

Programação Linear

Uma das técnicas mais utilizadas na abordagem de problemas em Pesquisa Operacional é a programação linear. A simplicidade do modelo envolvido e a disponibilidade de uma técnica de solução programável em computador facilitam sua aplicação. As aplicações mais conhecidas são feitas em sistemas estruturados, como os de produção, finanças, controles de estoques etc.

O modelo matemático de programação linear é composto de um função objetiva linear; e de restrições técnicas representadas por um grupo de inequações também lineares.

Exemplo: Função objetivo a ser maximizada: $\text{Lucro} = 2x_1 + 3x_2$

Restrições:
$$\begin{cases} \text{técnicas} & \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 6x_1 - x_2 \geq 20 \end{cases} \\ \text{de não negatividade} & \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

As variáveis controladas ou variáveis de decisão são x_1 e x_2 . A função objetivo ou função e eficiência mede o desempenho do sistema, no caso a capacidade de gerar lucro, para cada solução apresentada. O objetivo é maximizar o lucro. As restrições garantem que essas soluções estão de acordo com as limitações técnicas impostas pelo sistema. As duas últimas restrições exigem a não negatividade das variáveis de decisão, o que deverá acontecer sempre que a técnica de abordagem for a de programação linear.

A construção do modelo matemático, no caso um modelo linear, é a parte mais complicada de nosso estudo. Não há regra fixa para esse trabalho, mas podemos sugerir um roteiro que ajuda a ordenar o raciocínio.

Roteiro:

a. Quais as variáveis de decisão?

Aqui o trabalho consiste em explicitar as decisões que devem ser tomadas e representar as possíveis decisões através de variáveis chamadas variáveis de decisão. Se o problema é de programação de produção, as variáveis de decisão são as quantidades a produzir no período; se for um problema de programação de investimento, as variáveis vão representar as decisões de investimento, isto é, quanto investir em cada oportunidade de investimento, e em que período. Nas descrições sumárias de sistemas, isso fica claro quando lemos a questão proposta, isto é, a pergunta do problema.

b. Qual o objetivo?

Aqui devemos identificar o objetivo da tomada de decisão. Eles aparecem geralmente na forma da maximização de lucros ou receitas, minimização de custos, perdas etc.

A função objetivo é a expressão que calcula o valor do objetivo (lucro, custo, receita, perda etc.), em função das variáveis de decisão.

c. Quais as restrições?

Cada restrição imposta na descrição do sistema deve ser expressa como uma relação linear (igualdade ou desigualdade), montadas com as variáveis de decisão.

Exemplos de situações que podem ser descritas com o auxílio de um modelo linear:

Exemplo 1:

Certa empresa fabrica dois produtos P_1 e P_2 . O lucro unitário do produto P_1 é de 1.000 unidades monetárias e o lucro unitário de P_2 é de 1.800 unidades monetárias. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P_1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P_2 . O tempo anual de produção disponível para isso é de 1.200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P_1 e 30 unidades anuais para P_2 . Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens? Construa o modelo de programação linear para esse caso.

Solução:

a. Quais as variáveis de decisão?

O que deve ser decidido é o plano de produção, isto é, quais as quantidades anuais que devem ser produzidas de P_1 e P_2 .

Portanto, as variáveis de decisão serão x_1 e x_2

$x_1 \rightarrow$ quantidade anual a produzir de P_1

$x_2 \rightarrow$ quantidade anual a produzir de P_2

b. Qual o objetivo?

O objetivo é maximizar o lucro, que pode ser calculado:

Lucro devido a $P1$: $1.000 \cdot x_1$ (lucro por unidade de $P1$ x quantidade produzida de $P1$)

Lucro devido a $P2$: $1.800 \cdot x_2$ (lucro por unidade de $P2$ x quantidade produzida de $P2$)

Lucro total: $L = 1.000x_1 + 1.800x_2$

Objetivo: maximizar $L = 1.000x_1 + 1.800x_2$

c. Quais as restrições?

As restrições impostas pelo sistema são:

- Disponibilidade de horas para a produção: 1.200 horas.
horas ocupadas com $P1$: $20x_1$ (uso por unidade x quantidade produzida)
horas ocupadas com $P2$: $30x_2$ (uso por unidade x quantidade produzida)
Total em horas ocupadas na produção: $20x_1 + 30x_2$
disponibilidade: 1.200 horas.
Restrição descritiva da situação: $20x_1 + 30x_2 \leq 1.200$
- Disponibilidade de mercado para os produtos (demanda)

Disponibilidade para $P1$: 40 unidades

Quantidade a produzir de $P1$: x_1

Restrição descritiva da situação: $x_1 \leq 40$

Disponibilidade para $P2$: 30 unidades

Quantidade a produzir de $P2$: x_2

Restrição descritiva da situação: $x_2 \leq 30$

Resumo do modelo : $\max L = 1.000x_1 + 1.800x_2$

Sujeito a:

$$\text{restrições técnicas} \left\{ \begin{array}{l} 20x_1 + 30x_2 \leq 1.200 \\ x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 30 \end{array} \right.$$

restrições de não negatividade $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Exemplo 2:

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas.

Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Cada unidade de carne custa 3 unidades monetárias e cada unidade de ovo custa 2,5 unidades monetárias.

Solução:

a. Quais as variáveis de decisão?

Devemos decidir quais as quantidades de carne e ovos a pessoa deve consumir no dia. As variáveis de decisão serão, portanto:

$x_1 \rightarrow$ quantidade de carne a consumir no dia

$x_2 \rightarrow$ quantidade de ovos a consumir no dia

b. Qual o objetivo?

O objetivo é minimizar o custo, que pode ser calculado:

Custo devido à carne: $3 \cdot x_1$ (custo por unidade \times quantidade a consumir de carne)

Custo devido aos ovos: $2,5 \cdot x_2$ (custo por unidade \times quantidade a consumir de ovos)

Custo total: $C = 3x_1 + 2,5x_2$

Objetivo: minimizar $C = 3x_1 + 2,5x_2$

c. Quais as restrições?

As restrições impostas pelo sistema são:

- necessidade mínima de vitamina: 32 unidades

vitamina de carne: $4 \cdot x_1$ (quantidade por unidade \times unidades de carne a consumir)

vitamina de ovos: $8 \cdot x_2$ (quantidade por unidade \times unidades de ovos a consumir)

Total de vitaminas: $4x_1 + 8x_2$

Necessidade mínima: 32

Restrição descritiva da situação: $4x_1 + 8x_2 \geq 32$

- necessidade mínima de proteína: 36 unidades
proteína de carne: $6 \cdot x_1$ (quantidade por unidade x unidades de carne a consumir)
proteína de ovos: $6 \cdot x_2$ (quantidade por unidade x unidades de ovos a consumir)
Total de proteínas: $6x_1 + 6x_2$
Necessidade mínima: 36
Restrição descritiva da situação: $6x_1 + 6x_2 \geq 36$

Resumo do modelo: $\min C = 3x_1 + 2,5x_2$

Sujeito a:

$$\text{restrições técnicas: } \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \geq 32 \\ 6x_1 + 6x_2 \geq 36 \end{cases}$$

$$\text{restrições de não negatividade: } \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercícios

Construir o modelo matemático de programação linear dos sistemas descritos a seguir:

1. Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades monetárias e o do cinto é de 2 unidades monetárias, pede-se: o modelo do sistema de produção do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro por hora.
2. Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de 100 u.m. e o lucro unitário de P2 é de 150 u.m. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os 2 produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês. Construa o modelo do sistema de produção mensal com o objetivo de maximizar o lucro da empresa.

3. Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranjas a 20 u.m. de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos a 10 u.m. de lucro por caixa, e no máximo 200 caixas de tangerinas a 30 u.m. de lucro por caixa. De que forma deverá ele carregar o caminhão para obter o lucro máximo? Construa o modelo do problema.
4. Uma rede de televisão local tem o seguinte problema: foi descoberto que o programa "A" com 20 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30.000 telespectadores, enquanto o programa "B", com 10 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 10.000 telespectadores. No decorrer de uma semana, o patrocinador insiste no uso de no mínimo, 5 minutos para sua propaganda e que não há verba para mais de 80 minutos de música. Quantas vezes por semana cada programa deve ser levado ao ar para obter o número máximo de telespectadores? Construa o modelo do sistema.
5. Um empresa fabrica 2 modelos de cintos de couro. O modelo M1, de melhor qualidade, requer o dobro do tempo de fabricação em relação ao modelo M2. Se todos os cintos fossem do modelo M2, a empresa poderia produzir 1.000 unidades por dia. A disponibilidade de couro permite fabricar 800 cintos de ambos os modelos por dia. Os cintos empregam fivelas diferentes, cuja disponibilidade diária é de 400 para M1 e 700 para M2. Os lucros unitários são de \$ 4,00 para M1 e \$ 3,00 para M2. Qual o programa ótimo de produção que maximiza o lucro total diário da empresa? Construa o modelo do sistema descrito.
6. Uma empresa, após um processo de racionalização de produção, ficou com disponibilidade de 3 recursos produtivos, R1, R2 e R3. Um estudo sobre o uso desses recursos indicou a possibilidade de se fabricar 2 produtos P1 e P2. Levantando os custos e consultando o departamento de vendas sobre o preço de colocação no mercado, verificou-se que P1 daria um lucro de \$ 120,00 por unidade e P2, \$ 150,00 por unidade. O departamento de produção forneceu a seguinte tabela de uso de recursos.

Produto	Recurso R1 por unidade	Recurso R2 por unidade	Recurso R3 por unidade
P1	2	3	5
P2	4	2	3
Disponibilidade de recursos por mês	100	90	120

Que produção mensal de P1 e P2 traz o maior lucro para a empresa? Construa o modelo do sistema.

7. Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

A (Arrendamento) – Destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana-de-açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra \$ 300,00 por alqueire por ano.

P (Pecuária) – Usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100 kg/Alq) e irrigação (100.000 l de água/Alq) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de \$ 400,00 por alqueire por ano.

S (Plantio de Soja) – Usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000 l de água/Alq para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de \$ 500,00/alqueire no ano.

Disponibilidade de recursos por ano:

12.750.000 l de água

14.000 kg de adubo

100 alqueires de terra.

Quantos alqueires deverá destinar a cada atividade para proporcionar o melhor retorno? Construa o modelo de decisão.

8. *O departamento de marketing de uma empresa estuda a forma mais econômica de aumentar em 30% as vendas de seus dois produtos P1 e P2.*

As alternativas são:

a) *Investir em um programa institucional com outras empresas do mesmo ramo. Esse programa requer um investimento mínimo de \$ 3.000,00 e deve proporcionar um aumento de 3% nas vendas de cada produto, para cada \$ 1.000,00 investidos.*

b) *Investir diretamente na divulgação dos produtos. Cada \$ 1.000,00 investidos em P1 retornam um aumento de 4% nas vendas, enquanto que para P2 o retorno é de 10%.*

A empresa dispõe de \$ 10.000,00 para esse empreendimento. Quanto deverá destinar a cada atividade? Construa o modelo do sistema descrito.

9. *Uma liga especial constituída de ferro, carvão, silício e níquel pode ser obtida usando a mistura desses minerais puros além de 2 tipos de materiais recuperados:*

Material Recuperado 1 – MR1 – Composição:

ferro – 60% Custo por kg: \$ 0,20

carvão – 20%

silício – 20%

Material Recuperado 2 – MR2 – Composição:

ferro – 70% Custo por kg: \$ 0,25

carvão – 20%

silício – 5%

níquel – 5%

A liga deve ter a seguinte composição final:

Matéria-prima	% mínima	% máxima
ferro	60	65
carvão	15	20
silício	15	20
níquel	5	8

O custo dos materiais puros são (por kg): ferro: \$ 0,30; carvão: \$ 0,20; silício: \$ 0,28; níquel: \$ 0,50. Qual deverá ser a composição da mistura em termos dos materiais disponíveis, com menor custo por kg? Construa o modelo de decisão.

10. Uma rede de depósitos de material de construção tem 4 lojas que devem ser abastecidas com 50 m^3 (loja 1), 80 m^3 (loja 2), 40 m^3 (loja 3) e 100 m^3 (loja 4) de areia grossa. Essa areia pode ser carregada em 3 portos P_1 , P_2 e P_3 , cujas distâncias às lojas estão no quadro (em km):

	L1	L2	L3	L4
P1	30	20	24	18
P2	12	36	30	24
P3	8	15	25	20

O caminhão pode transportar 10 m^3 por viagem. Os portos tem areia para suprir qualquer demanda. Estabelecer um plano de transporte que minimize a distância total percorrida entre os portos e as lojas e supra as necessidades das lojas. Construa o modelo linear do problema.

Respostas

1. $x_1 \rightarrow \text{nº de sapatos/hora}$

$x_2 \rightarrow \text{nº de cintos/hora}$

max. Lucro = $5x_1 + 2x_2$

s.a. $\begin{cases} 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

2. $x_1 \rightarrow \text{quantidade a produzir de P1}$

$x_2 \rightarrow \text{quantidade a produzir de P2}$

max. Lucro = $100x_1 + 150x_2$

s.a. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

3. $x_1 \rightarrow \text{quantidade de caixas de pêssegos}$

$x_2 \rightarrow \text{quantidade de caixas de tangerinas}$

max. Lucro = $10x_1 + 30x_2 + 4.000$

s.a. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 100 \\ x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

4. $x_1 \rightarrow \text{freqüência semanal do programa A}$

$x_2 \rightarrow \text{freqüência semanal do programa B}$

$$\max. T = 30.000x_1 + 10.000x_2$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 1x_1 + 1x_2 \geq 5 \\ 20x_1 + 10x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. $x_1 \rightarrow$ quantidade a produzir de M1

$x_2 \rightarrow$ quantidade a produzir de M2

$$\max. \text{Lucro} = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1.000 \\ x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 700 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. $x_1 \rightarrow$ quantidade a produzir de P1

$x_2 \rightarrow$ quantidade a produzir de P2

$$\max. \text{Lucro} = 120x_1 + 150x_2$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 90 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7. $x_1 \rightarrow$ alqueires para arrendamento

$x_2 \rightarrow$ alqueires para pecuária

$x_3 \rightarrow$ alqueires para soja

$$\max. \text{Lucro} = 300x_1 + 400x_2 + 500x_3$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 100x_2 + 200x_3 \leq 14.000 \\ 100.000x_2 + 200.000x_3 \leq 12.750.000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

8. $x_1 \rightarrow$ quantidade em \$ 1.000 para programa institucional

$x_2 \rightarrow$ quantidade em \$ 1.000 diretamente em P1

$x_3 \rightarrow$ quantidade em \$ 1.000 diretamente em P2

$$\min. \text{Custo} = 1.000x_1 + 1.000x_2 + 1.000x_3$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} x_1 \geq 3 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 30 \\ 3x_1 + 10x_3 \geq 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

9. $x_1 \rightarrow$ quantidade de MR1 na mistura

$x_2 \rightarrow$ quantidade de MR2 na mistura

$x_3 \rightarrow$ quantidade de ferro puro na mistura

$x_4 \rightarrow$ quantidade de carvão na mistura

$x_5 \rightarrow$ quantidade de silício na mistura

$x_6 \rightarrow$ quantidade de níquel na mistura

$$\text{min. Custo} = 0,20x_1 + 0,25x_2 + 0,30x_3 + 0,20x_4 + 0,28x_5 + 0,50x_6$$

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 0,6x_1 + 0,7x_2 + x_3 \geq 0,60 \\ 0,6x_1 + 0,7x_2 + x_3 \leq 0,65 \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 + x_4 \leq 0,20 \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 + x_4 \geq 0,15 \\ 0,2x_1 + 0,05x_2 + x_5 \leq 0,20 \\ 0,2x_1 + 0,05x_2 + x_5 \geq 0,15 \\ 0,05x_2 + x_6 \geq 0,05 \\ 0,05x_2 + x_6 \leq 0,08 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0 \end{array} \right\} \\ \text{s.a.} \end{array}$$

10. $x_{11} \rightarrow$ número de viagens do P1 a L1

$x_{12} \rightarrow$ número de viagens do P1 a L2

$x_{13} \rightarrow$ número de viagens do P1 a L3

$x_{21} \rightarrow$ número de viagens do P2 a L1 etc.

$$\text{min } K = 30x_{11} + 20x_{12} + 24x_{13} + 18x_{14} + 12x_{21} + 36x_{22} + 30x_{23} + 24x_{24} + 8x_{31} + 15x_{32} + 25x_{33} + 20x_{34}$$

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 8 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,4 \end{array} \right\} \\ \text{s.a.} \end{array}$$