INF 1007 – Programação 2

Tema 10 – Árvores Binárias

Tópicos Principais

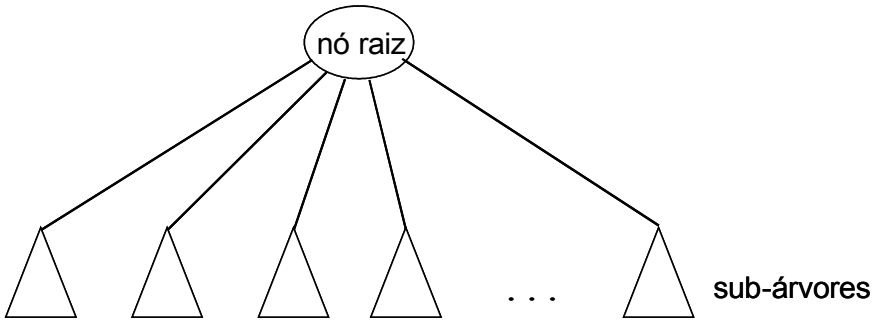
- Introdução
- Árvores binárias
- Implementação em C
- Ordens de percurso
- Árvore binária de busca (ABB)
- Funções para ABBs
  - Impressão
  - Busca

Tópicos Complementares

- Inserção em ABB
- Remoção em ABB

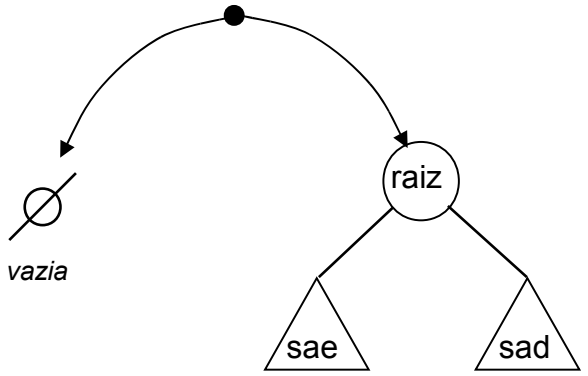
Introdução

- Árvore
  - um conjunto de nós tal que
    - existe um nó r, denominado *raiz*, com zero ou mais sub-árvores, cujas raízes estão ligadas a r
    - os nós raízes destas sub-árvores são os *filhos* de r
    - os *nós internos* da árvore são os nós com filhos
    - *as folhas* ou *nós externos* da árvore são os nós sem filhos



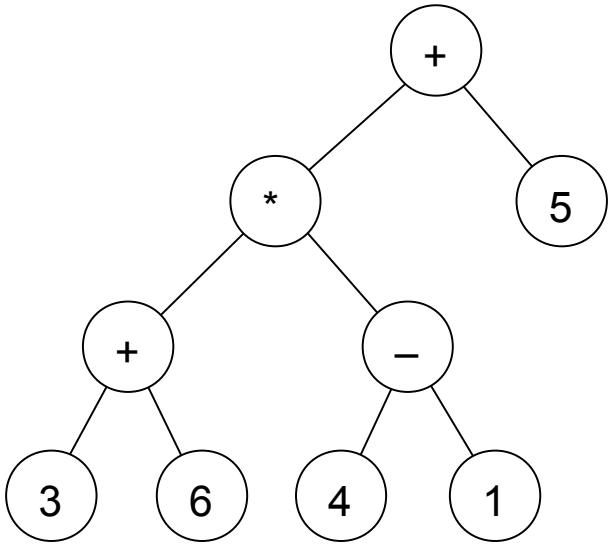
Árvores binárias

- Árvore binária
  - uma árvore em que cada nó tem zero, um ou dois filhos
  - uma árvore binária é:
    - uma árvore vazia; ou
    - um nó raiz com duas sub-árvores:
      - a sub-árvore da esquerda (sae)
      - a sub-árvore da direita (sad)



Árvores binárias

- Exemplo
  - árvores binárias representando expressões aritméticas:
    - nós folhas representam operandos
    - nós internos operadores
    - exemplo: (3+6)*(4-1)+5



Implementação em C

- Representação de uma árvore:
  - através de um ponteiro para o nó raiz
- Representação de um nó da árvore:
  - estrutura em C contendo
    - a informação propriamente dita (exemplo: um caractere)
    - dois ponteiros para as sub-árvores, à esquerda e à direita

```
struct noArv {
   char info;
   struct noArv* esq;
   struct noArv* dir;
};
```

Implementação em C

- Interface do tipo abstrato Árvore Binária: arv.h

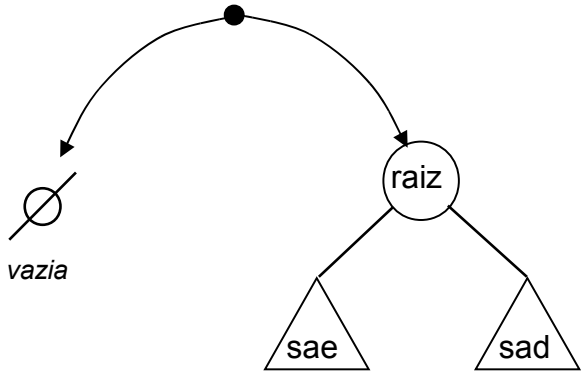
```
typedef struct noArv NoArv;

NoArv* arv_criavazia (void);
NoArv* arv_cria (char c, NoArv* e, NoArv* d);
NoArv* arv_libera (NoArv* a);
int  arv_vazia (NoArv* a);
int  arv_pertence (NoArv* a, char c);
void arv_imprime (NoArv* a);
```

Implementação em C

- Implementação das funções:
  - implementação recursiva, em geral
  - usa a definição recursiva da estrutura

Uma árvore binária é:

- uma árvore vazia; ou
- um nó raiz com duas sub-árvores:
  - a sub-árvore da direita (sad)
  - a sub-árvore da esquerda (sae)



Implementação em C

- função arv_criavazia
  - cria uma árvore vazia

```
NoArv* arv_criavazia (void)
{
   return NULL;
}
```

Implementação em C

- função arv_cria
  - cria um nó raiz dadas a informação e as duas sub-árvores, a da esquerda e a da direita
  - retorna o endereço do nó raiz criado

```
NoArv* arv_cria (char c, NoArv* sae, NoArv* sad)
{
  NoArv* p=(NoArv*)malloc(sizeof(NoArv));
  p->info = c;
  p->esq = sae;
  p->dir = sad;
  return p;
}
```

Implementação em C

- criavazia e cria
  - as duas funções para a criação de árvores representam os dois casos da definição recursiva de árvore binária:
    - uma árvore binária NoArv* a;
      - é vazia a=arv_criavazia()
      - é composta por uma raiz e duas sub-árvores a=arv_cria(c,sae,sad);

Implementação em C

- função arv_libera
  - libera memória alocada pela estrutura da árvore
    - as sub-árvores devem ser liberadas antes de se liberar o nó raiz
  - retorna uma árvore vazia, representada por NULL

```
NoArv* arv_libera (NoArv* a){
   if (!arv_vazia(a)){
      arv_libera(a->esq);      /* libera sae */
      arv_libera(a->dir);      /* libera sad */
      free(a);                 /* libera raiz */
   }
   return NULL;
}
```

Implementação em C

- função arv_vazia
  - indica se uma árvore é ou não vazia

```
int arv_vazia (NoArv* a)
{
   return a==NULL;
}
```

Implementação em C

- função arv_pertence
  - verifica a ocorrência de um caractere c em um de nós
  - retorna um valor booleano (1 ou 0) indicando a ocorrência ou não do caractere na árvore

```
int arv_pertence (NoArv* a, char c){
   if (arv_vazia(a))
      return 0;                    /* árvore vazia: não encontrou */
   else
      return a->info==c ||
             arv_pertence(a->esq,c) ||
             arv_pertence(a->dir,c);
}
```

Implementação em C

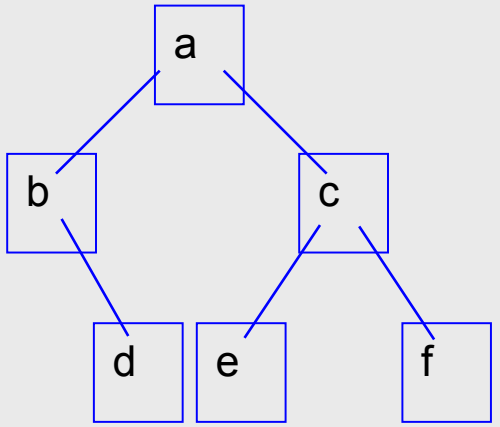
- função arv_imprime
  - percorre recursivamente a árvore, visitando todos os nós e imprimindo sua informação

```
void arv_imprime (NoArv* a)
{
   if (!arv_vazia(a)){
      printf("%c ", a->info);          /* mostra raiz */
      arv_imprime(a->esq);             /* mostra sae */
      arv_imprime(a->dir);             /* mostra sad */
   }
}
```

Implementação em C

- Exemplo:

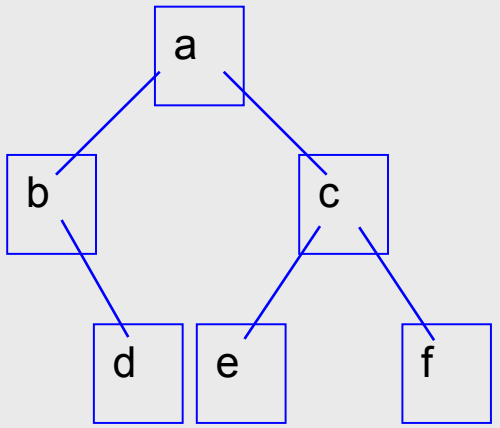
```
/* sub-árvore 'd' */
NoArv* a1= arv_cria('d',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'b' */
NoArv* a2= arv_cria('b',arv_criavazia(),a1);
/* sub-árvore 'e' */
NoArv* a3= arv_cria('e',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'f' */
NoArv* a4= arv_cria('f',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'c' */
NoArv* a5= arv_cria('c',a3,a4);
/* árvore 'a' */
NoArv* a = arv_cria('a',a2,a5 );
```



Implementação em C

- Exemplo:

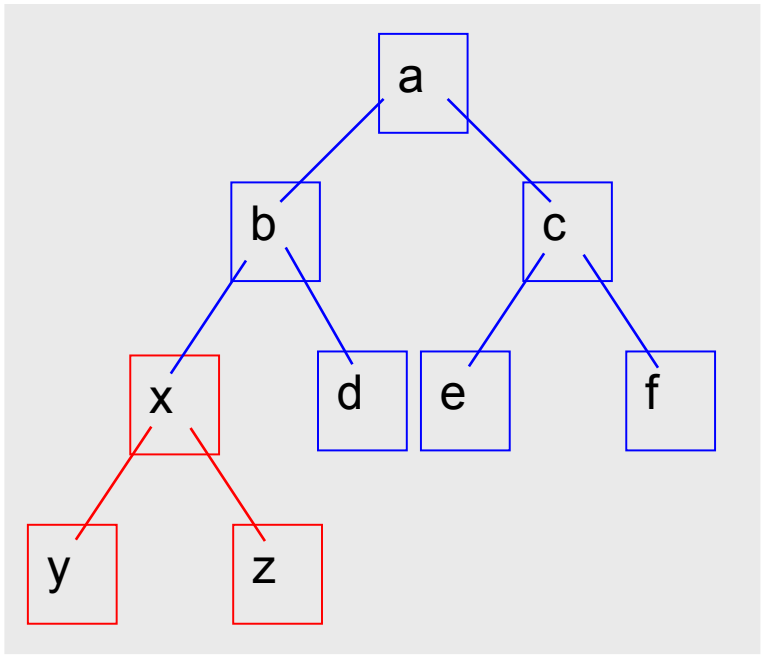
```
NoArv* a = arv_cria('a',
            arv_cria('b',
                arv_criavazia(),
                arv_cria('d', arv_criavazia(), arv_criavazia())
            ),
            arv_cria('c',
                arv_cria('e', arv_criavazia(), arv_criavazia()),
                arv_cria('f', arv_criavazia(), arv_criavazia())
            )
           );
```



Implementação em C

- Exemplo - acrescenta nós

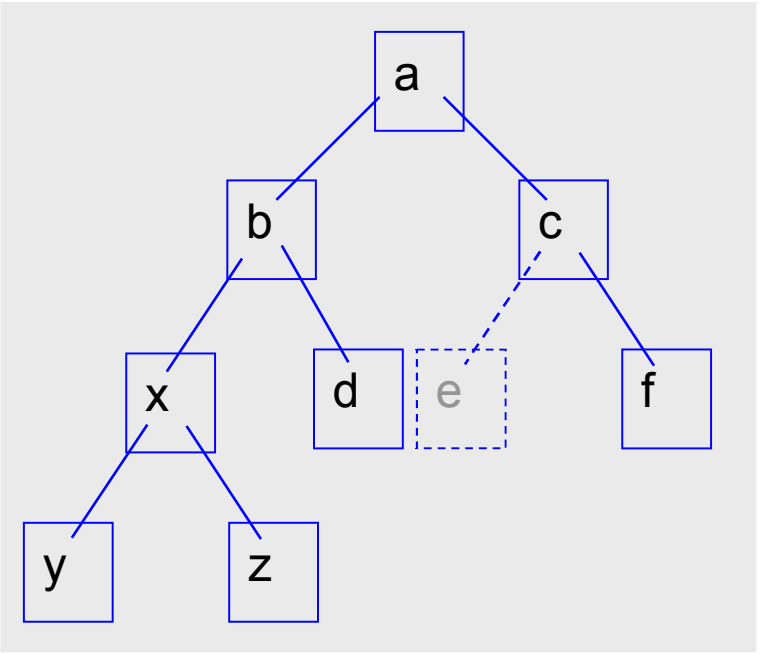
```
a->esq->esq =
    arv_cria('x',
                arv_cria('y',
                        arv_criavazia(),
                        arv_criavazia()),
                arv_cria('z',
                        arv_criavazia(),
                        arv_criavazia())
               );
```



Implementação em C

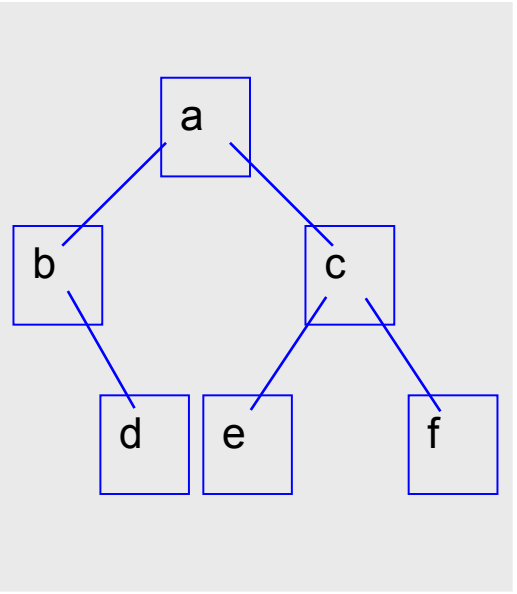
- Exemplo - libera nós

```
a->dir->esq = libera(a->dir->esq);
```



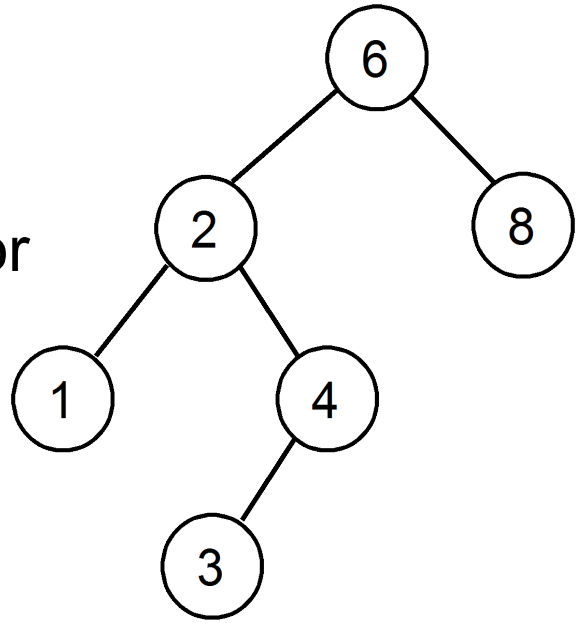
Ordens de percurso

- Ordens de percurso:
  - *pré-ordem*:
    - trata *raiz*, percorre *sae*, percorre *sad*
    - exemplo: a b d c e f
  - *ordem simétrica*:
    - percorre *sae*, trata *raiz*, percorre *sad*
    - exemplo: b d a e c f
  - *pós-ordem*:
    - percorre *sae*, percorre *sad*, trata *raiz*
    - exemplo: d b e f c a



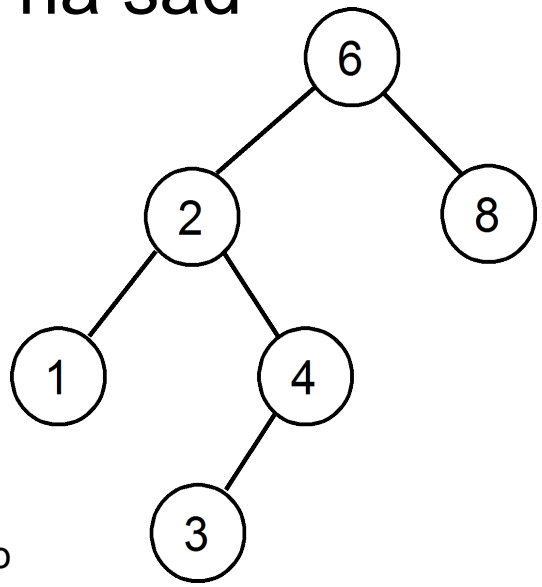
Árvore Binária de Busca (ABB)

- o valor associado à raiz é sempre maior que o valor associado a qualquer nó da sub-árvore à esquerda (*sae*) e
- o valor associado à raiz é sempre menor ou igual (para permitir repetições) que o valor associado a qualquer nó da sub-árvore à direita (*sad*)
- quando a árvore é percorrida em ordem simétrica (*sae - raiz - sad*), os valores são encontrados em ordem não decrescente



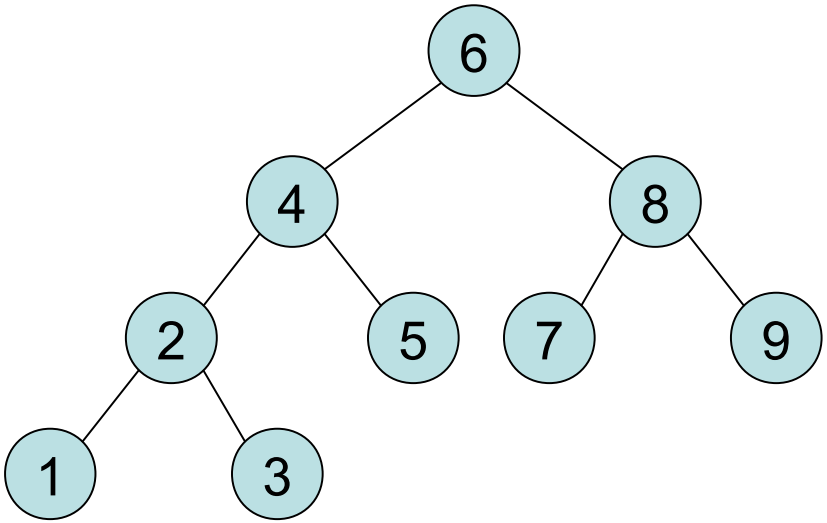
Pesquisa em Árvore Binária de Busca

- compare o valor dado com o valor associado à raiz
- se for igual, o valor foi encontrado
- se for menor, a busca continua na sae
- se for maior, a busca continua na sad



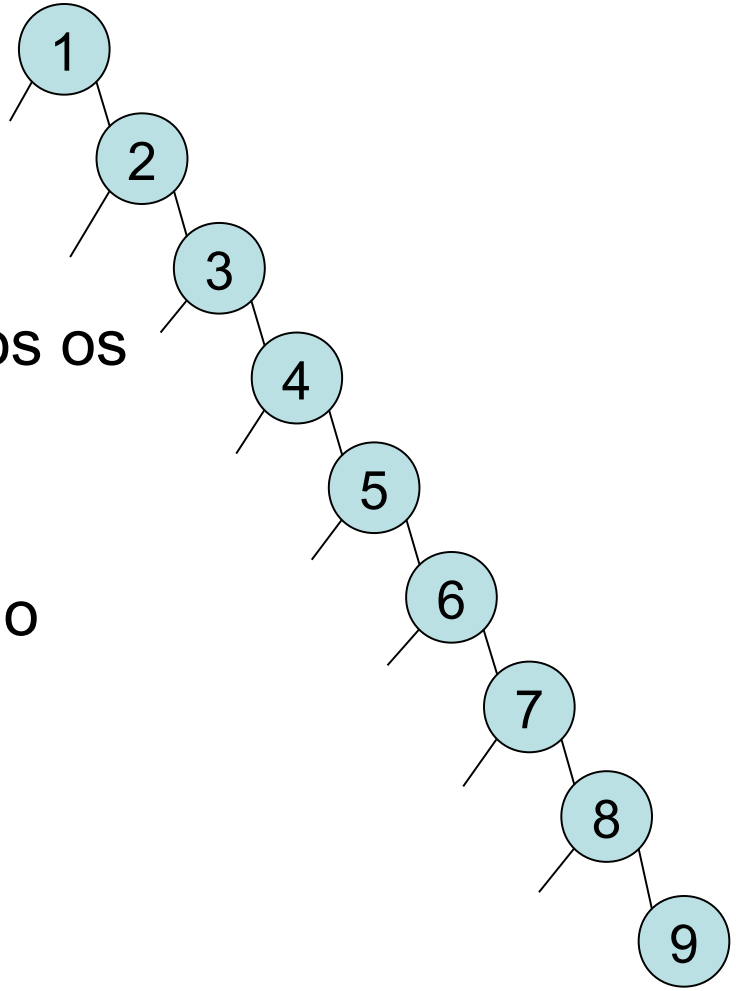
Pesquisa em Árvore Binária de Busca

- Em **árvores balanceadas** os nós internos têm todos, ou quase todos, 2 filhos
- Qualquer nó pode ser alcançado a partir da raiz em *O(log n)* passos



Pesquisa em Árvore Binária de Busca

- Em **árvores degeneradas** todos os nós têm apenas 1 filho, com exceção da (única) folha
- Qualquer nó pode ser alcançado a partir da raiz em *O(n)* passos



Tipo Árvore Binária de Busca

- árvore é representada pelo ponteiro para o nó raiz

```
struct noArv {
   int info;
   struct noArv* esq;
   struct noArv* dir;
};

typedef struct noArv NoArv;
```

ABB: Criação

- árvore vazia representada por NULL:

```
NoArv* abb_cria (void)
{
   return NULL;
}
```

ABB: Impressão

- imprime os valores da árvore em ordem crescente, percorrendo os nós em ordem simétrica

```
void abb_imprime (NoArv* a)
{
   if (a != NULL) {
      abb_imprime(a->esq);
      printf("%d\n",a->info);
      abb_imprime(a->dir);
   }
}
```

ABB: Busca

- explora a propriedade de ordenação da árvore
- possui desempenho computacional proporcional à altura

```
NoArv* abb_busca (NoArv* r, int v)
{
   if (r == NULL)
         return NULL;
   else if (r->info > v)
         return abb_busca (r->esq, v);
   else if (r->info < v)
         return abb_busca (r->dir, v);
   else return r;
}
```

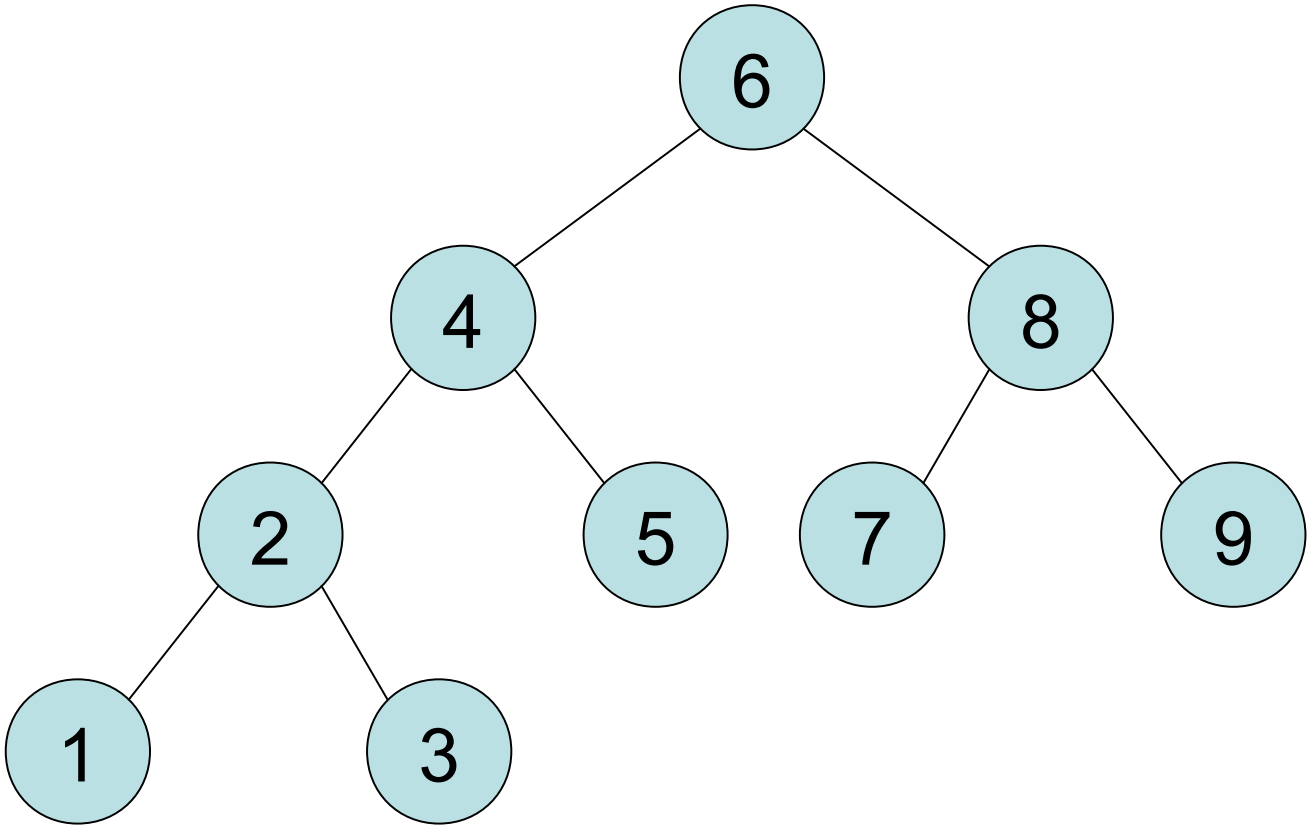
ABB: Inserção

- recebe um valor v a ser inserido
- retorna o eventual novo nó raiz da (sub-)árvore
- para adicionar v na posição correta, faça:
  - se a (sub-)árvore for vazia
    - crie uma árvore cuja raiz contém v
  - se a (sub-)árvore não for vazia
    - compare v com o valor na raiz
    - insira v na sae ou na sad, conforme o resultado da comparação

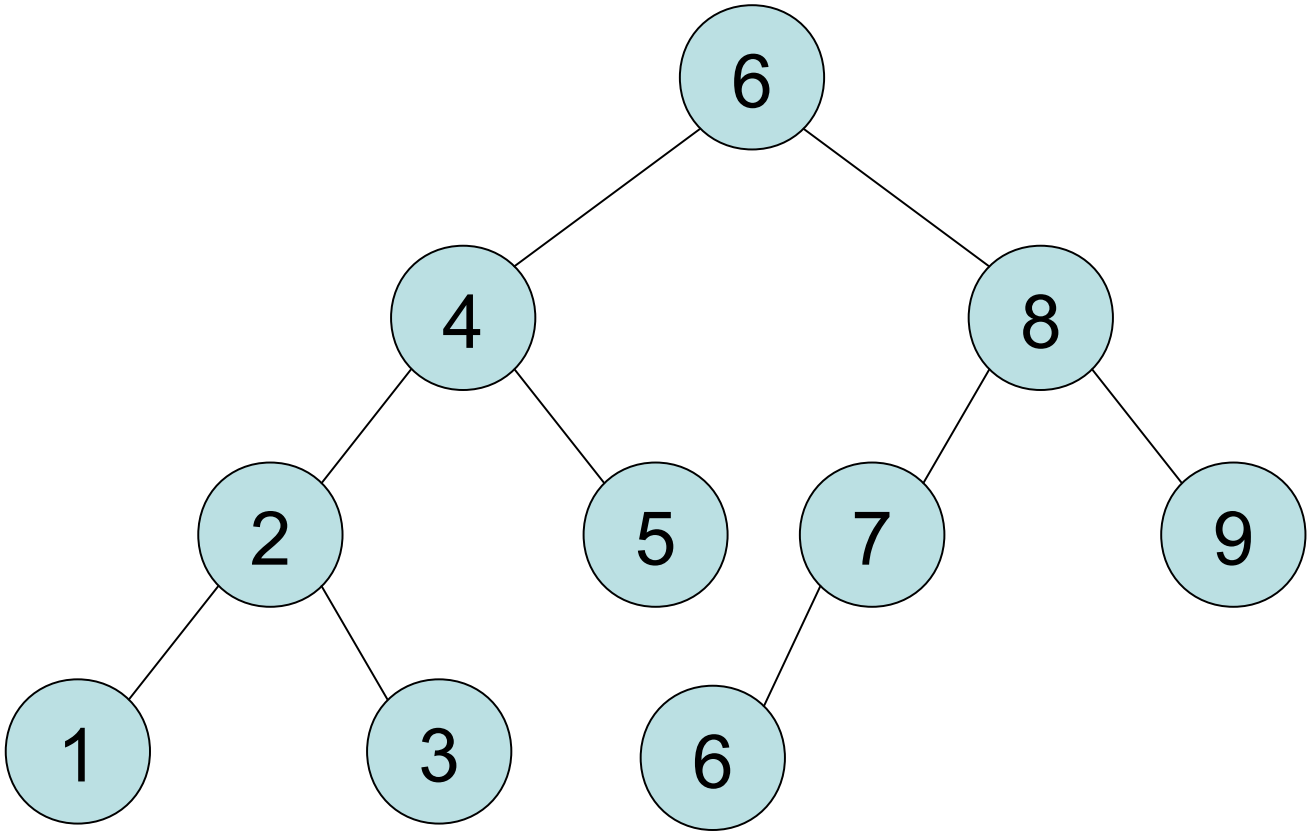
```
NoArv* abb_insere (NoArv* a, int v)
{
    if (a==NULL) {
        a = (NoArv*)malloc(sizeof(NoArv));
        a->info = v;
        a->esq = a->dir = NULL;
    }

    else if (v < a->info)
        a->esq = abb_insere(a->esq,v);

    else  /* v >= a->info */
        a->dir = abb_insere(a->dir,v);

    return a;
}
```

é necessário atualizar os ponteiros para as sub-árvores à esquerda ou à direita quando da chamada recursiva da função, pois a função de inserção pode alterar o valor do ponteiro para a raiz da (sub-)árvore.

```
cria
insere 6
insere 4
insere 8
insere 2
insere 5
insere 1
insere 3
insere 7
insere 9
```



```
cria
insere 6
insere 4
insere 8
insere 2
insere 5
insere 1
insere 3
insere 7
insere 9
insere 6
```



a repetição está permitida!

```
NoArv* abb_insere (NoArv* a, int v)
{
    if (a==NULL) {
        a = (NoArv*)malloc(sizeof(NoArv));
        a->info = v;
        a->esq = a->dir = NULL;
    }

    else if (v < a->info)
        a->esq = abb_insere(a->esq,v);

    else if (v > a->info)
        a->dir = abb_insere(a->dir,v);

    return a;
}
```

ABB: Remoção

- recebe um valor v a ser inserido
- retorna a eventual nova raiz da árvore
- para remover v, faça:
  - se a árvore for vazia
    - nada tem que ser feito
  - se a árvore não for vazia
    - compare o valor armazenado no nó raiz com v
    - se for maior que v, retire o elemento da sub-árvore à esquerda
    - se for menor do que v, retire o elemento da sub-árvore à direita
    - se for igual a v, retire a raiz da árvore

ABB: Remoção

- para retirar a raiz da árvore, há 3 casos:
  - caso 1: a raiz que é folha
  - caso 2: a raiz a ser retirada possui um único filho
  - caso 3: a raiz a ser retirada tem dois filhos

ABB: Remoção de folha

- Caso 1: a raiz da sub-árvore é folha da árvore original
  - libere a memória alocada pela raiz
  - retorne a raiz atualizada, que passa a ser NULL

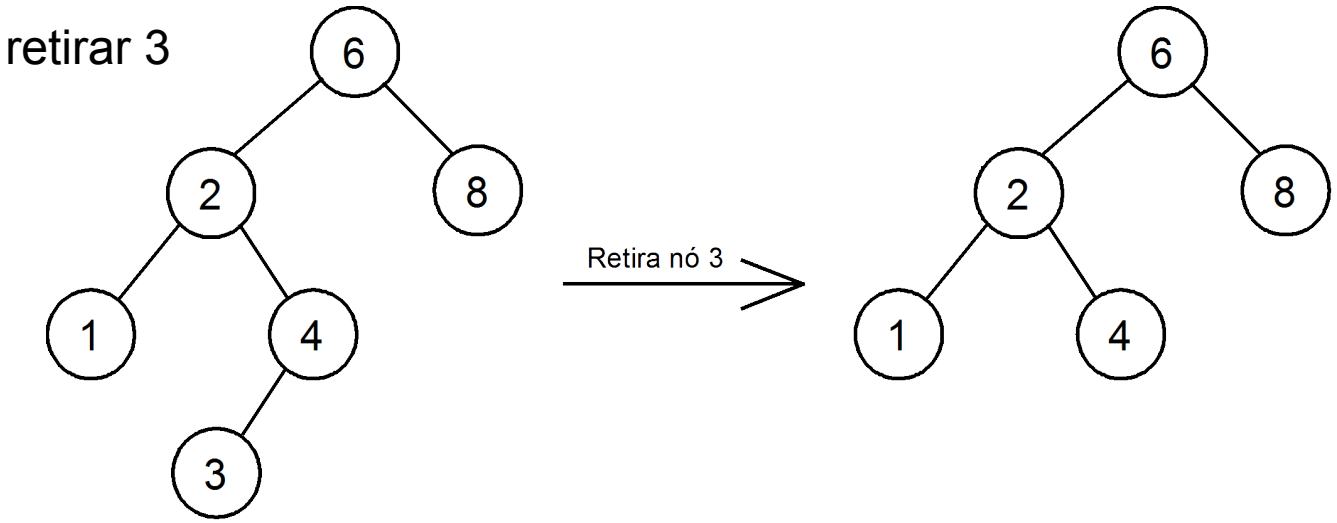


ABB: Remoção de pai de filho único

- Caso 2: a raiz a ser retirada possui um único filho
  - libere a memória alocada pela raiz
  - a raiz da árvore passa a ser o único filho da raiz

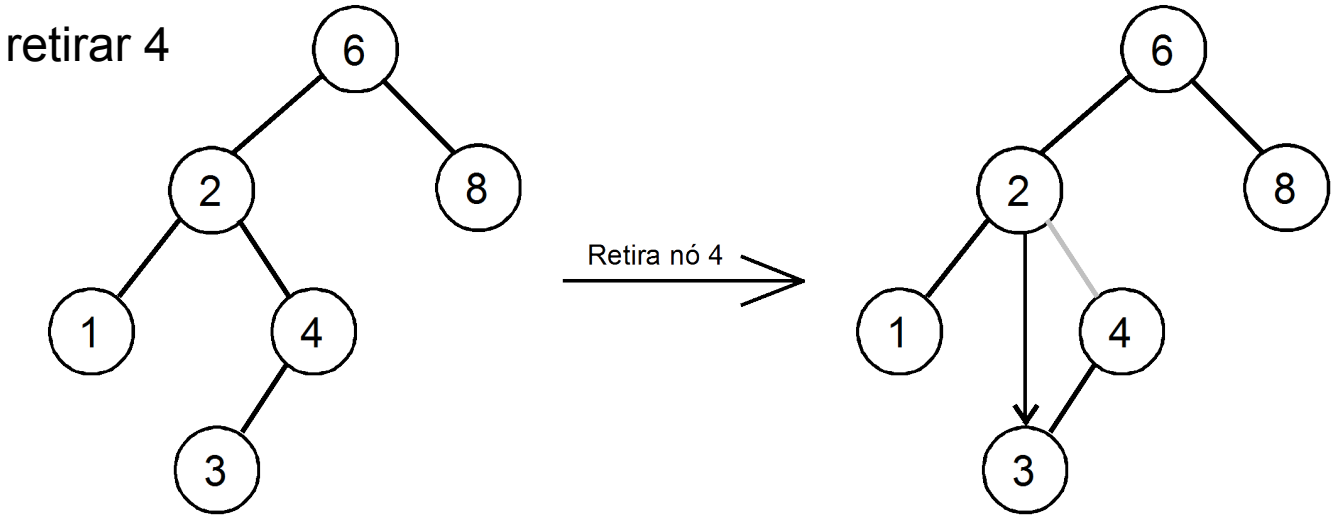
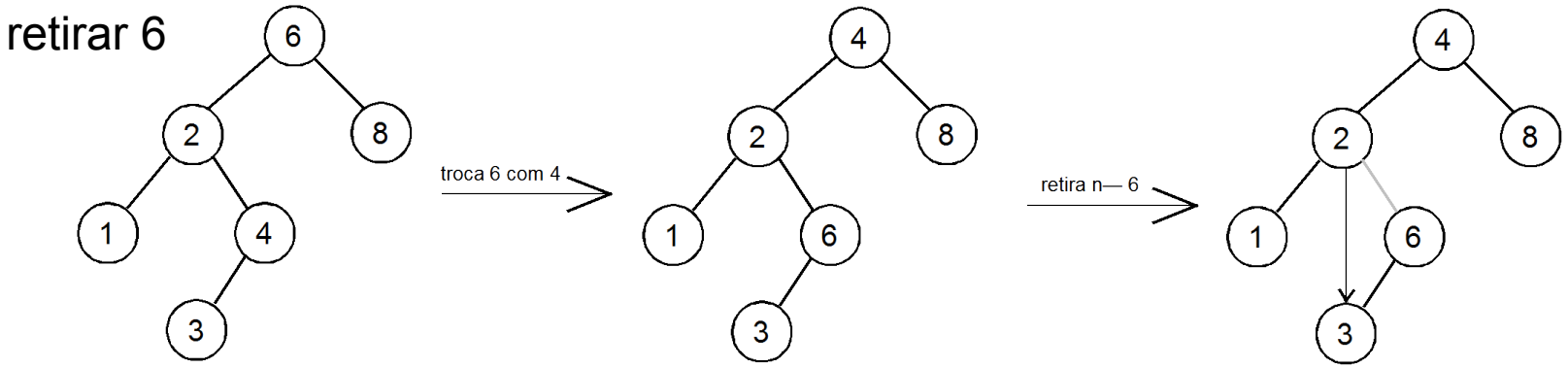


ABB: remoção de pai de dois filhos

- Caso 3: a raiz a ser retirada tem dois filhos
  - encontre o nó N que precede a raiz na ordenação
    (o elemento mais à direita da sub-árvore à esquerda)
  - troque o dado da raiz com o dado de N
  - retire N da sub-árvore à esquerda
    (que agora contém o dado da raiz que se deseja retirar)
    - retirar o nó N mais à direita é trivial, pois N é um nó folha ou
      N é um nó com um único filho (no caso, o filho da direita nunca existe)



```
NoArv* abb_retira (NoArv* r, int v)
{
   if (r == NULL)
      return NULL;
   else if (r->info > v)
      r->esq = abb_retira(r->esq, v);
   else if (r->info < v)
      r->dir = abb_retira(r->dir, v);
   else {              /* achou o nó a remover */
      /* nó sem filhos */
      if (r->esq == NULL && r->dir == NULL) {
         free (r);
         r = NULL;
      }
      /* nó só tem filho à direita */
      else if (r->esq == NULL) {
         NoArv* t = r;
         r = r->dir;
         free (t);
      }
```

```
      /* só tem filho à esquerda */
      else if (r->dir == NULL) {
         NoArv* t = r;
         r = r->esq;
         free (t);
      }
      /* nó tem os dois filhos */
      else {
         NoArv* f = r->esq;
         while (f->dir != NULL) {
            f = f->dir;
         }
         r->info = f->info; /* troca as informações */
         f->info = v;
         r->esq = abb_retira(r->esq,v);
      }
   }
   return r;
}
```

Referências

Waldemar Celes, Renato Cerqueira, José Lucas Rangel, *Introdução a Estruturas de Dados*, Editora Campus (2004)

- Capítulo 13 – Árvores
- Capítulo 17 – Busca