

Inspirar para Transformar

# Instrumentação e Medição

Aula 3



# Medição de Temperatura com o Termômetro de Resistência e a Ponte de Wheatstone (60 min)

### Termômetro de resistência



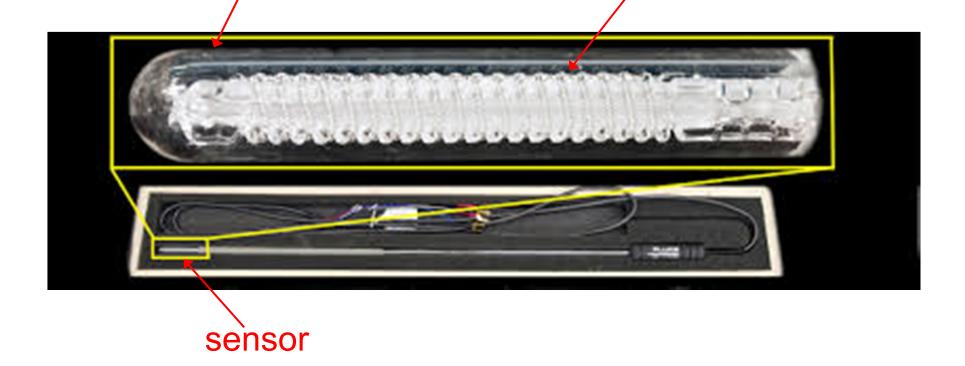
Inspirar para Transformar



# Termômetro de resistência padrão



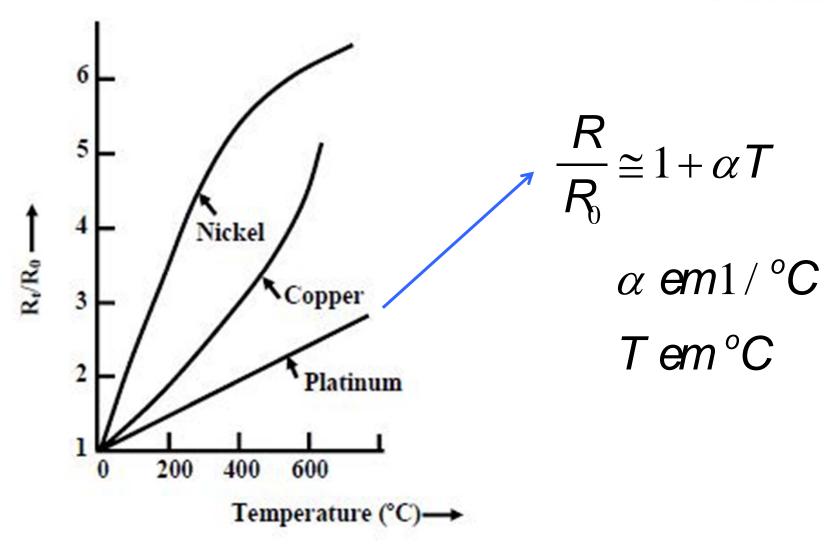
Tubo de quartzo Resistência de Pt, 100 Ω a 0 °C



# Resistência relativa de metais em função da temperatura



Inspirar para Transformar



# Medição da resistência do TR diretamente



Inspirar para Transformar

Coef. Temperatura para a platina (Pt):

$$\alpha = 3,925 \times 10^{-3} \, \text{K}^{-1} \text{de}0 \, \text{a}100 \, ^{\circ}\text{C}$$

Usualmente:  $R_0 = 100\Omega a0^{\circ}C$ 

Supondo uma variação de 1°C a 0°C:

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \alpha T = 1 + 3,925 \times 10^{-3}.1 \cong 1,004$$

Ou seja,  $R = 100,4\Omega$  Apenas 0,4% maior!!!

De quanto é a variação percentual em outras temperaturas?

# Medição da resistência do TR diretamente Tabela Pt-100

°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-200	18,49	150	-	-	-	1-1	-	-	-	1.5
-190	22,80	22,37	21,94	21,51	21,08	20,65	20,22	19,79	19,36	18,93
-180	27,08	26,65	26,23	25,80	25,37	24,94	24,52	24,09	23,66	23,23
-170	31,32	30,90	30,47	30,05	29,63	29,20	28,78	28,35	27,93	27,50
-160	35,53	35,11	34,69	34,27	33,85	33,43	33,01	32,59	32,16	31,74
-150	39,71	39,30	38,88	38,46	38,04	37,63	37,21	36,79	36,37	35,95
-140	43,87	43,45	43,04	42,63	42,21	41,79	41,38	40,96	40,55	40,13
-130	48,00	47,59	47,18	46,76	46,35	45,94	45,52	45,11	44,70	44,28
-120	52,11	51,70	51,29	50,88	50,47	50,06	49,64	49,23	48,82	48,41
-110	56,19	55,78	55,38	54,97	54,56	54,15	53,74	53,33	52,92	52,52
-100	60,25	59,85	59,44	59,04	58,63	58,22	57,82	57,41	57,00	56,60
-90	64,30	63,90	63,49	63,309	62,68	62,28	61,87	61,47	61,06	60.66
-80	68,33	67,92	67,52	67,12	66,72	66,31	65,91	65,51	65,11	64,70
-70	72,33	71,93	71,53	71,13	70,73	70,33	69,93	69,52	69,13	68,73
-60	76,33	75,93	75,53	75,13	74,73	74,33	73,92	73,53	73,13	72,73
-50	80,31	79,91	79,51	79,11	78,72	78,32	77,92	77,52	77,13	76,73
<b>-40</b>	84,27	83,88	83,48	83,08	82,69	82,29	81,89	81,50	81,10	80,70
-30	88,22	87,83	87,43	87,04	86,64	86,25	95,65	85,46	85,06	84,67
-20	92,16	91,77	91,37	90,98	90,59	90,19	89,80	89,40	89,01	88,62
-10	96,09	95,69	95,30	94,91	94,52	94,12	93,73	93,34	92,95	92,55
0	100.00	99,61	99.22	98,83	98,44	98,04	97,65	97,26	96,87	96,48
0	100,00	100,39	100,78	101,1/	101,56	101,95	102,34	102,73	103,12	103,51
10	103,90	104,29	104,68	105,07	105,46	105,85	106,24	106,63	107,02	107,40
20	107,79	108,18	108,57	108,96	109,35	109,73	110,12	110,51	110,90	111,28
30	111,67	112,06	112,45	112,83	113,22	113,61	113,99	114,38	114,77	115,15
40	115,54	115,93	116,31	116,70	117,08	117,47	117,85	118,24	118,62	119,01
50	119,40	119,78	120,16	120,55	120,93	121,32	121,70	122,09	122,47	122,86
60	123,24	123,62	124,01	124,39	124,77	125,16	125,54	125,92	126,31	126,69
70	127,07	127,45	127,84	128,22	128,60	128,98	129,37	129,75	130,13	130,51



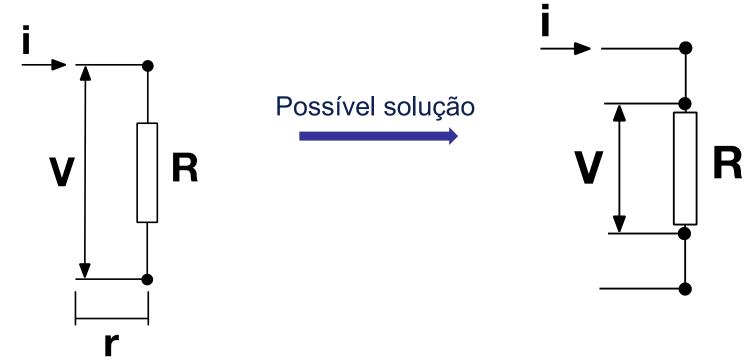
Inspirar para Transformar

## Medição da resistência do TR diretamente



Medição 2 fios:

Medição 4 fios:



r compete com  $\Delta R!$ 

Ainda sim devemos ser capazes de medir  $\Delta R!$ 

# Medição da resistência do TR



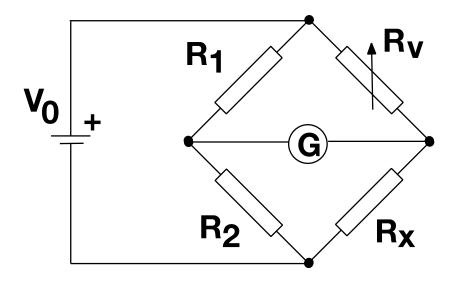
# Como podemos resolver esse problema?

Utilizar a Ponte de Wheatstone!

## Ponte de Wheatstone (1883):



Inspirar para Transformar

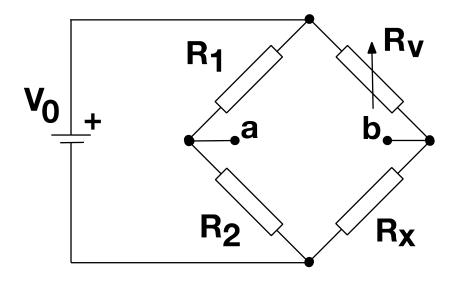


Para a ponte <u>balanceada</u> (i<sub>G</sub> = 0 A) demonstra-se que:

$$R_{x} = \frac{R_{v} \cdot R_{2}}{R}$$

#### Ponte de Wheatsone



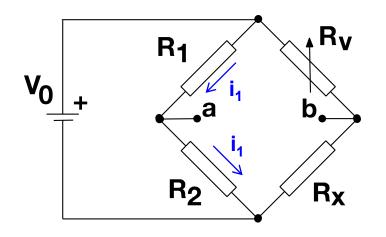


Quando balanceada  $V_a = V_b$ 

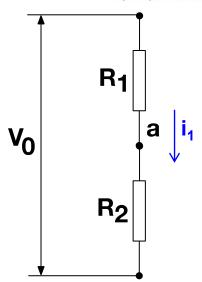
#### Conceito de divisor de tensão



Inspirar para Transformar







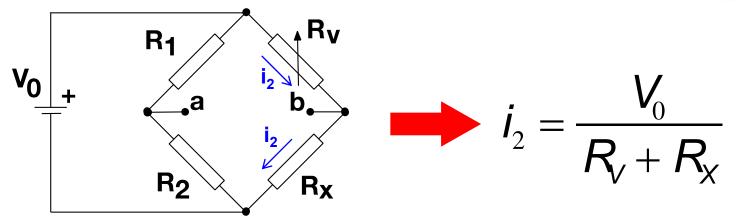
$$i_1 = \frac{V_0}{R + R_2}$$

$$\therefore V_a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0$$

#### Conceito de divisor de tensão



Inspirar para Transformar

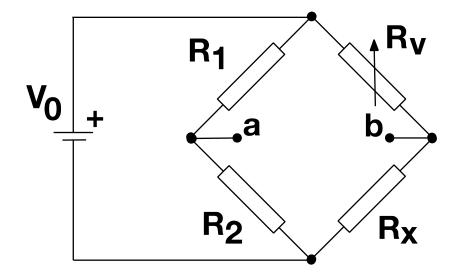


$$\therefore V_b = \frac{R_{\downarrow}}{R_{\downarrow} + R_{\downarrow}} V_0$$

## Ponte Wheatstone: exercício (10 min)



Inspirar para Transformar



Obtenha a relação:

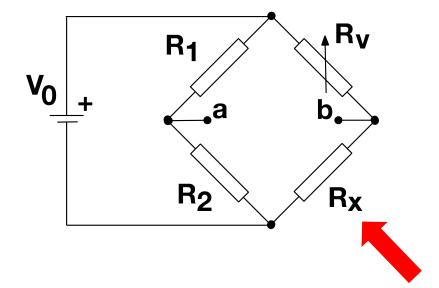
$$R_{X} = \frac{R_{V} \cdot R_{2}}{R_{1}}$$

$$\Delta R_{V} = \frac{R_{1}}{R_{2}} \Delta R_{X}$$

#### Ponte Wheatstone e TR



Inspirar para Transformar



$$R_{\chi} = \frac{R_{V} \cdot R_{2}}{R}$$

Mas podemos também considerar para <u>TR</u> (Termometro de Resist.) a formula:

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \alpha T$$

Combinando as duas equações:

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \alpha T = \frac{R_V \cdot R_2}{R \cdot R_0}$$

# Variação de temperatura no TR



$$\frac{R_x(T+\Delta T)}{R_0} = 1 + \alpha(T+\Delta T)$$

$$\frac{R_{x}(T)}{R_{0}} = 1 + \alpha T$$

$$= \frac{R_x(T + \Delta T)}{R_0} - \frac{R_x(T)}{R_0} = \alpha \Delta T$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R_{x}}{R_{0}} = \alpha \Delta T$$

#### Ponte de Wheatstone e TR



Inspirar para Transformar

$$\frac{\Delta R_{x}}{R_{0}} = \alpha \Delta T$$

$$\frac{R_{x}}{R_{0}} = \left(\frac{R_{2}}{R_{0}}\right) \frac{R_{v}}{R_{0}}$$

$$\frac{\Delta R_{x}}{R_{0}} = \left(\frac{R_{2}}{R_{0}}\right) \frac{\Delta R_{v}}{R_{0}} = \alpha \Delta T$$

Para  $\Delta T$  igual a 1°C e R<sub>0</sub> = 100  $\Omega$ :

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\Delta R_V}{R_0} = \alpha \Rightarrow \Delta R_V = (\alpha R_0) \left(\frac{R_1}{R_2}\right) = S$$

$$\Delta R_V = 0.4 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

#### Ponte de Wheatstone e TR em números



# P/ Variação de temperatura igual a 1°C:

$$\Delta R_{V} = 0, 4 \left( \frac{R_{1}}{R_{2}} \right)$$

$$\frac{R}{R_2} = 1 \qquad \Delta R_V = 0, 4\Omega$$

$$\frac{R}{R_2} = 10 \qquad \Delta R_V = 40\Omega$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 10 \qquad \Delta R_V = 40\Omega$$

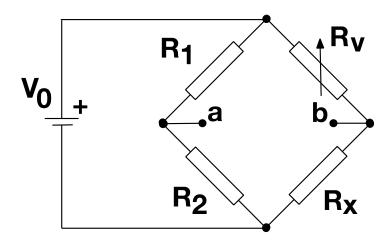
$$\frac{R}{R_{5}} = 100 \quad \Delta R_{V} = 400\Omega$$



#### Ponte Wheatstone e TR



Inspirar para Transformar



$$\frac{R}{R_0} = 1 + \alpha T = \frac{R_v \cdot R_2}{R \cdot R_0}$$

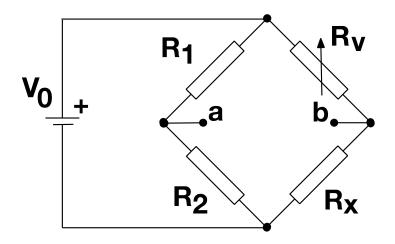
Isolamos T para obter a equação de uma reta de T(R<sub>V</sub>):

$$T = \frac{1}{\alpha \cdot R_0} \frac{R_2}{R} R_V - \frac{1}{\alpha}$$

#### Ponte Wheatstone e TR



Inspirar para Transformar



Reta:

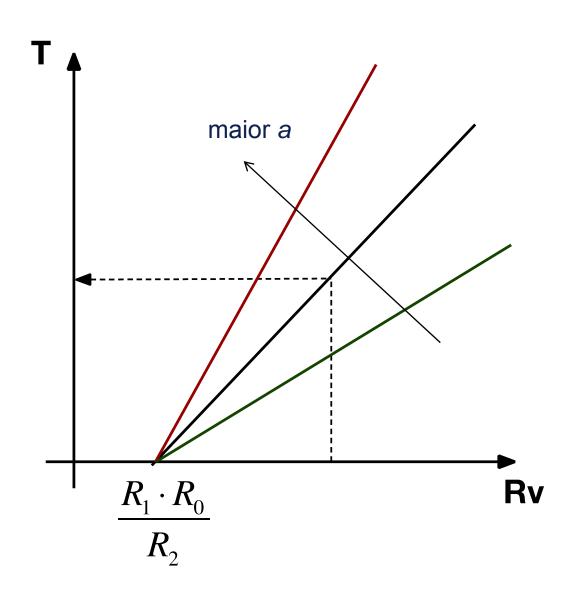
$$T = \frac{1}{\alpha \cdot R_0} \frac{R_2}{R_1} R_V - \frac{1}{\alpha}$$

Coeficiente  $\frac{1}{\alpha \cdot R_0} \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{S}$  angular:

# Ponte Wheatstone e TR; sensibilidade



Inspirar para Transformar



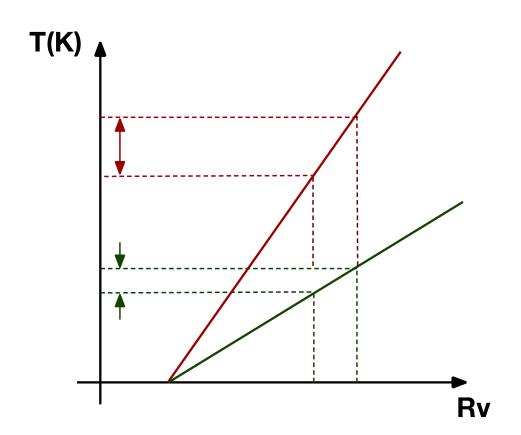
$$T = \frac{1}{S}R_{V} - \frac{1}{\alpha}$$

$$a = \frac{1}{S}$$

# Ponte Wheatstone e TR; sensibilidade



Inspirar para Transformar



$$a = \frac{1}{S}$$

# Sensibilidade:



$$S = \alpha \cdot R_0 \frac{R}{R}$$

#### Sensibilidade de um TR + Ponte



$$T = \frac{1}{S}R_V - \frac{1}{\alpha} \implies \Delta T = \frac{1}{S}\Delta R_V$$

$$\therefore S = \frac{\Delta R_{V}}{\Delta T}$$

Sensibilidade de um sistema de medição: Quociente entre a variação duma indicação dum sistema de medição e a variação correspondente do valor da grandeza medida.

\*VIM – Vocabulário Internacional de Metrologia, INMETRO, 2012.



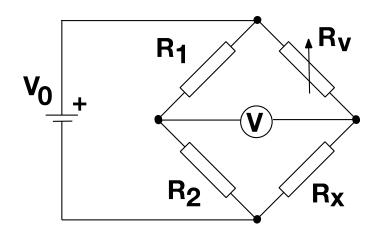
# Construção de um termômetro de resistência e medição com a Ponte de Wheatstone

(individual)

Parte A - resistor de 2,4 ohms (90 min)

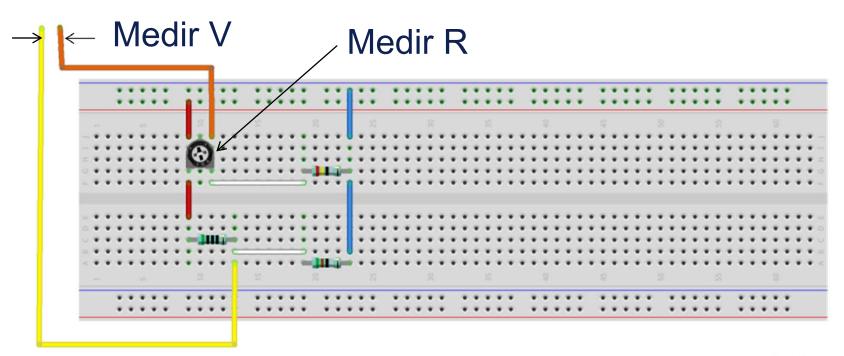
## Medir a resistência de um resistor de 2,4 ohms





$$V_0 = 3 V$$

$$R_1$$
 = 500 Ω  
 $R_2$  = 5,1 Ω  
Trimpot 1kΩ



# Medir a resistência de um resistor de 2,4 ohms



# Façam 20 medidas de Rv!

n	Rv / Ω	n	Rv / Ω
1	250	1	244,0
2	250	2	244,0
3	250	3	244,4
4	250	4	244,7
5	250	5	244,1
6	246	6	243,6
7	245	7	243,8
8	245	8	243,3
9	244	9	243,7
10	245	10	243,7
Média	247	Média	243,9
Desvio	2	Desvio	0,4



# Medições e Incertezas (40 min)

# Introdução



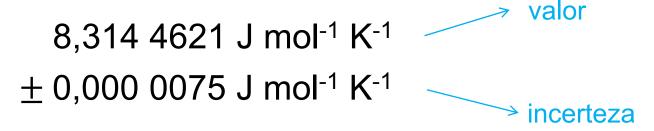
Um experimento não está completo enquanto não for feita uma <u>análise de incerteza</u> nos resultados!

# Algumas constantes físicas



#### Número de Avogadro:

#### Constante universal dos gases



Melhores valores estimados para estas constantes.

Reavaliadas à medida que novos métodos, mais precisos e exatos, são desenvolvidos.

http://physics.nist.gov/cuu/Constants/

# Algumas constantes físicas



Inspirar para Transformar

← → C 🕆 physics.nist.gov/cuu/Constants/Table/allascii.txt

Fundamental Physical Constants --- Complete Listing

Enomy http://physics.nist.gov/constants	valor	incerteza	unidade
From: http://physics.nist.gov/constants  Quantity	Value	Uncertainty	Unit
{220} lattice spacing of silicon alpha particle-electron mass ratio alpha particle mass alpha particle mass energy equivalent alpha particle mass energy equivalent in MeV alpha particle mass in u alpha particle molar mass alpha particle-proton mass ratio Angstrom star atomic mass constant atomic mass constant energy equivalent atomic mass constant energy equivalent in MeV atomic mass unit-electron volt relationship atomic mass unit-hartree relationship atomic mass unit-inverse meter relationship atomic mass unit-joule relationship atomic mass unit-kelvin relationship	192.015 5714 e-12 7294.299 541 36 6.644 657 230 e-27 5.971 920 097 e-10 3727.379 378 4.001 506 179 127 4.001 506 179 127 e-3 3.972 599 689 07 1.000 014 95 e-10 1.660 539 040 e-27 1.492 418 062 e-10 931.494 0954 931.494 0954 e6 3.423 177 6902 e7 2.252 342 7206 e23 7.513 006 6166 e14 1.492 418 062 e-10 1.080 954 38 e13	0.000 0032 e-12 0.000 000 24 0.000 000 082 e-27 0.000 000 073 e-10 0.000 023 0.000 000 000 063 0.000 000 000 063 0.000 000 000 36 0.000 000 90 e-10 0.000 000 90 e-27 0.000 000 018 e-10 0.000 0057 0.000 0057 e6 0.000 000 0016 e7 0.000 000 0016 e7 0.000 000 0016 e23 0.000 000 0018 e-10 0.000 000 018 e-10 0.000 000 018 e-10 0.000 000 018 e-10	m kg J MeV u kg mol^-1 m kg J MeV eV E_h Hz m^-1 J
atomic mass unit-kilogram relationship	1.660 539 040 e-27	0.000 000 020 e-27	kg
atomic unit of 1st hyperpolarizability	3.206 361 329 e-53	0.000 000 020 e-53	C^3 m^3 J^-2
atomic unit of 2nd hyperpolarizability	6.235 380 085 e-65	0.000 000 077 e-65	C^4 m^4 J^-3

#### Análise de Incerteza



Inspirar para Transformar

Os objetivos da teoria dos erros consistem em:

- determinar o melhor valor possível para a grandeza a partir de medições
- determinar <u>quanto o melhor valor obtido pode ser diferente</u> do valor verdadeiro (incerteza)

#### Número de Avogadro:

6,022 141 29 x 10<sup>23</sup> mol<sup>-1</sup>
± 0,000 000 27 x 10<sup>23</sup> mol<sup>-1</sup>
incerteza

Quando se relata o resultado de medição de uma grandeza física, é obrigatório que seja dada alguma indicação quantitativa da qualidade do resultado, de forma tal que aqueles que o utilizam possam avaliar sua confiabilidade.

#### Análise de Incerteza



Uma das formas mais usuais para a especificação de uma incerteza de um resultado é a **incerteza padrão** ( $\sigma$ ).

### Mais algumas definições

**Incerteza de medição**: Parâmetro não negativo que caracteriza a <u>dispersão dos</u> <u>valores atribuídos a um mensurando</u>, com base nas informações utilizadas.

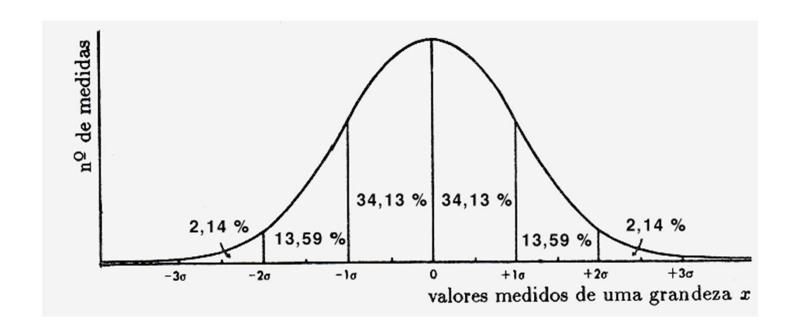
**Incerteza padrão**: incerteza do resultado de uma medição expressa como um desvio padrão.

\*VIM – Vocabulário Internacional de Metrologia, INMETRO, 2012.

## Análise de Incerteza



# Incerteza padrão ( $\sigma$ ).

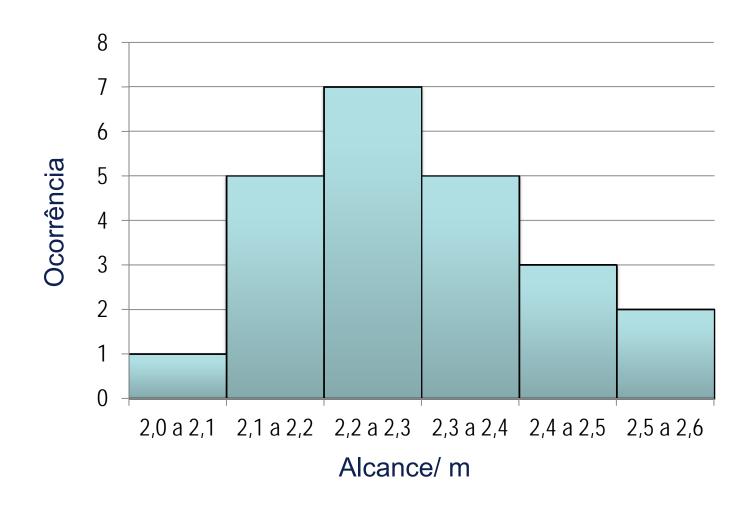


# Lançamento de projétil



Inspirar para Transformar

### Canhão de mola



# Lançamento de projétil

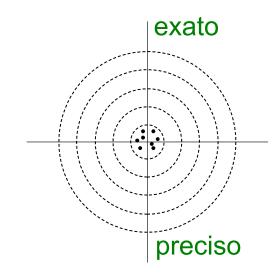


Inspirar para Transformar









### Tipos de erros



Erros aleatórios: influenciam precisão (Tipo A da incerteza);

Erros sistemáticos: influenciam a exatidão (Tipo B da incerteza);

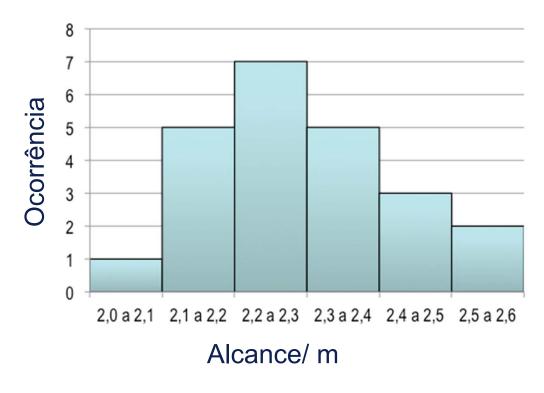
Erros grosseiros: produzem pontos ruins.



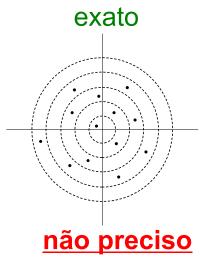
#### **Erros aleatórios**



Inspirar para Transformar



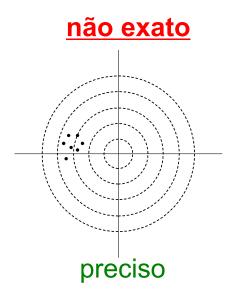
- A melhor estimativa para o valor da grandeza é a média aritmética dos N resultados;
- Uma medida do espalhamento dos dados é o desvio-padrão da amostra.



#### Erros sistemáticos



- Fazem com que o valor medido afaste-se do valor verdadeiro;
- São reduzidos por meio de calibração, por estimativas teóricas aproximadas do desvio ou por avaliação do instrumento e procedimento utilizados.



#### **Erros grosseiros**



 Derivados de metodologias ineficazes, mau uso ou uso ineficiente da instrumentação disponível, utilização da cadeia de medição em ambientes inadequados ou fora da sua faixa de utilização primitiva ou utilização de cadeia de medição defeituosa;

 Podem ser bastante reduzidos por elaboração de normas precisas de medição, instalações laboratoriais adequadas e treinamento não exato

adequado da mão-de-obra.



## Mais algumas definições



*Erro de medição* = Diferença entre o valor medido duma grandeza e um valor de referência.

**Erro aleatório** = Componente do **erro de medição** que, em **medições** repetidas, varia de maneira imprevisível.

Erro sistemático = Componente do erro de medição que, em medições repetidas, permanece constante ou varia de maneira previsível.

\*VIM – Vocabulário Internacional de Metrologia, INMETRO, 2012.

#### Uma característica de instrumentos



Inspirar para Transformar

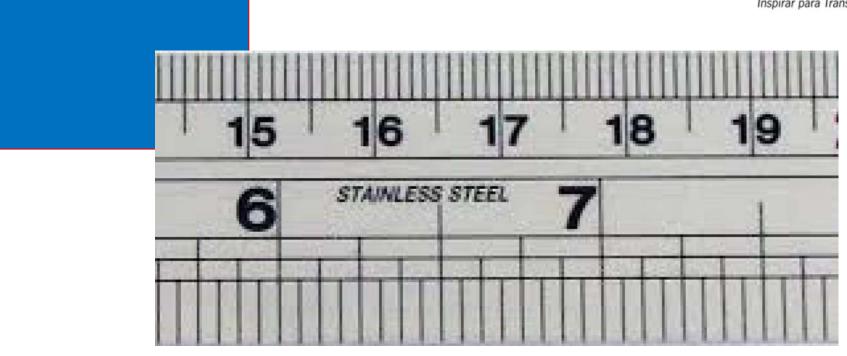
**Resolução** = Menor variação da **grandeza** medida que causa uma variação perceptível na **indicação** correspondente.

\*VIM – Vocabulário Internacional de Metrologia, INMETRO, 2012.

## Precisão de um instrumento analógico







 $15,0 \pm 0,05$  cm

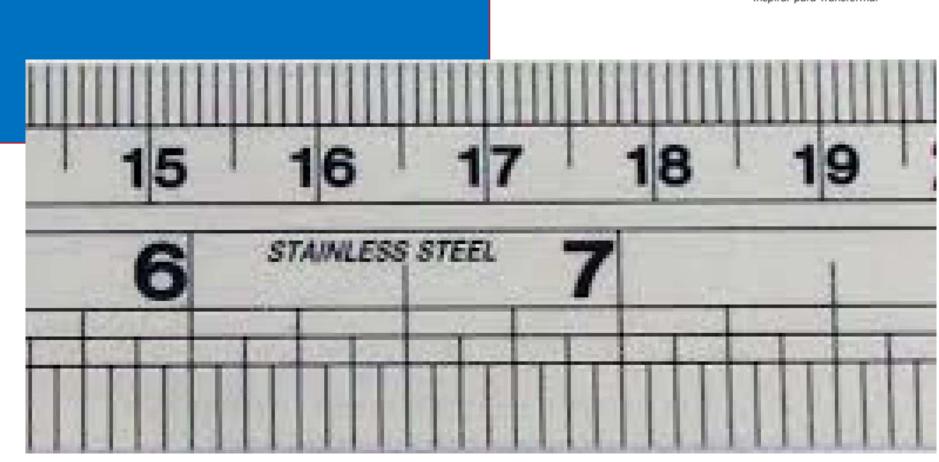
Metade da menor divisão (resolução)

obs.: Se formos conservadores usaríamos, no caso acima, incerteza de ± 0,1 cm

## Precisão de um instrumento analógico



Inspirar para Transformar



 $17,05 \pm 0,05$  cm

Ampliamos a escala, podíamos melhorar a incerteza, por ex. 0,03 cm

## Precisão de um instrumento digital





Normalmente é especificada pelo fabricante, ou, então, usamos metade da menor divisão. Por exemplo:

 $(20,10 \pm 0,05)$  °C

TR

obs.: Se formos conservadores usaríamos, no caso acima, ± 0,1 °C



Volts DC	Gama/Resolução: 6,000 V / 0,001 V	
	Gama/Resolução: 60,00 V / 0,01 V	
	Gama/Resolução: 600,0 V / 0,1 V	
	Precisão: ± ([% da leitura] + [cont	tagens]): 0,5% + 2
Ohms	Gama/Resolução: 600,0 Ω / 0,1 Ω	
	Gama/Resolução: $6,000 \text{ k}\Omega / 0,001 \text{ k}\Omega$	V
	Gama/Resolução: $60,00 \text{ k}\Omega / 0,01 \text{ k}\Omega$	Resolução:
	Gama/Resolução: $600.0 \text{ k}\Omega / 0.1 \text{ k}\Omega$	Gama/6000
	Gama/Resolução: $6,000 \text{ M}\Omega / 0,001 \text{ M}\Omega$	(conversor A/D)
	Precisão: 0,9% + 1	(00111010017110)



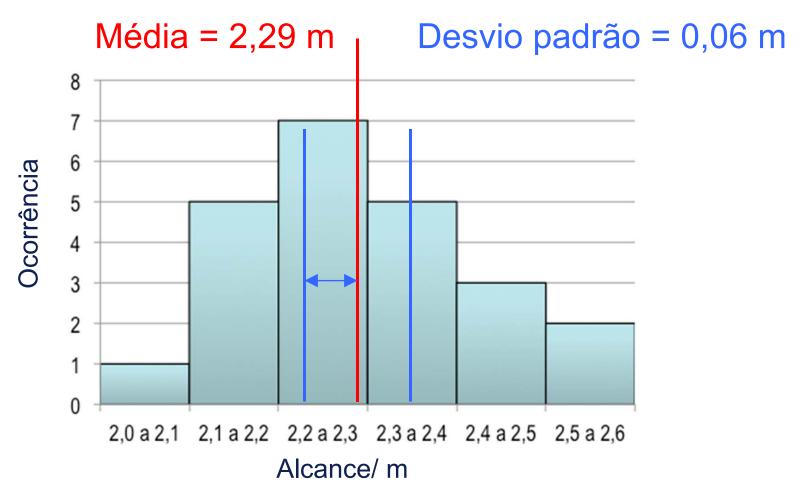
Ex.1 – Tensão na bateria, medimos 9,00 V (gama 60,00) Precisão = 0,005 x 9 + 0,02 = 0,065 V 9,00 ± 0,07 V Resolução: 60/6000= 0,01V

Ex.2 – Resistência de 1  $\Omega$ , 1,0  $\Omega$  (gama 600,0  $\Omega$ ) Precisão = 0,009 x 1 + 0,1 = 0,109  $\Omega$  1,0 ± 0,1  $\Omega$ Resolução: 600/6000= 0,1  $\Omega$ 

### Erros aleatórios em medições



Inspirar para Transformar



Alcance =  $2,29 \pm 0,06$  m (para confiabilidade de 68,%)

### Erros aleatórios em medições



Inspirar para Transformar

Média dos resultados:

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 ... + \mathbf{x}_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i$$

Desvio-padrão:

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_N - \overline{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}$$

Caso sejam feitas diversas repetições de um conjunto de medições o Desvio-padrão do valor médio é:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



Um algarismo é significativo se ele tem maior probabilidade de ser correto, em relação a outros.

O número de dígitos ou algarismos que devem ser apresentados num resultado experimental é determinado pela incerteza padrão neste resultado.



## Vejamos alguns exemplos:

97 
$$\Omega$$
 devemos entender que 97 ± 1  $\Omega$ 

100,04 
$$\Omega$$
 devemos entender que 100,04 ± 0,01  $\Omega$ 

Dizemos que 97  $\Omega$  apresenta dois algarismos significativos.

100,04 Ω apresenta cinco algarismos significativos.



Inspirar para Transformar

Regras para identificar algarismos significativos:

- Todos os dígitos diferentes de zero são significativos;
   2,998x10-8 m/s possui quatro algarismos significativos.
- Todos os zeros entre dígitos diferentes de zero são significativos; 6,02214179x10<sup>-23</sup> mol<sup>-1</sup> possui nove algarismos significativos.
- Zeros à esquerda do primeiro dígito não nulo não são significativos;
   0,051 Ω possui dois algarismos significativos.
- Zeros ao final do número e à direita da vírgula são significativos;
   0,20 Ω possui dois algarismos significativos.
- Zeros ao final de um número sem vírgula podem ser significativos; 270 Ω possui dois ou três algarismos significativos. Para evitar ambiguidade prefira utilizar notação científica.



A precisão de um resultado calculado é limitada pela medição menos precisa dos cálculos.

Regras para arredondamento para o número de algarismos significativos apropriado.

- Não mude o último dígito significativo se o dígito seguinte for menor ou igual a 4: 6,62 torna-se 6,6 se dois algarismos significativos for mais apropriado;
- Acrescente um ao último dígito significativo se o dígito seguinte for maior ou igual a 6: 5,67 torna-se 5,7 se dois algarismos significativos for mais apropriado;
- Não mude o último dígito significativo se ele for par e o dígito seguinte for 5: 3,45 torna-se 3,4;
- Acrescente um ao último dígito significativo se ele for ímpar e o dígito seguinte for 5: 3,55 torna-se 3,6.



Inspirar para Transformar

ADIÇÃO e SUBTRAÇÃO: arredondar o resultado considerando o número com menor número de casas decimais.

Ex: 1,23 + 45,6 = 46,8 (45,6 está entre 45,56 e 45,64)

MULTIPLICAÇÃO e DIVISÃO: arredondar o resultado para o mesmo número de algarismos significativos do fator com menor número de algarismos significativos.

Ex:  $1,2 \times 345,6 = 414,72$ , porém devemos escrever como  $4,1 \times 10^2$ 

Nota importante: só arredonde o resultado final. Conduza os cálculos parciais sem arredondamento.



- 1. A melhor estimativa de uma parâmetro é a média;
- 2. O erro é o erro padrão da média;
- 3. Arredonde o erro para o número apropriado de algarismos significativos;
- 4. Ajuste o número de casas decimais da média para aquele do erro padrão;
- Inclua unidades.



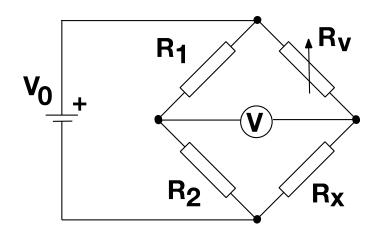
# Construção de um termômetro de resistência e medição com a Ponte de Wheatstone

(individual)

Parte A - resistor de 2,4 ohms (90 min)

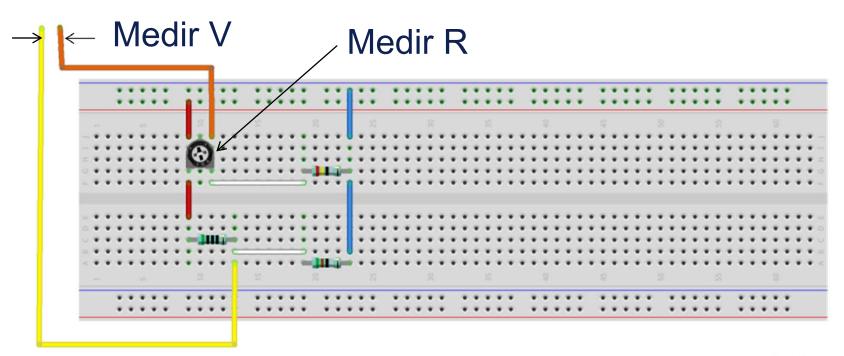
## Medir a resistência de um resistor de 2,4 ohms





$$V_0 = 3 V$$

$$R_1$$
 = 500 Ω  
 $R_2$  = 5,1 Ω  
Trimpot 1kΩ



## Medir a resistência de um resistor de 2,4 ohms



## Façam 20 medidas de Rv!

n	Rv / Ω
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
•••	
20	
Média	
Desvio	

Com o valor de Rv, encontre o valor correto do resistor "2,4 Ohm"



# **Exercício Atividade tratamento de dados**

# Introdução



- Foram feitas duzentas medições de espessura de um bloco utilizando-se um paquímetro;
- Você deve determinar o valor médio e a incerteza associada;
- Fornecemos as duzentas medições digitadas em Excel.

# Introdução



- 1) Vocês devem construir o histograma;
- 2) Vocês devem calcular a média e o desvio-padrão usando o Excel.