

Rapport de Simulation : Ferme de Serveurs et Routage

Raphael Dupuy, Cyriac Thibaudeau

11 mai 2025

1 Contexte

Dans ce travail, nous simulons une ferme de serveurs composée de 12 machines réparties en C groupes de spécialisation. Un routeur de capacité 100 requêtes (FIFO) distribue les requêtes aux serveurs selon leur spécialité qui sont choisies uniformément. Les durées inter-arrivées sont calculées selon une loi exponentielle de paramètre λ , le routeur introduit un délai constant $(C - 1)/C$, et le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ_C dépendant de C .

2 Première étude : temps de réponse moyen

2.1 Protocole

Pour chaque valeur de $C \in 1, 2, 3, 6$, nous simulons pour une grille de λ (typiquement de 0.1 à 7.0 par pas de 0.1). Chaque point est moyenné sur $N = 3$ réalisations indépendantes. Nous mesurons le temps de séjour total (attente + service) par requête et calculons la moyenne et l'intervalle de confiance à 95% :

2.2 Résultats

En calculant directement le temps de séjour de chaque requête en faisant la différence entre les temps d'entrée et de sortie mesurés on fausse le résultat pour les valeurs de λ faibles, il est visible sur la figure 2 que le temps moyen baisse avant de remonter et de suivre une courbe raisonnable.

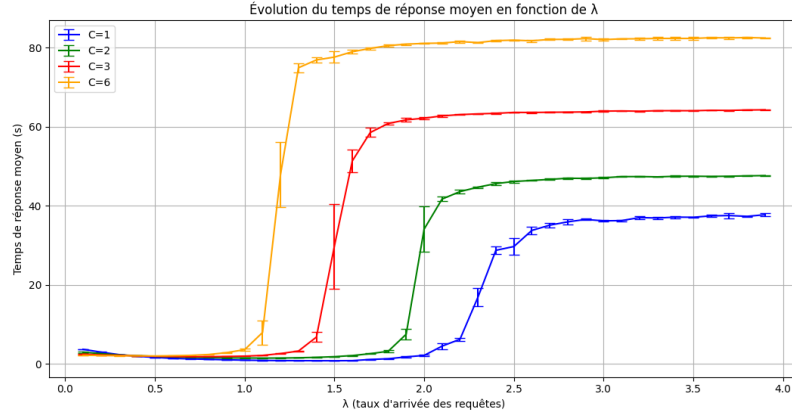


FIGURE 1 – Temps de réponse moyen mesuré en fonction de λ pour les différentes valeurs de C

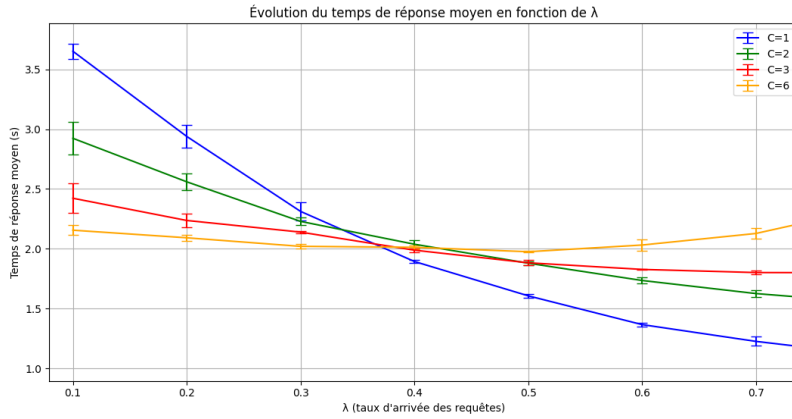


FIGURE 2 – Temps de réponse moyen mesuré en fonction de λ pour les différentes valeurs de C (intervalle réduit pour λ)

Pour éviter ce biais, on utilise la loi de Little qui dit :

$$N = \lambda D$$

Avec D le temps moyen de séjour d'une requête dans le système, N le nombre moyen de requêtes dans le système et λ le taux d'arrivée. Ainsi, on a simplement à mesurer N pour calculer D :

$$D = N/\lambda$$

Ce qui donne un résultat plus fiable sur lequel le temps moyen d'attente ne baisse jamais quand λ augmente.

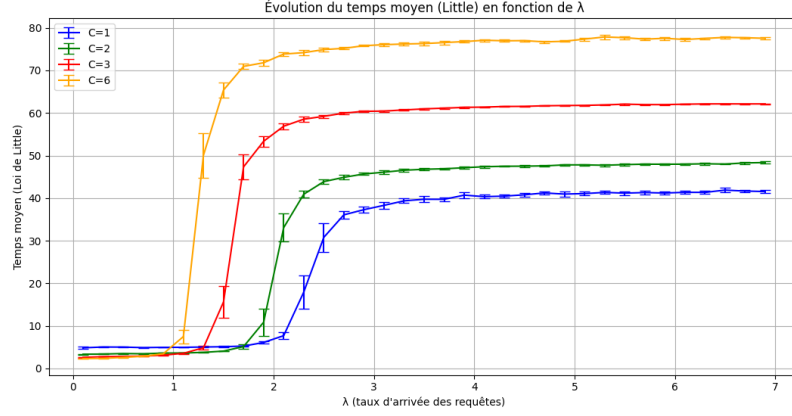


FIGURE 3 – Temps de réponse moyen calculé avec la loi de Little en fonction de λ pour les différentes valeurs de C

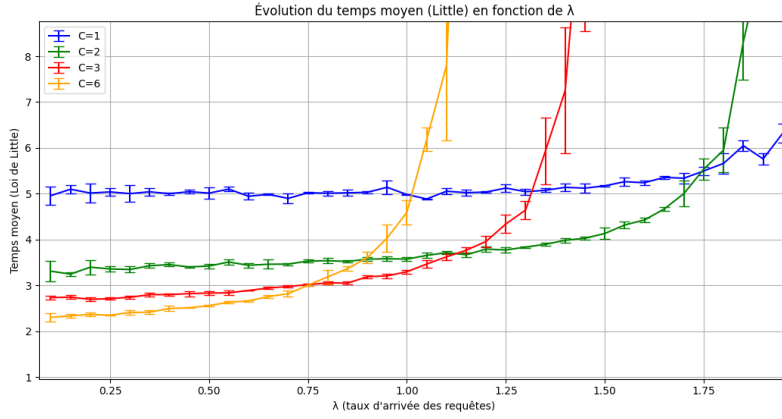


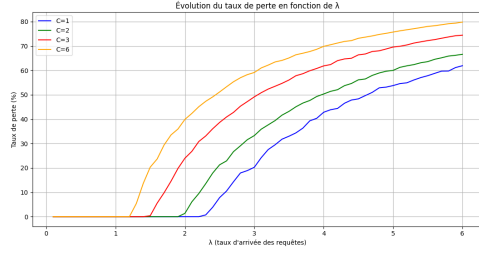
FIGURE 4 – Temps de réponse moyen calculé avec la loi de Little en fonction de λ pour les différentes valeurs de C (intervalle réduit pour λ)

3 Deuxième étude : taux de perte

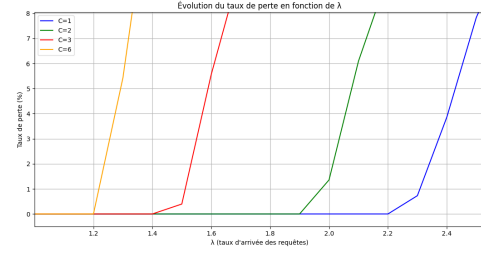
3.1 Protocole

Même protocole de simulation. Pour chaque (C, λ) , on calcule le pourcentage de requêtes perdues. On recherche la valeur limite λ_C^* telle que le taux de perte dépasse 5%.

On simule premièrement le taux de perte pour toutes les valeurs de C avec λ sur un grand intervalle pour essayer de repérer grossièrement les valeurs à partir desquelles chaque courbe dépasse 5%.



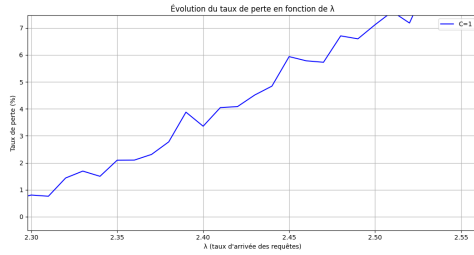
(a)



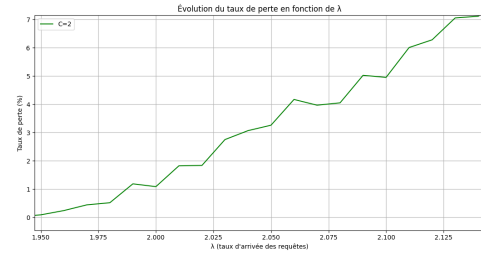
(b) (intervalle de λ réduit)

FIGURE 5 – Taux de perte pour chaque valeurs de C en fonction de λ

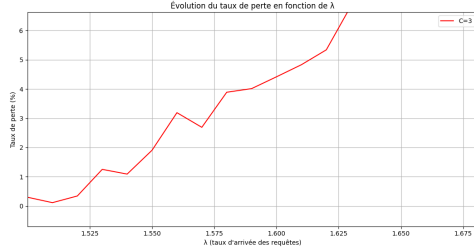
On isole en suite chaque valeur de C en simulant le taux de perte avec λ sur un plus petit intervalle avec un pas plus faible et un temps de simulation plus élevé.



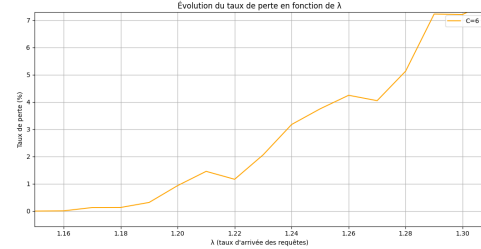
(a) $C = 1$



(b) $C = 2$



(c) $C = 3$



(d) $C = 6$

FIGURE 6 – Taux de perte en fonction de λ pour chaque valeur de C

3.2 Résultats

Le pas utilisé pour les valeurs de λ dans les simulations est de 0.01, on arrive donc à déterminer assez finement que les valeurs de λ à partir desquelles le taux d'erreur dépasse 5% sont autour de :

Capacité C	Seuil de λ à 5 % de perte
1	$\lambda \approx 2,45$ (cf. Figure 6a)
2	$\lambda \approx 2,10$ (cf. Figure 6b)
3	$\lambda \approx 1,61$ (cf. Figure 6c)
6	$\lambda \approx 1,28$ (cf. Figure 6d)

TABLE 1 – Seuils de λ à partir desquels le taux de perte dépasse 5%.

4 Choix optimal

4.1 Résultat pour $\lambda = 1$

Pour trouver la valeur de C optimale quand $\lambda = 1$, on doit trouver laquelle donne un meilleur compromis entre temps d'attente moyen et taux de perte moyen.

Cependant pour cette valeur de λ , on remarque sur la figure 5 que le taux de perte moyen est nul pour toutes les valeurs de C . La valeur optimale sera donc celle qui minimise le temps moyen de réponse. Sur la figure 4 on a que la valeur de C qui minimise le temps moyen de réponse pour $\lambda = 1$ est $C = 3$

Le nombre de groupes de serveurs $C = 3$ donne un taux de perte nul et un temps moyen d'attente le plus faible pour $\lambda = 1$, c'est donc le choix optimal pour cette valeur de λ .

4.2 Résultat pour différentes valeurs de λ

Pour trouver les valeurs de C optimales pour chaque valeur de λ , on essaie ici de découper l'ensemble des valeurs que λ peut prendre soit $]0, +\infty[$ en différents sous ensembles pour lesquels une valeur de C est meilleure que les autres.

On considère un taux de perte maximum acceptable de 5% et on considère qu'une valeur de C_1 est meilleure qu'une valeur C_2 pour λ dans un intervalle donné si pour l'ensemble des valeurs de cette intervalle, le temps d'attente moyen produit par la simulation avec C_1 est plus faible qu'avec C_2 .

Nous allons donc considérer les graphes montrant le temps moyen d'attente avec la loi de Little (Figure 4) et le taux de perte moyen (Figure 5b) pour étudier avec λ croissant la meilleure option pour C .

La figure 4 donne directement que quand λ est proche de 0, le temps d'attente moyen est le plus faible quand $C = 6$. On voit en suite que quand λ s'approche de 0.75, $C = 3$ donne un meilleur temps. On peut donc dire que pour λ dans l'intervalle $]0, 0.75[$, $C = 6$ est le choix optimal d'autant que son taux d'erreur est toujours de 0% dans cette intervalle.

On peut simuler plus précisément la valeur de λ pour laquelle le changement se produit en réduisant l'intervalle pris lors de la simulation autour de 0.75 (Figure 7. Ce qui confirme la valeur.

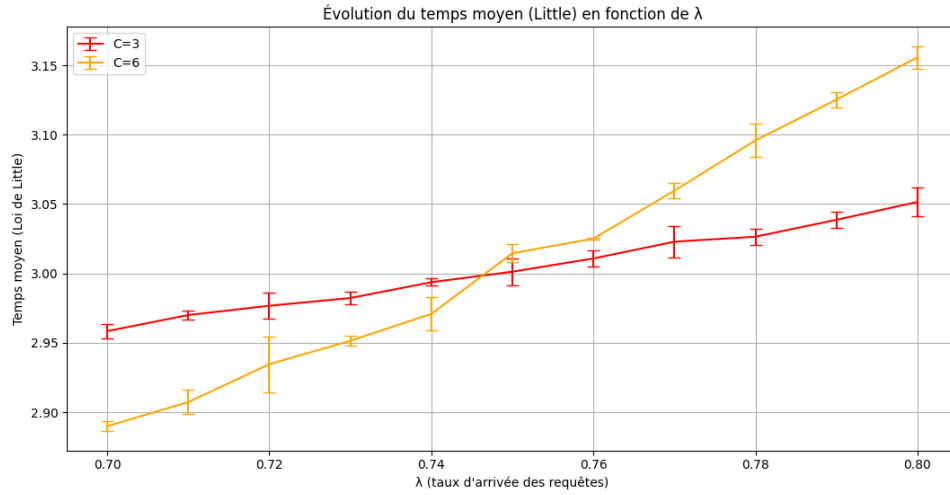


FIGURE 7 – Temps d’attente moyen (Little) pour $C = 3$ et $C = 6$, λ entre 0.7 et 0.8 avec un pas de 0.01

En faisant la même analyse pour les valeurs de λ à partir de 0.75, on voit que $C = 3$ produit le temps d’attente moyen le plus faible jusqu’à environ $\lambda = 1.125$. On simule de la même manière que pour $C = 3$ et $C = 6$ pour les courbes $C = 3$ et $C = 2$ autour de 1.125. La simulation (Figure 8) confirme que la valeur jusqu’à laquelle $C = 3$ est optimale est 1.125 à 0.005 près. Les valeurs étant calculées avec un intervalle de confiance à 95%, les deux se croisent sur les valeurs 1.125 et 1.13. Le taux d’erreur de $C = 3$ sur $]0.75, 1.125[$ étant également nul, on peut donc conclure que $C = 3$ est le choix optimal sur cette intervalle.

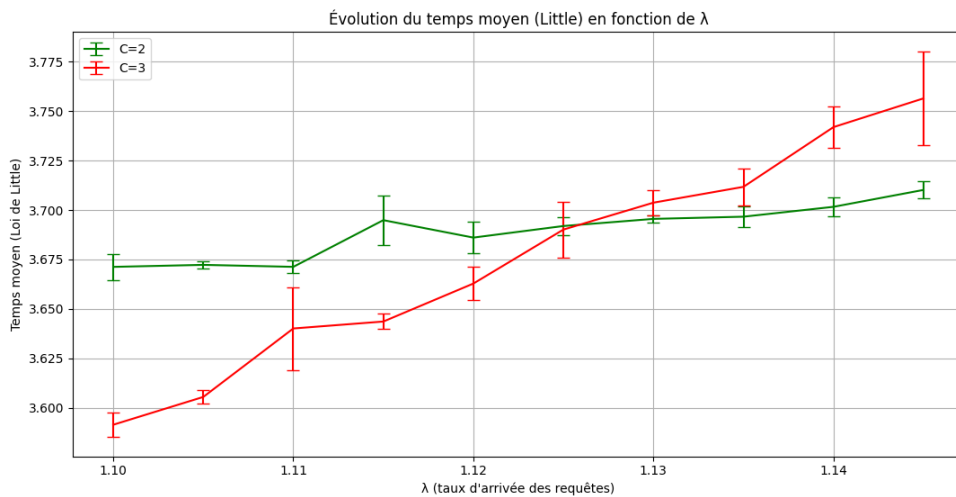


FIGURE 8 – Temps d’attente moyen (Little) pour $C = 2$ et $C = 3$, λ entre 1.10 et 1.15 avec un pas de 0.005

Toujours sur la Figure 4, on voit qu'après $\lambda = 1.125$, la valeur de C produisant le temps d'attente moyen le plus faible est $C = 2$ jusqu'à $\lambda = 1.75$ environ. En précisant avec une simulation (Figure 9), on trouve bien que la valeur de λ jusqu'à laquelle $C = 2$ est le choix optimal est 1.75. Le taux d'erreur de $C = 2$ est aussi nul sur l'intervalle $]1.125, 1.75[$ c'est donc le choix optimal sur cette intervalle.

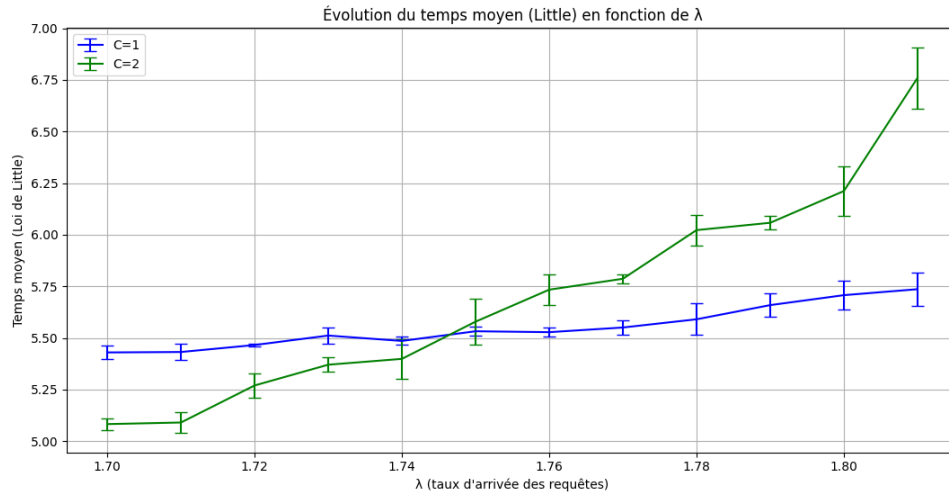


FIGURE 9 – Temps d'attente moyen (Little) pour $C = 2$ et $C = 1$, λ entre 1.7 et 1.81 avec un pas de 0.01

Pour le reste des valeurs de λ ($]1.75, +\infty[$), on voit sur la Figure 4 que le meilleur choix est toujours $C = 1$, cependant on a considéré que le taux d'erreur acceptable maximum était de 5% et dans le cas de $C = 1$ nous avons vu plus tôt que ce taux était atteint autour de $\lambda = 2.45$. On peut donc dire que $C = 1$ est le meilleur choix pour les valeurs de λ entre 1.75 et 2.45 après quoi le taux d'erreur est trop grand pour n'importe quelle valeur de C .

5 Conclusion

Seuils de perte à 5%

Nombre de groupes C	λ_C^* (perte = 5 %)
1	2,45
2	2,10
3	1,61
6	1,28

TABLE 2 – Valeurs limites de λ pour lesquelles le taux de perte dépasse 5 %.

Choix optimal selon le temps de réponse moyen

Intervalle de λ	C optimal
$]0, 0.75[$	6
$]0.75, 1.125[$	3
$]1.125, 1.75[$	2
$]1.75, 2.45]$	1
$]2.45, +\infty[$	Aucun

TABLE 3 – Partition de l'axe λ selon le choix de C qui minimise le temps de réponse.