

MODELAGEM – A IDEIA GERAL¹

Esta leitura é sobre o uso de modelos para explicar o comportamento de sistemas físicos e fazer previsões sobre eles, com o intuito de guiar projetos de sistemas de engenharia.

Pode ser difícil definir exatamente o que é um **modelo**. Por isso, vamos começar com um exemplo bastante peculiar: um gato caindo de um prédio.

SÍNDROME DO MEDO DE ALTURA FELINA

Costuma-se dizer que os gatos "têm sete vidas"; também é comum acreditar que eles são capazes de sobreviver a quedas de alturas que matariam qualquer ser humano. Existem várias histórias sobre isso, mas será que é realmente verdade? Se um gato caísse do último andar do Edifício Itália, seria realmente capaz de sobreviver? Certamente, perguntas como essas fazem você perder o sono de tanta preocupação...

A menos que você tenha conhecimento prévio sobre o tema, sua resposta mais provável deve ser: "Claro que o gato vai morrer! É o Edifício Itália, pelo amor de Deus!". Se fosse pedido para você esboçar um gráfico da mortalidade felina em função da altura da queda, talvez você desenhasse algo parecido com isto:

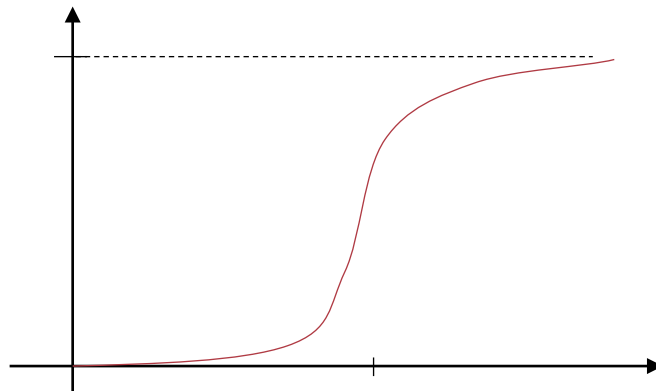


Figura 2: Uma primeira previsão sobre mortalidade de gatos em função da distância da queda.



Figura 1: Uma imagem adorável de um gato caindo. Disponível em: <http://finickymeterisnotavailable.blogspot.com>

¹ Adaptado do texto original "Feline High-Rise Syndrome" de Mark Somerville, Olin College (2014).

Este esboço diz que, para quedas relativamente baixas, a maioria dos gatos sobreviveria, mas acima de certa altura (digamos, 20 metros) a possibilidade de que o gato sobreviva é de fato muito baixa. Ao criar este gráfico, você está fazendo um conjunto de previsões, que não estão baseadas em sua experiência de ter jogado gatos de prédios (esperamos), mas sim de sua intuição sobre qual seria o resultado de tal experimento. Em outras palavras, você fez uma previsão com base em um modelo mental implícito, derivado de sua compreensão de um sistema físico real (que consiste de gatos e prédios):

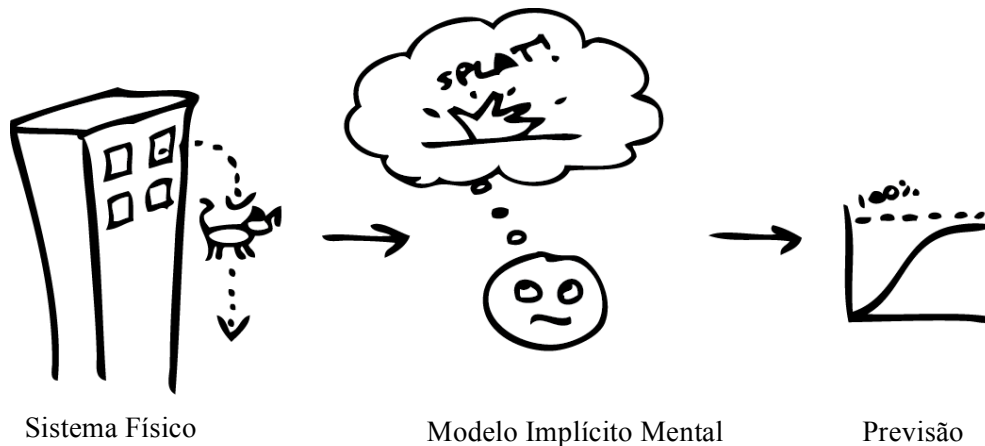


Figura 3: Desenho ilustrativo do processo de traduzir um sistema físico a um modelo mental implícito, e usar esse modelo para fazer uma previsão.

Note que fizemos uma importante distinção aqui entre o sistema físico real e nosso modelo do sistema. Vamos chamar de **abstração** o processo de passar de um sistema físico real para um modelo. Usamos esse nome porque, neste processo, costumamos desconsiderar características que consideramos não serem importantes (por exemplo, em que direção o vento está soprando, ou qual é a cor do gato).

COMPORTAMENTO DO SISTEMA FÍSICO

Claro que se você fosse extremamente encantado com experimentação, ou se achasse que os gatos são animais particularmente desagradáveis, poderia ter escolhido ignorar a experiência mental, tentando medir o real comportamento do sistema físico. Fique tranquilo, não precisaremos arremessar os pobres bichanos do alto da torre do Insper para obter dados: há veterinários que têm relatado os resultados de quedas acidentais de felinos. Jared Diamond escreveu um belo artigo sobre o assunto na revista Nature, há mais de 25 anos atrás, e incluiu uma figura (Figura 4) mostrando tanto as taxas de lesões como as taxas de mortalidade para gatos, além das taxas de mortalidade para seres humanos.

Como pode ser visto, gatos que são trazidos ao veterinário depois de cair de prédios parecem ter taxas de sobrevivência mais elevadas quando caem de distâncias maiores! Temos que reconhecer aqui que existe muita discussão sobre esses resultados em livros de estatísticas e blogs: uma vez que apenas os gatos que sobrevivem são levados ao veterinário, é possível que esses dados sofram de viés de amostragem significativo.

Mas havendo ou não um viés de amostragem, temos aqui um problema: previsões do nosso modelo mental implícito parecem estar em contradição com o comportamento físico observado do sistema. Pode ser que o experimento tenha defeitos; pode ser que o modelo seja inadequado; e é possível ainda que ambos sejam problemáticos.

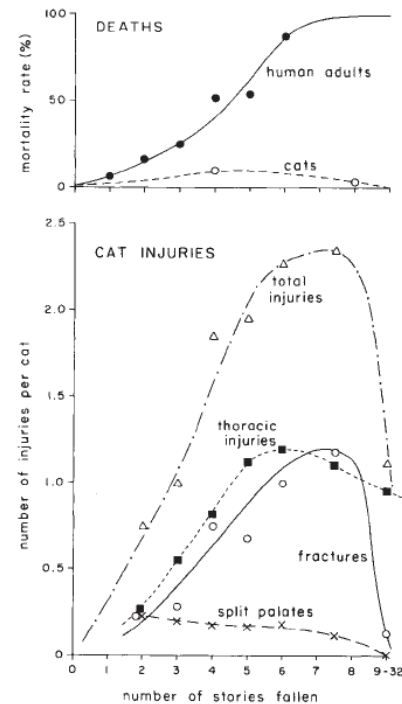


Figura 4: Mortalidade e taxa de acidentes felina e humana em função da altura de queda. De Diamond, *Nature*, 332 (14), 1988.

ITERAÇÕES, AS LEIS DA FÍSICA E O TRABALHO FEITO COM UM MODELO

Como se trata de um curso de modelagem e simulação, vamos supor que o comportamento observado seja razoavelmente consistente com a realidade em toda a população de gatos. Se isso for verdade, então é bastante claro que o modelo mental implícito com que você começou ("É claro que o gato vai morrer!") precisa ser mais bem trabalhado.

Assim como em desenho, costumamos **iterar** quando elaboramos um modelo, ou seja, criamos uma "primeira versão" mais simples (ou protótipo) e aprendemos algumas coisas a partir dela. Em seguida, criamos um segundo modelo que melhora o primeiro, e o processo continua até que tenhamos um modelo que faça aquilo que estabelecemos inicialmente.

Neste caso, parece que, na nossa primeira tentativa, o modelo mental implícito não conseguiu explicar adequadamente o comportamento observado. Podemos propor algo melhor?

A PRIMEIRA ITERAÇÃO: UMA PITADA DE MECÂNICA

Para o nosso sistema, uma opção óbvia para criar um modelo seria utilizar um pouco de mecânica. Após a queda de um prédio, um gato irá acelerar para baixo até a força peso ser compensada pela força de resistência do ar, ponto em que o gato atinge velocidade terminal (cerca de 60 a 90 km/h, dependendo da configuração do gato). Da mesma forma, uma pessoa vai acelerar para baixo até que ele/ela atinja a velocidade terminal humana (cerca de 190 km/h). Se tentarmos fazer um esboço de como seriam as velocidades do gato e da pessoa, chegaremos a um gráfico do tipo:

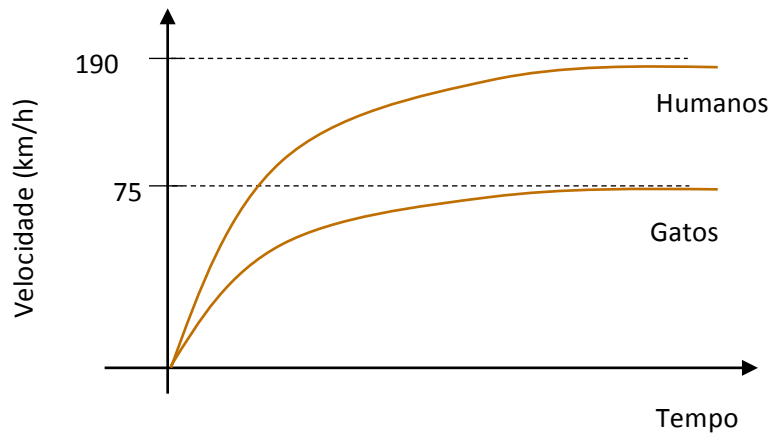


Figura 5: Esboço da velocidade esperada em função da distância percorrida na queda para os seres humanos e os gatos.

Aqui podemos ver que a velocidade máxima dos gatos é bem menor que a dos humanos. Note que isto sugere de imediato ao menos uma explicação parcial de por que as taxas de mortalidade dos gatos são muito mais baixas do que as dos seres humanos: deve ser mais fácil para os gatos sobreviver a um impacto contra o chão a 60 km/h do que para os humanos em uma batida a 190 km/h.

A SEGUNDA ITERAÇÃO: SENDO CADA VEZ MAIS QUANTITATIVO

Claro, podemos ser mais formais do que apenas desenhar o que achamos que vai acontecer. Podemos abstrair o gato (ou a pessoa) para um sistema mecânico mais simples, e então desenvolver as equações que descrevem o comportamento desse sistema. Para fazê-lo, poderíamos começar com um diagrama de corpo livre (Figura 6), indicando que as duas únicas forças importantes que atuam sobre um gato que cai são o peso e a resistência do ar.



Figura 6: Diagrama de corpo livre

Pesquisando um pouco sobre a força de resistência do ar e usando as leis de Newton, acabamos chegando ao seguinte modelo matemático:

$$a = g - \frac{1}{2m}C_D\rho Av^2,$$

em que g é a aceleração da gravidade, a é a aceleração da pessoa ou gato que cai, v é a sua velocidade, m é a sua massa, C_D é o seu coeficiente de arrasto, A é a área da seção transversal da pessoa ou gato e ρ é a densidade do ar. Não se preocupe agora por não saber como lidar com este modelo matemático. Ele envolve equações diferenciais, que serão trabalhadas mais tarde no nosso curso.

Com esta equação, é possível escrever um programa de computação simples ou fazer alguns cálculos analíticos que permitem prever a velocidade e a posição tanto do gato quanto do ser humano, à medida que eles caem. Simulando esta equação com valores de parâmetros apropriados para gatos e seres humanos, podemos criar um gráfico de velocidade em função da altura da queda (Figura 7).

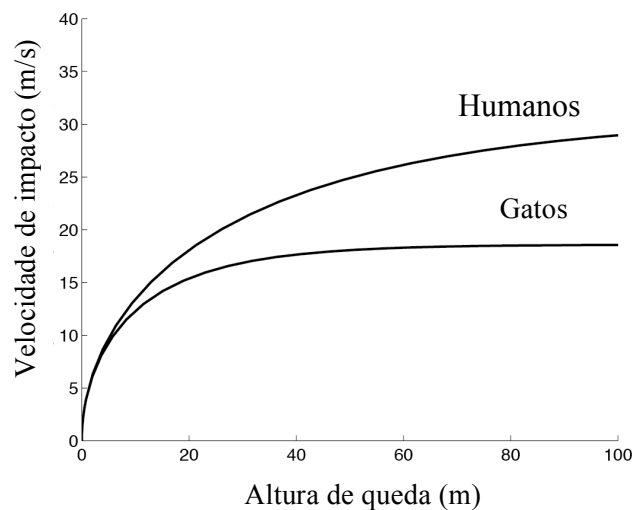


Figura 7: Simulação da velocidade do gato e do ser humano como uma função da altura de queda. Note-se que devido à menor relação área / massa do gato, ele atinge uma velocidade terminal menor.

Agora começamos a ter uma compreensão um pouco mais substancial do modelo. A velocidade do gato para de aumentar em torno de 20 metros (5 andares): independentemente de o gato cair de 5 ou 20 andares, ele vai bater no chão com velocidade aproximada de 15 metros por segundo. Os seres humanos, por outro lado, atingem o chão a uma velocidade maior do que os gatos, particularmente para quedas acima de 5 andares - e continuam a acelerar para distâncias maiores (os humanos não atingem velocidade terminal até cerca de 100 andares!). Uma vez que os seres humanos parecem ter uma taxa de sobrevivência razoável quando batem no chão a uma velocidade abaixo de 20 m/s, é razoável esperar que os gatos sejam capazes de sobreviver a um impacto semelhante.

UMA TERCEIRA ITERAÇÃO

É claro que este modelo não explica por que a taxa de mortalidade cai quando um gato cai de alturas maiores. Diamond e outros especularam que isso pode ser devido a uma diferença observada no comportamento do gato para quedas mais curtas contra o comportamento em quedas maiores. Em uma queda curta, o gato costuma tentar pousar sobre seus pés (como você provavelmente sabe, os gatos têm um impressionante "reflexo de endireitamento", que lhes permite girar no ar e aterrissar sobre seus pés). Por outro lado, quando os gatos caem de distâncias maiores, tendem a assumir uma postura de "esquilo voador".

Poderíamos incorporar isso no modelo, assumindo que a área da seção transversal do gato e seu coeficiente de arrasto aumentam depois que o gato tenha caído certa distância. Considerando os dados, é razoável supor que essa transição pode ser em torno de 5-7 andares. Se incorporarmos esse recurso adicional ao modelo, obtemos os seguintes resultados da simulação:

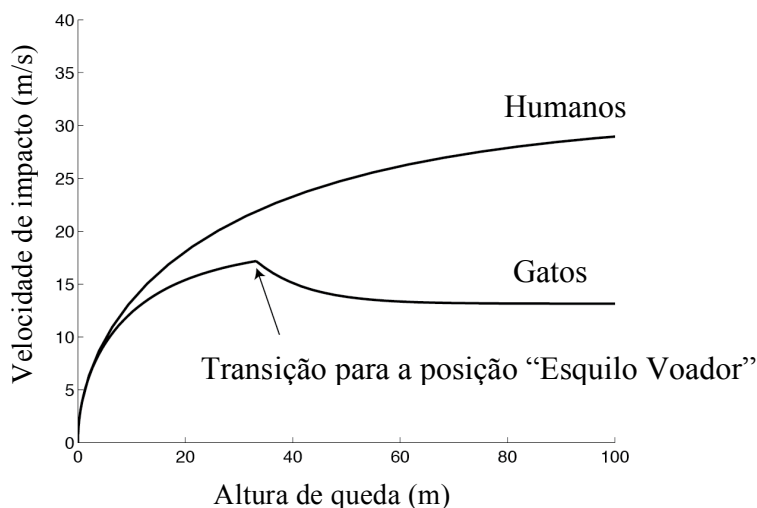


Figura 8: Simulação da velocidade de gatos e seres humanos como uma função da distância da queda, incorporando uma mudança no coeficiente de arrasto e na área da seção transversal para o gato aos 35 metros.

Podemos ver que o pico de velocidade do gato ocorre pouco antes de ele espalhar suas pernas para a posição de esquilo voador. A partir daí, ele fica mais lento, batendo no chão com velocidades mais baixas para maiores alturas. Isso poderia ajudar parcialmente a explicar por que os gatos têm melhores taxas de sobrevivência e taxas de lesões menores para quedas de alturas maiores. Poderíamos imaginar outras razões pelas quais a posição de "esquilo voador" pode ser benéfica. Por exemplo, o impacto é espalhado sobre uma área maior, o que resulta em um impacto menor por unidade de área quando o gato atinge o chão. Da mesma forma, o gato pode estar mais relaxado nesta posição, o que também pode resultar em danos reduzidos. (Observe os modelos mentais implícitos para os danos físicos que nós acabamos de introduzir!)

Neste ponto, nós certamente não temos um modelo que nos diga as taxas de mortalidade em função da altura. Mas temos, sim, um modelo baseado na Física, que pode nos ajudar a explicar o comportamento observado. Em outras palavras, somos capazes de fazer algo de útil com este modelo. Além disso, o modelo nos permite fazer previsões que não constam dos dados experimentais: parece bastante claro, a partir do modelo, que esperaríamos taxas de sobrevivência razoáveis do gato, mesmo que ele esteja fazendo skydiving sem paraquedas.

JÁ ACABAMOS?

Poderíamos, é claro, avançar ainda mais com novas iterações. Talvez pudéssemos desenvolver um modelo de mortalidade em função da velocidade de impacto (e massa corporal). Talvez pudéssemos detalhar melhor os aspectos de como muda a postura e a orientação do gato. Mas devemos questionar se tais medidas irão adicionar valor ao nosso modelo: já temos um modelo relativamente simples que funciona bem para explicar o comportamento do sistema, além de prever o comportamento que não podemos observar (ou, do ponto de vista moral, que não devemos observar). E ainda que o modelo tenha algumas coisas que nós inventamos (particularmente em torno da questão de como os efeitos da mudança da configuração afeta o coeficiente de arraste), ele é muito defensável. Aumentar a complexidade do modelo pode fazê-lo corresponder melhor aos dados, mas certamente levaria a trabalho adicional, e também poderia diminuir a credibilidade do modelo, se as novas hipóteses não forem bem justificadas.

UM QUADRO GERAL PARA A MODELAGEM

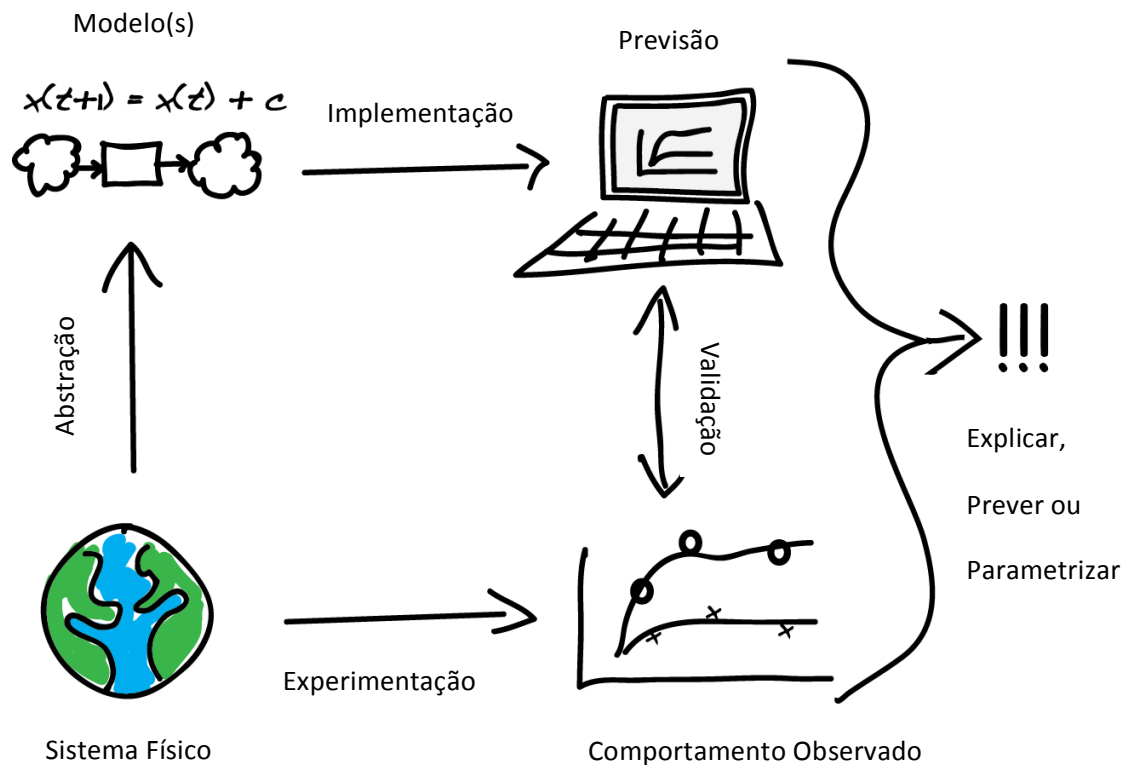


Figura 9: Desenho que ilustra o processo de modelagem e simulação

O exemplo da síndrome do medo de altura felina que estamos discutindo tem a intenção de apresentar um quadro geral para a modelagem que vamos usar durante todo o curso, ilustrado no desenho acima. Também costumamos chamar este quadro de **framework**. Normalmente, em modelagem, partimos do mundo físico, com algum sistema físico que queremos conhecer melhor (por exemplo, gatos que caem de prédios). Em seguida, passamos por um processo de abstrair este sistema para um modelo. O próximo passo é implementar o modelo para fazer previsões, seja por meio de uma simulação computacional, seja "reproduzindo o filme em nossas cabeças", ou analisando e fazendo cálculos a partir de um conjunto de equações. Tendo feito previsões, tentamos validar nosso modelo, comparando essas previsões com o comportamento observado do sistema.

É importante ressaltar que, em modelagem, quase sempre passamos por este ciclo várias vezes, assim como fizemos com o exemplo do gato. Cada nova iteração é impulsionada pela necessidade de criar um modelo que nos dê as respostas que procuramos sobre o sistema.

Em modelagem, existem diferentes tipos de respostas, que podem estar relacionadas entre si. Uma **resposta explicativa** é aquela que nos ajuda a compreender um fenômeno observado. Já uma **resposta preditiva** é aquela que nos dá elementos para dizer algo sobre um fenômeno que ainda não observamos diretamente (por exemplo, o que pode acontecer se um gato saltar de um avião). Um modelo pode fornecer ainda um tipo de resposta que funciona como uma extensão da resposta preditiva, permitindo especificar parâmetros para que o sistema se comporte como desejado (por exemplo, ao projetar uma roupa para o gato que salta do avião, qual deve ser a área da sua superfície para que a chance de que ele sobreviva seja a maior possível). Chamaremos este último tipo de **resposta de parametrização**.

Finalmente, é importante ressaltar que, ao criar um modelo, não podemos realizar novas iterações indefinidamente. O processo tem de parar em algum momento que, normalmente, não corresponde a um modelo perfeitamente preciso. Ao contrário, trata-se do momento em que o modelo atinge um equilíbrio adequado entre simplicidade e precisão para o trabalho que se está tentando fazer. Decidir quando continuar iterando e quando parar requer julgamento, que você irá desenvolvendo a partir das leituras do curso e, principalmente, do trabalho em seus próprios projetos.