15\text{ V}$  ( $VCC$ )/  $-15\text{ V}$  ( $VDD$ ) est allumée ou lorsque le signal d'entrée est trop élevé,  $VRC1$  devient égal à  $-15\text{ V}$  en continue. Le système étant bouclé le seul moyen pour revenir à un fonctionnement normal est de forcer la mise à la masse de  $VRC1$ . Ceci est réalisable de façon automatique en branchant une diode entre les entrées  $X1$  et  $X2$  de l' $AD633$  dont la cathode est reliée à l'entrée  $X1$  ( $VRC1$ ) ainsi si  $VRC1$  devient négatif, la diode est dans le sens passant et  $VRC1$  est mis à la masse. Concrètement une diode électroluminescente est utilisée afin de pouvoir visualiser lorsque le système devient instable et par extension lorsque l'amplitude du signal d'entrée est trop élevée. Le second problème est l'apparition de bruit d'environ  $100\text{ kHz}$  sur les crêtes du signal. Ce phénomène n'apparaît que pour les signaux d'entrée supérieurs à  $0,3\text{ Vrms}$  où hors de la plage  $500\text{ Hz} - 2\text{ kHz}$ . En rajoutant des condensateurs de découplage ( $100\text{ nF}$ ) sur les entrées  $X1$  et  $Z$  de l' $AD633$ , le conditionneur fonctionne correctement pour des signaux d'amplitude maximum  $0,5\text{ Vrms}$  compris dans la plage de fréquence  $300\text{ Hz} - 5\text{ kHz}$ .

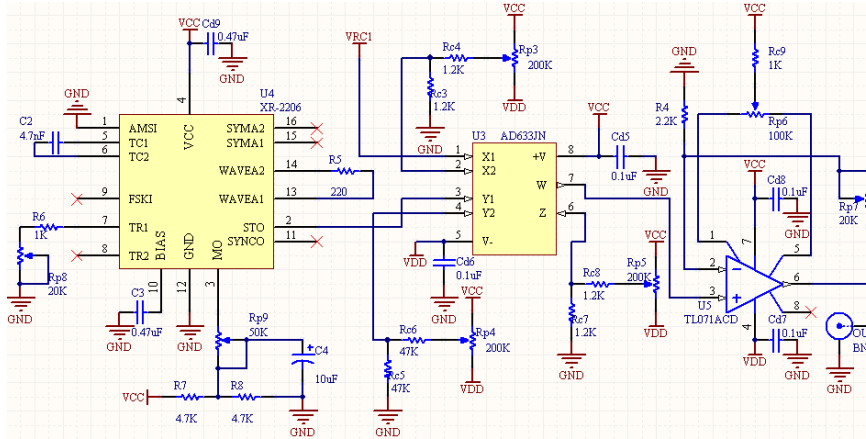


FIG. F.2 – Schéma de la partie modulation et préamplification du conditionneur.

La figure F.2 présente le schéma électrique du module de modulation. La porteuse est obtenue grâce à un générateur de fonction  $XR2206$ . Dans la configuration utilisée, il génère une sinusoïde dont la fréquence peut être choisie sur la plage  $20 - 80\text{ kHz}$  grâce au potentiomètre  $Rp8$ . L'amplitude de la porteuse peut également être réglée à l'aide du potentiomètre  $Rp9$ . Le multiplieur  $AD633$  réalise la fonction  $W = \frac{(X1-X2)(Y1-Y2)}{10} + Z$ . Les potentiomètres  $Rp3$ ,  $Rp4$  et  $Rp5$  permettent d'ajuster les offsets pour obtenir en sortie du multiplieur ( $W$ ) la porteuse modulée en amplitude par la racine carrée du signal entrant dans le conditionneur. Le signal est ensuite amplifié par un montage amplificateur non inverseur à gain réglable par le potentiomètre  $Rp7$  de manière à pouvoir choisir la gamme de tension de sortie, tout en restant compris au maximum dans l'intervalle  $+15 / -15\text{ V}$ . Le potentiomètre  $Rp6$  quant à lui ne sert qu'à compenser l'éventuel offset de l'amplificateur opérationnel  $U4$ , afin de n'avoir aucun offset parasite en sortie du conditionneur.

## Annexe G

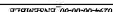
### Plan du prototype de haut-parleur directif



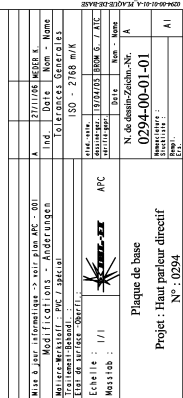


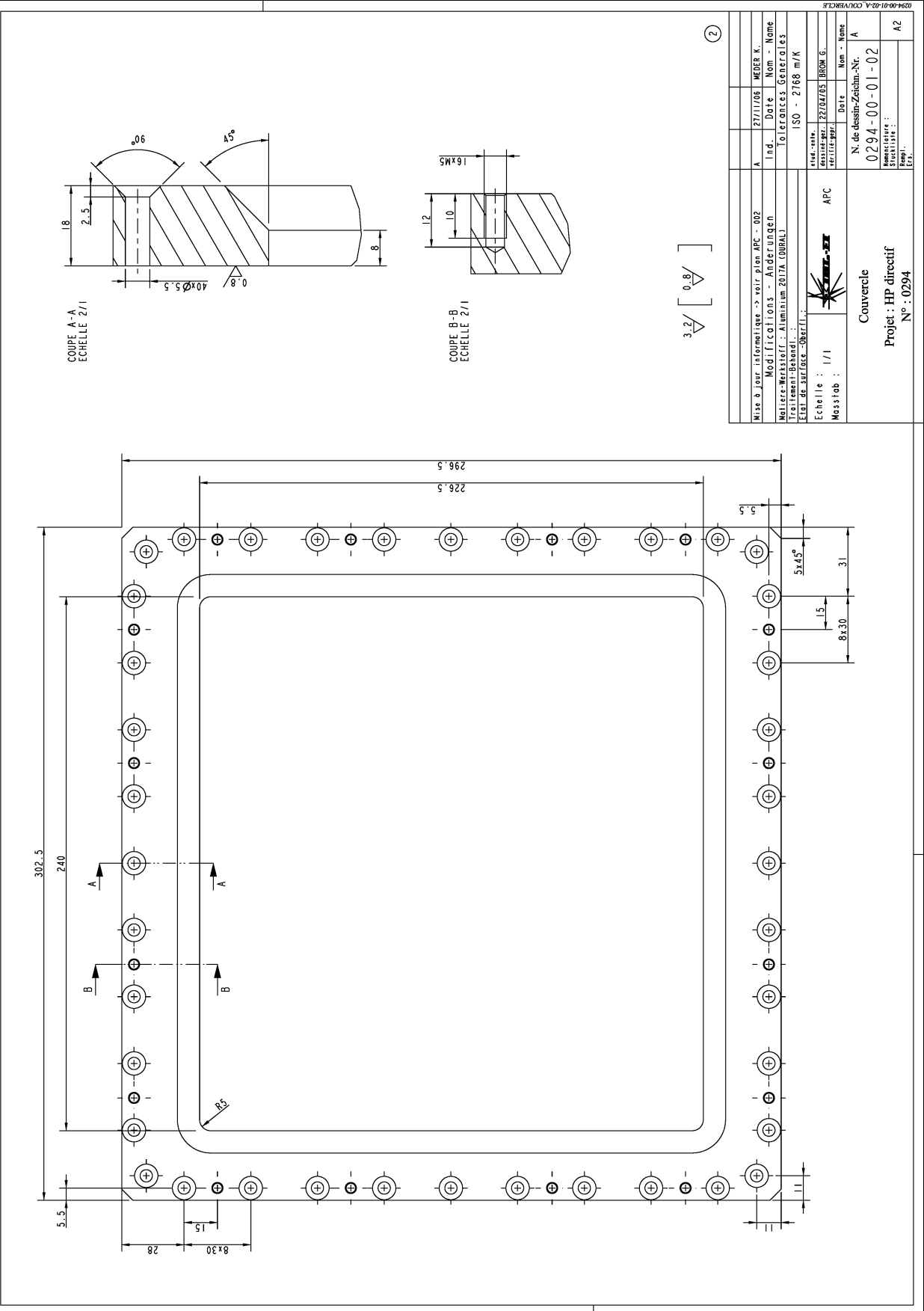


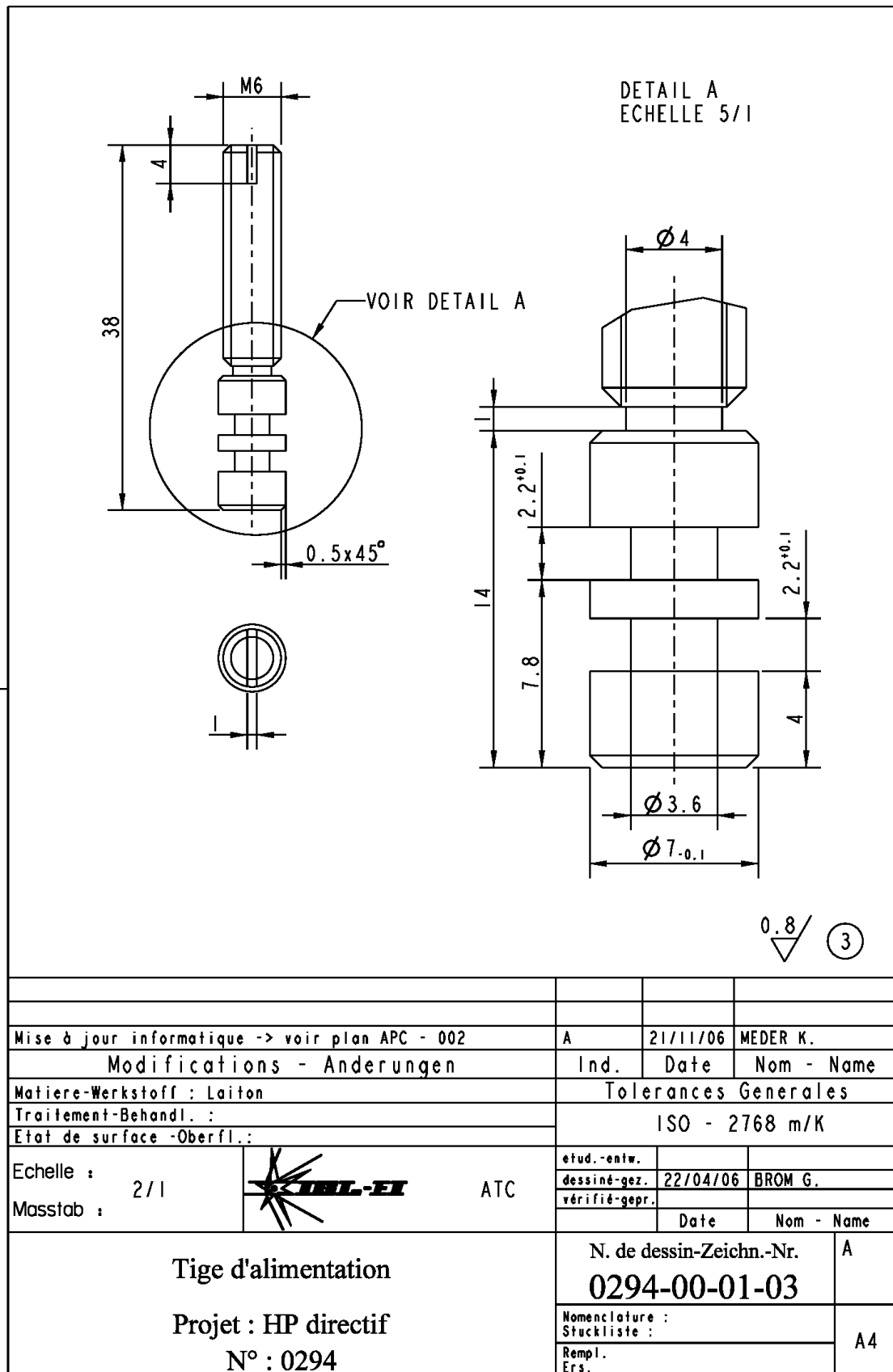
[illegible]

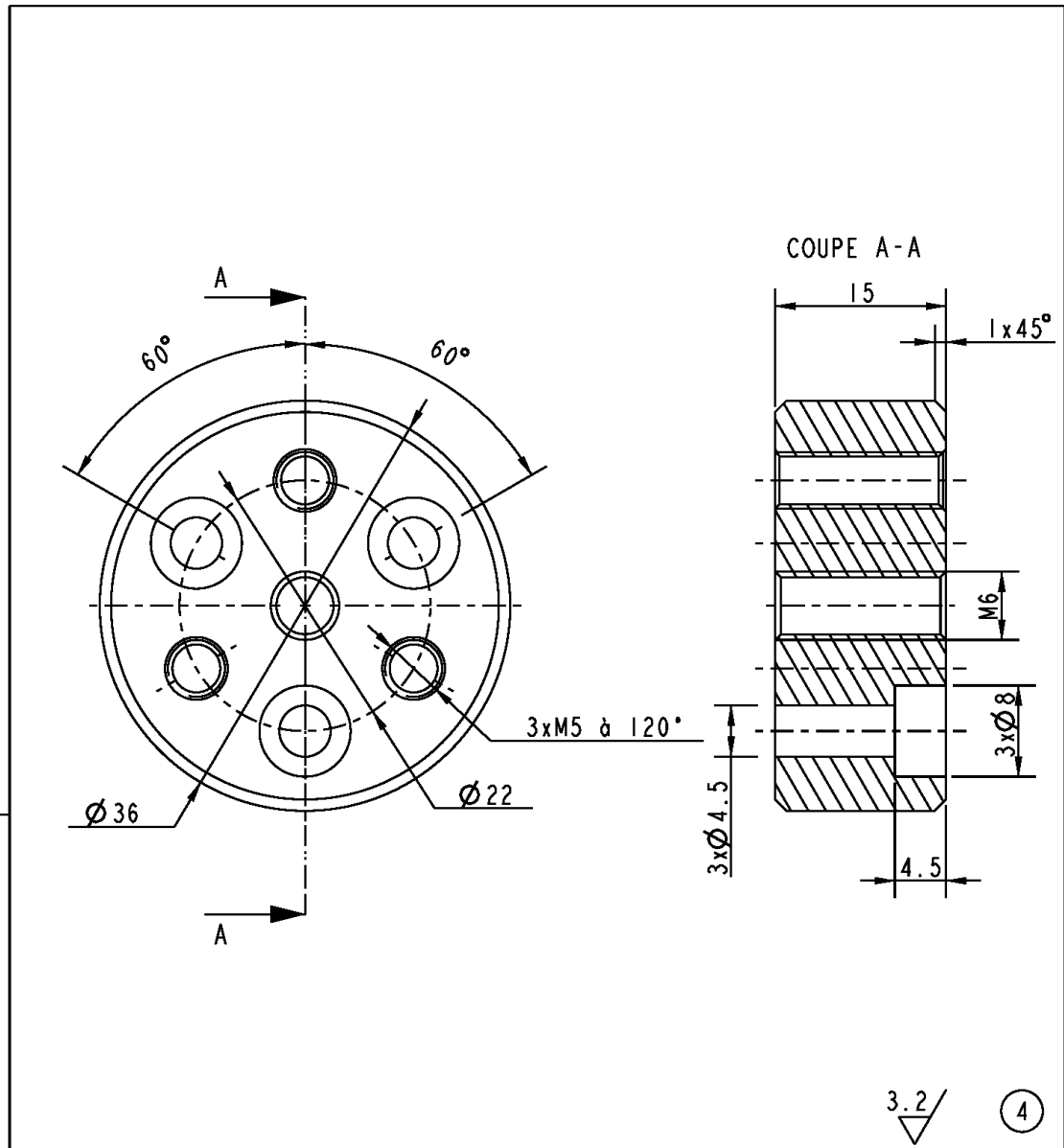









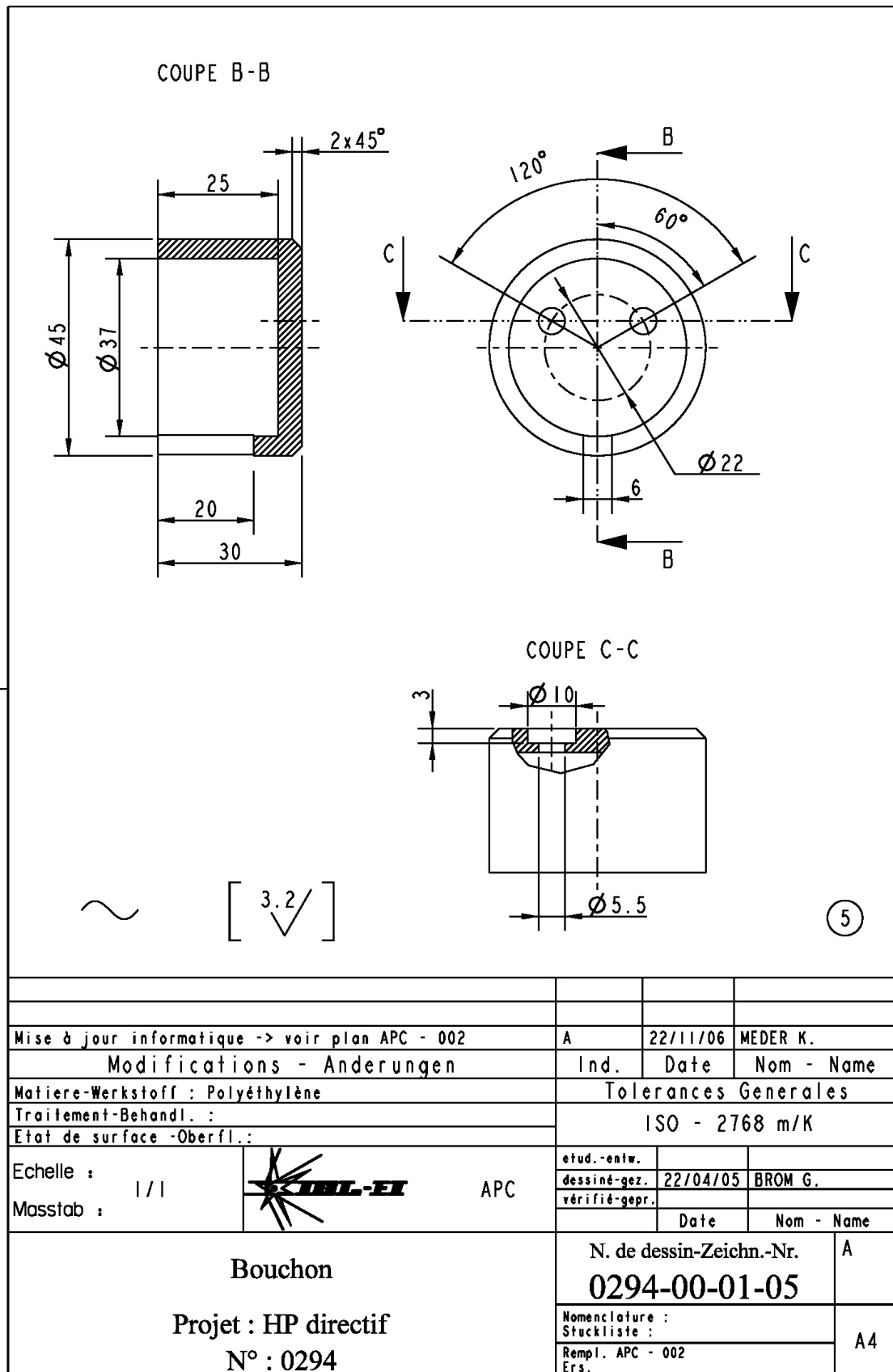




Mise à jour informatique -> voir plan APC - 002		A	21/11/06	MEDER K.
Modifications - Änderungen		Ind.	Date	Nom - Name
Matiere-Werkstoff : Aluminium 2017A (DURAL)		Tolerances Generales		
Traitement-Behandl. :		ISO - 2768 m/K		
Etat de surface -Oberfl.:				
Echelle :	 APC	etud.-entw.		
2/1		dessiné-gez.	22/04/05	BROM G.
Masstab :		vérifié-gepr.		
			Date	Nom - Name
Support de tige d'alimentation		N. de dessin-Zeichn.-Nr.		
		0294-00-01-04		
		Nomenclature : Stückliste :		
		Rempl. : APC - 002 Ers.		
Projet : HP directif		A4		
N° : 0294				

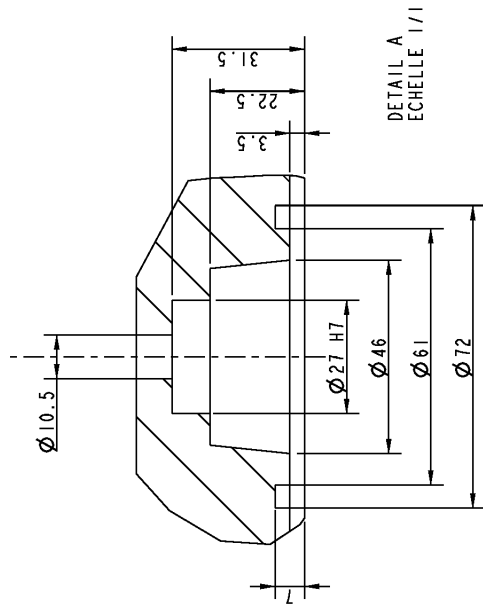
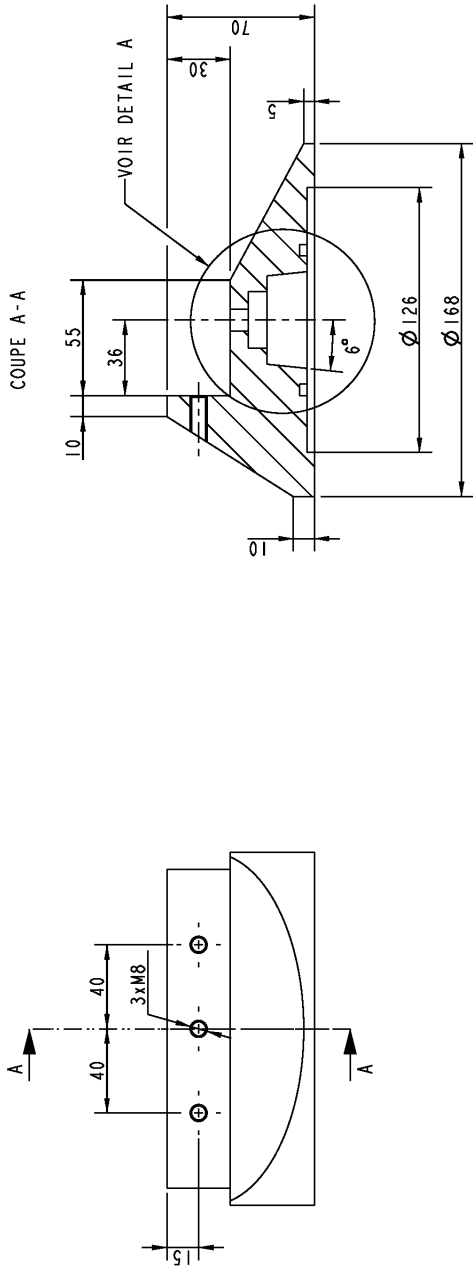
0294-00-01-04-A\_SUPPORT-AXE







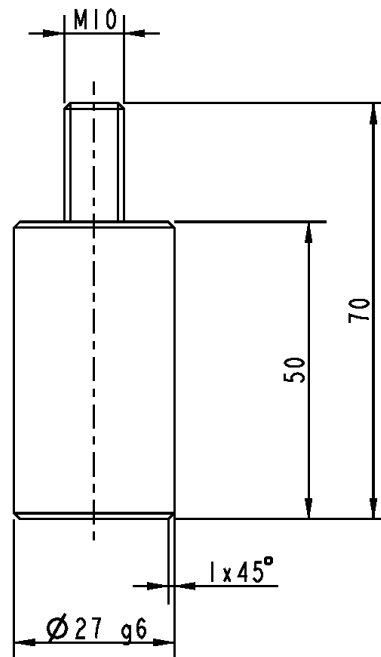




3.2/8


Ind.	Date	Nom - Name
Tolérances Générales		
ISO - 2768 m/K		
état. - env.	27/11/06	MEYER K.
dessin. - gér.		
vérifié. - gér.		
N. de dessin - Zeichn.-Nr.		
0294-00-02-01		
Nomenclature :		
Stückliste :		
Rempl. :		
Ers.		
A3		

Modifications - Änderungen	Ind.	Date	Nom - Name
Matière-Werkstoff : Aluminium			
Traitement-Behandl. :			
Etat de surface -Oberfl. :			
Echelle : 1/2			
Masstab :			
APC			
Socle			
Projet : HP directif			
N° : 0294			

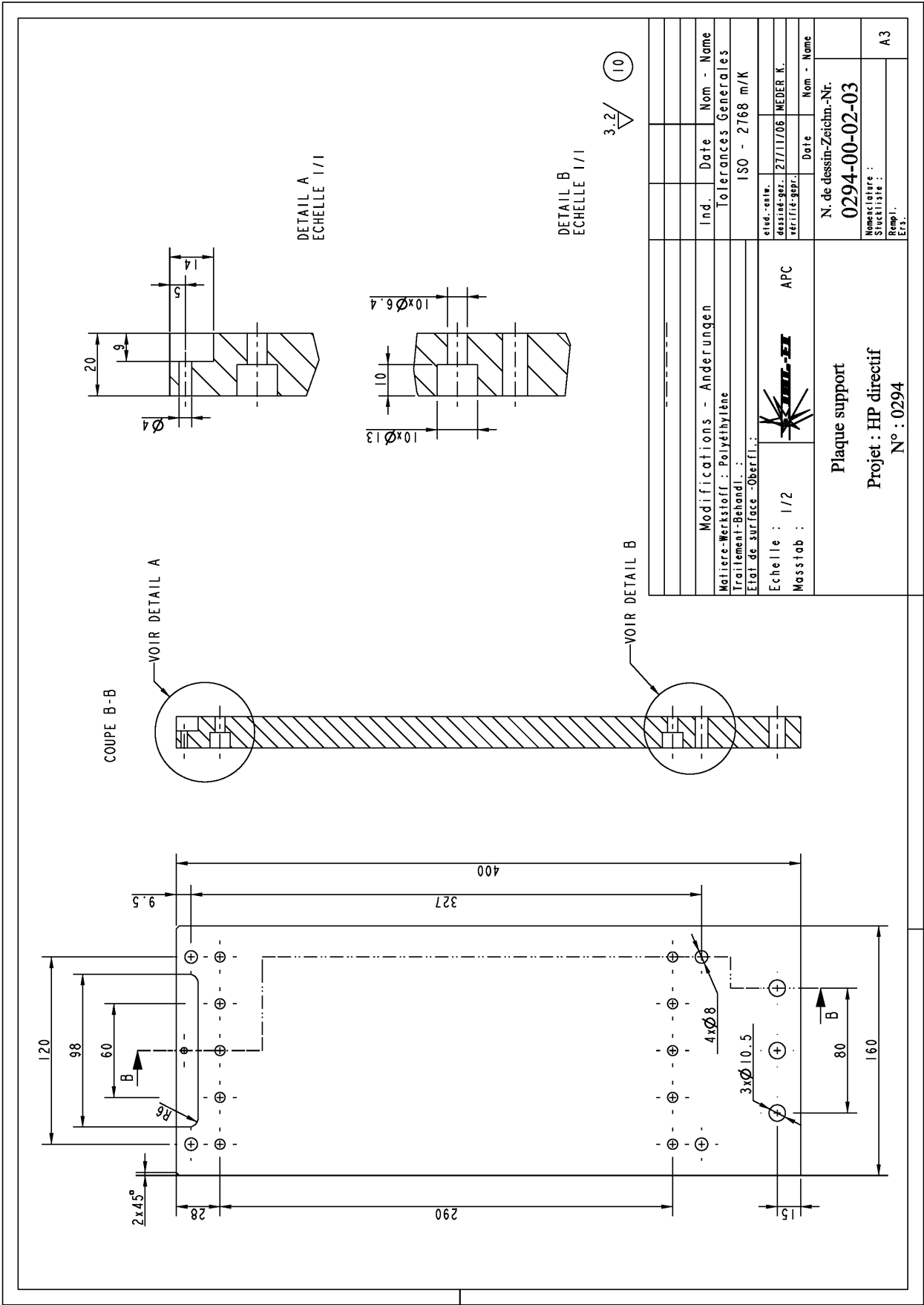


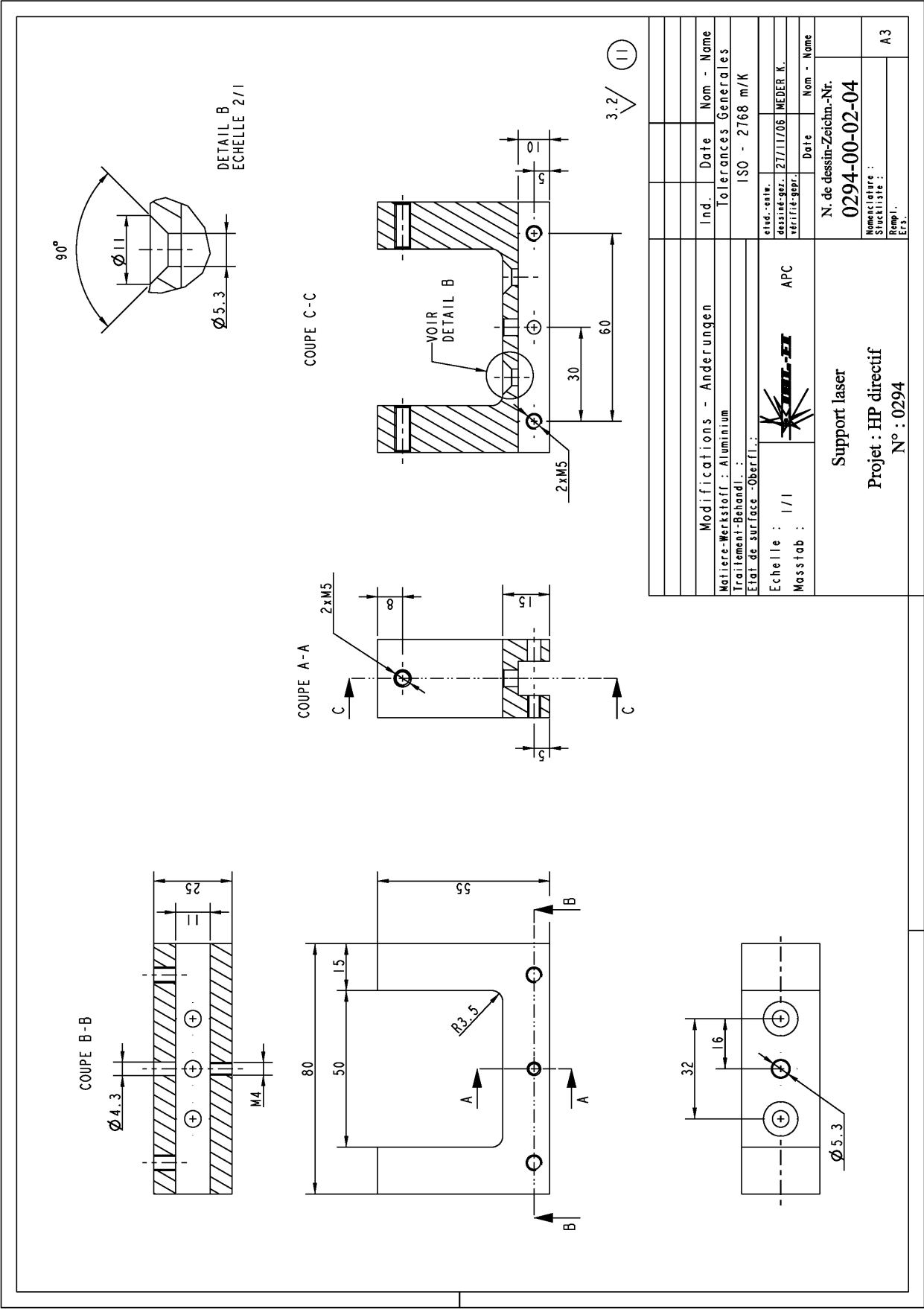
3.2/

9

Modifications - Änderungen		Ind.	Date	Nom - Name	
Matiere-Werkstoff : Aluminium		Tolerances Generales			
Traitement-Behandl. :		ISO - 2768 m/K			
Etat de surface -Oberfl.:					
Echelle : 1/1	 APC	etud.-entw.			
Masstab :		dessiné-gez.	27/11/06	MEDER K.	
		vérifié-gepr.			
			Date	Nom - Name	
Axe de centrage  Projet : HP directif  N° : 0294		N. de dessin-Zeichn.-Nr.  0294-00-02-02			A4
		Nomenclature : Stückliste :			
		Rempl. Ers.			

0294-00-02-02\_AXE





# Bibliographie

- [1] B. NOVIKOV, O. RUDENKO et V. TIMOSHENKO, *Nonlinear Underwater Acoustics*. New York : the American Institute of Physics, Inc., 1987.
- [2] P. WESTERVELT, « Scattering of Sound by Sound », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 29, pp 199–203 and 934–935, 1957.
- [3] U. INGARD et D. PRIDMORE-BROWN, « Scattering of Sound by Sound », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 28, pp 367–369, 1956.
- [4] J. BELLIN et R. BEYER, « Scattering of Sound by Sound », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 32, pp 339–341, 1960.
- [5] H. BERKTAY et C. AL-TEMINI, « Scattering of Sound by Sound », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 50, pp 181–187, 1969.
- [6] P. WESTERVELT, « Parametric Acoustic Array », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 35, pp 535–537, 1963.
- [7] J. BELLIN et R. BEYER, « Experimental Investigation of an End-Fire Array », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 34, pp 1051–1054, 1962.
- [8] H. BERKTAY, « Possible Exploitation of Nonlinear Acoustics in Underwater Transmitting Applications », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 2, pp 435–461, 1965.
- [9] T. MUIR et J. BLUE, « Experiments on the Acoustic Modulation of Large Amplitude Waves », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 46, pp 227–232, 1969.
- [10] T. MUIR et J. WILLETTE, « Parametric Acoustic Transmitting Arrays », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 52, pp 1481–1486, 1972.
- [11] H. BERKTAY et D. LEAHY, « Farfield Performance of Parametric Transmitters », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 55, pp 539–546, 1974.
- [12] F. FENLON, « On the Performance of a Dual Frequency Parametric Source via Matched Asymptotic Solutions of Burgers' Equation », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 55, pp 34–36, 1974.
- [13] D. ODERO et B. POIRÉE, « L'acoustique non linéaire dans les fluides », *Revue du CETHEDC*, vol. 46, pp 97, 1976.
- [14] J. TJOTTA et S. TJOTTA, « Nonlinear Equations of Acoustics, with Application to Parametric Acoustic Arrays », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 69, pp 1644–1652, 1981.



- [15] C. DARVENNES, M. HAMILTON, J. TJOTTA et S. TJOTTA, « Effects of Absorption on the Nonlinear Interaction of Sound Beams », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 89, pp 1028–1036, 1991.
- [16] C. HEDBERG, « Nonlinear Propagation Through a Fluid of Waves Originating from a Biharmonic Source », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 96, pp 1821–1828, 1994.
- [17] M. BENNETT et D. BLACKSTOCK, « Parametric Array in Air », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 57, pp 562–568, 1975.
- [18] M. YONEYAMA, J. FUJIMOTO, Y. KAWAMO et S. SASABE, « The Audio Spotlight : an Application of Nonlinear Interaction of Sound Waves to a New Type of Loudspeaker Design », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 73, pp 1532–1536, 1983.
- [19] P. NAZ, P. HAMERY et E. AUGER, « Générateur acoustique à faisceau dirigé ». Rapport ISL RV224/2003, 2003.
- [20] O. RUDENKO et S. SOLUYAN, *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics*. New York : Plenum Publishing Corporation, 1977.
- [21] HAMILTON M.F. AND BLACKSTOCK, D.T., *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, 1997.
- [22] M. ROSSI, *Electroacoustique*. Dunod, 1986.
- [23] L. KINSLER, A. FREY, A. COPPENS et J. SANDERS, *Fundamentals of Acoustics*. Wiley, 1982.
- [24] M. CROCKER, *Handbook of Acoustics*. Wiley, 1998.
- [25] F. DEFFARGES, « Réseaux acoustiques de sources ponctuelles ». Techniques de l'ingénieur TE 5 156, 2000.
- [26] M. BRUNEAU, *Manuel d'acoustique fondamentale*. Paris : Hermès, 1998.
- [27] N. NOURY, « Du signal à l'information : le capteur intelligent, exemples industriels et en médecine ». Université Joseph Fourier de Grenoble 1, 2002.
- [28] H. HENCKY, « On the Stress State in Circular Plates with Vanishing Bending Stiffness », *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. 63, pp 311–317, 1915.
- [29] R. ABRAM, « The Theory of a Piezoelectric Plastic Film Transducer for Earphones », *J. Phys. D : Appl. Phys.*, vol. 13, pp 201–207, 1980.
- [30] S. TIMOSHENKO et J. GOODIER, *Théorie de l'élasticité*. Paris : Béranger, 1961.
- [31] W. FICHTER, « Some Solution for the Large Deflections of Uniformly Loaded Circular Membranes ». NASA technical paper 3658, 1997.
- [32] G. GARNER et A. HOLDEN, « Tone Ringer using Polyvinylidene Fluoride (PVDF) Piezoelectric Film », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, pp 1940–1945, 1988.
- [33] L. LEDOUX, *Etude de membranes vibrantes en vue de la réalisation d'une prothèse de l'oreille moyenne (Influence des cavités sur la réponse du système)*. Thèse doctorat, Université du Maine, 1991.

- [34] A. ZUCKERWAR, « Theoretical Response of Condenser Microphones », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 65, pp 1278–1285, 1978.
- [35] C. GUIANVARC'H, *La cavité de couplage acoustique dans la méthode de réciprocité*. Thèse doctorat, Ecole doctorale de l'université du Maine, 2005.
- [36] W. BAKER, G. KRIEGSMANN et E. REISS, « Acoustic Scattering by Baffled Cavity-Backed Membranes », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, pp 423–432, 1988.
- [37] P. HAMERY, *Gyrométrie acoustique : Transitoire, simulation, transducteurs et cavité miniature*. Thèse doctorat, Université du Maine, 1994.
- [38] R. LERCH, « Piezopolymer Transducers with Point-Surpporter Membranes », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 70, pp 1229–1234, 1981.
- [39] G. DAVIES, P. MURPHY et G. MAURER, « A Theoretical and Experimental Study of a Model Piezoelectric Membrane Headphone », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 76, pp 661–665, 1984.
- [40] K. AOKI, T. KAMAKURA et Y. KUMAMOTO, « Parametric Loudspeaker - Characteristics of Acoustic Field and Suitable Modulation of Carrier Ultrasound », *Electronics and Communications in Japan*, vol. 74, 1991.
- [41] T. KAMAKURA, K. AOKI et Y. KUMAMOTO, « Suitable Modulation of Carrier Ultrasound for a Parametric Loudspeaker », *Acustica*, vol. 73, pp 215–217, 1991.
- [42] K. AOKI, T. KAMAKURA et Y. KUMAMOTO, « A Parametric Loudspeaker - Applied Examples », *Electronics and Communications in Japan*, vol. 77, 1994.
- [43] D. BLACKSTOCK, « Audio Application of the Parametric Array », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 102, pp 3106, 1997.
- [44] F. POMPEI, « The Use of Airborne Ultrasonics for Generating Audible Sound Beams », *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 47, pp 726–730, 1999.
- [45] J. CROFT et J. NORRIS, « Theory, History, and the Advancement of Parametric Loudspeakers ». [www.atcsd.com](http://www.atcsd.com), 2001. HSS's White paper.
- [46] M. SPENCER, J. CROFT et J. NORRIS, « Modulator Processing for a Parametric Speaker System ». Brevet US 2003/0185405 A1, 2003.
- [47] C. 268, « Equipements pour systèmes électroacoustique », 1985.
- [48] A. KAIZER, « Modeling of Nonlinear Response of an Electrodynamic Loudspeaker by Volterra Series Expansion », *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 35, pp 421–433, 1987.
- [49] D. BARD, *Compensation des non-linéarités des systèmes haut-parleurs à pavillon*. Thèse doctorat, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 2005.
- [50] T. KITE, J. POST et M. HAMILTON, « Parametric Array in Air : Distorsion Reduction by Preprocessing », in *Proc. 16th Int. Cong. Acoust.*, pp 1091–1092, Acoust. Soc. Am., 1998.