Zusammenfassung Stochastik

Motivationsspruch: Vertrau auf die Wahrscheinlichkeit: Auch kleine Chancen können große Erfolge bringen :=D

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung Stochastik 1
Wichtige Begriffe 2
1. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung 2
  1.1. Laplace-Experiment 2
  1.2. Kombinatorik 2
2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten 2
  2.1. Satz von Bayes 3
3. Beschreibende Statistik 3
  3.1. Arithmetisches Mittel 3
  3.2. Median 3
  3.3. Geometrisches Mittel 3
  3.4. Harmonisches Mittel 3
  3.5. Absolute Mittlere Abweichung 3
  3.6. Varianz (empirische Varianz) & Standardabweichung 4
4. Zufallsvariable 4
  4.1. Wahrscheinlichkeitsverteilung 4

Wichtige Begriffe

Binominalkoeffizient

$$n \text{ über } k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Potenzmenge

Sei $M = \{1, 2\}$

Dann ist:

$$P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Mächtigkeit einer Potenzmenge:

$|M| = n \Rightarrow |P(M)| = 2^n$

Falls M leer ist dann:

$$|\emptyset| = 0 \text{ und } |P(M)| = |\emptyset| = 1 = 2^0$$

1. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1. Laplace-Experiment

Ausgangsmenge Ω ist unendlich & jedes Ergebnis ist gleich Wahrscheinlich. Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis $\frac{1}{n}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

1.2. Kombinatorik

Dies ergibt vier verschiedene Fälle:

- Mit Zurücklegen, unter Berücksichtigung der Reihenfolge

Sei $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$ So ist der Grundraum $\Omega = M^k$

$|\Omega| = |M^k| = n^k$

- Ohne Zurücklegen, unter Berücksichtigung der Reihenfolge

$$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\binom{n+k-1}{k}$$

- Ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

$$|\Omega| = \binom{n}{k}$$

2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$$

Seien A und B Ergebnisse, dann ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A gegeben B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2.1. Satz von Bayes

Für zwei Ergebnisse A und B

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

3. Beschreibende Statistik

3.1. Arithmetisches Mittel

$$\overline{x} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Verwendung:

- Durchschnittsnoten oder Durchschnittstemperaturen.
- Situationen, in denen Ausreißer nicht übermäßig stark das Ergebnis verzerren sollen.

3.2. Median

$$\overline{x} = \begin{cases} x_{m+1} \Rightarrow \text{falls } n = 2m+1 \\ \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}) \Rightarrow \text{falls } n = 2m \end{cases}$$

Verwendung

- unempfindlicher gegenüber Ausreißern (nach oben und unten)

3.3. Geometrisches Mittel

$$\overline{x_{\text{geom}}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Verwendung:

- Berechnung des durchschnittlichen Wachstumsfaktors über mehrere Zeiträume (z. B. bei Zinseszinsen oder jährlichen Wachstumsraten).
- Situationen, in denen alle Werte positiv sind und die Verhältnisse zueinander wichtig sind.

3.4. Harmonisches Mittel

$$\overline{x_{\text{harm}}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

- Durchschnittliche Geschwindigkeiten, wenn Streckenabschnitte mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten zurückgelegt werden.
- Situationen, in denen beispielsweise bei Preisen pro Mengeneinheit die kleineren Preise den Durchschnitt dominieren.

3.5. Absolute Mittlere Abweichung

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|$$

3.6. Varianz (empirische Varianz) & Standardabweichung

Varianz:

$$s^2 = \frac{1}{n} - 1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

bzw Standardabweichung wenn

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} - 1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

4. Zufallsvariable

Eine *Zufallsvarialbe* oder *Zufallsgröße* heißt => $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Grundraum = Ω (Notation: IMmer Großbuchstaben)

Würfel wird zweimal geworfen = $\Omega = \{1, 2..., 6\}^2$

$X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ => X ist *Zufallsvariable* die die Summe der Augenzahlen ausgibt

4.1. Wahrscheinlichkeitsverteilung

Diskrete Wahrscheinlichkeit einer Variable

$p_i = P(X = x_i)$