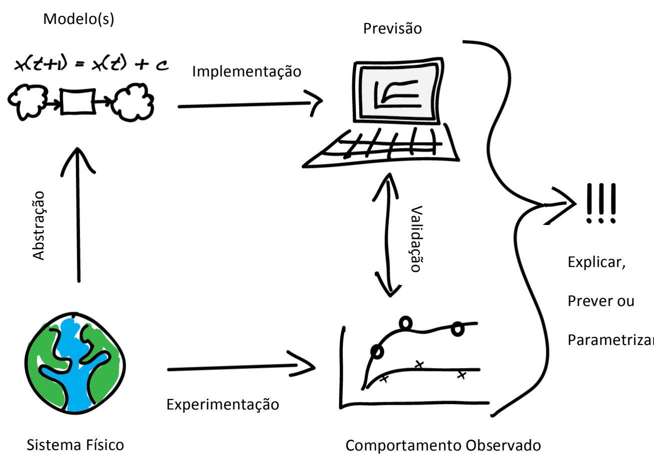
MODELAGEM: ABSTRAÇÃO[1]
ESTOQUES, FLUXOS E EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

INTRODUÇÃO: O QUE FIZEMOS ATÉ AQUI

A atividade que realizamos na primeira aula de Modelagem e Simulação (atividade das caixas) e a leitura que você fez para se preparar para a segunda aula (síndrome do medo de altura felina) tratavam da ideia geral de modelagem. Discutimos os principais elementos e as diferentes etapas do processo de modelagem: abstração, obtenção do modelo, implementação, validação e a ideia de fazer alguma coisa útil com seu modelo. No esquema ao lado, você pode rever como todas estas coisas estão relacionadas.



No caso dos gatos que caíam, nós pudemos comparar o modelo mais simples de todos – o modelo mental implícito – com outros mais formais, que eram, ainda assim, modelos predominantemente qualitativos. Esses modelos permitiram que nós fizéssemos previsões simples, que, muitas vezes, não eram consistentes com o comportamento real observado. Dessa forma, observando as falhas nas previsões dos primeiros modelos, fomos realizando novas iterações, até chegarmos a um modelo capaz de explicar porque o gato do seu vizinho despenca do alto de uma árvore e sai andando como se nada tivesse acontecido.

Já o modelo das caixas era mais quantitativo: nós chegamos a uma representação verdadeiramente matemática do modelo, diferentemente da representação esquemática que fizemos para os gatos. Mesmo assim, nos dois casos, foi necessário passar pelas etapas de abstração, análise e validação. Outra semelhança é que os dois modelos obtidos poderiam ser ainda mais refinados, caso isso fosse importante considerando a finalidade estabelecida para a modelagem em cada caso. Repare que “mais refinado” não significa, necessariamente, “melhor”. Tudo depende do tipo de trabalho que queremos fazer a partir daquela modelagem.

[1] Baseado no texto original “Abstraction, Act 1” de Mark Somerville, Olin College (2014).

A partir das atividades feitas na segunda aula, passamos a trabalhar com modelos de *sistemas dinâmicos*. Trata-se de uma ampla classe de modelos, cuja principal característica é lidar com sistemas que se modificam ao longo do tempo. Por exemplo, um modelo que permita compreender a evolução da população de onças de um parque ao longo do tempo. Na verdade, trabalharemos com modelos de sistemas dinâmicos ao longo de todo o nosso curso.

Nas atividades da aula 2, focamos o processo de *abstração*, que parte de um sistema físico para chegar a um ou mais modelos. Trabalhamos principalmente com sistemas envolvendo populações que se modificam ao longo do tempo. O estudo de sistemas populacionais será o tema da primeira parte de nosso curso, e também o tema do projeto 1. As ideias trabalhadas para as populações, porém, podem ser aplicadas a diversos outros tipos de sistemas.

Durante a aula, foram introduzidas algumas ferramentas úteis para o processo de abstração em sistemas envolvendo dinâmica populacional: os diagramas de estoques e fluxos e as equações a diferenças. Neste texto, vamos revisar e aprofundar as ideias relacionadas à utilização dessas ferramentas.

Exemplo de um sistema físico: onças no Parque do Iguaçu

Como você viu na aula, o sistema físico que vamos estudar é a população de onças no Parque Nacional do Iguaçu. Reproduzimos abaixo o fragmento que descreve esse sistema.

População de onça-pintada caiu 90% no Parque Nacional do Iguaçu

24/06/2013

A região do Parque Nacional do Iguaçu já teve registro de 180 onças-pintadas. Atualmente, porém, a estimativa é de que existam apenas 18 indivíduos vivendo na área e que, em 80 anos, a espécie estará extinta. (...) "Análises genéticas que fizemos em 2010 na população do Alto Paraná indicam que ela está sofrendo e, se não tiver ações eficazes e rápidas, a previsão de extinção é de 80 anos, de acordo com os modelos matemáticos. Há a necessidade do empenho de todos", afirmou Ronaldo Morato, coordenador do Centro Nacional de Pesquisa e Conservação de Mamíferos Carnívoros (Cenap) do Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio). Ainda segundo ele, a revista Science publicou, em 2011, um estudo que mostrou que a perda de um grande predador numa área pode levar ao desaparecimento desse ambiente, o que é muito preocupante.

Fonte: <http://www.sosma.org.br/14891/populacao-de-onca-pintada-caiu-90-no-parque-nacional-do-iguacu/>

A partir do texto, podemos imaginar algumas razões que justifiquem a elaboração de um modelo que seja capaz de prever a evolução da população de onças ao longo do tempo (lembre-se: a modelagem, em engenharia, deve estar sempre atrelada à realização de alguma coisa útil). A mais evidente origina-se, sem dúvida, no alerta feito por Ronaldo Morato sobre o risco de extinção da espécie na região. Dessa forma, um modelo matemático poderia ajudar os biólogos a preverem se uma medida específica de preservação traria algum efeito positivo sobre a população de onças. Em outro contexto, tal modelo poderia prever um aumento excessivo no número de onças, que pusesse em risco os trabalhadores de fazendas da região.

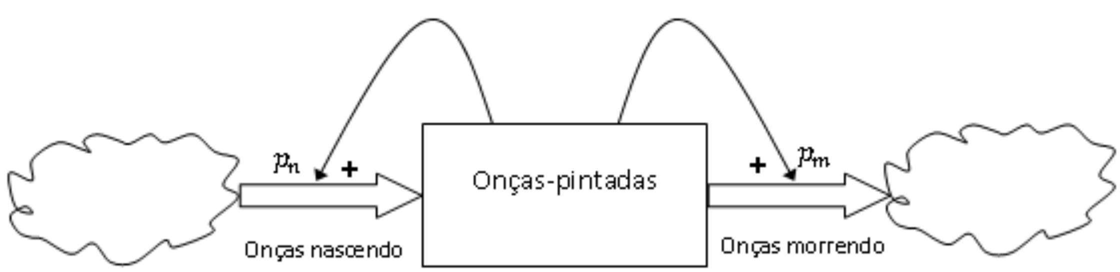
DIAGRAMAS DE ESTOQUES E FLUXOS

Em modelagem, procuramos sempre começar com o modelo mais simples que pudermos imaginar. Então, partindo de um modelo bem simples, mas que faça sentido, vamos pouco a pouco tornando-o mais complexo, até que ele seja capaz de realizar aquilo que propusemos inicialmente. Tenha sempre em mente seu objetivo com aquele modelo: não é uma boa ideia deixá-lo mais sofisticado do que o necessário.

Simplificando ao máximo o nosso sistema, vamos admitir que a população de onças do parque só pode ser alterada de duas maneiras: quando uma onça nasce ou morre. Note que, com esta hipótese, estamos implicitamente definindo qual é o nosso *sistema*, o que é fundamental em modelagem. Trata-se das onças vivas existentes dentro do parque. Assim, não estamos interessados na quantidade de onças que existem fora do parque, pois elas não fazem parte do nosso sistema, nem da quantidade de onças mortas que eventualmente estejam no parque.

Ao definir o sistema, nós desenhamos uma linha pontilhada em torno daquilo que queremos estudar, que divide o universo em duas partes: o sistema e sua vizinhança. Muitas vezes, será necessário assumir hipóteses sobre a vizinhança, para que possamos prever o que acontecerá com o sistema. Por exemplo, assumimos, inicialmente, que nenhuma onça do parque sai de suas fronteiras e que nenhuma onça da vizinhança adentra ao parque.

Vamos representar esta versão simplificada de nosso modelo por meio de um *diagrama de estoques e fluxos*.



Vamos detalhar as informações que podem ser extraídas a partir desse diagrama.

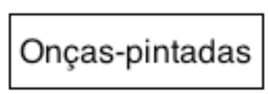
- Existe um certo número de onças-pintadas vivendo no parque.
- Ao longo do tempo, o número de onças pode ser alterado devido a apenas dois processos: nascimento e morte de onças.
- O número de onças que nascem a cada ano é proporcional ao número de onças que já vivem no parque, sendo p_n a constante de proporcionalidade.
- O número de onças que morrem a cada ano é proporcional ao número de onças que já vivem no parque, sendo p_m a constante de proporcionalidade.

Estas informações são trazidas por diferentes elementos do diagrama, cada um representado por um símbolo diferente (retângulos, flechas, nuvens, etc.). Vamos discutir cada um desses elementos a seguir.

ESTOQUES

Um *estoque* representa uma grandeza física cuja quantidade estamos interessados em acompanhar ao longo do tempo. Em alguns casos, essa quantidade é obtida por contagem (por exemplo, a população de pessoas em um país); em outros, por meio de uma medida (por exemplo, volume de água em um tanque). De forma geral, os estoques tendem a ser substantivos: “onças” (quantas onças existem em um determinado parque), “gelo” (quanto gelo existe em um congelador), “energia” (quanta energia está armazenada em uma mola comprimida).

Nos diagramas de estoques e fluxos, um estoque é representado dentro de um retângulo, como na figura abaixo.



Em Física, grandezas extensivas e conservativas[2] tendem a ser estoques, como por exemplo energia, quantidade de movimento e carga. Dessa forma, os estoques costumam ter unidades de massa (gramas, toneladas, etc.), volume (metros cúbicos, litros, etc.), número (número de indivíduos, número de abacaxis, etc.), energia (joules, calorias, etc.), e assim por diante.

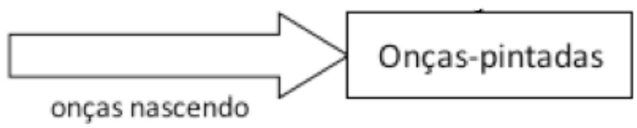
Um erro comum consiste em considerar grandezas intensivas como estoques. Uma grandeza intensiva depende da substância presente no sistema, mas não da quantidade de partículas dessa substância. Temperatura e densidade são dois exemplos de grandezas intensivas: dois litros de oxigênio nas CNTP (condições normais de temperatura e pressão) têm a mesma temperatura e a mesma densidade que um litro de oxigênio nas CNTP. Assim, temperatura e densidade não podem ser consideradas estoques.

[2] Grandezas extensivas são aquelas que dependem do número de partículas existentes no sistema (por exemplo, a massa de uma amostra colocada em um recipiente depende do número de moléculas da substância existentes na amostra). Já grandezas conservativas são aquelas que só se alteram quando há alguma troca com a vizinhança (por exemplo, a quantidade total de energia em um sistema só pode mudar se houver ganho ou perda de energia para a sua vizinhança).

FLUXOS

Um *fluxo* é um número que representa o processo pelo qual um estoque muda. Uma vez que representam processos, os fluxos geralmente incluem um verbo (onças *nascendo*, gelo *derretendo*, etc.). A unidade de um fluxo costuma ser a unidade de medida do estoque por unidade de tempo (número de onças por ano, calorias por segundo, litros por minuto, etc.).

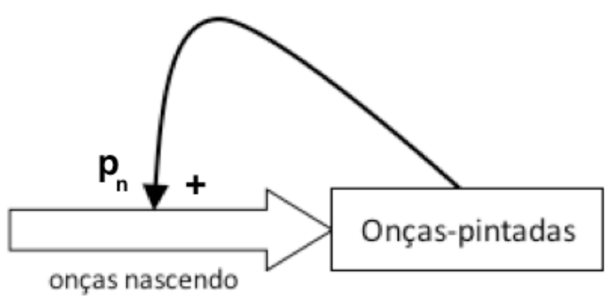
Nos diagramas de estoques e fluxos, um fluxo é representado por uma flecha dupla, chegando ou saindo do estoque modificado por ele. Na figura abaixo, a flecha que representa o fluxo de onças nascendo chega ao estoque de onças, indicando que se trata de um fluxo que aumenta a quantidade de onças no sistema.



INFORMAÇÕES SOBRE OS FLUXOS

Os fluxos geralmente dependem de outras informações do sistema. Estas informações podem ser o nível de um estoque ou o valor de uma variável externa ao sistema. Por exemplo, o número de onças que nascem por ano depende de quantas onças existem no parque (o fluxo de onças nascendo depende do nível do estoque de onças no parque). Outro exemplo: em um tanque que recebe água de uma torneira externa, o fluxo de água entrando no tanque depende da vazão dessa torneira, que é uma variável externa.

Nos diagramas de estoques e fluxos, costumamos explicitar esta dependência usando uma seta em linha contínua, como a da figura abaixo.



A seta sai do estoque de onças e chega ao fluxo de onças nascendo. Isso indica que o fluxo é controlado pelo estoque de onças. Além disso, o sinal **+** desenhado na extremidade da seta informa que, quanto mais onças houver no parque, maior será a quantidade de onças nascendo por ano. Um sinal de – indicaria que, quanto maior fosse o estoque, menor seria o fluxo.

Finalmente, o parâmetro $\boldsymbol{p_n}$ indica que o número de onças que nascem a cada ano é proporcional à população de onças existente no parque naquele ano, sendo p_n a constante de proporcionalidade. Em outras palavras, sendo $O(t)$ a população de onças no ano t e $O_N(t)$ a quantidade de onças que nascem no mesmo ano, vale a seguinte igualdade:

$$O_N(t) = p_n \cdot O(t)$$

A relação de dependência entre um fluxo e um estoque (ou uma variável externa) pode ser bem mais complexa, sendo descrita por uma função matemática. Mais à frente, vamos mostrar como indicar essa função em um diagrama de estoques e fluxos.

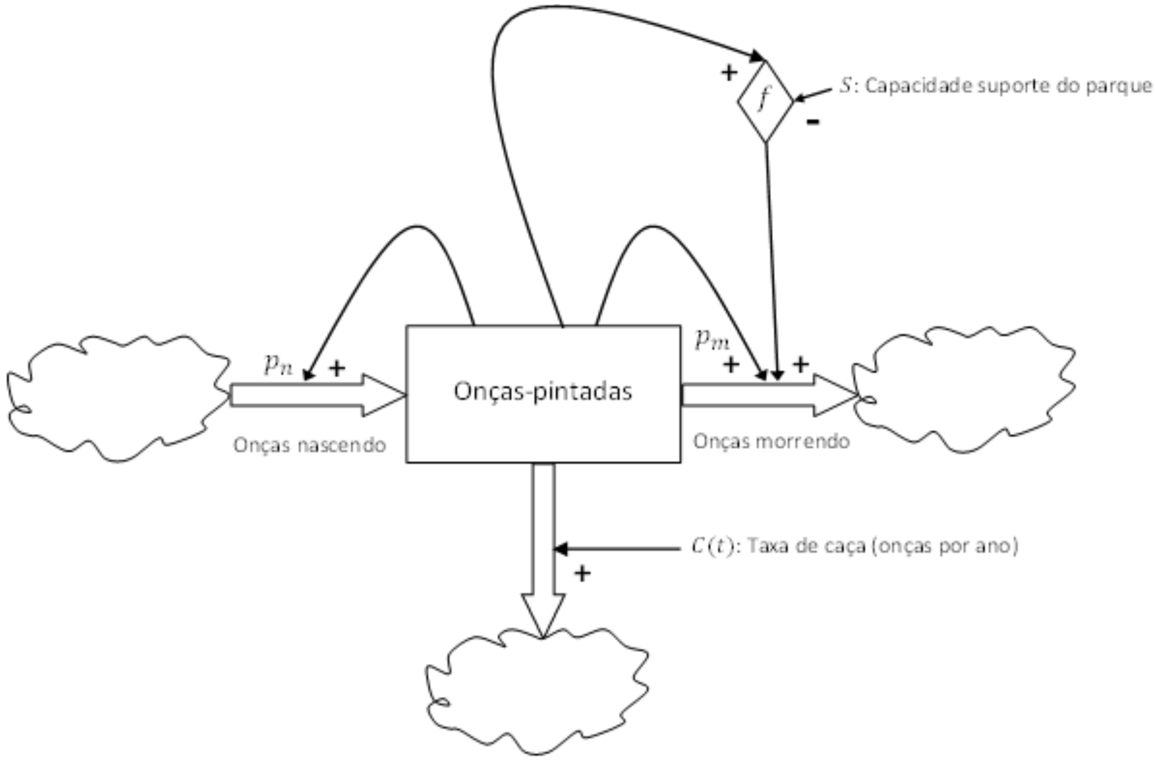
FONTES E SORVEDOUROS

Uma vez definida a fronteira do sistema que estamos modelando, é preciso considerar as trocas entre o sistema e sua vizinhança. Para isso, usamos *fontes* e *sorvedouros*, que são representados por uma nuvem.

Assim, um estoque pode aumentar a partir de uma fonte de fora do sistema, bem como diminuir ao transferir-se para um sorvedouro também externo. Admitimos que fontes e sorvedouros têm uma capacidade ilimitada de fornecer ou absorver material do sistema. Por exemplo, consideramos que existe uma fonte inesgotável de potenciais onças bebês, prontas para nascerem, em algum lugar no céu das onças. Essa característica ilimitada das fontes e sorvedouros decorre do fato de que, ao definir a fronteira do sistema, decidimos não os incluir em nosso modelo.

FUNÇÕES DE DEPENDÊNCIA, PARÂMETROS E VARIÁVEIS EXÓGENAS

Para introduzir mais alguns elementos importantes de um diagrama de estoques e fluxos, vamos aumentar um pouco a complexidade de nosso modelo. Inicialmente, vamos considerar que exista uma quantidade limitada de alimento no parque. Assim, à medida que a população cresce, aumenta também a taxa de mortalidade devido à desnutrição. Vamos considerar ainda um mecanismo adicional de morte das onças: a caça ilegal. O diagrama a seguir representa a nova situação.



A primeira novidade desse diagrama é o losango, que indica a existência de uma *função* de dependência adicional. Essa função matemática, que pode ser interpretada como a quantidade de alimento disponível por onça, interfere na taxa de mortalidade. Ela depende do *parâmetro* S, chamado de capacidade suporte do parque, e também da população de onças. Analisando os sinais das setas que chegam ao losango, observamos que:

(1) um aumento da capacidade suporte do parque leva a uma diminuição no valor da função, ou seja, menos mortes por subnutrição (sinal negativo). Note que capacidade suporte reflete a quantidade de alimento disponível no parque.

(2) um aumento no número de onças leva a um aumento no valor da função, ou seja, mais mortes por subnutrição (sinal positivo). Note que, quanto maior o número de onças, menor será a quantidade de alimento disponível por onça.

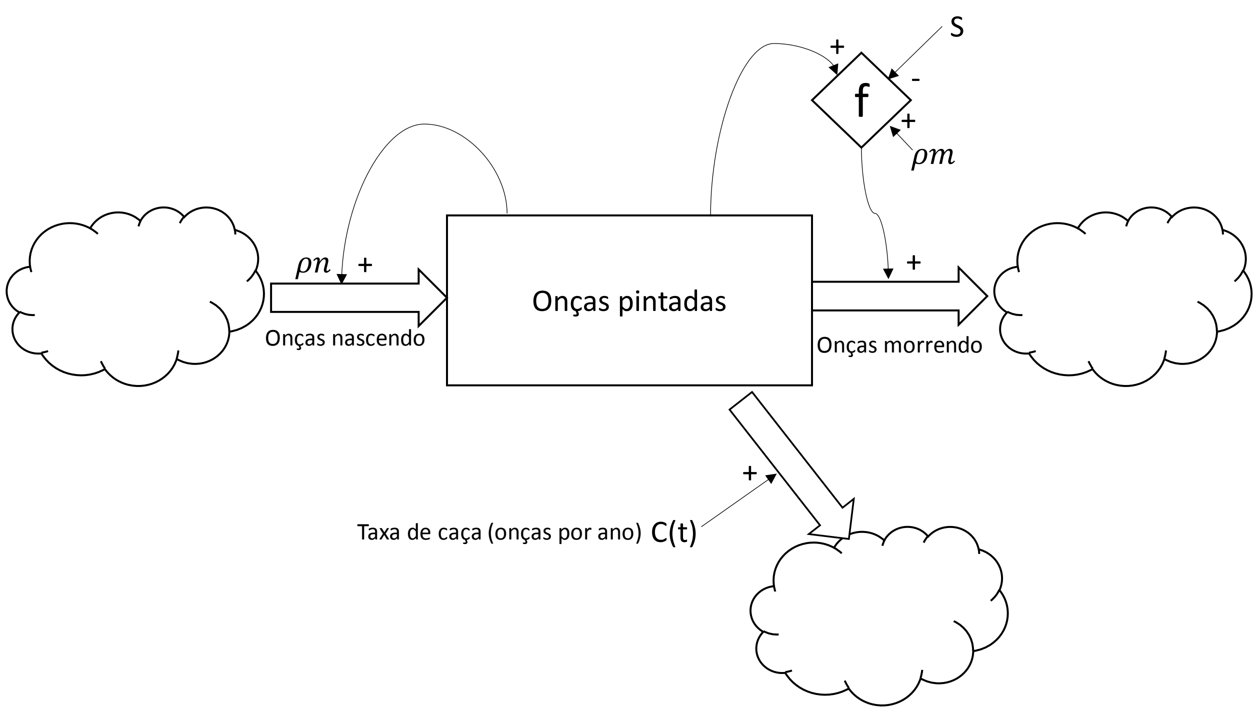
As variáveis escritas por extenso são *parâmetros* ou *variáveis exógenas*. Nos dois casos, trata-se de uma variável externa. Assim, seu valor deve ser fornecido, não sendo previsto pelo modelo. Por exemplo, o número de onças mortas por ano em decorrência da caça ilegal não é previsto por nosso modelo. Por isso, é um parâmetro, que deve ser fornecido ou estimado usando dados disponíveis.

Existe uma pequena diferença entre parâmetro e variável exógena. Em geral, o parâmetro é um número que não muda ao longo do tempo, enquanto a variável exógena pode ser uma função do tempo. Mas não se preocupe muito com essa distinção: é um detalhe que não vamos dar muita atenção.

E como nós juntamos as informações das duas setas que chegam ao fluxo das onças morrendo? O número de onças que morrem de causas naturais a cada ano é obtido multiplicando o total de onças do parque pela taxa de mortalidade p_m e pelo valor da função f, que depende do número total de onças e da capacidade de suporte do parque S. Em símbolos matemáticos, temos:

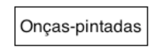
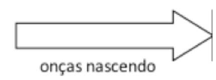
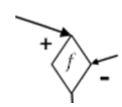
$$O_M(t) = f(S, O) \cdot p_m \cdot O(t)$$

Outra possibilidade seria considerar a função f dependente de ρm também, ou seja, $f(O, S, \rho m)$, conforme ilustrado no diagrama a seguir. Como neste caso só há uma seta controlando o fluxo de onças morrendo, a função pode ser definida de tal modo que quando o estoque de onças está aquém da capacidade S, a taxa de mortalidade de onças seja próxima à natural, ρm. Definir a forma matemática da função f é uma das habilidades mais difíceis da modelagem. Trabalharemos como encontrar a função f nas próximas aulas. Por agora, vamos admitir que a função $\rho m + k^{(O-S)}$ representa a influência da taxa de mortalidade e suporte limitado no fluxo de onças morrendo. Assim, quando o número de onças é menor ou igual à capacidade do parque, a função tenderá a ρm, ao passo que quando o número de onças exceder a capacidade S, a função resultará em uma taxa de mortalidade bem superior a ρm.



No Exercício 1, a ser entregue no próximo encontro, sugere-se que você implemente a função f conforme diagrama acima. Considere que o fluxo de onças morrendo, neste caso, será o produto da função f pelo estoque de onças no instante t, ou seja, $O_M(t) = f(O, S, \rho m) \cdot O(t)$.

RESUMO DOS ELEMENTOS DE UM DIAGRAMA DE ESTOQUES E FLUXOS

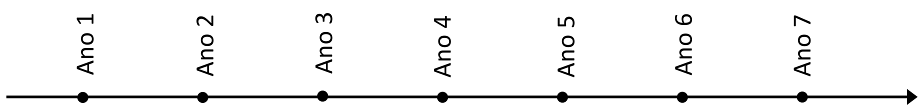
Nome	Descrição	Exemplos	Unidades típicas	Símbolo
Estoque	Grandeza cuja quantidade queremos acompanhar ao longo do tempo	Onças, massa, energia	Número de indivíduos, unidades de massa ou volume	
Fluxo	Número representativo do processo pelo qual um estoque se altera	Onças nascendo por ano, água evaporando de um tanque	Unidades por ano, gramas por segundo, calorias por hora	
Informação sobre fluxos	Dados que interferem em um fluxo	Taxa de natalidade, temperatura exterior	Variadas	
Fontes e sorvedouros	Estoques ilimitados localizados fora dos limites do sistema	Mesmos dos estoques	Mesmos dos estoques	
Funções de dependência	Funções que descrevem a relação de dependência entre um fluxo e outras variáveis	Uma taxa de natalidade que depende da população total e da capacidade suporte	Variadas	
Parâmetros e variáveis exógenas	Informações de fora do sistema	Número de onças mortas pela caça ilegal, vazão de uma torneira que abastece um tanque	Variadas	Texto por extenso

EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

MODELOS DISCRETOS VERSUS MODELOS CONTÍNUOS

Na seção anterior, nós construímos diferentes versões do diagrama de estoques e fluxos para a população de onças do parque. Porém, ainda não decidimos se pretendemos acompanhar essa população a partir de um modelo *discreto* ou *contínuo* de tempo.

Se escolhermos um modelo discreto, então trabalharemos com o número de onças existentes no parque apenas em um conjunto discreto de instantes de tempo (a população em cada ano, por exemplo). Nesse caso, os fluxos descreverão as mudanças no estoque de onças por ano (por exemplo, o número de onças nascidas a cada ano).



Exemplo de um conjunto discreto de instantes de tempo

Em um modelo contínuo, por outro lado, trabalhamos com o número de onças do parque em um instante qualquer. Nessa situação, os fluxos são dados como taxas de variação[3], que podem variar ao longo de um ano.

Ao modelar um sistema físico, cabe a nós decidir entre um modelo discreto e um contínuo. Essa escolha depende do sistema que estamos modelando e do trabalho que pretendemos fazer com aquele modelo. Alguns estoques, como energia, costumam mudar continuamente ao longo do tempo, não sendo muito adequados para uma modelagem discreta. Já em outros sistemas, como os populacionais, os estoques mudam bem mais lentamente, mostrando-se propícios para um modelo discreto.

Até o final do primeiro projeto, vamos utilizar modelos de tempo discretos. Para isso, introduziremos uma ferramenta matemática bastante apropriada para esse tipo de modelo: as equações a diferenças.

EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

Equações a diferenças são relações de recorrência que definem uma sequência. Isto quer dizer que o valor de cada elemento da sequência é definido em função de elementos que o precedem. Por exemplo, uma equação a diferenças muito simples é:

$$x(t+1) = x(t) + 2$$

Se assumirmos, por exemplo, $x(0) = 1$, então teremos $x(1) = 3$, $x(2) = 5$, e assim por diante. Obteremos, assim, a sequência $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$.

Observações:

- Ao representar um termo de uma sequência, podemos indicar o índice entre parênteses ou subscrito, ou seja, $x(0)$ ou x_0.

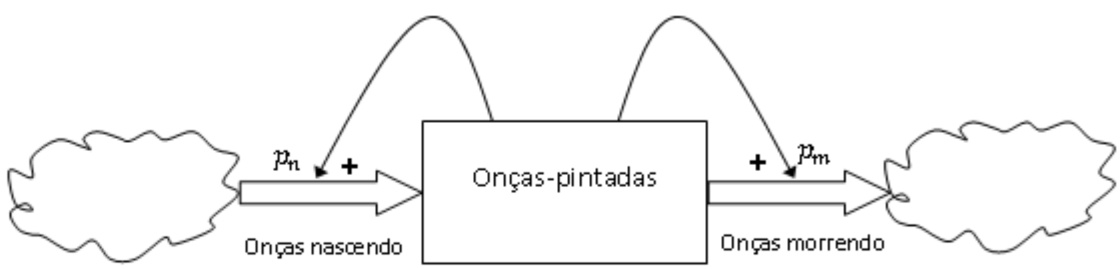
[3] Ao longo do curso, trabalharemos mais detalhadamente a ideia de taxa de variação.

- Para que a sequência seja definida, é preciso estabelecer, além da relação de recorrência, a condição inicial $x(0)$ (primeiro elemento da sequência).
- No nosso exemplo, o primeiro elemento da sequência foi indicado pelo índice 0 (ou seja, a sequência começa com o elemento $x(0)$). Porém, também é comum iniciar a contagem dos índices em 1. Por exemplo, na maioria dos livros de Ensino Médio, o primeiro termo de uma progressão aritmética é indicado por a_1. Ao criar suas equações a diferenças e, principalmente, ao implementá-las em um programa de computador, fique atento a isso, para que sua relação de recorrência esteja compatível com a escolha do primeiro índice.

USO DE EQUAÇÕES A DIFERENÇAS EM MODELOS

As equações a diferenças são muito apropriadas quando queremos construir um modelo discreto para nosso sistema. Só para relembrar: em um modelo discreto, estamos descrevendo o sistema apenas em alguns instantes de tempo. Por exemplo, se estivéssemos modelando a população de uma espécie de ave, seria bastante razoável fazer o levantamento dessa população uma vez por ano e construir um modelo que só previsse a quantidade de pássaros no momento da amostragem. Isto é justificável porque muitas espécies se reproduzem em uma época específica de cada ano, fazendo sentido falar dos animais nascidos em uma determinada temporada de reprodução. Da mesma forma, se quisermos modelar a população de crianças em idade escolar de uma cidade, é natural pensar em descrever quantos estão no primeiro ano, no segundo, e assim por diante. Por isso, faria todo sentido acompanhar os diferentes grupos de alunos uma vez por ano.

Voltando às nossas queridas onças, vamos recordar o nosso modelo mais simples.



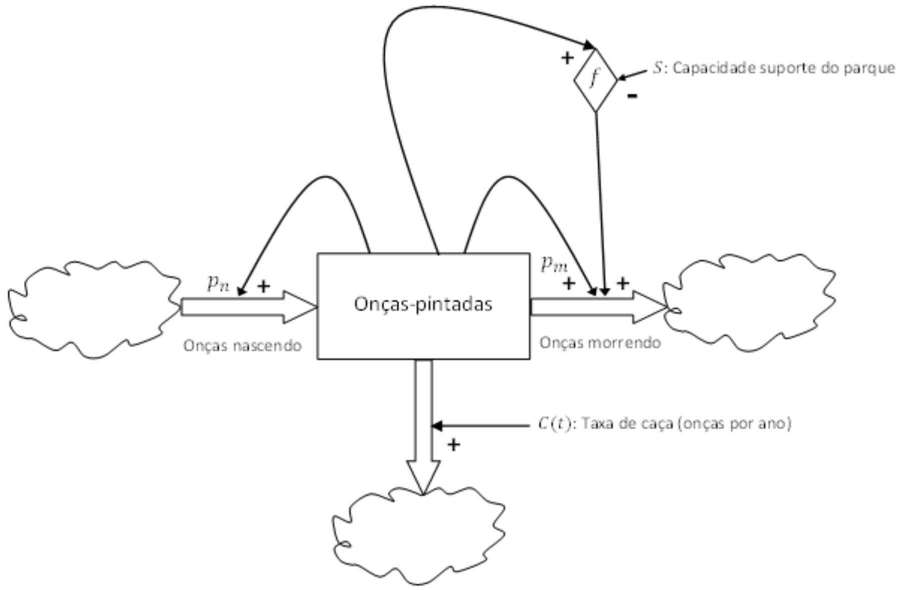
Transcrevendo esse modelo para uma equação a diferenças, teríamos

$$O(t+1) = O(t) + p_n \cdot O(t) - p_m \cdot O(t),$$

o que quer dizer: o número de onças existentes no parque no instante $t+1$ é dado pelo número de onças que havia no parque no instante t mais a quantidade de onças que nasceram ao longo do ano t, menos a quantidade de onças que morreram ao longo do mesmo ano. Os números de onças que nasceram e morreram no ano t são ambos proporcionais ao número de onças que viviam no parque no ano t.

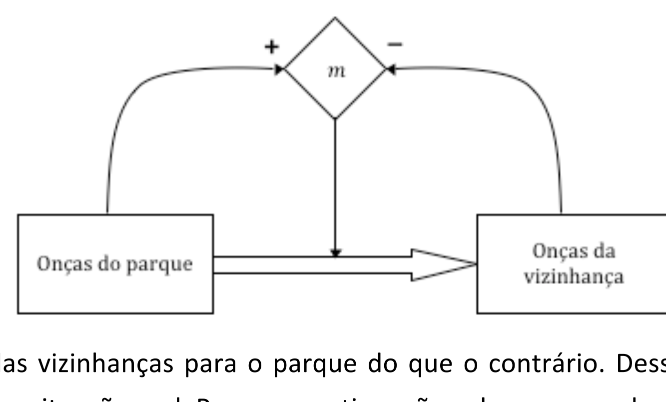
Exercício

Transcreva o diagrama de estoques e fluxos dado a seguir em uma equação a diferenças. Utilize uma função genérica $f(S, O)$ para modelar a morte de onças por desnutrição. Faça uma legenda identificando todos os termos de sua equação a diferenças.



MODELOS COM VÁRIOS ESTOQUES

A maioria dos modelos envolve mais de um estoque. Por exemplo, voltando ao nosso velho exemplo das onças, você pode querer modelar o comportamento tanto da população de onças do parque quanto das onças que eventualmente possam viver nas suas redondezas. Nesse caso, assumindo que as cercas que delimitam o parque sejam suficientemente baixas para que as onças possam saltá-las, você terá de considerar possíveis fluxos migratórios de onças entre as duas áreas. Ao mesmo tempo, o suprimento de alimento e as políticas de regulamentação de caça podem ser diferentes dentro e fora do parque, reforçando a necessidade de acompanhar os dois estoques separadamente.



Em uma primeira versão de um modelo como esse, você poderia simplesmente criar dois estoques: um para as onças do parque e outro para as onças das vizinhanças. Observe que, neste diagrama, o fluxo foi considerado como uma migração do parque para as suas vizinhanças. Nada impede, porém, que esse fluxo seja um número negativo, o que indicaria que mais onças estariam migrando das vizinhanças para o parque do que o contrário. Dessa forma, o diagrama continuaria consistente com a situação real. Por esse motivo, não colocamos nenhum sinal ao lado da seta que sai do losango e chega à flecha do fluxo migratório: o valor da função m pode ser tanto positivo quanto negativo.

Como estamos trabalhando com dois estoques, teremos de escrever duas equações a diferenças (uma para cada estoque). Cada estoque está associado a apenas um fluxo (o fluxo migratório); assim, as equações a diferenças terão um único termo representando as mudanças nas populações. As duas equações são dadas a seguir.

$$O(t+1) = O(t) - m(O(t), V(t))$$

$$V(t+1) = V(t) + m(O(t), V(t))$$

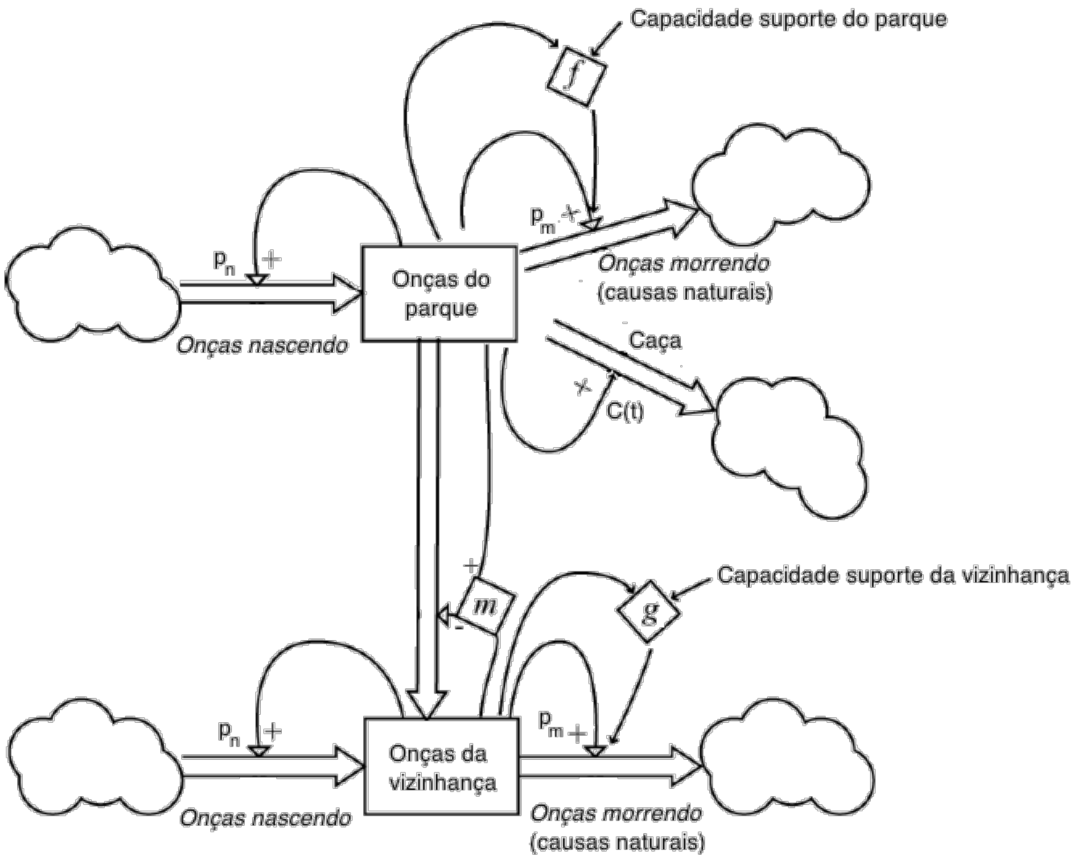
Nessas equações, m é uma função que fornece o número de onças que migram do parque para as vizinhanças a cada ano, $O(t)$ é o número de onças no parque no ano t e $V(t)$ é o número de onças nas vizinhanças do parque no ano t. Observe que o fluxo de onças que saem do parque é igual ao fluxo de onças que chegam às vizinhanças.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta leitura, introduzimos duas ferramentas importantes para o processo de abstração (construção do modelo a partir do sistema físico): os diagramas de estoques e fluxos e as equações a diferenças.

Em modelagem, os diagramas de estoques e fluxos são muito úteis para organizar o raciocínio e também para comunicar aos outros as principais características dos modelos. Eles permitem expressar ideias relativamente complexas sem muita sobrecarga de informação, apresentando os principais aspectos do modelo de modo visual.

Por exemplo, se considerarmos que é importante levar em conta a capacidade suporte e a ação de caçadores dentro do parque, além da migração entre o parque e as vizinhanças (e vice-versa), poderíamos desenhar um diagrama como o da página a seguir.



Este diagrama expressa resumidamente, de uma forma gráfica, um grande número de interações. Você pode identificar rapidamente as principais ideias do modelo e as relações mais importantes.

Por outro lado, os diagramas de estoques e fluxos não ajudam muito em uma análise quantitativa. Para isso, temos as equações a diferenças, que nos permitem traduzir esses diagramas em um modelo matemático mais formal, que pode ser analisado e simulado, como discutiremos nas próximas aulas.