

Modeldannelse

Palle Andersen, Tom S. Pedersen

- 2. februar 2010

Afdeling for Proceskontrol, Institut for Elektroniske Systemer
Aalborg Universitet, Fredrik Bajers Vej 7, DK-9220 Aalborg Ø, Danmark

Indhold

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduktion til modellering | 1 |
| 1.1 | Modelbegreber | 1 |
| 1.1.1 | Modeltyper | 2 |
| 1.2 | Formål med model. | 8 |
| 1.3 | Systemets virkemåde | 9 |
| 1.4 | Systemets grænseflade | 9 |
| 1.5 | Opdeling i delsystemer | 10 |
| 1.6 | Antagelser | 10 |
| 1.7 | Kontrolvolumener og free bodies | 11 |
| 2 | DC motoren | 15 |
| 2.1 | Model af DC motoren | 15 |
| 2.2 | Bestemmelse af parametre | 17 |
| 2.2.1 | Eksperimentel bestemmelse af K , R_a , τ_c og b | 17 |
| 2.2.2 | Bestemmelse af R_a og L_a | 18 |
| 2.2.3 | Bestemmelse af motorens inertimoment J | 19 |
| 3 | Den børsteløse DC-motor | 21 |
| 3.0.4 | Princip for den børsteløse DC-motor | 21 |
| 3.0.5 | Idealiseret model for den børsteløse DC-motor | 22 |
| 3.0.6 | Styring af den børsteløse DC-motor | 24 |
| 4 | Stepmotoren | 26 |
| 4.0.7 | Hybrid Stepping motorens virkemåde | 26 |
| 4.0.8 | Elektroniske driverkredsløb. | 29 |
| 4.0.9 | Rotationssekvenser og stepstørrelser | 29 |
| 5 | Translatoriske og roterende mekaniske systemer | 30 |
| 5.1 | Ideelle elementer for translatoriske mekaniske systemer | 30 |
| 5.2 | Free body diagrammer for translatoriske mekaniske systemer | 31 |
| 5.3 | Ideelle elementer for roterende mekaniske systemer | 33 |
| 5.4 | Free body diagrammer for roterende mekaniske systemer | 34 |
| 5.5 | Gear | 35 |
| 5.6 | Eksempel på modellering med free body metoden | 36 |
| 6 | Friktion og slør i mekaniske systemer | 38 |
| 6.1 | Friktion | 38 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 6.2 | Friktion modelleret som børster | 38 |
| 6.3 | Slør i mekaniske systemer | 40 |
| 6.3.1 | Slør i roterende system | 42 |
| 7 | Masse og energibalancer | 43 |
| 7.1 | Massebalance | 43 |
| 7.2 | Energibalance | 45 |
| 7.3 | Varmetransmissionsligninger | 46 |
| 7.3.1 | Ledning | 46 |
| 7.3.2 | Stråling | 47 |
| 7.3.3 | Konvektion | 48 |
| 7.3.4 | Varmeovergangstallet | 48 |
| 8 | Impulsbalance | 52 |
| 8.1 | Impulsbalance | 52 |
| 8.2 | Friktion ved strømning | 53 |
| 8.3 | Pumper | 55 |
| 8.4 | Udvidet impulsbalance | 56 |
| 9 | Flerfasesystemer | 60 |
| 9.1 | Tilstandsrelationer | 60 |
| 10 | Lineære tilnærmelser til ikke lineære modeller | 65 |
| 10.1 | Lineariseringsprocedure | 68 |
| 10.2 | Simulering af ulineær model | 69 |
| 10.2.1 | Options. | 73 |
| 10.2.2 | Differential ligningssystemer med 'masse' matrix | 73 |
| 10.2.3 | Differential algebraiske ligninger DAE. | 74 |
| 10.2.4 | Stive differentiaalligninger. | 74 |
| 11 | Introduktion til systemer med fordelte parametre | 76 |
| 11.1 | Gennemstrømningsvarmeveksler | 76 |
| 11.2 | Modstrømsvarmeveksler | 77 |
| 11.3 | Strømning i åben kanal | 78 |
| 11.4 | Transmissionslinier | 80 |
| 12 | Analytisk løsning af partielle differentiaalligninger | 81 |
| 12.1 | Overføringsfunktion for symmetrisk modstrømsvarmeveksler | 81 |
| 12.1.1 | Simplifikation af overføringsfunktion ved rækkeudvikling | 83 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 12.1.2 | Amplitude -og fasekarakteristik af overføringsfunktion | 84 |
| 12.1.3 | Sektionsmodel | 87 |
| 12.1.4 | Datamatsimulering af grundligninger | 88 |
| 13 | Datamatsimulering af systemer med fordelte parametre | 89 |
| 13.1 | Fysisk sektionering | 89 |

Kapitel 1

Introduktion til modellering

Formulering af matematiske modeller for fysiske systemer er en essentiel ingeniørdisciplin indenfor såsagt samtlige fagretninger. Ved analyse af processystemer af enhver slags (kemiske, termiske, hydrauliske, mekaniske, elektriske, osv.) er det en forudsætning at processen kan beskrives på en tilgængelig matematisk form, f.eks. ved et sæt af sammenhørende differentiaalligninger. Derfor er kendskab til generelle modelleringsmetoder et “must” for enhver god ingeniør.

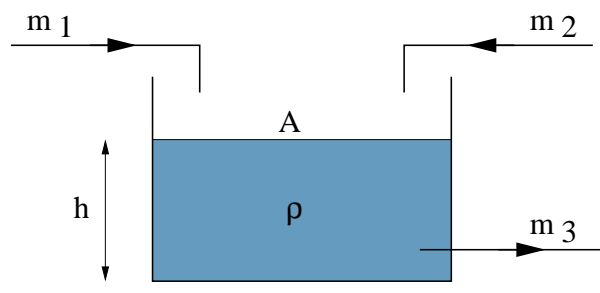
Ordet model bliver anvendt i mange sammenhænge, tænk f.eks. arkitekters bygningsmodeller og løsningsmodeller som beskriver en fremgangsmåde. I denne note vil vi anvende modelbegrebet til at beskrive sammenhænge mellem et fysisk systems variable så modellen kan bruges til design af regulatorer og simulering.

1.1 Modelbegreber

Da modeller anvendes meget bredt forekommer modeller også på mange former. Vi vil her beskrive de vigtigste af disse modeltyper og den terminologi, der der bliver anvendt sammen med dem.

Terminologien hænger sammen med anvendelsen af modellen og grænsefladerne det system eller problem, der skal modelleres.

Vandkareksempel



Figur 1.1: Vandkar med 2 flow ind og 1 flow ud.

| Reguleringstermer | Modeltermer | Matematiktermer |
|-------------------|-------------|-------------------------|
| forstyrrelse | input | fri, uafhængig variabel |
| belastning | input | fri, uafhængig variabel |
| styreinput | input | fri, uafhængig variabel |
| output | output | afhængig variabel |
| parameter | parameter | parameter |
| tilstand | tilstand | afhængig variabel |

Tabel 1.1: *Klassifikation af termer.*

Vandhøjden i karret på figur 1.1 kan beskrives med differentialligningen

$$\frac{dh(t)}{dt} = (m_1(t) + m_2(t) - m_3(t)) \frac{1}{\rho A}$$

Massefylden ρ og tværsnitsarealet A vil vi normalt opfatte som parametre i modellen, d.v.s. størrelser som vi regner for konstante.

Fra et modelmæssigt synspunkt er $m_1(t)$, $m_2(t)$ og $m_3(t)$ input til modellen og $h(t)$ er et output.

Fra et reguleringssynspunkt kan de tre flow afhængigt af opgaven optræde i forskellige roller. Hvis for eksempel $m_1(t)$ kan styres fra en regulator vil dette være styrbart input og hvis de to andre flow er bestemt af andre processer vil disse kunne opfattes som forstyrrelser.

I en anden situation hvor $m_1(t)$ og $m_2(t)$ er bestemt af andre dele af produktionen kunne $m_3(t)$ være styreinput, mens $m_1(t)$ og $m_2(t)$ er forstyrrelser til regulatoren. Man kan ligeledes forestille sig en situation hvor f.eks. m_1 er konstant. Man vil da kunne vælge at opfatte dette flow som en parameter i modellen.

Endelig vil man også kunne forestille sig en opstilling hvor flowet ud af karret simpelthen er bestemt af vandhøjden. I denne situation vil flowet $m_3(t)$ være at opfattes som en intern variabel i modellen og kunne eventuelt elimineres i modelligningen.

1.1.1 Modeltyper

Ofte anvendes i reguleringssammenhæng lineære modeller af endelig orden. Disse modeller har egenskaber som er let fortolkelige i både tids- og frekvensdomæne, f.eks. er begreber som *tidskonstant*, *stigetid*, *pol*, *båndbredde* etc. kun veldefinerede for lineære systemer af endelig orden. Ligeledes er en række metoder til analyse og design af reguleringssystemer knyttet til disse modeller.

En model med input $u(t)$ og output $y(t)$ er lineær hvis den overholder superpositionsprincippet, d.v.s. hvis input $u_1(t)$ giver output $y_1(t)$ og input $u_2(t)$ giver output $y_2(t)$ så giver input $u_1(t) + u_2(t)$ giver output $y_1(t) + y_2(t)$. Et lineært system vil ligeledes overholde proportionalitet, d.v.s. at input $c * u_1(t)$ giver output $c * y_1(t)$ hvor c er en konstant.

En differentialligning af formen

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + \dots + b_2 u^{(2)}(t) + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

hvor $y^{(n)}(t)$ og $u^{(n)}(t)$ er de n 'te tidsafledede af output $y(t)$ henholdsvis inputtet $u(t)$ opfylder disse principper og udgør et lineært system af n 'te orden.

Fra denne differentialligning kan let bestemmes en overføringsfunktion i Laplace domæne

$$G(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_2 s^2 + b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0} \quad (1.1)$$

Et lineært system af n 'orden kan skrives på tilstandsformen

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.2)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.3)$$

hvor $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbf{R}^{p \times m}$, hvor n er systemets orden m er antallet af inputs og p er antallet af outputs. I denne beskrivelse indgår der altså udover input og output også tilstandsvektoren x . Valget af input og output hænger sammen med systemets grænseflader og når de er valgt vil input outputmodellen være givet. Deimod er der nogen frihed i valg af tilstandsvektoren x . I denne note vil tilstandsvariable som regel naturligt være de størrelser der opstilles fysiske ligninger for, men nye variable, i et lineært system linearkombinationer af x , kan også være gyldige tilstandsvariable. Med en matriks $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ af fuld rang kan man således lave en tilstands transformation og opnå en ækvivalent tilstandsbeskrivelse.

$$\xi = Tx \Rightarrow \dot{\xi} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAT^{-1}\xi + TBu \quad (1.4)$$

$$y = Cx + Du = CT^{-1}\xi + Du \quad (1.5)$$

Eller med $F = TAT^{-1}$, $G = TB$, $H = CT^{-1}$, $J = D$

$$\dot{\xi} = F\xi + Gu \quad (1.6)$$

$$y = H\xi + Ju \quad (1.7)$$

Eksempel: Single input, single output eksempel Ete velkendt eksempel er et system til positionsregulering drevet af en permanent magnet DC-motor. Vi vil betragte en simplificeret model hvor der ses bort fra både induktansen og ikke lineære effekter. Ligninger opskrives til at bestemme ankerstrøm i , moment fra elektromagnetiske kræfter τ_m og friktion (viskos friktion) τ_f

$$i = (u - k\omega)/R \quad (1.8)$$

$$\tau_m = ki \quad (1.9)$$

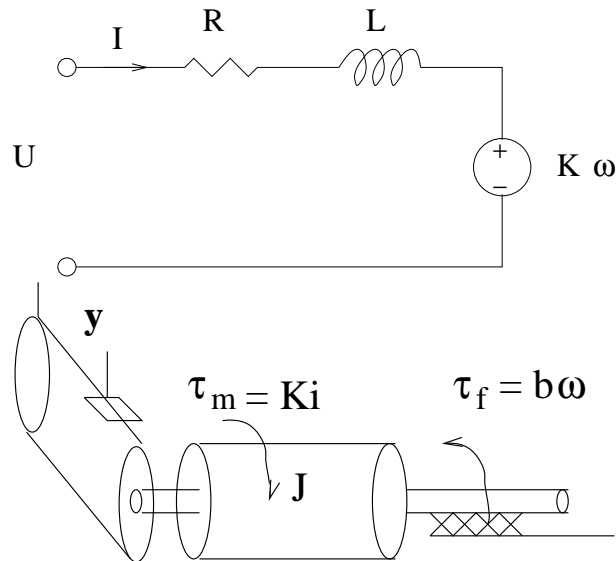
$$\tau_f = b * \omega \quad (1.10)$$

R er ankermodstand k er motor konstant og b en friktions konstant. Vi kan nu opskrive en bevægelsesligning for vinkelhastighed

$$\dot{\omega} = (\tau_m - b\omega)/J = -\frac{Rb + k^2}{RJ}\omega + \frac{k}{RJ}u \quad (1.11)$$

hvor J er kombineret inertimoment for motorakslen kombineret med elementer for den translatoriske bevægelse omsat til akslen. Vi vil også opskrive en ligning for vinklen θ og positionen y

$$\dot{\theta} = \omega \quad (1.12)$$



Figur 1.2: El. and mek. ækvivalent for DC motor

$$y = r\theta \quad (1.13)$$

Vi kan skrive disse ligninger på tilstandsform idet vi definerer tilstandsvektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

dette kan også skrives som

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{Rb+k^2}{RJ} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{RJ} \end{bmatrix} u(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}u(t) \quad (1.15)$$

$$y(t) = [r \ 0] \mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \quad (1.16)$$

Vi vil nu se at vi simpelt kan vælge en anden tilstandsrepræsentation. Vi kan f.eks. vælge hastighed og position som tilstandsvariable. Vi kalder tilstandsvektoren ξ , $\xi_1 = \dot{\mathbf{y}}$, $\xi_2 = \mathbf{y}$ vi finder

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad \xi = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Med det nye valg af tilstandsvariable får vi systemmatricerne \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D}

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\xi + \mathbf{D}u \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(\mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u) = \mathbf{TFT}^{-1}\xi + \mathbf{TG}u \quad (1.19)$$

$$y = \mathbf{HT}^{-1}\xi + Ju \quad (1.20)$$

eller

$$\mathbf{A} = \mathbf{TFT}^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{TG}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{HT}^{-1}, \quad \mathbf{D} = J \quad (1.21)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{Rb+k^2}{RJ} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{kr}{RJ} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [0 \ 1] \quad \mathbf{D} = 0 \quad (1.22)$$

Man kan bestemme en overføringsfunktion (en matriks hvis der er flere input og output) ved at Laplace-transformere tilstandsligningerne

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow X(s) = (SI - A)^{-1}BU(s) + (SI - A)^{-1}x(0) \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

Ligningerne kan løses med $x(0) = 0$ og give

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (1.25)$$

med overføringsfunktionen

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.26)$$

Begge disse beskrivelser kan anvendes til såvel SISO (Single Input Single Output) som MIMO (Multiple Input Multiple Output) systemer. Tilstandsform viser sig dog ofte at være nemmere at håndtere for MIMO systemer.

De to ovennævnte beskrivelser kan bringes til også at beskrive systemer med tidsforsinkelser ved simpelthen at anvende tidsforsinkede inputs. Det bemærkes at selvom systemer med tidsforsinkelser kan være lineære er en del af det analyse og designapparat, der er udviklet ikke direkte anvendeligt for systemer med tidsforsinkelser, f.eks. får et system med tidsforsinkelse uendelig mange poler og nulpunkter. Man vælger derfor undertiden at tilnærme en tidsforsinkelse med et antal poler og nulpunkter f.eks. ved en Padé tilnærmelse (se f.eks. [?]). Bemærk dog at det er relativt enkelt at tegne Bode-plot af systemer med tidsforsinkelse, og det er derfor ligeledes enkelt at anvende designmetoder baseret på Bode-plot på systemer med tidsforsinkelse. Bemærk ligeledes, at tidsforsinkelser er enkle at håndtere i en diskret tids beskrivelse. En tidsforsinkelse på k samples svarer således til en overføringsfunktion på z^{-k} .

Systemer med fordelte parametre, d.v.s. systemer der beskrives af partielle differentialligninger er ligeledes lineære hvis koefficienterne til de partielle afledede er konstante. Et eksempel på et lineært fordelt parametersystem

$$a_{20} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} + a_{11} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t \partial x} + a_{02} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} + a_{10} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} + a_{01} \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} + a_{00} y(t, x) = bu(t, x) \quad (1.27)$$

Bemærk at lignings systemet kan være i flere variable end x og t , der kan være højere afledte i y og u . Systemer i fordelte parametre kan ligeledes opskrives som flere sammenhørende partielle differentialligninger.

Fælles for alle lineære systemer er at det er muligt at anvende Laplace transformation til analyse af deres egenskaber. For systemer beskrevet med ordinære differentialligninger resulterer dette i overføringsfunktioner givet som brudne rationelle brøker. Det vil sige at de karakteriseres alene af poler, nulpunkter og forstærkning. For systemer med fordelte parametre vil der ofte forekomme overføringsfunktioner der indeholder andre funktioner end polynomier i s i tæller og nævner, hvilket begrænser deres anvendelse.

Systemer der ikke er lineære kan generelt ikke analyseres ved anvendelse af Laplace transformation og en fuldstændig opskrift på hvorledes ikke lineære systemer analyseres og reguleres er vanskelig. Nogle ikke lineære systemer kan med fordel analyseres ved at opdele dem i en dynamisk lineær del og en statisk ikke lineær del, hvilket simpelt kan implementeres i eksempelvis Simulink. En sådan opdeling har dannet grundlag for Hammerstein og Wiener modeller

som ligger bag en del analysearbejde. Denne opdeling kan endvidere danne grundlag for '1. harmoniske analyse', som relativt simpelt kan forudsige frekvens og amplitude af eventuelle limitcycles i lukket sløjfe systemer.

I nogle systemer er de ulineære fænomener så integreret i dynamikken, at ovennævnte opdeling bliver unaturlig, en ikke lineær model med koncentrerede parametre som svarer til input output formen vil være

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n y}{dt^n}, \dots, y, \frac{d^n u}{dt^n}, \dots, u\right) = 0 \quad y = \mathcal{H}(x, u) \quad (1.28)$$

hvor $\mathcal{F}()$ er en ulineær funktion af input u , output y og deres afledede med hensyn til tiden.

Ofte vil opstilling af modeller dog naturligt indeholde fysiske variable, som ikke er input eller output. Disse kan være kandidater til valg som tilstandsvariable og ofte vil man kunne skrive det ulineære system om til formen

$$M(x) \frac{dx}{dt} = F(x, u) \quad (1.29)$$

$$y = H(x, u) \quad (1.30)$$

$\mathcal{H}()$ og $\mathcal{H}()$ er vektorfunktioner af tilstandsvektoren x og inputvektoren u . En model af denne form vil kunne danne grundlag for simulering i Matlab eller andre simuleringsværktøjer, da der findes differentiaalligningslødere som direkte anvender denne form. I mangesystemer bliver $M(x)$ en enhedsmatrix eller ligningerne kan løses med hensyn til $\frac{dx}{dt}$ så ligningerne kan skrives på formen

$$\frac{dx}{dt} = F(x, u) \quad (1.31)$$

$$y = H(x, u) \quad (1.32)$$

Dette er en ikke lineær tilstandsligning i analogi til den lineære tilstandsligning 1.2 Det vil være denne form mange differentiaalligningslødere går ud fra. I matlab findes der f.eks. en hel familie af lødere til den ovennævnte ligningstype, 'Ordinary Differential Equation - ODE'.

Undertiden vil man ikke kunne reducere de fundne systemligninger til alene af omfatte differentiaalligninger, idet der også kan være algebraiske ligninger som ikke kan elimineres. Ligningssystemet får så formen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, z, u) \\ P(x, z, u) &= 0 \\ y &= H(x, z, u) \end{aligned}$$

Der er specielle problemer forbundet med løsning af denne type, differential algebraiske ligning ('Differential Algebraic Equation').

Direkte anvendelse af ikke lineære modeller til regulering er en problemstilling som har været genstand for en omfattende forskningsindsats i mange år. Et af resultaterne tager

udgangspunkt i et ikke lineært system på formen

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, u) + G(x)u \\ y &= H(x)\end{aligned}$$

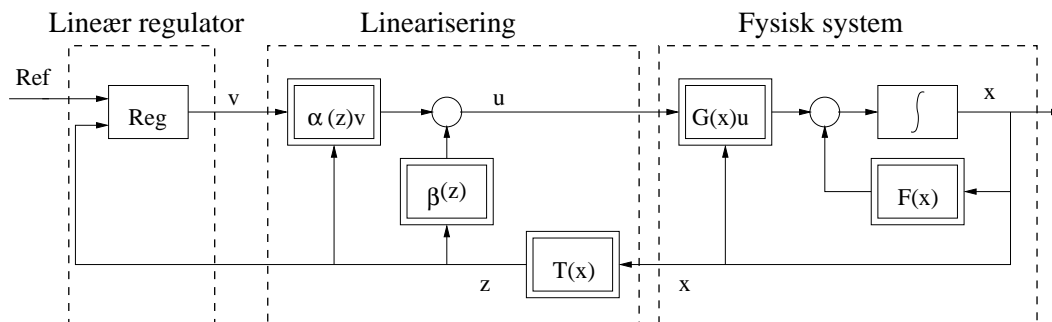
Et sådan system er det i visse tilfælde muligt med en koordinattransformation, $z = T(x)$, at skrive på formen

$$\frac{dz}{dt} = Az + B\beta^{-1}(z)(u - \alpha(z))$$

hvor A og B er konstante matricer. Ved at indføre

$$v = \beta^{-1}(z)(u - \alpha(z)) \Rightarrow u = \alpha(z) + \beta(z)v$$

Opnås en lineær sammenhæng mellem v og tilstandene z og det er muligt at designe en lineær regulator.



Figur 1.3: *Regulering af ikke lineært system med input-state linearisering.*

På figur 1.3 er skitseret opbygning af et sådant reguleringssystem (input-state linearisering). For at kunne anvende den lineære regulator er det nødvendigt først at konstruere $z = T(x)$ ud fra målinger. På skitsen er det forudsat at man kan måle den oprindelige tilstandsvektor x . Bemærk også at hvis der sættes reference til elementer i den oprindelige tilstandsvektor eller output, som er en funktion af x , skal referencen omregnes til en reference for z . Dette kan simplificeres ved et specielt valg af transformation $z = T(x)$, hvor output indgår i tilstandsvektoren z .

En anden tilgangsvinkel er at tilnærme et ikke lineært system med en lineær model, som beskriver systemets karakteristika tæt på et arbejds punkt. Denne fremgangsmåde er meget anvendt som grundlag for design af regulatorer og vil ofte give gode resultater hvis der er 'bløde' ulineariteter.

De fysiske modeller er normalt et sæt af sammenhørende muligvis partielle og ulineære differentiaalligninger. Ulempen ved sådanne modeller er, at det som oftest er ret tidskrævende at opstille dem. Ofte er man desuden interesseret i en lineær beskrivelse af systemet, f.eks. til lineært regulator design, hvilket betyder at de ulineære differentiaalligninger må lineariseres omkring et arbejds punkt. Fordelen ved en fysisk model er, at man opnår en fysisk forståelse

for systemet, som senere, f.eks. ved regulatordesign, vil være nyttig. Desuden vil der være en strukturel overensstemmelse mellem det fysiske system og den opstillede (evt. lineariserede) model. Hvis modellen skal anvendes i forbindelse med regulering, vil den lineariserede model vise hvilke fysiske størrelser, der er betydende for tidskonstanter, forstærkninger og tidsforsinkelser, samt hvorledes disse ændres i forskellige driftssituationer (arbejds punkter).

Denne note vil omhandle opstilling af modeller baseret på fysiske love.

Ved opstilling af sådanne modeller er det ønskeligt at have en generel procedure, som kan følges hver gang. Følgende fremgangsmetode kunne anvendes:

1. Formålet med modellen specificeres. I forbindelse med reguleringsopgaver arbejder man ofte med to modeller en forholdsvis enkel ofte lineær model til regulatordesign og en mere detaljeret ofte ikke lineær model til simulering med det formål at kunne simulere hvordan en regulator påvirker det ikke lineære system.
2. Systemet virkemåde beskrives, f.eks. grafisk.
3. Systemets grænseflader defineres, dvs. input og output fastlægges.
4. Systemet opdeles i delsystemer og delsystemernes grænseflade defineres.
5. Foreløbige antagelser specificeres. De foreløbige antagelser revideres evt. under pkt. 6.
6. For hvert delsystem anvendes de fysiske love systematisk.
7. Parameterværdierne bestemmes.
8. De enkelte delmodeller evalueres.
9. Den samlede model evalueres/verificeres.

I det efterfølgende gives en kort beskrivelse af punkterne 1 - 5. De efterfølgende kapitler omhandler punkterne 6 og 7. Evaluering af modellerne vil ikke blive omtalt yderligere.

Ved opstilling af en matematisk model for et fysisk system skelnes mellem 2 principielt forskellige metoder; enten kan modellen findes som en **black box** model baseret på en analyse af observationer foretaget på det fysiske system eller modellen kan bestemmes som en **fysisk** model baseret på en systematisk anvendelse af fysiske grundlove.

Black box modeller er ofte simple lineære modeller, hvis fordel er, at de hurtigt kan opstilles. En vigtig disciplin indenfor black box modellering er *systemidentifikation*, hvor parametre i en parametrisk (lineær) model bestemmes udfra målinger således at kvadratfejlen mellem målt og predikteret output minimeres. Black box modellerne har imidlertid 2 væsentlige begrænsninger:

- Den fysiske forståelse af systemet mangler.
- Manglende strukturel overensstemmelse mellem det fysiske system og modellen, f.eks. ved ulineære systemer.

Black box modeller omfatter også ikke lineære modeller som f.eks. neurale netværk, som har den fordel at der ofte kan opnås en fin overensstemmelse mellem modelrespons og måledata. Neurale netværk har dog stadig nogen af de ovenfor nævnte ulemper og ved anvendelse af dem må man være meget opmærksom på ikke at komme udenfor gyldighedsområdet.

1.2 Formål med model.

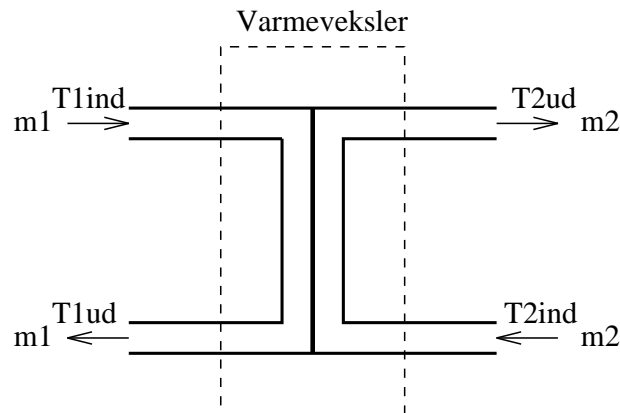
Ved opstilling af en model for et fysisk system er det vigtigt at definere formålet med modellen. For et fysisk system kan der opstilles mange forskellige modeller, som alle kan være 'rigtige', men sigter på forskellige anvendelser. Som et eksempel kan nævnes en varmeveksler. Anvendes denne i et stort system, og ønskes der en dynamisk model af det samlede system til regulator design, indgår varmeveksleren måske som en konstant i de samlede model. Er det derimod en konstruktør, der modellerer varmeveksleren, er han måske interesseret i temperaturen på et givet sted til en given tid med givne begyndelsesbetingelser og vil derfor anvende en matematisk model med ulineære instationære partielle differentialligninger. Begge modeller kan være 'rigtige' for de givne anvendelser. Dermed være sagt, at det er svært at vurdere om en model er 'rigtig', men man kan vurdere, om den kan anvendes til det konkrete formål.

Modellerne der opstilles i denne note vil kunne anvendes til opstilling af kontrolkoncepter og simulering. De modeller der er egnede til opstilling af kontrolkoncepter, er dem der giver systemernes væsentlige dynamiske og ulineære forhold f.eks baseret på en koncentreret parameterbeskrivelse. Alle de opstillede modeller kan anvendes til simulering.

1.3 Systemets virkemåde

En omhyggelig og grundig beskrivelse af systemets komponenter samt dets virkemåde er nødvendig før den matematiske modellering kan påbegyndes. I de allerfleste tilfælde vil det være således, at selve den matematiske model ikke giver nogen yderlig kvalitativ information, dvs. at den matematiske model kun afspejler systembeskrivelsen. Udover selve systembeskrivelsen kan et processtrukturdiagram være til hjælp.

Som et eksempel anvendes modstrømsvarmeveksleren vist på Figur 1.4.



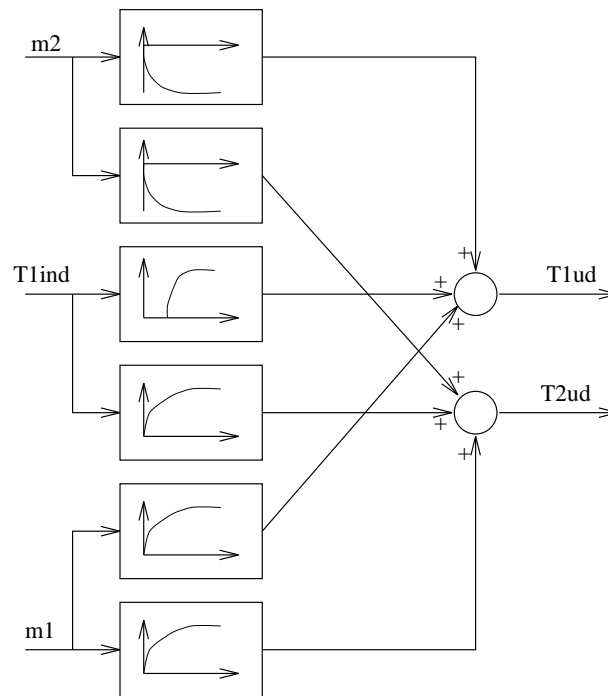
Figur 1.4: *Modstrømsvarmeveksler.*

Et processtrukturdiagram er en grafisk afbildning baseret på blokdiagrammer, hvor blokkene viser grafisk hvorledes variabelen på udgangen opfører sig ved stepinput på indgangen. En blok kan også indeholde en statisk ulinearitet. De typiske dynamiske responsetyper i blokkene er f.eks:

- Første ordens repons.

- Tidsforsinket første ordens repons.
- Højere ordens respons.
- Integralrespons.
- Ren tidsforsinkelse.
- Ustabilitet.

Diagrammet afspejler hvorledes man før selve modelleringen (dvs. opstilling af modelligninger) antager hvor processens dynamik findes. For varmeveksleren er et forslag til processtrukturdiagram vist på Figur 1.5 ($T_{2,ind}$ regnes for konstant). Det bemærkes, at man ved opstilling af et processtrukturdiagram ikke tager stilling til kvantitative størrelser (f.eks. tidskonstanter og forstærkninger), som man gør i et normalt blokdiagram.



Figur 1.5: *Processtrukturdiagram for varmeveksler.*

1.4 Systemets grænseflade

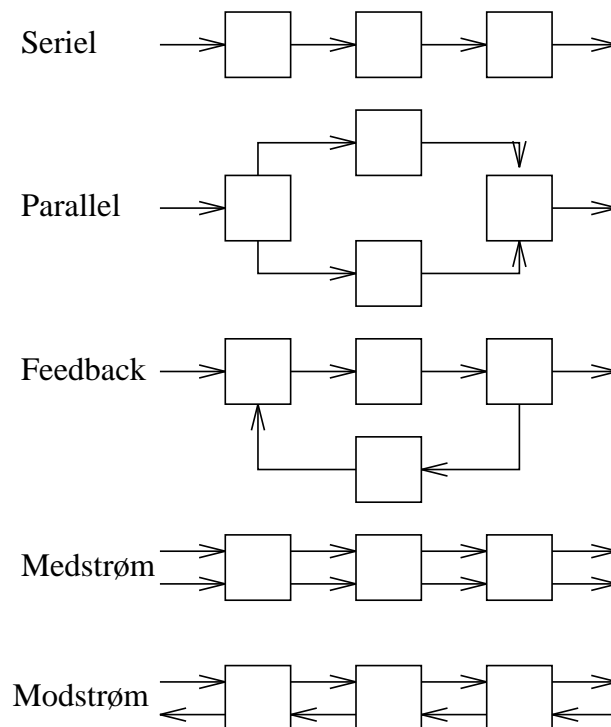
Systemet der skal modelleres skal afgrænses, således at input og output defineres. Denne afgrænsning samt definition af input/output kan tit volde problemer, når der er tale om termiske systemer, for eksempel vælges flow ud af systemet ofte som input. Som et eksempel kan tages en væsketank med et tilløb og et afløb. Tanken ønskes modelleret således at væskehøjden er output (skal måske reguleres). Som modelinput vil man vælge masseflowet ud af tanken og masseflowet ind i tanken, hvilket vil gøre modellen uafhængig af, hvad der eventuelt er placeret i og efter afløbet.

For at undgå forvirring omkring den terminologi, der anvendes i forbindelse med modellering (f.eks. ordene input og output), er der på Tabel 1.1 en oversigt over hvilke termer, der anvendes af procesingeniører (kemi/maskin), systemingeniører og matematikere.

1.5 Opdeling i delsystemer

Det er oftest en fordel at opdele systemet i en række delsystemer, hvor hver enkelt delsystem svarer til en fysisk komponent. For delsystemerne skal grænsefladen (input,output) defineres. Sammenhængen mellem delsystemerne kan opdeles i 5 strukturer, nemlig

- Seriel struktur
- Feedforward (parallel) struktur
- Feedback struktur
- Medstrømsstruktur
- Modstrømsstruktur



Figur 1.6: *Sammenhæng mellem delsystemerne.*

De 5 strukturtyper er skitseret på Figur 1.6. Strukturen kan have betydning hvis der ønskes en simulering af det samlede system.

1.6 Antagelser

Før den matematiske modellering påbegyndes er det nødvendigt at lave en række antagelser. Der kan naturligvis ikke opstilles generelle antagelser, men hyppigt anvendte antagelser for termiske systemer er følgende

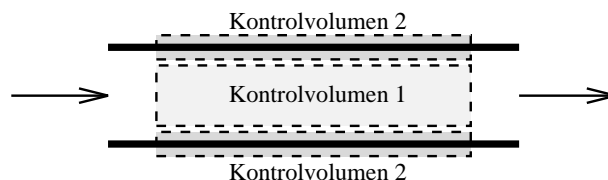
- Parallelt forbundne rør regnes for ens.
- Enhver egenskab er i et rørtværsnit givet ved en værdi. For eksempel kan det antages, at væsketemperaturen i et væskegennemstrømmet rør er den samme over et givet tværsnit.
- Væsker er inkompressible.
- Mætningstilstande antages ofte, selv om dette ikke helt er opfyldt.
- For væsker antages energiindholdet kun at være afhængigt af temperaturen.
- Friktionsfaktorer er konstante.

For mekaniske systemer kan følgende hyppigt anvendte antagelser nævnes

- Systemet kan deles op i et antal ideelle elementer
- Legemer (free bodies) som kan regnes for stive
- Fjedre regnes for masseløse og eventuelt lineære
- Friktionsled som ligeledes er masseløse eventuelt lineære.

1.7 Kontrolvolumener og free bodies

Ud over de nævnte antagelser sker der ved modellering med koncentrerede parametre en antagelse ved indlægning af kontrolvolumener. I denne metode indlægges der i hvert delsystem et antal sammenhængende kontrolvolumener. Et kontrolvolumen vælges således, at alle variable kan tilnærmes som værende ens overalt i volumenet (ens i sted, men ikke i tid). Som et eksempel på indlæggelse af kontrolvolumener er på Figur 1.7 vist et væskegennemstrømmet rør.



Figur 1.7: *Eksempel på indlæggelse af kontrolvolumener. Væskegennemstrømmet rør.*

På figuren er der indlagt to sammenhængende kontrolvolumener. I det ene volumen, som omfatter væsken, regnes med at temperaturen, massefylden og trykket er ens overalt. Det andet kontrolvolumen er indlagt omkring rørvæggen, her regnes der ligeledes med ens egenskaber, hvilket eksempelvis vil sige ens temperatur. Det vil gælde at flere kontrolvolumener vil give

en nøjagtigere model (uendeligt mange giver en model beskrevet med partielle differential-ligninger), men denne forøgelse af modelordenen vil ikke nødvendigvis være at foretrække, hvis modellen skal anvendes til regulatordesign.

Mekaniske systemer har ofte en naturlig opdeling i elementer, som kan regnes for stive. Et sådant element har en given position og orientering i et tredimensionelt rum. Modeldannelsen vil derfor ofte bestå i at opskrive bevægelsesligninger udtrykt ved Newtons love. Generelt vil dette være 3 ligninger for translation og 3 ligninger for rotation. Da bevægelsen for de fleste systemer er begrænset til en eller nogen få frihedsgrader vil opstilling af den dynamiske model dog som regel kun have nogen få frihedsgrader. Den vanskeligste del af modeldannelsen for mekaniske systemer vil ofte være at finde udtryk for de kræfter som binder deelementerne sammen.

Kapitel 2

DC motoren

Elektromotorer findes i et utal af typer til forskellige anvendelser. Formålet med dette kapitel er som et eksempel at opstille en dynamisk model for en DC-motor med permanent magnet og vise eksempler på hvorledes de vigtigste parametre kan bestemmes dels ud fra datablad-soplysninger og dels ud fra forsøg. Vægten vil blive lagt på at bestemme parametre ud fra dedikerede forsøg. I kurset 'Eksperimentel modeldannelse og simulering' bestemmes parametre ud fra en anden type forsøg hvor man ved et enkelt eksperiment søger at excitere systemet på en sådan måde at alle parametre i den dynamiske model kan bestemmes.

2.1 Model af DC motoren

Fra kurset 'Elektriske maskiner' kender de fleste af jer modellen for en permanent magnet DC-motor. For D-studerende gives her en kort introduktion til modellen.

De kræfter der genererer motorens moment fremkommer ved at man bevæger en leder i et magnetisk felt

$$d\mathbf{f} = i(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

hvor $d\mathbf{f}$ er kraften på det infinitesimale lederstykke $d\mathbf{l}$ der befinder sig i et magnetfelt med fluxtætheden \mathbf{B} og gennemløbes af strømmen i . For en roterende DC-motor vil ledernes orientering overalt være tilnærmelsesvis vinkelret på magnetfeltet. Det samlede moment (engelsk: torque, symbol ofte τ) udviklet i motoren der gennemløbes af strømmen i_a vil derfor være givet ved

$$\tau_m = i_a l B r = K i_a \quad (2.2)$$

hvor l er den samlede længde af vindingerne i magnetfeltet (ankervindingen) og r er den (middel)radius hvor vindingerne er placeret. K benævnes ofte momentkonstanten. Når rotoren har drejet 180° vil lederne møde magnetfeltet i modsat retning og vil derfor yde moment i modsat omdrejningsretning. For at få motoren til at rotere rundt i samme retning bruger man derfor en kommutator som sørger for at omkoble vindinger så de her møder magnetfeltet med modsat strømretning. Kommutatoren bruges samtidig til at overføre strømmen fra stator til rotor.

Når en leder bevæges i et magnetfelt fremkommer der en elektromotorisk kraft givet ved

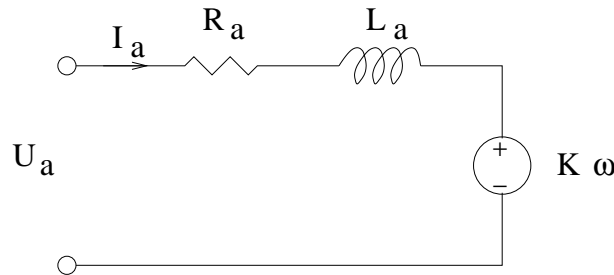
$$de = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (2.3)$$

hvor de er den elektromotoriske kraft introduceret i $d\mathbf{l}$ og \mathbf{v} er hastighedsvektoren. For hele DC-motoren kan dette integreres op til

$$e_m = \omega r B l = K \omega \quad (2.4)$$

hvor ω er motorakslens vinkelhastighed. K som er den samme konstant som introduceredes i momentligningen.

For DC-motoren kan følgende elektriske ækvivalent opstilles:

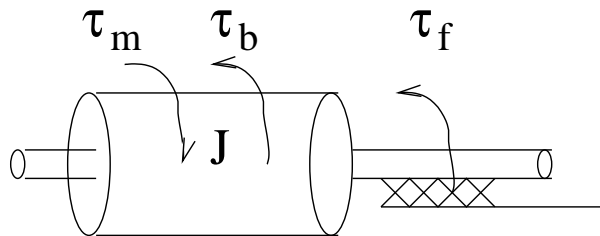


Figur 2.1: Elektrisk ækvivalent af DC-motor.

På figur 2.1 er R_a den Ohmske modstand i viklingen. L_a er viklingens selvinduktion. U_a er den påtrykte ankerspænding. Dette giver ligningen

$$U_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K \omega \quad (2.5)$$

Den mekaniske del af DC-motoren kan ækvivaleres med



Figur 2.2: Ækvivalent for rotation af motorens aksel.

På figuren er J motorakslens inertimoment, τ_f er det samlede friktionsmoment og τ_b er momentet fra den ydre belastning. Ved at anvende impulsmomentsætningen fås ligningen

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau_m - \tau_b - \tau_f(\omega, \tau_m - \tau_b) \quad (2.6)$$

Friktionen τ_f er en kompliceret funktion, som der stadig forskes i. Ofte bruges en enkel model bestående af tre led: Et lineært led proportionalt med ω . Dette er ækvivalent med den friktion der forekommer i væsker med laminar flow og kaldes væskefriktion eller viskos friktion. Et led kaldet tørfriktion eller Coulomb friktion er bestemt af normalkraften i lejerne og er ved rotation kun afhængigt af omdrejningshastighedens fortegn. Et sidste led er stiktion som kun

optræder når motoren står stille og ved meget små hastigheder, og tager højde for at der skal et større moment til at starte rotationen end til at køre med en hastighed der nærmer sig nul. Denne model er en statisk model og skal anvendes med forsigtighed da fænomenerne omkring hastigheden nul i realiteten er dynamiske af natur. Det samlede udtryk for friktionsmomentet bliver nu

$$\tau_f = \begin{cases} b\omega + \text{sign}(\omega)\tau_c & \text{if } \omega \neq 0 \\ \tau_m - \tau_b & \text{if } (\omega = 0) \& (\text{abs}(\tau_m - \tau_b) \leq (\tau_c + \tau_s)) \\ (\tau_c + \tau_s)\text{sign}(\tau_m - \tau_b) & \text{if } (\omega = 0) \& (\text{abs}(\tau_m - \tau_b) > (\tau_c + \tau_s)) \end{cases} \quad (2.7)$$

hvor τ_s er stiktionsmomentet. τ_s kan forklare det ekstra startmoment der skal til for at få motoren til at dreje når den har holdt stille, men er vanskeligt at bruge i reguleringsmodeller og simuleringssmodeller.

2.2 Bestemmelse af parametre

Den model der blev opstillet for DC-motoren ovenfor har parametrene R_a , L_a , K , J , b , τ_c og τ_s . Spørgsmålet er nu om disse parametre kan bestemmes ved laboratorieforsøg. Typisk er R_a , L_a , K og J opgivet i databladet for motoren. En del af parametrene kan f.eks. være opgivet i form af belastningskarakteristikker hvor omdrejningshastigheden og ankerstrømmen angives som funktion af belastningsmomentet (hvilke parametre vil man kunne bestemme fra en sådan karakteristisk ?)

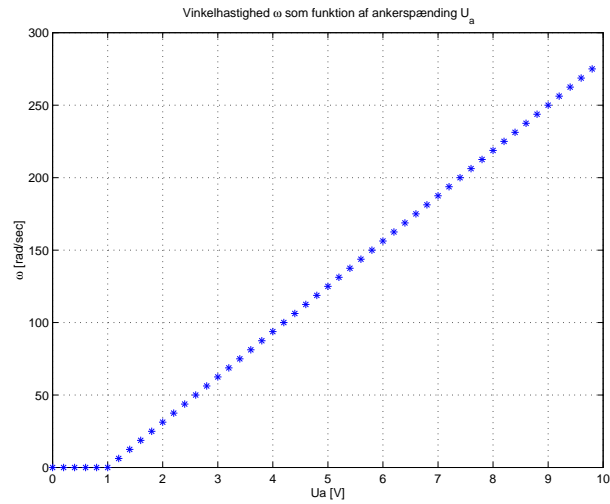
2.2.1 Eksperimentel bestemmelse af K , R_a , τ_c og b

Som alternativ, kontrol eller supplement til databladsoplysninger kan motordata bestemmes ved eksperimenter. Man kan eksempelvis selv måle belastningskarakteristikker med varierende belastningsmoment. Man kan dog også bestemme parametre uden at skulle have en kontrolleret belastning. Vi vil her beskrive en metode hvor parametrene bestemmes ud fra et eksperiment hvor den stationære vinkelhastighed og ankerstrøm måles ved forskellige anker-spændinger. Med den model der er udledt ovenfor vil kurverne få et forløb som vist på figur 2.3 og 2.4

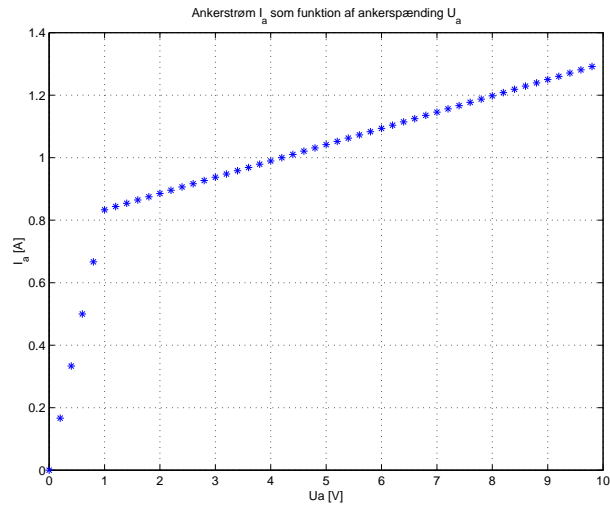
Det ses at når spændingen er stor nok til at overvinde Coulomb friktionen beskriver ω og i_a rette linier som funktioner af u_a . I praksis vil der naturligvis være afvigelser herfra og for at få en anvendelig model kan man lægge en ret linie ind i det spændingsområde modellen (motoren) skal bruges. Man kan bruge to sæt sammenhørende værdier af u_a , ω i_a τ_b og skrive den stationære model op

$$\begin{aligned} \omega_1 K + i_{a1} R_a &= u_{a1} \\ i_{a1} K - \tau_c - \omega_1 b &= \tau_{b1} \\ \omega_2 K + i_{a2} R_a &= u_{a2} \\ i_{a2} K - \tau_c - \omega_2 b &= \tau_{b2} \end{aligned}$$

Disse ligninger kan løses med hensyn til de 4 parametre K , R_a , τ_c og b idet de udgør et lineært ligningssystem. Når motoren ikke belastes men spændingen varieres bliver $\tau_{b1} = \tau_{b2} = 0$. I



Figur 2.3: Motorens vinkelhastighed som funktion af ankerspænding.



Figur 2.4: Motorens ankerstrøm som funktion af ankerspænding.

et belastningsforsøg hvor spændingen fastholdes men belastningsmomentet varieres kan man bruge samme ligninger men med $\tau_b \neq 0$

2.2.2 Bestemmelse af R_a og L_a

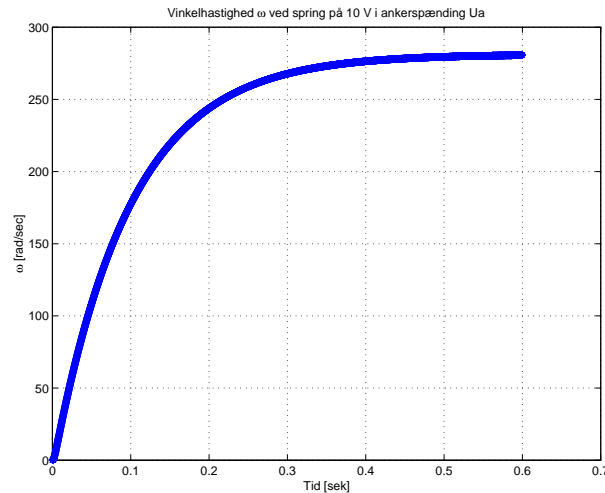
Fastholdes rotoren giver ligning 2.5 en ligning til bestemmelse af R_a og L_a . Ved at påtrykke et spring i ankerspændingen U_a fås et opvoksningsforløb for strømmen med en tidskonstant på L_a/R_a og en stationær værdi på $i_a = U_a/R_a$ herved bestemmes R_a og L_a . bemærk at R_a på grund af spændingsfald i kommutatoren kan være ulineær. Der kan derfor være grund til at måle ved flere spændingsniveauer. Ligeledes kan spændingsfaldet ved kommutering være afhængigt af om motoren roterer eller ikke. Da motoren skal bruges kørende kan det også være en mulighed kun at bruge dette eksperiment til at bestemme L_a

2.2.3 Bestemmelse af motorens inertimoment J

Ved at lave spring i u_a vil man kunne registrere responserne på ω og i_a . Sådanne spring vil se ud som vist på figurerne 2.5 og 2.6 (beregnet med $J = 8.0 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}$, $L_a = 2.4 \text{ mH}$). Selv om vores model er af orden 2 (en orden for selvinduktionen og en orden for inertimomentet) kan det ses at de er domineret af en tidskonstant. Det skyldes at den elektriske tidskonstant L_a/R_a i dette tilfælde (som mange andre) er meget mindre end den mekaniske så man med god tilnærmelse kan se bort fra L_a i modellen. Fra begge kurver vil man kunne aflæse den kombinerede tidskonstant man får, hvis man regner overføringsfunktionen uden L_a .

$$\tau = \frac{R_a J}{R_a b + K^2} \quad (2.8)$$

Herudfra kan man bestemme J når de andre parametre er kendt



Figur 2.5: Motorens vinkelhastighed efter spring i ankerspænding.

En alternativ måde at beregne J er at udføre forsøg hvor motorens terminaler er afbrudt kan man måle egenskaberne af motorens roterende system, som så er bestemt af følgende differentialligning

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\tau_f(\omega, \tau_m - \tau_b) \quad (2.9)$$

Hvis man nu sætter rotoren til at rotere med positivt omløbstal vil friktionen være bestemt så differentialligningen bliver

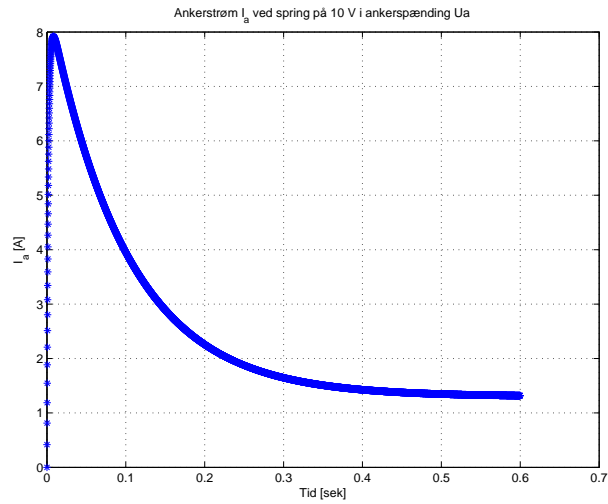
$$J \frac{d\omega}{dt} = b\omega - \tau_c \quad (2.10)$$

Man kan nu måle den mekaniske tidskonstant ved at betragte udløbskurven se fig 2.7:

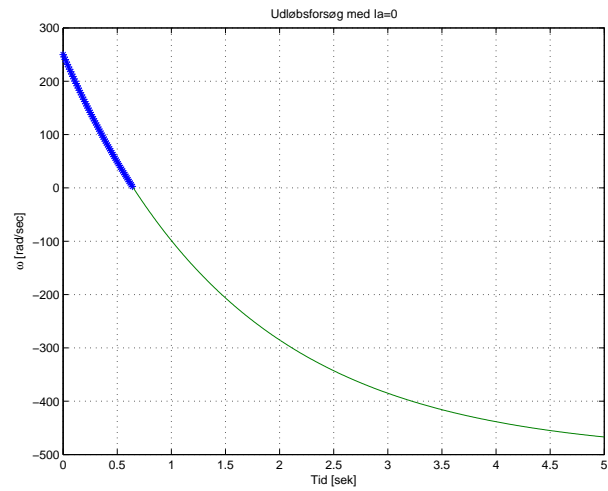
$$\omega(t) = (\omega_0 + \frac{\tau_c}{b}) \exp(-\frac{t}{\tau_{mek}}) - \frac{\tau_c}{b} \quad (2.11)$$

hvor

$$\tau_{mek} = \frac{J}{b} \quad (2.12)$$



Figur 2.6: *Motorens ankerstrøm efter spring i ankerspænding.*



Figur 2.7: *Motorens vinkelhastighed ved udløb når motorstrømmen er afbrudt.*

Ligning 2.11 vil selvfølgelig kun gælde for $\omega > 0$, når omløbshastigheden bliver nul stopper motoren. Hvis man gentager udløbsforsøget hvor inertimomentet er forøget med en kendt størrelse J_1 vil det være muligt at bestemme flere af de indgående konstanter

$$\tau_1 = \frac{J + J_1}{b} \quad (2.13)$$

eller

$$J = J_1 \frac{\tau_{mek}}{\tau_1 - \tau_{mek}} \quad (2.14)$$

$$b = \frac{J_1}{\tau_1 - \tau_{mek}} \quad (2.15)$$

Kapitel 3

Den børsteløse DC-motor

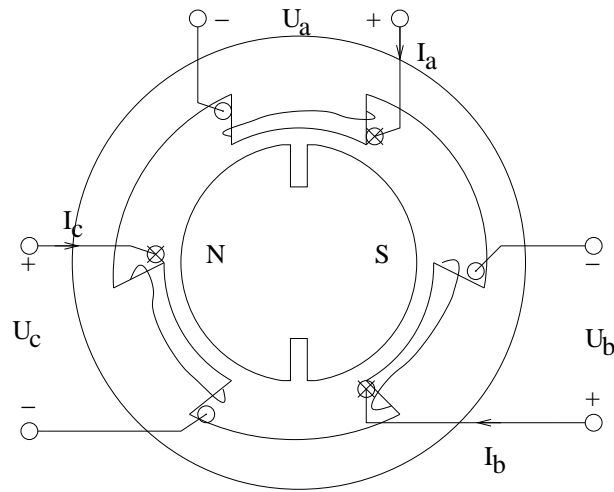
I en DC-motor leverer en permanent magnet eller en vikling på stator et konstant felt. På rotoren sidder der viklinger, som påvirkes af et moment når de i magnetfeltet gennemløbes af en strøm. For at overføre strømmen til rotoren og for at kunne opretholde et moment og en rotation i en bestemt omdrejningsretning bruges en kommutator med slæbesko på motorakslen til at koble viklingerne ind med den rigtige strømretning ved rotorvinkler, hvor magnetfeltets orientering kombineret med en given strømretning giver et moment i den ønskede retning. Kommutteringen sker her mekanisk og giver sammtidig en overføring af strøm til en roterende aksel. DC-motoren er simpel at anvende i servostyringer, idet der ydes et moment der tilnærmelsesvis er proportionalt med den strøm der føres til kommutatoren. Momentets retning ændres helt enkelt ved at ændre strømretningen. Til gengæld er kommutatoren en sårbar og veligholdelseskrevende komponent, idet strømmen overføres via kul/børster som slides, og et alternativ kan være en børsteløs DC-motor, hvor kommutteringen sker elektronisk. Når man skal lave elektronisk kommuttering er det en fordel, hvis man samtidig kan slippe for det problem at skulle overføre strømmen til en roterende aksel.

3.0.4 Princip for den børsteløse DC-motor

En børsteløs DC-motor er motor hvor viklingen er placeret på stator. Rotor er en permanent magnet. Man har altså i forhold til en permanent magnet DC-motor ombyttet placeringen af vikling og permanent magnet. Se principskitzen figur 3.1

Motoren fungerer ved at man påtrykker en spænding på en vinding der kan give rotoren et moment. På figur 3.1 vil der i den viste rotorposition fås et moment med uret ved at sætte en positiv strøm på vikling a, idet der så vil være sydpol mod rotoren som tiltrækker rotorens nordpol. Denne tiltrækning vil være tilstede indtil rotorens nordpol dækker hele statorpol a (idet statorens tappe og mellemrum hver fylder $\pi/3$ vil det ske ved en vinkeldrejning på $\pi/6$ regnet fra den viste position). I den viste vinkel vil der ikke fås noget moment ved at sende strøm gennem de andre viklinger. Fra vinklen $\pi/6$ til $3\pi/6$ vil sydpolen tiltrækkes og nordpolen frastødes pol c når der sendes negativ strøm gennem vikling c. Fra $3\pi/6$ til $5\pi/6$ opnås positivt moment med positiv strøm gennem vikling b o.s.v. Bemærk at rotoren er udformet så nordpol og sydpol udgør tilnærmelsesvis hver sin halvcylinder. Der vil også kunne laves en udformning med 6 viklinger på stator og en rotor hvor sydpol og nordpol hver fylder $\pi/2$.

For at påvirke motoren med et kontinuerligt moment skal man koble strømme ind på de



Figur 3.1: *Principskitse af en børsteløs dc-motor.*

enkelte viklinger i et mønster som funktion af rotorens vinkel. Man har derfor behov for at måle rotorens position for at kunne foretage denne styring af strømmene korrekt. Der kan anvendes flere principper for denne måling. Nogle fabrikanter måler positionen ved hjælp af et Hall-element, som påvirkes af magnetfeltet fra rotoren. Andre anvender en optisk måling af rotorvinklen.

3.0.5 Idealiseret model for den børsteløse DC-motor

Modellen for motoren kan tage udgangspunkt i samme formler som DC-motoren, nemlig

$$d\mathbf{f} = i(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (3.1)$$

Når lederne i højre side af vikling a som vist på figur 3.1 befinder sig ud for rotorens sydpol og viklingerne i venstre side befinder sig ud for rotorens nordpol vil de kræfter der virker på de to spolehalvdele understøtte hinanden da strømretningen er modsat i de to sider. Hvis B-feltets størrelse er den samme på de to sider bliver den samlede kraft

$$F_a = 2i_a n l B \quad (3.2)$$

hvor B er B-feltets styrke, l er længden af den del af viklingen der ligger i feltet n er antallet af viklinger. Denne kraft vil virke mod venstre på spolerne, svarende til at (reaktions)kraften på rotoren virker mod højre, så det giver et moment på

$$\tau_a = 2i_a n l B r \quad (3.3)$$

hvor r er den afstand viklingen sidder fra omdrejningspunktet.

Ofte udtrykker man kræfter og momenter ved hjælp af ændringen i magnetisk flux Φ gennem viklingen eller ændringen i fluxvindingstallet λ . Fluxvindingstallet for vikling a kan udtrykkes

$$\lambda_a \simeq n\Phi_a = n \int_{flade_a} B dA \simeq 0 \quad (3.4)$$

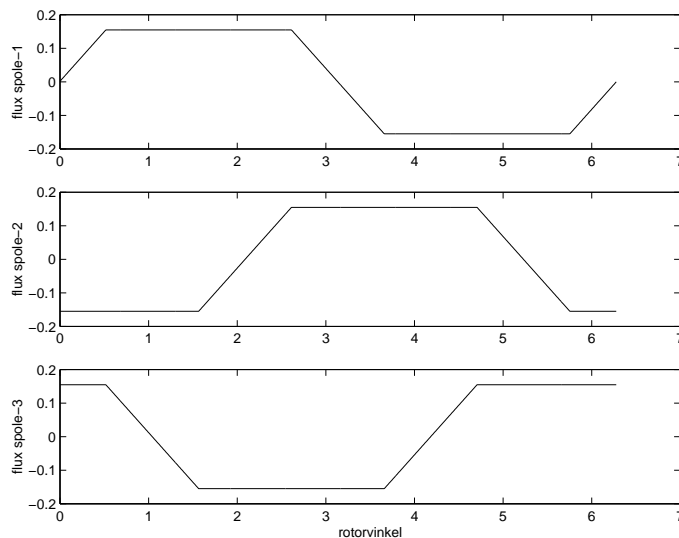
Grunden til \simeq er at de enkelte vindinger er forskudt lidt for hinanden og derfor kan have forskellig flux. Når rotoren drejes ændres fluxen og vi får i situationen på figur 3.1

$$\frac{d\lambda_a}{d\theta} \simeq 2nlBr \quad (3.5)$$

Momentet kan nu (lidt mere generelt) udtrykkes ved

$$\tau_a = \frac{d\lambda_a}{d\theta} i_a \quad (3.6)$$

Rotoren er vist udformet så det tilstræbes at B-feltet er homogent og vinkelret på overfladen af de to rotorhalvdele. Tilnærmet får vi derfor at for en vikling vil λ ændres stykkevis lineært med θ således at den vokser i det vinkelinterval hvor sydpolen forlader viklingen og nordpolen glider ind over viklingen. Tilsvarende aftager λ med voksende θ i det vinkelinterval hvor nordpolen forlader viklingen og sydpolen glider ind over viklingen. Sammenfattende får vi et forløb for λ som funktion af θ for de tre vindinger som vist på figur 3.2



Figur 3.2: Idealiseret forløb af λ som funktion af θ for de 3 viklinger.

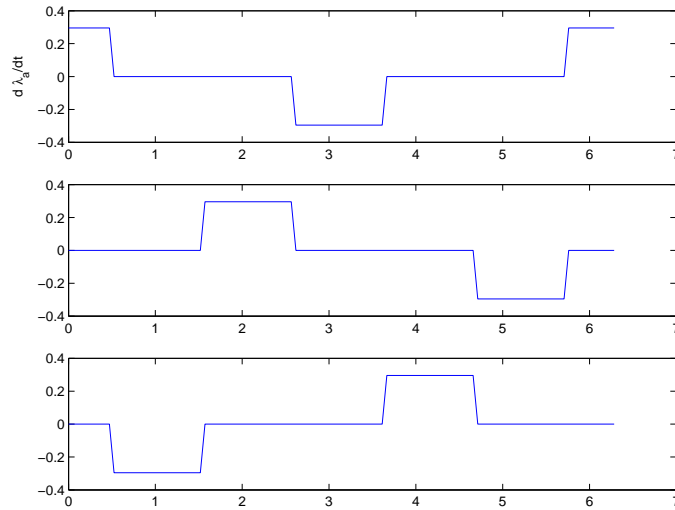
Tilsvarende forløb for $\frac{d\lambda}{d\theta}$ er vist på figur 3.3

I den børsteløse dc-motor optræder også en modelektromotorisk kraft. Denne kan opstilles på vektorform med en komponent for hver vikling. Denne kan bestemmes ved

$$e = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_a(\theta(t))}{dt} \\ \frac{d\lambda_b(\theta(t))}{dt} \\ \frac{d\lambda_c(\theta(t))}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_a}{d\theta} \\ \frac{d\lambda_b}{d\theta} \\ \frac{d\lambda_c}{d\theta} \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\lambda}{d\theta} \omega(t) \quad (3.7)$$

hvor $\frac{d\lambda}{d\theta} = [\frac{d\lambda}{d\theta} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{d\lambda}{d\theta}]^T$ I kredsløbet optræder ligeledes selvinduktion. Når en vikling gennemløbes af en strøm vil de magnetiske feltlinier fra viklingen gå gennem de andre viklinger, og der vil derfor induceres spændinger i disse viklinger. Dette kan beskrives som gensidige induktioner og resulterer i en induktionsmatrix

$$L = \begin{bmatrix} L_s + L_m & -0.5L_m & -0.5L_m \\ -0.5L_m & L_s + L_m & -0.5L_m \\ -0.5L_m & -0.5L_m & L_s + L_m \end{bmatrix} \quad (3.8)$$



Figur 3.3: *Idealiseret forløb af $\frac{d\lambda}{d\theta}$ som funktion af θ for de 3 viklinger.*

hvor de offdiagonale elementer har en faktor -0.5 da feltlinierne og det deraf følgende fluxvindingstal fra en spole deler sig lige mellem de to andre spoler med modsat retning. Hver spole har ligeledes en resistans

$$R = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Der kan nu opskrives kredsløbsligninger ligeledes på matrixform

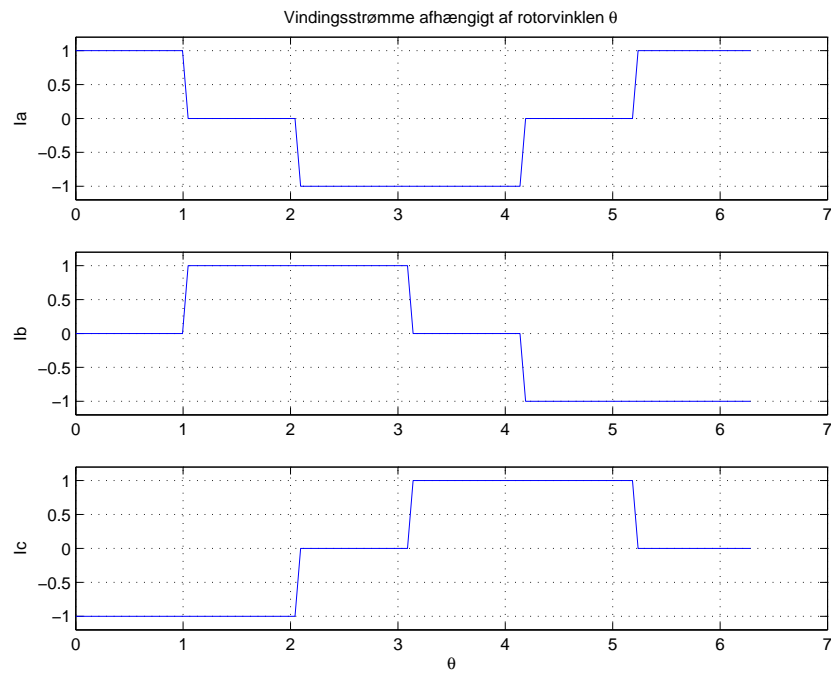
$$U_v = RI_v + L \frac{dI_v}{dt} + \frac{d\lambda}{d\theta} \omega(t) \quad (3.10)$$

$$U_v = \begin{bmatrix} U_a(t) \\ U_b(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} \quad I_v = \begin{bmatrix} I_a(t) \\ I_b(t) \\ I_c(t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.0.6 Styling af den børsteløse DC-motor

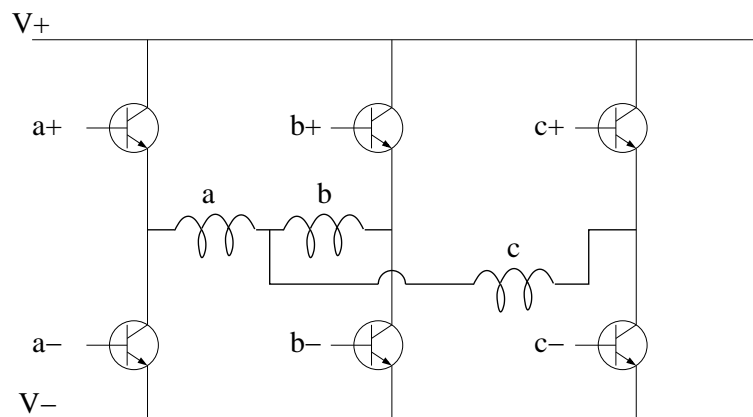
Betrakter man figur 3.3 ses at hvis man ønsker at påtrykke et positivt moment kan dette gøres ved at sende strøm gennem den tre viklinger i et sådant mønster at der går en positiv strøm gennem en vikling med en positiv $\frac{d\lambda}{d\theta}$ eller en negativ strøm gennem en vikling med negativ $\frac{d\lambda}{d\theta}$. Gennem viklinger hvor $\frac{d\lambda}{d\theta} = 0$ kan man lede en vilkårlig strøm uden at det påvirker momentet, disse kan altså bruges til at lukke et kredsløb, så man undgår at skulle have 4 transistorer pr vikling. for hele tiden at påtrykke positivt moment kan man altså bruge den på figur 3.4 viste sammenhæng mellem vinkeldrejning og vinklugsstrøm. Bemærk at hvor de enkelte viklinger bliver koblet ind og ud yder de ingen moment, hvorved der ikke kommer afbrydelser af momenter. I praksis skal indkobling af næste vikling ske lidt tidligere end den forriges udkobling. Ønskes der et negativt moment ganges alle sammenhængene med -1.

For at styre momentets størrelse kan man to muligheder. Enten kan størrelsen af $V+$ $V-$ varieres hvilket giver kontinuert moment, eller også kan man anvende konstante $V+$ $V-$ og



Figur 3.4: *Stømmens afhængighed af θ når positivt moment ønskes.*

anvende pulsbreddemoduleret indkoblingssignal som kombineres med ovennævnte indkoblingsbetingelse



Figur 3.5: *Principskitse for transistorkobling til styring af den børsteløse dc-motor.*

Kapitel 4

Stepmotoren

En stepmotor er en motortype som på indgangsterminalen skal påtrykkes spændingspulser. Hver spændingspuls på terminalindgangen resulterer i en givet vinkeldrejning af motorrotoren. Der findes tre forskellige typer stepmotorer, nemlig Variabel Reluktans (VR), Permanent Magnet (PM) og Hybrid Stepping (HS). Som navnet antyder er HS motoren en kombination af VR motoren og PM motoren, og gør brug af dels variable reluktans vindinger og en permanent magnet i rotoren. Dette giver HS motoren et større moment end VR motoren, og en step størrelse mindre end PM motoren, derfor er HS motoren den mest anvendte stepmotor.

4.0.7 Hybrid Stepping motorens virkemåde

HS motoren består i hovedtræk af to dele; en rotor og en stator som vist på figur 4.1.

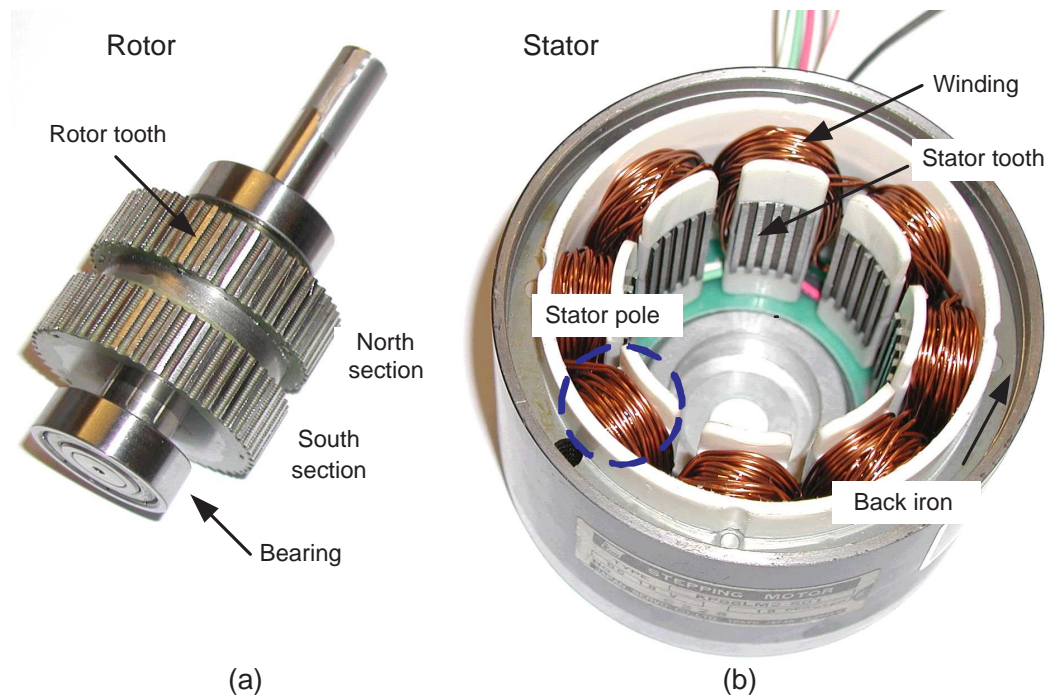
Rotoren indeholder en permanent magnet som har to sektioner med tænder, en nordpols tandsektion og en sydpols tandsektion. Tænderne i de to sektioner er forskudt i forhold til hinanden med det der svarer til halvdelen af afstanden mellem tænderne.

Statorpolerne har tænder der dækker over både nord -og sydpolssektionerne på rotoren. Som det fremgår er viklingerne placeret på statorpolerne, således at de kan magnetiseres.

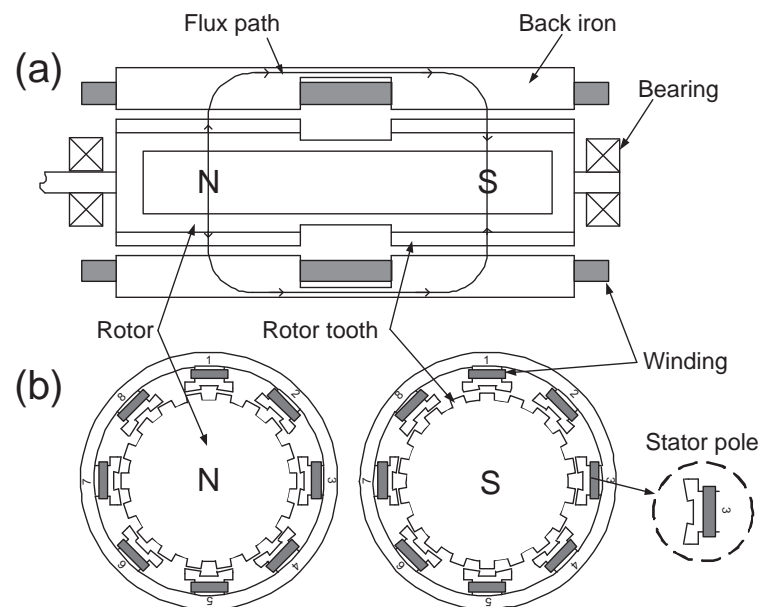
Figur 4.2 illustrerer et side og tværsnit af HS motoren, set både fra nord - og sydsektionen af en rotor.

Antallet af tænder er blevet reduceret i figuren for at lette forståelsen. I figuren har motoren 8 statorpoler og hver statorpol består af to statortænder. En HS motor har normalt 50 rotortænder og 6 statortænder for hver statorpol.

HS motoren opererer som tidligere nævnt i step. Når en statorpol bliver magnetiseret vil den tiltrække eller frastøde rotortanden i overensstemmelse med strømretningen i vindingerne og polariteten af rotortanden. Kraftmomentet bliver derfor en kombination af magnetens felt og det felt der bliver induceret af de aktive statorpoler. Tiltrækningen eller frastødningen af rotortænderne får rotoren til at rotere indtil den når en bestemt steady state position hvor de magnetiserede polers tænder er overfor (eller væk fra) de tilhørende rotortænder. Motoren bliver i denne position indtil magnetiseringen af statorpolerne bliver afbrudt og andre stator fase poler bliver magnetiseret.



Figur 4.1: Hybrid Stepping (HS) motor. Rotoren til venstre og statoren til højre.



Figur 4.2: En HS stepping motor. (a) side snit (b) tværsnit set fra både nord og sydsektionen af en rotor.

De mest anvendte HS motorer har to vindinger (faser). De to vindinger kaldes normalt vinding A og vinding B. Vinding A er placeret på statorpol nummer 1,3,5 og 7 og vinding B er placeret på 2,4,6 og 8. Vindingerne er lavet sådan at 2 modstående vindinger har samme magnetiske flux. Når en positiv strøm løber gennem vinding A er det magnetiske felt rettet radielt ud i stator pol 1 og 5, men radielt ind i stator 3 og 7. Dette tiltrækker den nærmeste tand i nordsektionen til statorpol 1 og 5, og det tiltrækker den nærmeste tand i sydsektionen til statorpol 3 og 7. Rotoren vil rotere indtil statorpoltænderne og rotorpol-tænderne er overfor hinanden som vist i figur 4.2.b. Positionen hvor tænderne står overfor hinanden kaldes for et equilibrium eller ligevægtpunkt for rotoren.

Flux vejen når vinding A er eksiteret er vist i figur 4.2.a.

Idet statorpolerne dækker både nord og sydsektionen af rotoren vil statorpolerne tiltrække rotortænder i den ene sektion og frastøde tænder i den anden sektion. Derfor er tænderne i de to sektioner forskudt i forhold til hinanden. Så selv om tænderne frastødes i den ene sektion og tiltrækkes i den anden hjælper det rotoren til equilibriumpunktet. Når tænderne f.eks. i nordsektionen er i ligevægt overfor hinanden ved vikling 1 og 5 er de i sydsektionen længst muligt forskudt ved vikling 1 og 5 og dermed i equilibrium hvor rotortænderne er så langt væk fra statorpolerne som muligt. Dette er illustreret på figur 4.2.b

For at få rotoren til at rotere med uret switches strømmen således at den løber i positiv retning i vinding B. Feltet er nu radielt udadrettet i statorpol 2 og 6, og indadrettet i statorpol 4 og 8. I nordsektionen vil de nærmeste tænder forsøge at stå ud for statorpolerne 2 og 6, og i sydsektionen udfor 4 og 8. Rotoren roterer indtil tænderne er overfor hinanden. Det næste step i sekvensen for at få motoren til at rotere med uret er at påtrykke vinding A strøm i negativ retning efterfulgt af negativ strømretning i vinding B. Herefter starter sekvensen forfra med positiv strømretning i vinding A.

I tabel 4.1 er de forskellige mulige strømretninger og polfeltretninger vist. +A betyder en positiv strøm i vinding A.

| Fase | Polfelt retning | |
|------|-----------------|-------------|
| | Radielt ud | Radielt ind |
| + A | 1,5 | 3,7 |
| - A | 3,7 | 1,5 |
| + B | 2,6 | 4,8 |
| - B | 4,8 | 2,6 |

Tabel 4.1: Strømretning versus polfeltretning i statorpolerne.

Som beskrevet ovenfor kan en rotation med uret fås ved at kontrollere strømretningen i vindingerne efter følgende sekvens: $+A \rightarrow +B \rightarrow -A \rightarrow -B \rightarrow +A \rightarrow \dots$ En rotation mod uret fås med følgende sekvens: $+A \rightarrow -B \rightarrow -A \rightarrow +B \rightarrow +A \rightarrow \dots$

I det efterfølgende beskrives princippet i de elektroniske kredsløb som findes til styring af stepmotorer.

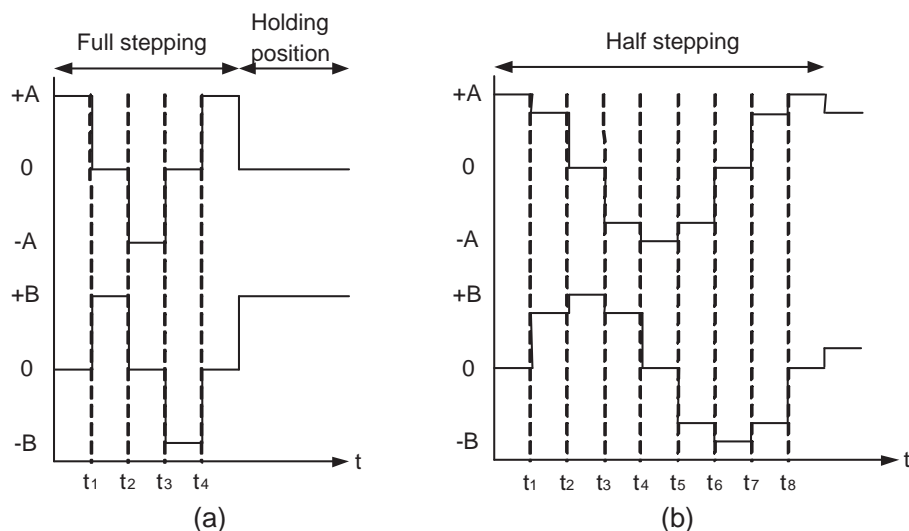
4.0.8 Elektroniske driverkredsløb.

Stepmotorer kan enten styres unipolært eller bipolært. Et unipolært drivkredsløb kan kun sende strøm i en retning, og kræver derfor en motor hvor vindingerne er placeret således at det kun er nødvendigt at sende strøm i en retning. Et bipolært drivkredsløb kan sende strøm i begge retninger.

Fordelen ved et bipolært drivkredsløb er, at en HS motor som anvender dette kredsløb kan give et større moment end hvis det bruger unipolære vindinger. Ulempen er en højere pris for drivkredsløbet. Grunden er, at den unipolære motor drives med simple switching teknikker, mens et bipolært effekt kredsløb bruger f. eks. en H-bro for at få strømmen til at løbe i begge retninger.

4.0.9 Rotationssekvenser og stepstørrelser

Eksitationssekvenserne beskrevet i afsnit 4.0.7 består af fire faseeksitationtrin for at få motoren til at rotere. Denne metode for at få motoren til at rotere, hvor der kun er en vinding aktiv ad gangen, kaldes "full stepping mode". Princippet i "full stepping mode" er illustreret i figur 4.3.a som et tidsdiagram for rotation med uret.



Figur 4.3: Eksitationssekvenser. (a) Full stepping. (b) Half stepping.

Den øverste sekvens er for magnetisering af vinding A, og den nederste sekvens er for magnetisering af vinding B. Disse magnetiseringssekvenser fortsætter indtil rotoren når sit bestemmelsessted hvor rotoren i eksemplet bliver holdt i en position ved at vinding B er aktiv.

Istedet for kun at aktivere en vinding ad gangen, kan aktivering af 1 og 2 faser give halv steplængde. Denne metode kaldes "half stepping mode" og er illustreret i figur 4.3.b.

Denne metode udnytter at når rotortænderne er tiltrukket af både vinding A og B vil rotoren få et ny equilibriumpunkt mellem de før omtalte equilibriumpunkter for fase A og B, hvilket giver en ekstra tilstand i eksitationssekvensen, AB, som reducerer steplængden til det halve. Nu er det indlysende, at steplængden yderligere kan reduceres ved at kontrollere spændingen til de to faser. Reducering af steplængden til mindre end "half stepping" kaldes for microstepping.

Kapitel 5

Translatoriske og roterende mekaniske systemer

I afsnittet beskrives først, hvorledes der kan opstilles modeller for translatoriske mekaniske systemer, hvis bevægelse er begrænset til en dimension, og som kan beskrives af de tre ideelle elementer massen, fjederen og dæmperen. Her anvendes free body diagrammer, hvor hver masse eller knudepunkt i systemet kan beskrives ved Newton's 2. lov. Derefter opstilles modeller for roterende mekaniske systemer, hvis rotationen kun foregår omkring en akse. Her anvendes de tre ideelle elementer inertimoment, rotationsfjeder og rotationsdæmper. Free body metoden anvendes til opstilling af bevægelsesligninger. Der opstilles endvidere modeller for gear. Sidst i afsnittet vises hvorledes de ideelle elementer anvendes ved modellering af et virkeligt system.

5.1 Ideelle elementer for translatoriske mekaniske systemer

Den ideelle masse, M , er karakteriseret ved at dens bevægelse kan beskrives af ligningen

$$M \frac{dv}{dt} = f \quad (5.1)$$

hvor f er en kraft der påtrykkes massen og v er hastigheden af massen.

Den ideelle fjeder er karakteriseret ved at den er masseløs, og at den kan beskrives ved ligningen:

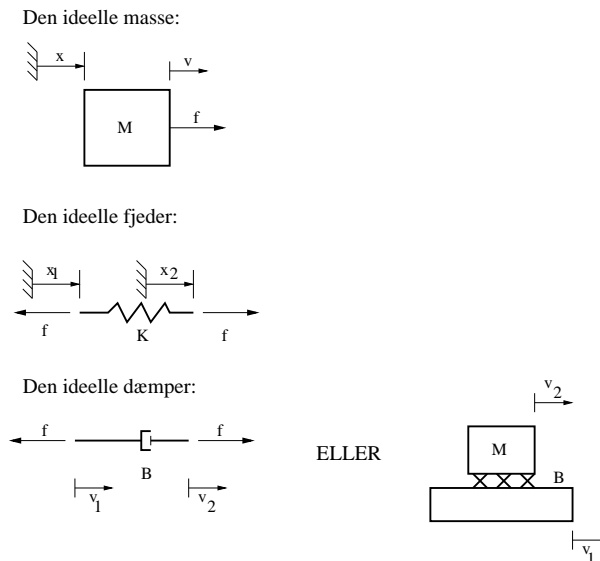
$$f = K \Delta x = K(x_1 - x_2) \quad (5.2)$$

hvor f er fjederkraften, K er fjederkonstanten, Δx er længden af fjederen, således at i hvile er $\Delta x = 0$. x_1 og x_2 er positionen af endepunkterne af fjederen regnet i hvert sit koordinatsystem.

Den ideelle dæmper er masseløs og givet ved ligningen:

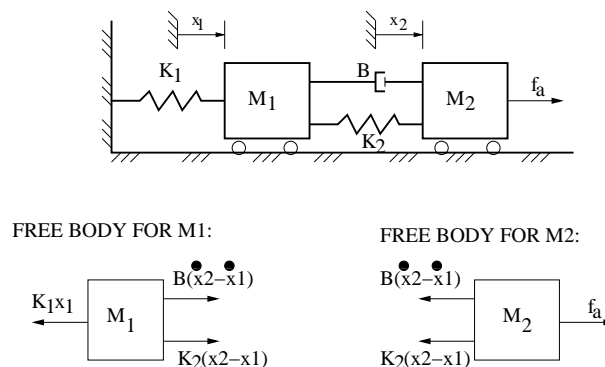
$$f = B \Delta v = B(v_1 - v_2) \quad (5.3)$$

hvor f er dæmperkraften, v_1 og v_2 er endepunktshastighederne af dæmperen og B er dæmperkonstanten.

Figur 5.1: *Ideelle elementer*

5.2 Free body diagrammer for translatoriske mekaniske systemer

Eksempel 1:

Figur 5.2: *Translatorisk system*

På figuren er x_1 massen M_1 's placering og i hvile er $x_1 = 0$. Tilsvarende gælder for x_2 . Det er angivet i hvilken retning x_1 og x_2 regnes positive. Free body diagrammer for de to masser er ligeledes vist på figuren. Free body diagrammet angiver for hver masse (og kundepunkt) hvilke kræfter der påvirker massen. Hvis f.eks fjederen K_2 's påvirkning af massen M_2 skal bestemmes vides at kraften er $f = K_2 \Delta x$ og kan skrives som $f = K_2(x_2 - x_1)$, men hvilken vej skal pilen vende?. Her kan f.eks massen M_1 låses til $x_1 = 0$ og x_2 gøres positiv. Dette må give en kraft på M_1 som virker i den positive x_1 -retning og pilen skal vende i positiv x_1 -retning ($f = K_2 x_2$ hvor alle størrelser er positive). Ligeledes kan udtrykket kontrolleres ved at sætte $x_2 = 0$ gøre x_1 positiv hvilket må give en kraft som påvirker M_2 i negativ x_1 -retning. Dette

viser udtrykket også, idet $f = -K_2x_1$ er negativ.

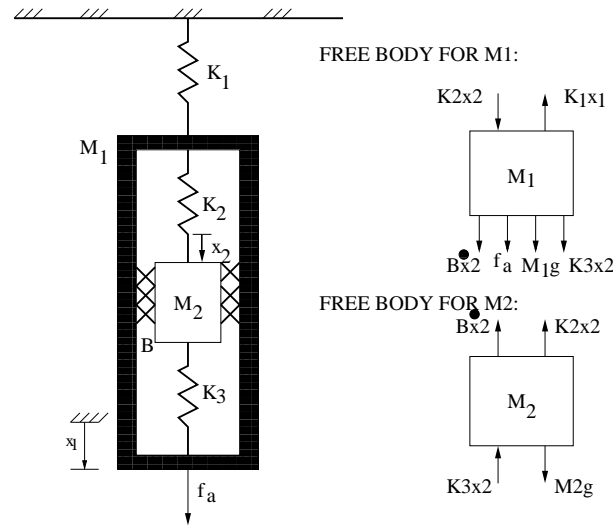
Ved hjælp af de to free body diagrammer kan bevægelsesligningerne for systemet opstilles:

$$M_1\ddot{x}_1 = B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_2(x_2 - x_1) - K_1x_1 \quad (5.4)$$

$$M_2\ddot{x}_2 = f_a - B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - K_2(x_2 - x_1) \quad (5.5)$$

Fortegnet på leddet $K_2(x_2 - x_1)$ kan også kontrolleres i ligningerne ved at f. eks i første ligning trække leddet med x_1 over på højresiden, hvorefter højresiden giver $M_1\ddot{x}_1 + K_2x_1$ her er der samme fortegn på de to x_1 hvilket giver anledning til et stabilt system. (Forskellige fortegn ville give anledning til en pol i venstre halvplan).

Eksempel 2:



Figur 5.3: *Translatorisk system*

I eksemplet hænger en cylinder i en fjeder. I selve cylinderen findes en masse som er fjederophængt i såvel bund som top. Systemet påvirkes med en ekstern kraft f_a . Der skal findes bevægelsesligninger som beskriver sammenhængen mellem den eksterne kraft og positionen af massen M_2 . Det bemærkes at positionen af massen M_2 er x_2 , hvor x_2 er målt i forhold til cylinderen. På figuren ses endvidere free body diagrammer for de to masser. Her bemærkes at kræfterne fra dæmperen B og fjedrene K_2, K_3 kun er afhængig af den relative hastighed \dot{x}_2 og position x_2 .

Ved hjælp af de to free body diagrammer kan bevægelsesligningerne for systemet opstilles:

$$M_1\ddot{x}_1 = M_1g + f_a + K_2x_2 + K_3x_2 + B\dot{x}_2 - K_1x_1 \quad (5.6)$$

$$M_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = M_2g - K_2x_2 - K_3x_2 - B\dot{x}_2 \quad (5.7)$$

Bemærk venstresiden af ligningen hvor ændringen i impuls skal opgives i det faste koordinat-system. Det opstillede ligningssystem er ikke lineært på grund af de konstante led M_1g og

M_2g , derfor kan ligningerne ikke umiddelbart Laplacetransformeres. Omskrives ligningerne som følger bliver de lineære og kan Laplacetransformeres.

I systemet findes et ligevægtspunkt (\bar{x}_1, \bar{x}_2) for $f_a = 0$. Dette kan findes ved at alle afledede er nul, og giver:

$$\bar{x}_1 = \frac{(M_1 + M_2)g}{K_1} \quad \bar{x}_2 = \frac{M_2g}{K_2 + K_3} \quad (5.8)$$

Regnes Δx_1 og Δx_2 relativt ud fra ligevægtspunktet, dvs at

$$x_1 = \bar{x}_1 + \Delta x_1 \quad x_2 = \bar{x}_2 + \Delta x_2 \quad (5.9)$$

findes de beskrivende ligninger til:

$$M_1 \Delta \ddot{x}_1 = f_a + K_2 \Delta x_2 + K_3 \Delta x_2 + B \Delta \dot{x}_2 - K_1 \Delta x_1 \quad (5.10)$$

$$M_2 (\Delta \ddot{x}_1 + \Delta \ddot{x}_2) = -K_2 \Delta x_2 - K_3 \Delta x_2 - B \Delta \dot{x}_2 \quad (5.11)$$

Som forventet er disse ligninger tilsvarende de tidligere opstillede undtagen de led der stammer fra tyngdekraften.

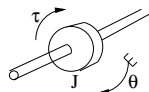
5.3 Ideelle elementer for roterende mekaniske systemer

Det ideelle inertimoment, J , er karakteriseret ved at dets bevægelse kan beskrives af ligningen

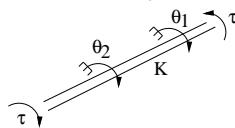
$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau \quad (5.12)$$

hvor τ er et kraftmoment der påvirker inertien og ω er vinkelhastigheden.

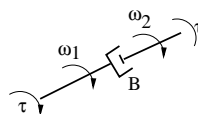
Det ideelle inertimoment:



Den ideelle rotationsfjeder:



Den ideelle rotationsdæmper:



Figur 5.4: *Ideelle elementer*

Den ideelle rotationsfjeder er karakteriseret ved at den er masseløs, og at den kan beskrives ved ligningen:

$$\tau = K \Delta \theta = K(\theta_1 - \theta_2) \quad (5.13)$$

hvor K er fjederkonstanten, θ_1 og θ_2 er vinkelpositionen af endepunkterne af fjederen og τ er fjedermomentet.

Den ideelle rotationsdæmper er masseløs og givet ved ligningen:

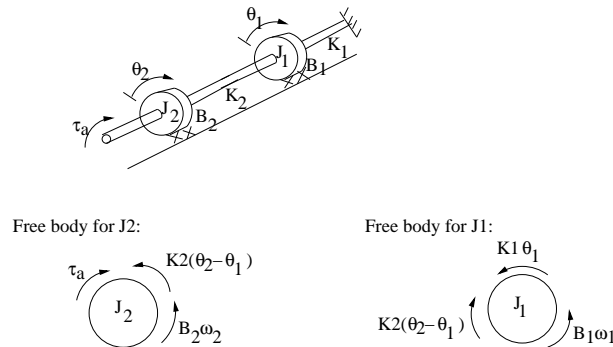
$$\tau = B\Delta\omega = B(\omega_1 - \omega_2) \quad (5.14)$$

hvor τ er dæpermomentet, ω_1 og ω_2 er endepunktsvinkelhastighederne af dæmperen og B er dæmperkonstanten.

5.4 Free body diagrammer for roterende mekaniske systemer

Eksempel 3:

På figuren ses et system med to inertimomenter, to rotationsfjedre og to rotationsdæmpere. Inertien J_2 påvirkes af det ydre moment τ_a . Det er valgt i hvilken retning vinkelpositionerne regnes positive. Vinkelhastigheden og vinkelaccelerationen regnes positive i samme retning.



Figur 5.5: Roterende mekanisk system

På figuren er free body diagrammer for J_1 og J_2 . På free body diagrammer er det kun momentet $K_2(\theta_2 - \theta_1)$ som behøver en forklaring. Fremgangsmetoden, hvis vi f. eks. betragter free body diagrammet for J_1 , kan her være at vi i første omgang vælger enten $K_2(\theta_2 - \theta_1)$ eller $K_2(\theta_1 - \theta_2)$ som et udtryk for momentet, og derefter skal have pilen retning rigtig. Det er ligegyldigt hvilket af de to udtryk vi vælger, så lad os tage $K_2(\theta_2 - \theta_1)$ og derefter få pilens retning rigtig. Ses på udtrykket $K_2(\theta_2 - \theta_1)$ kan vi sætte $\theta_1 = 0$ og gøre θ_2 positiv hvilket vil give det positive moment $K_2\theta_2$. Ser vi nu på figuren holder J_1 fast og drejer J_2 i positiv retning vil det give et moment på J_1 som går med uret, derfor skal momentet orienteres med uret.

Ved hjælp af de to free body diagrammer kan bevægelsesligningerne for systemet opstilles:

$$J_1\dot{\omega}_1 = K_2(\theta_2 - \theta_1) - B_1\omega_1 - K_1\theta_1 \quad (5.15)$$

$$J_2\dot{\omega}_2 = \tau_a - K_2(\theta_2 - \theta_1) - B_2\omega_2 \quad (5.16)$$

5.5 Gear

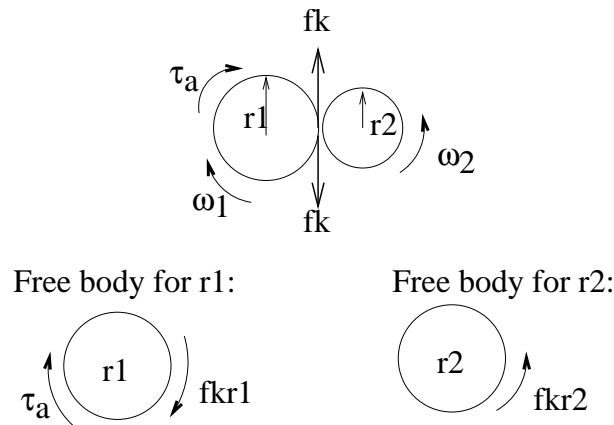
Et ideelt gear defineres som tabsfrit, inertiøst, friktionsløst og med et gearforhold N og opfylder:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{n_2}{n_1} = N \quad (5.17)$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{r_2}{r_1} = N \quad (5.18)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = N \quad (5.19)$$

$$\frac{\dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_2} = \frac{r_2}{r_1} = N \quad (5.20)$$



Figur 5.6: *Gear*

hvor r er radius, n er tandantal alt efter udformningen af det ideelle gear. Moment sammenhængen for gearet kan ses på figur 5.6. Der er påtrykt et moment τ_a på gearet. De to hjul i gearet har kontakt i et punkt, og her virker to modsat rettede lige store kræfter f_k . Fordi gearet er inertiøst må der gælde at (se free body diagrammet):

$$\tau_a - f_k r_1 = 0 \quad (5.21)$$

$$\tau = f_k r_2 \quad (5.22)$$

Elimineres f_k i de to ligninger findes:

$$\tau = \frac{r_2}{r_1} \tau_a = N \tau_a \quad (5.23)$$

Kraftmoment flyttes fra en aksel til en anden ved at multiplicere med gearforholdet

Antages at der er inertimomentet J_1 på den ene aksel og inertimomentet J_2 på den anden aksel, findes samme free body diagram som på figur 5.6 og følgende bevægelsesligninger:

$$J_1 \dot{\omega}_1 = \tau_a - r_1 f_k \quad (5.24)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = r_2 f_k \quad (5.25)$$

Elimineres f_k og sættes $\dot{\omega}_1 = N\dot{\omega}_2$ findes

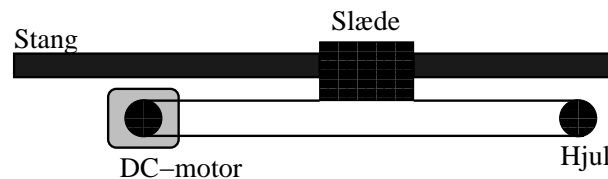
$$(J_1 + \frac{J_2}{N^2})\dot{\omega}_1 = \tau_a \quad (5.26)$$

D.v.s. at inertimomentet J_2 ses på 1-akselen som J_2/N^2 .

Inertimoment flyttes fra en akse til en anden ved at multiplicere med gearforholdet i anden

5.6 Eksempel på modellering med free body metoden

På figur 5.7 ses en slæde, som ved hjælp af en wire kan flyttes af en DC-motor. Motoren er forsynet med et gear. Slæden glider på en stang. Slæden ønskes positionsreguleret og derfor skal der opstilles en model af sammenhængen mellem motorspændingen og slædepositionen. Slædepositionen måles ved hjælp af et multiværts potentiometer som er placeret på hjulet.



Figur 5.7: *Motor-slæde system.*

Idet formålet med modellen er at designe en regulator ønskes en lineær model.

I dette eksempel er systemets virkemåde forholdsvis simpel, derfor gives der ikke yderligere forklaring.

Det samlede system grænseflade er til regulatoren, og er derfor motorspændingen, slædepositionen og spændingen på positionspotentiometret.

Systemet kan opdeles i tre undersystemer. Et elektrisk DC-motor system. Et mekanisk roterende system bestående af motor-rotor, gear og trisse. Et mekanisk translatorisk system bestående af wire og slæde.

Der laves antagelser:

- DC-motoren kan modelleres som vist i forrige kapitel.
- Gearet regnes tabsfrit.
- Wiren er ikke elastisk.
- Friktionerne kan regnes lineære med hastigheden.
- Wiren skrider ikke på trisserne.
- Belastningerne fra potentiometret og hjulet er negligeable.

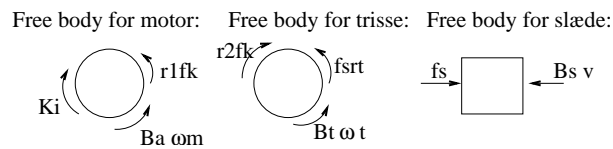
Opstilling af ligninger: Den elektriske del af motoren er givet ved:

$$U_a = R_a i + L_a \frac{di}{dt} + K\omega_m \quad (5.27)$$

Modeldannelse

hvor ω_m er motorakslens vinkelhastighed.

For det mekanisk roterende system kan der opstilles free body diagrammer som vist i figur 5.8



Figur 5.8: *Free body diagram for motoraksel, aksel med trisse og slæde*

J_1 er den samlede inertie på motorakslen. J_t er den samlede inertie på trisseakslen. r_1 og r_2 er radii på geartandhjulene. F_s er kraften fra slæden der påvirker trissen og r_t er radius på trissen. B_a og B_t er viskøse friktioner på motorakslen henholdsvis trisseakslen. Free body diagrammerne giver ligningerne:

$$J_1 \dot{\omega}_m = K i - r_1 f_k - B_a \omega_m \quad (5.28)$$

$$J_t \dot{\omega}_t = r_2 f_k - f_s r_t - B_t \omega_t \quad (5.29)$$

For det translatoriske system findes:

$$f_s - B_s \dot{x} = M_s \ddot{x} \quad (5.30)$$

Desuden gælder:

$$\frac{\omega_m}{\omega_t} = \frac{r_2}{r_1} \quad (5.31)$$

$$x = r_t \theta_t \quad (5.32)$$

$$\dot{x} = r_t \omega_t \quad (5.33)$$

$$U_{pot} = K \theta_t \quad (5.34)$$

Laplacetransformeres og sammenskrives ligningerne er det muligt at finde overføringsfunktionerne $X(s)/U_a(s)$ og $U_{pot}(s)/U_a(s)$

Kapitel 6

Friktion og slør i mekaniske systemer

6.1 Friktion

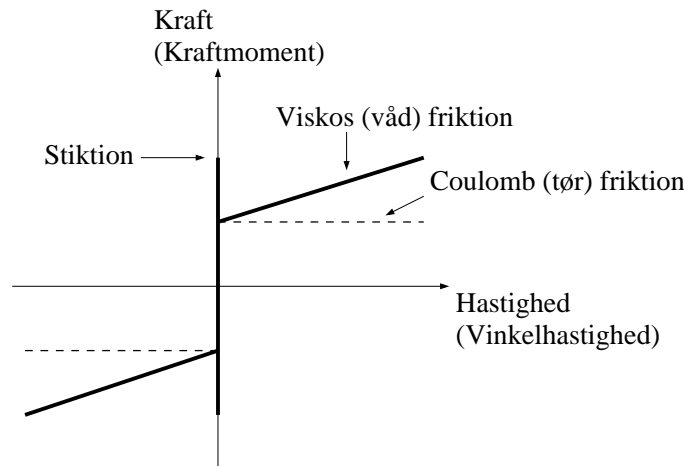
Friktion i et mekanisk system er et fænomen som er svært at modellere, og som endnu ikke forstås fuldstændigt. I kapitlet om mekaniske systemer repræsenterer de ideelle dæmpere modeller af et aspekt af friktion, nemlig den såkaldte våd (eller viskose) friktion, som er kendetegnet ved at den er proportional med hastigheden. Denne friktionskomponent medtages ofte, da den indgår som et lineært element i en model. Tørfriktion eller Coulombfriktion er en friktion som kun afhænger af bevægelsesretning, og regnes normalt i en bevægelsesretning konstant og virkende imod bevægelsesretningen. Denne friktion medtages ofte når der foretages ulineære simuleringer. Det bør dog bemærkes, at når tørfriktionen medtages, bør man være varsom omkring hastigheden nul, idet tørfriktionen her ikke er bestemt af hastigheden, men giver en kraft der er lige så stor og modsat rettet den kraft der påtrykkes systemet sålænge denne er numerisk mindre end tørfriktionens værdi.

Ved en meget lille hastighed bliver friktion yderligere kompliceret og der findes forskellige modeller i dette tilfælde. En simpel model er af antage, at der ved hastigheden nul er en ekstra friktion, udover Coulombfriktionen, som kaldes stiktion. De tre friktioner kan samles i en graf som vist på figur 6.1, der viser sammenhængen mellem friktionskraft og hastighed.

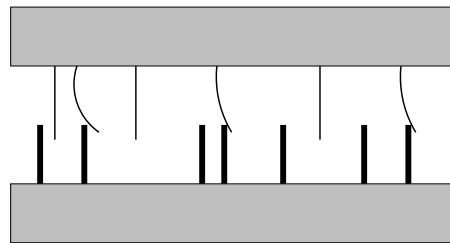
Anvendelse af ovennævnte friktionsmodel har vist sig at kunne afspejle nogle af de fænomener som friktion i forbindelse med regulering giver anledning til, nemlig limit cycles og tracking fejl. Friktionsmodellen svarende til figur 6.1 er en statisk sammenhæng mellem friktion og hastighed. Målinger har imidlertid vist, at denne ikke beskriver friktion ved lave hastigheder fuldstændigt, hvorfor det undertiden kan være hensigtsmæssigt at anvende en dynamisk model for friktion. Nedenstående model er taget fra [dWHOKÅPL95]

6.2 Friktion modelleret som børster

Friktion opstår når to overflader er i berøring samtidig med at de bevæges i forhold til hinanden. Dette kan visualiseres som to stive legemer som har kontakt gennem elastiske børster, se figur 6.2. Når en tangential kraft påtrykkes, vil børsterne bøje, ligesom fjedre, hvilket giver anledning til en kraft. Hvis kraften er tilstrækkelig stor vil nogle af børsterne udbøje så meget at de slipper, et fænomen som er meget tilfældigt på grund af at overfladen er irregulære. Nogle modeller bruger denne stokastiske opførsel som udgangspunkt. Modellen i dette afsnit



Figur 6.1: *Friktionskraft som funktion af hastighed*



Figur 6.2: *Friktion mellem 2 overflader, illustreret som børster*

er dog baseret på middel opførslen af børsterne. Middeludbøjningen af børsterne kaldes z og kan modelleres med:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{|v|}{g(v)}z \quad (6.1)$$

hvor v er den relative hastighed mellem de to overflader. Det første led giver en udbøjning som er proportional med integralet af hastigheden. Det andet led viser at afbøjningen z går imod værdien

$$z_{ss} = \frac{v}{|v|}g(v) = g(v)\text{sgn}(v) \quad (6.2)$$

i steady state, det vil sige når v er konstant. Funktionen g er positiv og afhænger af mange faktorer som materialeegenskaber, smøring, temperaur etc. Den behøver ikke at være symmetrisk og retningsbestemt opførsel kan derfor medtages. For typisk lejefriktion aftager $g(v)$ monotont fra $g(0)$ når v forøges.

Kraften som kommer fra udbøjningen af børsterne kan beskrives som

$$f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (6.3)$$

hvor σ_0 er fjederkonstanten og σ_1 er en dæmpningskonstant. Et led proportionalt med den relative hastighed kan medtages for at modellere den viskøse friktion.

$$f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (6.4)$$

Modellen givet af ligningerne 6.1 og 6.4 er karakteriseret af funktionen g og parametrene σ_0 , σ_1 , σ_2 .

Vi kan bestemme en steady state model (v konstant, $\frac{dz}{dt} = 0$)

$$f_{ss}(v) = \sigma_0 g(v) \text{sign}(v) + \sigma_2(v) \quad (6.5)$$

som er karakteriseret af funktionen g og parametrene σ_0 og σ_2 .

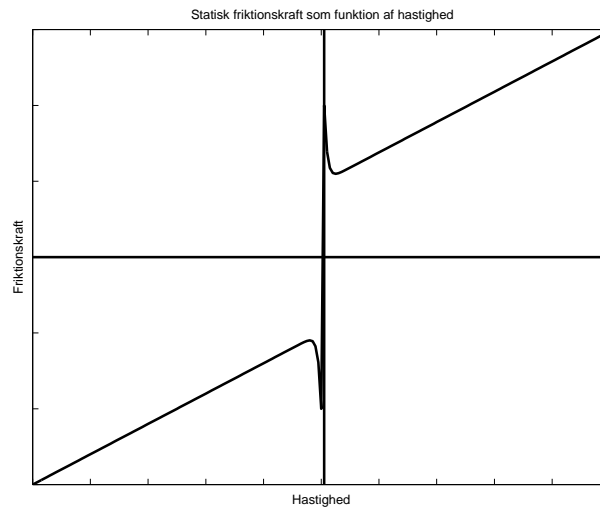
Funktionen f_{ss} kan blive bestemt ved målinger af steady state friktionskræfter når hastigheden er holdt konstant. En parametrisering af g er i litteraturen (se f.eks [dWHOKÅPL95]) foreslået i til

$$\sigma_0 g(v) = f_C + (f_S - f_C) e^{-(v/v_s)^2} \quad (6.6)$$

hvor f_C er Coulombfriktionen, f_S er stiktionen og v_s er hastigheden. Med denne beskrivelse er modellen i steady state karakteriseret af de 4 parametre σ_2 , f_C , f_S og v_s .

$$f_{ss} = \sigma_0 g(v) \text{sgn}(v) + \sigma_2 v \quad (6.7)$$

$$= f_C \text{sgn}(v) + (f_S - f_C) e^{-(v/v_s)^2} \text{sgn}(v) + \sigma_2 v \quad (6.8)$$



Figur 6.3: *Friktionskraft som angivet i ligning 6.8*

Bemærk dog, at når hastigheden ikke er konstant, er dynamikken i modellen vigtig og vil give anledning til forskellige fænomener.

6.3 Slør i mekaniske systemer

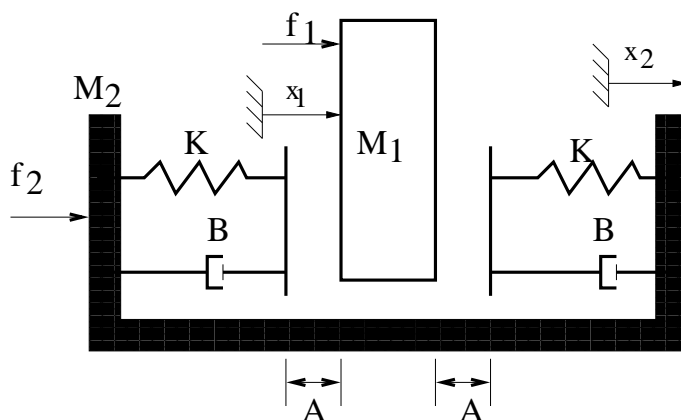
Slør i mekaniske systemer opstår typisk i gear opbygget med tandhjul som griber ind i hinanden. Her vil der kunne være en lille frigang mellem tænderne på to tandhjul, der griber ind i

hinanden, således at forholdet mellem de to tandhjuls hastigheder ikke altid er lig med gearforholdet. Denne frigang kan normalt formindskes ved at spænde tandhjuleenes akser tættere sammen, hvilket imidlertid forøger friktionen i gearret.

Som vist i afsnittet om det ideelle gear sker modelleringen ofte ved hjælp af den kraft, f_k , der overføres i kontaktpunktet. Når de to tandhjul slipper hinanden vil denne kraft være lig med nul, hvilket ændrer modelligningerne på begge gearets aksler. Dette betyder f.eks. at for en motor som trækker en belastning igennem et gear vil motoren ikke, når gearet slipper, kunne mærke friktionsmomentet og inertimomentet fra belastningen, ligesom belastningen ikke får noget kraftmoment fra motoren og er fritløbende. Konsekvensen af dette er, at der er to sæt ligninger der gælder, nemlig et i indgreb, og et i friløb.

Slør i translatorisk system

I det efterfølgende vil slør først blive betragtet på et translatorisk system, som vist på figur 6.4. Et ubehageligt modelleringsfænomen er at bestemme den kontaktkraft der opstår når de to



Figur 6.4: *Slør i translatorisk mekanisk system. Impact pair model.*

masser mødes. For at overvinde dette problem er det antaget [Kum95], som vist på figur 6.4, at kraften der opstår mellem de to mødende masser kan modelleres ved hjælp af paralleltkoblet fjeder og dæmper. Denne model kaldes Impact Pair modellen for slør. Modellen, figur 6.4, består af en drivende masse, M_1 , og en load masse, M_2 , og en frigang på $2A$. x_1 og x_2 angiver de to massers placering på en x-akse. Kontakt opstår når $|x_1 - x_2| \geq A$ og indtrængningen, δ , er givet ved:

$$\delta = |x_1 - x_2| - A \quad (6.9)$$

Kontaktkraften kan modelleres ved en fjeder $f_f = K\delta$ og en dæmper $f_d = B\dot{\delta}$. Givet en ekstern kraft, f_1 , og en ekstern kraft på load'en, f_2 , er de dynamiske ligninger givet ved:

$$f_1 - (f_f + f_d) = M_1 \ddot{x}_1 \quad (6.10)$$

$$f_2 + (f_f + f_d) = M_2 \ddot{x}_2 \quad (6.11)$$

når masserne er i kontakt med hinanden og

$$f_1 = M_1 \ddot{x}_1 \quad (6.12)$$

$$f_2 = M_2 \ddot{x}_2 \quad (6.13)$$

når de ikke er i kontakt. Bemærk at der i fortegnskonventionerne er antaget at kontakten forekommer i højre side.

Ved en simulering afgør uligheden:

$$|x_1 - x_2| \geq A \quad (6.14)$$

hvilket ligningssystem der skal anvendes.

6.3.1 Slør i roterende system

For et roterende system vil der analogt kunne opstilles følgende ligninger:

$$\tau_1 - R_{b1}(f_f + f_d) = J_1\ddot{\theta}_1 \quad (6.15)$$

$$\tau_2 + R_{b2}(f_f + f_d) = J_2\ddot{\theta}_2 \quad (6.16)$$

når der er kontakt og

$$\tau_1 = J_1\ddot{\theta}_1 \quad (6.17)$$

$$\tau_2 = J_2\ddot{\theta}_2 \quad (6.18)$$

når der ikke er kontakt. R_{b1} og R_{b2} er tandhjulsradier.

Når $|R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2| \geq A$ er der kontakt og

$$\delta = |R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2| - A \quad (6.19)$$

Kapitel 7

Masse og energibalancer

Som omtalt i indledningen anvendes en koncentreret (lumped) parameter beskrivelse af de termiske delsystemer. Ved modelleringen anvendes følgende typer ligninger:

- massebalance
- energibalance
- impulsbalance
- empiriske relationer

Disse ligninger anvendes for de termiske komponenter i systemet.

7.1 Massebalance

Massebalancen er givet ved:

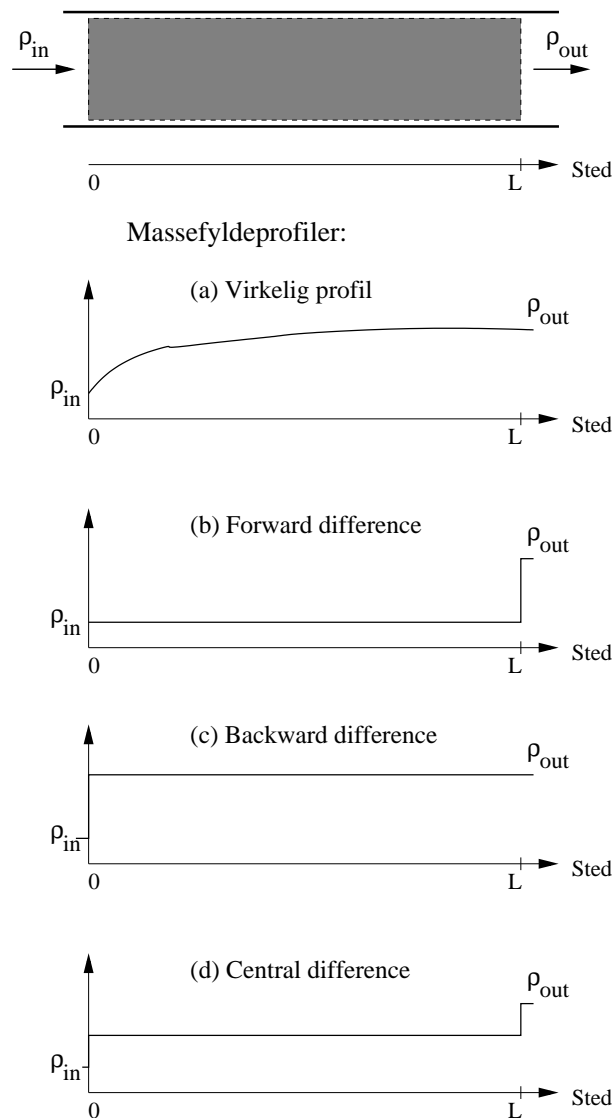
[ændring i masse i det betragtede kontrolvolumen pr tidsenhed] = [summen af masseflow til kontrolvolumen]

Dette kan matematisk udtrykkes ved

$$\begin{aligned}\frac{dM(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}[\rho_{volumen}(t) \cdot V(t)] \\ &= \Sigma m_{in}(t) - \Sigma m_{out}(t) \\ &= \Sigma \rho_{in}(t)v_{in}(t) - \Sigma \rho_{out}(t)v_{out}(t)\end{aligned}\tag{7.1}$$

hvor M [kg] er massen i kontrolvoluminet, ρ [kg/m³] er massefylde, V [m³] er kontrolvolumen, m_{in} [kg/sek] er input masseflow til kontrolvolumen, m_{out} [kg/sek] er output masseflow fra kontrolvolumen, v [m³/sek] er volumenflow.

Ved anvendelse af massebalancen vil der være for mange ubekendte, derfor må $\rho_{volumen}$ tilskrives en værdi, eller sagt på en anden måde, der må vælges en profil for ρ . Dette svarer



Figur 7.1: Væskegennemstrømmet rørstykke med indlagt kontrolvolumen. I (a) ses den virkelige massefyldeprofil. I (b) er der tilnærmet med forward steddiskretisering, i (c) med backward steddiskretisering, og i (d) med central difference diskretisering (bilineær)

til at der foretages en steddiskretisering, idet ρ normalt vil være en funktion af såvel tid som sted. På figur 7.1 ses et rørstykke, med et indlagt kontrolvolumen.

Som det fremgår er steddiskretisering analog med tidsdiskretisering, hvorfor de metoder der anvendes ved tidsdiskretisering også kan anvendes her. Erfaringer med de tre nævnte metoder siger, at forward diskretisering kan give et ustabil respons, central difference metoden kan give fejlagtige transienter, derfor anvendes backward metoden. Anvendelse af backward metoden betyder at masseligningen er givet ved

$$\begin{aligned}
\frac{dM(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}[\rho_{out}(t) \cdot V(t)] \\
&= \Sigma m_{in}(t) - \Sigma m_{out}(t) \\
&= \Sigma \rho_{in}(t) v_{in}(t) - \Sigma \rho_{out}(t) v_{out}(t)
\end{aligned} \tag{7.2}$$

hvor massefylden ρ er en funktion af den temperatur og det tryk, der kan beregnes af energibalancen og impuls ligningen. Massebalancen giver således normalt mulighed for at beregne flowet ud af kontrolvoluminet.

7.2 Energifbalance

Energifbalancen udtrykkes ved hjælp af termodynamikkens 1. hovedsætning:

[ændring i akkumuleret energi i kontrolvolumen pr. tidsenhed] = [effekt fra væske tilstrømning] - [effekt fra væskeudstrømning] + [tilført varmeeffekt] + [tilført effekt ved arbejde]

I energibalancen indgår den akkumulerede energi. Den akkumulerede energi kan opdeles i makroskopisk kinetisk og potentiel energi samt indre energi der er kinetisk energi som kan henføres til enkeltpartiklers (molekyler) indbyrdes uordnede bevægelse. Ofte kan der ses bort fra makroskopisk kinetisk og potentiel energi. Energifbalancen er herefter

$$\frac{d(M(t) \cdot u_{out}(t))}{dt} = m_{in}(t) \cdot u_{in}(t) - m_{out}(t) \cdot u_{out}(t) + Q(t) + \frac{dA(t)}{dt} \tag{7.3}$$

hvor M er massen i kontrolvoluminet [kg], u er materialets specifikke indre energi [J/kg]. m er masseflow [kg/sek]. Q er tilført varmeeffekt [J/s]. A er udført arbejde på kontrolvoluminet. Effekten af det udførte arbejde kan, hvis der kun udføres arbejde via den strømmende væske udtrykkes ved

$$\frac{d(A(t))}{dt} = m_{in}(t) \cdot v_{in}(t) \cdot p_{in}(t) - m_{out}(t) \cdot v_{out}(t) \cdot p_{out}(t) \tag{7.4}$$

hvor $v = 1/\rho$ er væskens specifikke volumen i [kg/m³], og p er trykket i [pascal]. Dette indføres i energibalancen

$$\frac{d(M(t) \cdot u_{out}(t))}{dt} = m_{in}(t) \cdot (u_{in}(t) + v_{in}(t) \cdot p_{in}(t)) - m_{out}(t) \cdot (u_{out}(t) + v_{out}(t) \cdot p_{out}(t)) + Q(t) \tag{7.5}$$

I denne ligning indføres $M(t) = V/v(t)$ og samtidigt adderes på begge sider af lighedstegnet $V \cdot dp_{out}(t)/dt$

$$\begin{aligned}
V \frac{d}{dt} \left(\frac{u_{out}(t) + v_{out}(t) p_{out}(t)}{v_{out}(t)} \right) &= \\
V \frac{dp_{out}(t)}{dt} + m_{in}(t) \cdot (u_{in}(t) + v_{in}(t) \cdot p_{in}(t)) &- m_{out}(t) \cdot (u_{out}(t) + v_{out}(t) \cdot p_{out}(t)) + Q(t)
\end{aligned} \tag{7.6}$$

En forenkling af energibalancen fås ved at indføre den specifikke entalpi, som er defineret ved

$$h = u + p \cdot v \quad (7.7)$$

Herved bliver energibalancen

$$V \frac{d}{dt} \left(\frac{h_{out}(t)}{v_{out}(t)} \right) = V \frac{dp_{out}(t)}{dt} + m_{in}(t)h_{in}(t) - m_{out}(t)h_{out}(t) + Q(t) \quad (7.8)$$

Denne ligning bliver særlig enkel når variationer i trykket er negligeable, idet 7.8 da bliver

$$\frac{d}{dt}(M(t)h_{out}(t)) = m_{in}(t)h_{in}(t) - m_{out}(t)h_{out}(t) + Q(t) \quad (7.9)$$

Q som er den tilførte varmeeffekt, behandles under afsnittet om empiri. Den specifikke entalpi h behandles senere under afsnittet om vand/damp egenskaber. For systemer hvor materialer ikke skifter fase (f.eks. væske til damp) vil det gælde, at entalpien med god tilnærmelse er lig med

$$h(t) = c \cdot T(t) \quad (7.10)$$

hvor c [$J/(kg \cdot ^\circ C)$] er den specifikke varmekapacitet og T [$^\circ C$] er temperaturen. Indsættes dette gælder følgende effektbalance for enfasestrømning:

$$\frac{d(M(t) \cdot c \cdot T_{out}(t))}{dt} = \Sigma m_{in}(t) \cdot c \cdot T_{in}(t) - \Sigma m_{out}(t) \cdot c \cdot T_{out}(t) + Q(t) \quad (7.11)$$

Energibalancen giver således i dette tilfælde mulighed for at beregne temperaturen af mediet i og ud af kontrolvolumenet.

7.3 Varmetransmissionsligninger

I energibalanceligningen indgår der energitransmission fra et andet kontrolvolumen. I selve ligningen tages der højde for den transport der foregår via strømning. Der kan også indgå overførsel af varme på en af nedenstående måder:

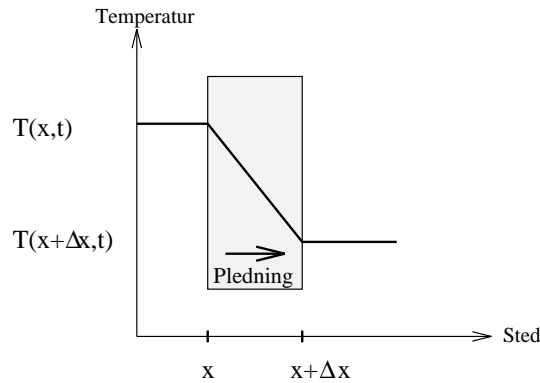
- Effekt ved varmeledning
- Effekt ved varmestråling.
- Effekt ved konvektion.

I det efterfølgende beskrives de tre varmetransmissionsformer hver for sig.

7.3.1 Ledning

Ledning er energitransmission i et homogent materiale, hvor varmen forplanter sig gennem selve materialet. På Figur 7.2 er temperaturprofilen i et volumen afgrænset af to planparallelle flader vist. Eksperimenter har vist, at effekten $P_l(t)$ (varmeflowet) gennem materialet er givet ved (*Fourier's lov*):

$$P_l(t) = \lambda A \frac{T(x, t) - T(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (7.12)$$



Figur 7.2: Temperaturprofil varmeledning.

| Materiale | Varmeledningstal |
|-----------|------------------|
| kobber | 370 |
| messing | 100 |
| stål | 50 |
| glas | 1 |
| teglsten | 0.5 |
| glasuld | 0.05 |

Tabel 7.1: Cirka-værdi for varmeledningstal $[J/(sek\ m\ ^\circ C)]$

hvor $A [m^2]$ er fladearealet, $\Delta x [m]$ er materialetykkelsen og $\lambda [J/(sek\ m\ ^\circ C)]$ er **varmeledningstallet**. For $\Delta x \rightarrow 0$ findes

$$P_l(t) = -\lambda A \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \quad (7.13)$$

Varmeledningstallet er eksperimentelt bestemt og kan findes ved opslag i diverse tabeller. I Tabel 7.1 er ca. værdier vist for udvalgte materialer.

I modeller af dynamiske systemer medtages udtryk for ledning i faste legemer sjældent, idet det som oftest enten er stærkt varmeledende stoffer (f.eks. metaller i rørvægge), hvor man kan regne med ens temperaturer over et kontrolvolumen, eller stærkt varmeisolerende stoffer (f.eks. sten- eller glasuld), hvor man kan se bort fra varmeakkumuleringen.

7.3.2 Stråling

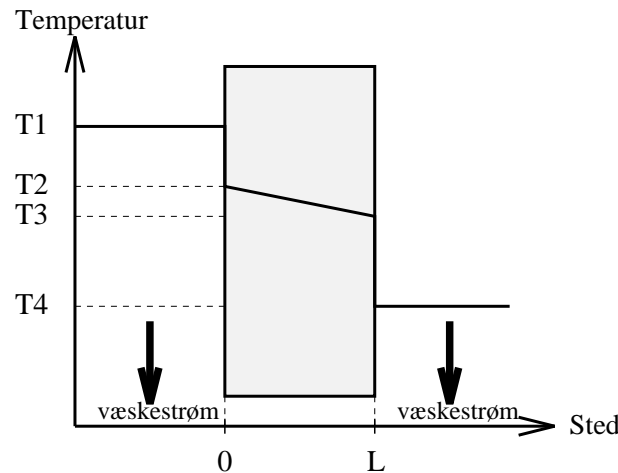
Ved stråling transmitteres energien i form af elektromagnetiske bølger. Som eksempel er effekten ved stråling P_s mellem to planparallelle flader med temperaturerne $T_1 [K]$ og $T_2 [K]$ givet ved:

$$P_s(t) = C(T_1(t)^4 - T_2(t)^4) \quad (7.14)$$

hvor $C [J/(sek K^4)]$ betegnes som **strålingsfaktoren**. Effekt fra stråling er kun betydende ved meget høje temperaturer.

7.3.3 Konvektion

Konvektion er varmetransmission hvor effekt overføres fra et sted i et strømmende fluid til et andet sted i fluidet. Den faktiske energitransmissionsproces fra en fluidpartikkel til en anden er stadig ledning, men energien kan transporteres fra et sted i rum et til et andet sted ved transport af selve partiklen. Denne sammensatte varmetransmissionsform forekommer når der er tale om effekt der overføres mellem et strømmende fluid og et fast stof. Man skelner imellem tvungen og fri konvektion. Tvungen konvektion opstår hvis fluidstrømningen er skabt af eksterne mekaniske mekanismer, som f.eks. en pumpe. Ved fri konvektion skyldes fluidbevægelsen udelukkende indre forskelle i massefylde, som f.eks. ved opvarmningen af vand i en kedel.



Figur 7.3: Temperaturprofil ledning og konvektion.

Figur 7.3 viser temperaturprofilen i en plan væg, hvor der på begge sider strømmer en væske. Som det ses af figuren regnes der med en konvektiv varmeovergang mellem væskens middeltemperatur (midlet over et tværsnit i stedaksen) og væskens temperatur tæt ved væggen (denne temperatur er lig med væggens temperatur i det ene endepunkt). Effekten P_k er givet ved (*Newton's afkølingslov*)

$$P_k(t) = \alpha A [T_1(t) - T_2(t)] \quad (7.15)$$

hvor A [m^2] er arealet og α [$\text{J}/(\text{s}^\circ\text{C m}^2)$] er **varmeovergangstallet**. I modsætning til varmeledningstallet er varmeovergangstallet ingen stofkonstant, men afhænger af det strømmende fluids beskaffenhed, af strømningshastigheden og af strømningsarten.

7.3.4 Varmeovergangstallet

I energiligningen spiller den konvektive varmetransmission, og dermed varmeovergangstallet α , ofte en stor rolle. Ønskes en værdi af α vil man ofte blive præsenteret for et funktionsudtryk af formen

$$Nu = f(Re, Pr) \quad (7.16)$$

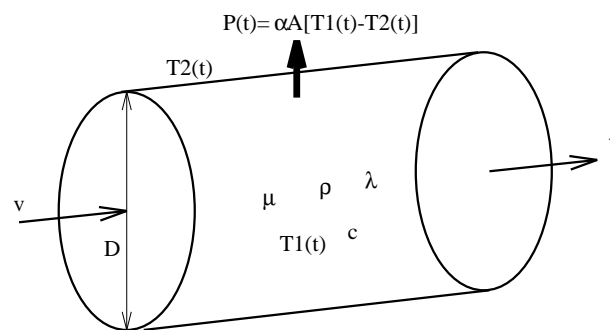
hvor Nu er Nusselts tal, Re er Reynolds tal og Pr er Prandtls tal. Hvordan denne relation

| variabel | benævnelse | enhed |
|----------------------|------------|--------------------------------|
| væskehastighed | v | m s^{-1} |
| rørdiameter | D | m |
| væske massefylde | ρ | kg m^{-3} |
| væske varmekapacitet | c | $m^2 s^{-2} {}^{\circ}C^{-1}$ |
| væske viskositet | μ | kg $m^{-1} s^{-1}$ |
| væske ledningsevne | λ | kg m $s^{-3} {}^{\circ}C^{-1}$ |
| varmeovergangstal | α | kg $s^{-3} {}^{\circ}C^{-1}$ |

α] Variable som forsøg har vist har betydning for α .

fremkommer, og hvordan den skal anvendes til bestemmelse af α , beskrives i det følgende eksempel.

Eksempel 7.1 (Dimensionsanalyse) På Figur 7.4 er vist et væskegennemstrømmet rør.



Figur 7.4: Væskegennemstrømmet rør.

Varmeovergangstallet α fra væskens middeltemperatur (midlet i et rørtværsnit) til væskens temperatur lige ved rørvæggen (som er lig med temperaturen på indersiden af røret) ønskes bestemt. Forsøg har vist, at variablene angivet i Tabel 7.1 har indflydelse på α .

At sammenknytte disse 7 variable har vist sig meget vanskeligt ved hjælp af fysikkens love, derfor anvendes en metode, som kaldes dimensionsanalyse. En særlig interesse knytter sig til den del af dimensionsanalysen, som fører til dimensionsløse størrelser. I det følgende gennemgås dimensionsanalysen punkt for punkt med særligt henblik på det valgte eksempel:

1. Find de relevante variable, der har indflydelse på det betragtede problem. I eksemplet er variablene fundet til

$$\alpha = f(v, D, \lambda, \rho, c, \mu) \quad (7.17)$$

2. Dimensionen af variablene kan udtrykkes som en kombination af fundamentale dimensioner. I eksemplet er de fundamentale dimensioner givet som $[kg]$, $[m]$, $[s]$ og $[^{\circ}C]$. Dimensionen af variablene kan derefter udtrykkes som vist i Tabel 7.1.
3. Indenfor et begrænset område, kan enhver funktion tilnærmes med produktet af de variable opløftet i hver sin eksponent

$$\alpha = K v^{a1} D^{a2} \rho^{a3} c^{a4} \mu^{a5} \lambda^{a6} \quad (7.18)$$

hvor der må gælde at

$$\text{Dim}(\alpha) = \text{Dim}(v)^{a_1} \text{Dim}(D)^{a_2} \dots \text{Dim}(\lambda)^{a_6} = [\text{kg s}^{-3} \text{ C}^{-1}] \quad (7.19)$$

idet K er dimensionsløs. Indsættes de fundamentale dimensioner findes

$$(\text{kg s}^{-3} \text{ C}^{-1}) = (\text{m s}^{-1})^{a_1} (\text{m})^{a_2} (\text{kg m}^{-3})^{a_3} (\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{ C}^{-1})^{a_4} (\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1})^{a_5} (\text{kg m s}^{-3} \text{ C}^{-1})^{a_6} \quad (7.20)$$

4. Ligning 7.20 løses med hensyn til $a_1 \dots a_6$. Udskrives ligningerne for kilogram, meter, sekunder og grader celsius findes

$$\text{kg}: 1 = a_3 + a_5 + a_6 \quad (7.21)$$

$$\text{m}: 0 = a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 - a_5 + a_6 \quad (7.22)$$

$$\text{s}: -3 = -a_1 - 2a_4 - a_5 - 3a_6 \quad (7.23)$$

$$\text{C}: -1 = -a_4 - a_6 \quad (7.24)$$

Dette giver 4 ligninger med 6 ubekendte, hvorved arbitrære værdier tilskrives 2 af de indgående eksponenter, hvorefter de resterende 4 eksponenter kan bestemmes af de 4 ligninger.

I [JW76] gives en mere omfattende beskrivelse af denne problemstilling, blandt andet bestemmes, hvor mange indbyrdes uafhængige dimensionsløse størrelser der kan dannes (i dette eksempel 3).

5. De dimensionsløse størrelser bestemmes. Vælges $a_1 = a$ og $a_4 = b$ som kendte, findes $a_2 = a - 1$, $a_3 = a$, $a_5 = b - a$ og $a_6 = 1 - b$. Indsættes dette i Ligning 7.18 findes

$$\alpha = K v^a D^{a-1} \rho^a c^b \mu^{b-a} \lambda^{1-b} = K v^a D^a D^{-1} \rho^a c^b \mu^b \mu^{-a} \lambda \lambda^{-b} \Rightarrow \quad (7.25)$$

$$\left(\frac{\alpha D}{\lambda} \right) = K \left(\frac{D \rho v}{\mu} \right)^a \left(\frac{\mu c}{\lambda} \right)^b \quad (7.26)$$

Ligning (7.26) er dimensionsløs. De tre indgående størrelser er givet ved

$$\text{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} \quad (7.27)$$

$$\text{Re} = \frac{D \rho v}{\mu} \quad (7.28)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu c}{\lambda} \quad (7.29)$$

De tre dimensionsløse produkter indgår i mange andre strømningssammenhænge og har fået navnene Nusselts tal, Reynolds tal og Prandtls tal. Dette betyder at det konvektive varmeovergangstal er givet ved relationen

$$\text{Nu} = K \text{Re}^a \text{Pr}^b \quad (7.30)$$

Eksperimenter, hvor sammenhørende værdier af Nu, Re og Pr måles, giver herefter den ønskede funktionssammenhæng. Som det fremgår af blandt andet [VDI84] og [Cha84] er mange konvektive varmetransmissionsproblemer løst ved hjælp af denne eksperimentelle

metode. Eksempelvis gælder ifølge [Cha84] følgende relation ved tvungen konvektion for væsker

$$\text{Nu} = 0.023\text{Re}^{0.8}\text{Pr}^n \quad (7.31)$$

hvor udtrykket gælder for

$$n = 0.4 \quad \text{ved opvarmning} \quad (7.32)$$

$$n = 0.3 \quad \text{ved afkøling} \quad (7.33)$$

$$0.7 < \text{Pr} < 160 \quad (7.34)$$

$$10^4 < \text{Re} < 10^6 \quad (7.35)$$

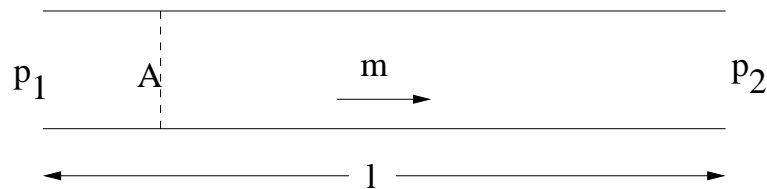
□

Kapitel 8

Impulsbalance

I dette kapitel opstilles impulslikningen for et system med væske eller gas strømning. Impulslikningen er ofte nødvendig for at bestemme sammenhæng mellem tryk og flow. Dette omfatter også friktion herunder tab i ventiler. I flowsystemer indgår ofte pumper og som eksempel gives en simpel model for en centrifugalpumpe.

8.1 Impulsbalance



Figur 8.1: Væskestrømning gennem et rør

En væske, som flyder gennem et rør se figur 8.1 er påvirket af en kraft, hvis der er en trykforskel mellem enderne af røret. I første omgang ser vi bort fra tab ved friktion

$$\rho l A \frac{dv}{dt} = p_1 A - p_2 A \quad (8.1)$$

hvor v er væskens hastighed, som kan udtrykkes ved hjælp af masseflow eller volumenflow

$$v = \frac{m}{\rho A} \quad (8.2)$$

Hvilket giver os

$$\frac{l}{A} \frac{dm}{dt} = p_1 - p_2 \quad (8.3)$$

Friktion mod rørets vægge og internt i væsken viser sig ved at der skal en trykforskel til for at opretholde et flow.

$$\Delta P_f = h_f$$

h_f er afhængig af rørets og væskens egenskaber, i særlig grad er h_f afhængig af strømningshastigheden og dermed af masseflowet.

8.2 Friktion ved strømning

Ved lave hastigheder vil strømningen være laminar og trykfaldet fra friktion vil i dette område være proportionalt med hastigheden og dermed masseflowet.

Darcy's low:

$$\Delta p_{f,l} = \frac{R_f}{\rho} m \quad (8.4)$$

Konstanten R_f kaldes flow resistansen. For runde lange rør (Poiseuille strømning) gælder

$$\Delta p_{f,l} = \frac{8v\eta L}{R^2} = \frac{8\eta L}{\rho\pi R^4} m \quad (8.5)$$

R er rørets radius, L dets længde, η og ρ er væskens dynamiske viskositet og massefylde.

Ved større hastigheder bliver strømningen turbulent og trykfaldet fra friktion tilnærmet proportionalt med hastigheden eller flowet i anden potens.

$$\Delta p_{f,t} = \frac{R_t}{\rho^2} m^2 \quad (8.6)$$

For at finde R_t må man bruge opslagsværker som det tyske VDI Wärmeatlas.

For runde lange rør kan man regne med

$$\Delta p_{f,t} = f_d \frac{v^2 \rho L}{2D} = f_d \frac{8L}{\pi^2 D^5 \rho} m^2$$

hvor D er rørdiameteren og f_d er Darcy's friktionsfaktor.

Darcy's friktionsfaktor kan findes i et såkaldt Moody diagram som kan ses på figur 8.2

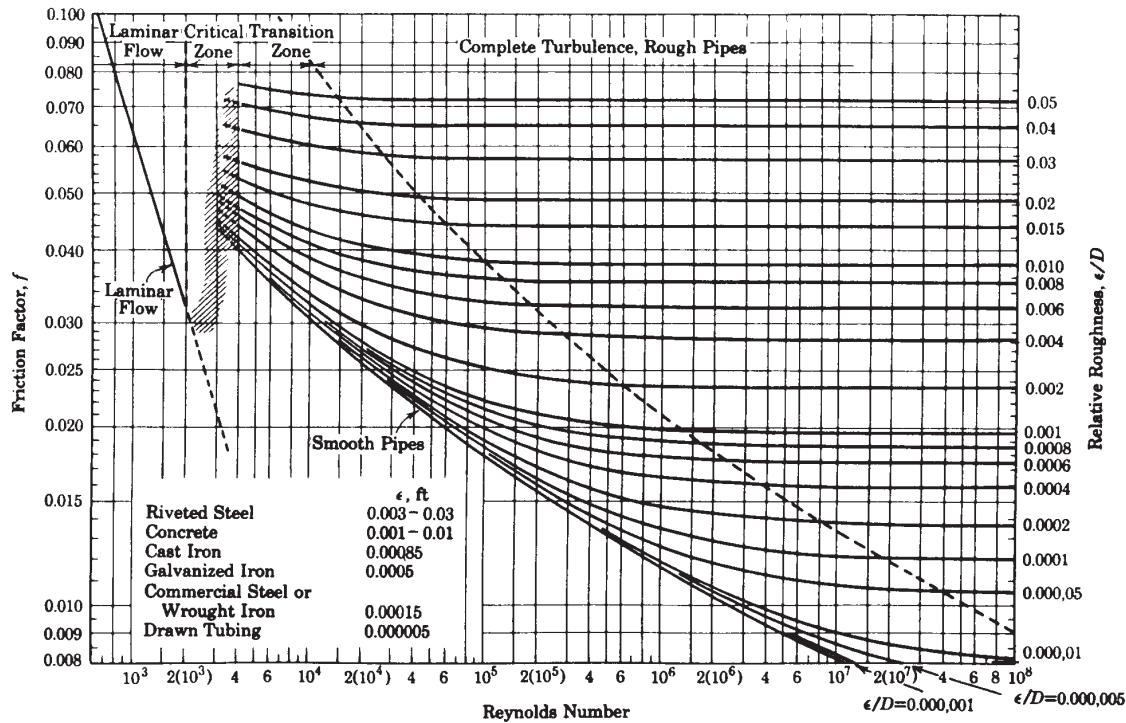
ϵ/D ruheden (diameter af overfladeujævnheder) delt med diameteren. Reynolds tal er for strømning i runde rør defineret ved

$$Re = \frac{d\rho v}{\eta}$$

Reynolds tal er mere generelt defineret ved

$$Re = \frac{d_h \rho v}{\eta}$$

hvor d_h for runde rør er diameteren $d = 2R$ og for andre tværsnit er 4 gange tværsnitsarealet delt med omkredsen.



Figur 8.2: Darcy friktions faktoren f som funktion af rørdiameter, Reynolds tal og rør-ruhed [Cha84].

Overgang fra laminar strømning til turbulent sker omtrentlig når Reynolds tal overskrider

$$Re_{krit} = 2200$$

En beregning af Re kan altså indikere hvilken friktionsform der vil være. Desuden bruges Re ved bestemmelse af friktionsfaktoren ved brug af Moody diagrammet. Darcy's friktionsfaktor kan også findes ved den empiriske formel

$$f_d = \frac{1.325}{\left(\ln\left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}}\right)\right)^2}$$

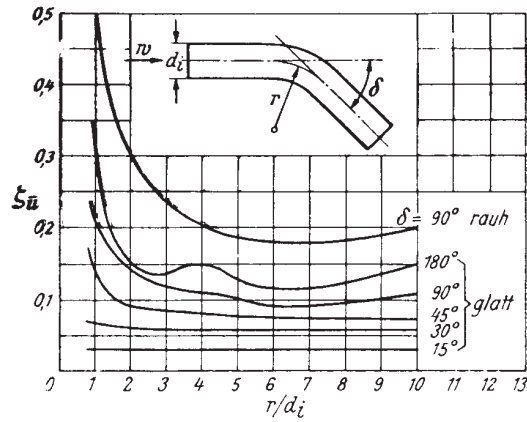
Ved gennemløb af formstykker som bøjninger, indsnævring, udvidelser, blænder etc. vil der som regel være turbulent flow. Tabene vil derfor være proportionale med hastigheden i anden potens:

$$\Delta p_{form} = \xi \rho \frac{v^2}{2} \quad (8.7)$$

v er her hastigheden af væsken i det rørstykke der er tilsluttet formstykket.

Formfaktoren, ξ , dækker over friktion gennem diverse formstykker. Formfaktoren kan findes ved tabelopslag i f.eks. Wärmetlas [VDI84]. Som eksempel kan ξ findes for rørbøjninger hvis Reynolds tal er større end 10^5 ud fra Figur 8.3.

For ventiler gælder et formeludtryk som ligning 8.7, hvor ξ er afhængig af ventilens åbningsareal og dermed kan kontrolleres for eksempel med en motor.



Figur 8.3: Rørfriktionen ξ for bøjet rør, $Re > 10^5$, [VDI84].

8.3 Pumper

Sammenhængen mellem flow og tryk i en lukket kreds med en pumpe vil være bestemt af pumpens tryk-flow karakteristisk, og trykfaldene over de rør og andre komponenter der er tilsluttet pumpen

$$p_{pumpe}(m) = \Sigma \Delta p_{lige}(m) + \Sigma \Delta p_{form}(m) + \Sigma \frac{l}{A} \frac{dm}{dt} \quad (8.8)$$

Kendes pumpekarakteristikken fra fabrikantens oplysninger kan man bestemme det arbejds punkt, hvor flowet vil falde til ro ved at indtegne den stationære sammenhæng mellem trykfald gennem rør indsnævring mv. og flow (m), altså anlægskarakteristikken i samme diagram som pumpekarakteristikken. Skæringspunktet mellem de to kurver bestemmer arbejds punktet.

En almindelig anvendt pumpe er centrifugalpumpen, da den giver et jævnt væskeflow og kan neddrosles med en ventil uden at den ødelægges. Et alternativ til neddrosling er at regulere omdrejningstallet på pumpen. En typisk tryk-flow karakteristisk for en centrifugalpumpe er vist på figur 8.4, hvor der er vist karakteristikker ved forskellige omløbstal. Endvidere er der vist effektkarakteristikker. Det bemærkes at trykket er angivet som en løftehøjde, hvilket vil sige den væskesøjle der vil give samme tryk. Dvs at trykket i SI-enheden pascal kan bestemmes ved

$$\Delta p_{pumpe} = \rho_{vand} g H \quad (8.9)$$

Flowet i karakteristikken er angivet som volumenflow $[m^3/h]$

Pumpens (Q, H) karakteristikker ved varierende omløbshastigheder, n , kan tilnærmet beskrives med nedenstående ligning

$$\Delta H = H_{max} \left(\left(\frac{n}{n_{max}} \right)^2 - \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^2 \right) \quad (8.10)$$

hvor H_{max} er pumpens maksimale løftehøjde ved maksimalt omdrejningstal og Q_{max} er det maksimale flow ligeledes ved maksimalt omdrejningstal.



Figur 8.4: Karakteristik for centrifugalpumpe (Grundfos UPE 65-120 F)

8.4 Udvidet impulsbalance

I afsnit 8.1 blev der opstillet en impulsbalance for et rørstykke, hvor det blev forudsat at tværsnittet var ens for hele røret og at massefylden var konstant og ens i hele rørets udstrækning. Vi vil nu udvide impulsbalancen, så disse antagelser ikke er nødvendige. Vi vil bruge et rørstykke som skitseret på figur 8.5 som udgangspunkt

Impulsbalancen for opstilles ved at betragte det infinitesimale volumen på figur 8.5b. På dette virker følgende kræfter i z-aksens retning:

Kraft på nederste endeflade:

$$F_1 = A(z)p(z, t) \quad (8.11)$$

Kraft på øverste endeflade:

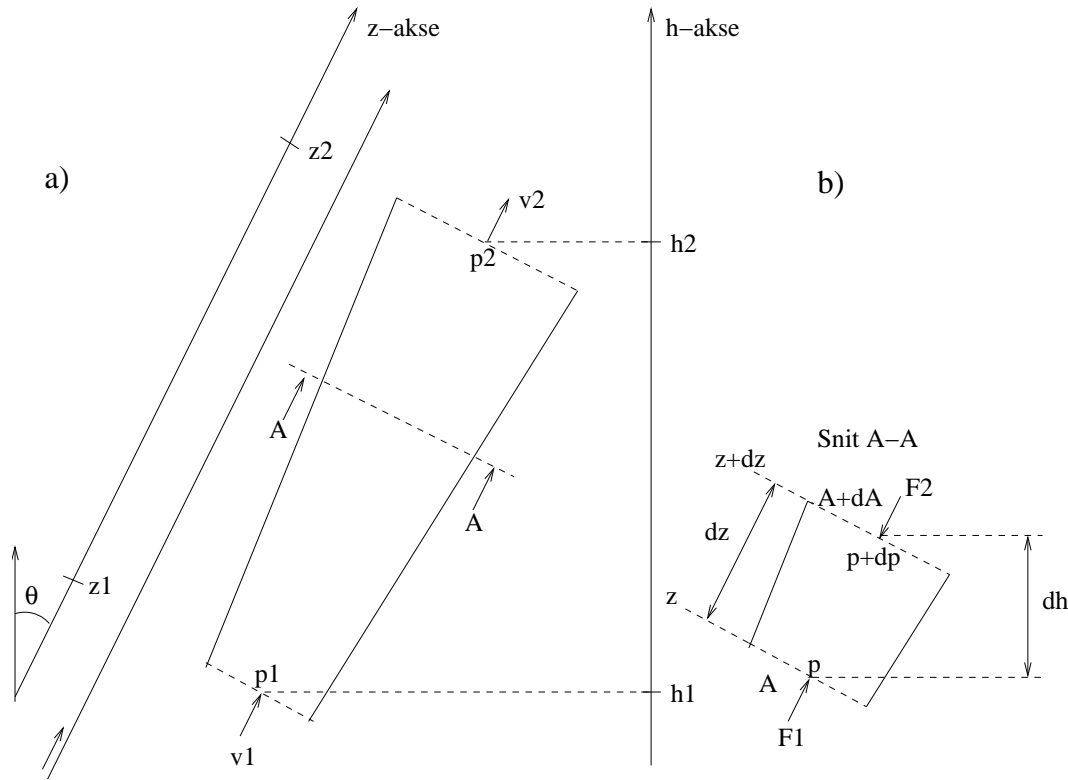
$$F_2 = -A(z + dz)p(z + dz, t) \quad (8.12)$$

Komposant i z-retning af trykkræfter langs siderne

$$F_3 = (A(z + dz) - A(z))p(z + dz/2, t) \quad (8.13)$$

Tyngdekraft:

$$F_g = -A\rho(z, t)gdz\cos\theta = -A\rho(z, t)gdh \quad (8.14)$$



Figur 8.5: Rørstykke hvorpå impulsbalancen anvendes. (a) Rørstykke. (b) Infinitesemalt rørstykke.

hvor $A [m^2]$ er tværsnitsareal, $p [Pa]$ er tryk, $\rho [kg/m^3]$ er massefylde, $h [m]$ er højden og $\theta [rad]$ er vinklen mellem z-akse og den lodrette h-akse. Idet der ses bort fra tab, giver Newtons 2. lov:

$$Adz\rho(z,t)\frac{dv(z,t)}{dt} = F_1 + F_2 + F_3 + F_g \quad (8.15)$$

De tre bidrag fra trykkræfter kan summeres op til, idet infinitesemale led af anden orden bortkastes

$$F_1 + F_2 + F_3 = -A(z)\frac{\partial p(z)}{\partial z}dz \quad (8.16)$$

hvor $v[m/s]$ er hastigheden. Newtons lov omhandler accelerationen af en bestemt partikelmængde. Partiklerne i det lille kontrolvolumen har til tiden t hastigheden $v(z,t)$ og vil til tiden $t + dt$ have flyttet sig stykket vdt i z-retningen. Accelerationen af partiklerne kan derfor udregnes som

$$a = \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}v(z,t) \quad (8.17)$$

Ved at indsætte dette i 8.15 findes

$$A\rho(z,t)\left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}v(z,t)\right)dz = -A(z)\frac{\partial p(z)}{\partial z}dz - A\rho(z,t)g\cos\theta dz \quad (8.18)$$

hvilket kan omregnes til

$$\frac{1}{\rho(z,t)}\frac{\partial p(z,t)}{\partial z} + g\cos\theta + \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + v(z,t)\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = 0 \quad (8.19)$$

Dette er en partiel differentialligning. Ved at integrere ligningen med hensyn til z fås en ligning for rørstykket (Bernoullis ligning)

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\rho(z,t)} \frac{\partial p(z,t)}{\partial z} dz + \int_{z_1}^{z_2} g \cos \theta dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} dz + \int_{z_1}^{z_2} v(z,t) \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} dz = 0 \quad (8.20)$$

I dette udtryk er der ikke medtaget tabsled. Indføres der et samlet tab for friktion, indsnævring, rørbøjninger mv findes:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\rho(z,t)} \frac{\partial p(z,t)}{\partial z} dz + \int_{z_1}^{z_2} g \cos \theta dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} dz + \int_{z_1}^{z_2} v(z,t) \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} dz = h_t \quad (8.21)$$

hvor h_t [J/kg] repræsenterer tab fra friktion, indsnævring, rørbøjninger etc.

Under antagelse af samme værdi af ρ og $\partial v / \partial t$ i hele rørstrækningen, kan integralet med $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $z \cos \theta = h$ og $v_1 = v_2 = v$ beregnes til

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + gh + \frac{dv}{dt} z = -h_t \quad (8.22)$$

For det tabsled, der indgår i ligningerne 8.21 og 8.22, kan der findes udtryk for såvel tab i lige stykker som tab i formstykker. For lige rørstykker har tabene formen:

$$h_{lige} = \lambda \frac{v^2 z}{2D} \quad (8.23)$$

hvor D er rørets diameter λ er en konstant, som er afhængig af rørets ruhed værdier for typiske rør kan findes ved tabelopslag i f.eks [VDI84] Ved gennemløb af formstykker som bøjninger, indsnævring, udvidelser, ventiler, blænder etc. vil tabene være

$$h_{form} = \xi \frac{v^2}{2} \quad (8.24)$$

hvor ξ , som det fremgår af afsnittet om empiri ligeledes vil kunne findes ved tabelopslag. Det samlede tab findes til

$$h_t = \sum h_{lige} + \sum h_{form} = \left(\sum \frac{\lambda z}{D} + \sum \xi \right) \frac{v^2}{2} \quad (8.25)$$

Indsættes formel 8.25 i 8.22 kan man finde en ligning til at bestemme trykforskellen

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = -gh - \left(\sum \frac{\lambda z}{D} + \sum \xi \right) \frac{v^2}{2} - z \frac{dv}{dt} \quad (8.26)$$

Indføres der heri masseflowet givet ved

$$m = vA\rho \quad (8.27)$$

finder man impulsbalancen for en inkompressibel énfase væskestrømning til

$$\Delta P(t) = p_1(t) - p_2(t) = K_f m^2(t) + K_d \frac{dm(t)}{dt} + \rho h g \quad (8.28)$$

hvor de størrelser der er afhængige af rørsystemets udformning kan skrives på formen

$$K_f = \frac{\left(\sum \frac{\lambda z}{D} + \sum \xi \right)}{2A^2 \rho} \quad K_d = \frac{z}{A} \quad (8.29)$$

Det ses af impulsbalancen 8.28, at trykdifferencen er en funktion af masseflowet i anden potens, samt af et dynamisk led, der behandler ændring af masseflowet og endeligt et led stammende fra tyngdeaccelerationen. I termiske systemer vil dynamikken af impulslikningen ofte være meget hurtig sammenlignet med dynamikken knyttet til indre energi ved energibalancen. Vil man begrænse ordenen af systemet kan man derfor med god tilnærmelse erstatte den dynamiske likning med en stationær udgave givet ved:

$$\Delta P(t) = K_f m^2(t) + \rho h g \quad (8.30)$$

Kapitel 9

Flerfasesystemer

Dette kapitel gives en introduktion til opstilling af modeller for systemer hvor der sker faseskift. Først gives en generel introduktion til emnet, hvorefter der gives et simpelt eksempel.

9.1 Tilstandsrelationer

Et afgrænset systems tilstand kan beskrives ved hjælp af et antal tilstandsstørrelser. Relationer mellem tilstandene beskriver systemets egenskaber. Af særlig interesse er tilstandsrelationerne for et vand/dampsystem, da vand spiller en stor rolle som medium for transport af energi. Vand kan som en række andre stoffer beskrives ved hjælp af tilstandsstørrelserne tryk (\wp), specifik volumen (v) og temperaturen (T). Kender man to af de tre tilstandsstørrelser kan den tredje bestemmes ved tilstandsrelationerne for det pågældende stof:

$$\wp = f_p(T, v); \quad v = f_v(\wp, T); \quad T = f_T(\wp, v) \quad (9.1)$$

Afhængig af tryk og temperatur kan et stof optræde i forskellige faser; den faste fase (F), væskefasen (V) og gas eller dampfasen (D). Indtegnes grænserne mellem de forskellige faser i et T, \wp -koordinatsystem fås et fasediagram, som vist på Figur 9.1

I grænserne mellem faserne eksisterer to faser samtidigt. I triplepunktet (t) sameksisterer de tre faser. For vand er denne tilstand bestemt til 0.01 °C og 0.06078 bar. Fordampningskurven ender ved det kritiske punkt (c), over hvilket forskellen mellem væske -og dampfasen forsvinder. Det kritiske punkt for vand er bestemt til 374.12 °C og 221.3 bar. I de tidligere opstillede masse -energi -og impulsbalancer indgår massefylde og entalpi for materialet. Det er derfor interessant at udtrykke disse ved hjælp af tilstandsstørrelser. For vand er væske og dampfaserne tabelleret i f.eks. [Sch82].

Massefylden findes som

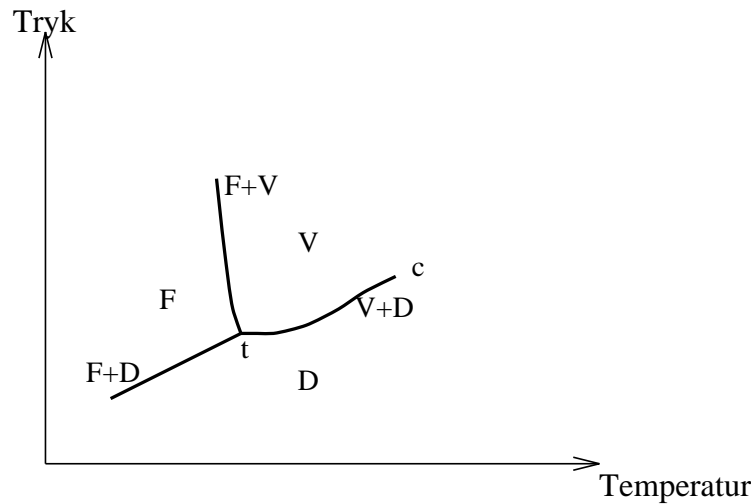
$$\rho = f_h(\wp, T) \quad (9.2)$$

På Figur 9.2 er vist et uddrag af denne tabel.

Den specifikke entalpi h [J/kg] er indført i Eksempel 2 som:

$$h = u + \wp/\rho_M \quad (9.3)$$

Entalpi er som energi et relativt begreb, idet nulpunktet kan fastlægges vilkårligt, det er dog almindeligt, at fastlægge nulpunktet for vands entalpi, som entalpien i væskefasen ved



Figur 9.1: φ, T fasediagram.

tripelpunktet. Det kan endvidere være hensigtsmæssig at operere med den specifikke varmekapacitet ved konstant tryk:

$$c_p = \frac{\partial h}{\partial T}_{\varphi=\varphi_0} \quad (9.4)$$

Da c_p i visse temperaturintervaller er tilnærmelsesvis konstant, kan man i systemer, hvor der kun optræder en fase, lave tilnærmelsen:

$$h \approx c_p \cdot T \quad (9.5)$$

Optegnes h som funktion af φ (eller T) med fastholdt T (eller φ), vil faseovergangene optræde som diskontinuiteter. Det samme gælder, hvis man tilsvarende optegner v som funktion af φ eller T . På Figur 9.3 er vist et h, φ - diagram for vand/damp.

For at beskrive tilstanden ved faseovergang anvendes blandingsforholdet mellem faserne. For væske/damp anvendes tørhedsgraden (dampkvaliteten) x defineret som masseandelen af damp i væske/dampblandingen.

$$x = \frac{M''}{M' + M''} \quad (9.6)$$

hvor M' er massen af mættet væske og M'' er massen af mættet damp. Sammen med egenskaberne ved mættet vand og mættet damp ved det pågældende tryk (eller temperatur, en af de to størrelser beskriver mætningstilstanden) bestemmer x egenskaberne ved blandingen

$$v = v'(\varphi)(1 - x) + v''(\varphi)x \quad (9.7)$$

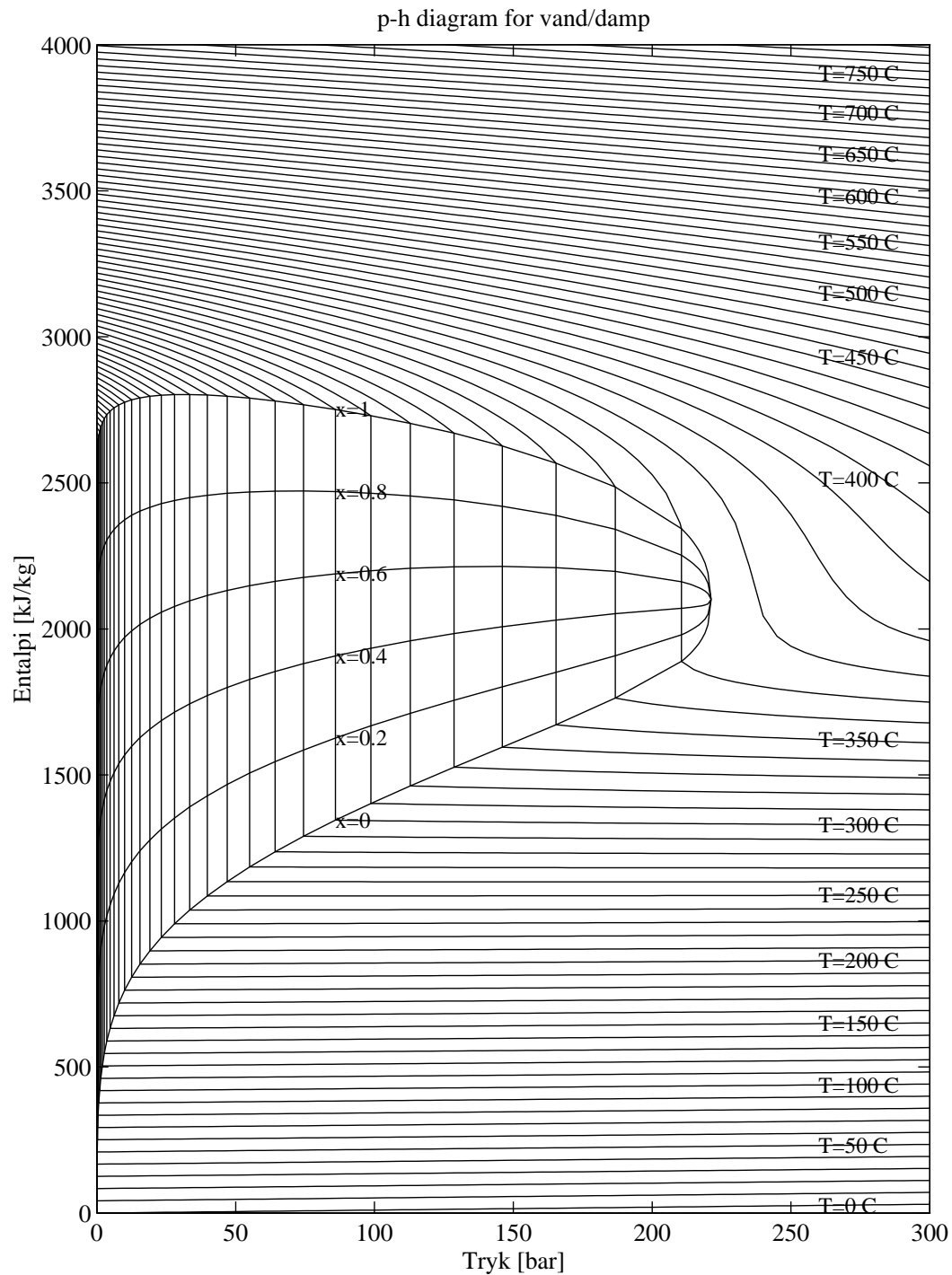
$$h = h'(\varphi)(1 - x) + h''(\varphi)x \quad (9.8)$$

Eksempel 9.1 (Kondensering) I eksemplet undersøges et rør som vist på Figur 9.4. Til røret ledes overhødet damp med en temperatur på 340°C og et tryk på 110 bar. Igennem røret afgiver dampen energi til rørvæggen, og det antages at ud af røret løber mættet vand. Det antages at trykket langs røret er konstant lig med 110 bar.

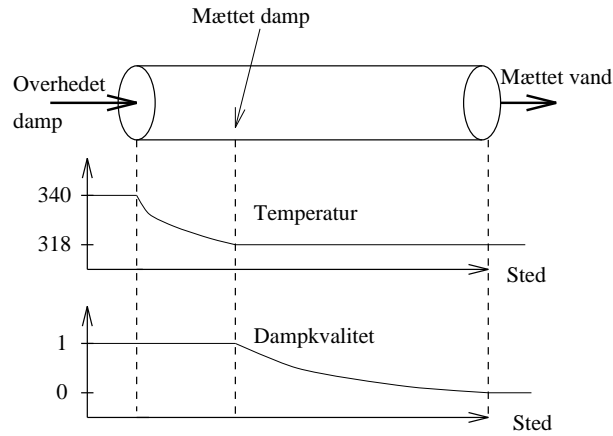
Table 3. Water and Superheated Steam (Continuation) Wasser und überhitzter Dampf (Fortsetzung)

| t °C | 110 bar $t_s = 318,05$ °C | | | 115 bar $t_s = 321,40$ °C | | | 120 bar $t_s = 324,65$ °C | | | 125 bar $t_s = 327,79$ °C | | |
|-----------|---------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|
| | v'' | h'' | s'' | v'' | h'' | s'' | v'' | h'' | s'' | v'' | h'' | s'' |
| | 0,01601 | 2709,3 | 5,5595 | 0,01511 | 2699,5 | 5,5298 | 0,01428 | 2689,2 | 5,5002 | 0,01351 | 2678,4 | 5,4706 |
| | v | h | s | v | h | s | v | h | s | v | h | s |
| 0 | 0,0009948 | 11,1 | 0,0006 | 0,0009945 | 11,6 | 0,0006 | 0,0009943 | 12,1 | 0,0006 | 0,0009940 | 12,6 | 0,0006 |
| 10 | 0,0009951 | 52,7 | 0,1499 | 0,0009949 | 53,2 | 0,1499 | 0,0009947 | 53,6 | 0,1498 | 0,0009944 | 54,1 | 0,1498 |
| 20 | 0,0009968 | 94,2 | 0,2939 | 0,0009966 | 94,6 | 0,2938 | 0,0009963 | 95,1 | 0,2937 | 0,0009961 | 95,6 | 0,2936 |
| 30 | 0,0009995 | 135,6 | 0,4331 | 0,0009993 | 136,1 | 0,4329 | 0,0009990 | 136,6 | 0,4328 | 0,0009988 | 137,0 | 0,4326 |
| 40 | 0,0010030 | 177,2 | 0,5678 | 0,0010028 | 177,6 | 0,5676 | 0,0010026 | 178,0 | 0,5674 | 0,0010023 | 178,5 | 0,5672 |
| 50 | 0,0010073 | 218,7 | 0,6984 | 0,0010070 | 219,1 | 0,6982 | 0,0010068 | 219,6 | 0,6979 | 0,0010066 | 220,0 | 0,6977 |
| 60 | 0,0010122 | 260,3 | 0,8251 | 0,0010120 | 260,7 | 0,8249 | 0,0010118 | 261,1 | 0,8246 | 0,0010116 | 261,5 | 0,8243 |
| 70 | 0,0010178 | 301,9 | 0,9483 | 0,0010176 | 302,3 | 0,9480 | 0,0010174 | 302,7 | 0,9477 | 0,0010171 | 303,1 | 0,9474 |
| 80 | 0,0010240 | 343,6 | 1,0681 | 0,0010238 | 344,0 | 1,0677 | 0,0010235 | 344,4 | 1,0674 | 0,0010233 | 344,8 | 1,0671 |
| 90 | 0,0010308 | 385,4 | 1,1847 | 0,0010305 | 385,8 | 1,1843 | 0,0010303 | 386,2 | 1,1840 | 0,0010300 | 386,6 | 1,1836 |
| 100 | 0,0010381 | 427,3 | 1,2984 | 0,0010379 | 427,6 | 1,2980 | 0,0010376 | 428,0 | 1,2977 | 0,0010374 | 428,4 | 1,2973 |
| 110 | 0,0010460 | 469,2 | 1,4094 | 0,0010458 | 469,6 | 1,4090 | 0,0010455 | 470,0 | 1,4086 | 0,0010452 | 470,3 | 1,4082 |
| 120 | 0,0010545 | 511,3 | 1,5179 | 0,0010542 | 511,7 | 1,5175 | 0,0010540 | 512,1 | 1,5171 | 0,0010537 | 512,4 | 1,5166 |
| 130 | 0,0010636 | 553,6 | 1,6241 | 0,0010633 | 554,0 | 1,6236 | 0,0010630 | 554,3 | 1,6232 | 0,0010627 | 554,6 | 1,6227 |
| 140 | 0,0010733 | 596,1 | 1,7281 | 0,0010730 | 596,4 | 1,7276 | 0,0010727 | 596,7 | 1,7271 | 0,0010724 | 597,1 | 1,7266 |
| 150 | 0,0010837 | 638,7 | 1,8301 | 0,0010833 | 639,0 | 1,8296 | 0,0010830 | 639,4 | 1,8291 | 0,0010827 | 639,7 | 1,8285 |
| 160 | 0,0010947 | 681,6 | 1,9304 | 0,0010944 | 681,9 | 1,9298 | 0,0010940 | 682,2 | 1,9292 | 0,0010937 | 682,5 | 1,9287 |
| 170 | 0,0011065 | 724,8 | 2,0289 | 0,0011061 | 725,1 | 2,0283 | 0,0011058 | 725,4 | 2,0277 | 0,0011054 | 725,7 | 2,0271 |
| 180 | 0,0011191 | 768,3 | 2,1259 | 0,0011187 | 768,6 | 2,1253 | 0,0011183 | 768,8 | 2,1246 | 0,0011179 | 769,1 | 2,1240 |
| 190 | 0,0011326 | 812,1 | 2,2216 | 0,0011321 | 812,4 | 2,2209 | 0,0011317 | 812,6 | 2,2202 | 0,0011313 | 812,9 | 2,2195 |
| 200 | 0,0011470 | 856,4 | 2,3161 | 0,0011466 | 856,6 | 2,3154 | 0,0011461 | 856,8 | 2,3146 | 0,0011456 | 857,0 | 2,3139 |
| 210 | 0,0011626 | 901,0 | 2,4096 | 0,0011621 | 901,2 | 2,4088 | 0,0011615 | 901,4 | 2,4080 | 0,0011610 | 901,6 | 2,4072 |
| 220 | 0,0011793 | 946,3 | 2,5022 | 0,0011788 | 946,4 | 2,5013 | 0,0011782 | 946,6 | 2,5004 | 0,0011776 | 946,7 | 2,4996 |
| 230 | 0,0011975 | 992,0 | 2,5941 | 0,0011969 | 992,2 | 2,5932 | 0,0011962 | 992,3 | 2,5922 | 0,0011956 | 992,4 | 2,5913 |
| 240 | 0,0012173 | 1038,6 | 2,6856 | 0,0012165 | 1038,6 | 2,6846 | 0,0012158 | 1038,7 | 2,6836 | 0,0012151 | 1038,8 | 2,6825 |
| 250 | 0,0012389 | 1085,9 | 2,7770 | 0,0012381 | 1085,9 | 2,7758 | 0,0012373 | 1085,9 | 2,7747 | 0,0012364 | 1086,0 | 2,7736 |
| 260 | 0,0012628 | 1134,2 | 2,8684 | 0,0012619 | 1134,1 | 2,8671 | 0,0012609 | 1134,1 | 2,8659 | 0,0012600 | 1134,1 | 2,8646 |
| 270 | 0,0012894 | 1183,6 | 2,9603 | 0,0012883 | 1183,5 | 2,9589 | 0,0012872 | 1183,4 | 2,9575 | 0,0012861 | 1183,3 | 2,9561 |
| 280 | 0,0013194 | 1234,5 | 3,0531 | 0,0013180 | 1234,3 | 3,0515 | 0,0013167 | 1234,1 | 3,0500 | 0,0013154 | 1233,9 | 3,0484 |
| 290 | 0,0013536 | 1287,2 | 3,1475 | 0,0013520 | 1286,8 | 3,1457 | 0,0013504 | 1286,5 | 3,1439 | 0,0013488 | 1286,2 | 3,1421 |
| 300 | 0,0013936 | 1342,2 | 3,2444 | 0,0013915 | 1341,7 | 3,2422 | 0,0013895 | 1341,2 | 3,2401 | 0,0013875 | 1340,6 | 3,2380 |
| 310 | 0,0014416 | 1400,5 | 3,3451 | 0,0014389 | 1399,6 | 3,3424 | 0,0014362 | 1398,8 | 3,3398 | 0,0014336 | 1398,1 | 3,3373 |
| 320 | 0,01628 | 2723,5 | 5,5835 | 0,0014979 | 1462,1 | 3,4486 | 0,0014941 | 1460,8 | 3,4453 | 0,0014905 | 1459,7 | 3,4420 |
| 330 | 0,01755 | 2787,4 | 5,6904 | 0,01625 | 2760,0 | 5,6310 | 0,01502 | 2730,2 | 5,5686 | 0,01383 | 2697,2 | 5,5018 |
| 340 | 0,01864 | 2841,7 | 5,7797 | 0,01738 | 2819,0 | 5,7279 | 0,01619 | 2794,7 | 5,6747 | 0,01508 | 2768,7 | 5,6195 |
| 350 | 0,01961 | 2889,6 | 5,8571 | 0,01836 | 2870,1 | 5,8107 | 0,01721 | 2849,7 | 5,7636 | 0,01612 | 2828,0 | 5,7155 |
| 360 | 0,02049 | 2932,8 | 5,9259 | 0,01926 | 2915,8 | 5,8835 | 0,01811 | 2898,1 | 5,8408 | 0,01704 | 2879,6 | 5,7976 |
| 370 | 0,02131 | 2972,5 | 5,9882 | 0,02007 | 2957,4 | 5,9487 | 0,01893 | 2941,8 | 5,9093 | 0,01787 | 2925,7 | 5,8698 |
| 380 | 0,02208 | 3009,6 | 6,0454 | 0,02084 | 2996,0 | 6,0082 | 0,01969 | 2982,0 | 5,9712 | 0,01863 | 2967,6 | 5,9345 |
| 390 | 0,02281 | 3044,5 | 6,0985 | 0,02156 | 3032,1 | 6,0631 | 0,02041 | 3019,4 | 6,0281 | 0,01934 | 3006,4 | 5,9935 |
| 400 | 0,02351 | 3077,8 | 6,1483 | 0,02225 | 3066,4 | 6,1144 | 0,02108 | 3054,8 | 6,0810 | 0,02001 | 3042,9 | 6,0481 |
| 410 | 0,02418 | 3109,7 | 6,1954 | 0,02291 | 3099,2 | 6,1627 | 0,02173 | 3088,4 | 6,1306 | 0,02065 | 3077,5 | 6,0991 |
| 420 | 0,02483 | 3140,5 | 6,2401 | 0,02354 | 3130,7 | 6,2085 | 0,02236 | 3120,7 | 6,1775 | 0,02126 | 3110,5 | 6,1471 |
| 430 | 0,02546 | 3170,3 | 6,2828 | 0,02416 | 3161,1 | 6,2521 | 0,02296 | 3151,8 | 6,2221 | 0,02186 | 3142,3 | 6,1927 |
| 440 | 0,02608 | 3199,4 | 6,3238 | 0,02476 | 3190,7 | 6,2939 | 0,02355 | 3182,0 | 6,2647 | 0,02243 | 3173,1 | 6,2362 |
| 450 | 0,02668 | 3227,7 | 6,3633 | 0,02534 | 3219,6 | 6,3341 | 0,02412 | 3211,4 | 6,3056 | 0,02299 | 3203,0 | 6,2778 |
| 460 | 0,02726 | 3255,5 | 6,4014 | 0,02591 | 3247,8 | 6,3728 | 0,02467 | 3240,0 | 6,3450 | 0,02353 | 3232,2 | 6,3179 |
| 470 | 0,02784 | 3282,7 | 6,4384 | 0,02647 | 3275,5 | 6,4103 | 0,02522 | 3268,1 | 6,3831 | 0,02406 | 3260,7 | 6,3565 |
| 480 | 0,02840 | 3309,6 | 6,4742 | 0,02702 | 3302,7 | 6,4467 | 0,02575 | 3295,7 | 6,4199 | 0,02458 | 3288,7 | 6,3939 |
| 490 | 0,02896 | 3336,1 | 6,5092 | 0,02756 | 3329,5 | 6,4821 | 0,02627 | 3322,9 | 6,4557 | 0,02509 | 3316,2 | 6,4302 |
| 500 | 0,02950 | 3362,2 | 6,5432 | 0,02809 | 3356,0 | 6,5165 | 0,02679 | 3349,6 | 6,4906 | 0,02559 | 3343,3 | 6,4654 |
| 510 | 0,03004 | 3388,1 | 6,5765 | 0,02861 | 3382,1 | 6,5502 | 0,02729 | 3376,1 | 6,5246 | 0,02608 | 3370,0 | 6,4998 |
| 520 | 0,03058 | 3413,8 | 6,6091 | 0,02912 | 3408,1 | 6,5830 | 0,02779 | 3402,3 | 6,5578 | 0,02657 | 3396,5 | 6,5334 |
| 530 | 0,03110 | 3439,3 | 6,6410 | 0,02963 | 3433,8 | 6,6153 | 0,02829 | 3428,2 | 6,5903 | 0,02705 | 3422,7 | 6,5662 |
| 540 | 0,03162 | 3464,6 | 6,6723 | 0,03014 | 3459,3 | 6,6468 | 0,02877 | 3454,0 | 6,6222 | 0,02752 | 3448,6 | 6,5983 |
| 550 | 0,03214 | 3489,7 | 6,7031 | 0,03064 | 3484,7 | 6,6779 | 0,02926 | 3479,6 | 6,6535 | 0,02799 | 3474,4 | 6,6298 |

Figur 9.2: Specifik entalpi af vand og vanddamp som funktion af tryk og temperatur. Uddrag af [Sch82].



Figur 9.3: h, φ - diagram for vand/vanddamp. Diagrammet er optegnet ud fra formler givet i [Sch82].



Figur 9.4: Rør, hvor indgangsflowet er vanddamp og udgangsflowet er mættet vand.

Af h, φ -diagrammet ses, at temperaturen af dampen langs røret falder indtil mætningstemperaturen, som er 318°C ved 110 bar, er nået. Herefter er temperaturen konstant, men dampkvaliteten x falder indtil den er lig med 0. Energiligningen for rørstykket er givet ved:

$$\frac{d(h_u(t)M(t))}{dt} = LA \frac{d\varphi(t)}{dt} + \dot{m}(t)(h_i(t) - h_u(t)) - P_{varme}(t) \quad (9.9)$$

hvor $M(t)$ er massen af vand og damp i røret. Antages $M(t)$ konstant og $LA d\varphi(t)/dt$ for lille findes:

$$P_{varme}(t) = \dot{m}(t)(2841.7 - 1450.6) \cdot 10^3 = 1391.1 \cdot 10^3 \dot{m}(t) \quad (9.10)$$

Tallet $1450.6 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$ (den specifikke entalpi af mættet vand ved 110 bar) kan ikke findes i Tabel 9.2, men er givet i [Sch82, side 35] og kan desuden aflæses af h, φ -diagrammet i Figur 9.3. Det vil sige, at med de givne antagelser er den energi der afgives til rørvæggen proportional med flowet gennem røret. \square

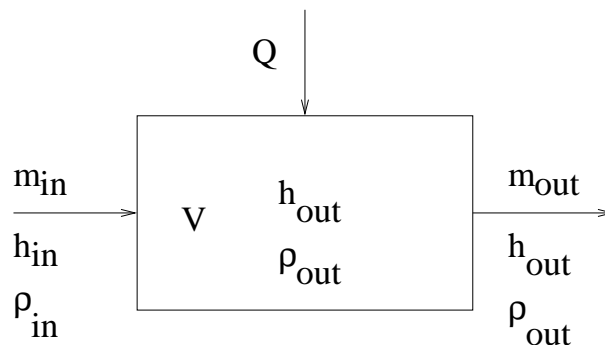
Kapitel 10

Lineære tilnærmelser til ikke lineære modeller

Modeller af fysiske systemer er ulineære. I termiske systemer har selve de grundlæggende balanceligninger indbygget ulineære forhold idet der ofte i ligningerne indgår produkter af de fysiske størrelser (massefylde, entalpi, masseflow, tryk, temperatur) som er naturlige valg af tilstandsvariable. Ligeledes har vi også set at friktionstab og overførte effekter typisk er ikke lineære funktioner af tilstandsvariablerne. Mekaniske systemer indeholder ligeledes ofte ulineære led selv om Newtons anden lov i sig selv er lineær. De ikke lineære forhold kan f.eks være friktionskraft som ikke lineær funktion af hastigheden og af andre kræfter eller trigonometriske funktioner, som kommer ind i modellerne i form af begrænsninger bevægelserne til bestemte baner, tænk f.eks på et pendul eller på en bil, som er begrænset til at følge bane bestemt af hjulvinkler.

Disse modeller er anvendelige, hvis formålet med modelleringen for eksempel er at simulere systemets nøjagtige opførsel ved bestemte input. Ofte er formålet med modelleringen dog, at modellen skal danne grundlag for design af en regulator til systemet. I langt de fleste tilfælde dimensioneres regulatorer på grundlag af lineære modeller. Det er derfor ønskeligt at tilnærme den ulineære model af systemet med en lineær model, som så vil have et begrænset gyldighedsområde

Som et eksempel på fremgangsmåden ved linearisering vil vi se på et system bestående af et kontrolvolumen med input i form af massestrømme og effekt.



Figur 10.1: *System med masse og energiinput*

Systemet beskrives med masse og energibalancer

$$V \frac{d\rho(t)}{dt} = m_{in}(t) - m_{out}(t) \quad (10.1)$$

$$V \frac{d(\rho(t)h_{out}(t))}{dt} = m_{in}(t)h_{in}(t) - m_{out}(t)h_{out}(t) + Q(t) \quad (10.2)$$

Det forudsættes her at tryk og temperatur er i et område, hvor der kun forekommer en fase. Der ønskes en model, der skal anvendes til design af en regulator, der regulerer temperaturen ud af systemet ved at styre den tilførte effekt $Q(t)$. Der ønskes altså en model med temperaturen $T_{out}(t)$ som output og med $Q(t)$ som input. Masseflowene til og fra systemet kan ikke påvirkes af regulatoren. Ved at indsætte 10.1 i 10.2 får energibalancen følgende form

$$V\rho(t) \frac{dh_{out}(t)}{dt} = m_{in}(t)(h_{in}(t) - h_{out}(t)) + Q(t) \quad (10.3)$$

Ligningen er ikke lineær, idet tidsvarierende led er ganget sammen. For at få T_{out} som output fra modellen, må entalpien udtrykkes ved hjælp af temperaturen. Trykket antages ikke at variere, så entalpien kan tilnærmet udtrykkes som $h = c_p T + h_0$. Endvidere kan massefylden antages at være konstant. Herved fås følgende model

$$V\rho c_p \frac{dT_{out}(t)}{dt} = m_{in}(t)c_p(T_{in}(t) - T_{out}(t)) + Q(t) \quad (10.4)$$

For at linearisere denne ligning udtrykkes de indgående størrelser som arbejdspunktverdier plus småsignalverdier ($x = \bar{x} + \hat{x}$)

$$T_{in}(t) = \bar{T}_{in} + T_{in}^{\Delta}(t) \quad (10.5)$$

$$T_{out}(t) = \bar{T}_{out} + T_{out}^{\Delta}(t) \quad (10.6)$$

$$m_{in}(t) = \bar{m}_{in} + m_{in}^{\Delta}(t) \quad (10.7)$$

$$m_{out}(t) = \bar{m}_{out} + m_{out}^{\Delta}(t) \quad (10.8)$$

$$Q(t) = \bar{Q} + Q^{\Delta}(t) \quad (10.9)$$

Disse udtryk indsat i ligning 10.4 giver

$$V\rho c_p \frac{dT_{out}^{\Delta}(t)}{dt} = (\bar{m}_{in} + m_{in}^{\Delta})c_p(\bar{T}_{in} + T_{in}^{\Delta} - \bar{T}_{out} - T_{out}^{\Delta}) + \bar{Q} + Q^{\Delta}(t) \quad (10.10)$$

I ligning 10.10 ganges parentesen ud, og led indeholdende produkter af småsignalstørrelser bortkastes.

$$V\rho c_p \frac{dT_{out}^{\Delta}(t)}{dt} = \bar{m}_{in}c_p(\bar{T}_{in} - \bar{T}_{out}) + \bar{Q} + \bar{m}_{in}c_p(T_{in}^{\Delta} - T_{out}^{\Delta}) + c_p(\bar{T}_{in} - \bar{T}_{out})m_{in}^{\Delta} + Q^{\Delta}(t) \quad (10.11)$$

Ligning 10.11 indeholder såvel småsignalverdier som arbejdspunktverdier. For at få en småsignalmodel trækkes arbejdspunktverdierne ud ved først at løse ligningen i arbejdspunktet, hvilket giver

$$0 = \bar{m}_{in}c_p(\bar{T}_{in} - \bar{T}_{out}) + \bar{Q} \quad (10.12)$$

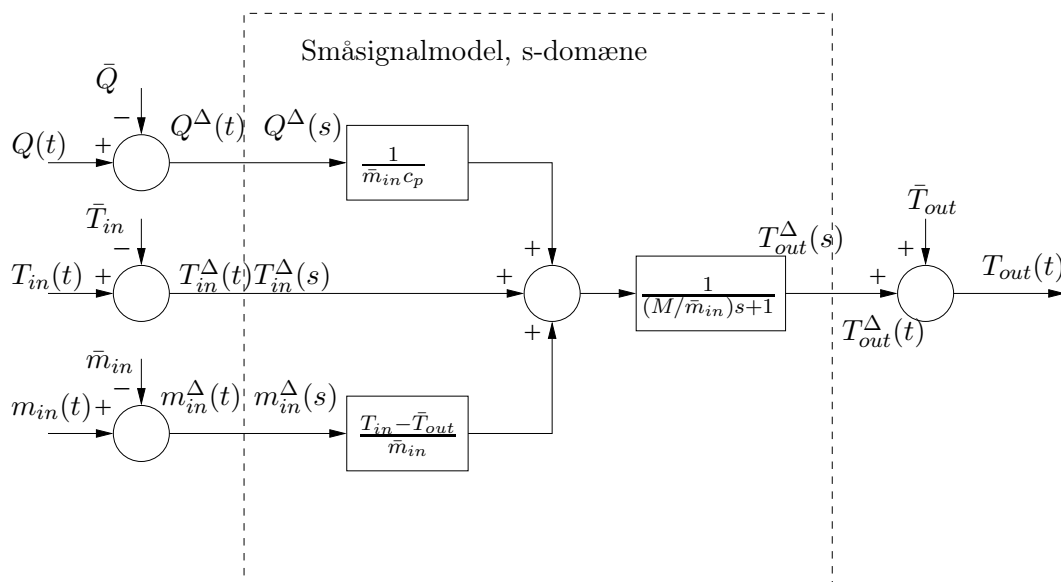
Ved at trække 10.12 fra 10.11 fås følgende lineære småsignalmodel

$$V\rho c_p \frac{dT_{out}^{\Delta}(t)}{dt} = \bar{m}_{in}c_p(T_{in}^{\Delta}(t) - T_{out}^{\Delta}(t)) + c_p(\bar{T}_{in} - \bar{T}_{out})m_{in}^{\Delta}(t) + Q^{\Delta}(t) \quad (10.13)$$

Den lineære model kan Laplace transformeres. Med begyndelses betingelser sat lig nul giver det

$$V\rho c_p s T_{out}^{\Delta}(s) = \bar{m}_{in}c_p(T_{in}^{\Delta}(s) - T_{out}^{\Delta}(s)) + c_p(\bar{T}_{in} - \bar{T}_{out})m_{in}^{\Delta}(s) + Q^{\Delta}(s) \quad (10.14)$$

Den lineære model med arbejds punkter er vist på figur 10.2



Figur 10.2: *Lineær model med arbejds punkter*

I det forrige er lineariseringen sket ved at bortkaste produkter af størrelser. Denne metode er anvendelig fordi de funktioner, der indgår i modellen, er så simple, at deres rækkeudvikling umiddelbart kan bestemmes på denne måde.

Mere generelt må lineariseringen foretages ved hjælp af Taylor rækkeudvikling. Som eksempel bruges igen energibalancen 10.4, som vi udvider med en model til bestemmelse af effekten $Q(t)$. Vi vil her regne inløbstemperaturen for konstant $T_{in}(t) = T_{in}$

$$Q(t) = K m_{in}(t)^{0.8} (T_{ydre}(t) - T_{out}(t)) \quad (10.15)$$

hvor $T_{ydre}(t)$ er temperaturen af omgivelserne til vores system. $T_{ydre}(t)$ bliver nu sammen med $m_{in}(t)$ et input til modellen.

Arbejds punkt sværdierne bestemmes ved at løse 10.4 og 10.15 stationært

$$0 = \bar{m}_{in}c_p(T_{in} - \bar{T}_{out}) + K \bar{m}_{in}^{0.8} (\bar{T}_{ydre} - \bar{T}_{out}) \quad (10.16)$$

Ligningerne 10.4 og 10.15 lineariseres omkring arbejdspunktet $(\bar{m}_{in}, \bar{T}_{ydre}, \bar{T}_{out})$ ved hjælp af en 1. ordens Taylorudvikling. Generelt er denne udvikling for en funktion af flere variable givet ved

$$f(\bar{x} + x^\Delta) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} x^\Delta + rest(x^\Delta) \quad (10.17)$$

hvor $rest(x^\Delta)$ er led som går mod nul hurtigere end første ordens led når x^Δ går mod nul. Restleddet bortkastes ved en lineær tilnærmelse. Anvendes Taylorudvikling på 10.4 og 10.15 findes

$$V\rho c_p \frac{T_{out}^\Delta(t)}{dt} = (\bar{m}_{in} + m_{in}^\Delta(t))c_p(T_{in} - (\bar{T}_{out} + T_{out}^\Delta(t))) \quad (10.18)$$

$$+ K(\bar{m}_{in} + m_{in}^\Delta(t))^{0.8}(\bar{T}_{ydre} + T_{ydre}^\Delta(t) - (\bar{T}_{out} + T_{out}^\Delta(t))) \quad (10.19)$$

$$= f(\bar{m}_{in} + m_{in}^\Delta(t), \bar{T}_{out} + T_{out}^\Delta(t), \bar{T}_{ydre} + T_{ydre}^\Delta(t)) \quad (10.20)$$

$$\approx f(\bar{m}_{in}, \bar{T}_{out}, \bar{T}_{ydre}) \quad (10.21)$$

$$+ \frac{\partial f(m_{in}, T_{out}, T_{ydre})}{\partial m_{in}} \Big|_{m_{in}=\bar{m}_{in}, T_{out}=\bar{T}_{out}, T_{ydre}=\bar{T}_{ydre}} m_{in}^\Delta(t) \quad (10.22)$$

$$+ \frac{\partial f(m_{in}, T_{out}, T_{ydre})}{\partial T_{out}} \Big|_{m_{in}=\bar{m}_{in}, T_{out}=\bar{T}_{out}, T_{ydre}=\bar{T}_{ydre}} T_{out}^\Delta(t) \quad (10.23)$$

$$+ \frac{\partial f(m_{in}, T_{out}, T_{ydre})}{\partial T_{ydre}} \Big|_{m_{in}=\bar{m}_{in}, T_{out}=\bar{T}_{out}, T_{ydre}=\bar{T}_{ydre}} T_{ydre}^\Delta(t) \quad (10.24)$$

I ligning 10.18 er funktionsværdien i arbejdspunktet lig med 0 da arbejdspunktet skal opfylde 10.16. Den lineære småsignalmodel bliver da

$$V\rho c_p \frac{T_{out}^\Delta(t)}{dt} = [c_p(T_{in} - \bar{T}_{out}) + 0.8K\bar{m}_{in}^{-0.2}(\bar{T}_{ydre} - \bar{T}_{out})] m_{in}^\Delta(t) \quad (10.25)$$

$$- [\bar{m}_{in}c_p + K\bar{m}_{in}^{0.8}] T_{out}^\Delta(t) + [K\bar{m}_{in}^{0.8}] T_{ydre}^\Delta(t) \quad (10.26)$$

$$= K_1 m_{in}^\Delta(t) - K_2 T_{out}^\Delta(t) + K_3 T_{ydre}^\Delta(t) \quad (10.27)$$

Linearisering af differentilligninger vil give et overblik over systemets dynamik, som ikke kan opnås ved alene at betragte de ulineære differentilligninger. Lineære modeller danner grundlag for størstedelen af reguleringsteorien.

10.1 Lineariseringsprocedure

Den generelle metode for linearisering kan sammenfattes i en tre punkts procedure:

1. Bestem arbejdspunktverdier for de variable ved at løse de ulineære ligninger i stationær tilstand (som f.eks. 10.16)
2. Erstat de variable i ligningerne med arbejdspunktverdier plus småsignalverdier ($x(t) = \bar{x} + x^\Delta(t)$) og tilnærm ulineære led med første ordens Taylor approximation (som 10.18)
3. Arbejdspunkt ligningen trækkes fra den tilnærmede ligning (som 10.25). Resultatet er en lineær ligning i småsignalverdierne.

10.2 Simulering af ulineær model

I MATLAB er der mulighed for at løse et sæt ulineære 1. ordens differentialligninger af formen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t)\end{aligned}$$

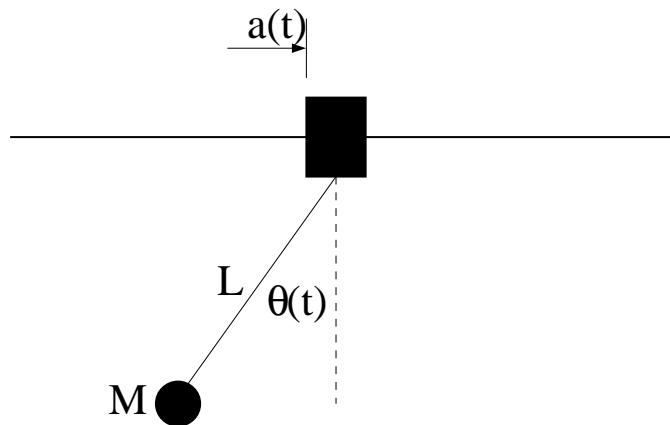
hvor (x_1, x_2, \dots, x_n) er de ubekendte (u_1, u_2, \dots, u_m) er input og (f_1, f_2, \dots, f_n) er funktioner som kan være ulineære.

Dette kan også skrives på den mere kompakte vektorform

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (10.28)$$

Eksempel: Løsning af ulineære differentialligninger med begyndelsesbetingelser

Følgende ligning kan findes for en opstilling som vist på figur 10.3, hvor et lod er ophængt i en wire (portalkran)



Figur 10.3: *Lod ophængt med wire på bevægelig slæde*

$$L^2 M \ddot{\theta}(t) = L M a(t) \cos \theta(t) - g L M \sin \theta(t) - B \dot{\theta}(t)$$

hvor $a(t)$ er accelerationen, som vist på figuren.

Først kan dette ligningssystem løses når toppunktet holdes fast, dvs at $a(t) = 0$, og vi har en begyndelsesværdi af θ forskellig fra nul. Ligningen der skal løses bliver da

$$L^2 M \ddot{\theta}(t) = -g L M \sin \theta(t) - B \dot{\theta}(t)$$

Her skal $\theta(t)$ findes når $\theta(0)$ er kendt.

Denne 2. ordens ligning skrives om til 2 første ordens differentialligninger ved f. eks. at vælge $x_1(t) = \theta(t)$ og $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$, hvilket giver:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, t) = -\frac{g}{L} \sin(x_1(t)) - \frac{B}{L^2 M} x_2(t)\end{aligned}$$

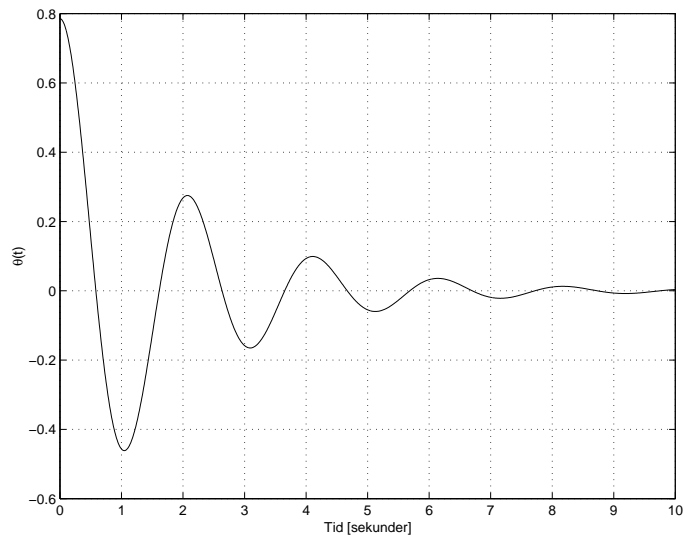
I MATLAB kan denne ligning løses med følgende hovedprogram

Modeldannelse


```
% simuleringstid fra 0 til 5 sekunder spacing 0.01 sec.
tspan=[0:0.01:5];
% begyndelsesværdi af x1 og x2
xo=[0.1 0];
[tid,x] = ode45('ligninger',tspan,xo); % løsning af ligningerne
figure(1), plot(tid,x(:,1)), grid on % plot x1.
xlabel('Tid [sekunder]'),ylabel('\theta(t)')
```

Selve differentialligningerne skal skrives i en MATLAB function og kan være givet ved

```
% Function som beregner de afledede
function [dxdt]=ligninger(t,x)
% Konstanter
L=0.11;g=9.81;M=1;B=0.01;
% Beregning af dxdt for ligningssystemet
dxdt(1,1)=x(2);
dxdt(2,1)=-(g/L)*sin(x(1))-(B/(L*L*M))*x(2);
```



Figur 10.4: $\theta(t)$ med begyndelsesværdi $\theta(0) = 0.1$

For at få konstanterne L, g, M, B placeret i hovedprogrammet, kan de enten føres med gennem hoved på functionen, hvilket vises i senere eksempler, eller 'scope'-problemet kan løses ved at bruge nestede functioner som vist efterfølgende.

```
function simulering
tspan=[0:0.01:5];
xo=[0.1 0];
a=0;
L=0.11; g=9.81; M=1; B=0.01;
[tid,x] = ode45(@ligninger,tspan,xo); % løsning af ligningerne
```

```
figure(1), plot(tid,x(:,1)), grid on % plot x1.
xlabel('Tid [sekunder]', 'fontsize', 12), ylabel('\theta(t)', 'fontsize', 14)

% Function som beregner de afledede
function [dxdt]=ligninger(t,x)
    dxdt(1,1)=x(2);
    dxdt(2,1)=-(g/L)*sin(x(1))-(B/(L*L*M))*x(2);
end % ligninger
end % simulering
```

I det sidste eksempel udnyttes at variable er 'globale' i nestede functioner. Denne metode er den som MATLAB selv bruger i deres demoer.

Eksempel: Løsning af ulineære differentialligninger med externe input

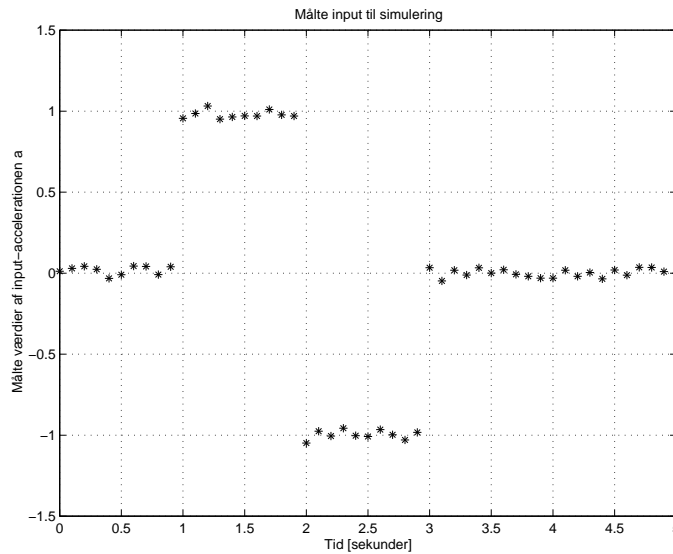
I det forrige eksempel var accelerationen $a(t)$ sat til nul. I dette eksempel sættes begyndelsesbetingelserne til nul og toppunktet gives en acceleration. Som acceleration vælges en funktion som er 0 fra tiden 0 til 1 sek, 1 fra tiden 1 til 2 sekunder, -1 fra tiden 2 til 3 sekunder og 0 fra tiden 3 til 5 sekunder. Idet den positiv og negativ acceleration er lige store og har samme varighed, vil toppunktet bringes til standsning efter 3 sekunder.

I denne første del af eksemplet vil vi selv generere inputsekvensen, hvilket simpelt kan gøres i functionen som vist efterfølgende

```
% simuleringstid fra 0 til 5 sekunder spacing 0.01 sec.
tspan=[0:0.01:5];
% begyndelsesværdi af x1 og x2
xo=[0 0];
[tid,x] = ode45('ligninger',tspan,xo); % løsning af ligningerne
figure(1), plot(tid,x(:,1)), grid on % plot x1.
xlabel('Tid [sekunder]'), ylabel('\theta(t)')
```

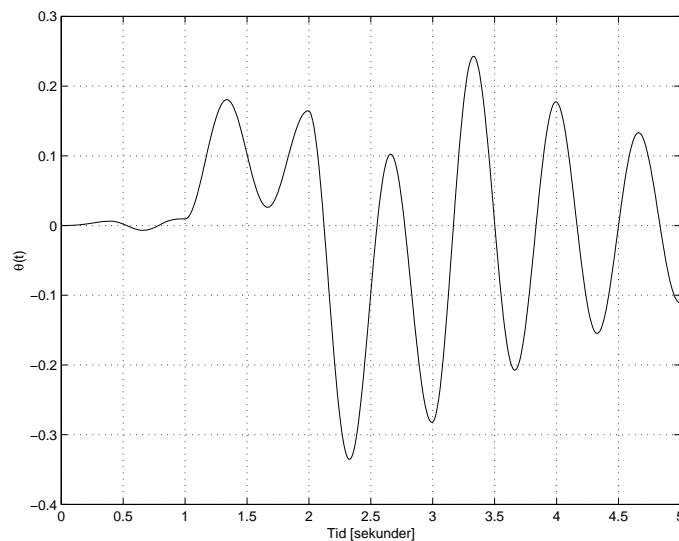
```
%FUNCTIONEN TIL ODE
function [dxdt]=ligninger(t,x)
% Konstanter
L=0.11;g=9.81;M=1;B=0.01;
%Bestemmelse af input-accelerationen udfra tiden t
a=0;
if t>1 a=1; end;
if t>2 a=-1; end;
if t>3 a=0; end;
% Beregning af dxdt for ligningssystemet
dxdt(1,1)=x(2);
dxdt(2,1)=(1/L)*a*cos(x(1))-(g/L)*sin(x(1))-(B/(L*L*M))*x(2);
```

I andre tilfælde vil en simulering ske på den måde at input til modellen består af målte data. De målte data vil da være diskrete værdier som eksempelvis vist på figur 10.5 og består af målte værdier af tiden og accelerationen.



Figur 10.5: *Målte accelerationer der ønskes som input til modellen*

Når der skal anvendes diskrete (målte værdier) til simuleringen SKAL der i MATLAB laves en konstruktion som sikrer at der kan findes værdier til alle tidspunkter. I det viste eksempel er der værdier af accelerationen til tiderne 0, 0.1, 0.2 sekunder o.s.v, men ingen værdi af accelerationen til f.eks 0.56736 sekunder. Det bemærkes at selv om vi har specificeret bestemte tider til ODE, vil den ofte benytte tider imellem de specificerede for at opnå en tilstrækkelig løsningsnøjagtighed. Derfor benyttes ofte at sætte værdien mellem samplingstidspunkterne konstant, således at værdien mellem 0 og 0.1 sekund sættes lig med den værdi der er målt til tiden 0 o.s.v.



Figur 10.6: $\theta(t)$ med begyndelsesværdi $\theta(0) = \pi/4$

```

% simuleringstid fra 0 til 5 sekunder spacing 0.01 sec.
tspan=[0:0.01:5];
% begyndelsesværdi af x1 og x2
xo=[0 0];
load dataodel1; % henter datafil med tid og a-værdier
                % hvor tid indeholder værdier 0 0.1 0.2 .. 5
                % og a indeholder de tilsvarende 51 a-værdier
[tid,x] = ode45('ligninger',tspan,xo,[],a); % løsning af ligningerne
figure(1), plot(tid,x(:,1)), grid on % plot x1.
xlabel('Tid [sekunder]'),ylabel('\theta(t)')

%FUNCTIONEN TIL ODE
function [dxdt]=ligninger(t,x,flag,acc)
% Konstanter
L=0.11;g=9.81;M=1;B=0.01;
% Accelerations-input bestemmelse
if t<=0 t=0.001; end; %index i MATLAB starter med 1
a=acc(ceil(10*t));
% Beregning af dxdt for ligningssystemet
dxdt(1,1)=x(2);
dxdt(2,1)=(1/L)*a*cos(x(1))-(g/L)*sin(x(1))-(B/(L*L*M))*x(2);

```

10.2.1 Options.

Ved kald af ODE functionerne er det muligt at sætte en række options. Disse er default sat fra starten og deres værdier kan findes ved at skrive kommandoen `odeset` i matlabvinduet. De to vigtigste er de absolutte tolerance `AbsTol` som er sat til $1e-6$ og den relative tolerance `RelTol` som er sat til $1e-3$. Disse kan ændres med konstruktionen:

```

options = odeset('name1',value1,'name2',value2,...)
[tid,x] = ode45('ligninger',tspan,xo,options,a)

```

For yderligere information kan der laves en hjælp på `odeset`, eller bedre finde doc `odeset` i Help browseren.

10.2.2 Differential ligningssystemer med 'masse' matrix

Nogle differentiallyligningssystemer er svære at få på formen 10.28, fordi denne kræver at ligningerne på forhånd kan løses med hensyn til de afledede (de afledede står alle på ventresiden, og indgår ikke på højresiden). Dette er ikke muligt for alle modeller (husk på at det er ulineære ligninger). Derfor gives der også en mulighed for at løse ligningssystemer af formen:

$$M(x,t)\dot{x}(t) = f(x,t)$$

hvor $M(x,t)$ er en kvadratisk matrix. Man kan selv, hvis $M(x,t)$ kan inverteres, omskrive ligningssystemet til

$$\dot{x}(t) = M(x,t)^{-1}f(x,t)$$

og bruge en sædvanlig metode til løsning.

Der findes en 'mass' option i MATLAB, og M beregnes i en særskildt function. Konstruktionen er

```
options = odeset('Mass','my-mass-function');
[t x] = ode45('ligninger',tspan,x0,options);

function M = my-mass-function(t,x)
% Mass matrix function
M(1,1) = sin(x(1));
M(1,2) = 0;
M(2,1) = 5;
M(2,2) = sqrt(x(2));
```

For yderligere se demoen batonode. Skriv type batonode.m i matlab-vinduet.

10.2.3 Differential algebraiske ligninger DAE.

I modellering af nogle systemer vil der være såvel differentiallyigninger som algebraiske ligninger af formen:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t) \\ 0 &= f_2(x_1, x_2, t)\end{aligned}$$

hvor f_2 er ulineær således at der ikke kan findes et analytisk udtryk for x_2 som kan indsættes i den første ligning. Dette betyder at de to ligninger begge skal løses numerisk. Dette kaldes et DAE (differentiel algebraisk ligning)-system.

De to functioner ODE15s og ODE23t kan løse denne type ligninger. For yderligere information se demoen hb1dae. Skriv type hb1dae.m i matlab-vinduet.

10.2.4 Stive differentiallyigninger.

Differentiallyigninger som beskriver systemer hvor der er meget forskel på de enkelte tidskonstanter kaldes for Stive Differentiallyigninger. Det vil sige at stive differentiallyigninger er karakteriseret ved at deres løsninger indeholder dels langsomme komponenter og dels hurtige komponenter, og forskellen mellem tidskonstanterne er stor. Hvis dette er tilfældet vil skridtlængden ved simulering, f.eks med Forward Euler metoden, skulle vælges mindre end den mindste tidskonstant for at sikre at der findes en stabil simuleringsløsning. Men dette lille tidsskridt kan give problemer ved de store tidskonstanter, idet opdateringen her bliver meget lille, og talrepræsentations nøjagtigheden kan blive problematisk. Dette kan vises ved følgende beregninger, hvor en lille unøjagtighed i talrepræsentationen kan forårsage at en simulering kan blive ustabil.

Forward Euler simulering af stive differentiallyigninger

I eksemplet opvarmes et rum med en effekt Q , lufttemperaturen i rummet kaldes T_1 og

vægttemperaturen kaldes T_2 . Overføringsfunktionen mellem den tilførte effekt Q og temperaturen i rummet T_2 vil indeholde to tidskonstanter, nemlig en stammende fra opvarmningen af rumluften, og en fra væggene. Idet luftens varmekapacitet er meget mindre end væggenes varmekapacitet, vil der opstå to tidskonstanter med meget stor forskel. Hvis der patrykkes et spring på den tilførte effekt vil der ske en hurtig opvarmning af luften efterfuldt af en meget langsom lufttemperaturstigning fordi væggen også skal opvarmes. Et specialtilfælde er hvis der ikke afgives varme fra væggen til omgivelserne vil den ene tidskonstant gå imod ∞ svarende til at der bliver en pol i nul.

$$\begin{aligned}C_1 \dot{T}_1(t) &= -\alpha(T_1(t) - T_2(t)) + Q(t) \\C_2 \dot{T}_2(t) &= \alpha(T_1(t) - T_2(t))\end{aligned}$$

hvor $C_2 \gg C_1$ Simple beregninger vil vise at systemet indeholder to poler, hvoraf den ene er i 0.

Til en Forward Euler simulering skal følgende ligningssystem anvendes

$$\begin{bmatrix} T_1(t+h) \\ T_2(t+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h\alpha}{C_1} & \frac{h\alpha}{C_1} \\ \frac{h\alpha}{C_2} & 1 - \frac{h\alpha}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} Q(t)$$

De diskrete poler i dette udtryk (egenværdierne) findes ved at beregne determinanten af $zI - \Phi$, hvor Φ er den matrix der findes i det ovenstående udtryk. Simple beregninger giver

$$|zI - \Phi| = (z-1)^2 + (z-1)\left(\frac{h\alpha}{C_1} + \frac{h\alpha}{C_2}\right)$$

her ses at være en pol for $z = 1$ hvilket svarer til en integration.

Indføres der en lille unøjagtighed som følge af afrunding gælder følgende. Det bemærkes at elementet $1 - \frac{h\alpha}{C_2}$ kan være meget tæt ved 1 f.eks 0.999995734, og dette tal kan være svært at repræsentere med tilstrækkelig nøjagtighed, således at der er en lille unøjagtighed ϵ på dette tal.

Vi får nu

$$\begin{bmatrix} T_1(t+h) \\ T_2(t+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h\alpha}{C_1} & \frac{h\alpha}{C_1} \\ \frac{h\alpha}{C_2} & 1 - \frac{h\alpha}{C_2} - \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} Q(t)$$

Her kan der igen udregnes et udtryk for polerne

$$|zI - \Phi| = (z-1)^2 + (z-1)\left(\frac{h\alpha}{C_1} + \frac{h\alpha}{C_2} - \epsilon\right) - \frac{h\alpha}{C_1}\epsilon$$

kigges nøje på dette udtryk (og der kan samtidigt tænkes på Routh's stabilitetskriterium) ses at hvis ϵ er positiv vil vi få en pol som er til højre for 1, hvilket giver en ustabil simulering. Konklusionen på eksemplet er altså, at ved en Forward Euler simulering vil vi, hvis der er tale om stive differentiaalligninger kunne få en ustabil simulering, selv om vi vælger et tilstrækkeligt lille tidsskridt.

MATLAB's ode45 funktion beskrives af MATLAB Inc., som værende egnet til at løse ikke stive differentiaalligninger. Hvis ligningssystemet der ønskes simuleret er givet ved stive differentiaalligninger anbefales det at anvende ode funktioner som slutter med et s som f.eks ode15s. Disse funktioner er dog tidskrævende og anvendes derfor kun hvis der er tale om stive ligninger. Det har ikke i litteraturen været muligt at finde et helt nøjagtigt mål for, hvornår der er tale om et stift differentiaalligningssystem.

Kapitel 11

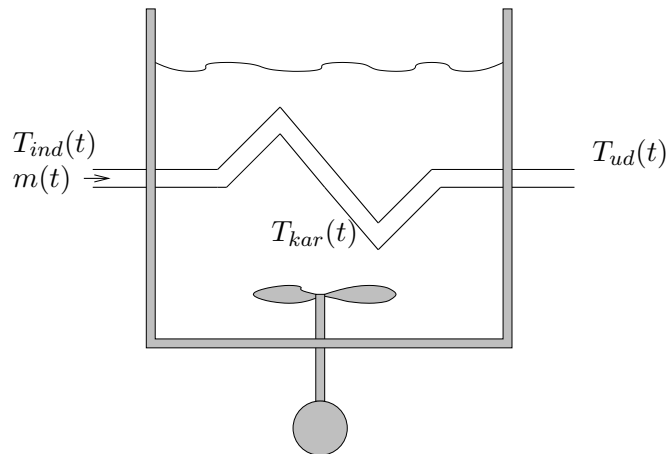
Introduktion til systemer med fordelte parametre

Ved opstilling af model for et fysisk system skelner man ofte mellem

- modeller med koncentrerede (lumped) parametre
- modeller med fordelte (distributed) parametre.

Modeller med koncentrerede parametre er karakteriserede ved, at de variable kun er afhængige af tiden, hvorimod modeller med fordelte parametre er karakteriseret ved, at de variable er afhængige af både tid og sted.

11.1 Gennemstrømningsvarmeveksler



Figur 11.1: *Varmeveksler*

På figur 11.1 er vist en varmeveksler, hvor gennemstrømmende væske opvarmer væske i et kar med omrøring. På figuren er $m(t)$ masseflow af den gennemstrømmende væske, $T_{ind}(t)$ væskens

indløbstemperatur, $T_{ud}(t)$ væskens udløbstemperatur og $T_{kar}(t)$ temperaturen af væsken i karet.

Koncentrerede parametre: Ved modelleringen antages al væsken i røret at have den samme temperatur, hvilket giver en model af formen:

$$f\left(\frac{dT_{ud}(t)}{dt}, T_{ind}(t), T_{kar}(t), T_{ud}(t), m(t)\right) = 0$$

Fordelte parametre: Ved modelleringen med fordelte parametre tages der hensyn til at væsketemperaturen i røret også afhænger af stedet. Dette giver en model af formen

$$f\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}, T_{kar}(t), m(t)\right) = 0$$

$$T(0, t) = T_{ind}(t) \quad \text{og} \quad T(L, t) = T_{ud}(t)$$

hvor L er længden af varmevekslerrøret.

Som det fremgår af eksemplet består modellen med koncentrerede parametre af ordinære differentialligninger, mens modeller med fordelte parametre består af partielle differentialligninger. En model med fordelte parametre er vanskelig af håndtere, men giver en nøjagtigere beskrivelse end en model med koncentrerede parametre. Valg af modeltype må foretages ud fra overvejelser om

- anvendelsesområde (regulatordesign, simulering, anlægsdimensionering, etc.)
- krav om stationær nøjagtighed
- krav om transient nøjagtighed (båndbredde)

I det følgende gives eksempler på opstilling af modeller med fordelte parametre.

11.2 Modstrømsvarmeveksler

På figur 11.2 er skitseret en modstrømsvarmeveksler.

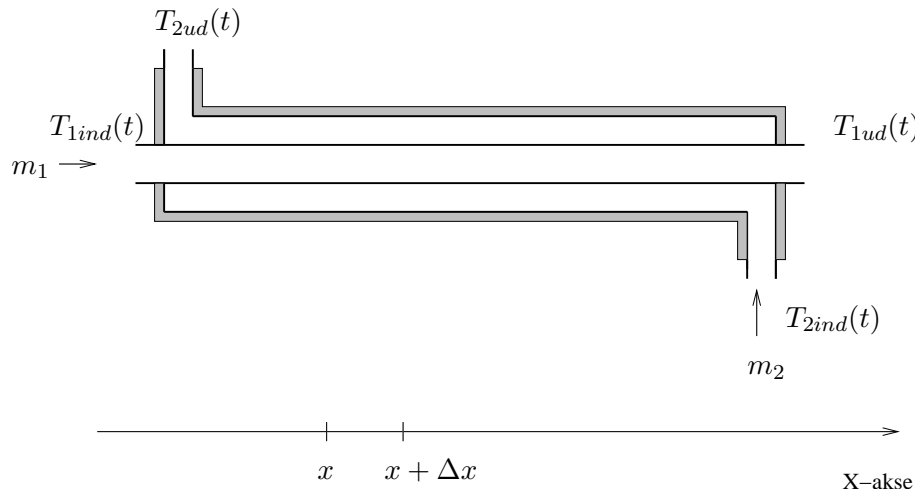
Der opstilles en model med temperaturene T_{1ind} og T_{2ind} som input og temperaturene T_{2ud} og T_{1ud} som output. Ved modelleringen gøres der følgende antagelser:

- der er ingen energiakkumulering i rørvæggen
- temperaturen og hastigheden er ens i et tværsnit af hver væske.
- varmekapaciteter og massefylde er konstante.
- masseflowene m_1 og m_2 er konstante.
- effektudvekslingen mellem de to væsker er proportional med temperaturdifferencen.

For væske 1 kan opstilles følgende energibalance for det på figur 11.2 viste kontrolvolumen

$$m_1 c_1 (T_1(x, t) - T_1(x + \Delta x, t)) + \alpha U \Delta x (T_2(x, t) - T_1(x, t)) = c_1 A_1 \rho_1 \Delta x \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t}$$

hvor

Figur 11.2: *Modstrømsvarmeveksler*

- c_1 er den specifikke varmekapacitet for væske 1 [$J/(Kkg)$]
- α er varmeovergangstallet mellem væske 1 og væske 2 [$J/(sKm^2)$]
- U er omkredsen af det indre rør [m]
- A_1 er tværsnitsarealet af det indre rør [m^2].
- ρ_1 er massefylden for væske 1 [kg/m^3]

Ligningen divideres med Δx og med Δx gående mod 0 fås følgende partielle differentialligning

$$-m_1 c_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} - c_1 A_1 \rho_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} + \alpha U (T_2(x, t) - T_1(x, t)) = 0 \quad (11.1)$$

På tilsvarende måde opstilles energibalace for væskeudsnit 2, hvilket giver

$$m_2 c_2 \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} - c_2 A_2 \rho_2 \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} - \alpha U (T_2(x, t) - T_1(x, t)) = 0 \quad (11.2)$$

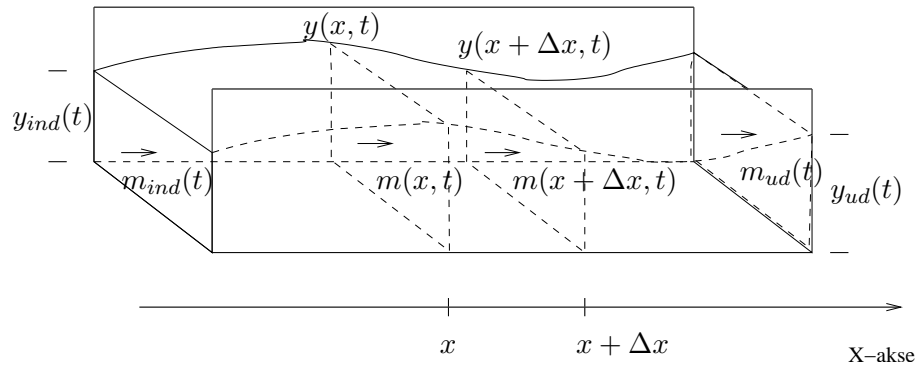
De indgående størrelser defineres tilsvarende som for væskeudsnit 1.

De to partielle differentialligninger (11.1) og (11.2) udgør den ønskede model for modstrømsvarmeveksleren.

11.3 Strømning i åben kanal

På figur 11.3 er vist en væske, som strømmer i en åben kanal. Der ønskes opstillet en model med masseflow, $m_{ind}(t)$, og væskenniveau, $y_{ind}(t)$, som input. Som output ønskes masseflow, $m_{ud}(t)$, og væskenniveau, $y_{ud}(t)$. Ved modelleringen gøres der følgende antagelser:

- kanalen har et rektangulært tværsnit.
- kanalen er vandret.

Figur 11.3: *Strømning i åben kanal*

- væskehastighed er ens i et tværsnit af kanalen.
- væskens massefylde er konstant.
- væskestrømningen er friktionsløs.

For et væskeudsnit med længden Δx opstilles massebalancen

$$m(x, t) - m(x + \Delta x, t) = \frac{d(D\rho y(x, t)\Delta x)}{dt}$$

hvor

- $m(x, t)$ er masseflow $[kg/s]$
- $y(x, t)$ er væskenhøjde $[m]$
- B er kanalens bredde $[m]$
- ρ er massefylden af væsken $[kg/m^3]$

Ved division med Δx fås for $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial m(x, t)}{\partial x} + B\rho \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (11.3)$$

For væskeudsnittet opstilles endvidere impulsningen

$$\frac{m(x, t)^2}{\rho B y(x, t)} - \frac{m(x + \Delta x, t)^2}{\rho B y(x + \Delta x, t)} + \frac{1}{2} B \rho g y(x, t)^2 - \frac{1}{2} B \rho g y(x + \Delta x, t)^2 = \frac{d(m(x, t)\Delta x)}{dt}$$

Ved omformning og $\Delta x \rightarrow 0$ findes

$$\frac{2m(x, t)}{\rho B y(x, t)} \frac{\partial m(x, t)}{\partial x} + \left[\frac{-m(x, t)^2}{\rho B y(x, t)^2} + B\rho y(x, t) \right] \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial m(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (11.4)$$

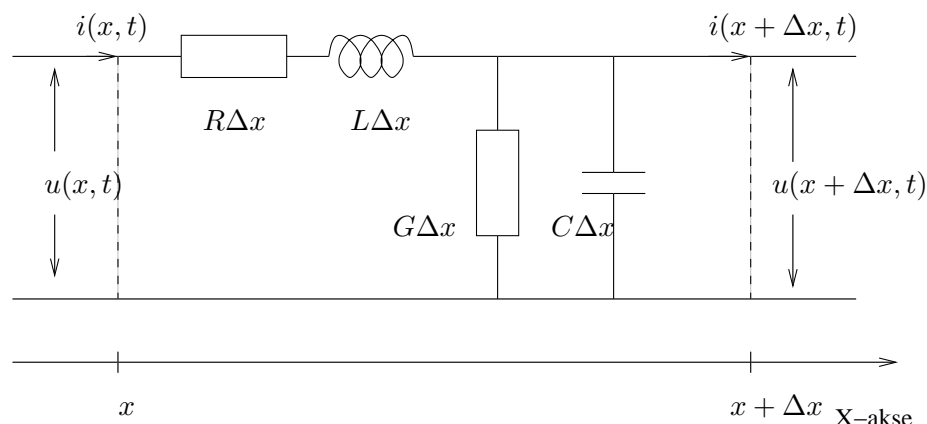
De to partielle differentialligninger udgør den ønskede model sammen med endepunktsidentiteterne

$$m_{ind}(t) = m(0, t) \quad y_{ind}(t) = y(0, t) \quad m_{ud}(t) = m(L, t) \quad y_{ud}(t) = y(L, t)$$

hvor L er kanalens længde. Som det fremgår er denne model ulineær.

11.4 Transmissionslinier

En række praktisk forekommende systemer (elektriske ledninger, aksler, endimensional varmeledning etc.) kan behandles ved hjælp af teorien for transmissionslinier, som er undersøgt indenfor teleteknikken. Et udsnit af en transmissionslinie (elektrisk) fremgår af figur



Figur 11.4: *Transmissionslinieudsnit (elektrisk)*

11.4, hvor

- R er resistens pr længde [Ohm/m]
- L er selvinduktion pr længde [H/m]
- G er konduktans pr længde [$1/(Ohmm)$]
- C er kapacitet pr længde [F/m]

. Ved anvendelse af kredsløbslovene på den skitserede transmissionsledning fås

$$u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = -R\Delta x i(x, t) - L\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

$$i(x + \Delta x, t) - i(x, t) = -G\Delta x u(x, t) - C\Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

Ved division med Δx og $\Delta x \rightarrow 0$ opnås

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Ri(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} + Gu(x, t) + C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (11.6)$$

De to differentiaalligninger 11.5 og 11.6 udgør den ønskede model for transmissionslinien.

I det ovenstående er vist eksempler på modeller med fordelte parametre. Løsning af modelligningerne, der er partielle differentiaalligninger er mere kompliceret end løsning af de ordinære differentiaalligninger, der fremkommer når der anvendes modeller med koncentrerede parametre. I det efterfølgende ses på analytisk og numerisk løsning af modeller med fordelte parametre.

Kapitel 12

Analytisk løsning af partielle differentiaalligninger

Løsning af partielle differentiaalligninger er et omfattende matematisk emne, og der vil ikke her blive gjort et forsøg på at dække dette. I stedet gives i dette afsnit som et eksempel løsning af de partielle differentiaalligninger, som beskriver et udvalgt system med fordelte parametre.

12.1 Overføringsfunktion for symmetrisk modstrømsvarmeveksler

Et hyppigt forekommende reguleringsobjekt er varmeveksleren, og det er her valgt at betragte modstrømsvarmeveksleren, hvis modelligninger er opstillet i afsnit 11.2. Modelligningerne løses her i det symmetriske specialtilfælde, hvor

$$\frac{m_1}{A_1\rho_1} = \frac{m_2}{A_2\rho_2} = v \quad \text{og} \quad \frac{\alpha U}{c_1 A_1 \rho_1} = \frac{\alpha U}{c_2 A_2 \rho_2} = \frac{1}{\tau}$$

Modelligningerne er herefter

$$\frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (T_2(x, t) - T_1(x, t)) \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} - v \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (T_1(x, t) - T_2(x, t)) \quad (12.2)$$

Ligningerne løses ved hjælp af Laplacetransformation med hensyn til både tid (Laplaceoperator s) og sted (Laplaceoperator r).

$$sT_1(r, s) + vrT_1(r, s) - vT_{1ind}(s) = \frac{1}{\tau} (T_2(r, s) - T_1(r, s)) \quad (12.3)$$

$$sT_2(r, s) + vrT_2(r, s) - vT_{2ud}(s) = \frac{1}{\tau} (T_1(r, s) - T_2(r, s)) \quad (12.4)$$

hvor $T_{1ind}(s) = T_1(0, s)$ og $T_{2ud}(s) = T_2(0, s)$. Begyndelsesbetingelserne $T_1(x, 0)$ og $T_2(x, 0)$ er sat til 0.

De to ligninger løses sammenhørende, idet $T_1(r, s)$ elimineres.

$$(1 + s\tau + vr\tau)(1 + s\tau - vr\tau)T_2(r, s) + (1 + s\tau + vr\tau)v\tau T_{2ud}(s) - v\tau T_{1ind}(s) = T_2(r, s) \quad (12.5)$$

$T_2(r, s)$ findes af ligningen som en funktion af $T_{2ud}(s)$ og $T_{1ind}(s)$. Denne ligning invers Laplace-transformeres med hensyn til r , hvilket giver

$$T_2(x, s) = \left[\cosh\left(\frac{x}{l(s)}\right) + \frac{s\tau + 1}{(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2}} \sinh\left(\frac{x}{l(s)}\right) \right] T_{2ud}(s) \quad (12.6)$$

$$- \frac{1}{(s^2 + \tau^2 + 2s\tau)^{1/2}} \sinh\left(\frac{x}{l(s)}\right) T_{1ind}(s) \quad (12.7)$$

hvor

$$l(s) = \frac{v\tau}{(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2}}$$

I ligningen indsættes $T_2(L, s) = T_{2ind}(s)$, og efter nogle regninger kan $T_{2ud}(s)$ findes til

$$T_{2ud}(s) = \frac{T_{1ind}(s)}{(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2} \coth(v^{-1}\tau^{-1}L(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2}) + s\tau + 1} + \frac{T_{2ind}(s)}{\cosh(v^{-1}\tau^{-1}L(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2}) + (s\tau + 1)(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{-1} \sinh(v^{-1}\tau^{-1}L(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2})}$$

eller

$$T_{2ud}(s) = G_{22}(s)T_{2ind}(s) + G_{21}(s)T_{1ind}(s) \quad (12.8)$$

Denne ligning beskriver overføringsfunktionerne til temperaturen T_{2ud} . Overføringsfunktionerne $G_{11}(s)$ og $G_{12}(s)$ frem til temperaturen T_{1ud} kan findes ud fra ligningerne 12.3 og 12.4 idet $T_2(r, s)$ elimineres (disse vil ikke blive beskrevet her).

Som det fremgår af det ovenstående er der ingen principielle vanskeligheder ved at udlede overføringsfunktionerne for modstrømsvarmeveksleren i det simple symmetriske tilfælde. Formen af overføringsfunktionerne er velkendte, men de indgående størrelser er noget komplicerede og uoverskuelige i forhold til velkendte overføringsfunktioner. Løsning af partielle differential-ligninger indeholder ofte led hvor Laplaceoperatoren s indgår som \sqrt{s} eller $\exp(\sqrt{s})$ hvilket vanskeliggør en reguleringsanalyse. For at kunne analysere systemer beskrevet af partielle differentialligninger kan følgende metoder tænkes anvendt

- Simplifikation af overføringsfunktion baseret på eksempelvis rækkeudvikling
- Plotning af amplitude -og fasekarakteristik for overføringsfunktion til anvendelse ved regulator design eller til udledning af simple overføringsfunktion.
- Opstilling af sektionsmodel, eksempelvis elektrisk netværksmodel.
- Simulering af grundligninger eksempelvis for stepinput, og ud fra output bestemme simple overføringsfunktion.

Disse fire metoder vil idet følgende blive gennemgået for den symmetriske modstrømsvarmeveksler.

12.1.1 Simplifikation af overføringsfunktion ved rækkeudvikling

I det følgende undersøges overføringsfunktionen $G_{21}(s)$ giver ved

$$G_{21}(s) = \frac{T_{2ud}(s)}{T_{1ind}(s)} = \frac{1}{(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2} \coth(v^{-1}\tau^{-1}L(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2}) + s\tau + 1} \quad (12.9)$$

Overføringsfunktionen tilnærmes ved at lave en førsteordens rækkeudvikling af de i \coth -funktionen indgående eksponentialfunktioner:

$$\exp(L/l(s)) \approx 1 + L/l(s) \quad \text{for } L/l(s) \ll 1$$

$G_{21}(s)$ findes herefter til

$$G_{21}(s) \approx \frac{1}{v\tau L^{-1} + 1 + s\tau} = \frac{k_1}{\tau_1 s + 1} \quad (12.10)$$

hvor

$$k_1 = \frac{1}{v\tau L^{-1} + 1} \quad \text{og} \quad \tau_1 = \frac{\tau}{v\tau L^{-1} + 1}$$

Tilnærmelsen har størst gyldighed ved lave frekvenser, idet

$$\frac{L}{l(s)} = \frac{(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2}L}{v\tau} \rightarrow 0 \quad \text{for } s \rightarrow 0$$

For at overføringsfunktionen skal kunne anvendes må tilnærmelsen være acceptabel for frekvenser op til $1/\tau_1$ i den tilnærmede overføringsfunktion, hvilket må undersøges i hvert enkelt tilfælde.

Ønskes overføringsfunktionen $G_{21}(s)$ undersøgt ved højere frekvenser ses på overgangen

$$\sqrt{s^2\tau^2 + 2s\tau} = s\tau\sqrt{1 + 2/(s\tau)} \rightarrow s\tau(1 + 1/(s\tau)) = s\tau + 1 \quad \text{for } s \rightarrow \infty$$

indsættes dette samt $\coth(u) \rightarrow 1$ for $u \rightarrow \infty$ fås

$$G_{21}(s) \approx \frac{1}{2(1 + s\tau)} \quad (12.11)$$

Det bemærkes at de to modeller gældende for lave og høje frekvenser hverken har samme DC-forstærkning eller tidskonstant. Ønskes en model med en tidskonstant, der dækker både høje og lave frekvenser, må den have samme DC-forstærkning som lavfrekvensmodellen

$$G_{21}(0) = \frac{1}{v\tau L^{-1} + 1}$$

og samme højfrekvensforstærkning som højfrekvensmodellen

$$G_{21}(s)_{hf} = \frac{1}{2s\tau}$$

hvilket opnås med modellen

$$G_{21}(s) = \frac{1}{(v\tau L^{-1} + 1)(1 + s2\tau(v\tau L^{-1} + 1)^{-1})} \quad (12.12)$$

hvor tidskonstanten er

$$\tau_{komb} = \frac{2\tau}{v\tau L^{-1} + 1} \quad (12.13)$$

Som det fremgår af ovenstående, er det muligt, at komme frem til tilnærmede overføringsfunktioner ved hjælp af rækkeudvikling af ikke rationelle udtryk i de teoretiske beregnede overføringsfunktioner. Denne fremgangsmetode muliggør fysisk fortolkning af de væsentlige dynamiske egenskaber, idet det for eksempel kan ses, hvilke størrelser der er bestemmende for tidskonstanter. I eksemplet resulterede rækkeudviklingen i en simpel første ordens funktion. I andre tilfælde er det muligt ved undersøgelse af de indgående udtryk at isolere eksempelvis tidsforsinkelser. Ulempen ved metoden er, at de teoretisk beregnede overføringsfunktioner ikke altid med tilstrækkelig nøjagtighed kan beskrives med første ordens rækkeudviklinger.

I [YT72] er modstrømsvarmevekslerens dynamik også behandlet for det ikke symmetriske tilfælde.

12.1.2 Amplitude -og fasekarakteristik af overføringsfunktion

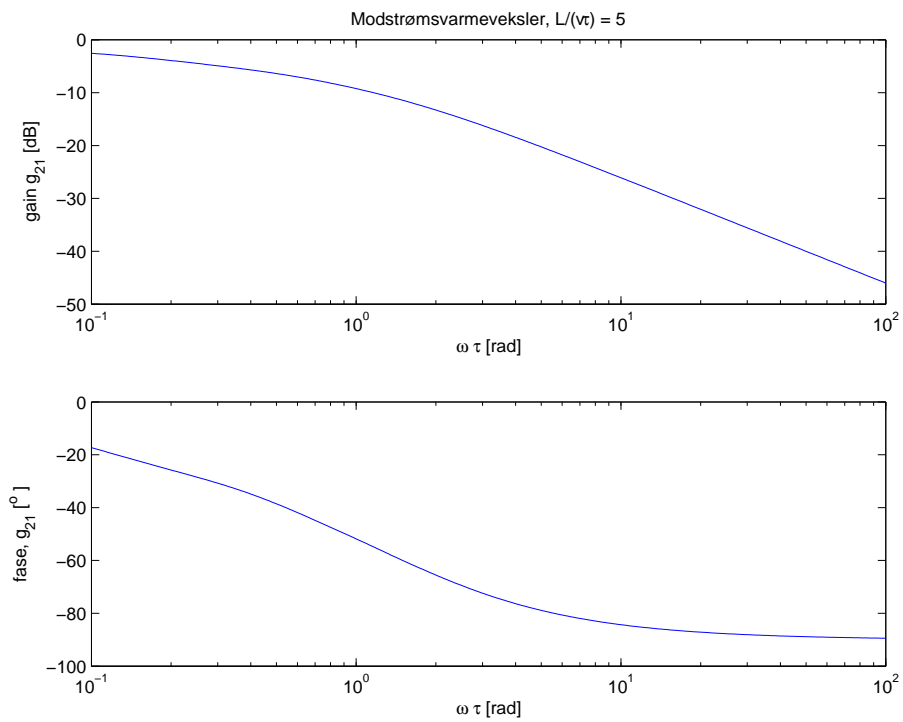
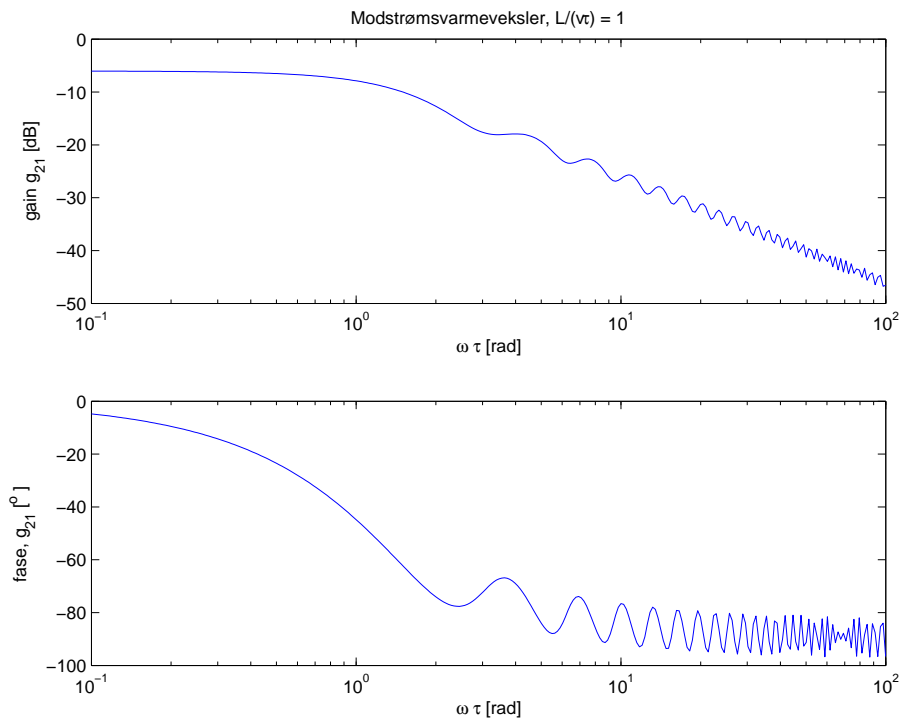
I det forrige afsnit blev det vist, hvorledes overføringsfunktionen for den symmetriske modstrømsvarmeveksler kunne simplificeres ved hjælp af rækkeudvikling. I dette afsnit optegnes amplitude -og fasekarakteristikker for overføringsfunktionen $G_{21}(s)$, som er givet ved

$$G_{21}(s) = \frac{T_{2ud}(s)}{T_{1ind}(s)} = \frac{1}{(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2} \coth(v^{-1}\tau^{-1}L(s^2\tau^2 + 2s\tau)^{1/2}) + s\tau + 1} \quad (12.14)$$

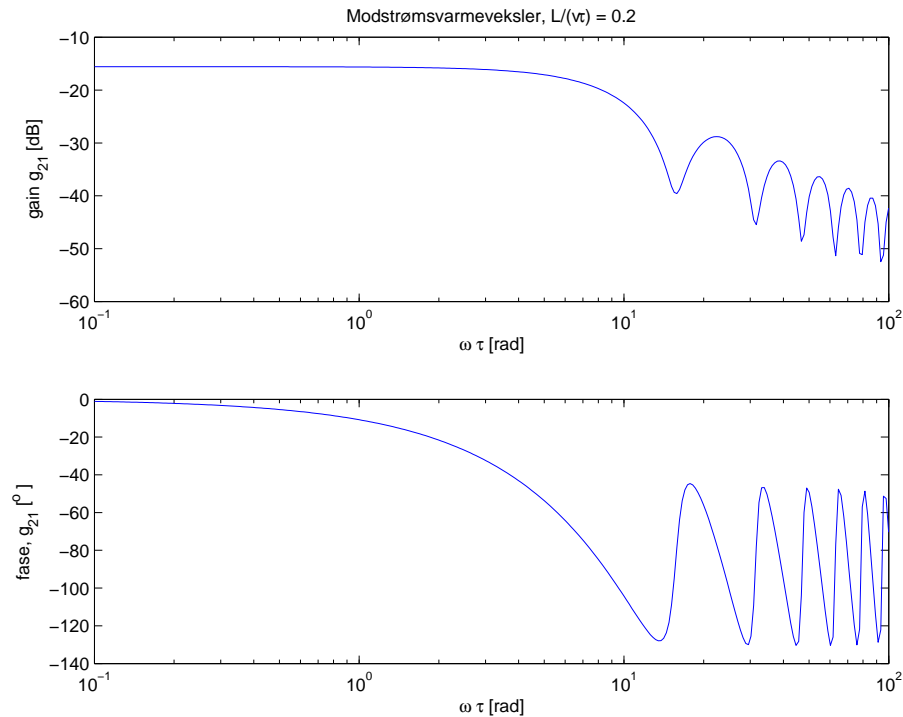
Overføringsfunktionen tegnes som funktion af $\Omega = \omega\tau$. Udtrykket $L/(v\tau)$ er da den eneste variabel i overføringsfunktionen. Her er τ varmevekslerens termiske tidskonstant og $t_d = L/v$ er transporttiden af væsken igennem varmeveksleren. Forholdet t_d/τ er af betydning for varmevekslerens dynamiske egenskaber hvilket fremgår af figur 12.1, hvor karakteristikkene er optegnet for værdierne 1 5 og 0.2. Karakteristikkene er beregnet i MATLAB-proceduren.

`%Beregning af frekvenskarakteristikker for modstrømsvarmeveksler`

```
k = 1;
r = exp(log(10)/100);
w = 0.1/r
i = sqrt(-1);
for j = 1:301
    w = w*r;
    omega(j) = w;
    a = sqrt(-w*w + 2*i*w);
    g(j) = 1/(a/tanh(k*a) + i*w + 1);
    fase(j) = 180*angle(g(j))/pi;
    gaindb(j) = 20*log10(abs(g(j)));
end
subplot(2,1,1)
semilogx(omega,gaindb)
title(['Modstrømsvarmeveksler, L/(v\tau) = ',num2str(k)])
ylabel('gain g_{21} [dB]')
xlabel('\omega \tau [rad]')
```



Modeldannelse



Figur 12.1: *Amplitude -og fasekarakteristik for modstrømsvarmeveksler.*

```
subplot(2,1,2)
semilogx(omega,fase)
ylabel('fase, g_{21} [^\circ]')
xlabel('\omega \tau [rad]')
```

Som det fremgår af figur 12.1 har karakteristikkene ved høje frekvenser et uventet udseende når forholdet t_d/τ antager en lille værdi.

Skal overføringsfunktionen bruges i reguleringsøjemed, er der to anvendelser af karakteristikkene, nemlig:

- Karakteristikkene kan anvendes direkte til et frekvensdesign af en ønsket regulator, for eksempel ud fra krav til båndbredde og fasemargin.
- Karakteristikkene kan anvendes til simplifikation af overføringsfunktionen til eksempelvis en bruden rationel funktion

Det er altså muligt ved hjælp af frekvenskarakteristikker at konstruere en simplificeret tilnærmet overføringsfunktion. Fremgangsmetoden har den fordel at tilnærmelsen kan bedømmes visuelt, idet de udtegnede frekvenskarakteristikker giver grundlag for sammenligning af teoretiske og tilnærmede karakteristikker. En væsentlig ulempe ved metoden er, at amplitude -og fasekarakteristikker er vanskelige og tidskrævende at verificere ved målinger på systemer, der har lavfrekvent dynamisk karakter. Endvidere vil resultatet fremstå som kurver eller talværdier, som kun er gældende for de aktuelle parameterværdier. Dette kan betyde at det er nødvendigt at udtegne mange karakteristikker, hvis parametrene kan variere. En måde

at omgå dette er, at normalisere de teoretiske overføringsfunktioner, som det er gjort med frekvensaksen i eksemplet.

12.1.3 Sektionsmodel

En nærliggende metode til at opnå en forsimplet analytisk overføringsfunktion er at opdele modstrømsvarmeveksleren i et endeligt antal sektioner.

Modelligningerne er i det symmetriske tilfælde givet ved

$$\frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (T_2(x, t) - T_1(x, t)) \quad (12.15)$$

$$\frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} - v \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (T_1(x, t) - T_2(x, t)) \quad (12.16)$$

En sektionsmodel kan opnås ved at anvende Backward Euler transformation i strømningsretningen, hvorved ligningerne efter Laplacetransformation (tid) får følgende udseende

$$sT_1(x, s) + v \frac{T_1(x, s) - T_1(x - \Delta x, s)}{\Delta x} = \frac{1}{\tau} (T_2(x - \Delta x, s) - T_1(x, s)) \quad (12.17)$$

$$sT_2(x - \Delta x, s) - v \frac{T_2(x, s) - T_2(x - \Delta x, s)}{\Delta x} = \frac{1}{\tau} (T_1(x, s) - T_2(x - \Delta x, s)) \quad (12.18)$$

Ud fra disse ligninger kan overføringsfunktionerne for en sektion findes

$$\begin{bmatrix} T_1(x, s) \\ T_2(x - \Delta x, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x - \Delta x, s) \\ T_2(x, s) \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

hvor

$$G_{11}(s) = G_{22}(s) = \frac{\tau v}{\Delta x} \frac{s\tau + v\tau/\Delta x + 1}{(s\tau + v\tau/\Delta x + 1)^2 - 1} \quad (12.20)$$

$$G_{12}(s) = G_{21}(s) = \frac{\tau v}{\Delta x} \frac{1}{(s\tau + v\tau/\Delta x + 1)^2 - 1} \quad (12.21)$$

Hvis modstrømsvarmeveksleren kan beskrives med en sektion findes modellen ved i ligningerne 12.20 og 12.21 at substituere $\Delta x = L$ idet

$$T_1(L, s) = T_{1ud}(s) \quad T_1(0, s) = T_{1ind}(s) \quad T_2(L, s) = T_{2ind}(s) \quad T_2(0, s) = T_{2ud}(s)$$

Ønskes en analytisk model med n sektioner må ligningerne 12.17 og 12.18 først løses med hensyn til $T_1(x, s)$ og $T_2(x, s)$, hvilket giver

$$\begin{bmatrix} T_1(x, s) \\ T_2(x, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x - \Delta x, s) \\ T_2(x - \Delta x, s) \end{bmatrix} \quad (12.22)$$

hvor

$$H_{11}(s) = G_{11}(s) - G_{12}(s)G_{21}(s)/G_{22}(s) \quad (12.23)$$

$$H_{12}(s) = G_{12}(s)/G_{22}(s) \quad (12.24)$$

$$H_{21}(s) = -G_{21}(s)/G_{22}(s) \quad (12.25)$$

$$H_{22}(s) = 1/G_{22}(s) \quad (12.26)$$

hvorefter overføringsmatricen for n sektioner er givet ved

$$\begin{bmatrix} T_{1ud}(s) \\ T_{2ind}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} T_{1ind}(s) \\ T_{2ud}(s) \end{bmatrix} \quad (12.27)$$

Overføringsfunktionerne ønskes givet med $T_{1ud}(s)$ og $T_{2ud}(s)$ som output og den endelige overføringsmatrix findes ved at løse 12.27 med hensyn til de 2 output.

Som det fremgår af ovenstående er det muligt at opstille udtryk givet ved vanlige rationelle brudne funktioner ved hjælp af sektionering. Fremgangsmetoden har den fordel, at overføringsfunktionerne er på bogstavform, hvorved det er muligt at bestemme de enkelte parametres indflydelse på de dynamiske forhold. Ligeledes er det muligt at opnå en ønsket nøjagtighed ved at medtage et passende stort antal sektioner. Endeligt er det muligt at vurdere den enkelte sektion for sig med henblik på mulige forsimplinger. En ulempe ved fremgangsmetoden kan være det store beregningsmæssige arbejde, der fremkommer ved mange sektioner af et komplekst system som i det givne eksempel, hvor der er modsat rettede strømninger.

12.1.4 Datamatsimulering af grundligninger

En sidste metode til opstilling af en simpel model egnet til reguleringsanalyse er at løse de opstillede differentiallyigninger numerisk. Metoder til numerisk løsning beskrives i efterfølgende afsnit. Typisk vil ligningerne blive løst med et spring som input. De beregnede outputsekvenser fortolkes herefter til simple velkendte funktioner (1. - 2. ordens systemer, tidsforsinkelser etc.) eksempelvis ved anvendelse af tangentmetode eller systemidentifikation. Ligeledes kan simulering anvendes til fastlæggelse af antal sektioner i en sektionsmodel. Fremgangsmetoden har den fordel at tilnærmelsen kan bedømmes visuelt ud fra sammenligning af datamat respons og tilnærmet model. Ligeledes er det enkelt at verificere en tilnærmet model ved hjælp af målinger på det fysiske system. En ulempe ved metoden er at parametre i den tilnærmede model ikke direkte kan relateres til fysiske parametre, hvilket dog delvist kan omgås ved at normalisere grundligningerne for at reducere antallet af parametre.

Kapitel 13

Datamatsimulering af systemer med fordelte parametre

I forrige afsnit blev analytisk løsning af partielle differentialligninger undersøgt for et udvalgt system, nemlig den symmetriske modstrømsvarmeveksler. Numerisk løsning af partielle differentialligninger (datamatsimulering) er, ligesom det var tilfældet for den analytiske løsning, et omfattende matematisk emneområde, og der vil ikke blive gjort forsøg på at dække dette. I stedet fortsættes med det valgte eksempel som er den symmetriske modstrømsvarmeveksler givet ved

$$\frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (T_2(x, t) - T_1(x, t)) \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} - v \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (T_1(x, t) - T_2(x, t)) \quad (13.2)$$

Simuleringen vil blive behandlet ud fra en sektionsopdeling, hvor varmeveksleren inddeles i et antal sektioner, og der for den enkelte sektion opstilles en fysisk meningsfuld model.

13.1 Fysisk sektionering

Her tages udgangspunkt i den sektionsopdeling der er foretaget i forrige afsnit, hvor der er lavet en Backward Euler transformation af 13.1 og 13.2 i stedet, hvorved der fremkommer to ordinære differentialligninger.

$$\frac{dT_1(x, t)}{dt} + v \frac{T_1(x, t) - T_1(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{1}{\tau} (T_2(x - \Delta x, t) - T_1(x, t)) \quad (13.3)$$

$$\frac{dT_2(x - \Delta x, t)}{dt} - v \frac{T_2(x, t) - T_2(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{1}{\tau} (T_1(x, t) - T_2(x - \Delta x, t)) \quad (13.4)$$

Ligningerne normaliseres, idet den dimensionsløse størrelse $t \rightarrow t/\tau$ indsættes

$$\frac{dT_1(x, t)}{dt} + v\tau \frac{T_1(x, t) - T_1(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = T_2(x - \Delta x, t) - T_1(x, t) \quad (13.5)$$

$$\frac{dT_2(x - \Delta x, t)}{dt} - v\tau \frac{T_2(x, t) - T_2(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = T_1(x, t) - T_2(x - \Delta x, t) \quad (13.6)$$

Tidsdiskretiseringen af disse to ligninger foretages ved anvendelse af Backward Euler transformation, hvilket giver de to differensligninger

$$\frac{T_1(x, t) - T_1(x, t - \Delta t))}{\Delta t} + v\tau \frac{T_1(x, t) - T_1(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = T_2(x - \Delta x, t) - T_1(x, t) \quad (13.7)$$

$$\frac{T_2(x - \Delta x, t) - T_2(x - \Delta x, t - \Delta t)}{\Delta t} - v\tau \frac{T_2(x, t) - T_2(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = T_1(x, t) - T_2(x - \Delta x, t) \quad (13.8)$$

Det gælder for ligningerne 13.7 og 13.8, at for hver sektion er $T_1(x - \Delta x, t)$ og $T_2(x, t)$ input. $T_1(x, t)$ og $T_2(x - \Delta x, t)$ er output (ubekendte). Deles varmeveksleren op i n sektioner vil de ubekendte (tilstandsvariable) være

$$x(t) = \begin{bmatrix} T_1(L/n, t) \\ T_2(0, t) \\ T_1(2L/n, t) \\ T_2(L/n, t) \\ \vdots \\ T_1(L, t) \\ T_2((n-1)L/n, t) \end{bmatrix} \quad (13.9)$$

Ligningssystemet for n sektioner kan skrives som

$$Ax(t) = \frac{1}{\Delta t}x(t - \Delta t) + \frac{v\tau n}{L}u(t) \quad (13.10)$$

hvor $u(t)$ er inputvektoren givet ved

$$u(t) = \begin{bmatrix} T_1(0, t) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ T_2(L, t) \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

og A er en $2nx2n$ matrix givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & a & 0 & b & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & 0 & a & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & a & 0 & b & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & b & 0 & a & -1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & 0 & a & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -1 & a \end{bmatrix} \quad (13.12)$$

hvor

$$a = \frac{1}{\Delta t} + \frac{v\tau n}{L} + 1 \quad (13.13)$$

$$b = -\frac{v\tau n}{L} \quad (13.14)$$

Systematikken i A bemærkes, idet ulige rækkeenumre indeholder sekvensen $b \ 0 \ a \ -1$ og lige rækkeenumre sekvensen $-1 \ a \ 0 \ b$ hvor a er diagonalelementet. Simuleringen foretages nu ved til t at løse ligningssystemet 13.10 med hensyn til $x(t)$. I programmet er vist en MATLAB procedure til løsning af ligningssystemet

```
% Simulering af symmetrisk modstrømsvarmeveksler, sektionering
```

```
r      =      input('L/v * \tau = r                               =');
dt      =      input('tidsstep      dt                               =');
n      =      input('sektionsantal n                               =');
tmax =      input('antal tidsstep tmax                               =');
```

```
% Beregning af A, C og D matricer
```

```
a = 1/dt + n/r + 1;
b = -n/r;
A = zeros(2*n,2*n);
C = zeros(2*n,1);
C(1,1) = n/r;
D = zeros(2*n,1);
D(2*n,1) = n/r;
for i = 1:n
    A(2*i-1,2*i-1) = a;
    if i>1 A(2*i-1,2*i-3) = b; end;
    A(2*i-1,2*i) = -1;
    A(2*i,2*i) = a;
    A(2*i,2*i-1) = -1;
    if i<n A(2*i,2*i+2) = b; end;
end
```

```
% Initialisering af tilstandsvektor
```

```
x = zeros(2*n,1);
```

```
% Fastlæggelse af inputsekvens
```

```
T1ind = ones(tmax+1,1);
T2ind = zeros(tmax+1,1);
```

```
% Simulering af sektioneret systemligning
```

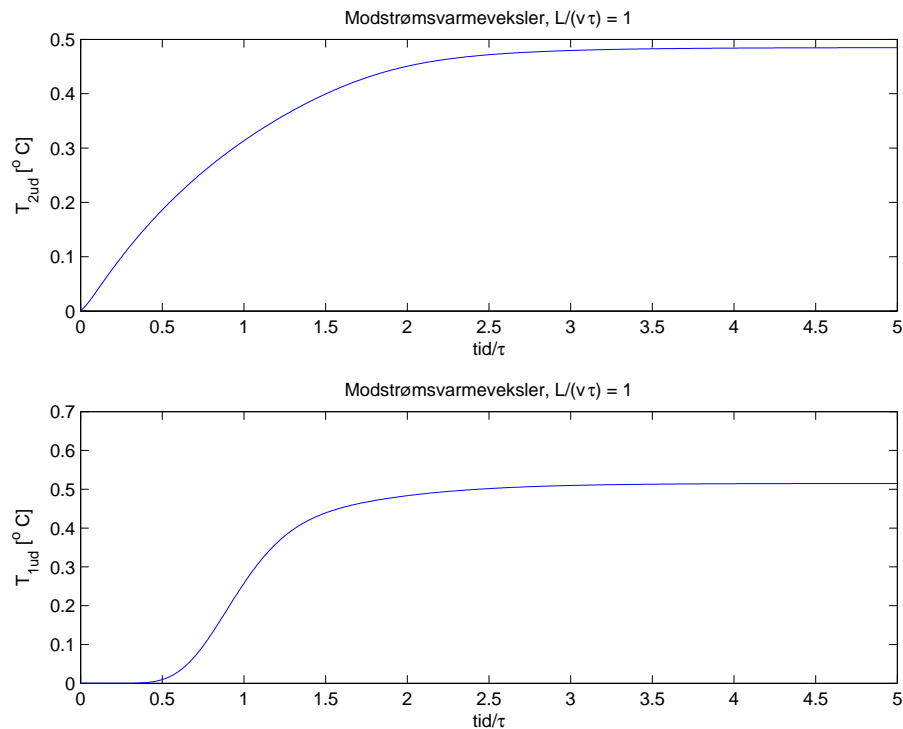
```
for t = 1:tmax+1
    tid(1,t) = t*dt-dt;
    B = x/dt + T1ind(t,1)*C + T2ind(t,1)*D;
    x = A\B;
    T1ud(t) = x(2*n-1,1);
    T2ud(t) = x(2,1);
```

end

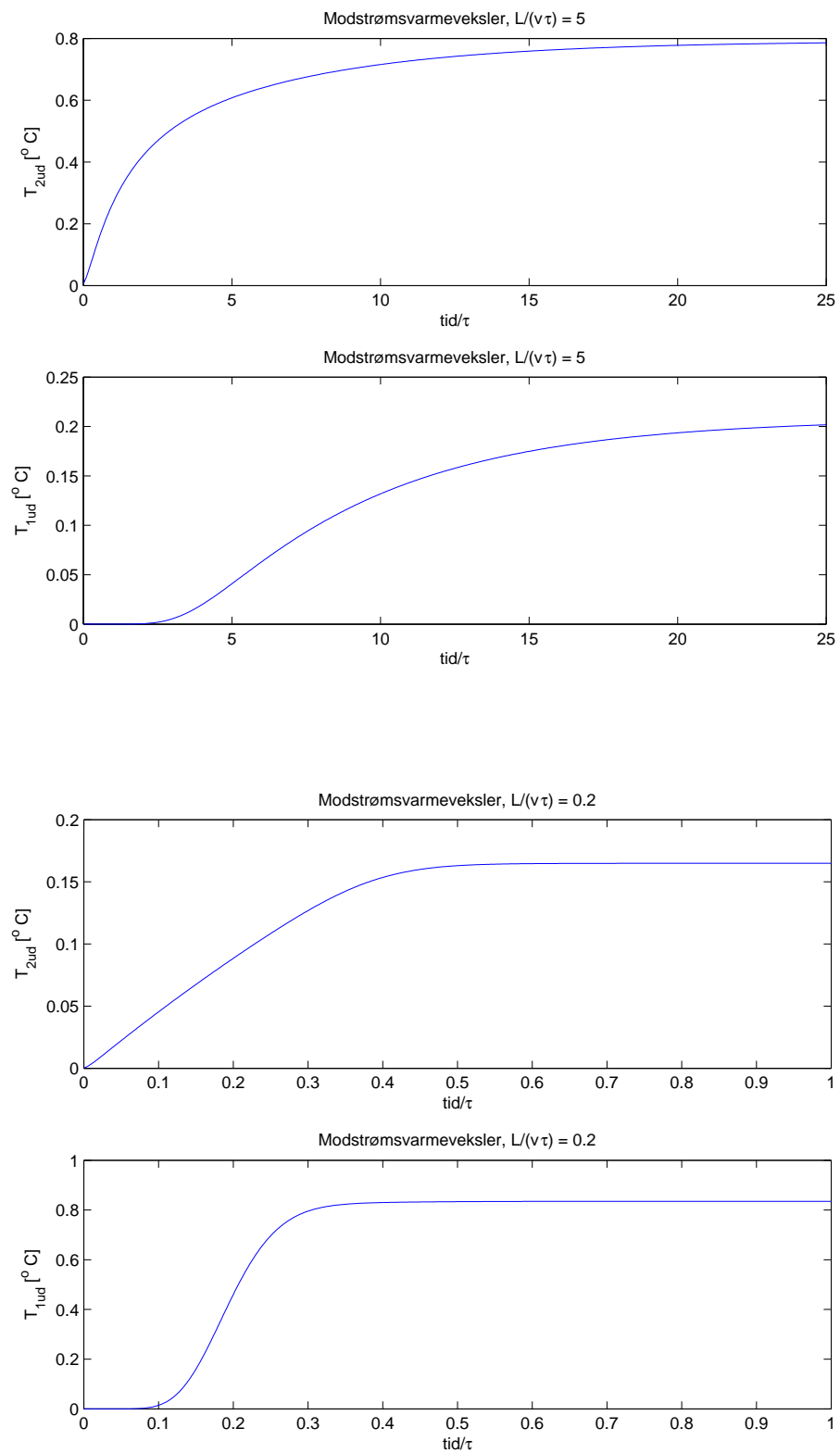
% Plotning

```
subplot(2,1,1)
plot(tid,T2ud)
title(['Modstrømsvarmeveksler, L/(v \tau) = ', num2str(r)])
xlabel('tid/\tau')
ylabel('T_{2ud} [\text{°C}]')
subplot(2,1,2)
plot(tid,T1ud)
title(['Modstrømsvarmeveksler, L/(v \tau) = ', num2str(r)])
xlabel('tid/\tau')
ylabel('T_{1ud} [\text{°C}]')
```

Der udtegnes springresponser for $L/(v\tau)$ på 1, 5 og 0.2 svarende til amplitude og fasekarakteristikkerne i forrige afsnit. Som tidsskridt er valgt $\Delta t/\tau = 0.01, 0.05$ og 0.002 og antal sektioner, n er valgt til 16.



På figur 13.1 er T_{2ud} springresponser svarende til overføringsfunktionen $G_{21}(s)$, hvis amplitude- og fasekarakteristik er vist på figur 12.1. Desuden er medtaget springresponser for T_{1ud} svarende til overføringsfunktionen $G_{11}(s)$. For T_{2ud} ses at springresponser minder meget om responser for et 1. ordens system, hvilket er i overensstemmelse med det, der forventes ud fra frekvenskarakteristikker og tilnærmelse af overføringsfunktion ved rækkeudvikling. For T_{1ud} gælder, at når forholdet $L/v\tau$ har store værdier, har responser en tydelig tidsforsinkelse.



Figur 13.1: *Springresponser for modstrømsvarmeveksler*

Litteratur

- [Cha84] A.J. Chapman. *Heat Transfer*. Macmillian Publishing Company, 866 Third Avenue, New York, New York 10022, 4th edition, 1984.
- [dWHOKÅPL95] C. Canudas de Witt H. Olsson K.J. Åström P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 40(3):419–425, march 1995.
- [JW76] R.E. Wilson J.R. Welty, C.E. Wicks. *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons Inc., 1976.
- [Kum95] J. Christian Gerdes Vijay Kumar. An impact model of mechanical backlash for control system analysis. In *Proc. American Control Conf.*, pages 3311–3315, 1995.
- [Sch82] E. Schmidt. *Properties of Water and Steam in SI-Units*. Springer Verlag, 1982.
- [VDI84] VDI-verlag, GmbH. *VDI-Wärmeatlas*, 4 edition, 1984.
- [YT72] David M. Auslander Yasundo Takahashi, Michael J. Rabins. *Control and Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1972.