Analyse III

September 28, 2015

Contents

1 Chapitre 2

Intégrales curvilignes

- Def Courbes

$\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ est une courbe simple si $\exists I \subset \mathbb{R}$ (interval) $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$: continu. tel que

1. $\gamma(I) = \tau$ (courbe)
2. $γ * Chapitre 2

Intégrales curvilignes

- Def Courbes

$\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ est une courbe simple si $\exists I \subset \mathbb{R}$ (interval) $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$: continu. tel que

1. $\gamma(I) = \tau$ (courbe)
2. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ $\forall t_1, t_2 \in I$ (simple)

γ : une paramétrisation.

- Ex. 1 :

$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ dessin cercle $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$

- Ex. 2 : (helix)

dessin helix $\gamma \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

- Ex. 3 :

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ dessin

- Ex. 4:

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (t, |t|)$ dessing

- Ex. 5 :

$\mathbb{R}^2$ dessin courbe pas simple

- Def 2 : τ : courbe simple est dite fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$ $(I = [a, b])$
  - Ex. 1 : fermé $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$ image patate.
  - Ex. 2,3,4 : non fermé.
- Def 3: Γ : courbe est régulière si $\exists\,[a, b]\,, \gamma : \gamma \cdot [a, b] \to \mathbb{R}^d$ tel que
  - $\gamma \in C^1\left([a, b] : \mathbb{R}^2\right)$
  - $\gamma'(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ $((\gamma_1'(t), ..., \gamma_d'(t)) \neq (0, ..., 0))$
- Ex.1 : régulière $\gamma'(t) = (-\sin t, cost) \neq (0, 0)$
- Ex.2 : régulière $\gamma'(y) = (-\sin t, cost, 1) \neq (0, 0, 0)$
- Ex.3 : $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ et $\gamma'(0) = (0, 0)$: Γ : n'est pas régulière.
- Ex.4 : γ n'est pas diff. en $t = 0$. Donc Γ n'est pas régulière.

Remarque :

- Γ : régulière. La ligne tangente en $\gamma(t_0)$.

(L) : $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$

- Γ : courbe $\subset \mathbb{R}^d$

$f : \Gamma \to \mathbb{R}$: continue.

<u>Def :</u> $\int\limits_T f := \int\limits_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$: une paramétrisation de Γ.

La longueur de Γ : $\int\limits_\Gamma 1 = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$

- Ex.1 : $\int\limits_\Gamma f$ avec $f = 1$

$= \int\limits_0^{2\pi} ||\gamma'(t)||dt = \int\limits_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$

- Ex. :

$\int_\Gamma$:
f(x,y) = $\sqrt{x^2 + 4y^2}$
Γ = $\{(x, y) \in$ R^2; 2y = x^2; x $\in [0, 1]$
γ : $[0, 1] \to$ R^2
t $\to$ (t,t$^2 \frac{}{2 \int}$$_\Gamma$ f &= $\int_0^1$ f(γ(t)) || γ'(t)|| dt
&= $\int_0^1$ $\sqrt{\{}t^2$ + 4 t$^4 \frac{}{4\}\sqrt{1+t^2}dt\&=\int}{}_0^1$ $\sqrt{t^2 + t^4}\sqrt{1 + t^2}dt$
& = $\int_0^1$ t (1+t^2) dt = t$^2 \frac{}{2+\frac{t^4}{4}\Big|_0^1}$= 3$\frac{}{4}$

image courbe

$$\int\limits_\Gamma \simeq \sum_i |\Gamma_i| f(\gamma(t_i))$$

$$\gamma(t_i) \in \Gamma_i$$

$$\simeq \sum_i |\Gamma_i| f(\gamma(t_i))$$

$\Gamma_i = \gamma\left([t_i, t_{i+1}]\right)$: γ une paramétrisation $[a, b] \to \mathbb{R}^d$

Donc $\int\limits_\Gamma \simeq \sum ||\gamma(t_i)'||(t_{i+1} - t_i) f(\gamma(t_i)) \simeq \int\limits_a^b ||\gamma'(t)|| f(\gamma(t))dt$(t$_1$) $\neq \gamma$(t$_2$)\$
$\forall t_1, t_2 \in I$ (simple) γ : une paramétrisation.

- Ex. 1 :

$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ dessin cercle $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$

- Ex. 2 : (helix)

dessin helix $\gamma \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

- Ex. 3 :

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ dessin

- Ex. 4:

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (t, |t|)$ dessing

- Ex. 5 :

$\mathbb{R}^2$ dessin courbe pas simple

- Def 2 : τ : courbe simple est dite fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$ $(I = [a, b])$
  - Ex. 1 : fermé $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$ image patate.
  - Ex. 2,3,4 : non fermé.
- Def 3 : Γ : courbe est régulière si $\exists \, [a, b], \gamma : \gamma \cdot [a, b] \to \mathbb{R}^d$ tel que
  - $\gamma \in C^1\left([a, b] : \mathbb{R}^2\right)$
  - $\gamma'(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ $((\gamma_1'(t), ..., \gamma_d'(t)) \neq (0, ..., 0))$
- Ex.1 : régulière $\gamma'(t) = (-\sin t, cost) \neq (0, 0)$
- Ex.2 : régulière $\gamma'(y) = (-\sin t, cost, 1) \neq (0, 0, 0)$
- Ex.3 : $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ et $\gamma'(0) = (0, 0)$: Γ : n'est pas régulière.
- Ex.4 : γ n'est pas diff. en $t = 0$. Donc Γ n'est pas régulière.

Remarque :

- Γ : régulière. La ligne tangente en $\gamma(t_0)$.

  (L) : $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$

- Γ : courbe $\subset \mathbb{R}^d$

  $f : \Gamma \to \mathbb{R}$: continue.

  Def : $\int\limits_T f := \int\limits_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$

  $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$: une paramétrisation de Γ.

  La longueur de Γ : $\int\limits_\Gamma 1 = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$

- Ex.1 : $\int\limits_\Gamma f$ avec $f = 1$

$= \int\limits_0^{2\pi} ||\gamma'(t)||dt = \int\limits_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$

- Ex. :

$\int_\Gamma$:
f(x,y) = $\sqrt{x^2 + 4y^2}$
Γ = $\{(x, y) \in$ R^2; 2y = x^2; x $\in [0, 1]$
γ : $[0, 1] \to$ R^2
t $\to$ (t,t$^2\frac{}{2\int}\Gamma$ f &= $\int_0^1$ f(γ(t)) || γ'(t)|| dt
&= $\int_0^1$ $\sqrt{\{}t^2$ + 4 t$^4\frac{}{4\}\sqrt{1+t^2}dt\&=\int}{}_0^1$ $\sqrt{t^2 + t^4}\sqrt{1 + t^2}dt$
& = $\int_0^1$ t (1+t^2) dt = t$^2\frac{}{2+\frac{t^4}{4}\Big|_0^1}$= 3$\frac{}{4}$

image courbe

$$\int\limits_\Gamma \simeq \sum_i |\Gamma_i| f(\gamma(t_i))$$

$$\gamma(t_i) \in \Gamma_i$$

$$\simeq \sum_i |\Gamma_i| f(\gamma(t_i))$$

$\Gamma_i = \gamma\left([t_i, t_{i+1}]\right)$: γ une paramétrisation $[a, b] \to \mathbb{R}^d$

Donc $\int\limits_\Gamma \simeq \sum ||\gamma(t_i)'||(t_{i+1} - t_i) f(\gamma(t_i)) \simeq \int\limits_a^b ||\gamma'(t)|| f(\gamma(t))dt$