Analyse III

October 5, 2015

Contents

1 Chapitre 1 **2**
1.1 Def: Gradient (∇) 2
1.2 Def: Laplacien (Δ) 2
1.3 Def: Champ vectoriel (F) 2
1.4 Def: Divergence (div ou $\nabla.$) 3
1.5 Def: Rotationnel (rot ou $\Delta\times$) 3
1.5.1 Pour n=2 3
1.5.2 Pour n=3 3
1.6 Propriétés 3

2 Chapitre 2 **3**
2.1 Def: Courbe simple 4
2.1.1 Ex. 1 : Cercle 4
2.1.2 Ex. 2 : Helix 5
2.1.3 Ex. 3 : Puissances 6
2.1.4 Ex. 4: Valeur absolue 6
2.1.5 Ex. 5 : Courbe "complexe" 7
2.2 Def 2 : Courbe simple fermée 7
2.3 Def 3: Courbe régulière 7
2.3.1 Remarque : 8
2.4 Def : $\int\limits_\Gamma f$ 8
2.4.1 Retour à ex. 1. : 8
2.4.2 Ex. : 8
2.4.3 Somme intégrale 9
2.5 Def : L'intégrale curviligne pour un champ vectoriel. 9
2.6 Def : courbe régulière par morceau. 10
2.7 Def : Γ régulière par morceau: 10

2.7.1 Ex. : Périmètre d'un carré 11

3 Chapitre 3 **12**
3.1 Def: 12
3.1.1 Exemple 12
3.2 Théorème 13
3.2.1 Preuve 13
3.3 Question: 13
3.3.1 Réponse 13
3.4 Théorème 13
3.4.1 Preuve 14
3.5 Def: Convexe 16
3.6 Def: Connexe 16
3.7 Exemple 16
3.8 Exemple 17
3.9 Exemple 17

1 Chapitre 1

Opérateurs différentiels de la physique

1.1 Def: Gradient (∇)

Gradient : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\text{grad} f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(x), ..., \frac{\delta f}{\delta x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^{\ltimes}$

1.2 Def: Laplacien (Δ)

Laplacien : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Delta f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2}(x) \in \mathbb{R}^2$

1.3 Def: Champ vectoriel (F)

Champ vectoriel : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$

$F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1.4 Def: Divergence (div ou $\nabla.$)

Divergence : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\text{div}F = \nabla.F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta F_i}{\delta x_i}$$

1.5 Def: Rotationnel (rot ou $\Delta\times$)

Rotationnel : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$

1.5.1 Pour n=2

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$

$$\text{rot}F = \Delta \times F = \frac{\delta F_2}{\delta x_1} - \frac{\delta F_1}{\delta x_2} \in \mathbb{R}$$

$$\left(= \begin{vmatrix} \frac{\delta}{\delta x_1} & \frac{\delta}{\delta x_2} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} \right)$$

1.5.2 Pour n=3

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$

$$\text{rot}F = \Delta \times F = \left(\frac{\delta F_3}{\delta x_2} - \frac{\delta F_2}{\delta x_3}, \frac{\delta F_1}{\delta x_3} - \frac{\delta F_3}{\delta x_1}, \frac{\delta F_2}{\delta x_1} - \frac{\delta F_1}{\delta x_2} \right) \in \mathbb{R}^3$$

$$\left(= \begin{vmatrix} \frac{\delta}{\delta x_1} & \frac{\delta}{\delta x_2} & \frac{\delta}{\delta x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \right)$$

1.6 Propriétés

1. $\Delta f = \text{div}(\text{grad} f) = \nabla.(\nabla f)$
2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $n = 3$ $\text{rot}(\nabla f) = 0 \in \mathbb{R}^3$, $\text{div}(\text{rot}F) = 0$ pour $n = 2$ $\text{rot}(\nabla) = 0 \in \mathbb{R}$
3. $\text{div}(f\nabla g) = f\Delta g + \nabla f \nabla g$
4. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$
5. $\text{div}(fF) = f\text{div}F + \nabla f F$
6. $\text{rot rot}F = -\Delta F + \nabla\text{div}F$

2 Chapitre 2

<u>Intégrales curvilignes</u>

2.1 Def: Courbe simple

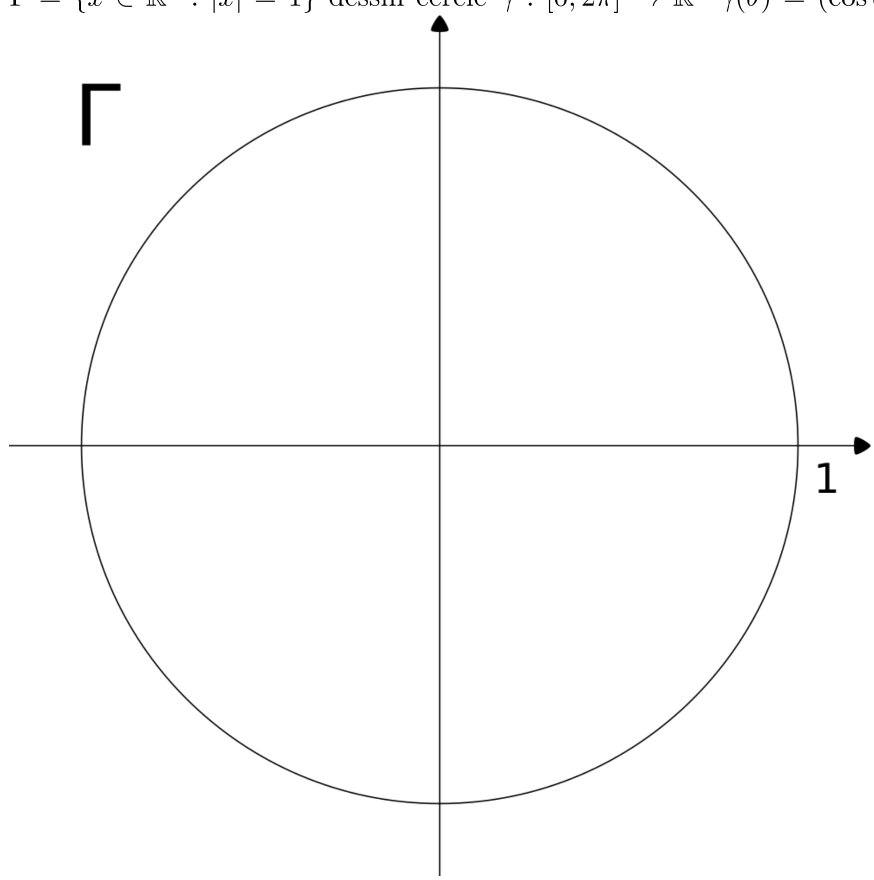
$\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ est une courbe simple si $\exists I \subset \mathbb{R}$ (intervalle) et $\gamma : I \to \mathbb{R}^d :$ continue. tel que

1. $\gamma(I) = \tau$ (courbe)
2. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ $\forall t_1, t_2 \in I$ (simple)

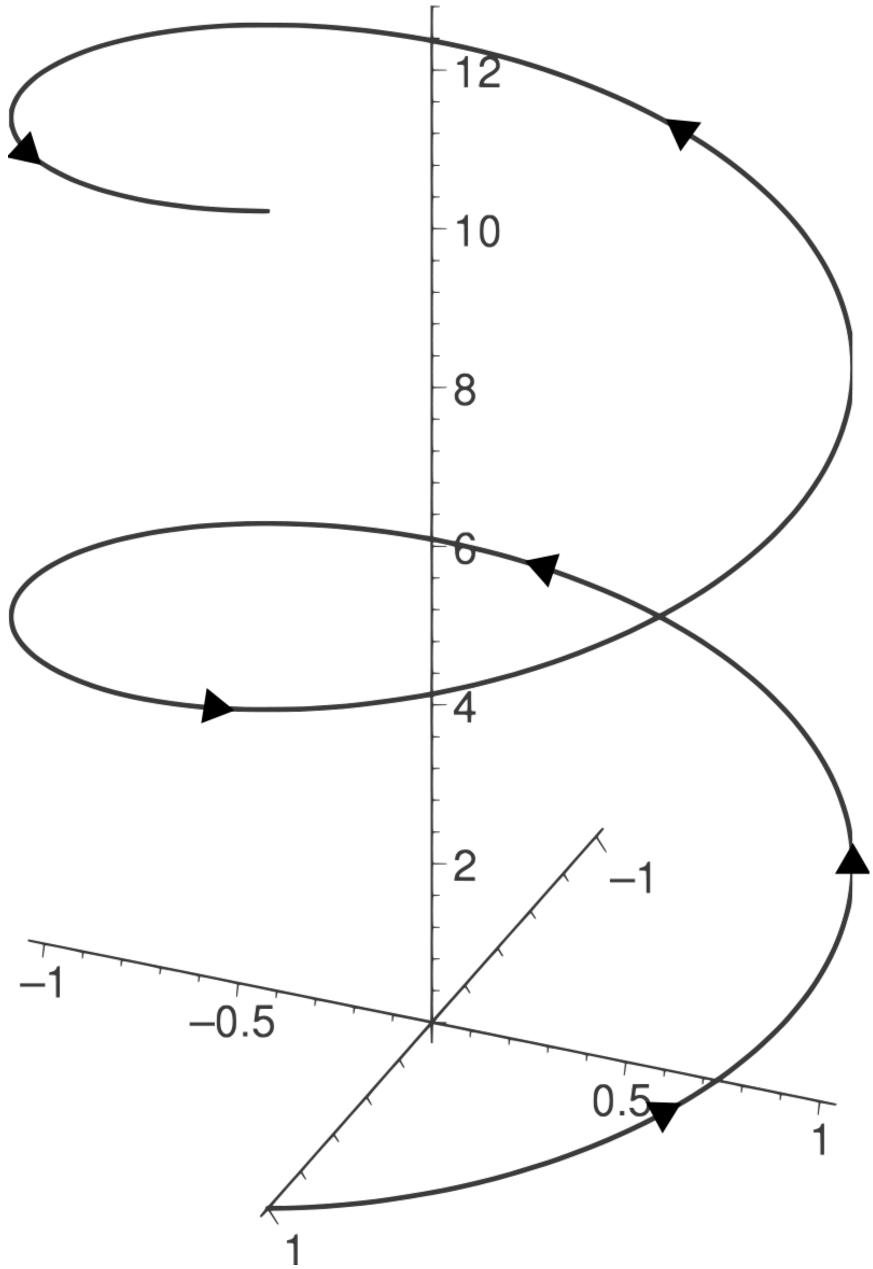
$\gamma :$ une paramétrisation.

2.1.1 Ex. 1 : Cercle

$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ dessin cercle $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$

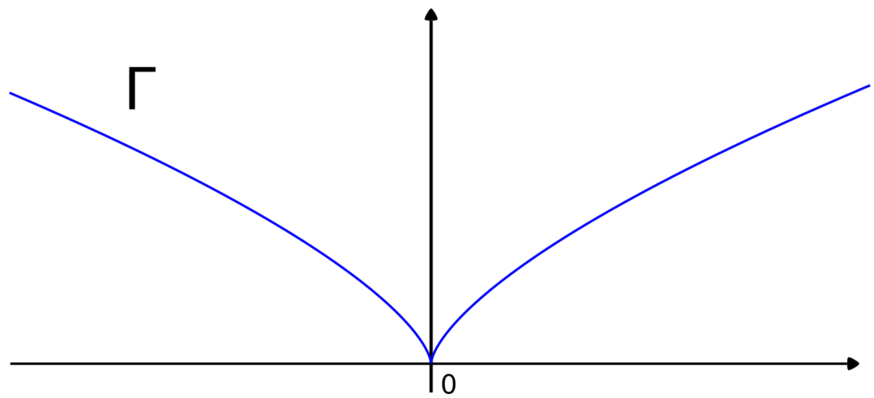


2.1.2 Ex. 2 : Helix



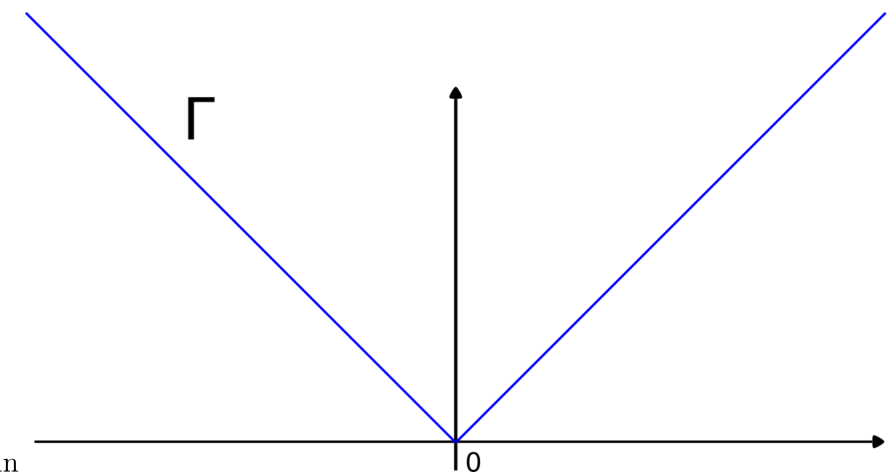
$\gamma \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

2.1.3 Ex. 3 : Puissances



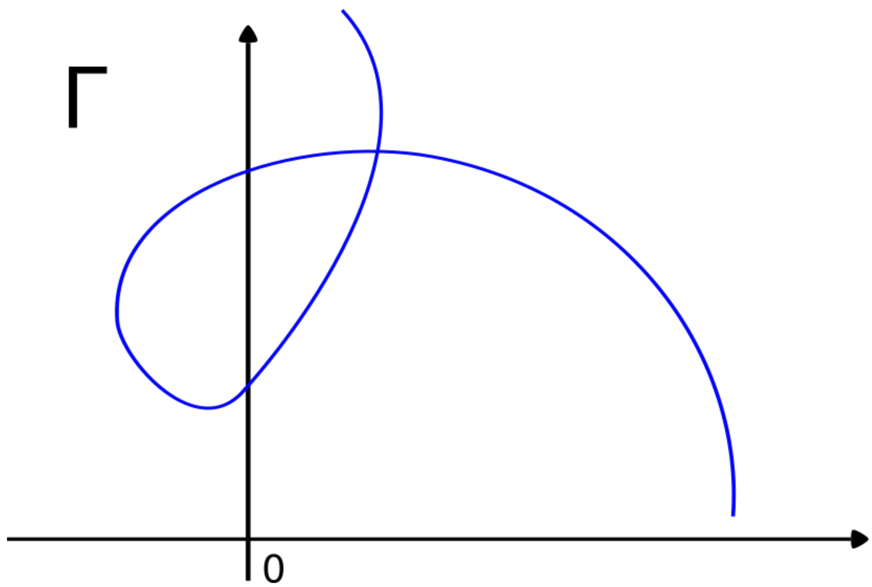
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

2.1.4 Ex. 4: Valeur absolue



$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (t, |t|)$ dessin

2.1.5 Ex. 5 : Courbe "complexe"



$\mathbb{R}^2$ courbe pas simple

2.2 Def 2 : Courbe simple fermée

τ : courbe simple est dite fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$ $(I = [a, b])$

- Ex. 1 : fermé $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$ image patate.
- Ex. 2,3,4 : non fermé.

2.3 Def 3: Courbe régulière

Γ : courbe est régulière si $\exists\, [a, b]\,, \gamma : \gamma \cdot [a, b] \to \mathbb{R}^d$ tel que

- $\gamma \in C^1\left([a, b] : \mathbb{R}^2\right)$
- $\gamma'(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ $((\gamma_1'(t), ..., \gamma_d'(t)) \neq (0, ..., 0))$
- Ex.1 : régulière $\gamma'(t) = (-\sin t, cost) \neq (0, 0)$
- Ex.2 : régulière $\gamma'(y) = (-\sin t, cost, 1) \neq (0, 0, 0)$
- Ex.3 : $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ et $\gamma'(0) = (0, 0)$: Γ : n'est pas régulière.
- Ex.4 : γ n'est pas diff. en $t = 0$. Donc Γ n'est pas régulière.

2.3.1 Remarque :

- Γ : régulière. La ligne tangente en $\gamma(t_0)$:

(L) : $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$

- Γ : courbe $\subset \mathbb{R}^d$

  $f : \Gamma \to \mathbb{R}$: continue.

2.4 Def : $\int\limits_\Gamma f$

$\int\limits_\Gamma f := \int\limits_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$: une paramétrisation de Γ.

La longueur de Γ : $\int\limits_\Gamma 1 = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$

2.4.1 Retour à ex. 1. :

$\int\limits_\Gamma f$ avec $f = 1$

$= \int\limits_0^{2\pi} ||\gamma'(t)||dt = \int\limits_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$

2.4.2 Ex. :

$$\int\limits_\Gamma : f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$$

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2y = x^2; x \in [0, 1]\right\}$$

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\to (t, \frac{t^2}{2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma f &= \int_0^1 f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{t^2 + 4\frac{t^4}{4}}\sqrt{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{t^2+t^4}\sqrt{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 t(1+t^2)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

2.4.3 Somme intégrale

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma f \simeq \sum_i |\Gamma_i| f(\gamma(t_i)) \\
\gamma(t_i) \in \Gamma_i \\
\simeq \sum_i |\Gamma_i| f(\gamma(t_i))
\end{aligned}
$$

$\Gamma_i = \gamma\left([t_i, t_{i+1}]\right)$: γ une paramétrisation $[a,b] \to \mathbb{R}^d$

Donc $\int\limits_\Gamma f \simeq \sum ||\gamma(t_i)'||(t_{i+1}-t_i)f(\gamma(t_i)) \simeq \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||f(\gamma(t))dt$

$(t_1) \neq \gamma(t_2)\ \forall t_1, t_2 \in I$ (simple) γ : une paramétrisation.

2.5 Def : L'intégrale curviligne pour un champ vectoriel.

$F : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ Γ : courbe γ : paramétrisation sur $[a,b]$ $\int\limits_\Gamma F\vec{dl} := \int\limits_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$ ($\cdot$ =produit scalaire…)

- Ex : $\int\limits_\Gamma F\vec{dl}$

$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x, x \in [0,1]\right\}$

$F(x,y) = (x^2, 0)\quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (t, \cosh t) \int\limits_\Gamma F\vec{dl}$

$$\Gamma = \int\limits_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int\limits_0^1 (t^2, 0) \cdot (1, \sinh t)dt$$
$$= \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

2.6 Def : courbe régulière <u>par morceau</u>.

$\exists\gamma\, [a,b] \to \mathbb{R}^d$ $t_0 = a, ..., t_k = b$ tel que : $\gamma \in C^1\left([t_i, t_{i+1}]\right)$ $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \neq t_i$

2.7 Def : Γ régulière <u>par morceau</u>:

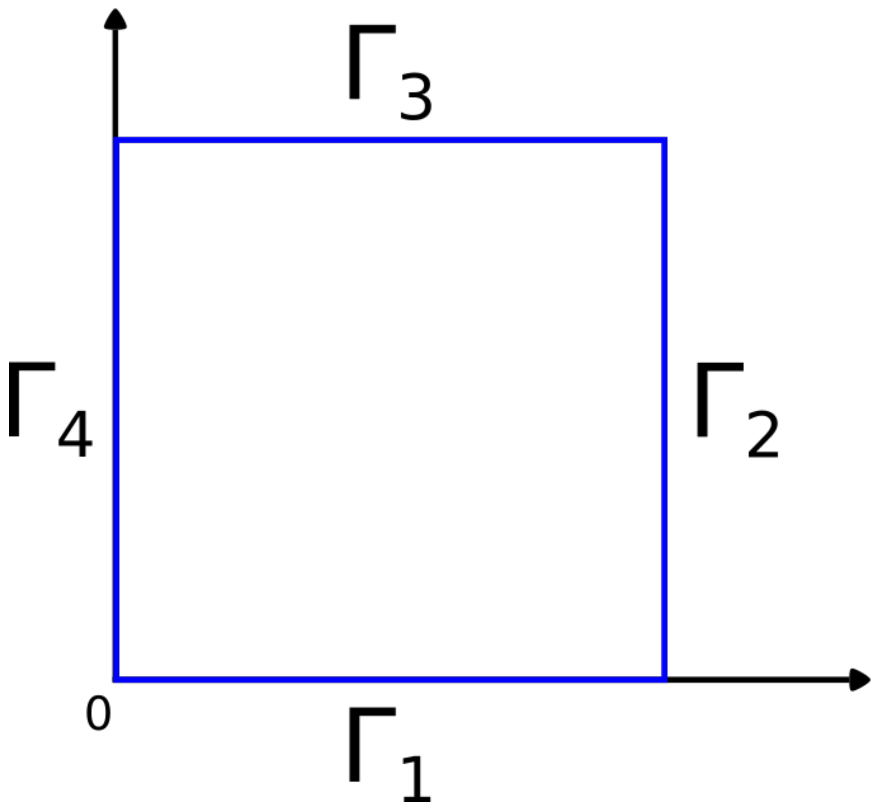
$f : \Gamma \to \mathbb{R}$: continue.

$$\int\limits_\Gamma f := \sum_{i=0}^{k-1} f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$$

$F : \Gamma \to \mathbb{R}^d$: champ vectoriel:

$$\int\limits_\Gamma F\vec{dl} := \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$$

2.7.1 Ex. : Périmètre d'un carré



$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{(t,0) : t \in [0,1]\} \\
\Gamma_2 &= \{(1,t-1) : t \in [1,2]\} \\
\Gamma_3 &= \{(3-t,1) : t \in [2,3]\} \\
\Gamma_4 &= \{(0,4-t) : t \in [3,4]\}
\end{aligned}$$

$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\gamma(t) = &\gamma_1(t) && [0,1] \\
&\gamma_2(t) && [1,2] \\
&\gamma_3(t) && [2,3] \\
&\gamma_4(t) && [3,4]
\end{aligned}$$

$f = 1$

$$|\Gamma| = \int_{\Gamma} f = \int_{0}^{1} ||\gamma'(t)||dt + \int_{1}^{2} ||\gamma'(t)||dt + \int_{2}^{3} ||\gamma'(t)||dt + \int_{3}^{4} ||\gamma'(t)||dt$$

$$(||\gamma'(t)|| = 1) = \int_{0}^{1} 1 + \int_{1}^{2} 1 + \int_{2}^{3} 1 + \int_{3}^{4} = 4$$

$$\int_{\Gamma} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i}$$

$$\Gamma_2 : \{(1,t)t \in [0,1]\}$$

3 Chapitre 3

Champs qui dérivent d'un potentiel

3.1 Def:

Ω ouvert $\mathbb{R}^n$

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$

On dit que F dérive d'un potentiel sur Ω. Si $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$

$f \in C^1(\Omega) : \nabla f = F ds \Omega$

3.1.1 Exemple

$F(x) = x$

$f(x) = \frac{1}{2}||x||^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\nabla f = F$

F: dérive d'un potentiel.

3.2 Théorème

F dérive d'un potentiel,

$F \in C^1(\Omega)$ Alors

$\frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x) = \frac{\delta F_j}{\delta x_i}(x) \forall i, j \in \{1, ..., n\},\ \forall x \in \Omega$

3.2.1 Preuve

F dérive d'un potentiel de f

$f \in$ C$^1(\Omega)$\$

$\nabla f(x) = F(x) \forall x \in \Omega$

Car $F \in C^1(\Omega)$ on a

$f \in C^2(\Omega)$

Donc $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(x)\ \forall i, j \in \{1, ..., n\},\ \forall x \in \Omega$ (1)

On a

$F_i(x) = \frac{\delta f}{\delta x_i}(x)\ \forall x \in \Omega,\ \forall i$

$\frac{\delta^2 f}{\delta x_j}(x) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(x)\ \forall x \in \Omega,\ \forall i, j$ (2)

$\frac{\delta^2 f}{\delta x_i}(x) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x)\ \forall x \in \Omega,\ \forall i, j$ (3)

(1) (2) (3) $\Rightarrow \frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x) = \frac{\delta F_j}{\delta x_i}(x)$

3.3 Question:

F: régulier, suppossons $\frac{\delta F_i}{\delta x_j} = \frac{\delta F_j}{\delta x_i}\ \forall x \in \Omega,\ \forall i, j$

Est-ce que F dérive d'un potentiel ?

3.3.1 Réponse

Vrai si Ω convexe ou simplement connexe.

"pas vrai": si Ω n'est pas simplement connexe.

3.4 Théorème

Ω: ouver connexe

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n : F \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. F dérive d'un potentiel
2. $\int\limits_{\Gamma} F dl = 0\ \forall F$: fermée, régulière, par morceaux, dans Ω

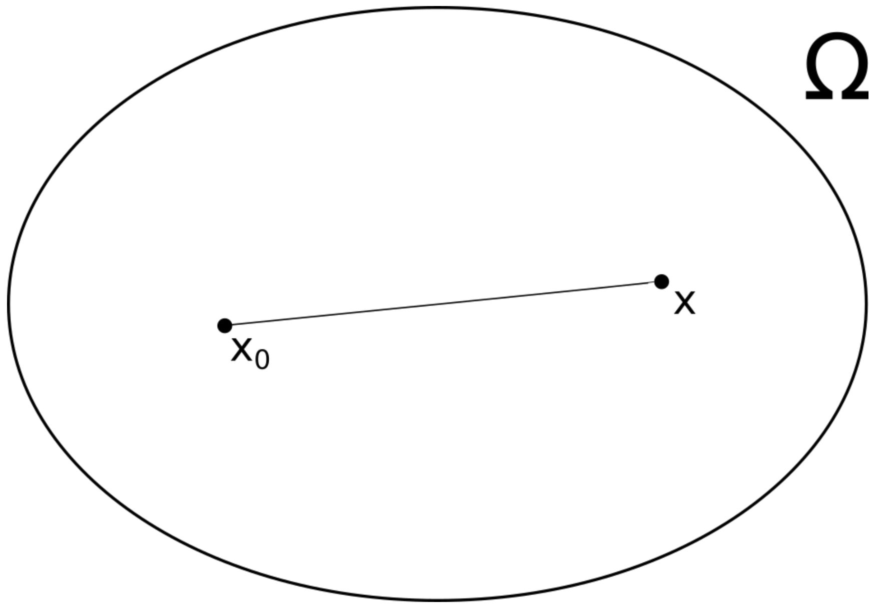
3.4.1 Preuve

(1) $\Rightarrow$ (2)

F: dérive d'un potentiel
$\exists f \in C^1(\Omega)$: $\nabla f(x) = F(x)\ \forall x \in \Omega$
Γ: courbe fermée régulière.
$\gamma : [a,b] : \Gamma = \gamma([a,b])$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$
On calcule

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F\vec{dl} &= \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right]dt \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1)
On sait :
$\int_\Gamma F\vec{dl} = 0\ \forall\Gamma$ fermée régulière.
Ω convexe.
On montre $\bar{f}$ dérive d'un potentiel
On va essayer de trouver f tel que
$\nabla f = F$



On fixe : $x_0 \in \Omega$.
Pour $x \in \Omega$, $[x_0, x] = x_0 + t(x - x_0 \ t \in [0,1]$
Définition : $f(x) = \int_{[x_0,x]} F\vec{dl}$
Ω convexe $\Rightarrow [x_0, x] \subset \Omega \ \forall x \in \Omega$
On montre:
$\nabla f(x) = F(x) \ \forall x \in \Omega$
<u>Rappel</u>
$f(y) - f(x) = \nabla f(x)(y - x) + o(||y - z||)$
$f(y) - f(x) = \int_{[x_0,y]} Fdl - \int_{[x_0,x]} Fdl$
On a
$\int_{[x_0,x]} Fdl + \int_{[x,y]} Fdl + \int_{[y,x_0]} Fdl = 0$
Donc :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \int_{[x_0,y]} + \int_{[x,y]} + \int_{[y,x_0]} \\ &= \int_{[x,y]} F\vec{dl} \end{aligned}$$

$[x, y] = \{x + t(y - x) : t \in [0,1]\}$

$$= \int_0^1 F(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^1 F(\gamma(t))(y-x)dt$$

$$\sim \int_0^1 F(x)(y-x)dt = F(x)(y-x)$$

3.5 Def: Convexe

Ω convexe si et seulement si $\forall x, y \in \Omega$

$[x, y] \subset \Omega$

image non-convexe, convexe

3.6 Def: Connexe

Ω simplement connexe si et seulement si

image connexe

3.7 Exemple

$F(x, y) = (4x^3y^2, 2x^4y + y)$

Montrer que F dérive d'un potentiel dans $\mathbb{R}^2$

Solution: On cherche $f : \nabla f = F \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\delta f}{\delta x} = 4x^3y^2 \Rightarrow f(x, y) = x^4y^2 + g(y)$

$\frac{\delta f}{\delta y} = 2x^4y + y$

$\frac{\delta f}{\delta y} = 2x^4y + g'(y) = 2x^4y + y$

Donc $g'(y) = y$

$g(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$

Alors $f(x, y) = x^4y^2 + \frac{1}{2}y^2 + C$

Autre possiblité :

$f(x, y) = \int [0, (x, y)]Fdl$

$\{\gamma(t) = (tx, ty)\ t \in [0, 1]\}$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \\
&= \int_0^1 F(tx,ty)(x,y)dt \\
&= \int_0^1 (4t^3x^3t^2y^2, 2t^4x^4ty + ty)(x,y)dt \\
&= \int_0^1 (4t^5x^4y^2 + 2t^5x^4y^2 + ty^2)dt \\
&= \int_0^1 (6t^5x^4y^2 + ty^2)dt \\
&= x^4y^2 + \frac{1}{2}y^2
\end{aligned}
$$

3.8 Exemple

$F = (2x\sin z, ze^y, x^2\cos\ + e^y$

Potentiel de F ?

Solution On cherche $f : \nabla f = F$

$\frac{\delta f}{\delta x} = 2x\sin z \Rightarrow f(x,y,z) = x^2\sin\ + f_1(y,z)$

$\frac{\delta f}{\delta x} = ze^y = \frac{\delta f_1}{\delta y}(y,z) \Rightarrow f_1(y,z) = ze^y + f_2(z)$

$\frac{\delta f}{\delta z} = x^2\cos z + e^y = e^y + f_2'(z) + x^2\cos z$

$f_2'(z) = 0 \Rightarrow f_2(z) = C$

$f(x,y,z) = x^2\sin z + ze^y + C$

3.9 Exemple

$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

F est définit sur \$R^2 $\backslash\{(0,0)\}$\$\$

Montrer :

$\frac{\delta F_1}{\delta y} = \frac{\delta F_2}{\delta x}$

Montrer : F ne dérive pas d'un potentiel

$\frac{\delta F_1}{\delta y} = \frac{-1(x^2+y^2)+y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\delta F_2}{\delta x} = \frac{1(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Γ L le cercle unité.
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\int\limits_{\Gamma} F dl = \int\limits_{0}^{2\pi} (-\sin t, \cos t)(-\sin t, \cos t) dt$$
$$= \int\limits_{0}^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$