Université Aix Marseille

Master 2 de mathématiques

Equations aux dérivées partielles

Thierry Gallouët, Raphaèle Herbin

29 janvier 2018

Table des matières

Introduction

This course gives some tools for the study of partial differential equations. These tools are used to obtain existence results (and also often uniqueness results) for some examples of linear or nonlinear PDEs of various nature (elliptic, parabolic or hyperbolic).

Chapitre 1

Sobolev spaces

Sobolev [1] spaces are functional spaces, that is spaces containing functions, and these functions are such that their powers and the powers of their derivatives (in the sense of transposition, or in a weak sense which we shall give later) are Lebesgue-integrable. Similarly to the Lebesgue spaces, these spaces are Banach spaces [2]. The fact that the Sobolev spaces are complete is very important to prove the existence of solutions to some partial differential equations.

1.1 Weak derivatives

The notion of weak derivative is already in a famous article by Jean Leray [3] published in 1934, on the Navier-Stokes equations ; in this article, it is named "quasi-derivative" ([7] page 205). This notion is crucial for the study of the existence of solutions to many partial differential equations.
In the sequel, Ω is an open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, and $C_c^\infty(\Omega)$ denotes the set of functions of class C^∞ and with compact support on Ω, that is :

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \exists K \subset \Omega,\ K \text{ compact} ; u = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

Moreover, the open subset Ω will always equipped with the Borel σ-algebra, denoted by $\mathcal{B}(\Omega)$, and with the Lebesgue measure, denoted by λ if $N = 1$ and λ_N si $N > 1$. Integration will always be with respect to the Lebesgue measure, unless otherwise mentioned.
The following lemma is fundamental, because it allows to merge the (class of) function(s) $f \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ with the linear mapping $T_f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ defined by $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \mapsto T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
Recall that $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ means that for any compact subset K of Ω, the restriction $f|_K$ of f to K belongs to $L^1(K)$.

Lemme 1.1 (Almost everywhere equality in L^1) *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, and let f and $g \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$. Then :*

$$\left[\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] \Longleftrightarrow [f = g \ \textit{a.e.}.] \,.$$

1. Sergueï Lvovitch Sobolev, 1908-1989) is a Russian mathematician and physicist.
2. A Banach space is a is a complete normed vector space.
3. Jean Leray, 1906 -1998, is a French mathematician who worked on partial differential equations and on algebraic topology.

Proof : The proof of this lemma uses the regularization of an integrable function by the convolution with a sequence of mollifiers : see [3, Problem 8.7 page 480]. □

Let $\mathcal{D}(\Omega)$ denote the space $C_c^\infty(\Omega)$ and $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ denote the set of linear forms on $\mathcal{D}(\Omega)$, which is called the algebraic dual space [4] of $\mathcal{D}(\Omega)$. Let $T \in \mathcal{D}^\star(\Omega)$ and $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, then the real number $T(\varphi)$ is called the action of T on φ and is denoted by $\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}$ or $\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}$. Lemma 1.1 allows the definition the derivative by transposition of a $L^1_{\rm loc}$ function in the following way :

Définition 1.2 (Derivate by transposition) *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; let $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ and $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ its algebraic dual space , i.e.the set of linear forms on $\mathcal{D}(\Omega)$.*

- *Let $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. The derivate by transposition of f with respect to its i-eth variable is the linear form $D_i f$ on $C_c^\infty(\Omega)$, defined by :*
$$\langle D_i f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega f\, \partial_i \varphi \,\mathrm{d}x$$
where $\partial_i\varphi$ is the classical partial derivative of φ with respect to its i-th variable. Therefore $D_i f$ belongs to $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Note that if $f \in C^1(\Omega)$, then $D_i f$ is nothing but $\partial_i f$, merging $\partial_i f$ and $T_{\partial_i f}$ (which is the element of $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ induced by $\partial_i f$). It is therefore a generalisation of the notion of derivative.
If the linear form $D_i f$ can be seen as a locally integrable function in the sense of Lemma 1.1, then f is said to admit a weak derivative.
- *Let $T \in \mathcal{D}^\star(\Omega)$; then its derivative by transposition $D_i T$ is defined by :*
$$\langle D_i T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\langle T, \partial_i\varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)},\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

The notion of derivative in the sense of distribution is somewhat more tricky to define since it requires the definition of a topology on $C_c^\infty(\Omega)$. We shall not need it in the framework of this course. However, when $C_c^\infty(\Omega)$ is equipped with this topology, both definitions coincide.
Let us give an example of derivate by transposition. The Heaviside [5] function is defined by

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } x \geq 0, \\ 0 \text{ if } x < 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

is locally integrable. Thus it admits a derivate by transposition. To find this derivative DH, one note that for any $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, the following equality holds :

$$-\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0),$$

and therefore DH is the linear form which maps any function φ to its value at 0 ; this linear form is also called the " Dirac measure at 0" : $DH = \delta_0$. But this derivative is not a weak derivative, because δ_0 may not be associated with an $L^1_{\rm loc}$ function : there does not exist any function $g \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ such that $\delta_0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g\varphi\,\mathrm{d}x$ for any $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (see exercise 1.1).
Definition 1.2 allows to define the derivate by transposition of an $L^1_{\rm loc}$ function (or of an element of $\mathcal{D}^\star(\Omega)$) of higher order. By identifying an $L^1_{\rm loc}$ function with the element of $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ that it represents, one may also define the

4. In the framework of the distribution theory, the space $\mathcal{D}(\Omega)$ is equipped with a (rather complicated) topology ; the topological dual space of $\mathcal{D}(\Omega)$ is defined as the subpace of $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ whose elements are the linear forms on $\mathcal{D}(\Omega)$ that are continuous for this topology, and is denoted $\mathcal{D}'(\Omega)$. Throughout this course, we whall not need the distribution theory, and therefore we do not equip $\mathcal{D}(\Omega)$ with a topology.
5. Oliver Heaviside (1850 - 1925) physicien britannique autodidacte.

notion of weak derivative of higher order. More precisely, for $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, et $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, the weak derivative $D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, if it exists, is defined by :

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} u(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N} \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

where $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ et $\partial_i^{\alpha_i}\varphi$ is the (classical) partial derivative of order α_i with respect to the i-th variable.

Remarque 1.3 (Convergence in $\mathcal{D}^\star$) Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of elements of $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ and $T \in \mathcal{D}^\star(\Omega)$. Then T_n is said to converge to T in $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ as $n \to +\infty$, if

$$\langle T_n, \phi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} \to \langle T, \phi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} \text{ for any } \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

It is therefore a pointwise convergence in the set of mappings from $C_c^\infty(\Omega)$ to $\mathbb{R}$.
When looking at distributions, a topological structure must be added to the space $C_c^\infty(\Omega)$ (which will not be described in this course, because it is not needed) and instead of working with $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, one works with the smaller space of linear continuous mappings from $C_c^\infty(\Omega)$ to $\mathbb{R}$, which is denoted by $\mathcal{D}'(\Omega)$. However, the notion of convergence remains the same in the space $\mathcal{D}'(\Omega)$: it is still given by (1.2).

1.2 Definition and properties

Définition 1.4 (Sobolev spaces) *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.*

1. *The space $H^1(\Omega)$ is defined by :*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \textit{ t.q. } D_i u \in L^2(\Omega),\ \forall i = 1, \dots, N\}.$$

In this definition, when writing $D_i u \in L^2(\Omega)$, we mean in fact

$$\exists g \in L^2(\Omega); \langle D_i f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega g\varphi\, \mathrm{d}x,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

2. *The space $H^m(\Omega)$: For $m \in \mathbb{N}$, we define :*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega)\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}.$$

3. *The space $W^{m,p}(\Omega)$ is defined for $1 \leqslant p \leqslant \infty$ and $m \in \mathbb{N}$, by*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N\ ;\ |\alpha| \leq m.\}$$

4. *Note that for $m = 0$, the space $W^{m,p}(\Omega)$ is the Lebesgue space $L^p(\Omega)$.*

Let $(\cdot \mid \cdot)_{L^2}$ denote the inner product in $L^2(\Omega)$, that is :

$$(u \mid v)_{L^2} = \int_\Omega uv\, \mathrm{d}x,$$

and $\|.\|_{L^p}$ the norm in $L^p(\Omega)$., that is :

$$\|u\|_{L^p} = ((\int_\Omega |u|^p\, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.5 (Vector space structure) *When equipped with the following inner product,*

$$(u \mid v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u \mid D^\alpha v)_{L^2},$$

the spaces $H^m(\Omega)$ are Hilbert spaces. Note that $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.
A natural norm on $W^{m,p}(\Omega)$ is defined by :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1|p}, & \text{if } 1 \leqslant p < +\infty; \\ \\ \max\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & \text{if } p = +\infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

*Equipped with this norm, $W^{m,p}(\Omega)$ is a **Banach space**. One may show that the following norm :*

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \sum\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p}, & 1 \leqslant p < +\infty; \\ \sum\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = +\infty. \end{cases} \tag{1.4}$$

is equivalent to the norm defined by (1.3) *: this follows from the equivalence between the norms on $\mathbb{R}^q$ where $q =$ card$(\{\alpha \in \mathbb{N}^N \; |\alpha| \leq m\})$. The two norms are denoted indifferently by $\|.\|_{m,p}$ or $\|.\|_{W^{m,p}}$. The main interest of the norm* (1.3) *is that in the case $p = 2$, it gives H^m a Hilbertian structure, and this is not the case with the norm* (1.4).

Remarque 1.6 (Sobolev spaces and continuity) In one space dimension ($N = 1$), with $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $1 \leq p \leq +\infty$, any element of $W^{1,p}(]a, b[)$ (which is a class of functions) can be seen as a continuous function, in the sense that there exists a continuous representative of the class (this continuous representative is unique, see Exercise 1.3). This follows from the fact that any (class of) function(s) of $W^{1,p}(]a, b[)$ can be written as the integral of its derivative.

$$u \in W^{1,p}(]a, b[) \iff \left\{ \exists \tilde{u} \in C([a, b]) \text{ and } v \in L^p(]a, b[); u = \tilde{u} \text{ a.e. and } \tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x v(s)\, ds \right\}.$$

If the space dimension is greater than 1, then this is no longer true. In particular $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$, as shown by the following example : let $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, and u the function defined from Ω to $\mathbb{R}$ by par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$, with $\gamma \in]0, 1/2[$. Then $u \in H^1(\Omega)$ whereas $u \notin L^\infty(\Omega)$ (see Problem 1.5), and so, in particular, $u \notin C(\overline{\Omega})$.

Proposition 1.7 (Separability) *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), $m \in \mathbb{N}$ and $1 \leq p < +\infty$; the space $W^{m,p}(\Omega)$ is a **separable space** (that is to say a normed vector space which contains a dense countable subset).*

The proof of this proposition is the object of Problem 1.9, where it is also shown by a counter example that the result is not true for $p = +\infty$.
The notion of separability is important because it allows to get as close as need of an vector of the space with an element of a countable family ; in the case of a Hilbert space, separability is equivalent to the 'existence of a Hilbert basis (see e.g. [3, Proposition 6.62]) .

Let us now recall the important notion of reflexive space.

Définition 1.8 (Reflexive space) *Let E be a real normed vector space. Let E' be its topological dual, that is to say the set of continuous linear forms continues from E to $\mathbb{R}$ equipped with its natural norm (E' is a Banach space). For all $x \in E$, let us define the mapping J_x from E' to $\mathbb{R}$ by $J_x(T) = T(x)$ for any $T \in E'$. Then*

$$|J_x(T)| = |T(x)| \leq \|T\|_{E'} \|x\|_E$$

and therefore J_x is a continuous linear form over E', which is denoted by $J_x \in E''$ where E'' est le bidual space of E, that is to say the topological dual space of E'. Thanks to the Hahn-Banach theorem which is recalled in the next section, it can be shown that : $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$.
The mapping J, defined from E to E'' by $J(x) = J_x$ for any $x \in E$, is therefore a linear isometry from E to its image $\mathrm{Im}(J)$, and of course, we have $\mathrm{Im}(J) \subset E''$.
*The space E is said to be **reflexive** if $\mathrm{Im}(J) = E''$, which amounts to saying that J is surjective.*
Note that a reflexive space E is complete, since the dual space of any normed vector space is complete.

Proposition 1.9 (Reflexivity) *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, and $m \in N$. For any $p \in]1, +\infty[$, the space $W^{m,p}(\Omega)$ is a **reflexive space**.*

The proof of this result is the object of Problem 1.10.

1.3 Functional Analysis tools

Let us start with a fundamental theorem :

Théorème 1.10 (Hahn Banach) *Let E be a vector space over $\mathbb{R}$ and p a convex function defined from E to $\mathbb{R}$. Let F be a sub-space of E, and T a linear form on F which satisfies $T(x) \leq p(x)$ for any $x \in F$. Then there exists a linear form from E to $\mathbb{R}$, equal to T on F, which prolonges T to the whole space E and which still satisfies the condition : $T(x) \leq p(x)$ for any $x \in E$.*

The following corollary is essential :

Corollaire 1.11 *Let E be a normed space, F un sub-space of E and Ta continuous linear form over F. One may then prolonge T into a continuous mapping defined over E, with same norm as T.*

A well-known characterization of finite dimensional spaces is given in the following theorem :

Théorème 1.12 (Finite dimensional spaces) *A Banach space E is finite dimensional if and only if its closed unit ball is compact.*

The notions de weak and weak-$\star$ convergence will be fundamental in the sequel of this course.

Définition 1.13 (Weak and weak-$\star$ convergence) *Let E be a Banach space.*

1. ***Weak convergence** Let $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ and $u \in E$. We say that $u_n \to u$ weakly in E as $n \to \infty$ if $T(u_n) \to T(u)$ for any $T \in E'$.*
2. ***Weak-$\star$ convergence** Let $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ and $u \in E'$. We say that $T_n \to T$ in E' weakly-$\star$ if $T_n(x) \to T(x)$ for any $x \in E$.*

Théorème 1.14 (Weak-$\star$ compactness of the bounded subsets of the dual of a separable space)
Let E be a separable Banach space, and let $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a bounded sequence of E' (that is to say there exists $C \in \mathbb{R}_+$ such that ($\|T_n\|_{E'} \leq C$ for any $n \in \mathbb{N}$). Then there exists a subsequence, still denoted by $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, and $T \in E'$ such that $T_n \to T$ in E' weak-$\star$.

An important application of this theorem is the following : let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$ and $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a bounded sequence of $L^\infty(\Omega)$, then there exists a subsequence, still denoted by $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $u \in L^\infty(\Omega)$ such that $\int_\Omega u_n\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x$ for any $\varphi \in L^1(\Omega)$. This is a consequence of the existence of a natural isometry between $L^\infty(\Omega)$ and the dual space of $L^1(\Omega)$ and of the separability of $L^1(\Omega)$.

Théorème 1.15 (Weak compactness of the bounded subsets of of a reflexive space) *Let E be a reflexive Banach space, and let $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a bounded sequence of E (that is to say such that there exists $C \in \mathbb{R}_+$ such that ($\|u_n\|_E \le C$ for any $n \in \mathbb{N}$). Then there exists a subsequence, still denoted by $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $u \in E$ such that $u_n \to u$ weakly in E.*

Note that a Hilbert is always a reflexive Banach space.

1.4 Density theorems

Définition 1.16 (Lipschitz boundary) *A bounded open subset Ω de $\mathbb{R}^N$ has a Lipschitz boundary if there exists a family $(\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_n)$ of open subsets of $\mathbb{R}^N$ and an associated family of mappings $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$such that :*

1. *$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$ et $\Omega_0 \subset \Omega$.*
2. *$\phi_0 : \Omega_0 \to B_{1,N} = \{x \in \mathbb{R}^N$ such that $||x|| < 1\}$ is bijective et ϕ_0 et ϕ_0^{-1} are Lipschitz-continuous,*
3. *For any $i \ge 1$,$\phi_i : \Omega_i \to B_{1,N}$ is bijective, ϕ_i and ϕ_i^{-1} are Lipschitz-continuous, and $\phi_i(\Omega_i \cap \Omega) = B_{1,N} \cap \mathbb{R}^N_+$ et $\phi_i(\Omega_i \cap \partial\Omega) = B_{1,N} \cap \{(0, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$ (with $\mathbb{R}^N_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}, x > 0$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$.)*

Remarque 1.17 (Strong Lipschitz boundary) The boundary of a bounded open subset Ω of $\mathbb{R}^N$ is said to be a strong Lipschitz boundary if it is locally the graph of a Lipschitz function and Ω is (locally) on one side only of this graph. An bounded open subset Ω with strong Lipschitz boundary is also with Lipschitz boundary, but the converse is false, as shown in the exercise 1.13.

Théorème 1.18 (Density and prolongment) *Let Ω be an open bounded set with Lipschitz boundary and let $1 \le p \le +\infty$, then :*

1. *If $p < +\infty$, the set $C^\infty(\overline{\Omega})$ of functions which are restrictions to Ω of $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ functions is dense in$W^{1,p}(\Omega)$.*
2. *There exists a continuous linear mapping application $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ such that*
$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), P(u) = u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Similar results hold with $W^{m,p}(\Omega)$ $(m > 1)$ instead of $W^{1,p}(\Omega)$, but require more regularity on Ω (see [1]). The proof is truncation and regularisation, see exercise 1.18 for a particular case.

One may also show that $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ is dense in $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ if $N \ge 1$, $m \in N$ and $1 \le p < +\infty$. This is no longer true replacing $\mathbb{R}^N$ by an open bounded set Ω and $m > 0$. Indeed, for instance, the space $C_c^\infty(\Omega)$ is not dense in $H^1(\Omega)$ if Ω is an open bounded set. Its closure is a strict subspace of $H^1(\Omega)$, which is denoted by $H^1_0(\Omega)$.

Définition 1.19 (The space $H^1_0(\Omega)$) *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$.*

1. *The space $H^1_0(\Omega)$ is defined as the closure of $C_c^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$, which can be written as : $H^1_0(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.*

2. *For $m > 0$ and $1 \leq p < +\infty$, the subspace $W_0^{m,p}(\Omega)$ of $W^{m,p}(\Omega)$ is defined as the closure of $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$:*
$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

As previously mentioned, if $\Omega = \mathbb{R}^N$ then$H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ whereas the inclusion is strict if Ω is an open bounded subset of $\mathbb{R}^N$.

Remarque 1.20 (The space $C^k(\bar\Omega)$) Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, and $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{+\infty\}$. A function φ from Ω to $\mathbb{R}$ belongs to $C^k(\bar\Omega)$ if there exists a function $\psi \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ from $\mathbb{R}^N$ to $\mathbb{R}$ such that $\psi = \varphi$ on Ω. If Ω is bounded, it is of course possible to require the function ψ to be with compact support in $\mathbb{R}^N$, as in Theorem 1.18. It is intéresting to note that it is possible to adopt the same definition pour $k = 0$. Indeed, if φ is continuous from $\bar\Omega$ to $\mathbb{R}$, then there exists a continous function ψ from $\mathbb{R}^N$ to $\mathbb{R}$ such that $\psi = \varphi$ on $\bar\Omega$, see exercise 1.14.

1.5 Théorèmes de trace

Théorème 1.21 (Trace) *Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$. Pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, il existe une unique application linéaire continue γ de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ telle que $\gamma u = u(0, \cdot)$ p.p sur $\mathbb{R}^{N-1}$ (au sens de la mesure de Lebesgue $N-1$ dimensionnelle) si $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$.*

Remarque 1.22 (Lien avec la trace classique.) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Alors :

1. Si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, on a alors $\gamma u = u$ p.p sur $\partial\Omega$ (au sens de la mesure de Lebesgue $N-1$ dimensionnelle).
2. Ker $\gamma = W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$.

Voir à ce propos l'exercice 1.17.

Théorème 1.23 *Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < +\infty$. Alors, il existe une unique application γ (linéaire continue) définie de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ et tel que*

$$\gamma u = u \text{ p.p. sur } \partial\Omega \text{ si } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Ici encore, p.p. est à prendre au sens de la mesure de Lebesgue $N-1$ dimensionnelle sur $\partial\Omega$.
De plus Ker $\gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarquons que si $p > N$, on peut montrer (voir théorème 1.28) que $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ et γu est alors la valeur de u au bord au sens classique.

Le théorème suivant généralise la propriété d'intégration par parties des fonctions régulières.

Théorème 1.24 (Intégration par parties)

- *Si $\Omega = \mathbb{R}_+^N (= \{x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N; x_1 > 0\})$, alors*

$$\begin{cases} \text{Si } 2 \leq i \leq N, \displaystyle\int_\Omega u\, D_i v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u\, v \,\mathrm{d}x, \ \forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2, \\ \text{Si } i = 1, \displaystyle\int_\Omega u\, D_1 v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_1 u\, v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y)\, \gamma v(y) \,\mathrm{d}\gamma(y), \ \forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2, \end{cases}$$

- *si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne, alors, pour tout $i = 1, \ldots, N$,*

$$\int_\Omega u\, D_i v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u\, v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y)\, \gamma v(y) n_i(y) \,\mathrm{d}\gamma(y),\ \forall (u,v) \in (H^1(\Omega))^2,$$

où γu désigne la trace de u sur la frontière $\partial\Omega$ et $\mathrm{d}\gamma(y)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure adéquate sur $\partial\Omega$ (that is to say la mesure de Hausdorff sur $\partial\Omega$ qu'on peut voir comme une mesure de Lebesque $(N-1)$ dimensionnelle), et $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_N)^t$ est la normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.

1.6 Théorèmes de compacité

Les théorèmes suivants sont une conséquence du théorème de Kolmogorov (voir [4, Théorème 8.5]).

Théorème 1.25 (Rellich) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.*

Le théorème précédent reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ à condition de supposer la frontière lipschitzienne.

Théorème 1.26 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, à frontière lipschitzienne, et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.*

Nous aurons aussi besoin d'une version du théorème 1.25 dans les espaces duaux de L^p et $W_0^{1,p}$. Comme, pour $p < +\infty$, le dual de L^p est identifié à l'espace L^q avec $q = p/(p-1)$, et que le dual de $W_0^{1,p}$ est noté $W^{-1,q}$, on obtient le théorème 1.27.

Théorème 1.27 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $1 < q < +\infty$. Toute partie bornée de $L^q(\Omega)$ est relativement compacte dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*
En particulier, pour $q = 2$, L'espace $W^{-1,2}(\Omega)$ est aussi noté $H^{-1}(\Omega)$. Toute partie bornée de $L^2(\Omega)$ est donc relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.

1.7 Sobolev embeddings

The following theorem states the Sobolev embeddings ; these embeddings that a function which is such that a power of itself and its derivative are integrable (that is to say $u \in W^{1,p}$) is in fact in a "better" espace (in terms of integration or regularity). There are three different cases, whether the power is lower than, equal to, or larger than the space dimension N.

Théorème 1.28 (Sobolev embeddings) *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, which is either bounded with Lipschitz boundary, or equal to $\mathbb{R}^N$.*

1. *If $1 \leq p < N$, then $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}(\Omega)$, with $p^\star = \frac{Np}{N-p}$, and the embedding is continuous, that is to say there exists $C \in \mathbb{R}_+$ (only depending on p, N and Ω) such that*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega),\ \|u\|_{L^{p^\star}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}},\ \text{which is denoted by } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega);$$

in particular we have

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega).$$

For $N = 1$, the case $p = N$ is allowed. We thus have

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ if } N = 1.$$

2. *If $p > N$, then*
$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$$
where , for $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ is the set of α-Hölder functions, defined by
$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C(\Omega, \mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{R}; |u(x) - u(y)| \leq k\|x - y\|^\alpha, \forall (x, y) \in \Omega^2\}. \tag{1.5}$$
The proof of this result is the object of Problem 1.15.
3. *In the case where Ω is a bounded domain with Lipschitz boudnary, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ for any q such that $1 \leq q < +\infty$ (and the case $q = \infty$ is authorized ifi $N = 1$). This result is wrong in the case $\Omega = \mathbb{R}^N$, see Problem 1.5 for a counter-example.*

If Ω is an open bounded subset with no regularity assumption on the boundary, the three preceding assertions are still valid for the space $W_0^{1,p}(\Omega)$ instead of $W^{1,p}(\Omega)$;.

Remarque 1.29 Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^N$. A simple consequence of the Sobolev injection theorem (theorem 1.28) and of the Rellich compactness theorem (theorem 1.25) is that the mapping $u \mapsto u$ is compact from $W_0^{1,p}(\Omega)$ into $L^q(\Omega)$ if $1 \leq p \leq N$ and $q < p^\star = \frac{pN}{N-p}$.
If $p > N$, a simple consequence of the Sobolev injection theorem (theorem 1.28) and of the (classical) Ascoli theorem is that the mapping $u \mapsto u$ is compact from $W_0^{1,p}(\Omega)$ to $C(\bar{\Omega})$.

References

1. Mesure, intégration, probabilités, T. Gallouët et R Herbin, Ellipses, 2013
`http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/integ.pdf`
2. Analyse fonctionnelle et résultats principaux sur les Sobolev : [2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Masson, 1983
3. Exposé complet sur les espaces de Sobolev : [1] R. A. Adams, Sobolev spaces, 1975

1.8 Exercices

Exercice 1.1 (Example of derivative)
Let $N \geq 1$, $\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N, |x_i| < 1, i = 1, \ldots, N\}$ and $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ defined by $u(x) = 1$ if $x \in \Omega$ and $u(x) = 0$ if $x \notin \Omega$.

1. For $i = \{1, \ldots, N\}$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, show that $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$ only depends on the values taken by φ on $\partial\Omega$.
2. Show that $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

Corrigé –

1. On prend, par exemple, $i = 1$ (les autres valeurs de i se traitent de manière similaire). Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a
$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, y) dx_1 \Big) dy$$
et donc
$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(1, y) dy - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(-1, y) dy.$$
Ceci montre bien que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω.

2. On raisonne par l'absurde. On suppose que $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Il existe alors (en particulier) $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ t.q.

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\varphi(x)dx \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_n =]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[\times]-1,1[^{N-1}$.

On choisit une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x) = 0$ si $x \notin A_1$ et $\varphi(x) = 1$ si $x = (1,y)$ avec $y \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^{N-1}$ (une telle fonction φ existe). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit alors φ_n par $\varphi_n(1+x_1,y)) = \varphi(1+nx_1,y)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ (de sorte que $\varphi_n = 0$ hors de A_n).

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a bien $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et le choix de φ_n donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x)dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi_n(1,y)dy - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi_n(-1,y)dy \geq 1$$

et

$$|\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\varphi_n(x)dx| \leq \int_{A_n} |g(x)|dx.$$

On a donc $\int_{A_n} |g(x)|dx \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, ce qui est impossible car la mesure de Lebesgue (N-dimensionnelle) de A_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 1.2 (A function with null derivative is constant)
Let $u \in L^1_{loc}(]0,1[)$ such that $Du = 0$. Show that

$$\exists a \in \mathbb{R};\, u = a \text{ a.e..}$$

Corrigé – *On se donne $\varphi_0 \in C_c^\infty(]0,1[)$ t.q. $\int_0^1 \varphi_0(x)dx = 1$.*

Pour $\psi \in C_c^\infty(]0,1[)$, on définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(t)dt - \Big(\int_0^1 \psi(t)dt\Big)\int_0^x \varphi_0(t)dt. \text{ pour } x \in]0,1[.$$

Avec ce choix de φ on a $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$ et donc, comme $Du = 0$,

$$0 = \langle Du, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx.$$

Comme $\varphi' = \psi - (\int_0^1 \psi(t)dt)\varphi_0$, on a donc

$$\int_0^1 u(x)\psi(x)dx - \Big(\int_0^1 \psi(t)dt\Big)\Big(\int_0^1 u(x)\varphi_0(x)dx\Big) = 0.$$

On pose $a = \int_0^1 u(x)\varphi_0(x)dx$, on a ainsi

$$\int_0^1 u(x)\psi(x)dx = \int_0^1 a\psi(x)dx \text{ pour tout } \psi \in C_c^\infty(]0,1[).$$

Le lemme 1.1 donne alors $u = a$ p.p..

Une autre méthode consiste à considérer d'abord le cas $u \in L^1(]0,1[)$ et procéder, par exemple, par densité. La fonction u peut étre approchée par convolution par des noyaux régularisants ρ_n qu'on prend à support dans $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. En prolongeant u par 0 en dehors de $[0,1]$, on pose $u_n = u \star \rho_n$. On a alors $u_n' = u \star \rho_n'$. On montre alors que $u_n'(x) = -< Du, \rho_n(x-\cdot) >$ pour tout $x \in]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$, et on conclut que $u_n'(x) = 0$ pour tout $x \in]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$.

On terminer le raisonnement en utilisant le fait que $u_n 1_{]\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}[}$ tend vers u dans L^1.

Dans le cas $u \in L^1_{loc}(]0,1[)$ on considére d'abord la fonction $u_\varepsilon = u 1_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ avec $\varepsilon > 0$.

L'intérêt de cette deuxième méthode est qu'elle se généralise au cas multidimensionnel (voir l'exercice 1.4).

Exercice 1.3 (Espace de Sobolev en 1d)
Soit $1 \le p \le \infty$ et $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

1. Soit $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

(a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u(x) = C + \int_0^x Du(t)dt$, pour presque tout $x \in]0,1[$. En déduire que $u \in C([0,1],\mathbb{R})$ (au sens qu'il existe $v \in C([0,1],\mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p. sur $]0,1[$, en identifiant u et v, on peut donc dire que $W^{1,p}(]0,1[) \subset C([0,1],\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\|u\|_\infty \le \|u\|_{W^{1,p}(]0,1[)}$.

(c) Si $p > 1$, Montrer que u est une fonction höldérienne d'exposant $1-(1/p)$.

2. Soit $u \in C([0,1],\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $w \in L^p(]0,1[)$ t.q. $u(x) = u(0) + \int_0^x w(t)dt$, pour tout $x \in]0,1[$. Montrer que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ et $Du = w$.

Corrigé –

1.(a) Pour $x \in [0,1]$, on pose $F(x) = \int_0^x Du(t)dt$. Comme $Du \in L^1(]0,1[)$, on a $F \in C([0,1],\mathbb{R})$. On peut aussi montrer que F est dérivable p.p. et que $F' = Du$ p.p. mais cela est inutile ici. On s'intéresse plutôt à la dérivée par transposition de F, that is to say à DF et on va montrer que $DF = Du$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$. On a

$$\langle DF,\varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star,C_c^\infty} = -\int_0^1 F(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]0,x[}(t)Du(t)dt\Big)\varphi'(x)dx.$$

En remarquant que $1_{]0,x[}(t) = 1_{]t,1[}(x)$ pour tout $t, x \in]0,1[$ et en utilisant le théorème de Fubini, on a donc

$$\langle DF,\varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star,C_c^\infty} = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]t,1[}(x)\varphi'(t)dx\Big)Du(t)dt = \int_0^1 \varphi(t)Du(t)dt,$$

ce qui prouve que $DF = Du$.

On a donc $D(u-F) = 0$ et l'exercice 1.2 donne alors l'existence de $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u - F = C$ p.p. that is to say

$$u(x) = C + \int_0^x Du(t)dt \text{ pour presque tout } x \in]0,1[.$$

(b) On choisit maintenant pour u (qui est une classe de fonctions) son représentant continu. On a alors pour tout $x \in [0,1]$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t)dt.$$

On a alors aussi pour tout $x, y \in [0,1]$, $u(x) = u(y) + \int_y^x Du(t)dt$, on en déduit

$$|u(x)| \le |u(y)| + \int_0^1 |Du(t)|dt.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$ (par rapport à y), on obtient pour tout $x \in [0,1]$

$$|u(x)| \le \|u\|_{L^1} + \|Du\|_{L^1} = \|u\|_{W^{1,1}},$$

et donc, en prenant le max sur x et en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\|u\|_{L^\infty} \le \|u\|_{L^1} + \|Du\|_{L^1} \le \|u\|_{L^p} + \|Du\|_{L^p} = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

(c) On choisit toujours pour u son représentant continu. Soit $x, y \in [0,1]$, $y > x$, on a

$$u(y) - u(x) = \int_x^y Du(t)dt$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|u(y)-u(x)| \le \Big(\int_x^y |Du(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} |y-x|^{1-\frac{1}{p}} \le \|u\|_{W^{1,p}} |y-x|^{1-\frac{1}{p}}.$$

2. *Il est clair que $u \in L^p(]0,1[)$. Pour montrer que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ il suffit de montrer que $Du = w$ that is to say que $\langle Du, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = \int_0^1 w(t)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$.*

   Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$. On a

$$\langle Du, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^1 \Big(\int_0^t w(x)dx\Big)\varphi'(t)dt = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]0,t[}(x)w(x)dx\Big)\varphi'(t)dt.$$

   On utilise une nouvelle fois le théorème de Fubini et le fait que $1_{]0,t[}(x) = 1_{]x,1[}(t)$ (pour tout $x, t \in]0,1[$). On obtient

$$\langle Du, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]x,1[}(t)\varphi'(t)dt\Big)w(x)dx = -\int_0^1 \Big(\int_x^1 \varphi'(t)dt\Big)w(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)w(x)dx.$$

   Ce qui donne bien $Du = w$.

Exercice 1.4 (Généralisation de l'exercice 1.2)
Soient $N \geq 1$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < 1\}$ et $u \in L^1_{loc}(B)$.

1. On suppose que $D_i u = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.) [On pourra, par exemple, raisonner ainsi :

   Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de noyaux régularisants, that is to say :

$$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1,\ \rho \geq 0,\ \rho(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1,$$
$$\text{et, pour } n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \mathbb{R}^N,\ \rho_n(x) = n^N \rho(nx).$$

   On pose $u_\varepsilon(x) = u$ si $|x| \leq 1 - \varepsilon$ et $u_\varepsilon = 0$ sinon. Puis, on pose $u_{\varepsilon,n} = u_\varepsilon \star \rho_n$.

   Montrer que $u_{\varepsilon,n} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et que, si $1/n < \varepsilon$, $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur la boule de centre 0 et de rayon $1 - 2\varepsilon$. Puis, conclure....]

2. On suppose que $D_i u$ est une fonction continue, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$ (au sens "il existe $v \in C^1(B, \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p."). [On pourra, par exemple, reprendre l'indication de la 1ère question et raisonner ainsi : Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ on a

$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (y - x)dt,$$

   et que pour z dans la boule de centre 0 et rayon $1 - 2\varepsilon$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$ on a

$$(\partial u_{\varepsilon,n}/\partial x_i)(z) = \int_B D_i u(\overline{z})\rho_n(z - \overline{z})d\overline{z}.$$

   En déduire que pour presque tout $x, y \in B$, on a, avec $Du = \{D_1 u, \ldots, D_N u\}^t$,

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y - x)dt.$$

   Montrer alors que u est continue et que la formule précédente est vraie pour tout $x, y \in B$. Conclure enfin que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$.]

3. On reprend ici la 1ère question en remplaçant B par un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Montrer que u est constante sur chaque composante connexe de B. (Comme d'habitude, u constante signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p..)

Corrigé –

1. *On a $u_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $u_{\varepsilon,n}$ est donc bien définie sur tout $\mathbb{R}^N$. Le fait que $u_{\varepsilon,n}$ soit de classe C^∞ est classique et les dérivées de $u_{\varepsilon,n}$ sont égales à la convolution de u_ε avec les dérivées de ρ_n. Il est facile aussi de voir que $u_{\varepsilon,n}$ est une fonction à support compact car u_ε et ρ_n sont des fonctions à support compact.*

   On note B_r la boule de centre 0 et de rayon r. On montre maintenant que pour tout i la fonction $\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}$ est nulle sur $B_{1-2\varepsilon}$ si $1/n < \varepsilon$..

   Soit $i \in \{1, \dots, N\}$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on a
$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(x) = \Big(u_\varepsilon \star \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}\Big)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(y)\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x-y)dy.$$
   Si $1/n < \varepsilon$ et $x \in B_{1-2\varepsilon}$, la fonction $\rho_n(x-\cdot)$ appartient à $C_c^\infty(B)$ et est nulle hors de $B_{1-\varepsilon}$. On remarque aussi que
$$\frac{\partial \rho_n(x-\cdot)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x-\cdot).$$
   (La notation $\partial/\partial x_i$ désigne la dérivée par rapport à la i-ème variable, à ne pas confondre avec la i-ème composante de x dans la formule précédente....) On obtient ainsi
$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(x) = \int_B u(y)\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x-y)dy = \langle D_i u, \rho_n(x-\cdot)\rangle_{\mathcal{D}^\star(B),C_c^\infty(B)} = 0.$$
   On a ainsi montré que pour $1/n < \varepsilon$, la fonction $\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}$ est, pour tout i, nulle sur $B_{1-2\varepsilon}$. On en déduit que la fonction $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur $B_{1-2\varepsilon}$. En effet, il suffit de remarquer que pour tout $x \in B_{1-2\varepsilon}$ on a
$$u_{\varepsilon,n}(x) - u_{\varepsilon,n}(0) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(tx)\cdot x\,dt = 0.$$
   Comme $u_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la suite $(u_{\varepsilon,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u_ε. En considérant les restrictions de ces fonctions à la boule $B_{1-2\varepsilon}$ (sur la laquelle $u_\varepsilon = u$), la suite $(u_{\varepsilon,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(B_{1-2\varepsilon})$ vers u. Comme $u_{\varepsilon,n}$ est une fonction constante sur $B_{1-2\varepsilon}$ (pour $1/n < \varepsilon$) sa limite (dans L^1) est donc aussi une fonction constante. Ceci montre que la fonction u est constante sur $B_{1-2\varepsilon}$, that is to say qu'il existe $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a_\varepsilon$ p.p. sur $B_{1-2\varepsilon}$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que a_ε ne dépend pas de ε et que u est constante sur B.

2. *Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $u_{\varepsilon,n}$ est de classe C^∞. On a donc bien, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$,*
$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty+(1-t)x)\cdot(y-x)dt. \tag{1.6}$$
   Dans cette formule $\nabla u_{\varepsilon,n}$ désigne la fonction vectorielle définie par les dérivées classiques de $u_{\varepsilon,n}$.

   Pour $z \in \mathbb{R}^N$ et $i \in \{1, \dots, N\}$ on a
$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(z) = \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(\overline{z})\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(z-\overline{z})d\overline{z}.$$
   Si $z \in B_{1-2\varepsilon}$ et $1/n < \varepsilon$, la fonction $\rho_n(z-\cdot)$ appartient à $C_c^\infty(B)$ et est nulle hors de $B_{1-\varepsilon}$ (et sur $B_{1-\varepsilon}$ on a $u_\varepsilon = u$). On en déduit
$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(z) = \langle D_i u, \rho_n(z-\cdot)\rangle_{\mathcal{D}^\star(B),C_c^\infty(B)} = \int_B D_i u(\bar{z})\rho_n(z-\bar{z})d\bar{z}.$$
   Comme $D_i(u)$ est uniformément continue sur $B_{1-\varepsilon}$, on déduit de la formule précédente que $\partial u_{\varepsilon,n}/\partial x_i$ converge vers $D_i u$ uniformément sur $B_{1-2\varepsilon}$. On a donc, pour tout $x, y \in B_{1-2\varepsilon}$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty+(1-t)x)\cdot(y-x)dt. = \int_0^1 Du(ty+(1-t)x)\cdot(y-x)dt.$$
   La suite $(u_{\varepsilon,n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u_ε. Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut donc supposer que cette suite converge p.p. vers u_ε et donc p.p. vers u sur la boule $B_{1-\varepsilon}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité (1.6), on obtient pour presque tout x, y dans $B_{1-2\varepsilon}$
$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty+(1-t)x)\cdot(y-x)dt. \tag{1.7}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la formule (1.7) est valable pour presque tout $x, y \in B$.

Pour conclure, on fixe un point $x \in B$ pour lequel (1.7) est vraie pour presque tout $y \in B$ et on pose

$$v(y) = u(x) + \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y - x)dt \text{ pour tout } y \in B.$$

La fonction v est de classe C^1 (car Du est une fonction continue et donc v est dérivable sur tout B et $\nabla v = Du$). Comme $u = v$ p.p., ceci termine la question.

3. *On note Ω l'ouvert remplaçant B. Le raisonnement précédent montre que sur toute boule incluse dans Ω, u est p.p. égale à une constante. Pour que l'égalité soit vraie sur toute la boule (et non seulement p.p.), il suffit de définir v sur Ω par*

$$v(x) = \lim_{h \to 0,\, h > 0} \frac{1}{\lambda_d(B_{x,h})} \int_{B(x,h)} u(y)dy \quad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

où $B(x,h)$ désigne la boule de centre x et de rayon h et $\lambda_d(B(x,h))$ la mesure de Lebesgue d-dimensionelle de cette boule. On a alors $u = v$ p.p. (v est donc un représentant de la classe u) et sur toute boule incluse dans Ω, v est égale à une constante.

La fonction v est donc localement constante. On en déduit que v est constante sur chaque composante connexe de Ω. En effet, soit $x \in \Omega$ et U la composante connexe de Ω contenant x. On pose $a = v(x)$. L'ensemble $\{y \in U; v(y) = a\}$ est un ouvert non vide de U et l'ensemble $\{y \in U;\ v(y) \neq a\}$ est aussi un ouvert de U disjoint du précédent. Par connexité de U ce dernier ensemble est donc vide, ce qui prouve que $v = a$ sur tout U.

Exercice 1.5 (Non généralisation de l'exercice 1.3)
Soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2,\ |x_i| < \frac{1}{2},\ i = 1, 2\}$, $\gamma \in]0, 1/2[$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$. En déduire que $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.

Corrigé – *La fonction u est de classe C^∞ sur $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ (en remarquant que $|x| \leq \sqrt{2}/2 < 1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$). Les dérivées classiques de u sont pour $x = (x_1, x_2)^t \neq 0$*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\gamma(-\ln(|x|))^{\gamma - 1} \frac{x_i}{|x|^2},\ i = 1, 2.$$

Il est facile de voir que $u \in L^2(\Omega)$ (et même $u \in L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$). Comme $\gamma < 1/2$, on peut aussi montrer que les dérivées classiques de u sont dans $L^2(\Omega)$. Il suffit pour cela de remarquer que, pour $a > 0$,

$$\int_0^a \frac{1}{r|\ln(r)|^{2(1-\gamma)}} dr < +\infty.$$

Pour montrer que $u \in H^1(\Omega)$, il suffit donc de montrer que les dérivées par transposition de u sont représentées par les dérivées classiques, that is to say que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour $i = 1, 2$, on a

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx. \tag{1.8}$$

On montre maintenant (1.8) pour $i = 1$ (bien sûr, $i = 2$ se traite de manière semblable). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $0 < \varepsilon < 1/2$. On pose $L_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-1/2, 1/2]$. En intégrant par parties, on a

$$\int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx = -\int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\varphi(x)dx - \int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))dx_2. \tag{1.9}$$

(On a utilisé ici le fait que $u(\varepsilon, x_2) = u(-\varepsilon, x_2)$.)
Par convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\varphi(x)dx$$

Il reste à montrer que le deuxième terme du membre de droite de (1.9) tend vers 0. Ceci se fait en remarquant que la fonction φ est régulière, il existe donc C ne dépendant que de φ t.q.

$$|\int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))dx_2| \leq |\ln(\varepsilon)|^\gamma C\varepsilon.$$

On en déduit bien que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))dx_2 = 0,$$

ce qui termine la démonstration de (1.8) pour $i = 1$. Finalement, on a bien ainsi montré que les dérivées par transposition de u sont représentées par les dérivées classiques et que $u \in H^1(\Omega)$.

Exercice 1.6 (Laplacien d'un élément de $H_0^1(\Omega)$)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \int u(x)\Delta\varphi(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx.$$

2. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$. Muni de la norme de $H^1(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est donc un espace de Hilbert. On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual (topologique) de $H_0^1(\Omega)$. Déduire de la question précédente que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ (that is to say que l'élément de $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, noté Δu, se prolonge de manière unique en un élément de $H^{-1}(\Omega)$, encore notée Δu) et que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}.$$

NB. En fait, on montrera au chapitre 2 que sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $H^1(\Omega)$ est équivalente à la norme notée $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$ définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}$. Avec ce choix de norme sur $H_0^1(\Omega)$ on obtient $\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Corrigé –

1. Par définition de la dérivée par transposition, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \langle D_i D_i u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega u(x)\partial_i^2\varphi(x)dx.$$

Puis, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, la forme linéaire (sur $C_c^\infty(\Omega)$) $D_i u$ est représentée par un élément de $L^2(\Omega)$ encore noté $D_i u$ et on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\int_\Omega u(x)\partial_i^2\varphi(x)dx = -\langle D_i u, \partial_i\varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega D_i u(x)\partial_i\varphi(x)dx.$$

Comme ∇u est lélément de $L^2(\Omega)^N$ dont les composantes sont les $D_i u$, on obtient bien

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx.$$

2. Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}| \leq \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla\varphi(x)|dx \leq \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}\||\nabla\varphi|\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci montre que l'application $\varphi \mapsto \langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}$ est linéaire continue de $C_c^\infty(\Omega)$, muni de la norme $H^1(\Omega)$, dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ cette application se prolonge donc, par densité, de manière unique en une application linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ (that is to say en un élément de $H^{-1}(\Omega)$). Cet élément de $H^{-1}(\Omega)$ est encore noté Δu et le prolongement par densité donne, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx.$$

On a donc, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$|\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \leq \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla v(x)|dx \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.10}$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme $H^1(\Omega)$, ce qui donne

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v\in H_0^1(\Omega),\, v\neq 0} \frac{\langle \Delta u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

on déduit alors de (1.10) que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Exercice 1.7 (Petits pièges...) Pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on pose $G(x) = \ln(|x|)$.

1. Montrer que $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ et $\Delta G = 0$ (au sens classique) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. En déduire que $\Delta G = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$. Que vaut ΔG dans $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^2)$?
2. Montrer que $G \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < +\infty$ et $\nabla G \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour $p < 2$.
3. On prend dans cette question $\Omega =]0,1[^2$. Montrer que

$$u \in L^2(\Omega),\ \Delta u \in H^{-1}(\Omega) \not\Rightarrow u \in H^1(\Omega).$$

   Montrer que

$$v \in (H^{-1}(\Omega))^2,\ \mathrm{div}(v) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}^\star(\Omega) \text{ et } \mathrm{rot(v)} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}^\star(\Omega) \not\Rightarrow \mathrm{v} \in (\mathrm{L}^2(\Omega))^2.$$

4. (Singularité éliminable) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant 0. On suppose ici que $u \in H^1(\Omega)$ et que $\Delta u = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega \setminus \{0\})$. Montrer que $\Delta u = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

Exercice 1.8 (Trois applications de Hahn-Banach) Soit E un espace de Banach réel.

1. Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) = \|x\|_E$ et $\|T\|_{E'} = 1$.
2. Soient F un s.e.v de E et $x \in E$. Montrer que $x \notin \bar{F}$ si et seulement si il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) \neq 0$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$.
3. Pour $x \in E$, on définit J_x de E' dans $\mathbb{R}$ par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. Montrer que $J_x \in E$" pour tout $x \in E$ et que l'application $J\ :\ x \mapsto J_x$ est une isométrie de E sur $J(E) \subset E$". (Définition : On dit que E est réflexif si $J(E) = E$".)

Indication –

1. *Définir T sur la droite engendrée par x et prolonger T par Hahn Banach.*
2. *Sens "si" : Sens facile.*
   Sens "seulement si" : Construire l'application linéaire T sur $\mathbb{R}x \oplus F$ par $T(x) = 1$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$; montrer que T est continue et conclure par Hahn Banach. La continuité de T est le point le plus technique : on peut par exemple remarquer que si $x \notin \overline{F}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0,\varepsilon) \cap F = \emptyset$, et montrer ensuite que $T(z) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|z\|$ pour tout $z \in G = \mathbb{R}x \oplus F$, ce qui montre la continuité de T sur G.
3. *La linéarité et la continuité de J sont faciles. Il reste à montrer le caractére isométrique. Soit $x \in E$. Il est facile de voir que $|J(x)| \leq \|x\|_E$. Pour montrer l'égalité, considérer l'application T de la première question.*

Exercice 1.9 (Séparabilité de L^p) On désigne par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que L^p est séparable.
2. Montrer que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Indication –

1. *On pourra onstruire une famille dénombrable dense de $C_c(\mathbb{R})$ en considérant pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n des fonctions qui sont nulles sur $[-n, n]^c$ et qui sont constantes par morceaux et à valeur rationnelles sur tous les intervalles de la forme $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$, $i \in \mathbb{Z}$. Vérifier que les ensembles A_n sont dénombrables et montrer ensuite que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dense dans L^p.*
2. *Soit B l'ensemble des fonctions constantes sur les intervalles $[i, i+1[$, $i \in \mathbb{Z}$, et qui ne prenent que les valeurs 0 ou 1. Vérifier que B est une partie non dénombrable de L^∞ et que si A est une partie dense de $L^\infty(\mathbb{R})$ il existe une injection de A dans B.*

Exercice 1.10 (Réflexivité de L^p si $1 < p < \infty$)
Soient (X, T, m) un espace mesuré σ-fini et $1 < p < \infty$, montrer que $L^p(X, T, m)$ est un espace de Banach réflexif.

Exercice 1.11 (Séparabilité et réflexivité d'un s.e.v. fermé)
Soient E un espace de Banach (réel) et F un s.e.v. fermé de E. Montrer que :

1. E séparable $\Rightarrow F$ séparable.
2. E réflexif $\Rightarrow F$ réflexif.

Exercice 1.12 (Fonctions lipschitziennes) Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne.

1. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Montrer que $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.
2. Soit $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Montrer que u est lipschitzienne (au sens : il existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ lipschitzienne t.q. $u = v$ p.p.).

Exercice 1.13 (Exemple d'ouvert lipschitzien non fortement lipschitzien)
On appelle "ouvert lipschitzien" un ouvert à forntière lipschitzienne (définition 1.16) et "ouvert fortement lipschitzien" un ouvert à frontière fortement lipschitzienne (remarque 1.17).
Pour constuire un exemple d'ouvert lipschitzien non fortement lipschitzien, l'idée utilisée ici (due, semble-t-il à Zerner) est de prendre pour ouvert une route allant vers le point $(0, 0)$ avec une infinité de virages, sans changer le rayon de courbure des virages (ce qui donne que l'ouvert est lipschitzien) mais (bien sûr) dont la largeur tend vers 0 quand on se rapproche de $(0, 0)$. A cause des virages, l'ouvert ne vérifie pas la propriété du segment et donc n'est pas fortement lipschitzien.
Soit $\bar\varphi$ une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, nulle en 0 et 1. On suppose que

$$\bar\varphi(\frac{1}{4}) \geq 1. \tag{1.11}$$

La fonction $\bar\varphi$ peut être, par exemple, une fonction "chapeau" ou une fonction de classe C^∞ à support compact dans $]0, 1[$.

Construction de φ
On pose $a_n = 1/2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et et on définit φ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$\varphi(x) = a_{n-1}\bar\varphi(\frac{x - a_n}{a_{n-1}}) \text{ si } x \in]a_n, a_{n-1}] \text{ et } n \geq 1.$$

La fonction φ est donc lipschitzienne de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ (en ajoutant $\varphi(0) = 0$). On remarque aussi que $\varphi(a_n) = 0$. On pose $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \in]0, 1[,\, \varphi(x) - x < y < \varphi(x)\}$.

L'ouvert Ω n'est pas fortement lipschizien
Un ouvert fortement ipschitzien vérifie la propriété du segment, that is to say que pour tout $z \in \partial\Omega$, il existe $d \in \mathbb{R}^2$, $d \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\{z + sd,\, s \in]0, t]\} \subset \Omega$.

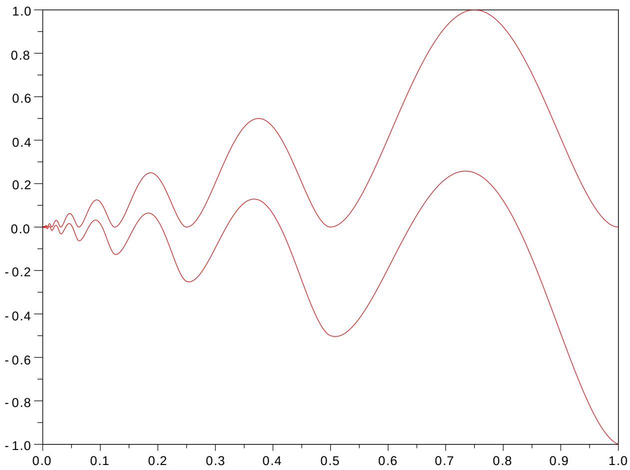

FIGURE 1.1 – **L'ouvert Ω**

1. Montrer que cette propriété n'est pas vérifiée pour Ω et $z = 0$.

L'ouvert Ω est faiblement lipschizien

On pose $T = \{(x, y), x \in]0, 1[, -x < y < x\}$. On définit une bijection ψ de Ω dans le triangle T en posant

$$\psi(x, y) = (x, x + 2(y - \varphi(x))).$$

2. Montrer que ψ est lipschitzienne ainsi que son inverse. En déduire que Ω est un ouvert lipschitzien.

Corrigé –

1. *Soit $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$, $d \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}_+^\star$. On va montrer que le segment $\{sd, s \in]0, t]\}$ rencontre le complémentaire de Ω. On pose $S = \{sd, s \in]0, t]\}$. Comme $\Omega \subset \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$, on a, bien sûr, $S \subset \Omega^c$ si $d_1 \leq 0$. On suppose donc $d_1 > 0$ et (comme t est arbitraire) il suffit de considérer le cas $d_1 = 1$.*

   Si $d_2 \geq 0$, on a $a_n d \in S$ pour n t.q. $a_n \leq t$ et $a_n d \notin \Omega$ car $a_n d_2 \geq \varphi(a_n) = 0$. Donc, S rencontre Ω^c.

   Si $d_2 < 0$, on a $(a_n + \frac{a_n}{2})d \in S$ pour n t.q. $a_n + \frac{a_n}{2} \leq t$. Mais, en utilisant (1.11), on a
   $$\varphi(a_n + \frac{a_n}{2}) = a_{n-1}\bar{\varphi}(\frac{1}{4}) \geq a_{n-1} \geq a_n + \frac{a_n}{2}.$$
   On a donc $\varphi(a_n + \frac{a_n}{2}) - (a_n + \frac{a_n}{2}) \geq 0$ et, comme $(a_n + \frac{a_n}{2})d_2 < 0$, ceci montre que $(a_n + \frac{a_n}{2})d \notin \Omega$. On a ainsi montré que S rencontre Ω^c.

   Finalement, on a bien montré que Ω n'est pas fortement lipschitzien.
2. *La fonction ψ est lipschitzienne (car φ l'est) et son inverse aussi car son inverse est l'application $\bar{\psi}$ définie par*
   $$\bar{\psi}(x, y) = (x, \varphi(x) + \frac{1}{2}(y - \varphi(x))).$$
   Comme le triangle T est fortement lipschitzien, on en déduit (assez facilement) que Ω est lipschitzien.

Exercice 1.14 (Prolongement d'une fonction continue) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et f une fonction continue de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe g continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g = f$ dans $\bar{\Omega}$.

Si $x \in \bar{\Omega}$, on pose $g(x) = f(x)$.
Si $x \notin \bar{\Omega}$, on pose $d_x = \inf\{|x - y|, y \in \Omega\}$ (on a donc $d_x > 0$), $B_x = \{z \in \mathbb{R}^N, |x - z| < 2d_x\}$ et

$$g(x) = \frac{\int_{\Omega \cap B_x} f(z)dz}{\int_{\Omega \cap B_x} dz}.$$

Montrer que g est bien définie et est continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.15 (Inégalités de Sobolev pour $p > N$)

L'objet de cet exercice est de démontrer l'injection de Sobolev pour $p > N$.
Si $x \in \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), on note $x = (x_1, \bar{x})$, avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$. On note $H = \{(t, (1 - |t|)a), t \in] - 1, 1[, a \in B_{N-1}\}$, où $B_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^{N-1}, |x| < 1\}$. (On rappelle que $|\cdot|$ désigne toujours la norme euclidienne.)
Soit $N < p < \infty$.

1. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$|u(1,0) - u(-1,0)| \le C_1 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(H)}. \tag{1.12}$$

[On pourra commencer par écrire $u(1,0) - u(0,a)$ comme une intégrale utilisant convenablement $\nabla u(t,(1-t)a)$ pour $t \in]0,1[$, et intégrer pour $a \in B_{N-1}$ pour comparer u(1,0) et sa moyenne sur B_{N-1}. On pourra se limiter au cas $N = 2$, pour éviter des complications inutiles.]

2. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$|u(x) - u(y)| \le C_2 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x - y|^{1-\frac{N}{p}}. \tag{1.13}$$

[Après, éventuellement, une rotation et une translation, on peut supposer que $x = (b, 0)$ et $y = (-b, 0)$. Se ramener alors à (1.12).]

Pour $\alpha \in]0,1]$ et K sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$, on note

$$C^{0,\alpha}(K) = \{u \in C(K, \mathbb{R}),\ \|u\|_{L^\infty(K)} < \infty \text{ et } \sup_{x,y\in K,\, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\},$$

et, si $u \in C^{0,\alpha}(K)$,

$$\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_{L^\infty(K)} + \sup_{x,y\in K,\, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Noter que $C^{0,\alpha}(K)$, muni de cette norme, est un espace de Banach.

3. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le C_3 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.14}$$

[Cette question est plus délicate... Il faut utiliser (1.13) et le fait que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.]

4. (Injection de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$.) Montrer que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_4 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \le C_4 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.15}$$

5. (Injection de Sobolev dans Ω.) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$), à frontière lipschitzienne. Montrer que $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_5 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de Ω, N et p, t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar\Omega)} \le C_5 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Exercice 1.16 (Inégalités de Sobolev pour $p \le N$)
L'objet de cet exercice est de démontrer l'injection de Sobolev pour $1 \le p \le N$.

La démonstration proposée ici est due à L. Nirenberg. Elle consiste à faire d'abord le cas $p = 1$, puis à en déduire le cas $1 < p < N$. Historiquement, la cas $1 < p < N$ à été démontré avant le cas $p = 1$ (et le cas $p = 1$ est longtemps resté un problème ouvert).

1. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

(a) On suppose ici $N = 1$. Montrer que $\|u\|_\infty \le \|u'\|_1$.

(b) Par récurrence sur N, montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}$.

(c) Montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \| \, |\nabla u| \, \|_1$.

(d) Soit $1 \leq p < N$. Montrer qu'il existe $C_{N,p}$ ne dépendant que N et p t.q. $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\| \, |\nabla u| \, \|_p$, avec $p^\star = (Np)/(N-p)$.

2. Soit $1 \leq p < N$. Montrer que $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\| \, |\nabla u| \, \|_p$, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($C_{N,p}$ et $p^\star$ sont donnés à la question précédente). En déduire que l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$.
3. Soit $p = N$. Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).
4. On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne. Pour $1 \leq p < N$, Montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$ ($p^\star = (Np)/(N-p)$). Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

Corrigé –

1.(a) Comme $u \in C_c^1(\mathbb{R})$ on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \int_{-\infty}^x u'(t)dt$ et donc

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^x |u'(t)|dt \leq \|u'\|_1.$$

On en déduit bien $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.

(b) La question précédente permet d'initialiser la récurrence, on a pour tout toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R})$, $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.

Soit maintenant $N \geq 1$. On suppose que pour toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}.$$

Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^{N+1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ on note $x = (x_1, y)^t$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^N$. Pour $x_1 \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|^{\frac{N+1}{N}} dy = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)||u(x_1,y)|^{\frac{1}{N}} dy \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|^{\frac{N}{N-1}} dy\Big)^{\frac{N-1}{N}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|dy\Big)^{\frac{1}{N}}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction $y \mapsto u(x_1, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R}^N)$), on obtient

$$\|u(x_1,\cdot)\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N}.$$

D'autre part, en appliquant le cas $N = 1$ (démontré à la question (a)) à la fonction $z \mapsto u_(z, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R})$), on a pour tout $y \in \mathbb{R}^N$

$$|u(x_1,y)| \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

et donc, en intégrant par rapport à y,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|dy \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}.$$

En reportant ces majorations dans (1.17) on obtient pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|^{\frac{N+1}{N}} dy \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}^{\frac{1}{N}}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à x_1 et en utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder (avec le produit de$N$ fonctions dans L^N, on obtient bien l'inégalité désirée, that is to say

$$\|u\|_{\frac{N+1}{N}}^{\frac{N}{N+1}} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}\|_1^{1/N},$$

ou encore

$$\|u\|_{\frac{N+1}{N}} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{\frac{1}{N+1}} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}\|_1^{\frac{1}{N+1}}.$$

Ce qui termine la récurrence.

(c) *La moyenne géométrique de N nombres positifs est plus petite que la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres. (Ceci peut se démontrer en utilisant, par exemple, la convexité de la fonction exponentielle.)*
On en déduit que

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N} \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_1.$$

Comme $\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_1 \leq \|\,|\nabla u|\,\|_1$ *pour tout* i, *on a bien*

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\,|\nabla u|\,\|_1.$$

(d) *Pour* $p = 1$, *on a vu que* $C_{N,p} = 1$ *convient. On suppose maintenant* $1 < p < N$.
On pose $\alpha = \dfrac{p(N-1)}{N-p}$ *(de sorte que* $\alpha\frac{N}{N-1} = p^\star$*) et* $v = |u|^{\alpha-1}u$.
Comme $\alpha > 1$ *et* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, *on a aussi* $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. *On peut donc appliquer le résultat de la question (c) à la fonction* v. *On obtient*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^\star}\Big)^{\frac{N-1}{N}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\alpha\frac{N}{N-1}}\Big)^{\frac{N-1}{N}} \leq \|\,|\nabla v|\,\|_1.$$

Comme $|\nabla v| = \alpha |u|^{\alpha-1}|\nabla u|$, *l'inégalité de Hölder (avec p et $q = p/(p-1)$) donne*

$$\|\,|\nabla v|\,\|_1 = \alpha \|\,|u|^{\alpha-1}\,|\nabla u|\,\|_1 \leq \alpha \|\,|u|^{\alpha-1}\,\|_q \|\,|\nabla u|\,\|_p.$$

Comme $(\alpha-1)q = (\alpha-1)p/(p-1) = p^\star$, *on a donc*

$$\|u\|_{p^\star}^{\frac{p^\star(N-1)}{N}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^\star}\Big)^{\frac{N-1}{N}} \leq \alpha \|u\|_{p^\star}^{\frac{p^\star(p-1)}{p}} \|\,|\nabla u|\,\|_p.$$

Ce qui donne, avec $C_{N,p} = \alpha = \dfrac{p(N-1)}{N-p}$,

$$\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\|\,|\nabla u|\,\|_p.$$

2. *Soit* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *il existe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions appartenant à* $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ *t.q.* $u_n \to u$ *dans* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *quand* $n \to +\infty$. *Par la question précédente, cette suite est de Cauchy dans* $L^{p^\star}$. *Par unicité de la limite (par exemple dans* $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$*) cette limite est nécessairement égale à* u. *On peut alors passer à la limite quand* $n \to +\infty$ *dans l'inégalité* $\|u_n\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\|\,|\nabla u_n|\,\|_p$ *et on obtient ainsi*

$$\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\|\,|\nabla u|\,\|_p \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Ceci donne l'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *dans* $L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)$.

L'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *est immédiate car* $\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}}$ *pour tout* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Soit maintenant $q \in]p, p^\star[$. *Pour montrer que* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *s'injecte continûment dans* $L^q(\mathbb{R}^N)$ *il suffit d'utiliser l'inégalité classique suivante (qui se démontre avec l'inégalité de Hölder) avec* $p < q < r = p^\star$.

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^{\theta}\|u\|_r^{1-\theta}, \tag{1.18}$$

avec $\theta = \frac{p(r-q)}{q(r-p)} \in]0,1[$.

3. *Le cas* $N = 1$ *est facile. La question 2 donne l'injection continue de* $W^{1,1}(\mathbb{R})$ *dans* $L^\infty(\mathbb{R})$. *Comme* $W^{1,1}(\mathbb{R})$ *s'injecte aussi continûment dans* $L^1(\mathbb{R})$, *on obtient aussi une injection continu de* $W^{1,1}(\mathbb{R})$ *dans* $L^q(\mathbb{R})$ *pour tout* $q \in]1, +\infty[$ *(en utilisant (1.18) avec* $r = +\infty$, $p = 1$ *et* $\theta = 1/q$*).*

On suppose maintenant $N > 1$. *On a bien une injection continue de* $W^{1,N}(\mathbb{R})$ *dans* $L^N(\mathbb{R})$. *Le seul cas à considérer est donc* $N < q < +\infty$. *Plusieurs démonstration sont possibles. Une première démonstration consiste à utiliser pour* $|u|^\alpha$, *avec* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, *l'inégalité démontrée à la question 1 (c), puis à utiliser l'inégalité de Hölder (pour faire apparaître* $|\nabla u|^N$*) et l'inégalité (1.18). Enfin, on conclut avec la densité de* $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ *dans* $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. *On donne ci* *dessous une démonstration probablement plus longue mais qui utilise de manière intéressante le caractère homogène de la norme. de la norme.*

Soit $N < q < +\infty$. Il existe alors $p \in]1, N[$ t.q. $p^\star = Np/(N-p) = q$. On va utiliser la question 1 avec cette valeur de p.

On définit φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, par :

$$\begin{array}{l} \varphi(s) = 0 \text{ si } |s| \leq 1, \\ \varphi(s) = \frac{1}{2}(|s|-1)^2 \text{ si } 1 < |s| \leq 2, \\ \varphi(s) = |s| - \frac{3}{2} \text{ si } 2 < |s|. \end{array}$$

On a $|\varphi(u)| \leq 1$ et $|\varphi'(s)| \leq 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ t.q $\|u\|_{W^{1,N}} = 1$. On a $\varphi(u) \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Par question 1 (et la définition φ) on obtient

$$\|\varphi(u)\|_q^p \leq C_{N,p} \| \, |\nabla\varphi(u)| \, \|_p \leq C_{N,p} \int_{\{|u|\geq 1\}} |\nabla u(x)|^p dx \leq C_{N,p} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \Big)^{\frac{p}{N}} \lambda_d(\{|u| \geq 1\}^{1-\frac{p}{N}}.$$

On a $\lambda_d(\{|u| \geq 1\} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^N dx \leq 1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \leq 1$. On en déduit

$$\|\varphi(u)\|_q^p \leq C_{N,p}.$$

Comme $|u|^q \leq 2^q \varphi(u)^q + 2^q$, on a donc

$$\begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q dx = \int_{\{|u|\leq 1\}} |u(x)|^q dx + \int_{\{|u|>1\}} |u(x)|^q dx \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^N dx + 2^q \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(u(x))|^q dx + 2^q \lambda_d(\{|u| > 1\}) \leq 1 + 2^q C_{N,p}^{\frac{q}{p}} + 2^q. \end{array}$$

Il existe donc $D_{N,q}$ ne dépendant que N et q t.q $\|u\|_q \leq D_{N,q}$ si $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ et $\|u\|_{W^{1,N}} = 1$ Grâce au caractère homogène de la norme, on a en déduit que $\|u\|_q \leq D_{N,q} \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Enfin, par densité de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ on obtient que $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|u\|_q \leq D_{N,q} \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \text{ pour tout } u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N).$$

Ce qui montre bien qu'il y a une injection continue de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$.

4. *Cette question consiste seulement à utiliser l'existence d'un opérateur P linéaire continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $Pu = u$ p.p. dans Ω (opérateur dit de "prolongement" dont l'existence est donnée par le théorème 1.18). En effet, grâce à cette opérateur, la question 4 est une conséquence des questions précédentes (et de l'inégalité (1.18)).*

Exercice 1.17 (Noyau de l'opérateur "trace")
Soient $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, $1 \leq p < \infty$ et $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ l'opérateur "trace" (vu en cours).

1. Montrer que $\text{Ker}\gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Montrer que $\gamma u = u$ p.p. (pour la mesure de lebesgue $N-1$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$).

Exercice 1.18 (Prolongement H^2)
Soient $N \geq 1$, $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ et $p \in [1, \infty[$.

1. Montrer que $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra s'inspirer de la démonstration de la densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$].
2. Montrer qu'il existe un opérateur P linéaire continu de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω, pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra chercher P sous la forme $Pu(x_1, y) = \alpha u(-x_1, y) + \beta u(-2x_1, y)$, pour $x_1 \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$].
3. On prend maintenant $p = \infty$. A-t-on $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,\infty}(\Omega)$? Existe-t-il un opérateur P linéaire continu de $W^{2,\infty}(\Omega)$ dans $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω, pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$? (justifier vos réponses. . .).

Exercice 1.19 (Convergence faible et opérateur continu) Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et u dans E. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans E quand $n \to +\infty$. Montrer que $T(u_n) \to T(u)$ faiblement dans F. On donne maintenant deux applications de ce résultat.

1. Soit E et F deux espaces de Banach. On suppose que E s'injecte continûment dans F, that is to say que $E \subset F$ et que l'application $u \mapsto u$ est continue de E dans F. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et u dans E. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans E quand $n \to +\infty$. Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans F.
2. Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H_0^1(\Omega)$ et u dans $H_0^1(\Omega)$. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $D_i u_n \to D_i u$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1.20 (Fonction non continue appartenant à $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$) Dans cet exercice, on construit v t.q. $v \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $v \notin C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (that is to say qu'il n'existe pas $w \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ t.q. $v = w$ p.p.). Pour cela, on reprend la fonction de l'exercice 1.5.
Soit $\gamma \in]0, 1/2[$ et u définie par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$ si $|x| < 1$ et $u(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit u_n en posant $u_n(x) = u(x) - n$ si $n \leq u(x) < n + 1$ et $u_n(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que $u_n \in H^1(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \, |\nabla u_n| \, \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 < +\infty.$$
[Utiliser l'exercice 1.5.]
2. Montrer que u_n prend ses valeurs entre 0 et 1 et que le support de u_n est une boule dont le diamètre tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $x_n = (1/n, 0) \in \mathbb{R}^2$ et on choisit m_n t.q. le support de u_n soit une boule de diamètre plus petit que $(1/2)(1/n - 1/(n+1))$ et t.q. la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ soit strictement croissante. Puis on pose, pour $x \in \mathbb{R}^2$, $v_n(x) = u_{m_n}(x - x_n)$.
3. Montrer que toutes les fonctions v_n ont des supports disjoints.
4. On pose $v = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} v_n$. Montrer que la fonction v appartient à $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer que v est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais n'est pas continue en 0.

Exercice 1.21 (Sur l'injection de $W^{1,1}$ dans $L^{1^\star}$) Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. Soit ω une partie borélienne de Ω de mesure de Lebesgue strictement positive, that is to say $\lambda_N(\omega) > 0$ en désignant par λ_N la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$.
On définit l'ensemble W_ω par
$$W_\omega = \{u \in W^{1,1}(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ p.p. dans } \omega\}.$$
le but de cet exercice est de montrer, par deux méthodes différentes, qu'il existe C, dépendant seulement de Ω et ω, tel que
$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \, |\nabla u| \, \|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W_\omega \text{ et pour tout } 1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}. \tag{1.19}$$

I- Première méthode (méthode directe)

1. On suppose qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ d'éléments de W_ω t.q. $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \geq n\| \, |\nabla u_n| \, \|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

   En utilisant un théorème de compacité du cours (chapitre 1), montrer qu'on peut supposer, après extraction d'une sous suite, que $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Montrer alors que $u = 0$ p.p. et que $\|u\|_{L^1(\Omega)} = 1$ (ce qui est impossible...).

2. Déduire de la question précédente qu'il existe C_1, dépendant seulement de Ω et ω, tel que

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1\| \, |\nabla u| \, \|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W_\omega. \tag{1.20}$$

3. On rappelle (théorème 1.28) qu'il existe C_2, dépendant seulement de Ω, tel que, en posant $1^\star = N/(N-1)$, $\|u\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \leq C_2\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$ pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Avec la question précédente, en déduire qu'il existe C, dépendant seulement de Ω et ω, vérifiant (1.19).

II- Deuxième méthode (en passant par la moyenne de u)

1. Soit $H = \{u \in W^{1,1}(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega u(x)dx = 0\}$. Montrer qu'il existe C_3 ne dépendant que de Ω t.q. $\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C_3\| \, |\nabla u| \, \|_{L^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H$.

   En utilisant le rappel de la question 3 de la première partie, en déduire qu'il existe C_4 ne dépendant que de Ω t.q.

$$\|u - m\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \leq C_4\| \, |\nabla u| \, \|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W^{1,1}(\Omega),$$

   avec $m\lambda_N(\Omega) = \int_\Omega u(x)dx$. [On pourra remarquer que $u - m \in H$.]

2. Soit $u \in W_\omega$ et m tel que $m\lambda_N(\Omega) = \int_\Omega u(x)dx$. Montrer que

$$|m| \leq \frac{C_4}{\lambda_N(\omega)^{1/1^\star}}\| \, |\nabla u| \, \|_{L^1(\Omega)}$$

   et en déduire que

$$\|u\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \leq C_4\Big(1 + \Big(\frac{\lambda_N(\Omega)}{\lambda_N(\omega)}\Big)^{1/1^\star}\Big)\| \, |\nabla u| \, \|_{L^1(\Omega)}.$$

Exercice 1.22 (Partition of unity)
Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) and $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, a finite family of open sets such that $K \subset \cup_{i=1}^n \Omega_i$. This exercice will prove that there exists $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ such that :

(p1) For all $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $\bar{S}_i \subset \Omega_i$ with $S_i = \{x \in \mathbb{R}^N, \varphi_i(x) \neq 0\}$,

(p2) $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$ on K.

For $\varepsilon > 0$ and $i \in \{1, \ldots, n\}$, one sets $\Omega_{i,\varepsilon} = \{x \in \Omega_i, d(x, \Omega_i^c) > \varepsilon\}$ where $d(x, \Omega_i^c) = \inf\{|x - y|, y \notin \Omega_i\}$.

1. Prove that there exists $\varepsilon > 0$ such that $K \subset \cup_{i=1}^n \Omega_{i,\varepsilon}$.

Let now ε given by Question 1.

2. Prove that there exists n functions $f_1, \ldots, f_n$ such that, for all i, $f_i = 0$ on $\Omega_{i,\varepsilon}^c$ and $\sum_{i=1}^n f_i = 1$ on $\cup_{i=1}^n \Omega_{i,\varepsilon}$.
3. By a regularization method, prove the existence of n functions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ satisfying (p1) and (p2).

Corrigé –

1. *For $i \in \{1, \ldots, n\}$, one has $\Omega_i = \cup_{\varepsilon>0}\Omega_{i,\varepsilon}$. Then $K \subset \cup_{i=1}^n \cup_{\varepsilon>0} \Omega_{i,\varepsilon}$. Since K is compact and $\Omega_{i,\varepsilon}$ is open (for all i and ε), there exists $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ such that $\varepsilon_i > 0$ for all i and $K \subset \cup_{i=1}^n \Omega_{i,\varepsilon_i}$. Taking $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, one has $K \subset \cup_{i=1}^n \Omega_{i,\varepsilon}$.*

2. *For all* $i \in \{1, \dots, n\}$, *one sets*
$$f_i(x) = 1 \text{ if } x \in (\Omega_{i,\varepsilon} \setminus \cup_{j<i}\Omega_{j,\varepsilon}),$$
$$f_i(x) = 0 \text{ if } x \notin (\Omega_{i,\varepsilon} \setminus \cup_{j<i}\Omega_{j,\varepsilon}).$$
With this definition, one has $f_i = 0$ *on* $\Omega_{i,\varepsilon}^c$. *Furthermore, let* $x \in \cup_{i=1}^n \Omega_{i,\varepsilon}$. *Let* $i = \min\{j\,;\, x \in \Omega_{j,\varepsilon}$. *One has* $f_i(x) = 1$ *and* $f_j(x) = 0$ *if* $j \neq i$. *Then* $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$.
3. *Since* K *is compact and* $(\cup_{i=1}^n \Omega_{i,\varepsilon})^c$ *is closed, one has* $d(K, (\cup_{i=1}^n \Omega_{i,\varepsilon})^c) = \delta > 0$.
One takes η *such that* $0 < \eta < \min\{\delta, \varepsilon\}$.
Let $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *such that* $\rho(x) = 0$ *if* $|x| \geq \eta$ *and such that* $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$.
For $i \in \{1, \dots, n\}$ *one takes* $\varphi_i = f_i \star \rho$.
One has $\varphi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *and since* $f_i = 0$ *on* $\Omega_{i,\varepsilon}^c$ *and* $\eta < \varepsilon$, *the function* φ_i *satisfies (p1).*
Since $\sum_{i=1}^n \varphi_i = (\sum_{i=1}^n f_i) \star \rho$ *and* $\eta < \delta$, *the functions* φ_i *satisfy (p2).*

Chapitre 2

Problèmes elliptiques linéaires

2.1 Formulation faible

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) de frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Soient $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient l'hypothèse d'ellipticité uniforme, that is to say :

$$\exists \alpha > 0;\ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N,\ \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.1}$$

On se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, et on cherche une solution au problème :

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{2.2a}$$

$$u(x) = g(x),\ x \in \partial\Omega, \tag{2.2b}$$

où $\partial_i u$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à sa i-ème variable.

Exemple 2.1 (Le Laplacien) *Si on prend $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (that is to say 1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$), alors le problème* (2.2) *devient*

$$-\Delta u = f \textit{ sur } \Omega,$$
$$u = g \textit{ sur } \partial\Omega.$$

Définition 2.2 (Solution classique) *On suppose que $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\partial\Omega)$. On appelle alors solution classique de* (2.2) *une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant* (2.2).

On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C^k(\bar{\Omega})$ désigne l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions appartenant à $C^k(\mathbb{R}^N)$.

Il n'existe pas forcément de solution classique à (2.2). Mais il existe des solutions en un sens plus faible que l'on va définir ci-après. Pour comprendre leur nature, considérons d'abord le cas $g = 0$, avec $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ et $f \in C(\bar{\Omega})$, et supposons qu'il existe une solution classique $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Par définition, celle ci vérifie :

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) = f(x),\ \forall x \in \Omega.$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$; multiplions l'équation précédente par $\varphi(x)$ et intégrons sur Ω :

$$-\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) \right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\partial_i\varphi(x) \right)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.3}$$

Comme $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on a $\partial_j u \in C^1(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, et $D_j u = \partial_j u$ p.p (come cela a été vu au Chapitre 1). De plus $u \in C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et donc $u \in H^1(\Omega)$. Enfin, comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a finalement $u \in H_0^1(\Omega)$ (voir l'exercice 1.17).
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$, that is to say $\varphi_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i\varphi_n \to D_i v$ dans $L^2(\Omega)$ pour $i = 1, \ldots, N$. En écrivant (2.3) avec $\varphi = \varphi_n$, on obtient :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\partial_i\varphi_n(x) \right) dx = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\, \mathrm{d}x,$$

et en passant à la limite, on obtient que u satisfait le problème suivant, qu'on appelle <u>formulation faible</u> du problème (2.2) (on rappelle que l'on considère ici le cas $g = 0$)

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega),\\ &\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)D_j u(x)D_i v(x) \right)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\, \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.4}$$

On vient ainsi de montrer que **toute solution classique du problème** (2.2) **(lorsque** $g = 0$**) est solution faible, that is to say vérifie** (2.4).

Remarque 2.3 (Cas symétrique, formulation variationnelle) Dans le cas où $a_{i,j} = a_{j,i}$ p.p. pour $i \neq j$, u est solution de (2.4) si et seulement si u est solution du problème suivant, qu'on appelle <u>formulation variationnelle</u> :

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega),\\ &J(u) \le J(v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{2.5}$$

où la fonctionnelle J est définie par : $J(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j} D_i v D_j v \right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)v(x)\, \mathrm{d}x.$

La démonstration de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes (2.4) et (2.5) utilise le lemme de Lax-Milgram, que nous rappelons ici :

Lemme 2.4 (Lax-Milgram) *Soient H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté $(\cdot/\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$, et $a(\cdot,\cdot)$ une application bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ qui est*

— *continue, ce qui équivalent à dire qu'il existe $c > 0$ t.q., pour tout $(u, v) \in H^2$, on a $|a(u, v)| \le c\|u\|\|v\|$,*

— *coercive sur H (certains auteurs disent plutôt H-elliptique), that is to say qu'il existe $\alpha > 0$, t.q., pour tout $u \in H$, $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$,*

et soit T une forme linéaire continue sur H.
Alors il existe un unique u de H tel que l'équation $a(u, v) = T(v)$ soit vérifiée pour tout v de H :

$$\exists!\, u \in H,\ \forall v \in H, \quad a(u, v) = T(v).$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J : H \to \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - T(v)$ pour tout v de H, that is to say :

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \ \textit{ et } \ J(u) < J(v) \textit{ si } u \neq v.$$

Notons que dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique, elle définit un produit scalaire sur H équivalent au produit scalaire initial. Dans ce cas, le lemme de Lax-Milgram est une conséquence directe du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.
Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram au problème (2.4), nous aurons besoin de l'inégalité de Poincaré :

Lemme 2.5 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ (ou qui est au moins borné dans une direction), alors il existe C_Ω ne dépendant que de Ω tel que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\, |\nabla u|\, \|_{L^2(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

N.B. On désigne toujours par $|\cdot|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$. On a donc

$$\|\, |\nabla u|\, \|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega D_i u(x)^2 dx.$$

Démonstration Par hypothèse sur Ω, il existe $a > 0$ tel que $\Omega \subset]-a, a[\times \mathbb{R}^{N-1}$. Soit $u \in C_c^\infty(\Omega)$, on prolonge u par 0 en dehors de Ω, on a donc :

$$u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), u = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)^t = (x_1, y)^t \in \Omega$, avec $x_1 \in]-a, a[$ et $y = (x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. On a :

$$u(x_1, y) = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 u(t, y)\, \mathrm{d}t,$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|u(x_1, y)|^2 \leq \left(\int_{-a}^{a} |\partial_1 u(t, y)|\, \mathrm{d}t\right)^2 \leq 2a \int_{-a}^{a} (\partial_1 u(t, y))^2\, \mathrm{d}t.$$

En intégrant entre $-a$ et a, on obtient :

$$\int_{-a}^{a} |u(x_1, y)|^2\, \mathrm{d}x_1 \leq 4a^2 \int_{-a}^{a} (\partial_1 u(t, y))^2\, \mathrm{d}t,$$

et donc, en intégrant par rapport à y,

$$\int_\Omega |u(x)|^2\, \mathrm{d}x \leq 4a^2 \int_\Omega (\partial_1 u(x))^2\, \mathrm{d}x,\ \forall u \in C_c^\infty(\Omega) \tag{2.7}$$

On procède ensuite par densité ; pour $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u \to D_i u$ dans $L^2(\Omega)$. On écrit alors (2.7) pour u_n et en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \|D_1 u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 4a^2 \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}^2.$$

■

Théorème 2.6 (Existence et unicité de la solution de (2.4)**)** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$, et soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que* (2.1) *soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de* (2.4).

Démonstration Pour appliquer le lemme de Lax-Milgram on écrit le problème (2.4) sous la forme : $u \in H$; $a(u,v) = T(v)$ pour tout $v \in H$, avec $H = H_0^1(\Omega)$ (qui est bien un espace de Hilbert, muni de la norme définie par $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$), et avec a et T définies par

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) \, \mathrm{d}x \ \text{ et } \ T(v) = \int_\Omega f(x) v(x) \, \mathrm{d}x.$$

On remarque tout d'abord que la forme linéaire T est bien continue. En effet,

$$|T(v)| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quant à la forme a, elle est évidemment bilinéaire, et elle vérifie :

$$|a(u,v)| \leq \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)} \|D_i u\|_{L^2(\Omega)} \|D_j v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

avec $C = \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Elle est donc continue.
Voyons si a est coercive : il faut montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $a(u,u) \geq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.
Par hypothèse sur a, on a :

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i u(x) \right) \, \mathrm{d}x \geq \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2 \right) \, \mathrm{d}x = \alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

On applique alors l'inégalité de Poincaré (2.6) :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_\Omega^2 + 1) \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

d'où on obtient que :

$$\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C_\Omega^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

et donc

$$a(u,u) \geq \alpha \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{\alpha}{C_\Omega^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

ce qui démontre la coercivité de a. Par le lemme de Lax-Milgram, on a donc bien existence et unicité de la solution du problème (2.4). ■

Remarque 2.7 Le lemme 2.5 est encore vrai avec $1 \leq p \leq +\infty$ au lieu de $p = 2$. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et $1 \leq p \leq +\infty$, il existe $C_{p,\Omega}$ ne dépendant que de p et Ω tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \| \, |\nabla u| \, \|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ceci permet de définir une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $W^{1,p}(\Omega)$, voir la définition 2.8. (Pour $p = 2$, cette équivalence de norme est en fait démontrée dans la démonstration du théorème 2.6.)

Définition 2.8 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $1 \leq p \leq +\infty$. Pou $u \in W_0^{1,p}$, on pose*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \big)^{\frac{1}{p}}.$$

Selon la remarque 2.7, c'est donc, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.
Pour $p = 2$, l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$ est aussi noté $H_0^1(\Omega)$ et la norme $\| \cdot \|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ est la norme $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$.

Par le lemme de Lax-Milgram, on démontre de manière similaire l'existence et l'unicité dans le cas où le second membre de (2.4) est donné par un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$, that is to say l'ensemble des formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$).

Théorème 2.9 (Existence et unicité, $T \in H^{-1}$) *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1) soit vérifiée. Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$, il existe alors une unique solution u de :*

$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) \mathrm{d}x = T(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1(\Omega)$. Il est intéressant de savoir si l'application $\varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ (définie, par exemple, pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$) se prolonge en un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (et dans ce cas, le prolongement sera unique par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$). En dimension $N = 1$, l'hypothèse $f \in L^1(\Omega)$ est suffisante. En dimension $N \geq 3$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q = 2N/(N+2)$ est suffisante. En dimension $N = 2$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q > 1$ est suffisante. Un résultat plus précis (pour $N = 2$) est donné dans l'exercice 2.11.

Nous n'avons traité ici que le cas de la condition aux limites de Dirichlet homogène (that is to say $g = 0$ dans le problème 2.2). Le cas de la condition aux limites de Dirichlet non homogène est traité dans la section 2.5.

L'existence et l'unicité de solutions faibles est possible avec d'autres conditions aux limites. L'exercice 2.6 traite le cas des conditions de Neuman et l'exercice 2.9 les conditions dites de Fourier (ou de Robin, selon les auteurs). La résolution du probème de Neuman permet d'ailleurs de montrer une décomposition utile d'un élément de $L^2(\Omega)^N$, appelée décomposition de Hodge, exercice 2.12. L'exercice 2.8 s'intéresse à des conditions aux limites apparaissant en mécanique du solide. Il est possible aussi de coupler un problème elliptique sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ avec un problème elliptique unidimensionel sur le frontière de Ω, ceci est l'objet de l'exercice 2.14.

Les exercices 2.13, 2.15 et 2.10 montrent l'existence (et l'unicité ou une "unicité partielle") pour des systèmes elliptiques (problème des Stokes et équation de Schrödinger).

Enfin, il est possible de traiter des problèmes elliptiques avec des coefficients $a_{i,j}$ non bornés. On introduit alors des espaces de Sobolev dit "à poids", exercice 2.4.

2.2 Analyse spectrale

2.2.1 Quelques rappels

Soit E un espace de Banach réel, et T une application linéaire continue de E dans E. On note :

- $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ est non bijective$\}$ l'ensemble des valeurs singulières de T,
- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ est bijective$\} = \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ l'ensemble des valeurs régulières de T,
- $\mathcal{VP}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ est non injective$\}$ l'ensemble des valeurs propres de T,

Lorsque dim $E < +\infty$, on a $\mathcal{VP}(T) = \sigma(T)$. On a un résultat similaire en dimension infinie, à condition que l'opérateur T soit linéaire continu et compact. Plus précisément, dans ce cas on a : $\mathcal{VP}(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. Le théorème suivant donne ce résultat dans les espaces de Hilbert séparables et pour un opérateur autoadjoint.

Proposition 2.10 (Opérateur linéaire continu compact autoajoint) *Soit E un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_E$, et soit T un opérateur linéaire continu compact autoadjoint dont le noyau $N(T) = \{u \in E\ ;\ T(u) = 0\}$ est réduit à $\{0\}$. Alors il existe une base hilbertienne de E formée de vecteurs propres de T, that is to say d'éléments de E, notés e_n, $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $(e_n, e_m)_E = \delta_{n,m}$ et tels que si $u \in E$, alors u peut s'écrire $u = \sum_{n\in N}(u, e_n)_E e_n$ (cette série étant convergente dans E), et les valeurs propres $\lambda_n \in \mathbb{R}$ associées, i.e. telles que $Te_n = \lambda_n e_n$, sont telles que $\lambda_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

2.2.2 Le Laplacien

On va considérer dans cette section, pour simplifier, le cas du Laplacien. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On rappelle que $\Delta u = \sum_{i=1}^N \partial_i^2 u$ si u est une fonction régulière. Pour étendre cette définition aux fonctions seulement localement intégrables, on pose, si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^N D_i^2 u$. On définit maintenant un opérateur A d'une partie de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ en définissant d'abord son **domaine** $D(A)$:

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega)\,;\Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

Puis on pose $Au = -\Delta u$ si $u \in D(A)$. On a ainsi définit un opérateur linéaire $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

On a vu dans les paragraphes précédents que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution au problème (2.4) qui s'écrit, pour le Laplacien, that is to say avec les valeurs $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Grâce à la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, la fonction u est solution de (2.9) si et seulement si $u \in D(A)$ et $-\Delta u = f$ p.p. (that is to say $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$). L'opérateur A est donc inversible. Son inverse, l'opérateur A^{-1}, est défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $A^{-1}f = u$ où u est solution de (2.9). Cet opérateur est injectif mais non surjectif. Les deux opérateurs sont linéaires.
Pour montrer qu'il existe une base hilbertienne formée des vecteurs propres de A^{-1}, on va démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.11 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note Tf l'unique solution de* (2.9)*. L'opérateur T est linéaire continu compact et autoadjoint de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus $N(T) = \{f \in L^2(\Omega), Tf = 0$ p.p.$\} = \{0\}$.*

Démonstration Il est immédiat de voir que T est linéaire. On remarque tout d'abord que $N(T) = \{f \in E, Tf = 0 \text{ p.p.}\} = \{0\}$. En effet, soit $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $Tf = 0$ p.p.. On a donc, d'après (2.9),

$$\int_\Omega fv dx = 0 \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (on a même $C_c^\infty(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$), on en déduit $f = 0$ p.p..
On montre maintenant la continuité de T. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u = Tf$. En prenant $v = u$ dans (2.9), on obtient

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fu \,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de Ω tel que $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, et donc :

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$ et donc :

$$\|Tf\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le C_\Omega^2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui démontre la continuité de T.

Montrons maintenant que l'opérateur T est compact, that is to say que l'image $T(B)$ d'un ensemble B borné de $L^2(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On peut écrire T sous la forme $T = I \circ T_0$ où I est l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et T_0 est l'application qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$. L'application T_0 est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$) et l'injection I est compacte par le théorème de Rellich (théorème 1.25 page 11), et donc l'opérateur T est compact.

Montrons maintenant que l'opérateur T est auto-adjoint, that is to say que

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = (f, Tg)_{L^2(\Omega)}, \ \forall f, g \in L^2(\Omega). \tag{2.10}$$

Soient donc f et $g \in L^2(\Omega)$, u l'unique solution de (2.9), et v l'unique solution de (2.9) où on a remplacé f par g dans le second membre. On a, comme v est solution de (2.9) où on a remplacé f par g :

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Tf \ g \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \ g \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x.$$

On montre de même que $(f, Tg)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$, ce qui démontre (2.10). ∎

Voici maintenant la conséquence du théorème 2.11 et de la proposition 2.10 pour l'opérateur "Laplacien" avec condition de Dirichlet homogène.

Théorème 2.12 (Base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres de $-\Delta$)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $Au = -\Delta u$ avec $D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. il existe alors une base hilbertienne (dénombrable) de $L^2(\Omega)$, notée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, formée de vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$. On peut ordonner les μ_n dans l'ordre croissant (that is to say $\mu_n \le \mu_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$) et l'on a $\mu_1 > 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \mu_n = +\infty$.

Démonstration Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note Tf l'unique solution de (2.9). D'après le théorème 2.11 et la proposition 2.10, il existe donc une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$de $L^2(\Omega)$ formées de fonctions propres de T. Les valeurs propres associées sont toutes strictement positives. En effet, si $f \in L^2(\Omega)$ et $f \neq 0$, alors $u = Tf \neq 0$ et

$$(Tf, f)_{L^2(\Omega)} = (u, f)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} > 0.$$

Si λ_n est une valeur propre de T est associée au vecteur propre $e_n \neq 0$, on a $Te_n = \lambda_n e_n$, et donc, comme $e_n \neq 0$,

$$\lambda_n(e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (\lambda_n e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (Te_n, e_n)_{L^2(\Omega)} > 0.$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc formée de nombres strictement positifs. Quitte à changer l'ordre des λ_n, on peut supposer que cette suite est décroissance. Enfin, la proposition 2.10 donne que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

Remarquons que les valeurs propres de A sont donc les valeurs $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, avec $\mu_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mu_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. ■

En reprenant les notations du théorème 2.12, on peut alors caractériser le domaine de l'opérateur Laplacien (avec condition de Dirichlet homogène) $D(A)$ de la façon suivante :

$$\text{Soit } u \in L^2(\Omega), [u \in D(A)] \iff \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n^2 (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.\right]$$

De plus si $u \in D(A)$, alors $Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$. On peut ainsi définir les puissances de l'opérateur A :

Définition 2.13 (Puissance de l'opérateur) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $Au = -\Delta u$ avec $D(A) = \{u \in H^1_0(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Soit $s \geq 0$. On définit*

$$D(A^s) = \{u \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{2s} (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty\}.$$

Et pour $u \in D(A^s)$, on peut alors définir $A^s u$ par :

$$A^s u = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^s (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n.$$

Cette série étant convergente dans $L^2(\Omega)$.

Pour $s = 0$, on a $D(A^0) = L^2(\Omega)$ et $A^0 u = u$: A^0 est l'opérateur identité.
Pour $s = 1$, on retrouve l'opérateur A.
Pour $s = \frac{1}{2}$, on a $D(A^{\frac{1}{2}}) = \{u \in L^2(\Omega); \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty\}$. On peut montrer que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_0(\Omega)$, et on a $A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\mu_n} (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$.

Pour le cas $N = 1$, $\Omega =]0, 1[$, Le théorème de décomposition spectrale est détaillé dans l'exercice 2.2.

2.3 Régularité des solutions faibles

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses (2.1), on sait par les résultats précédents qu'il existe une unique solution au problème (2.4), et on se demande quelle est la régularité de cette solution en fonction des données du problème. Le problème est assez simple en dimension $N = 1$, voir l'exercice 2.1, mais beaucoup plus difficile en dimension $N > 1$. La réponse dépend de la régularité des coefficients de l'opérateur et de la régularité de la frontière de l'ouvert (on dit que la frontière de Ω est de classe C^k si elle est localement le graphe d'une fonction de classe C^k).

Théorème 2.14 (Régularité de la solution du problème de Dirichlet)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses (2.1)*, soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de* (2.4).

1. *Si $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \ldots, N$ et Ω est à frontière C^2, alors, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a $u \in H^2(\Omega)$.*
2. *Si $a_{i,j} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \ldots, N$, si Ω est à frontière C^∞, et si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m \geq 0$, alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$.*

En conséquence, si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et donc u est solution classique. De même, si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et donc u est encore solution classique.

Remarque 2.15 (Optimalité des hypothèses) Notons que la partie 1. du théorème précédent est fausse sans les hypothèses $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et Ω est à frontière C^2.
Par contre dans le cas du Laplacien, that is to say $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, si Ω est convexe, alors $u \in H^2(\Omega)$ dés que $f \in L^2(\Omega)$.

Idée de démonstration du théorème 2.14, première partie
On se ramène par la technique dite des "cartes locales" au cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x_1, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0\}$, et au problème suivant :

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

et on applique ensuite le théorème 2.18. Ce théorème montre que la solution de ce problème appartient à $H^2(\mathbb{R}_+^N)$.
■

La démonstration du théorème 2.18, due à L. Nirenberg [1] que nous énonçons un peu plus loin nécessite les lemmes techniques suivants, que nous enonçons pour $N = 2$, pour simplifier :

Lemme 2.16 *Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, y), x_1 > 0, y \in \mathbb{R}\}$. Soit $g \in L^2(\Omega)$ et, pour $h > 0$, $\Psi_h g$ défini par :$\Psi_h g = \frac{1}{h}(g_h - g)$, où $g_h \in H_0^1(\Omega)$ est définie par $g_h(x) = g(x_1, x_2 + h)$. Alors $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$.*

Démonstration Soit $g \in L^2(\Omega)$, par définition,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega \Psi_h g \, v \, \mathrm{d}x, \; v \in H_0^1(\Omega), \; \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\},$$

et donc, par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega \Psi_h g \, v \, \mathrm{d}x, \; v \in C_c^\infty(\Omega), \; \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

1. Louis Nirenberg (né en 1925) est un mathématicien Canadien qui a beaucoup contribué à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Psi_h g\, v \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} (g(x_1,x_2+h)-g(x_1,x_2))\, v(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1,\tilde{x}_2)v(x_1,\tilde{x}_2-h)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}\tilde{x}_2 - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1,x_2)v(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1,x_2)\frac{v(x_1,x_2-h)-v(x_1,x_2)}{-h}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\int_\Omega \Psi_h g\, v\,\mathrm{d}x| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\,\|\frac{v(\cdot,\cdot-h)-v(\cdot,\cdot)}{-h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$. ■

Lemme 2.17 *Sous les hypothèses du lemme 2.16, soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, alors $\Psi_h u \to D_2 u$ dans $\mathcal{D}^\star$ lorsque $h \to 0$.*

Démonstration On pose $\mathcal{D} = C_c^\infty(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$; on veut montrer que

$$\int_\Omega \Psi_h u\,\varphi\,\mathrm{d}x \to -\int_\Omega u\partial_2\varphi\,\mathrm{d}x = \langle D_2 u,\varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star,\mathcal{D}} \text{ lorsque } h\to 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Psi_h u\varphi\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \frac{u(x_1,x_2+h)-u(x_1,x_2)}{h}\varphi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} u(x_1,x_2)\frac{\varphi(x_1,x_2-h)-\varphi(x_1,x_2)}{-h}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Mais $\frac{\varphi(x_1,x_2-h)-\varphi(x_1,x_2)}{-h} \to \partial_2\varphi$ uniformément lorsque $h\to 0$, et le support de cette fonction est inclus dans un compact K de Ω, indépendant de h si $|h|<1$. Donc $\lim_{h\to 0}\int_\Omega \Psi_h u\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\partial_2\varphi\,\mathrm{d}x$. ■

Théorème 2.18 (Nirenberg) *Soit $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1,y), y\in\mathbb{R}^{N-1}, x_1>0\}$ et $f\in L^2(\Omega)$, et soit $u\in H^1_0(\Omega)$ solution du problème suivant :*

$$\begin{aligned}
&u\in H^1_0(\Omega),\\
&\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x, \forall v\in H^1_0(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Alors $u\in H^2(\mathbb{R}^N_+)$.

Démonstration On va effectuer la démonstration dans le cas $N=2$. Soit $u\in H^1_0(\Omega)$ solution de (2.11), u vérifie donc :

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\, v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega gv\,\mathrm{d}x, \forall v\in H^1_0(\Omega), \text{ où } g = u+f\in L^2(\Omega).$$

On a donc

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}_+^2} g\, v \,\mathrm{d}x \le \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.12}$$

puisque, par définition, $\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_{\mathbb{R}_+^2} g\, v\,\mathrm{d}x,\ v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1\}$, où, comme d'habitude, on confond l'application T_g qui à $v \in H_0^1(\Omega)$ associe $\int gv\,\mathrm{d}x$, qui est donc un élement de $H^{-1}(\Omega)$, avec la (classe de) fonction(s) $g \in L^2(\Omega)$. On prend $v = u$ dans (2.12). On obtient $\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$.
Pour montrer la régularité sur $D_2 u$, on introduit la fonction $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ où $u_h \in H_0^1(\Omega)$ est définie par $u_h(x) = u(x_1, x_2{+}h)$. Comme u vérifie (2.11), u_h vérifie $\int_\Omega \nabla u_h{\cdot}\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f_h v\,\mathrm{d}x$ où $f_h(x) = f(x_1, x_2{+}h)$, et donc $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_\Omega \nabla\Psi_h u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Psi_h f v\,\mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

On en déduit que $(\Psi_h u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Psi_h g v\,\mathrm{d}x$, et donc que $\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \le \|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Par le lemme 2.16, comme $g \in L^2(\Omega)$, on a donc

$$\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Prenons maintenant $h = \frac{1}{n}$ et faisons $n \to +\infty$. Par ce qui précéde, la suite $(\Psi_{\frac{1}{n}} u)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, il existe donc une sous-suite encore notée $(\Psi_{\frac{1}{n}} u)_{n\in\mathbb{N}}$, et $w \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible (that is to say $S(\Psi_{\frac{1}{n}} u) \to S(w)$ pour tout $S \in H^{-1}(\Omega)$). Donc $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans $\mathcal{D}^\star$. Mais par le lemme 2.17, $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to D_2 u$ dans $\mathcal{D}^\star$. Donc $D_2 u = w \in H_0^1(\Omega)$, et par conséquent, $D_1 D_2 u \in L^2(\Omega)$ et $D_2 D_2 u \in L^2(\Omega)$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que $D_1 D_1 u \in L^2(\Omega)$. Pour cela, on utilise l'équation satisfaite par u. En effet, comme u est solution faible de (2.4), on a $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star$, et donc $D_1 D_1 u = -f - D_2 D_2 u$ ce qui prouve que $D_1 D_1 u \in L^2(\Omega)$. Ceci termine la preuve. ■

Remarque 2.19 (Plus de régularité. . .)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses (2.1), soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de (2.4).

1. Supposons que $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et que Ω est à frontière C^2. On a déjé vu que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u \in H^2(\Omega)$. On peut montrer que si $f \in L^p(\Omega)$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(2 \le p < +\infty)$.
2. Supposons maintenant qu'on ait seulement $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$. On peut montrer (c'est un résultat de Meyers) qu'il existe $p^\star > 2$ tel que si $f \in L^p(\Omega)$ avec $2 \le p \le p^\star$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
3. Toujours dans le cas $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, on peut montrer (ce résultat est dû à Stampacchia[2]) que si $f \in L^p(\Omega)$, avec $p > \frac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.
4. Il est possible aussi de démontrer des résultat de régularité pour d'autres conditions aux limites. L'exercice 2.6 donne un exemple avec les conditions de Neuman, l'exercice 2.9 un exemple avec conditions de Fourier et l'exercice 2.10 traite l'exemple du système elliptique induit par l'équation de Schrödinger (qui est généralement présenté comme une équation dont l'inconnue prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$).

2.4 Positivité de la solution faible

Question. (Positivité de la solution faible.) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i,j = 1,\dots,N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient (2.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution de (2.4). On suppose que $f \ge 0$ p.p.. A-t-on $u \ge 0$ p.p. ?

2. Mathématicien italien né à Naples en 1922, mort en 1978, spécialiste de calcul des variations et des équations aux dérivées partielles, entre autres.

Remarque 2.20 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. On suppose que $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur le bord de Ω (la fonction u est donc une solution classique avec $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i = j$). On suppose aussi que $f > 0$ dans Ω. On va montrer que $u \geq 0$ dans Ω. Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ t.q. $u(a) < 0$. On choisit alors $x \in \Omega$ t.q. $u(x) = \min\{u(y), y \in \overline{\Omega}\}$ (un tel x existe car $\overline{\Omega}$ est compact, u continue et $u = 0$ sur le bord de Ω). On a alors

$$\partial_i u(x) = 0 \text{ et } \partial_i^2 u(x) \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Ceci donne $\Delta u(x) \geq 0$ en contradiction avec $\Delta u(x) = -f(x) < 0$. On obtient donc finalement que $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Un argument supplémentaire permet de remplacer l'hypothèse $f > 0$ par $f \geq 0$. En effet, supposons seulement $f \geq 0$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon x_1^2$ de sorte que $-\Delta u_\varepsilon = f + 2\varepsilon > 0$ dans Ω. Soit $x \in \bar{\Omega}$ t.q. $u(x) = \min\{u_\varepsilon(y), y \in \overline{\Omega}\}$. Si $x \in \Omega$, le raisonnement précédent montre que $\Delta u_\varepsilon(x) \geq 0$ en contraction avec $-\Delta u_\varepsilon(x) = f(x) + 2\varepsilon > 0$. On a donc $x \in \partial\Omega$. On en déduit que

$$u_\varepsilon(y) \geq u_\varepsilon(x) \geq -\varepsilon \max_{x \in \partial\Omega} x_1^2 \text{ pour tout } y \in \bar{\Omega}.$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient le résultat désiré, that is to say $u \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$.
La question posée au début de ce paragraphe consiste donc à étendre cette propriété de positivité aux solutions faibles.

Nous donnons maintenant deux petits lemmes, dûs à G. Stampacchia.

Lemme 2.21 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ' est bornée et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u) D_i u$ p.p. (pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$). (La notation $\varphi(u)$ désigne la fonction $\varphi \circ u$.)*

Démonstration Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$), that is to say

$$\begin{aligned} &u_n \to u \text{ dans } L^2(\Omega), \\ &D_i u_n \to D_i u \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut même supposer qu'il existe $F \in L^2(\Omega)$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $F_i \in L^2(\Omega)$ t.q.

$$\begin{aligned} &u_n \to u \text{ p.p. et } |u_n| \leq F \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ &D_i u_n \to D_i u \text{ p.p. et } |D_i u_n| \leq F_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},\ i \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

On a alors $\varphi(u_n) \in C_c^1(\Omega)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$D_i\varphi(u_n) = \partial_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_i u_n.$$

On pose $M = \sup\{|\varphi'(s)|, s \in \mathbb{R}\}$, de sorte que $|\varphi(s)| \leq M|s|$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u) \text{ p.p. et } |\varphi(u_n)| \leq MF \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $MF \in L^2(\Omega)$, le théorème de convergence dominée (dans $L^2(\Omega)$) donne $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^2(\Omega)$. On a donc aussi $D_i\varphi(u_n) \to D_i\varphi(u)$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. On rappelle maintenant que $D_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_i u_n$. Comme

$$\begin{aligned} &\varphi'(u_n) \to \varphi'(u) \text{ p.p.}, \\ &\partial_i u_n \to D_i u \text{ p.p.}, \\ &|\varphi'(u_n)\partial_i u_n| \leq MF_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée donne $\varphi'(u_n)\partial_i u_n \to \varphi'(u)D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ et donc aussi dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ on a donc $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p. (et pour tout i). Finalement, on obtient donc que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ (comme limite, pour la norme de $H^1(\Omega)$, de fonctions de $H_0^1(\Omega)$) et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p., pour tout i. ∎

Lemme 2.22 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On définit u^+ par $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ Pour $x \in \Omega$. Alors, $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i u^+ = 1_{u\geq 0}D_i u = 1_{u>0}D_i u$ p.p. (pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$). En particulier on a $D_i u = 0$ p.p. (pour tout i) sur l'ensemble $\{u = 0\}$.*

Démonstration Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\varphi_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} &\varphi_n(s) = 0 \text{ si } s \leq 0,\\ &\varphi_n(s) = \tfrac{n}{2}s^2 \text{ si } 0 < s < \tfrac{1}{n},\\ &\varphi_n(s) = s - \tfrac{1}{2n} \text{ si } \tfrac{1}{n} \leq s. \end{aligned}$$

On a donc $\varphi_n(s) \to s^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ (quand $n \to +\infty$) et $|\varphi_n'(s)| \leq 1$ pour tout s et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Le lemme 2.21 donne $\varphi_n(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi_n'(u)D_i u$ p.p. (et pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$). D'autre part, on a

$$\varphi_n(u) \to u^+ \text{ p.p., } |\varphi_n(u)| \leq |u| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de convergence dominée donne donc $\varphi_n(u) \to u^+$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc que $D_i\varphi_n(u) \to D_i u^+$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$). Puis, on remarque que $\varphi_n'(u) \to 1_{\{u>0\}}$ p.p. et donc

$$\varphi_n'(u)D_i u \to 1_{\{u>0\}}D_i u \text{ p.p., } |\varphi_n'(u)D_i u| \leq |D_i u| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui (toujours par le théorème de convergence dominée) donne $\varphi_n'(u)D_i u \to 1_{\{u>0\}}D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$). Comme $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi_n'(u)D_i u$ on en déduit (par unicité de la limite dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$) que $D_i u^+ = 1_{\{u>0\}}D_i u$ p.p.. La suite $(\varphi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de $H_0^1(\Omega)$, elle converge dans $H^1(\Omega)$ vers u^+. On a bien montré, finalement, que $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i u^+ = 1_{\{u>0\}}D_i u$ p.p. (et pour tout i).

En considérant la suite $(\psi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ avec ψ_n définie par $\psi_n(s) = \varphi(s+1/n) - 1/(2n)$, un raisonnement analogue montre que $D_i u^+ = 1_{\{u\geq 0\}}D_i u$ (la différence essentielle entre φ_n et ψ_n est que $\varphi_n'(0) = 0$ alors que $\psi_n'(0) = 1$). ∎

Remarque 2.23 Le lemme 2.22 peut se généraliser à toute fonction lipschitzienne s'annulant en 0, on obtient ainsi le résultat suivant : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'annulant en 0. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On a alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p. (pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$). Un exemple important consiste à prendre $\varphi(s) = (s-k)^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, avec k donné dans $\mathbb{R}_+$. On obtient ainsi, pour $u \in H_0^1(\Omega)$, $(u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = 1_{\{u>k\}}D_i u = 1_{\{u\geq k\}}D_i u$ p.p..

On peut maintenant répondre à la question posée au début de ce paragraphe.

Théorème 2.24 (Positivité de la solution faible) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que les $a_{i,j}$ vérifient (2.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution de* (2.4). *On suppose que $f \geq 0$ p.p.. On a alors $u \geq 0$ p.p..*

Démonstration On suppose que $f \leq 0$ p.p. et on va montrer que $u \leq 0$ p.p. (en changeant f en $-f$ et u et $-u$ on obtient le résultat désiré). Comme u est solution de (2.4), on a

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)D_j u(x)D_i v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit, dans cette égalité, $v = u^+$ et on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 1_{\{u\geq 0\}}(x)dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)D_j u(x)D_i u^+(x)dx = \int_\Omega f(x)u^+(x)dx \leq 0.$$

On en déduit que $\alpha\|u^+\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \alpha \int_\Omega |\nabla u^+(x)|^2 dx \leq \int_\Omega f(x)u^+(x)dx \leq 0$, et donc $u^+ = 0$ p.p., that is to say $u \leq 0$ p.p.. ■

2.5 Condition de Dirichlet non homogène

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les problèmes elliptiques (linéaires) avec condition aux limites homogène (that is to say solution nulle au bord du domaine). On souhaite maintenant remplacer la condition "$u = 0$" sur le bord de Ω par "$u = g$" sur le bord de Ω. Ceci va être possible en se ramenant au problème de Dirichlet avec une condition aux limites homogène (that is to say en se ramenant aux théorèmes 2.6 et 2.9) à condition que Ω est assez régulier pour que l'opérateur "trace", noté γ et introduit au chapitre 1, soit bien défini et que g soit dans l'image de γ (that is to say $g = \gamma(G)$ avec $G \in H^1(\Omega)$).
Plus précisèment, soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ à frontière lipschitzienne. On note $\partial\Omega$ cette frontière. Soient $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \ldots, N$, vérifiant l'hypothèse d'ellipticité uniforme (2.1). Soit f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$. On cherche une solution au problème (2.2). Le théorème 2.6 permet de démontrer le théorème suivant, où (2.13) est la formulation faible du problème (2.2).

Théorème 2.25 (Condition de Dirichlet non homogène (1)) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ à frontière lipschitzienne, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in \mathrm{Im}(\gamma)$ (où γ désigne l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ vu au théorème 1.23). Soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que* (2.1) *soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de* (2.13).

$$\begin{aligned} & u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = g, \\ & \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)D_j u(x)D_i v(x) \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \forall v \in H^1_0(\Omega). \end{aligned} \tag{2.13}$$

La démonstration fait partie de l'exercice 2.21. Elle consiste à chercher $u-G$ comme solution faible d'un problème elliptique posé dans $H^1_0(\Omega)$ avec un second membre dans $L^2(\Omega)$ et $G \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(G) = g$. Il est possible aussi de remplacer le second membre de (2.13) par $T(v)$ où $T \in H^{-1}(\Omega)$. On obtient alors le théorème 2.26 qui se démontre aussi en cherchant $u - G$ comme solution faible d'un problème elliptique posé dans $H^1_0(\Omega)$ avec un second membre dans $H^{-1}(\Omega)$ (voir l'exercice 2.21).

Théorème 2.26 (Condition de Dirichlet non homogène (2)) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ à frontière lipschitzienne, $T \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in \mathrm{Im}(\gamma)$ (où γ désigne l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ vu au théorème 1.23). Soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que* (2.1) *soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de* (2.14).

$$\begin{aligned} & u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = g, \\ & \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)D_j u(x)D_i v(x) \right) \mathrm{d}x = T(v), \forall v \in H^1_0(\Omega). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Remarque 2.27 *Sous les hypothèses du théorème 2.25, on peut aussi montrer, par une méthode voisine de celle donnée dans le théorème 2.24, que, si $f = 0$ et $A \leq g \leq B$ p.p., avec $A, B \in \mathbb{R}$ (p.p. est à prendre ici au sens de la mesure de Lebesgue $N-1$ dimensionnelle sur $\partial\Omega$), on a alors $A \leq u \leq B$ p.p.,o ù u est la solution de (2.13). C'est ce résultat que l'on appelle "principe du maximum".*

La suite de cette section donne quelques compléments sur l'image de l'opérateur trace (noté γ) défini sur $H^1(\Omega)$ lorque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne.

Définition 2.28 (Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. On note $H^{1/2}(\partial\Omega)$ l'ensemble des traces des fonctions $H^1(\Omega)$, that is to say $H^{1/2}(\partial\Omega) = \mathrm{Im}\gamma$ où γ est l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ vu au théorème 1.23. On définit sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$ une norme en posant*

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf\{\|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)},\ \gamma(\overline{u}) = u\}.$$

La proposition 2.30 montre que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est alors un espace de Hilbert et que l'application $u \mapsto u$ est continue de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. (On dit alors que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^2(\partial\Omega)$.) On note $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (c'est donc aussi un espace de Hilbert).

Remarque 2.29 Dans le cadre de la définition 2.28, on peut montrer (mais ceci n'est pas fait dans ce cours) la compacité de l'application $u \mapsto u$ de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

Proposition 2.30 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. On note γ l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$.*

1. Soit $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors $\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)}$ où $\bar{u}$ est l'unique solution faible de $-\Delta\bar{u} = 0$ dans Ω avec $\gamma(\overline{u}) = u$, that is to say l'unique solution de

$$\begin{aligned}
&\bar{u} \in H^1(\Omega), \gamma(\bar{u}) = u,\\
&\int_\Omega \nabla\bar{u}(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

2. L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un esapce de Hilbert.

3. L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^2(\partial\Omega)$.

La démonstration de cette proposition fait l'object de l'exercice 2.22.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. Avec la définition 2.28 (et la proposition 2.30), on voit que L'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$ est un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (et sa norme est égale à 1). Si maintenant $u \in H^1(\Omega)^N$, on peut définir la trace de u encore notée $\gamma(u)$ en prenant la trace de chacune des composantes de u. On a donc $\gamma(u) \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N \subset L^2(\partial\Omega)^N$. On note $n(x)$ le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieur à Ω. Comme Ω est à frontière lipschizienne, le vecteur $n(x)$ est défini p.p. en $x \in \partial\Omega$ (p.p. signifie ici, comme d'habitude, p.p. pour la mesure de Lebesgue $(N-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$) et la fonction $x \mapsto n(x)$ définit un élément de $L^\infty(\partial\Omega)$. On obtient ainsi $\gamma(u)\cdot n \in L^2(\partial\Omega)$. Cette (classe de) fonction(s) $\gamma(u)\cdot n$ est appelée "trace normale de u sur $\partial\Omega$".

L'exercice 2.23 montre qu'on peut définir $\gamma(u)\cdot n$ comme un élément de $H^{-1/2}(\Omega)$ sous l'hypothèse $u \in L^2(\Omega)^N$ avec $\mathrm{div}(u) \in L^2(\Omega)$ (cette hypothèse est donc plus faible que $u \in H^1(\Omega)^N$). Il est toutefois intéressant de noter que, sous cette hypothèse, $\gamma(u)\cdot n$ n'est pas toujours représenté par une fonction sur $\partial\Omega$ et ceci induit une difficulté lorsque l'on souhaite considérer la restriction de $\gamma(u)\cdot n$ à une partie du bord de Ω, voir à ce propos l'exercice 2.24.

2.6 Exercices

Exercice 2.1 (Régularité en dimension 1) $f \in L^2(]0,1[)$. On rappelle (cf. cours) qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{aligned}&u \in H_0^1(]0,1[),\\&\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[).\end{aligned} \tag{2.15}$$

On suppose maintenant que $f \in C([0,1],\mathbb{R})(\subset L^2(]0,1[)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit u la solution de (2.15). Montrer que, pour tout $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = \int_0^1 c\varphi(t)dt$$

avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de φ).
En déduire que $Du = -F + c$ p.p., puis que u est deux fois continûment dérivable sur $]0,1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

Corrigé –
Soit $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$. Pour $x \in [0,1]$ on pose

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt - x\int_0^1 \varphi(t)dt.$$

On a donc $\psi \in C^1([0,1])$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$ et la dérivée faible de ψ est égale p.p. à sa dérivée classique (voir la Définition 1.2), that is to say

$$D\psi(x) = \psi'(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(s)ds \text{ pour presque tout } x \in]0,1[.$$

On a donc $\psi \in L^2(\Omega)$ et $D\psi \in L^2(\Omega)$, ce qui prouve que $\psi \in H^1(]0,1[)$. Comme $\psi(0) = \psi(1) = 0$, on a même $\psi \in H_0^1(\Omega)$ (voir la section 1.5). On peut donc prendre $v = \psi$ dans (2.15), on obtient

$$\int_0^1 Du(t)\varphi(t)dt - \int_0^1 \varphi(t)dt\int_0^1 Du(t)dt = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx.$$

Comme F est de classe C^1 et $F' = f$, on a (en utilisant aussi $\psi(0) = \psi(1) = 0$)

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)dx = \int_0^1 F'(x)\psi(x)dx = -\int_0^1 F(x)\psi'(x)dx = -\int_0^1 F(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 F(x)dx\int_0^1 \varphi(t)dt.$$

En posant $c = \int_0^1 Du(t)dt + \int_0^1 F(t)dt$, on a donc

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = c\int_0^1 \varphi(t)dt \text{ pour tout } \varphi \in C([0,1]).$$

Comme $Du + F - c \in L^2(]0,1[)$ et que $C([0,1])$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, on en déduit

$$Du = -F + c \text{ p.p. dans }]0,1[.$$

On pose maintenant

$$w(x) = \int_0^x (-F(t) + c)dt \text{ pour } x \in [0,1].$$

Comme w est de classe C^1(la fonction w est même de classe C^2) la dérivée par transposition de w est une dérivée faible et est égale p.p. à la dérivée classique de w. On a donc $Dw = w' = -F + c$ p.p.. On a donc $Dw = Du$ p.p. et on en déduit que $w - u$ est une fonction presque partout égale à une constante (voir l'exercice 1.2). En identifiant la (classe de) fonction(s) u a son représentant continu, on a donc u de classe C^2, $u' = -F + c$ et $u'' = -F' = f$. On a aussi $u(0) = u(1)$ (car $u \in H_0^1(]0,1[)$ et donc le représentant continu de u vérifie $u(0) = u(1) = 0$).

Exercice 2.2 (Décomposition spectrale en dimension 1)
On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0,1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul u solution de (2.15).

On note T l'application de E dans E qui à f associe u (solution de (2.15), noter que $H_0^1(]0,1[) \subset E$). On rappelle que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de E dans E.

1. Soit $\lambda \in \mathcal{VP}(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0,1],\mathbb{R}) \cap C^2(]0,1[,\mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0,1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\, k \in \mathbb{N}^\star\}$ et $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.
3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $c_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)dt$. Montrer que :
$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$
(Comparer avec les séries de Fourier. . . ,)
4. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\star$. En utilisant l'alternative de Fredholm, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :
$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(]0,1[),\\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu\int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned}$$

Corrigé –

1. *On a vu à la section 2.2.2 que $N(T) = \{f \in E,\ Tf = 0$ p.p.$\} = \{0\}$, que les valeurs propres de T sont toutes strictement positives et qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$ formée de fonctions propres de T. On cherche ici une telle base hilbertienne. Pour cela, on trouve tout d'abord les valeurs propres de T.*

   On rappelle que, pour $f \in E$, On a $Tf \in H_0^1(]0,1[$ et, en posant $u = Tf$,
$$\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$
   Soit λ une valeur propre de T. On sait déjà que $\lambda > 0$. Il existe $f \in E$, $f \neq 0$ t.q. $Tf = \lambda f$. En posant $u = Tf$, on a donc $u \in H_0^1(]0,1[)$, $u \neq 0$ et $f = u/\lambda$, ce qui donne
$$\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 u(t)v(t)dt \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$
   Comme $u \in H_0^1(]0,1[)$, on a u continu sur $[0,1]$ (plus précisément, u admet un représentant continu et on identifie u à ce représentant) et $u(0) = u(1) = 0$. L'exercice 2.1 montre alors que u est de classe C^2 et que
$$-\lambda u''(x) = u(x) \text{ pour tout } x \in]0,1[. \tag{2.16}$$
2. *Pour chercher les valeurs propres, la question précédente nous a ramené à la résolution d'une équation différentielle linéaire classique. Il est bien connu (c'est, par exemple, une conséquence du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz) que l'ensemble de solutions de (2.16) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par le fonctions $x \mapsto \sin(x/\sqrt{\lambda})$ et $x \mapsto \cos(x/\sqrt{\lambda})$.*

   Si λ est valeur propre de T, il existe donc (par la question précédente) $u \neq 0$ t.q. $Tu = \lambda u$, u de classe C^2, u continu sur $[0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$ et u solution de (2.16). Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ t.q.
$$u(x) = A\sin(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) + B\cos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$
   Comme $u(0) = 0$, on a nécessairement $B = 0$. Puis, comme $u \neq 0$, on a nécessairement $A \neq 0$. Enfin, comme $u(1) = 0$, on a nécessairement $\sin(1/\sqrt{\lambda}) = 0$, ce qui donne l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $1/\sqrt{\lambda} = k\pi$. Comme $\lambda > 0$, on a donc $k \in \mathbb{N}^\star$, $1/\lambda = k^2\pi^2$ et $u(x) = A\sin(k\pi x)$ pour tout $x \in [0,1]$ avec $A \neq 0$ (la fonction u vérifie bien $Tu = \lambda u$, ce qu'on peut vérifier facilement en remarquant qu'il suffit d'écrire la formulation faible en prenant des fonctions v dans $C_c^\infty(]0,1[)$, car $C_c^\infty(]0,1[)$ est dense dans $H_0^1(]0,1[)$).

On a ainsi trouvé toutes les valeurs propres de T, $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\ k \in \mathbb{N}^\star\}$. *La section 2.2 donne alors que* $\sigma(T)\setminus\{0\} = \mathcal{VP}(T)\setminus\{0\}$. *Enfin comme* T *n'est pas surjectif (ce qui est toujours le cas pour un opérateur linéaire compact en dimension infinie), on a* $0 \in \sigma(T)$ *et donc* $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.

3. *La question précédente nous a donné les valeurs propres de* T *mais aussi les sous espaces propres correspondants. Cette question est alors une application immédiate de la section 2.2.2. Pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, *on pose* $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(p\pi x)$ *pour tout* $x \in [0,1]$. *La famille* $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}^\star\}$ *est une base hilbertienne de* $L^2(]0,1[)$. *On a donc, pour tout* $f \in L^2(]0,1[)$,

$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

that is to say $f = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \sin(p\pi\cdot)$, *la convergence de la série étant à prendre dans l'espace* $L^2(]0,1[)$.

Cette série n'est pas la série de Fourier de f. *En effet, la série de Fourier de* f *est obtenue avec les fonctions* $\sin(2p\pi\cdot)$ *et* $\cos(2p\pi\cdot)$ $(p \in \mathbb{Z})$. *La décomposition de* f *en série de Fourier correspond aussi à l'opérateur* $u \mapsto u''$, *mais avec des conditions périodiques* ($u(0) = u(1)$ *et* $u'(0) = u'(1)$) *au lieu des conditions de Dirichlet* ($u(0) = u(1) = 0$).

4. *Soit* $f \in E$. *La fonction* u *est solution du problème (2.17) si et seulement si* $T(f - \mu u) = u$, *that is to say*

$$T(u) + \frac{1}{\mu}u = \frac{T(f)}{\mu}. \tag{2.17}$$

D'après l'alternative de Fredholm, ce problème à une solution si et seulement si f *est orthogonal (dans* E*) au sous espace propre de* T *associé à* $(-1/\mu)$.

Ceci peut se redémontrer à partir des questions précédentes. En effet, on pose $b_n = (f/e_n)_E$ *(la famille* $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}^\star\}$ *étant la base hilbertienne de* E *donnée l̀a question 3), de sorte que* $f = \sum_{p=1}^{\infty} b_n e_n$ *(cette série étant convergente dans* E*). On a alors aussi*

$$T(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2\pi^2} e_n,$$

Cette série étant aussi convergente dans E.

Soit $u \in E$. *On pose* $a_n = (u/e_n)_E$, *on a ainsi*

$$T(u) + \frac{1}{\mu}u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\mu + n^2\pi^2}{\mu n^2\pi^2} e_n,$$

Cette série étant convergente dans E. *La fonction* u *est donc solution de (2.17) si et seulement si*

$$a_n(\mu + n^2\pi^2) = \mu b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Si $\mu \neq -n^2\pi^2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$, *il existe une et une seule solution à (2.17).*

Si il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ *t.q.* $\mu = p^2\pi^2$, *l'équation (2.17) a une solution si et seulement si* $b_p = 0$, *that is to say si et seulement si* f *est orthogonal (dans* E*) à* e_p. *Ce qui est équivalent à dire que* f *est orthogonal au sous espace propre de* T *associé à la valeur propre* $(-1/\mu)$.

Exercice 2.3 (1ere valeur propre de $-\Delta$)

On reprend les notations du théorème 2.12. Soit donc Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $Au = -\Delta u$ avec $D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Les μ_n sont ordonnées dans l'ordre croissant (that is to say $\mu_n \leq \mu_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$) et l'on a $\mu_1 > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = +\infty$.

Pour $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, on pose

$$Q(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega u^2(x) dx}.$$

1. Montrer que
$$\mu_1 = \min_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} Q(v).$$
2. Soit $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tel que $Q(u) = \mu_1$, montrer que $u \in D(A)$ et $Au = \mu_1 u$ p.p..
3. On suppose maintenant que Ω est connexe. Montrer que μ_1 est une valeur propre simple et que les fonctions propres associées à μ_1 ont un signe constant (that is to say que $Au = \mu_1 u$ implique $u \geq 0$ p.p. ou $u \leq 0$ p.p.). [On rappelle que si $u \in H_0^1(\Omega)$ on a aussi u^+, $u^- \in H_0^1(\Omega)$, lemme 2.22. On pourra alors comparer $Q(u)$ avec $Q(u^+)$ et $Q(u^-)$ si u^+ et u^- sont des fonctions non nulles p.p..]

Exercice 2.4 (Problème elliptique à coefficients non bornés)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et $p : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable t.q. $\inf\{p(x), x \in \Omega\} = a > 0$. On pose $H^1(p, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ t.q. $D_i u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $p\, D_i u \in L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}\}$.

On rappelle que $D_i u$ désigne la dérivée, au sens des dérivées par transposition, de u dans la direction x_i, la variable de $\mathbb{R}^N$ étant notée $x = (x_1, \ldots, x_N)^t$.

Pour $u \in H^1(p, \Omega)$, on définit $\|u\|$ par $\|u\|^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \|p\, D_i u\|_2^2$, avec $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

1. (Etude de l'espace fonctionnel.)
   (a) Montrer que $H^1(p, \Omega) \subset H^1(\Omega)$.
   (b) Montrer que $H^1(p, \Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|$, est un espace de Hilbert. [On pourra remarquer qu'une suite de Cauchy dans $H^1(p, \Omega)$ est aussi de Cauchy dans $H^1(\Omega)$.]

   On pose $H_0^1(p, \Omega) = H^1(p, \Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
2. (Espace fonctionnel, suite.) Montrer que $H_0^1(p, \Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(p, \Omega)$.
3. (solution faible.) Soit $h \in L^2(\Omega)$, montrer qu'il existe un et un seul u t.q.
$$u \in H_0^1(p, \Omega), \tag{2.18}$$
$$\int_\Omega p^2(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega h(x) v(x) dx, \ \forall v \in H_0^1(p, \Omega). \tag{2.19}$$
4. (Précisions…)
   (a) On suppose ici que $p^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$. Montrer que $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(p, \Omega)$.
   (b) On prend maintenant $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$. Donner un exemple de fonction p (avec $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et t.q. $\inf\{p(x), x \in \Omega\} > 0$) pour lequel $C_c^\infty(\Omega) \cap H_0^1(p, \Omega) = \{0\}$ (cette question est plus difficile).

Exercice 2.5 (Deux problèmes elliptiques emboités)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et M et N deux matrices de taille $d \times d$ à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a
$$M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \ \text{ et } \ N(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique u t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega N(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega (M(x)+N(x))\nabla w(x)\cdot\nabla v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{2.20}$$

avec w solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla w(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.21}$$

pour les questions suivantes, on note $T(f)$ cette unique solution de (2.20) avec w solution de (2.21).

2. Montrer que T est une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (that is to say que T est linéaire, continue et transforme les parties bornées de $L^2(\Omega)$ en parties relativement compactes de $L^2(\Omega)$).
3. On suppose dans cette question (et seulement dans cette question) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $M = \lambda N$. Montrer qu'il existe une matrice A, ne dépendant que de M et λ, tel que, si $u = T(f)$,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.22}$$

   Donner l'expression de A en fonction de M et λ.
4. On suppose dans cette question que $d = 2$ et $1 < p \le +\infty$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.20) avec w solution de (2.21).

   Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.20) avec w solution de (2.21)) est compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \le q < +\infty$
5. On suppose dans cette question que $d = 3$ et $p = 6/5$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.20) avec w solution de (2.21).

   Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.20) avec w solution de (2.21)) est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \le q < 6$.

Corrigé –

1. *Le théorème 2.6 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.21). Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on pose alors*

$$S(v) = \int_\Omega (M(x)+N(x))\nabla w(x)\cdot\nabla v(x)dx.$$

   L'application S est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, c'est donc un élément de $H^{-1}(\Omega)$. Le théorème 2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.20). Ce qui est bien le résultat demandé.
2. *La solution w de (2.21) dépend linéairement de f. Puis, la solution u de (2.20) dépend linéairement de w. On en déduit que u dépend linéairement de f et donc que l'application T est linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et donc aussi linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.*

   Si w est la solution de (2.21), on a, en prenant $v = w$ dans (2.21),

$$\alpha\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

   En utilisant l'inégalité de Poincaré (Lemme 2.5), il existe C_Ω, ne dépendant que Ω, tel que $\|w\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega\|w\|_{H_0^1(\Omega)}$. On a donc, avec $C_1 = C_\Omega/\alpha$,

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_1\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.23}$$

Comme M et N sont à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de M et N) tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|(M+N)\xi| \leq \beta|\xi| \text{ p.p.}.$$

On a donc, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et S définie dans la première question,

$$|S(v)| \leq \beta\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Si $u = T(f)$, on en déduit, en prenant $v = u$ dans (2.20),

$$\alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc, avec (2.23) et $C_2 = \beta C_1/\alpha$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci prouve que l'application $f \mapsto u$ est lináire continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Comme l'application $u \mapsto u$ est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (théorème 1.25), on en déduit que T est une une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

3. *On commence par remarquer que les hypothèses sur M et N imposent $\lambda > 0$. Puis, si $u = T(f)$, (2.20) et (2.21) donnent, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega (\lambda+1)M(x)\nabla w(x)\cdot\nabla v(x)dx = (\lambda+1)\int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Ce qui donne bien que u est solution de (2.22) avec $A = M/(\lambda+1)$.

4. *Soit $f \in L^p(\Omega)$. On note p' l'exposant conjugué de p, that is to say $p' = p/(p-1)$. Le théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.28) donne l'existence de C_p (ne dépendant en fait que de p) tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v \in L^{p'}(\Omega)$ et*

$$\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_p\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec l'inégalité de Hölder, on en déduit que l'application $v \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est un élément $H^{-1}(\Omega)$ et que

$$|\int_\Omega f(x)v(x)dx| \leq C_p\|f\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On peut alors reprendre (en les adpatant légèrement) les démonstrations des deux premières questions.
Le théorème 2.9 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.21) et on a $\alpha\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_p\|f\|_{L^p(\Omega)}$. Puis, le théorème 2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.20) et, avec β défini à la question 2, on obtient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta C_p}{\alpha^2}\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ceci donne que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^p(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Puis, comme l'application $u \mapsto u$ est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$ (voir la remarque 1.29), on en déduit que l'application $f \mapsto u$ est une une application linéaire compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$.

5. *La démonstration est ici très voisine de la précédente. On a ici $p = 6/5$ et donc le conjugué de p est $p' = 6 = 2^\star$. Soit $f \in L^{6/5}(\Omega)$. Le théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.28) donne l'existence de C (ne dépendant de rien) tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v \in L^6(\Omega)$ et*

$$\|v\|_{L^6(\Omega)} \leq C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec l'inégalité de Hölder, on en déduit que l'application $v \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est un élément $H^{-1}(\Omega)$ et que

$$|\int_\Omega f(x)v(x)dx| \leq C\|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Le théorème 2.9 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.21) et on a $\alpha\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}$. Puis, le théorème 2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.20) et, avec β défini à la question 2, on obtient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta C}{\alpha^2}\|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}.$$

Ceci donne que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^{6/5}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Puis, comme l'application $u \mapsto u$ est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ (théorème 1.28) et est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6 = 2^\star$ (voir la remarque 1.29), on en déduit que l'application $f \mapsto u$ est une application linéaire continue de $L^{6/5}(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et linéaire compacte de $L^{6/5}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6$.

Exercice 2.6 (Problème de Neumann)

Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne. On pose $H = \{u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u(x)dx = 0\}$. On rappelle que sur un tel ouvert, une fonction L^1_{loc} dont les dérivées (au sens des dérivées par transposition) sont nulles est nécessairement constante (that is to say qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. cette fonction soit égale à C p.p.), voir l'exercice 1.4.

1. (Inégalité de "Poincaré moyenne".) Montrer que H est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$ et que, sur H, la norme H^1 est équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$ définie par $\|u\|_m = \|(|\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)}$.
   [On pourra montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe C, ne dépendant que Ω, t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m$, pour tout $u \in H$.]
2. (Caractérisation de $(H^1(\Omega))'$.) Soit $T \in (H^1(\Omega))'$, Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$ t.q.
$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = a\int_\Omega u(x)dx + \int_\Omega F(x)\cdot\nabla u(x)dx,\ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.24}$$
   [On pourra considérer $T_{|_H}$ et utiliser une injection convenable de H dans $L^2(\Omega)^N$.]

   Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On cherche u solution de
$$\begin{aligned}&u \in H^1(\Omega),\\ &\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = a\int_\Omega v(x)dx + \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx,\ \forall v \in H^1(\Omega).\end{aligned} \tag{2.25}$$
3. (Existence et unicité.)
   (a) Si $a \neq 0$, montrer que (2.25) n'a pas de solution.
   (b) Si $a = 0$, montrer que (2.25) a une solution et que cette solution est unique si l'on demande qu'elle appartienne à H.
   (c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $a_{i,j} \in C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R})$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$, $F \in C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R}^N)$, Ω est de classe C^∞ et que la solution (appartenant à H) de (2.25) est aussi dans $C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R})$, montrer que $-\mathrm{div}(A\nabla u) = -\mathrm{div}F$, dans Ω, et que $A\nabla u\cdot\mathbf{n} = F\cdot\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est la normale à $\partial\Omega$, extérieure à Ω.
4. (Dépendance par rapport aux paramètres.) On suppose $a = 0$ et on note u la solution (appartenant à H) de (2.25). On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H$ est la solution de (2.25) avec A_n au lieu de A et F_n au lieu de F (et $a = 0$). On suppose que
   — $A_n = (a^{(n)}_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N}$ vérifie, pour tout n, les mêmes hypothèses que A avec un α indépendant de n,
   — $(a^{(n)}_{i,j})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, pour tout $i, j = 1, \ldots, N$,
   — $a^{(n)}_{i,j} \to a_{i,j}$ *p.p.*, quand $n \to \infty$, pour tout $i, j = 1, \ldots, N$,
   — $F_n \to F$ dans $L^2(\Omega)^N$, quand $n \to \infty$.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H, puis que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ (quand $n \to \infty$) et enfin que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$.
5. (Régularité H^2 par la technique des réflexions, cette question est indépendante de la précédente.). On suppose que $a = 0$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)\cdot v(x)dx$, pour tout $v \in H^1(\Omega)$. On note u la solution (appartenant à H) de (2.25). On suppose que $N = 2$ et que $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On pose $\Omega_s =$

$]-1,1[\times]0,1[$. On définit A, f et u sur Ω_s en posant $a_{i,j}(x_1,x_2) = a_{i,j}(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in]-1,0[\times]0,1[$ et $i=j$, $a_{i,j}(x_1,x_2) = -a_{i,j}(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in]-1,0[\times]0,1[$ et $i \neq j$, $f(x_1,x_2) = f(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in]-1,0[\times]0,1[$ et $u(x_1,x_2) = u(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in]-1,0[\times]0,1[$. Montrer que u est solution de (2.25), avec Ω_s au lieu de Ω.

En utilisant ainsi plusieurs réflexions, montrer (en se ramenant au théorème de régularité locale vu en cours) que $u \in H^2(\Omega)$ dans le cas $A(x) = Id$ pour tout $x \in \Omega$.

Corrigé –

1. *Pour $u \in H^1(\Omega)$, on pose $S(u) = \int_\Omega u(x)dx$. L'application S est bien définie sur $H^1(\Omega)$ (car $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$). Elle est linéaire. Enfin, elle est continue car*

$$S(u) \leq \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\textit{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\textit{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}},$$

où $\textit{mes}(\Omega)$ est la mesure de Lebesgue (N-dimensionnelle) de Ω. Comme $H = \mathrm{Ker}(S)$, on en déduit que H est s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$.

Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a $\|\,|\nabla u|\,\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\,|\nabla u|\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$. On a donc $\|u\|_m \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. Pour montrer que $\|\cdot\|_m$ est équivalente dans H à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, il suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$ (ne dépendant que de Ω) t.q.

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m \text{ pour tout } u \in H. \tag{2.26}$$

(On aura alors $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (C^2+1)\|u\|^2_m$ pour tout $u \in H$.)

Pour montrer (2.26), on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite déléments de H, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n\|u_n\|_m \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En remplaçant u_n par $\frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$, on peut supposer $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On a alors aussi $\|u_n\|_m \leq 1/n$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Par les théorèmes de compacité vu au chapitre 1 (section 1.6), on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. On peut supposer (après extraction d'une sous suite) qu'il existe $u \in L^2(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, quand $n \to +\infty$. Comme $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On remarque aussi que les dérivées (par transposition) de u_n convergent vers les dérivées de u dans $\mathcal{D}^\star$. Or, de $\|u_n\|_m \leq 1/n$ on déduit $\nabla u_n \to 0$ dans $L^2(\Omega)^N$. Comme la convergence L^2 entraîne la convergence dans $\mathcal{D}^\star$, on a donc $\nabla u = 0$. Ceci montre que u est constante sur Ω (exercice 1.4). Comme $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ et que $u_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $u \in H$ et donc $\int_\Omega u(x)dx = 0$. On en déduit que $u = 0$ p.p., ce qui est impossible car $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

2. *Pour $v = (v_1,\ldots,v_N)^t \in L^2(\Omega)^N$, on pose $\|v\|_{L^2(\Omega)^N} = \int_\Omega |v(x)|^2dx$, de sorte que $L^2(\Omega)^N$ muni de cette norme est un espace de Hilbert. Pour $u \in H$, on pose $J(u) = \nabla u = (D_1u,\ldots,D_Nu)^t$. L'application J est alors une isométrie de H (muni de la norme $\|\cdot\|_m$) dans une partie de $L^2(\Omega)^N$, notée $\mathrm{Im}(J)$.*

   Soit $v \in \mathrm{Im}(J)$, il existe un unique $u \in H$ t.q. $v = J(u)$. On pose $S(v) = \langle T,u\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)}$. Comme J est une isométrie et que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est équivalente dans H à la norme $\|\cdot\|_m$, l'application S est linéaire continue de $\mathrm{Im}(J)$, s.e.v. de $L^2(\Omega)^N$, dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut donc prolonger S en $\tilde{S}$, élément du dual topologique de $L^2(\Omega)^N$. Parle théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert, il existe alors $F \in L^2(\Omega)^N$ t.q.

$$\tilde{S}(v) = \int_\Omega F(x)\cdot v(x)dx.$$

   On a donc, pour tout $u \in H$,

$$\langle T,u\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)} = \int_\Omega F(x)\cdot\nabla u(x)dx.$$

   On pose maintenant

$$a = \frac{1}{\textit{mes}(\Omega)}\langle T,1_\Omega\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)},$$

   (où 1_Ω désigne la fonction constante égale à 1 dans Ω).

Pour $u \in H^1(\Omega)$, on a $u = u - m + m$ (ou, plus rigoureusement, $u = u - m1_\Omega + m1_\Omega$ p.p.) avec

$$m = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega u(x)dx.$$

Comme $u - m \in H$ et $\nabla(u-m) = \nabla u$ p.p. on a $\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_\Omega F(x) \cdot \nabla u(x)dx$ et donc

$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \langle T, u-m\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + m\langle T, 1_\Omega\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_\Omega F(x)\cdot\nabla u(x)dx + a\int_\Omega u(x)dx.$$

3.(a) On suppose que u est solution de (2.25). En prenant $v = 1_\Omega$ dans (2.25), on a alors

$$0 = a\, mes(\Omega) + 0.$$

Ce qui prouve que $a = 0$.

(b) On applique le lemme de Lax-Milgram (lemme 2.4) dans l'espace de Hilbert H (muni de la norme $\|\cdot\|_m$) avec

$$a(u,v) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx,$$

et

$$T(v) = \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx.$$

La continuité de a vient du fait que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout i, j. La coercivité de a vient de l'existence de $\alpha > 0$ donnée dans les hypothèses sur A. Enfin, la continuité de T vient du fait que $F \in L^2(\Omega)^N$.

On obtient ainsi un unique $u \in H$ t.q. (2.25) soit vrai pour tout $v \in H$. Comme (2.25) est aussi vrai si v est une fonction constante, on obtient aussi l'existence et l'unicité de $u \in H$ t.q. (2.25) soit vrai pour tout $v \in H^1(\Omega)$.

(c) On prend tout d'abord $v \in C_c^\infty(\Omega)$ dans (2.25) (avec $a = 0$). La régularité de A, F, u et v nous permet d'intégrer par parties (la régularité de Ω ne sert à rien pour cette étape). On obtient

$$\int_\Omega (-\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + \mathrm{div}(F(x)))v(x)dx = 0 \text{ pour tout } v \in C_c^\infty(\Omega).$$

On en déduit que $-\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + \mathrm{div}(F(x)) = 0$ p.p. (par le lemme fondamental 1.1) puis, par continuité de la fonction $-\mathrm{div}(A\nabla u) + \mathrm{div}(F)$, que $-\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + \mathrm{div}(F(x)) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

On prend maintenant des fonctions $v \in C^\infty(\bar\Omega)$ dans (2.25). On peut ici aussi intégrer par parties (on utilise ici la régularité de Ω). On obtient

$$\int_{\partial\Omega} (A(x)\nabla u(x) - F(x))\cdot n(x)v(x)d\gamma(x) = 0 \text{ pour tout } v \in C^\infty(\bar\Omega),$$

où $\partial\Omega$ est le bord de Ω et $d\gamma(x)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure $(N-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

Par une technique de "cartes locales", on peut se ramener au cas du lemme fondamental (lemme 1.1) pour en déduire que $(A\nabla u - F)\cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$ puis partout sur $\partial\Omega$. Mais, il est plus rapide de voir qu'il est possible de choisir v t.q. $v = (A\nabla u - F)\cdot n$ sur $\partial\Omega$. On obtient ainsi directement $(A\nabla u - F)\cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

Exercice 2.7 (Norme H^2 sur $\mathbb{R}^N$)

Soit $N \geq 1$. Cet exercice montre que dans $\mathbb{R}^N$ la norme H^2 est équivalente à la somme de la norme L^2 de la fonction et de la norme L^2 de son laplacien. Cette équivalence est utilisée pour étudier un problème avec le bilaplacien.

1. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$

(a) Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que $\Delta u - u = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si u vérifie

$$\int \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int u(x)v(x)dx = \int f(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \text{ pour tout } v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.27}$$

(b) Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ solution de (2.27) et que $\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}$.

2. Soit $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer qu'il existe C_1 et C_2 strictement positifs, ne dépendant (éventuellement) que de N, tels que
$$C_1(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}) \leq \|u\|_{H^2} \leq C_2(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}).$$

3. On note $H^{-2}(\mathbb{R}^N)$ le dual (topologique) de $H^2(\mathbb{R}^N)$. Soit $f \in H^{-2}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda > 0$.

(a) Soit $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $\Delta(\Delta)u + \lambda u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si u est vérifie
$$\int \Delta u(x)\Delta v(x)dx + \lambda \int u(x)v(x)dx = \langle f, v\rangle_{H^{-2},H^2}. \tag{2.28}$$

(b) Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ solution de (2.28)

Exercice 2.8 (Modélisation d'un problème de contact)

On pose $B = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 2\}$, $I =]-1, 1[$ $(\subset \mathbb{R})$, et $\Omega = B \setminus [-1, 1] \times \{0\}$ (Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$). On note $\partial B = \overline{B} - B$. On rappelle que $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^2$ et $x \cdot y$ le produit scalaire correspondant de x et y $(\in \mathbb{R}^2)$.
Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^\infty(I)$ t.q. $g \geq 0$ a.e. (sur I). On s'intéresse au problème suivant.

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x) &= f(x),\ x \in \Omega, && (2.29)\\
u(x) &= 0,\ x \in \partial B, && (2.30)\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^+) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^-),\ x \in I, && (2.31)\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^+) &= g(x)(u(x, 0^+) - u(x, 0^-)),\ x \in I. && (2.32)
\end{aligned}$$

1. (Recherche d'une formulation faible)
On suppose, dans cette question, que f est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et g une fonction continue sur I. On note $\Omega_+ = \Omega \cap \{(x, y),\ y > 0\}$ et $\Omega_- = \Omega \cap \{(x, y),\ y < 0\}$. Soit $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $u_{|\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$ et $u_{|\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$. Noter alors que toutes les expressions dans (2.29)-(2.32) ont bien un sens. On a, par exemple, $u(x, 0^+) = \lim_{y\to 0,\, y>0} u(x, y)$.
Montrer que u est solution "classique" de (2.29)-(2.32) (c'est-à-dire vérifie (2.29) pour tout $x \in \Omega$, (2.30) pour tout $x \in \partial B$ et (2.31),(2.32) pour tout $x \in I$) si et seulement si u vérifie :
$$\begin{aligned}
&u(x) = 0,\ \forall x \in \partial B,\\
&\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx +\\
&\int_I g(x)(u(x, 0^+) - u(x, 0^-))(v(x, 0^+) - v(x, 0^-))dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,
\end{aligned} \tag{2.33}$$
pour tout $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $v_{|\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$, $v_{|\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$ et $v(x) = 0$ pour tout $x \in \partial B$. Noter que dx désigne l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue (1 ou 2 dimensionnelle).

2. (Construction de l'espace fonctionnel) On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\rho(x) = 0$, si $|x| \geq 1$, et d'intégrale 1 (sur $\mathbb{R}^2$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n^2\rho(nx)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

(a) (Trace sur ∂B, sans "cartes locales") Soit $u \in H^1(\Omega)$. Pour $n > 5$, on pose $u_n(x) = \int_\Omega u(y)\rho_n(x(1-\frac{1}{n}) - y)dy$, pour $x \in D$, avec $D = \{x \in B, \frac{3}{2} < |x| < 2\}$. Montrer que $u_n \in C^\infty(\overline{D})$, et que $u_n \to u_{|D}$, dans $H^1(D)$, quand $n \to \infty$.

En déduire qu'il existe un opérateur linéaire continu γ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0, 2\pi[)$ t.q. $\gamma(u)(\theta) = u(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ a.e. en $\theta \in]0, 2\pi[$ si $u \in H^1(\Omega)$ et u est continue sur $\overline{B} \setminus [-1, 1] \times \{0\}$.

(b) Montrer qu'il existe γ_+ [resp. γ_-] linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(I)$ t.q. $\gamma_+(u)(x) = u(x, 0+)$ [resp. $\gamma_-(u)(x) = u(x, 0-)$] a.e. en $x \in I$ si $u \in H^1(\Omega)$ et $u_{|\Omega_+}$ est continue sur $\overline{\Omega_+}$ [resp. $u_{|\Omega_-}$ est continue sur $\overline{\Omega_-}$].

3. (Coerci(ti)vité)
On pose $H = \text{Ker}\gamma$ (où γ est défini à la question précédente).
Montrer qu'il existe C t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. [On pourra, par exemple, remarquer que $u_{|\Omega_+} \in H^1(\Omega_+)$ et $u_{|\Omega_-} \in H^1(\Omega_-)$]
4. (Existence et unicité de solutions faibles)
On rappelle que $H = \text{Ker}\gamma$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de (2.34).

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_I g(x)(\gamma_+u(x) - \gamma_-u(x))(\gamma_+v(x) - \gamma_-v(x))dx \\ \displaystyle= \int_\Omega f(x)v(x)dx, \ \forall v \in H. \end{array}\right. \tag{2.34}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (2.34) avec g t.q. $g(y) = n$, pour tout $y \in I$. Montrer que $u_n \to u$ (en un sens à préciser), quand $n \to \infty$, où u est la (unique) solution (faible) de $-\Delta u = f$ dans B, $u = 0$ sur ∂B.

Exercice 2.9 (De Fourier à Dirichlet. . .)

Soient $\sigma \ge 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{array}{l} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^N_+, \\ -\partial_1 u(0, y) + \sigma u(0, y) = g(y), \ y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{array} \tag{2.35}$$

1. Donner une définition de solution "classique" de (2.35) et de solution "faible" de (2.35).
2. Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible de (2.35).
3. Montrer que si $g = 0$ presque partout, la solution faible de (2.35) (trouvée à la question précédente) appartient à $H^2(R^N_+)$.
4. Toujours lorsque $g = 0$ presque partout, on note u_n la solution forte associée à $\sigma = n$. Montrer que u_n converge dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ vers u solution faible de :

$$\begin{array}{l} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^N_+, \\ u(0, y) = 0, \ y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{array} \tag{2.36}$$

Exercice 2.10 (Equation de Schrödinger)

Soit $N \ge 1$. On note Ω la boule unité de $\mathbb{R}^N$ (en fait, les résultats de cet exercice restent vrais si Ω un ouvert borné "assez régulier" de $\mathbb{R}^N$).

Pour $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, on s'intéresse au système :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 &= f_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.37}$$

avec diverses conditions aux limites.

1. On considère dans cette première question la condition aux limites :

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2.38}$$

Soit $f_1,\, f_2 \in L^2(\Omega)$, on dit que $(u_1,\, u_2)$ est solution faible du problème (2.37)-(2.38) si

$$\begin{aligned} & u_1 \in H_0^1(\Omega),\ u_2 \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \nabla u_1(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega u_2(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f_1(x)\varphi(x)dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \nabla u_2(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx - \int_\Omega u_1(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f_2(x)\varphi(x)dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.39}$$

(a) Montrer que le problème (2.39) admet une et une seule solution. [Utiliser l'espace $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.]

(b) Montrer que le problème (2.37)-(2.38) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et les équations (2.37) sont satisfaites $p.p.$ sur Ω. [Utiliser, en particulier, la question précédente et un théorème de régularité vu en cours. Ne pas oublier de montrer aussi l'unicité.]

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Montrer que $u_1,\ u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

(c) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution de (2.39), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

2. On considère dans cette deuxième question la condition aux limites :

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2.40}$$

où n désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieure à Ω.

Pour résoudre le problème (2.37)-(2.40), on va introduire un paramètre, $n \in \mathbb{N}^\star$, destiné à tendre vers l'infini.

Soit $f_1,\, f_2 \in L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on s'intéresse au système :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 + \frac{1}{n}u_1 &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 + \frac{1}{n}u_2 &= f_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.41}$$

avec la condition aux limites (2.40).

On dit que $(u_1,\, u_2)$ est solution faible du problème (2.41)-(2.40) si

$$\begin{aligned}
&u_1 \in H^1(\Omega),\ u_2 \in H^1(\Omega),\\
&\int_\Omega \nabla u_1(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega (u_2(x)+\frac{1}{n}u_1(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega f_1(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi\in H^1(\Omega),\\
&\int_\Omega \nabla u_2(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega (\frac{1}{n}u_2(x)-u_1(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega f_2(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi\in H^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Noter aussi que $(u_1,\, u_2)$ est solution faible du problème (2.37)-(2.40) si $(u_1,\, u_2)$ est solution de (2.42) en remplaçant $\frac{1}{n}$ par 0.

Soit $f_1,\, f_2 \in L^2(\Omega)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

Montrer que le problème (2.42) admet une et une seule solution, que l'on note $(u_1^{(n)}, u_2^{(n)})$ dans la suite.

(b) Montrer que :

$$\|u_1^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_2^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_2\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En déduire que les suites $(u_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$, et $(u_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$.

(c) Montrer qu'il existe une et une seule solution au problème (2.42) obtenu en remplaçant $1/n$ par 0, c'est à dire une et une solution faible au problème (2.37)-(2.40). [Pour l'existence, utiliser les suites $(u_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$, et $(u_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de la question précédente et faire tendre n vers $+\infty$. Montrer ensuite l'unicité.]

(d) Montrer que le problème (2.37)-(2.40) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega)$, les équations (2.37) sont satisfaites $p.p.$ sur Ω et les équations (2.40) sont satisfaites $p.p.$ (pour la mesure de lebesgue $N-1$-dimensionnelle) sur $\partial\Omega$ en utilisant l'opérateur "trace" (vu en cours) de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ pour donner un sens à $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial n}$.

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. Montrer que $u_1,\, u_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

(e) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution faible de (2.37)-(2.40), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T\,:\, f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

3. De manière similaire, résoudre le problème (2.37) avec la condition aux limites :

$$u_1 = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exercice 2.11 (A la limite de H^{-1})

Partie I, décomposition dans $H_0^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$.

1. Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On note $\varphi(u)$ la fonction (de Ω dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u(x))$. Montrer que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et que $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ $p.p.$ pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ (où $\varphi'(u)$ désigne la fonction $x \mapsto \varphi'(u(x))$). [Reprendre la méthode vue en cours.]

On définit maintenant φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
&\varphi(s) = s, \text{ pour } 0 \leq s \leq 1,\\
&\varphi(s) = -\tfrac{s^2}{2} + 2s - \tfrac{1}{2}, \text{ pour } 1 < s \leq 2,\\
&\varphi(s) = \tfrac{3}{2}, \text{ pour } 2 < s,\\
&\varphi(s) = -\varphi(-s), \text{ pour } s < 0.
\end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, On définit φ_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_k(s) = k\varphi(\frac{s}{k})$ pour $s \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\varphi_k(s) \to s$ et $\varphi_k'(s) \to 1$ quand $k \to \infty$ et que $|\varphi_k(s)| \leq |s|$, $\varphi_k'(s) \leq 1$.
3. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $\varphi_k(u) \in H_0^1(\Omega)$, pour tout $k \in N^\star$, et que $\varphi_k(u) \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$, quand $k \to \infty$.
4. En déduire que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_1 \in L^\infty(\Omega)$ et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = u_1 + u_2$ et $\|u_2\|_{H_0^1} \leq \varepsilon$.

Partie II, Inégalité de Trudinger-Möser

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On admet qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω, t.q.

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\sqrt{q}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega), \ \forall q \in [1, \infty[.$$

(Noter que cette inégalité a été démontrée en T.D. avec q au lieu de $\sqrt{q}$.)

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Montrer qu'il existe $\sigma > 0$ et $a > 0$, ne dépendant que de C (donné ci dessus) t.q. $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ et $\|e^{\sigma u^2}\|_{L^1(\Omega)} \leq a$. [Développer e^s en puissances de $s \ldots$.]
2. En utilisant la partie I (et la question précédente), Montrer que $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\sigma > 0$. En déduire que $e^{\sigma u^2} \in L^p(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, tout $\sigma > 0$ et tout $p \in [1, \infty[$.

Partie III, sur la résolution du problème de dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f\sqrt{|\ln(|f|)|} \in L^1(\Omega)$.

1. (Préliminaire.) Soit $\sigma > 0$. Montrer qu'il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$, ne dépendant que de σ, t.q.

$$st \leq e^{\sigma s^2} + \beta t\sqrt{|\ln t|} + \gamma t, \ \forall s, t \in \mathbb{R}_+^\star.$$

   [On pourra, par exemple, remarquer que $st \leq \max\{\beta t\sqrt{|\ln t|}, se^{(s^2/\beta^2)}\}$ pour tout $\beta > 0$ (et tous $s, t > 0$). Puis, choisir β (en fonction de σ) et conclure.]
2. Montrer que $fu \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et que l'application $T \ : \ u \mapsto \int_\Omega f(x)u(x)dx$ est un élément de $H^{-1}(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

Partie IV, contre-exemple

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que $0 \in \Omega$ et on se donne $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ t.q. $B_{2\delta} = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 2\delta\} \subset \Omega$.

1. Soit $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u(x) = (\ln|x|)^\gamma$ $p.p.$ sur B_δ. [On pose $v(x) = (\ln(|x|)^\gamma$. On rappelle qu'on a vu en T.D. que $v \in H^1(B_{2\delta})$. Il n'est pas demandé de redémontrer ce résultat.]
2. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et $fu \notin L^1(\Omega)$ pour certains $u \in H_0^1(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et t.q. il n'existe pas $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

Exercice 2.12 (Décomposition de Hodge)
Soient Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $f \in (L^2(\Omega))^N$.
Montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

En déduire qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ et $g \in (L^2(\Omega))^N$ t.q. $f = \nabla u + g$, p.p. dans Ω et $\int_\Omega g(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$.
On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega = (]0, 1[)^N$. Montrer que $\operatorname{div} g = 0$ sur Ω et que $g \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $(N-1)-$dimensionnelle) sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à $\partial\Omega$.

Corrigé – *L'exercice (corrigé) 2.6 donne l'existence de $u \in H^1(\Omega)$ t.q.*

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

On peut aussi ajouter la condition $\int_\Omega u(x) dx = 0$ et on a alors existence et unicité de u (voir l'exercice 2.6).

On pose alors $g = f - \nabla u$. Les fonctions u et g vérifient les conditions demandées.

On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega = (]0, 1[)^N$. On a

$$\int_\Omega g(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in H^1(\Omega).$$

On raisonne comme dans l'exercice 2.6. En prenant $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, le lemme fondamental (lemme 1.1) nous permet de montrer que $\operatorname{div}(g) = 0$ partout dans Ω. Puis, en prenant $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, une intégration par parties (plutôt plus facile que dans l'exercice 2.6) donne

$$\int_{\partial\Omega} g(x) \cdot n(x) \varphi(x) d\gamma(x) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

De cette égalité, on déduit que $g \cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$.
Ceci peut se démontrer si $N = 2$ de la manière suivante : $d\gamma(x) = dx_1$ ou dx_2, selon les parties de $\partial\Omega$ (avec $x = (x_1, x_2)^t$). Avec $g = (g_1, g_2)^t$, on en déduit que $g_1(x) = 0$ partout sur $\{0\} \times [0, 1] \cup \{1\} \times [0, 1]$ et $g_2(x) = 0$ partout sur $[0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1] \times \{1\}$. (Ce qui donne bien $g \cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$.)
La généralisation au cas $N \geq 1$ ne pose pas de difficulté.

Exercice 2.13 (Problème de Stokes, vitesse)
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N;$ $\operatorname{div} u = 0$ p.p. dans $\Omega\}$. On rappelle que u est solution du problème de Stokes si :

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H, \ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx, \ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \quad (2.43)$$

On se propose ici de montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.43) par une méthode de pénalisation. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} &u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N, \\ &\int_\Omega (\nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) + n(\operatorname{div} u(x)) D_i v(x)) dx = \int_\Omega f_i(x) v(x) dx, \ \forall v = H_0^1(\Omega), \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

1. Montrer que (2.43) admet au plus une solution.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution à (2.44). [Utiliser le lemme de Lax-Milgram sur $(H_0^1(\Omega))^N$.] On note, dans la suite, $u^{(n)}$ cette solution.
3. Montrer que la suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(H_0^1(\Omega))^N$ et que la suite $(\sqrt{n}\,\mathrm{div}\,u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.
4. Montrer que, après extraction éventuelle d'une sous suite, $u^{(n)} \to u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \to \infty$, où u est solution de (2.43). En déduire (avec la question 1) que (2.43) admet une unique solution, notée u, et que $u^{(n)} \to u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \to \infty$ (sans extraction de sous suite).

Exercice 2.14 (Conditions aux limites de Vencel)

Notations et Rappels du cours

On note $H_p^1(0,2\pi) = \{u \in H^1(]0,2\pi[);\, u(0) = u(2\pi)\}$ (on rappelle que, si $u \in H^1(]0,2\pi[)$, u admet toujours un représentant continu sur $[0,2\pi]$ et on identifie u avec ce représentant continu).

Soit $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < 1\}$. On rappelle qu'il existe une application $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial B)$, linéaire, continue et t.q. $\gamma(u) = u$ p.p. sur ∂B si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{B},\mathbb{R})$.

Si $w \in L^2(\partial B)$, on définit $j(w) \in L^2(]0,2\pi[)$ par $j(w)(\theta) = w(\cos\theta, \sin\theta)$, pour $\theta \in [0,2\pi[$. L'application j est donc une isométrie de $L^2(\partial B)$ sur $L^2(]0,2\pi[)$, de sorte que $\overline{g} = jo\gamma$ est linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0,2\pi[)$.

On pose $H = \{u \in H^1(\Omega)\,;\, \overline{g}(u) \in H_p^1(0,2\pi)\}$. On munit H du produit scalaire $(u/v)_H = (u/v)_{H^1(\Omega)} + (\overline{g}(u)/\overline{g}(v))_{H_p^1(0,2\pi)}$.

Partie I (Préliminaire d'analyse fontionnelle)

1. Montrer que $H_p^1(0,2\pi)$ est une espace de Hilbert.
2. Montrer que H est une espace de Hilbert.

Partie II (Conditions aux limites de Vencel)

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$, on définit r et θ par $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\theta \in [0,2\pi[$ t.q. $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Pour $u \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus (0,0),\mathbb{R})$, on pose $u_r(x,y) = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ et $u_\theta(x,y) = -y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$. (Dans la suite, on pose $u_{\theta\theta} = (u_\theta)_\theta$, si $u \in C^2(\overline{B},\mathbb{R})$.)

Pour f et g données, on s'intéresse au problème :

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) + u(x,y) &= f(x,y),\ (x,y) \in B, && (2.45)\\
u_r(x,y) - u_{\theta\theta}(x,y) + u(x,y) &= g(x,y),\ (x,y) \in \partial B. && (2.46)
\end{aligned}
$$

Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on appelle "solution faible" de (2.45)-(2.46) une solution du problème suivant :

$$u \in H, \tag{2.47}$$

$$
\begin{aligned}
\int_B \Big(\sum_i D_i u(z) D_i v(z) + u(z)v(z)\Big)dz + \int_0^{2\pi} (D\overline{g}(u)(\theta) D\overline{g}(v)(\theta) + \overline{g}(u)(\theta)\overline{g}(v)(\theta))d\theta \\
= \int_B f(z)v(z)dz + \int_0^{2\pi} j(g)(\theta) j(\gamma(v))(\theta)d\theta,\ \forall v \in H.
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

1. Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.47)-(2.48).
2. (Question plus difficile) On retire, dans cette question, "uv" dans la 1ère intégrale de (2.48). Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe encore une et une seule solution de (2.47)-(2.48).

3. Soient $f \in C(\overline{B}, \mathbb{R})$ et $g \in C(\partial B, \mathbb{R})$. Soit $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$. Montrer que u est solution au sens "classique" de (2.45)-(2.46) (c.a.d. vérifie (2.45) pour tout $(x, y) \in \overline{B}$ et (2.46) pour tout $(x, y) \in \partial B$) si et seulement si u est solution faible de (2.45)-(2.46).
4. Pour $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on note $T(f, g) = (u, \gamma(u)) \in L^2(B) \times L^2(\partial B)$, où est l'unique solution faible de (2.45)-(2.46). Montrer que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de $L^2(B) \times L^2(\partial B)$ dans lui-même.

Exercice 2.15 (problème de Stokes, vitesse et pression)
Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On s'intéresse ici au problème de Stokes, that is to say à trouver $u = (u_1, \ldots, u_N)^t$ et p solution de

$$\begin{aligned} &-\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega,\\ &\operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega,\\ &u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Noter que la première équation de (2.49) est vectorielle.
On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N ; \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On appelle solution faible de (2.49) un couple (u, p) solution de

$$\begin{aligned} &u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ p \in L^2(\Omega),\\ &\sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx - \int p(x) \operatorname{div} v(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx\\ &\qquad\qquad\text{pour tout } v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N. \end{aligned} \tag{2.50}$$

On pourra remarquer qu'une solution classique (u, p) de (2.49) est solution de (2.50).

Partie I, existence et unicité de u
Montrer que, si (u, p) est une solution classique de (2.49), u est alors solution de

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx,\ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \tag{2.51}$$

On montre dans cette pemière partie que (2.51) a une et une seule solution et que si (u, p) est solution de (2.50), u est alors l'unique solution de (2.51).

1. Montrer que H est un s.e.v. fermé de $(H_0^1(\Omega))^N$.
2. Montrer que (2.51) admet une et une seule solution. [Utiliser le lemme de Lax-Milgram.]
3. Soit (u, p) une solution de (2.50). Montrer que u est l'unique solution de (2.51).

Soit u la solution de (2.51). La suite de l'exercice consiste à trouver p pour que (u, p) soit solution de (2.50).

Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle
Soit E et F deux espaces de Hilbert (réels). On note $(\cdot|\cdot)_E$ (resp. $(\cdot|\cdot)_F$) le produit scalaire dans E (resp. F). Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F. On note $A^\star$ l'opérateur adjoint de A. L'opérateur $A^\star$ est un opérateur linéaire continu de F dans E. Pour tout $g \in F$, $A^\star g$ est l'unique élément de E défini par

$$(A^\star g|u)_E = (g|Au)_F \text{ pour tout } u \in E.$$

(Noter que l'existence et l'unicité de $A^\star g$ est donnée par le théorème de représentation de Riesz.)

1. Montrer que Ker$A = (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$.
   (On rappelle que si $G \subset E$, $G^\perp = \{u \in E, (u|v)_E = 0$ pour tout $v \in G\}$.)
2. Montrer que $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \overline{\mathrm{Im}A^\star}$.

Partie III, Existence et unicité partielle de p

Dans cette partie, on va utiliser le lemme suivant (souvent attribué à J. Nečas, 1965) que nous admettons.

Lemme 2.31 *Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $q \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega q(x)dx = 0$. Il existe alors $v \in (H_0^1(\Omega))^N$ t.q. $\mathrm{div}(v) = q$ p.p. dans Ω et*

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)},$$

où C ne dépend que de Ω.

On prend ici $E = H_0^1(\Omega)^N$ et $F = L^2(\Omega)$. Pour $u \in E$ on pose $Au = \mathrm{div}\, u$, de sorte que A est un opérateur linéaire continu de E dans F.

1. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F et $v \in E$ t.q. $A^\star p_n \to v$ dans E quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = p_n - a_n$, où a_n est la moyenne de p_n dans Ω.
   (a) Montrer que $A^\star p_n = A^\star q_n$.
   (b) Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F. [Utiliser le lemme 2.31.]
   (c) Montrer que $v \in \mathrm{Im}A^\star$.
2. Montrer que $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{Im}A^\star$ et que Ker$A = H$.
3. On rappelle que le produit scalaire dans E est défini par

$$(u/v)_E = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx.$$

   On définit $T_f \in E$ par $(T_f|v)_E = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx$ pour tout $v \in E$. Soit u la solution de (2.51).
   (a) Montrer que $u - T_f \in H^\perp$. En déduire que $u - T_f \in \mathrm{Im}A^\star$.
   (b) Montrer qu'il existe $p \in F$ t.q. (u, p) est solution de (2.50).
4. Soit (u_1, p_1) et (u_2, p_2) deux solutions de (2.50). Montrer que $u_1 = u_2 = u$ (où u est l'unique solution de (2.51)) et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p..

Corrigé –

Partie I, existence et unicité de u

Soit (u, p) est une solution classique de (2.49). On remarque tout d'abord que $u \in H$. Puis, pour $v \in H$, on multiplie la première équation de (2.49) par v et on intègre sur Ω. Le fonctions u et v sont suffisamment régulières pour intégrer par parties et obtient ainsi l'équation (2.51). Ceci montre que u est alors solution de (2.51).

1. *Pour $u \in H_0^1(\Omega)^N$, on pose $d(u) = \mathrm{div}(u)$. L'application d est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)^N$ dans $L^2(\Omega)$. Comme $H = \mathrm{Ker}\, d$, on en déduit que H est un s.e.v. fermé de $H_0^1(\Omega)^N$.*
2. *Il suffit ici d'appliquer le lemme de Lax-Milgram, lemme 2.4 (ou le théorème de Riesz dans les espaces de Hilbert) en remarquant que H est un espace de Hilbert (H est muni de la norme naturelle de $H_0^1(\Omega)^N$), avec a et T définis ainsi :*

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx,$$

   et

$$T(v) = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx.$$

3. *Pour $v \in H$, on a $\mathrm{div}(v) = 0$ p.p. dans Ω et donc $\int_\Omega \mathrm{pdiv}(v)dx = 0$. On en déduit que u est solution de (2.51). Par la question précédente, la fonction (vectorielle) u est donc l'unique solution de (2.51).*

Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle

1. *Soit $u \in \mathrm{Ker}A$ (on a donc $Au = 0$). Pour $v \in \mathrm{Im}A^\star$, il existe $g \in F$ t.q. $v = A^\star g$, on a donc*
$$(v|u)_E = (A^\star g|u)_E = (g|Au)_F = 0.$$
Ce qui montre que $u \in (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$. On a donc $\mathrm{Ker}A \subset (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$.

Récirpoquement, soit $u \in (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$. On a alors, en posant $f = Au$,
$$(Au|Au)_F = (f|Au)_F = (A^\star f|u)_E = 0,$$
car $A^\star f \in \mathrm{Im}A^\star$. Donc, $Au = 0$, that is to say $u \in \mathrm{Ker}A$. Ceci donne $(\mathrm{Im}A^\star)^\perp \subset \mathrm{Ker}A$.

Finalement, on a bien montré que $(\mathrm{Im}A^\star)^\perp = \mathrm{Ker}A$.

2. *Si F est un s.e.v. fermé d'un espace de Hilbert H, on a toujours $H = F \oplus F^\perp$. D'autre part, si $G \subset H$, on a $G^\perp = \bar{G}^\perp$.*

Si F est un s.e.v. d'un espace de Hilbert H, on a donc
$$H = \bar{F} \oplus F^\perp \ \text{ et } \ H = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp.$$
Ceci permet de prouver que $(F^\perp)^\perp = \bar{F}$.

On applique ici ce résutat avec $F = \mathrm{Im}A^\star$, on obtient (avec la question précédente)
$$\overline{\mathrm{Im}A^\star} = ((\mathrm{Im}A^\star)^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker}A)^\perp.$$

Partie III, Existence et unicité partielle de p

1.(a) *Soit $v \in E$. On a*
$$(A^\star p_n|v)_E = (p_n|Av)_F = \int_\Omega p_n \mathrm{div}(v)dx,$$
et
$$(A^\star q_n|v)_E = (q_n|Av)_F = \int_\Omega q_n \mathrm{div}(v)dx = \int_\Omega p_n \mathrm{div}(v)dx - a_n \int_\Omega \mathrm{div}(v)dx.$$
Comme $v \in H_0^1(\Omega)^N$, on a (en intégrant par parties) $\int_\Omega \mathrm{div}(v)dx = 0$ et donc
$$(A^\star p_n|v)_E = (A^\star q_n|v)_E \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^N.$$
Ceci montre bien que $A^\star p_n = A^\star q_n$.

(b) *Par le lemme 2.31, il existe $v_n \in H_0^1(\Omega)^N$ t.q. $\mathrm{div}(v_n) = q_n$ p.p. dans Ω et $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q_n\|_{L^2(\Omega)}$. On obtient alors*
$$(A^\star q_n|v_n)_E = \int_\Omega q_n \mathrm{div}(v_n)dx = \int_\Omega q_n^2 dx = \|q_n\|_F^2.$$
La question précédente donne $A^\star p_n = A^\star q_n$. On a donc
$$\|q_n\|_F^2 = (A^\star p_n|v_n)_E \leq \|A^\star p_n\|_E \|v_n\|_E \leq C\|A^\star p_n\|_E \|q_n\|_F,$$
et donc
$$\|q_n\|_F \leq C\|A^\star p_n\|_E.$$
L''hypothèse de convergence de $A^\star p_n$ donne que la suite $(A^\star p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (dans E). On en déduit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F.

(c) *Comme la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans (l'espace de Hilbert) F, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que cette suite converge faiblement dans F. Il existe donc $q \in F$ t.q. $q_n \to q$ faiblement dans F, quand $n \to +\infty$. On va montrer que $v = A^\star q$.*

Soit $w \in E$, On a $\lim_{n\to+\infty}(q_n|Aw)_F = (q|Aw)_F$. Mais,

$$(q_n|Aw)_F = (A^\star q_n|w)_E = (A^\star p_n|w)_E.$$

Comme $A^\star p_n \to v$ dans E, on a donc aussi $\lim_{n\to+\infty}(q_n|Aw)_F = (v|w)_E$. On obtient donc

$$(q|Aw)_F = (v|w)_E \text{ pour tout } w \in E.$$

Ceci donne $(A^\star q|w)_E = (v|w)_E$ pour tout $w \in E$, et donc $v = A^\star q$. On a bien montré que $v \in \mathrm{Im}A^\star$.

2. *La question précédente montre que $\mathrm{Im}A^\star$ est fermé (dans E). Avec la partie II, on a donc $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{Im}(A^\star)$. On a déjà vu que $\mathrm{Ker}A = H$. On a donc $H^\perp = \mathrm{Im}(A^\star)$.*

3.(a) *On a $(u|v)_E = \int_\Omega fvdx = (T_f|v)_E$ pour tout $v \in H$. Ceci signifie bien que $u - T_f \in H^\perp$ et donc que $u - T_f \in \mathrm{Im}A^\star$.*

(b) *Comme $u - T_f \in \mathrm{Im}A^\star$, il existe $p \in F = L^2(\Omega)$ t.q. $u - T_f = A^\star p$. On a donc pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$,*

$$(u|v)_E - \int_\Omega fvdx = (u - T_f|v)_E = (A^\star p|v)_E = (p|Av)_F = \int_\Omega p\mathrm{div}(v)dx.$$

Ce qui signifie bien que (u,p) est solution de (2.50).

4. *On a déja montré à la question 3 de la partie I que $u_1 = u_2 = u$ où u est l'unique solution de (2.51).*

On obtient alors que $\int_\Omega p_1\mathrm{div}(v)dx = \int_\Omega p_2\mathrm{div}(v)dx$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$. En prenant $v = (v_1,\ldots,v_N)^t$ avec $v_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ et $v_i = 0$ pour $i \geq 2$, on en déduit que $D_1(p_1 - p_2) = 0$ (dans $\mathcal{D}^\star$). De manière analogue on a $D_i(p_1 - p_2) = 0$ pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$. Ceci permet d'affirmer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p. (voir l'exercice 1.4).

Exercice 2.16 (Continuité séquentielle de L^2-faible dans H_0^1)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i,j = 1,\ldots,N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i,j = 1,\ldots,N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on sait qu'il existe une unique solution au problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.52}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note u la solution de (2.52) et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (2.52) avec f_n au lieu de f. On suppose que $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
2. Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$).
3. Montrer que, quand $n \to +\infty$,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x)\cdot\nabla u_n(x)dx \to \int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)dx.$$

[Utiliser le fait que $\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x)\cdot\nabla u_n(x)dx = \int_\Omega f_n(x)u_n(x)dx$ et passer à la limite sur le terme de droite de cette égalité.]

4. Montrer que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra considérer $\int_\Omega A(x)\nabla(u_n - u)(x)\cdot\nabla(u_n - u)(x)dx$.]

Corrigé –

1. *En prenant $v = u_n$ dans (2.52) (avec f_n et u_n au lieu de f et u), on obtient*
$$\alpha\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le \|f_n\|_{L^2(\Omega)}\, \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \le \|f_n\|_{L^2(\Omega)}\, C_\Omega\|u_n\|_{H^1_0(\Omega)},$$
où C_Ω est donné par l'inégalité de Poincaré. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|u_n\|_{H^1_0(\Omega)} \le \frac{C_\Omega}{\alpha} \sup_{p\in\mathbb{N}}(\|f_p\|_{L^2(\Omega)}) = M < +\infty,$$
la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^2(\Omega)$.
2. *Si $u_n \not\rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$, $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q.*
$$|\langle\psi, u_n - u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}| \ge \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2.53}$$
Après une nouvelle extraction éventuelle, on peut supposer que $u_n \to \bar{u}$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$.
Soit $v \in H^1_0(\Omega)$. On a
$$\int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f_n v dx,$$
et donc, quand $n \to \infty$,
$$\int_\Omega A\nabla\bar{u}.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$
On en déduit que $\bar{u} = u$, ce qui est en contradiction avec (2.53).
On a donc bien montré que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$ et, par le théorème de Rellich, que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$.
3. $$\int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla u_n dx = \int_\Omega f_n u_n dx \to \int_\Omega f u dx = \int A\nabla u \cdot \nabla u\, dx,$$
car $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.
4. *On a*
$$\int_\Omega A(\nabla u_n - \nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx = \int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla u_n dx - \int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla u - \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u_n + \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u\, dx.$$
Les quatre terme de droite de cette égalité tendent vers $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u\, dx$ quand $n \to +\infty$. Le terme de gauche (qui est positif) tend donc vers 0. Ceci donne $\alpha\|u_n - u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \to 0$ (quand $n \to +\infty$) et donc, quand $n \to +\infty$,
$$u_n \to u \quad \text{dans } H^1_0(\Omega).$$

Remarque sur la topologie faible : L'application $f \mapsto u$ (où u est solution de (2.52)) est donc séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$-faible dans $H^1_0(\Omega)$ (fort), that is to say qu'elle transforme les suites faiblement convergentes de $L^2(\Omega)$ en suites (fortement) convergentes de $H^1_0(\Omega)$. Elle est donc aussi séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$-faible dans $L^2(\Omega)$ (fort). Après avoir définie la topologie faible de $L^2(\Omega)$ (ce que nous ne faisons dans ce polycopié), on peut toutefois remarquer que cette application n'est pas continue de $L^2(\Omega)$-faible (that is to say $L^2(\Omega)$ muni de la topologie faible) dans $L^2(\Omega)$ (that is to say $L^2(\Omega)$ muni de la topologie associée à sa norme).

Exercice 2.17 (Exercice liminaire à l'exercice 2.18)
Soit φ une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\beta > 1$ t.q.
$$0 \le x < y \Rightarrow \varphi(y) \le C\frac{\varphi(x)^\beta}{y - x}. \tag{2.54}$$
Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a) = 0$. [On pourra montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ t.q. $\varphi(a_k) \le \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et $\lim_{k\to\infty} a_k < +\infty$. Pour cela, on pourra montrer qu'il existe a_0 t.q. $\varphi(a_0) \le 1$ puis, par récurrence, définir a_{k+1} par $\frac{C}{a_{k+1}-a_k}\frac{1}{2^{k\beta}} = \frac{1}{2^{k+1}}$.]

Corrigé – *En prenant $x = 0$ dans (2.54), on obtient $\lim_{y\to\infty} \varphi(y) = 0$. Il existe donc a_0 t.q. $\varphi(a_0) \le 1$.*

On définit maintenant, par récurrence, une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\frac{C}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{2^k}\right)^\beta = \frac{1}{2^{k+1}}$$

on a alors, par récurrence, $\varphi(a_k) \le \frac{1}{2^k}$.
En effet pour $k = 0$ on a bien $\varphi(a_0) \le 1$.
Puis, pour $k \ge 0$, si $\varphi(a_k) \le \frac{1}{2^k}$, on a

$$\varphi(a_{k+1}) \le \frac{C}{a_{k+1}-a_k}\varphi(a_k)^\beta \le \frac{C}{a_{k+1}-a_k}\frac{1}{2^{k\beta}} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

On montre maintenant que $\lim_{k\to\infty} a_k < \infty$. Pour cela, on remarque que

$$a_{k+1} - a_k = 2C\frac{2^k}{2^{k\beta}} = 2C\frac{1}{2^{k(\beta-1)}} = 2Cb^k \text{ avec } b = \frac{1}{2^{\beta-1}}.$$

On a donc

$$a_k = a_0 + \sum_{p=0}^{k-1} 2Cb^p \le a_0 + 2C\sum_{p=0}^{\infty} b^p = a_0 + \frac{2C}{1-b},$$

car $b = \frac{1}{2^{\beta-1}} < 1$ car $\beta > 1$. On prend donc $\boxed{a = a_0 + \frac{2C}{1-b}}$ et on a, comme φ est décroissante,

$$0 \le \varphi(a) \le \varphi(a_k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

et donc

$$0 \le \varphi(a) \le \frac{1}{2^k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Ce qui donne $\varphi(a) = 0$.

Exercice 2.18 (Solutions bornées d'un problème elliptique)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \ge \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Si B est une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$, on note mes(B) le mesure de Lebesgue N-dimensionnelle de A (that is to say la "surface" si $N = 2$ et le volume si $N = 3$).

1. Soit $F \in L^2(\Omega)^N$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.55}$$

Soit $p > N$. On suppose pour la suite de l'exercice que $F \in L^p(\Omega)^N$ (On rappelle que $L^p(\Omega)^N \subset L^2(\Omega)^N$ car $p > 2$) et on note u l'unique solution de (2.55).
Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction S_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} S_k(s) = 0 \text{ si } -k \le s \le k, \\ S_k(s) = s - k \text{ si } s > k, \\ S_k(s) = s + k \text{ si } s < -k. \end{cases}$$

On rappelle que si $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $S_k(v) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla S_k(v) = 1_{A_k}\nabla v$ p.p., avec $A_k = \{|v| > k\}$ (voir la remarque 2.23).

2. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, Montrer que

$$\alpha \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^2(\Omega)} = \alpha \left(\int_{A_k} \nabla u(x).\nabla u(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \| |F| \|_{L^p(\Omega)}.$$

[On pourra prendre $v = S_k(u)$ dans (2.55) et utiliser l'inégalité de Hölder.]

3. On pose $1^\star = \frac{N}{N-1}$. On rappelle qu'il existe C_1 ne dépendant que de N t.q.

$$\|w\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \leq C_1 \|w\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} = C_1 \| |\nabla w| \|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } w \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit $k, h \in \mathbb{R}_+$ t.q. $k < h$. Montrer que

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq (\int_{A_h} |S_k(u(x)|^{1^\star} dx)^{\frac{1}{1^\star}} \leq C_1 \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe C_2 ne dépendant que de C_1, α, F et p t.q.

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_2 \text{mes}(A_k)^{1-\frac{1}{p}}.$$

4. Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ (that is to say qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\text{mes}(A_a) = 0$). [On pourra poser $\varphi(k) = \text{mes}(A_k)^{\frac{N-1}{N}}$ et utiliser l'exercice 2.17.]

5. Montrer qu'il existe C_3 ne dépendant que de Ω, α et p t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3 \| |F| \|_{L^p(\Omega)}.$$

Corrigé –

1. Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$ on pose

$$a(u,v) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx \;\; \text{et} \;\; T(v) = \int_\Omega F.\nabla v \, dx.$$

Comme cela a été vu dans ce chapitre, la forme a est une forme bilinéaire continue coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Puis, pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$T(v) \leq \int_\Omega |F.\nabla v| dx \leq \| |F| \|_{L^2(\Omega)} \| |\nabla v| \|_{L^2(\Omega)} = \| |F| \|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que $T \in (H_0^1(\Omega))'$ et donc qu'il existe un et un seul u solution de (2.55).

2. En prenant $v = S_k(u)$ dans (2.55) on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \| |\nabla(S_k(u))| \|_{L^2(\Omega)}^2 &= \alpha \int_{A_k} \nabla u.\nabla u \, dx = \int_{A_k} F.\nabla u \, dx \\ &\leq \| |F| \|_{L^2(A_k)} \| |\nabla(S_k(u))| \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \| |F| \|_{L^p(\Omega)} (mes(A_k))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \| |\nabla(S_k(u))| \|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

car $\int_{A_k} |F|^2 dx \leq \left(\int_\Omega |F|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} mes(A_k)^{1-\frac{2}{p}}$. On obtient ainsi

$$\boxed{\alpha \| |\nabla(S_k(u))| \|_{L^2(\Omega)} \leq \| |F| \|_{L^p(\Omega)} mes(A_k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.}$$

3. *Pour $h > k$, on a $|S_k(u)| \geq (h-k)$ sur A_h. On a donc*
$$\begin{aligned}(h-k)(mes(A_h))^{\frac{1}{1^\star}} &\leq \left(\int_\Omega |S_k(u)|^{1^\star}dx\right)^{\frac{1}{1^\star}}\\ &\leq C_1 \||\nabla S_k(u)|\|_{L^1(\Omega)}\\ &\leq C_1\int_{A_k}|\nabla S_k(u)|dx \leq C_1\||\nabla S_k(u)|\|_{L^2(\Omega)}mes(A_k)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$
Avec la question 2, on obtient
$$(h-k)(mes(A_h))^{\frac{1}{1^\star}} \leq \frac{C_1}{\alpha}\||F|\|_{L^p}mes(A_k)^{1-\frac{1}{p}},$$
et donc, avec $C_2 = \frac{C_1}{\alpha}\||F|\|_{L^p(\Omega)}$,
$$(h-k)mes(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_2 mes(A_k)^{1-\frac{1}{p}}.$$
4. *Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on pose $\varphi(k) = (mes(A_k))^{\frac{N-1}{N}}$. On a alors, pour $h \geq k \geq 0$,*
$$(h-k)\varphi(h) \leq C_2\varphi(k)^{\frac{N}{N-1}\frac{p-1}{p}}.$$
On pose $\beta = \dfrac{N}{N-1}\dfrac{p-1}{p}$.
On remarque que $\beta > 1$ car $p > N$ (en effet, on a $\dfrac{N}{N-1}\dfrac{p-1}{p} > 1 \Leftrightarrow Np - N > Np - p$).
On peut alors appliquer l'exercice 2.17, il donne l'existence de $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a) = 0$ et donc $\boxed{\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq a}$.
5. *On suppose tout d'abord que $\||F|\|_{L^p(\Omega)} = 1$, ce qui donne, avec les notations des questions précédentes, $C_2 = \dfrac{C_1}{\alpha}$.*
On reprend alors le corrigé de l'exercice 2.17. Le choix de a_0 est t.q. $\varphi(a_0) \leq 1$. Comme
$$\varphi(0) \leq mes(\Omega)^{\frac{N-1}{N}},\ \beta\frac{N-1}{N} = \frac{p-1}{p} \text{ et } C_2 = C_1/\alpha,$$
il suffit donc de prendre a_0 t.q.
$$\frac{C_1 mes(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}}{\alpha a_0} \leq 1.$$
On peut donc choisir $a_0 = \dfrac{C_1 mes(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}}{\alpha}$. On a alors $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq a$ avec
$$a = a_0 + \frac{2C_2}{1-b} = a_0 + \frac{C_1}{\alpha}\frac{2}{1-\frac{1}{2^{\beta-1}}}.$$
On a donc $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3$, avec $C_3 = a_0 + \dfrac{C_1}{\alpha}\dfrac{2}{1-\frac{1}{2^{\beta-1}}}$.
On remarque bien que C_3 ne dépend que Ω, α et p (noter que N est implicitement dans Ω).

On peut maintenant supposer que F est quelconque dans $L^p(\Omega)^N$ (la fonction u est toujours la solution de (2.55)). Pour $\gamma > 0$ la fonction u/γ est solution de (2.55) avec F/γ au lieu de F. Si $\||F|\|_{L^p(\Omega)} > 0$, en choisissant $\gamma = \||F|\|_{L^p(\Omega)}$ (de sorte que $\||F/\gamma|\|_{L^p(\Omega)} = 1$) on a donc $\|u/\gamma\|_{\leq} C_3$ ce qui donne
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3\||F|\|_{L^p(\Omega)}.$$
(Noter aussi que l'inégalité est évidente si $\||F|\|_{L^p(\Omega)} = 0$.)

Exercice 2.19 (Solutions bornées d'un problème elliptique, suite)
On reprend les premières hypothèses de l'exercice 2.18.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$. Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i,j = 1,\ldots,N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i,j = 1,\ldots,N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

1. Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $p > 1$ si $N = 2$ et $p = 2N/(N+2)$ si $N \geq 3$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de
$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.56}$$

2. Soit $p > N/2$ et $f \in L^p(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique u solution de (2.56). [Se ramener à la question précédente.]

   Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe C ne dépendant que de Ω, α et p t.q.
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$
   [Se ramener à l'exercice 2.18.]

Exercice 2.20 (Diffusion évanescente et convection)

Partie I

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $w = (w_1,\ldots,w_N)^t \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\mathrm{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ (On rappelle que $\mathrm{div}(w) = \sum_{i=1}^N D_i w_i$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que $u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et que $D_i(u^2) = 2uD_iu$, pour tout $i \in 1,\ldots,N$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.]
2. Montrer que $\displaystyle\int_\Omega w(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = 0$, pour tout $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,1}(\Omega)$.]
3. Montrer que $\displaystyle\int_\Omega w(x) \cdot \nabla(u^2)(x)dx = 2\int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla u(x)dx = 0$ (on rappelle que $w \cdot \nabla(u^2) = \sum_{i=1}^N w_i D_i(u^2)$).

Partie II

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, à frontière lipschiztienne (cette hypothèse donne l'existence de l'opérateur "trace", noté γ, linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et t.q. $\gamma(u) = u$ sur $\partial\Omega$ si $u \in C(\bar\Omega) \cap H^1(\Omega)$ et $\mathrm{Ker}(\gamma) = H_0^1(\Omega)$). Soient $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $w \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\mathrm{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \mathrm{Im}\,\gamma$. On cherche u solution du problème suivant :
$$\begin{array}{l} u \in H^1(\Omega),\ \gamma(u) = g \text{ (dans } L^2(\partial\Omega)), \\ \displaystyle\int_\Omega a\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \tag{2.57}$$

1. Soit $G \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(G) = g$ (dans $L^2(\partial\Omega)$). Montrer que u est solution de (2.57) si et seulement si $u = G+\overline{u}$ avec $\overline{u}$ solution de (2.58).
$$\begin{array}{l} \overline{u} \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a\nabla\overline{u}(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega \overline{u}(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx = \\ \displaystyle\int_\Omega f(x)v(x)dx - \int_\Omega a\nabla G(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_\Omega G(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \tag{2.58}$$

2. Montrer que (2.57) admet une et une seule solution.

On note u cette solution dans la suite de cette partie.

3. On suppose, dans cette question, que $g = 0$ (de sorte que $u \in H^1_0(\Omega)$). Montrer que $a\|u\|^2_{H^1_0} \leq \int_\Omega f(x)u(x)dx$.
4. Soit $b \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, que $f \leq 0$ p.p. dans Ω et que $g \leq b$ p.p. sur $\partial\Omega$ (pour la mesure $N-1$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$). Montrer que $u \leq b$ p.p. dans Ω. [On pourra admettre que $(u-b)^+ \in H^1_0(\Omega)$ et que $\nabla(u-b)^+ = 1_{u>b}\nabla u$ p.p. (ce résultat est semblable à celui du lemme 2.22), utiliser (2.57) et la partie I.]

Partie III

Dans cette partie on prend $N = 2$, $\Omega =]0,1[^2$, $w = (-1,0)$ et $g = 0$. On suppose aussi que $f \in L^\infty(\Omega)$ et que $f \geq 0$ p.p. sur Ω. On note u_n la solution de (2.57) pour $a = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^\star$) et on s'intéresse à la limite de u_n quand $n \to \infty$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $u_n \geq 0$ p.p..[Utiliser la Partie II, question 4.]
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe C_1, ne dépendant que de f, t.q. $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$. [On pourra, par exemple, chercher de quel problème de type (2.57) est solution la fonction $u_n + \beta\psi$, avec $\psi(x) = x_1$ et β convenablement choisi, et utiliser la Partie II, question 4.]
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe C_2, ne dépendant que de f, t.q. $\|u_n\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C_2\sqrt{n}$.
4. En utilisant la remarque 2.15, montrer que $u_n \in H^2(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$, déduire de la question 1 de la partie III que $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}(0,x_2) \geq 0$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}(1,x_2) \leq 0$ pour tout $x_2 \in]0,1[$ (de même, $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1,0) \geq 0$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1,1) \leq 0$ pour tout $x_1 \in]0,1[$). On admettra, dans la suite, que ce résultat est encore vrai, avec seulement $u_n \in H^2(\Omega)$, au sens $\gamma(D_1u_n)(0,x_2) \geq 0$ et $\gamma(D_1u_n)(1,x_2) \leq 0$ p.p. en $x_2 \in]0,1[$ (de même $\gamma(D_2u_n)(x_1,0) \geq 0$ et $\gamma(D_2u_n)(x_1,1) \leq 0$ p.p. en $x_1 \in]0,1[$).
6. En utilisant la question 2 de la partie III, montrer qu'on peut supposer (à une sous suite près) que $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\Omega)$ quand $n \to +\infty$, c'est à dire :
$$\int_\Omega u_n(x)\varphi(x)dx \to \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \text{ pour tout } \varphi \in L^1(\Omega).$$
Montrer que $u \geq 0$ p.p..

On cherche, dans la suite, l'équation et les conditions aux limites satisfaites par u.

7. Montrer que $D_1u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, montrer que
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)dx + \frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_1u_n)(0,x_2)\varphi(0,x_2)dx_2 - \frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_1u_n)(1,x_2)\varphi(1,x_2)dx_2 \\ + \frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_2u_n)(x_1,0)\varphi(x_1,0)dx_1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_2u_n)(x_1,1)\varphi(x_1,1)dx_1 \\ - \int_\Omega u_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$
9. Soit $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ t.q. $\varphi \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Montrer que
$$-\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx \leq \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \tag{2.59}$$

10. On suppose, dans cette question, que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et que $f \in C(\overline{\Omega})$. Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = f$ partout dans Ω et que $u(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in]0, 1[$.

    La fonction u est-elle alors entièrement déterminée par f ?
11. On remplaçe $w = (-1, 0)$ par $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.... De quel problème, dépendant de w, u est elle solution ? [distinguer les signes des 2 composantes de w.]

Corrigé –

Partie I

1. *Soit $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc, quand $n \to +\infty$, $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u_n \to D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. (On rappelle que $\partial_i u_n$ désigne la dérivée partielle classique de u_n par rapport à sa i-eme variable.) On peut aussi supposer (après extraction éventuelle d'une sous suite) que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^2(\Omega)$ t.q. $|u_n| \le F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit, par convergence dominée, que $u_n^2 \to u^2$ dans $L^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$).*

   Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$, on a alors
   $$\langle D_i(u^2), \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega u^2 \partial_i \varphi \, dx = -\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega u_n^2 \partial_i \varphi \, dx. \tag{2.60}$$
   Comme u_n et φ appartiennent à $C_c^\infty(\Omega)$, on a, en intégrant par parties
   $$\int_\Omega u_n^2 \partial_i \varphi \, dx = -2 \int_\Omega \varphi u_n \partial_i u_n \, dx.$$
   Comme $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u_n \to D_i u$ dans $L^2(\Omega)$, on a $u_n \partial_i u_n \to u D_i u$ dans $L^1(\Omega)$ et donc (comme $\varphi \in L^\infty(\Omega)$,
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \varphi u_n \partial_i u_n \, dx = \int_\Omega \varphi u \partial_i u \, dx.$$
   En revenant à (2.60), on en déduit que
   $$\langle D_i(u^2), \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega u^2 \partial_i \varphi \, dx = 2\int_\Omega \varphi u D_i u \, dx.$$
   Ce qui prouve bien que $D_i(u^2) = 2u D_i u$ p.p. (les dérivées par transposition de u et u^2 sont en fait des dérivées faibles et donc identifiées à des fonctions).

   La démonstration précédente donne aussi que $u_n^2 \to u^2$ dans $L^1(\Omega)$ et $\partial_i(u_n^2) = 2u_n \partial_i u_n \to 2u D_i u = D_i(u^2)$ dans $L^1(\Omega)$. On a donc $u_n^2 \to u^2$ dans $W^{1,1}(\Omega)$, ce qui donne, comme $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$, que $u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$.
2. *Soit $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $\varphi_n \to \varphi$ dans $W^{1,1}(\Omega)$. Comme $\mathrm{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$*
   $$0 = \langle \mathrm{div}(w), \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\sum_{i=1}^N \int_\Omega w_i \partial_i \varphi_n \, dx.$$
   Comme $\partial_i \varphi_n \to D_i \varphi$ dans $L^1(\Omega)$ (et que $w \in L^\infty(\Omega)^N$), on en déduit, quand $n \to +\infty$,
   $$\sum_{i=1}^N \int_\Omega w_i D_i \varphi \, dx = 0,$$
   that is to say $\int_\Omega w(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0$.
3. *On utilise le résulat de la question précédente avec $\varphi = u^2$ et le fait que $D_i(u^2) = 2u D_i u$, on obtient*
   $$0 = \int_\Omega w \cdot \nabla(u^2) dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega 2 w_i u D_i u \, dx = 2\int_\Omega u w \cdot \nabla u \, dx.$$

Partie II

1. *On suppose que* u *est solution de (2.57) et on pose* $\overline{u} = u - G$. *On a alors* $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ *et, comme* γ *est un opérateur linéaire,* $\gamma(\overline{u}) = \gamma(u) - \gamma(G) = g - g = 0$ *(dans* $L^2(\partial\Omega)$*), ce qui prouve que* $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. *Puis, si* $v \in H_0^1(\Omega)$, *en remplaçant* u *par* $\overline{u} + G$ *dans (2.57), on montre bien que* $\overline{u}$ *est solution de (2.58).*

   Réciproquement, on suppose que $\overline{u}$ *est solution de (2.58). On pose alors* $u = \overline{u} + G$, *on a bien* $u \in H^1(\Omega)$ *et* $\gamma(u) = \gamma(\overline{u}) + \gamma(G) = 0 + g = g$ *(dans* $L^2(\partial\Omega)$*). Puis, si* $v \in H_0^1(\Omega)$, *en remplaçant* $\overline{u}$ *par* $u - G$ *dans (2.58), on montre bien que* u *est solution de (2.57).*

   On a bien ainsi montré l'équivalence désirée.

2. *En utilisant la lemme de Lax-Milgram (lemme 2.4) on va montrer que (2.58) admet une et une seule solution (grâce à la question précédente, on en déduit que (2.57) admet une et une seule solution).*

   Le problème (2.58) peut s'écrire
$$\overline{u} \in H, \tag{2.61a}$$
$$\bar{a}(\overline{u}, v) = T(v) \text{ pour tout } v \in H, \tag{2.61b}$$
   avec $H = H_0^1(\Omega)$,
$$\bar{a}(\overline{u}, v) = \int_\Omega a\nabla\overline{u}(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega \overline{u}(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx$$
   et
$$T(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx - \int_\Omega a\nabla G(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_\Omega G(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx.$$
   L'espace H *est bien un espace de Hilbert (avec sa norme naturelle). L'application* T *est bien linéaire de* H *dans* $\mathbb{R}$ *et, en utilisant l'inégalité de Hölder, on voit que* T *est continue (on utilise ici le fait que* $f \in L^2(\Omega)$, $G \in H^1(\Omega)$ *et* $w \in L^\infty(\Omega)^d$*). L'application* $\bar{a}$ *est bien bilinéaire de* $H \times H$ *dans* R *et continue (grâce encore au fait que* $w \in L^\infty(\Omega)^d$*). Pour montrer la coercivité de* $\bar{a}$, *on utilise la question 3 de la partie I, elle donne, pour tout* $u \in H$,
$$\bar{a}(u, u) = \int_\Omega a\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx + \int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla u(x)dx = \int_\Omega a\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx = a\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$
   Comme $a > 0$, *on en déduit bien que* $\bar{a}$ *est coercive. On peut donc appliquer le lemme 2.4, il donne l'existence et l'unicité de* $\overline{u}$ *solution de (2.58). Grâce à la question précédente, on en déduit l'existence et l'unicité de* u *solution de (2.57).*

3. *Il sufffit de prendre* $v = u$ *dans (2.57). Avec la question 3 de la partie I on obtient*
$$a\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x)u(x)dx.$$

4. *Comme* $(u-b)^+ \in H_0^1(\Omega)$, *on peut prendre* $v = (u-b)^+$ *dans (2.57), on obtient, en utilisant* $\nabla(u-b)^+ = 1_{u>b}\nabla u$ *p.p. et* $f \leq 0$ *p.p.,*
$$\int_{u>b} a\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx + \int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla(u-b)^+(x)dx = \int_\Omega f(x)(u-b)^+(x)dx \leq 0. \tag{2.62}$$
   On remarque maintenant que $\int_{u>b} a\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx = \int_\Omega a\nabla(u-b)^+ \cdot \nabla(u-b)^+ = a\|(u-b)^+\|_{H_0^1(\Omega)}$ *et que*
$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla(u-b)^+(x)dx &= \int_\Omega (u(x)-b)w(x) \cdot \nabla(u-b)^+(x)dx + b\int_\Omega w(x) \cdot \nabla(u-b)^+(x)dx \\ &= \int_\Omega (u(x)-b)^+w(x) \cdot \nabla(u-b)^+(x)dx + b\int_\Omega w(x) \cdot \nabla(u-b)^+(x)dx.\end{aligned}$$
   La question 3 de la partie I donne $\int_\Omega (u(x)-b)^+w(x) \cdot \nabla(u-b)^+(x)dx = 0$. *D'autre part, comme* $div(w) = 0$ *dans* $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, *on a* $\int_\Omega w \cdot \nabla\varphi dx = 0$ *pour tout* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. *Par densité de* $C_c^\infty(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *on a aussi (on utilise ici seulement le fait que* $w \in L^2(\Omega)^N$*)* $\int_\Omega w \cdot \nabla\varphi dx = 0$ *pour tout* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *et donc, en particulier pour* $\varphi = (u-b)^+$. *On en déduit que*
$$\int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla(u-b)^+(x)dx = 0.$$

Revenant à (2.62), on obtient finalement $a\|(u-b)^+\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 0$ *et donc* $(u-b)^+ = 0$ *p.p., that is to say* $u \leq b$ *p.p. dans* Ω.

Remarque : On suppose maintenant $g = 0$ *et on note* u *la solution de (2.57). La démonstration précédente montre donc que* $u \leq 0$ *p.p. dans* Ω *si* $f \leq 0$ *p.p. dans* Ω. *Si maintenant on suppose* $f \geq 0$ *On remarque que* $(-u)$ *est la solution de (2.57) avec* $(-f)$ *au lieu de* f. *On a donc* $(-u) \leq 0$ *p.p., that is to say* $u \geq 0$ *p.p..*

Partie III

1. *Le fait que* $u_n \geq 0$ *p.p. dans* Ω *est une conséquence directe de la remarque à la fin de la démonstration de la question 4 de la partie II.*
2. *La fonction* u_n *vérfie*
$$u_n \in H_0^1(\Omega),$$
$$\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega u_n(x)D_1v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$
On pose $\bar{u}_n = u_n + \beta\psi$ *(de sorte que* $\nabla\bar{u}_n = \nabla u_n + \beta(1,0)^t$*). Les formules d'intégration par parties dans* $H^1(\Omega)$ *(théorème 1.24) donnent que, pour une fonction* $v \in H_0^1(\Omega)$, *on a*
$$\int_\Omega D_1v\,dx = 0,\quad \int_\Omega \psi D_1 v\,dx = -\int_\Omega v\partial_1\psi\,dx = -\int_\Omega v\,dx.$$
On en déduit que la fonction $\bar{u}_n$ *est solution de*
$$\bar{u}_n \in H^1(\Omega),\ \gamma(u_n) = \beta x_1 \text{ (dans } L^2(\partial\Omega)),$$
$$\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla\bar{u}_n(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega \bar{u}_n(x)D_1v(x)dx = \int_\Omega (f(x)+\beta)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$
On choisit $\beta = -\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$. *On a alors* $f+\beta \leq 0$ *p.p. dans* Ω *et* $\beta x_1 \leq 0$ *sur* $\partial\Omega$. *On peut donc appliquer la question 4 de la partie 2, elle donne* $\bar{u}_n \leq 0$ *p.p. dans* Ω *et donc* $u_n \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ *p.p. dans* Ω. *Avec la question précédente, ceci donne* $0 \leq u_n \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ *p.p. dans* Ω. *On peut donc choisir* $C_1 = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.
3. *La question 3 de la partie II donne*
$$\frac{1}{n}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega f u_n\,dx.$$
Comme (avec C_1 *donné à la question précédente)* $\int_\Omega f u_n\,dx \leq \lambda_N(\Omega)\|u_n\|_\infty\|f\|_\infty \leq \lambda_N(\Omega)C_1\|f\|_\infty$, *on a donc*
$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq n\lambda_N(\Omega)C_1\|f\|_\infty.$$
On peut donc prendre $C_2 = \sqrt{\lambda_N(\Omega)C_1\|f\|_\infty}$.
4. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$. *La fonction* u_n *est la solution faible de* $-\Delta u_n = f - D_1u_n$. *Comme* Ω *est convexe et que* $f - D_1u_n \in L^2(\Omega)$ *(car* $u_n \in H_0^1(\Omega)$*), la remarque 2.15 donne que* $u \in H^2(\Omega)$.
5. *Comme* $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$ *et que* $u_n = 0$ *sur* $\partial\Omega$, *on a, pour tout* $x_2 \in]0,1[$,
$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(0,x_2) = \lim_{x_1\to 0^+}\frac{u_n(x_1,x_2)}{x_1}.$$
La question 1 de la partie III donne que $u_n(x_1,x_2) \geq 0$ *pour tout* $(x_1,x_2) \in \Omega$ *(comme* u_n *est continue, le fait que* $u_n \geq 0$ *p.p. dans* Ω *implique que* $u_n \geq 0$ *partout dans* Ω*). On en déduit que* $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(0,x_2) \geq 0$ *pour tout* $x_2 \in]0,1[$.
Les trois autres propriétés demandées se montrent de manière analogue.
6. *La question 2 de la partie III donne que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $L^\infty(\Omega)$. *Il existe donc une sous suite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *encore notée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *et il existe* $u \in L^\infty(\Omega)$ *t.q.* $u_n \to u$ $\star$*-faiblement dans* $L^\infty(\Omega)$ *quand* $n \to +\infty$.
En prenant $\varphi = 1_{u<0}$, *on remarque que* $\int_\Omega u_n\varphi\,dx \geq 0$ *(car* $u_n \geq 0$ *p.p.) et donc* $\int_\Omega u\varphi\,dx \geq 0$, *that is to say*
$$\int_{u<0} u(x)\,dx \geq 0.$$
Ceci donne bien $u \geq 0$ *p.p..*

7. *Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a*
$$\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx - \int_\Omega u_n(x)\partial_1\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \tag{2.63}$$
Comme $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_2\sqrt{n}$, on a
$$|\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx| \le \frac{1}{n}\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C_2}{\sqrt{n}}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$
On a donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = 0$.
D'autre part, on a $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\Omega)$, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n(x)\partial_1\varphi(x)dx = \int_\Omega u(x)\partial_1\varphi(x)dx.$$
Quand $n \to +\infty$ dans (2.63), on obtient donc
$$-\int_\Omega u(x)\partial_1\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,$$
ce qui donne bien $D_1 u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.
8. *Comme $u_n \in H^2(\Omega)$, la dérivée par transposition $-\Delta u_n$ est un élément de $L^2(\Omega)$ et (2.63) donne*
$$-\frac{1}{n}\Delta u_n + D_1 u_n = f \text{ p.p.}.$$
En multipliant cette équation par φ (on utilise ici uniquement le fait que $\varphi \in L^2(\Omega)$) on a donc
$$-\frac{1}{n}\int_\Omega \Delta u_n\varphi\,dx + \int_\Omega \varphi D_1 u_n\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx. \tag{2.64}$$
Comme les fonctions D_1u_n et D_2u_n sont dans $H^1(\Omega)$, on peut maintenant utiliser les formules d'intégration par parties (théorème 1.24). On obtient (comme $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$)
$$\begin{aligned}-\frac{1}{n}\int_\Omega (D_1D_1u_n)\varphi\,dx = \frac{1}{n}\int_\Omega D_1u_n\partial_1\varphi\,dx + \frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_1u_n)(0,x_2)\varphi(0,x_2)dx_2\\ -\frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_1u_n)(1,x_2)\varphi(1,x_2)dx_2.\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}-\frac{1}{n}\int_\Omega (D_2D_2u_n)\varphi\,dx = \frac{1}{n}\int_\Omega D_2u_n\partial_2\varphi\,dx + \frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_2u_n)(x_1,0)\varphi(x_1,0)dx_1\\ -\frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_2u_n)(x_1,1)\varphi(x_1,1)dx_1.\end{aligned}$$
Une intégration par parties donne aussi (comme $u_n \in H_0^1(\Omega)$)
$$\int_\Omega \varphi D_1u_n\,dx = -\int_\Omega u_n\partial_1\varphi\,dx.$$
En utilisant ces trois intégrations par parties dans (2.64), on obtient l'égalité demandée.
9. *Comme $\varphi \ge 0$ sur $\partial\Omega$, la question 5 et l'égalité de la question 8 donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,*
$$\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)dx - \int_\Omega u_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx \le \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$
On peut alors passer à la limite quand $n \to +\infty$, comme à la question 7, et on obtient bien (2.59).
10. *La question 7 donne $D_1u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Comme u est de classe C^1, D_1u est représenté par la dérivée classique de u. Puis, comme $\partial_1 u$ et f sont continues sur Ω, on en déduit que $\partial_1 u = f$ partout dans Ω. Comme $\partial_1 u$ et f sont continues sur $\overline{\Omega}$, on a même $\partial_1 u = f$ partout dans $\overline{\Omega}$.*
On prend maintenant $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ t.q. $\varphi \ge 0$ sur $\partial\Omega$, $\varphi(x) = 0$ si $x = (x_1,x_2) \in \partial\Omega$, $x_1 \ne 0$.. Une intégration par parties dans (2.59) donne alors
$$\int_0^1 u(0,x_2)\varphi(0,x_2)\,dx_2 \le 0.$$

Dans cette inégalité, la fonction $\varphi(0,\cdot)$ peut être égale (par exemple) à n'importe quelle fonction appartenant à $C_c^\infty(]0,1[)$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Comme $u(0,\cdot)$ est une fonction continue sur $]0,1[$, On déduit donc de cette inégalité que $u(0,x_2) \le 0$ pour tout $x_2 \in]0,1[$.
La question 6 donne $u \ge 0$ p.p. sur Ω. Comme u est continue sur $\overline{\Omega}$, on a donc $u \ge 0$ partout sur $\overline{\Omega}$. On obtient donc finalement $u(0,x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in]0,1[$ (et même $[0,1]$).
La fonction u est bien entièrement déterminée par f, on a

$$u(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} f(t,x_2)dt.$$

11. *On pose $w = (\alpha,\beta)$, avec $\alpha,\beta \neq 0$. En reprenant la même méthode que celle développée ci dessus pour le cas $w = (-1,0)$, la question équivalente à la question 10 donnera que u est solution du problème suivant :*

$$-w \cdot \nabla u = f \text{ dans } \Omega,$$

$u(0,x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in]0,1[$ si $\alpha < 0$ et $u(1,x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in]0,1[$ si $\alpha > 0$.
$u(x_1,0) = 0$ pour tout $x_1 \in]0,1[$ si $\beta < 0$ et $u(x_1,1) = 0$ pour tout $x_1 \in]0,1[$ si $\beta > 0$.

Exercice 2.21 (Condition de Dirichlet non homogène) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne et $g \in \mathrm{Im}(\gamma)$ (où γ désigne l'opérateur trace vu au théorème 1.23). Soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1) soit vérifiée.

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que (2.13) admet une unique solution.
2. Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$. Montrer que (2.14) admet une unique solution.
3. On suppose dans cette question que $N = 2$ et $1 < p \le +\infty$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe une unique solution au problème (2.13).
4. On suppose dans cette question que $N \ge 3$ et $p = 2N/(N+2)$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe une unique solution au problème (2.13).

Exercice 2.22 (Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$) à frontière lipschitzienne. On note γ l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$.
On rappelle que $H^{1/2}(\partial\Omega) = \mathrm{Im}\gamma$ et que $\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf\{\|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)},\ \gamma(\overline{u}) = u\}$.

1. Soit $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Montrer que $\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)}$ où $\bar{u}$ est l'unique solution faible de $-\Delta\bar{u} = 0$ dans Ω avec $\gamma(\overline{u}) = u$, that is to say l'unique solution de

$$\bar{u} \in H^1(\Omega), \gamma(\bar{u}) = u,$$
$$\int_\Omega \nabla\bar{u}(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2. Montrer que l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert.
3. Montrer que l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^2(\partial\Omega)$.

Exercice 2.23 (trace normale d'un élément de H_{div}) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne. On pose $H_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{v = (v_1,v_2) \in L^2(\Omega)^2 \text{ t.q. } \mathrm{div}(v) \in L^2(\Omega)\}$ et, pour $v \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$,

$$\|v\|_{H_{\mathrm{div}}(\Omega)} = (\||v|\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{div}(v)\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.65}$$

1. Montrer que $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, muni de la norme définie par (2.65), est un espace de Hilbert.
2. Soit $v \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$.

(a) Montrer que

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot v\, dx + \int_\Omega \varphi\, \mathrm{div}(v)\, dx = 0,$$

Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, puis pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

(b) Soit $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(u_1) = \gamma(u_2)$ (où γ est l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$). Montrer que

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot v\, dx + \int_\Omega u_1\, \mathrm{div}(v)\, dx = \int_\Omega \nabla u_2 \cdot v\, dx + \int_\Omega u_2\, \mathrm{div}(v)\, dx.$$

On rappelle que $H^{1/2}(\partial\Omega) = \mathrm{Im}\gamma$ et que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert avec la norme définie dans l'exercice 2.22. On note $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (that is to say l'ensemble des applications linéaires continues de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $\mathbb{R}$).

3. Soit $v \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$. Montrer que l'on peut définir un élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, noté $T(v)$, en posant, pour $u \in H^{1/2}(\Omega)$,

$$\langle T(v), u\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot v dx + \int_\Omega \overline{u}\, \mathrm{div}(v) dx, \tag{2.66}$$

avec $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(\overline{u}) = u$. (En particulier, le terme de droite de (2.66) est bien défini et ne dépend pas de $\overline{u}$ si $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ et $\gamma(\overline{u}) = u$.)

On a ainsi défini une application T de $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

4. Montrer que l'application T est linéaire continue de $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

5. On suppose dans cette question que $v \in H^1(\Omega)^2$ (on a donc aussi $v \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$). On note $\gamma(v)$ la fonction obtenue sur $\partial\Omega$ en prenant la trace de chacune des composantes de v. (On a donc $\gamma(v) \in H^{1/2}(\partial\Omega)^2 \subset L^2(\partial\Omega)^2$.) On note $n(x)$ le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieur à Ω. Comme Ω est à frontière lipschizienne, le vecteur $n(x)$ est défini p.p. en $x \in \partial\Omega$ (p.p. signifie ici, comme d'habitude, p.p. pour la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle sur $\partial\Omega$) et la fonction $x \mapsto n(x)$ définit un élément de $L^\infty(\partial\Omega)$. On obtient ainsi $\gamma(v) \cdot n \in L^2(\partial\Omega)$. Cette (classe de) fonction(s) $\gamma(u) \cdot n$ est appelée "trace normale de u sur $\partial\Omega$". Montrer que

$$\langle T(v), u\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} u\, \gamma(v) \cdot n\, d\lambda(x). \tag{2.67}$$

N.B. Cette question explique pourquoi l'application $T(v)$ est souvent notée $v \cdot n$ même si $v \in H_{\mathrm{div}(\Omega)}$ (et non à $H^1(\Omega)^2$). On peut aussi montrer que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ceci permet de montrer que, lorsque $v \in H^1(\Omega)$, $\gamma(v) \cdot n$ est l'unique élément de $L^2(\partial\Omega)$ vérifiant (2.67).

Exercice 2.24 (Pas de trace normale sur une partie du bord) On reprend ici les notations de l'exercice 2.23. Soit maintenant I une partie du bord de Ω. Il semble naturel de poser

$$H^{1/2}(I) = \{u \text{ t.q. } u = \gamma(\overline{u}) \text{ p.p. sur } I \text{ avec } \overline{u} \in H^1(\Omega)\}. \tag{2.68}$$

(où p.p. signifie p.p. pour λ.) La norme sur $H^{1/2}(I)$ est alors

$$\|u\|_{H^{1/2}(I)} = \inf\{\|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)},\ \gamma(\overline{u}) = u \text{ p.p. sur } I\}. \tag{2.69}$$

$H^{1/2}(I)$ est alors un espace de Hilbert et on note $H^{-1/2}(I)$ son dual. L'objectif de cet exercice est de remarquer qu'en général il n'existe pas d'opérateur T linéaire continu de $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(I)$ t.q.

$$\langle T(v), u\rangle_{H^{-1/2}(I), H^{1/2}(I)} = \int_I u\, v \cdot n d\lambda(x),$$

pour tout $u \in H^{1/2}(I)$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Autrement dit on ne peut pas prolonger continûment l'opérateur naturel $v \mapsto v \cdot n$ (bien défini si v est régulière) à l'espace $H_{\text{div}}(\Omega)$. Nous donnons dans cet exercice un exemple pour lequel ce prolongement est effectivement impossible.

Noter aussi que la définition de $H^{1/2}(I)$ (donnée par (2.68)) et de sa norme (donnée par (2.69)) dépend de Ω (et pas seulement de I). Cette dépendance est sans importance. Plus précisément, soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ à frontières lipschitziennes. On suppose que I est une partie de $\partial\Omega_1$ et une partie de $\partial\Omega_2$. Par un argument de cartes locales, permettant de ramener l'étude des traces de $H^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, à celles de $H^1(\mathbb{R}^2_+)$, on peut montrer que l'espace $H^{1/2}(I)$ ne dépend pas du fait que l'on considère I comme une partie de $\partial\Omega_1$ ou une partie de $\partial\Omega_2$. De plus, les deux normes obtenues alors pour l'espace $H^{1/2}(I)$ sont équivalentes.

Pour construire notre exemple, on prend $\Omega =]0, a[^2$, avec $a > 0$ t.q. $a\sqrt{2} < 1$, et $I =]0, a[\times\{0\}$. L'objectif est de montrer qu'il n'existe pas d'opérateur T linéaire continu de $H_{\text{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(I)$ t.q.

$$\langle T(v), u\rangle_{H^{-1/2}(I),H^{1/2}(I)} = \int_I u\, v \cdot n d\lambda(x), \text{ pour tout } u \in H^{1/2}(I) \text{ et } v \in C^1(\bar{\Omega}). \tag{2.70}$$

Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose donc qu'il existe T linéaire continu de $H_{\text{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(I)$ vérifiant (2.70).

Soit $0 < \beta < 1/2$. Pour $x \in \Omega$, on pose ($|\cdot|$ désignant la norme euclidienne classique de $\mathbb{R}^2$)

$$u(x) = (-\ln(|x|))^\beta.$$

On a $u \in C^\infty(\Omega)$ et on sait que $u \in H^1(\Omega)$ (exercice 1.5). La trace de u sur I est égale (p.p. pour λ) à la trace classique. On note x_1, x_2 les composantes de $x \in \mathbb{R}^2$. On prend maintenant $v = (v_1, v_2)$ avec

$$v_1 = -\frac{\partial u}{\partial x_2},\ \ v_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1}.$$

1. Montrer que $\text{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$ et donc que $v \in H_{\text{div}}(\Omega)$.
   On définit $v^{(n)}$, pour n t.q. $(a + 1/n)\sqrt{2} < 1$, par
   $$v^{(n)}(x_1, x_2) = v(x_1 + \frac{1}{n}, x_2).$$
2. Montrer que $v^{(n)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et $v^{(n)} \to v$ dans $H_{\text{div}}(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.
   On note χ la fonction indentiquement égale à 1 sur $\partial\Omega$ (cette fonction est bien dans $H^{1/2}(I)$ car c'est la trace de la fonction qui vaut 1 sur tout Ω).
3. Comme $v^{(n)} \cdot n = -v_2^{(n)}$ sur I, montrer que
   $$\langle T(v^{(n)}), \chi\rangle_{H^{-1/2}(I),H^{1/2}(I)} = \int_I \chi\, v^{(n)} \cdot n\, d\lambda(x) = \int_0^a \beta \frac{(-\ln(x_1 + \frac{1}{n}))^{\beta-1}}{x_1 + \frac{1}{n}}\, dx_1.$$
   Montrer que le terme de gauche de cette égalité tend vers $\langle T(v), \chi\rangle_{H^{-1/2}(I),H^{1/2}(I)}$ (utiliser la continuité de T) et que le terme de droite tend vers $+\infty$ (car $\beta > 0$). En déduire la contradiction souhaitée.
4. Avec $v \cdot n$ pris au sens de l'exercice 2.23, montrer que
   $$\langle v \cdot n, \chi\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0,$$
   et que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial\Omega} \chi\, v^{(n)} \cdot n\, d\lambda(x) = 0$.

Chapitre 3

Problèmes elliptiques non linéaires

Dans ce chapitre, on va présenter deux types de méthodes pour obtenir des résulats d'existence de solution pour des problèmes elliptiques non linéaires : une méthode de compacité et une méthode de monotonie. On donnera également une méthode pour obtenir un résultat d'unicité.

3.1 Méthodes de compacité

3.1.1 Degré topologique et théorème de Schauder

Objectif. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, ou un ouvert borné d'un espace de Banach E. Soit $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ (ou $f \in C(\bar{\Omega}, E)$) et $y \in \mathbb{R}^N$ (ou $y \in E$). On cherche à montrer qu'il existe $x \in \bar{\Omega}$ t.q. $f(x) = y$.

On commence par donner l'existence (et l'unicité) d'une application, appelée degré topologique, en dimension finie puis en dimension infinie. Cette application nous permet parfois d'obtenir le thèorème d'existence de solution recherché.

Définition 3.1 *Soit $N \geq 1$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets (f, Ω, y) où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$ t.q. $y \notin \{f(x), x \in \partial\Omega\}$.*

Théorème 3.2 (Brouwer, 1933) *Soit $N \geq 1$ et $\mathcal{A}$ donné par la définition 3.1. Il existe alors une application d de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{Z}$, appelée "degré topologique", vérifiant les trois propriétés suivantes :*

(d1) (Normalisation) $d(I, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$.

(d2) (Degré d'une union) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \{f(x), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2\}$.

(d3) (Invariance par homotopie) Si $h \in C([0,1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \in C([0,1], \mathbb{R}^N)$ et $y(t) \notin \{h(t,x), x \in \partial\Omega\}$ (pour tout $t \in [0,1]$), on a alors $d(h(t,\cdot), \Omega, y(t)) = d(h(0,\cdot), \Omega, y(0))$ pour tout $t \in [0,1]$.

Remarque 3.3 Des propriétés du degré topologique (données dans le théorème 3.2), on déduit 2 conséquences très intéressantes :

1. $d(f, \Omega, y) \neq 0$ implique qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$.
2. Soit A une matrice $N \times N$ inversible, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $y \in \mathbb{R}^N$ t.q. $A^{-1}y \in \Omega$. On pose $f(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^N$. On a alors $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et $d(f, \Omega, y)$ est égal au signe du déterminant de A, on a donc $d(f, \Omega, y) \neq 0$.

La remarque 3.3 nous donne une méthode pour trouver des solutions à des problèmes non linéaires. Soit $N \geq 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$. On cherche à montrer qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$. Pour cela, on construit une application h de $[0,1] \times \bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^N$ t.q.

1. $h(1, \cdot) = f$,
2. $h(0, \cdot) = g$ avec g linéaire inversible et t.q. $y \in \{g(x), x \in \Omega\}$.
3. $h(t, x) \neq y$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \partial\Omega$.

On obtient alors $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y) \neq 0$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$.

On peut remarquer que dans le cas $N = 1$, cette méthode dite de “degré topologique” que l'on vient de décrire n'apporte rien de plus que le théorème des valeurs intermédiaires. Elle est donc sans intérêt si $N = 1$.

Un première conséquence de cette méthode de “degré topologique” est le théorème de point fixe de Brouwer que nous donnons maintenant.

Théorème 3.4 (Point fixe de Brouwer) *Soit $N \geq 1$, $R > 0$ et $f \in C(B_R, B_R)$ avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$. (On a muni $\mathbb{R}^N$ d'une norme notée $\|\cdot\|$.) Alors f admet un point fixe, that is to say qu'il existe $x \in B_R$ t.q. $f(x) = x$.*

Démonstration Si il existe $x \in \partial B_R$ (that is to say t.q. $\|x\| = R$) t.q. $f(x) = x$, il n'y a plus rien à démontrer. On suppose donc maintenant $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial B_R$. On pose alors $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| < R\}$ (ce qui donne $B_R = \bar{\Omega}$) et, pour $t \in [0,1]$ et $x \in B_R$, $h(t,x) = x - tf(x)$. Il est facile de voir que $h(t,x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = R\}$. On en déduit que $d(h(1,\cdot), \Omega, 0) = d(h(0,\cdot), \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = x$ ■

Le théorème 3.2 a été généralisé (dès 1934) en dimension infinie par Leray et Schauder sous une hypothèse de compacité que nous donnons maintenant

Définition 3.5 *Soit E un espace de Banach (réel), B une partie de E et f une application de B dans E. On dit que f est compacte (la terminologie de Leray-Schauder est différente, ils utilisent l'expression “complètement continue”) si f vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. f est continue,

2. $\{f(x), x \in C\}$ est relativement compacte (dans E) pour tout partie C bornée de B.

On peut remarquer, dans la définition précédente, que si f est linéaire (et $B = E$) la deuxième condition entraîne la première. Mais ceci est faux pour des applications non linéaires.

Définition 3.6 *Soit E un espace de Banach (réel). On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets $(I - f, \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné de E, f est une application compacte de $\bar{\Omega}$ dans E (ce qui est équivalent à dire que f est continue et $\{f(x), x \in \bar{\Omega}\}$ est une partie relativement compacte de E) et $y \in E$ t.q. $y \notin \{x - f(x), x \in \partial\Omega\}$.*

Théorème 3.7 (Leray, Schauder, 1934) *Soit E un espace de Banach (réel) et $\mathcal{A}$ donné par la définition 3.6. Il existe alors une application d de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{Z}$, appelée “degré topologique”, vérifiant les trois propriétés suivantes :*

(d1) (Normalisation) $d(Id, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$.

(d2) (Degré d'une union) $d(I - f, \Omega, y) = d(I - f, \Omega_1, y) + d(I - f, \Omega_2, y)$ si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \{x - f(x), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2\}$.

(d3) (Invariance par homotopie) Si h est une application compacte de $[0,1] \times \bar{\Omega}$ dans E (ce qui est équivalent à dire que h est continue et $\{h(t,x), t \in [0,1], x \in \bar{\Omega}\}$ est une partie relativement compacte de E), $y \in C([0,1], E)$ et $y(t) \notin \{x - h(t,x), x \in \partial\Omega\}$ (pour tout $t \in [0,1]$), on a alors $d(I - h(t,\cdot), \Omega, y(t)) = d(I - h(0,\cdot), \Omega, y(0))$ pour tout $t \in [0,1]$.

Comme dans le cas de la dimension finie (voir la remarque 3.3), des propriétés du degré topologique (données dans le théorème 3.7), on déduit que $d(I - f, \Omega, y) \neq 0$ implique qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $x - f(x) = y$. Pour donner l'analogue de la seconde propriété de la remarque 3.3, nous avons besoin d'un deuxième théorème dû à Leray et Schauder que nous donnons maintenant.

Théorème 3.8 (Application linéaire compacte) *Soit E un espace de Banach (réel), L une application linéaire compacte de E dans E et Ω un ouvert borné contenant 0. On suppose que*

$$x \in E,\ Lx = x \Rightarrow x \notin \partial\Omega. \tag{3.1}$$

Alors $(I - L, \Omega, 0) \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est donné par la définition 3.6) et $d(I - L, \Omega, 0) \neq 0$.
Noter que, comme L est linéaire, l'hypothèse (3.1) est équivalente à dire $(x \in E,\ Lx = x) \Rightarrow x = 0$, ce qui est équivalent à dire que 1 n'est pas valeur propre de L.

On peut maintenant, comme en dimension finie, donner une méthode pour trouver des solutions à des problèmes non linéaires. Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert borné de E contenant 0, f une application de $\bar{\Omega}$ dans E. On cherche à montrer qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $x - f(x) = 0$ (quitte à changer f, on peut toujours se ramener à cette forme). Pour cela, on construit une application h de $[0, 1] \times \bar{\Omega}$ dans E, compacte et t.q.

1. $h(1, \cdot) = f$,
2. $h(0, \cdot) = L$ avec L linéaire de E de E,
3. $x - h(t, x) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \partial\Omega$.

On obtient alors $d(I - f, \Omega, 0) = d(I - L, \Omega, 0) \neq 0$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $x - f(x) = 0$.

Comme en dimension finie, une première conséquence de l'existence du degré topologique est l'obtention d'un théorème de point fixe que nous donnons maintenant.

Théorème 3.9 (Point fixe de Schauder) *Soit E un espace de Banach, $R > 0$, $B_R = \{x \in E,\ \|x\| \leq R\}$ et f une application compacte de B_R dans B_R (that is to say f continue et $\{f(x),\ x \in B_R\}$ relativement compacte dans E). Alors f admet un point fixe, that is to say qu'il existe $x \in B_R$ t.q. $f(x) = x$.*

Démonstration La démonstration est très voisine de celle du théorème 3.4. Si il existe $x \in \partial B_R$ (that is to say t.q. $\|x\| = R$) t.q. $f(x) = x$, il n'y a plus rien à démontrer. On suppose donc maintenant $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial B_R$. On pose alors $\Omega = \{x \in E,\ \|x\| < R\}$ (ce qui donne $B_R = \bar{\Omega}$) et, pour $t \in [0, 1]$ et $x \in B_R$, $h(t, x) = tf(x)$. Il est facile de voir que $x - h(t, x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N,\ \|x\| = R\}$. La compacité de h se déduit de celle de f. On en déduit alors que $d(I - h(1, \cdot), \Omega, 0) = d(I - h(0, \cdot), \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = x$. ■

Le théorème de Schauder est faux si on remplace l'hypothèse de compacité de f par la simple hypothèse de continuité. Toutefois, la difficulté principale dans l'utilisation du théorème de Schauder (ou, plus généralement, dans l'utilisation du degré topologique) est souvent de montrer la continuité de f (ou, dans l'utilisation du degré topologique, la continuité de l'application notée h ci avant).

3.1.2 Existence avec le théorème de Schauder

On rappelle tout d'abord la définition de fonction de Carathéodory.

Définition 3.10 *Soit $N, p, q \in \mathbb{N}^\star$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit a une application de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. On dit que a est fonction de Carathéodory si $a(\cdot, s)$ est borélienne pour tout $s \in \mathbb{R}^p$ et $a(x, \cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$.*

Remarque 3.11 Soit $N, p, q \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et a une fonction de Carathéodory de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. La fonction a est alors borélienne de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ (ce qui pourrait être faux si a était seulement borélienne par rapport à chacun de ses arguments). Si v est une fonction borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^p$, la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ est alors borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^q$. Cette propriété sera plusieurs utilisée dans la suite (sans la rappeler) lorsque v sera dans $L^r(\Omega)$ (pour un $r \in [1, +\infty]$) en choississant un représentant (borélien) de v (la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ ne dépend pas du représentant choisi pour v, modulo la relation d'équivalence "= p.p.").

On travaille dans cette section avec les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} N \geq 1,\ \Omega \text{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^N, \\ a\ :\ \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction de Carathéodory },\\ \text{il existe } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ t.q. } \alpha \leq a(\cdot, s) \leq \beta \text{ p.p. et pour tout } s \in \mathbb{R},\\ f \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sous les hypothèses 3.2, on cherche à montrer l'existence de u, solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, u(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, u(x))v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Théorème 3.12 *Sous les hypothèses* (3.2)*, il existe u solution de* (3.3).

Démonstration
Pour $\bar{u} \in L^2(\Omega)$, le chapitre sur les équations elliptiques linéaires nous donne l'existence et l'unicité de u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \bar{u}(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, \bar{u}(x))v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Plus précisément, pour montrer l'existence et l'unicité de u solution de (3.4), on applique le théorème 2.6. Pour cela, on met le problème (3.4) sous la forme (2.4) en posant $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, $a_{i,i} = a(\cdot, \bar{u})$ et $f = f(\cdot, \bar{u})$ (dans cette dernière égalité, la fonction f du terme de gauche est celle de (2.4) et la fonction f du terme de droite est celle de (3.4)). Le théorème 2.6 donne bien l'existence et l'unicité de u solution de (3.4).

On pose $T(\bar{u}) = u$. L'application T est donc une application de E dans E avec $E = L^2(\Omega)$. Un point fixe de T est une solution de (3.3). Pour démontrer l'existence d'un tel point fixe, on va utiliser le théorème 3.9.

Tout d'abord, en utilisant α, l'inégalité de Poincaré et la borne L^∞ de f, on montre facilement que l'image de T est dans un borné de $H_0^1(\Omega)$ et donc (par le théorème de Rellich) dans un compact de $L^2(\Omega)$. En prenant R assez grand, l'application T envoie donc $B_R = \{v \in L^2(\Omega), \|v\|_2 \leq R\}$ dans B_R et $\{T(\bar{u}), \bar{u} \in B_R\}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. Pour utiliser le théorème 3.9, il reste à montrer la continuité de T.

Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E t.q. $\bar{u}_n \to \bar{u}$ dans E, quand $n \to +\infty$. On pose $u_n = T(\bar{u}_n)$. Après extraction d'une sous suite, on peut supposer que $\bar{u}_n \to \bar{u}$ p.p. et qu'il existe $w \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u_n \to w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ (et donc aussi $u_n \to w$ dans $L^2(\Omega)$). On va montrer que w est solution de (3.4). En effet, Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega a(x, \bar{u}_n(x))\nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, \bar{u}_n(x))v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ (en utilisant la convergence dominée et le passage à la limite sur le produit d'une convergence faible et d'une convergence forte dans L^2), on obtient

$$\int_\Omega a(x,\bar{u}(x))\nabla w(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,\bar{u}(x))v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Ceci prouve que $w = T(\bar{u})$. On a donc prouvé, après extraction d'une sous suite, que $T(\bar{u}_n) \to T(\bar{u})$ dans $L^2(\Omega)$. Par un raisonnement classique par l'absurde on peut montrer que cette convergence reste vraie sans extraction de sous suite (voir l'exercice 3.1 pour un exemple de ce type de raisonnement). On a ainsi démontré la continuité de T. On peut donc appliquer le théorème 3.9 et conclure à l'existence d'un point fixe de T, ce qui termine cette démonstration. ■

3.1.3 Existence avec le degré topologique

On donne maintenant une application du degré topologique, (cette application pourrait d'ailleurs aussi se faire par le théorème de Schauder).
On reprend le même problème que dans le paragraphe 3.1.2 en supprimant l'hypothèse f bornée qui permettait une application simple du théorème de Schauder.
On considère l'équation de diffusion-convection-réaction suivante :

$$\left\{\begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega) \\ & \int a(x,u(x))\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + \int_\Omega G(x)\varphi(u(x))\cdot\nabla v(x)dx = \\ & \qquad\qquad\qquad \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

qui est la formulation faible du problème suivant :

$$\left\{\begin{aligned} & -\text{div}(a(x,u)\nabla u) - \text{div}(G(x)\varphi(u)) = f(x,u),\ x \in \Omega, \\ & u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

Notons que cette équation est non linéaire pour trois raisons : les termes de diffusion, convection et réaction sont non linéaires. Le premier terme du membre de gauche est le terme de diffusion, le second terme du membre de gauche est le terme de convection et le membre de droite est le terme de réaction.
On se place sous les hypothèses suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} & (i)\ \Omega \text{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ N \geq 1, \\ & (ii)\ a \text{ est une fonction de Carathéodory (voir la définition 3.10)}, \\ & (iii)\ \exists \alpha, \beta > 0; \alpha \leq a(x,s) \leq \beta \quad \forall s \in \mathbb{R} \qquad \text{p.p. } x \in \Omega, \\ & (iv)\ G \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N),\ \text{div}G = 0, \\ & (v)\ \varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et il existe } C_1 \geq 0 \text{ t.q. } |\varphi(s)| \leq C_1|s| \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \\ & (vi)\ f \text{ est une fonction de Carathéodory, et } \exists C_2 \geq 0 \text{ et } d \in L^2(\Omega);\ |f(x,s)| \leq d(x) + C_2|s|, \\ & (vii)\ \lim_{s\to\pm\infty} \frac{f(x,s)}{s} = 0. \end{aligned}\right. \tag{3.7}$$

Remarque 3.13 (Sur l'existence et l'unicité des solutions de (3.5)) Dans le cas où $a \equiv 1$, $\varphi = 0$ et f est de la forme $f(x,s) = d(x) + \lambda s$ où λ est une valeur popre du Laplacien sur Ω avec condition de Dirichet (that is to say qu'il existe $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \neq 0$ t.q. $-\Delta w = \lambda w$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$) et d un élément de $L^2(\Omega)$, le problème (3.6) devient $-\Delta u = \lambda u + d$, avec condition de Dirichlet. Ce problème n'a une solution que si d est orthogonal à l'espace propre associé à λ (et dans ce cas on n'a pas unicité). Ceci s'appelle l'alternative de Fredholm, voir l'exercice 2.2. C'est pour assurer l'existence pour tout d dans $L^2(\Omega)$ qu'on ajoute l'hypothèse de sous-linéarité sur f (hypothèse (vii)).

Remarque 3.14 (Coercivité) Lorsque div $G \neq 0$, le problème peut se traiter de manière similaire à celle donnée dans la démonstration de théorème 3.15 à condition que $\mathrm{div}\, G \leq \lambda_1$ p.p. où λ_1 est la première valeur propre de $u \mapsto -\mathrm{div}(\alpha \nabla u)$ avec condition de Dirichlet (cette valeur propre est strictement positive). Sans cette condition, le problème devient plus difficile (voir l'exercice 3.5), même dans le cas linéaire, that is to say le cas où a et f ne dépendent pas de u et où $\varphi(u) = u$. La difficulté principale est due à l'absence de coercivité de l'opérateur $u \mapsto -\mathrm{div}(\alpha \nabla u) - \mathrm{div}(Gu)$.

Théorème 3.15 (Existence) *Sous les hypothèses* (3.7)*, il existe une solution de* (3.5)*.*

Démonstration Essayons d'abord d'appliquer le théorème de Schauder. On considère le problème linéaire suivant :

$$\int_\Omega a(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega G\varphi(\bar{u}) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(\bar{u}) v \,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.8}$$

Dans (3.8), on a noté, de manière abrégée, $a(\bar{u})$ et $f(\bar{u})$ les fonctions $x \mapsto a(x, \overline{u}(x))$ et $x \mapsto f(x, \overline{u}(x))$. Cette notation abrégée sera souvent utilisée par la suite.

Soit T l'opérateur défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est solution de (3.8). Il est assez facile de montrer que T est continu et même compact. Par contre il est difficile de montrer que T envoie une boule de $L^2(\Omega)$ dans elle-même. Pour cela, il faut obtenir une estimation sur u en fonction de $\bar{u}$, et ce n'est pas gagné. Prenons $v = u$ dans (3.8), comme on a fait dans le paragraphe 3.1.2. On obtient, grâce aux hypothèses (3.7),

$$\alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\,|G|\,\|_\infty C_1 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|d\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Montrons que le dernier terme à lui tout seul empêche d'avoir facilement des estimations. Supposons $G = 0$ et $d = 0$, on a alors avec l'inégalité de Poincaré :

$$\frac{\alpha}{C_\Omega^2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

c'est à dire $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{C_\Omega^2}{\alpha} C_2 \|\bar{u}\|_{L^2} \leq \dfrac{C_\Omega^2}{\alpha} C_2 R$ si $\bar{u}$ est dans la boule de centre 0 et de rayon R de $L^2(\Omega)$, that is to say si $\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq R$.

On ne peut pas en conclure que $\|u\|_{L^2(\Omega)} < R$ (sauf si $C_\Omega^2 C_2 < \alpha$ et dans ce cas la seule solution de (3.5) est $u = 0\ldots$). Donc, la méthode ne marche pas de manière directe. Toutefois, elle fonctionne avec un peu de travail supplémentaire en utilisant la dernière hypothèse de (3.7). Une solution est, par exemple, de considérer un problème tronqué et de passer à la limite. On va maintenant donner une preuve par degré topologique.

Cette méthode demande des estimations *a priori* c'est à dire des estimations sur u, sans connaître son existence. Supposons donc u solution de (3.5), on peut (et on va) montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $\|u\|_{L^2} \leq R$. Le gros avantage de considérer (3.5) plutôt que (3.8) est d'avoir uniquement u, et non pas u et $\bar{u}$, et ceci simplifie considérablement les estimations. Par exemple dans le terme de convection non linéaire, on peut écrire (formellement)

$$\begin{aligned}\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla u \quad \mathrm{d}x &= \int_\Omega G\cdot\nabla\phi(u)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_\Omega \operatorname{div} G \quad \phi(u)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 \quad \text{car} \quad \operatorname{div} G = 0,\end{aligned}$$

où ϕ est la primitive de φ s'annulant en 0. Notons que l'estimation $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ revient à montrer que toutes les solutions sont dans la boule B_R (boule fermée de centre 0 et de rayon R), ce qui est une estimation uniforme sur toutes les solutions.

On réécrit le problème sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} u\in H_0^1(\Omega),\\ \displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = \langle F(u),v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}, \forall v\in H_0^1(\Omega),\end{array}\right.$$

où $F(u)$ est, pour $u\in L^2(\Omega)$, l'élément de $H^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\langle F(u),v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u)v\,\mathrm{d}x.$$

Comme $G\in L^\infty(\Omega)^N$, $|\varphi(s)|\leq C_1|s|$ et $|f(\cdot,s)|\leq d+C_2|s|$, il est facile de voir que l'application F qui à u associe $F(u)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Pour $S\in H^{-1}(\Omega)$, le problème linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} w\in H_0^1(\Omega),\\ \displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla w\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = \langle S,v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)},\end{array}\right. \tag{3.9}$$

admet une unique solution $w\in H_0^1(\Omega)$. On note B_u l'opérateur qui à S dans $H^{-1}(\Omega)$ associe w solution de (3.9). L'opérateur B_u est linéaire continu de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^2(\Omega)$. On en déduit que l'opérateur B_u est compact de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Le problème (3.5) est équivalent à résoudre le problème de point fixe $u = B_u(F(u))$. On va donc montrer, par degré topologique, que le problème suivant admet une solution

$$\left\{\begin{array}{l} u\in L^2(\Omega),\\ u = B_u(F(u)).\end{array}\right.$$

Pour $t\in[0,1]$, on pose $h(t,u) = B_u(t\,F(u))\in L^2(\Omega)$. L'application h est ainsi définie de $[0,1]\times L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Pour $R>0$, on pose $B_R = \{u\in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \|u\|_{L^2(\Omega)} < R\}$. On va montrer que

(1) $\exists R>0; \left.\left\{\begin{array}{l} u-h(t,u)=0\\ t\in[0,1], u\in L^2(\Omega)\end{array}\right.\right\} \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R$
(c'est l'estimation *a priori*, qui est le point le plus difficile à montrer) ;

(2) h est continue de $[0,1]\times\bar B_R$ dans $\bar B_R$;

(3) $\{h(t,u),\ t\in[0,1], u\in\bar B_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Si on suppose qu'on a démontré (1) (2) (3), on n'a pas de solution à l'équation $u-h(t,u)=0$ sur le bord de la boule B_R, et on peut donc définir le degré $d(Id-h(t,.),B_R,0)$. Ce degré ne dépend pas de t, on a donc :

$$\begin{aligned} d(Id-h(t,\cdot),B_R,0) &= d(Id-h(0,\cdot),B_R,0)\\ &= d(Id,B_R,0) = 1.\end{aligned}$$

On en déduit l'existence de $u \in B_R$ tel que $u - h(1,u) = 0$, c'est à dire

$$u = B_u(F(u)).$$

Donc u est solution de (3.5) (et le théorème 3.15 est démontré).

Il reste donc à montrer (1), (2) et (3). Commençons par démontrer (3) (pour tout $R > 0$). Soit $R > 0$. On suppose que $\|u\|_{L^2} \le R$. On a :

$$F(u) \in H^{-1}(\Omega), \text{ et } \langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u)v\,\mathrm{d}x$$

On veut estimer $\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$.

$$\begin{aligned}\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &\le \|\,|G|\,\|_\infty \|\varphi(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|\,|G|\,\|_\infty\, C_1\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|d\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + C_2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le (\|\,|G|\,\|_\infty\, C_1\, R + C_\Omega\|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2\;\, C_\Omega\;\, R\,)\|v\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

où C_Ω ne dépend que de Ω (et est donnée par l'inégalité de Poincaré). Donc

$$t\|F(u)\|_{H^{-1}} \le \|\,|G|\,\|_\infty\, C_1 R + C_\Omega\|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2\, C_\Omega\, R, \quad \forall t \in [0,1].$$

Posons $h(t,u) = B_u(tF(u)) = w$ et montrons qu'il existe $\bar{R}$ dépendant que de $R, G, C_\Omega, C_1, C_2, \alpha$ tel que

$$\|h(t,u)\|_{H_0^1(\Omega)} \le \bar{R}\;\;;$$

Par définition, w est solution de

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla w\cdot\nabla v = \langle t\,F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),\\ w \;\in\; H_0^1(\Omega).\end{array}\right. \tag{3.10}$$

En prenant $v = w$ dans (3.10), on obtient :

$$\alpha\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \|tF(u)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \le \widetilde{R}\|w\|_{H_0^1(\Omega)},$$

avec $\widetilde{R} = \|\,|G|\,\|_\infty\, C_1 R + C_\Omega\|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2\, C_\Omega\, R$. On a donc $\|h(t,u)\|_{H_0^1(\Omega)} = \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{\widetilde{R}}{\alpha} = \bar{R}$.

On en déduit par le théorème de Rellich (théorème 1.25) que l'ensemble $\{h(t,u), t \in [0,1], u \in \bar{B}_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. Ce qui montre bien (3).

Montrons maintenant le point (2). Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ telle que $t_n \to t$ lorsque $n \to +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ t.q. $u_n \;\to\; u$ dans $L^2(\Omega)$. On veut montrer que $h(t_n,u_n) \;\to\; h(t,u)$ dans $L^2(\Omega)$. Soit $w_n \;=\; h(t_n,u_n)$ et $w = h(t,u)$. Pour montrer que $w_n \to w$ dans $L^2(\Omega)$, on cherche à passer à la limite sur l'équation suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_\Omega a(u_n)\nabla w_n.\nabla v\,\mathrm{d}x = -t_n\int_\Omega G\varphi(u_n)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + t_n\int_\Omega f(u_n)v\,\mathrm{d}x\\ w_n \in H_0^1(\Omega).\end{array}\right. \tag{3.11}$$

On sait déjà que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ (c'est ce qu'on a montré à l'étape précédente : si $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \le R$ alors $\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)} \le \bar{R}$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et à une sous suite près, (on ne renumérote pas) on a donc

$$w_n \to \bar{w} \text{ dans } H_0^1 \text{ faible et } w_n \to \bar{w} \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$u_n \to u \text{ p.p. et } \exists\, H \in L^2(\Omega) \,;\, |u_n| \leq H \text{ p.p..}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$; comme $a(u_n) \to a(u)$ p.p. donc $a(u_n)\nabla v \to a(v)\nabla v$ p.p., et $|a(u_n)\nabla v| \leq \beta|\nabla v|$, on a donc donc $a(u_n)\nabla v \to a(u)\nabla v$ dans $L^2(\Omega)$. Mais $\nabla w_n \to \nabla \bar{w}$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible. On a donc

$$\int_\Omega a(u_n)\nabla w_n \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega a(u)\nabla \bar{w} \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

On remarque ensuite que $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ p.p. et que $|\varphi(u_n)| \leq C_1|u_n| \leq C_1 H$; donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^2(\Omega)$ et $\displaystyle\int_\Omega G\varphi(u_n)\cdot\nabla v\; dx \to \int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x$ lorsque $n \to +\infty$.
Enfin pour le dernier terme, $f(u_n) \to f(u)$ p.p.. Par convergence dominée (car $|f(u_n)| \leq |d| + C_2 H$ p.p.) on a donc $f(u_n) \to f(u)$ dans L^2 et donc $\displaystyle\int_\Omega f(u_n)v\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(u)v\,\mathrm{d}x$ lorsque $n \to +\infty$.
En passant à la limite dans (3.11), on obtient donc :

$$\int_\Omega a(u)\nabla\bar{w}\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = -t\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + t\int_\Omega f(u)v\,\mathrm{d}x.$$

et donc $\bar{w} = h(t,u) = w$.
En raisonnant par l'absurde, on montre ensuite que (sans sous-suite) $w_n \to w$ dans H_0^1 faible et $w_n \to w$ dans $L^2(\Omega)$ où $w_n = h(t_n,\, u_n)$ et $w = h(t,u)$; l'application h est donc continue. Ce qui montre bien (2).

Il reste maintenant à démontrer (1). On veut montrer que $\exists R > 0$ t.q. :

$$\exists R > 0; \left\{ \begin{array}{l} t \in [0,1] \\ u = h(t,u)) \end{array} \right\} \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R.$$

Soit $t \in [0,1]$, et $u = h(t,u) = t\; B_u(F(u))$, c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = -t\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + t\int_\Omega f(u)v\,\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.12}$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(s) = \int_0^s \varphi(\xi)d\xi$ (Φ est donc une primitive de φ). Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, il n'est pas difficile de montrer que $\Phi(u) \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et que

$$\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega G\cdot\nabla\Phi(u)\,\mathrm{d}x.$$

(Ceci est laissé en exercice, il suffit d'approcher u, dans $H_0^1(\Omega)$, par une suite de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$.)
Comme $\mathrm{div}(G) = 0$, on a alors

$$\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega G\cdot\nabla\Phi(u)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{div}G\;\Phi(u)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On choisit alors $v = u$ dans (3.12). Par les hypothèses (3.7) , on a donc :

$$\alpha\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le \int_\Omega |f(u)u|dx.$$

On va déduire de cette inégalité qu'il existe $R > 0$ t.q $\|u\|_{L^2(\Omega)} < R$. C'est ici qu'on utilise l'hypothèse (vii), i.e. $\lim_{s\to\pm\infty} f(x,s)/s = 0$.
On raisonne par l'absurde. Supposons qu'un tel R n'existe pas. Alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ d'éléments de $H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \ge n \text{ et } \alpha\|u_n\|^2_{H^1_0} \le \int_\Omega |f(u_n)u_n|\,\mathrm{d}x.$$

Montrons que ceci est impossible. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$. On a donc $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

$$\alpha\|v_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le \int_\Omega \left|\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n\right|\,\mathrm{d}x.$$

Or $|f(s)| \le |d| + C_2|s|$, on a donc

$$\begin{aligned}
\alpha\|v_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\le \int_\Omega \frac{|d| + C_2|u_n|}{\|u_n\|_{L^2}}|v_n|\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega \frac{|d||v_n|}{\|u_n\|_{L^2}}\,\mathrm{d}x + C_2\int_\Omega |v_n|^2\,\mathrm{d}x \\
&\le \|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2.
\end{aligned}$$

Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$, et donc, à une sous-suite près, $v_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$. On a donc $\|v\|_{L^2} = 1$ (ce qui donne $v \neq 0$). On a aussi (toujours à une sous-suite près) :

$$\begin{aligned}
&v_n \to v \quad \text{p.p.},\\
&|v_n| \le H \quad \text{avec} \quad H \in L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Poincaré, il existe C_Ω, ne dépendant que de Ω t.q.

$$\frac{\alpha}{C_\Omega} = \frac{\alpha}{C_\Omega}\|v_n\|^2_{L^2} \le \alpha\,\|v_n\|^2_{H^1_0} \le \int_\Omega \frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}|v_n|\,\mathrm{d}x.$$

On pose

$$X_n = \int_\Omega \frac{|f(u_n)||v_n|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}\,\mathrm{d}x$$

et on montre maintenant que $X_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui est impossible puisque X_n est minoré par la constante α/C_Ω qui est strictement positive.
Montrons que $\dfrac{f(u_n)|v_n|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \to 0$ p.p. avec domination (dans $L^1(\Omega)$), on aura alors par le théorème de convergence dominée que $X_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
On montre tout d'abord la domination. On a

$$\frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \le \frac{|d| + C_2|u_n|}{\|u_n\|_{L^2}} \le |d| + C_2|v_n| \le |d| + C_2H,$$

donc $|\dfrac{f(u_n)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n| \leq (|d| + C_2 H) H \in L^1(\Omega)$.
On montre maintenant la convergence p.p.. On a $v_n \to v$ p.p. donc $\exists A$; mes$(A^c) = 0$ et $v_n(x) \to v(x) \forall x \in A$.
Soit $x \in A$,
1er cas : si $v(x) > 0$; $v_n(x) \to v(x)$, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$ donc $u_n(x) = v_n(x)\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$.

$$\frac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{L^2(\Omega}} v_n(x) = \frac{f(u_n(x)) u_n(x)}{u_n(x)\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n(x) = \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} (v_n(x))^2 \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

On a utilisé ici $\lim_{s \to +\infty} f(s)/s = 0$.
2ème cas : si $v(x) < 0$; on a de même $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n(x) = 0$, car $\lim\limits_{s \to -\infty} \dfrac{f(s)}{s} = 0$.
3ème cas : si $v(x) = 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n(x) \right| &\leq \frac{|d(x)| + C_2 |u_n(x)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} |v_n(x)| \\ &\leq (|d(x)| + C_2 |v_n(x)|) |v_n(x)| \\ &\to 0 \quad \text{car} \quad v(x) = 0. \end{aligned}$$

En résumé on a $\dfrac{f(u_n)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n \to 0$ p.p..
On a ainsi montré que $\lim_{n \to +\infty} X_n = 0$, en contradiction avec $X_n \geq \alpha / C_\Omega$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
On a donc montré qu'il existe $R > 0$ t.q. $(u = h(t, u)) \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R$. Ce qui montre (1). On a ainsi montré l'existence de solution à (3.5). Ceci termine la démonstration du théorème 3.15. ∎

Sous les hypothèses (3.7) (hypothèses du théorème 3.15). Peut-on montrer l'unicité de la solution ? Dans le cas où f ne dépend pas de u et où l'équation est linéaire (that is to say que a ne dépend pas de u et φ est linéaire), il suffit de prendre la différence de deux solutions comme fonction test dans les deux formulations faibles associées à ces deux solutions et de faire la différences des deux équations obtenues. On montre ainsi que les deux solutions sont égales (p.p.). Dans le cas général, la situation est plus compliquée.
Pour avoir l'unicité, on va supposer a lipschitzienne. Par contre il est inutile de supposer f lipschitzienne, ça ne suffira pas pour l'unicité. En effet, prenons par exemple $a = 1$, $\varphi = 0$ et $f(u) = \lambda u$, où λ est une valeur propre de $(-\Delta)$ avec condition de Dirichlet. Le problème est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Ce problème admet deux solutions $u_1 = 0$ et $u_2 \neq 0$ une fonction propre associée à λ. Evidemment $f(u) = \lambda u$ ne satisfait pas la condition (vii) mais on peut modifier légérement f pour vérifier (vii) et garder u_1 et u_2 comme solutions dés que $u_2 \in L^\infty(\Omega)$ (le fait que $u_2 \in L^\infty(\Omega)$ est toujours vrai si $N < 6$, ceci peut se démontrer, par exemple, à partir de l'exercice 2.19). En effet, en prenant $\widetilde{f}$ qui est égale à f sur $]-\gamma, \gamma[$ où $\gamma = \|u_2\|_{L^\infty}$ et qui est raccordée à 0 ensuite, de telle sorte que $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a les mêmes solutions pour $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, that is to say pour le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \tilde{f}(u) v \,\mathrm{d}x \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

on a ainsi 2 solutions avec $\lim_{s\to\pm\infty} \tilde{f}(s)/s = 0$. Cette hypothèse est donc inutile pour l'unicité.
On va montrer l'unicité dans le cas où f ne dépend pas de s, *i.e.* $f(x,s) = d(x)$, sous les hypothèses d'existence (3.7) et en supposant de plus que a et φ sont lipschitziennes, c'est-à-dire :

$$\exists C_3 > 0 \;;\; \forall s, s_2 \in \mathbb{R}, \begin{cases} |a(x,s_1) - a(x,s_2)| \le C_3|s_1 - s_2| \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}, \\ |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \le C_3|s_1 - s_2|. \end{cases} \tag{3.13}$$

Théorème 3.16 (Existence et unicité) *Sous les hypothèses* (3.7) *et* (3.13)*, il existe une et une seule solution à* (3.5) .

Démonstration : La technique utilisée apparaît pour la première fois dans un article d'Artola en 1985. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.5). On a donc :

$$\int_\Omega a(u_1)\nabla u_1 \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega G\varphi(u_1) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x, \tag{3.14}$$

et

$$\int_\Omega a(u_2)\nabla u_2 \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega G\varphi(u_2) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

L'idée est de prendre $v = T_\varepsilon(u_1 - u_2)$ dans (3.14) et (3.15), où $\varepsilon > 0$ et T_ε est la troncature au niveau ε, that is to say $T_\varepsilon(s) = \begin{cases} -\varepsilon \text{ si } s < -\varepsilon, \\ s \text{ si } -\varepsilon \le s \le \varepsilon, \\ \varepsilon \text{ si } s > \varepsilon. \end{cases}$

Si u_1 et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, alors $T_\varepsilon(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2) = \nabla(u_1 - u_2)1_{\{0<|u_1-u_2|<\varepsilon\}}$ (ceci est une généralisation simple du lemme 2.22). En prenant $v = T_\varepsilon(u_1 - u_2)$, et en faisant la différence de (3.14) et (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (a(u_1)\nabla u_1 \cdot \nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2)) - &\; a(u_2)\nabla u_2 \cdot \nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2)))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega G(\varphi(u_2) - \varphi(u_1)) \cdot \nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2))\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

soit encore, en posant $A_\varepsilon = \{0 < |u_1 - u_2| < \varepsilon\}$,

$$\begin{aligned} \int_{A_\varepsilon} a(u_1)\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x &= \int_{A_\varepsilon} (a(u_2) - a(u_1))\nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{A_\varepsilon} G(\varphi(u_2) - \varphi(u_1)) \cdot \nabla(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $a(u_1) \ge \alpha$ p.p., et donc :

$$\alpha \int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_{A_\varepsilon} C_3|u_2 - u_1|\,|\nabla u_2|\,|\nabla(u_2 - u_1)\,|\,\mathrm{d}x + \int_{A_\varepsilon} C_3|u_1 - u_2|\,|G|\,|\nabla(u_1 - u_2)|\,\mathrm{d}x.$$

On a $|u_1 - u_2| \le \varepsilon$ p.p. dans A_ε. En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz dans les deux dernières intégrales, on obtient donc :

$$\alpha \int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1-u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \quad \leq C_3 \;\varepsilon \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_2-u_1)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C_3 \;\varepsilon \left(\int_{A_\varepsilon} |G|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1-u_2)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

On a donc

$$\alpha \left(\int_{A_\varepsilon} (\nabla(u_1-u_2))^2\right)^{1/2} \leq C_3 \;\varepsilon\, a_\varepsilon, \text{ avec } a_\varepsilon = \left(\int_{A_\varepsilon} |G|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dx\right)^{1/2}$$

ou encore

$$\alpha \left(\int_\Omega |\nabla(T_\varepsilon(u_1-u_2))|^2 dx\right)^{1/2} = \alpha \| \,|\nabla T_\varepsilon(u_1-u_2)|\, \|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \;\varepsilon\, a_\varepsilon$$

donc, en désignant par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$,

$$\frac{\alpha}{m(\Omega)^{1/2}} \| \,|\nabla T_\varepsilon(u_1-u_2))|\, \|_{L^1(\Omega)} \leq \alpha \| \,|\nabla T_\varepsilon(u_1-u_2)|\, \|_{L^2(\Omega)} \leq \; C_3\, \varepsilon\, a_\varepsilon.$$

Comme $H^1_0(\Omega) \subset W^{1,1}_0(\Omega)$, on a $T_\varepsilon(u_1-u_2) \in H^1_0(\Omega) \subset W^{1,1}_0(\Omega)$ et l'inégalité de Sobolev donne

$$\|T_\varepsilon(u_1-u_2)\|_{L^{1^\star}} \leq \| \,|\nabla T_\varepsilon(u_1-u_2)|\, \|_{L^1(\Omega)}, \text{avec } 1^\star = \frac{N}{N-1}$$

et donc

$$\frac{\alpha}{(mes\ \Omega)^{1/2}} \|T_\varepsilon(u_1-u_2)\|_{L^{1^\star}} \leq C_3\, \varepsilon\, a_\varepsilon.$$

Si $N=1$, on a $N/(N-1) = +\infty$ et conclut facilement que $u_1 = u_2$ p.p.. Le cas $N \geq 2$ demande un léger développement supplémentaire. On remarque que

$$\begin{aligned}
\|T_\varepsilon(u_1-u_2)\|_{L^{1^\star}} &= \left(\int_\Omega |T_\varepsilon(u_1-u_2)|^{1^\star} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1^\star}} \\
&\geq \left(\int_{B_\varepsilon} \varepsilon^{1^\star} \,\mathrm{d}x\right)^{1/1^\star} \\
&\geq \; \varepsilon\, (m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}},
\end{aligned}$$

où $B_\varepsilon = \{x; |u_1(x) - u_2(x)| \geq \varepsilon\}$. On a donc

$$\varepsilon (m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{(m(\Omega))^{1/2}}{\alpha} C_3\, \varepsilon\, a_\varepsilon$$

et on en déduit que $(m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_4\ a_\varepsilon$. Prenons, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\varepsilon = 1/n$, on a $A_{1/(n+1)} \subset A_{1/n}$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_{1/n} = \emptyset$, donc $m(A_{1/n}) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ (par continuité décroissante d'une mesure). On rappelle que

$$a_{1/n} = \left(\int_{A_{1/n}} |G|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{A_{1/n}} |\nabla u_2|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Comme $G, |\nabla u_2| \in L^2(\Omega)$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a_{1/n} = 0$.
On a aussi $B_{1/(n+1)} \supset B_{1/n}$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_{1/n} = \{|u_1 - u_2| > 0\}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} m(B_{1/n}) = m\{|u_1 - u_2| > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). Comme

$$\big(m(B_{1/n})\big)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_4\, a_{1/n},$$

en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $m\{|u_1 - u_2| > 0\} \leq 0$, et donc $u_1 = u_2$ p.p., ce qui termine la démonstration. ■

3.2 Méthodes de monotonie

3.2.1 Introduction

Pour le problème (3.3), dans le cas où f (le second membre) dépend de ∇u, on sait encore prouver l'existence d'une solution avec le théorème de Schauder, voir exercice 3.3. La question est plus difficile dans le cas où a dépend de ∇u. On se place sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N, \\ a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \\ \exists \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+^*; \alpha \leq a(\xi) \leq \beta, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \\ f \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

On cherche à montrer l'existence d'une solution au problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(\nabla u)\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Peut-on appliquer le théorème de Schauder ? Pour l'appliquer, il faut l'utiliser dans $H_0^1(\Omega)$ pour que $a(\nabla u)$ ait un sens. Soit $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, par le lemme de Lax Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(\nabla \tilde{u})\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x,\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.16}$$

Soit T l'opérateur de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ défini par $T(\tilde{u}) = u$ solution de (3.16). L'opérateur T est bien de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et

(1) il existe $R > 0$ t..q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$ pour tout $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$,

(2) l'application T est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, si $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a $\nabla \tilde{u}_n \to \nabla \tilde{u}$ dans $L^2(\Omega)^N$ et il n'est pas très difficile de montrer que $T(\tilde{u}_n) \to T(\tilde{u})$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Mais, l'application T n'est (en général) pas compacte (de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$). Si on était en dimension finie, les points (1) et (2) suffiraient à montrer l'existence d'une solution. L'idée est donc de considérer des problèmes approchés en dimension finie et de passer à la limite en utilisant la monotonie de l'opérateur (qui est vraie sous des hypothèses données sur a ci-après).

3.2.2 Opérateur de Leray-Lions

On considère ici un cas un peu simplifié des opérateurs de Leray-Lions. On considère les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}
&1)\ \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ N \geq 1,\ 1 < p < +\infty,\\
&2)\ a\ :\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \text{ continue},\\
&3)\ \text{(coercivité) } \exists \alpha > 0\ t.q\ \ a(\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\\
&4)\ \text{(croissance) } \exists C \in \mathbb{R};\ |a(\xi)| \leq C(1+|\xi|^{p-1}),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\\
&5)\ \text{(monotonie) } (a(\xi)-a(\eta))\cdot(\xi-\eta) \geq 0 \quad \forall (\xi,\eta) \in (\mathbb{R}^N)^2,\\
&6)\ \sigma \in L^\infty(\Omega); \exists \sigma_0 > 0; \sigma \geq \sigma_0 \quad \text{p.p. },\\
&6)\ f \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ces hypothèses permettent en particulier de traiter certains modèles dits “LES” (Large Eddy Simulations) utilisés en mécanique des fluides. On s'intéresse alors au problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -\mathrm{div}(\sigma(x)a(\nabla u(x))) = f(x) \text{ dans } \Omega,\\[2mm] u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.18}$$

Exemple 3.17 Pour $\sigma \equiv 1$ et $a(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ $(1 < p < +\infty)$, l'équation s'écrit $-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f$. L'opérateur $u \mapsto -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ s'appelle le p-laplacien. Pour $p = 2$, on retrouve le Laplacien classique. Le cas $p = 3$ donne l'opérateur de Smagoriskii qui apparaît dans un modèle de LES.

Remarque 3.18 Le cadre général des opérateurs dits “de Leray-Lions”, contient des fonctions $a(x, u, \nabla u)$ au lieu de $a(x, \nabla u)$.

Cherchons une forme faible adéquate de (3.18). Remarquons que si $w \in L^p(\Omega)^N$, alors, l'hypothèse de croissance sur a donne

$$\begin{aligned} |a(w)| &\leq C(1+|w|^{p-1})\\ &\leq C + C|w|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \end{aligned}$$

car $C \in L^\infty$ et $|w|^{p-1} \in L^{p/p-1}(\Omega) = L^{p'}(\Omega)$ avec $p' = \frac{p}{p-1}$ (ou encore $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Donc si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $\nabla u \in (L^p(\Omega))^N$ et $a(\nabla u) \in (L^{p'}(\Omega))^N$.
Prenons alors $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $\nabla v \in L^p(\Omega)^N$. On a donc

$$a(\nabla u)\cdot\nabla v = \sum_{i=1}^N a_i(\nabla u)D_i v \ \in L^1(\Omega).$$

Il est donc naturel de chercher $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et de prendre les fonctions test dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
On rappelle aussi que si $f \in L^{p'}(\Omega)$, l'application $v \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est linéaire continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc un élément du dual (topologique) de $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ce dual est noté $W^{-1,p'}(\Omega)$). Par abus de langage, on note encore f cet élément de $W^{-1,p'}(\Omega)$, that is to say que pour $f \in L^{p'}(\Omega)$, on a

$$\langle f, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

La forme faible de (3.18) que l'on considère est donc :

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx =< f, v >_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)}, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{3.19}$$

Remarque 3.19 Le cadre "naturel" du problème (3.19) n'est donc pas limité au cas $f \in L^{p'}(\Omega)$. On peut remplacer dans (3.19) f par n'importe quel élément de $W^{-1,p'}(\Omega)$. Par exemple, si $F \in L^{p'}(\Omega)^N$, on peut remplacer, dans (3.19), $\langle f, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)}$ par $\int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x) dx$. Sous cette hypothèse, le théorème d'existence et d'unicité donné ci après (théorème 3.20) reste vrai.

Théorème 3.20 (Existence et unicité) *Sous les hypothèses* (3.17)*, il existe* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *solution de* (3.19)*. Si de plus* a *est strictement monotone, c'est à dire* $(a(\xi) - a(\eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0$ *pour tout* $(\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^N)^2$*,* $\xi \neq \eta$*, alors il existe une* <u>*unique*</u> *solution* u *de* (3.19)*.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin des lemmes (classiques) d'intégration suivants :

Lemme 3.21 (Cv forte contre cv faible) *Soit* $1 < p < +\infty$*. On pose* $p' = \frac{p}{p-1}$*. On suppose que* $f_n \to f$ *dans* $L^p(\Omega)$ *et* $g_n \to g$ *faiblement dans* $L^{p'}(\Omega)$*. Alors*

$$\int_\Omega f_n \, g_n \, dx \to \int_\Omega f \, g \, dx \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Par contre, on rappelle que si $f_n \to f$ dans L^p faible et $g_n \to g$ dans $L^{p'}$ faible, on n'a pas en général convergence de $\int_\Omega f_n \, g_n \, \mathrm{d}x$ vers $\int_\Omega fg dx$.

Lemme 3.22 *Si* $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), a(\xi) \le C(1 + |\xi|^{p-1})$ *pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *et si* $u_n \to u$ *dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *alors* $a(\nabla u_n) \to a(\nabla u)$ *dans* $L^{p'}(\Omega)^N$*.*

Le lemme 3.22 se démontre par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

On rappelle aussi que les espaces $W_0^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont réflexifs pour $1 < p < +\infty$, et donc pour toute suite bornée d'un de ces espaces, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente dans cet espace. On rappelle enfin que les espaces $W_0^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont séparables, *i.e.* ils contiennent une partie dénombrable dense, ce qui va nous permettre l'approximation par des problèmes de dimension finie. On aura également besoin pour la démonstration du lemme suivant :

Lemme 3.23 (Opérateur coercif dans $\mathbb{R}^N$) *Soit* $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *continue. On suppose que* T *est coercif, c'est à dire que*

$$\frac{T(v) \cdot v}{|v|} \to +\infty \text{ quand } |v| \to +\infty.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^N$*. Alors, il existe* $v \in \mathbb{R}^N$ *t.q.* $T(v) = b$*. L'opérateur* T *est donc surjectif.*

Démonstration On utilise le degré topologique de Brouwer (ce qui possible car on est en dimension finie). On pose $h(t, v) = tT(v) + (1-t)v$. Pour $t = 0$, on a $h(0, v) = v$ (donc $h(0, v) = I$, où I est l'opérateur $v \mapsto v$). Pour $t = 1$ on a $h(1, v) = T(v)$. Pour appliquer le degré, on remarque d'abord que l'application $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est continue (car T est continue).

On veut ensuite montrer qu'il existe $R > 0$ t.q.

$$t \in [0,1], v \in \mathbb{R}^N \text{ et } h(t,v) = b \Rightarrow |v| < R. \tag{3.20}$$

On suppose qu'on a démontré (3.20). Quitte à augmenter R, on peut aussi supposer que $|b| < R$. On pose $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ t.q. } |x| < R\}$. Par invariance par homotopie du degré, on a donc que $d(h(t,\cdot), B_R, b)$ ne dépend pas de t, et donc :

$$d(T, B_R, b) = d(I, B_R, b).$$

Comme $b \in B_R$, on a $d(I, B_R, b) = 1$ et donc $d(T, B_R, b) = 1$. On en déduit l'existence de $v \in B_R$ tel que $T(v) = b$.

Il reste à démontrer qu'il existe $R > 0$ vérifiant (3.20).

Soit $t \in [0,1]$ et $v \in \mathbb{R}^N$ t.q. $h(t,v) = b$, c'est-à-dire $tT(v) + (1-t)v = b$.

On a donc $tT(v) \cdot v + (1-t)v \cdot v = b \cdot v \le |b||v|$ et donc, si $v \neq 0$,

$$t\frac{T(v)\cdot v}{|v|} + (1-t)|v| = t\frac{T(v)\cdot v}{|v|} + (1-t)\frac{v\cdot v}{|v|} \le |b|.$$

Comme $\frac{T(w)\cdot w}{|w|} \to +\infty$ lorsque $|w| \to +\infty$, il existe $R > 0$ t.q.

$$|w| \ge R \Rightarrow \min(\frac{T(w)\cdot w}{|w|}, |w|) > |b|.$$

On en déduit que $|v| < R$. Ceci termine la démonstration. ■

Ce lemme se généralise à n'importe quel espace de dimension finie :

Lemme 3.24 (Opérateur coercif en dimension finie) *Soit E un espace de dimension finie, et $T : E \to E'$ continue (noter que $\dim E' = \dim E < +\infty$). On suppose que T est coercif, that is to say :*

$$\frac{\langle T(v), v\rangle_{E',E}}{\|v\|_E} \to +\infty \textit{ quand } \|v\|_E \to +\infty.$$

Alors, pour tout $b \in E'$ il existe $v \in E$ t.q. $T(v) = b$.

Démonstration On se ramène à $\mathbb{R}^N$. Soit $N = \dim E$. On choisit une base de E, notée $(e_1, \ldots, e_N)$, et on note $(e_1^\star, \ldots, e_N^\star)$ la base duale de E' (that is to say t.q. $\langle e_i^\star, e_j\rangle_{E',E} = \delta_{ij}$). On définit une application I de $\mathbb{R}^N$ dans E et une application J de $\mathbb{R}^N$ dans E' par

$$I(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \text{ et } J(\beta) = \sum_{i=1}^N \beta_i e_i^\star \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^N.$$

L'opérateur I est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans E et l'opérateur J est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans E'. Soit $\tilde{T} = J^{-1} \circ T \circ I$. L'opérateur $\tilde{T}$ est continu de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^N$. On pose $v = I(\alpha)$ et $\beta = \tilde{T}(\alpha)$ (donc $\beta = J^{-1}(T(v))$). On a donc

$$\tilde{T}(\alpha)\cdot\alpha = \beta\cdot\alpha = \sum_{i=1}^N \beta_i\alpha_i = \langle\sum_{j=1}^N \beta_j e_j^\star, \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i\rangle_{E',E} = \langle J(\beta), I(\alpha)\rangle_{E',E} = J(\beta)(\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i) = \langle T(v), v\rangle_{E',E}.$$

En prenant comme norme sur $\mathbb{R}^N$, $\|\alpha\| = \|I(\alpha)\|_E$, l'hypothèse de coercivité sur T donne alors

$$\lim_{\|\alpha\|\to+\infty} \frac{\tilde{T}(\alpha)\cdot\alpha}{\|\alpha\|} = +\infty.$$

Par équivalence des normes en dimension finie, on a donc aussi

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty} \frac{\tilde{T}(\alpha)\cdot\alpha}{|\alpha|} = +\infty.$$

On peut donc appliquer le lemme 3.23 à $\tilde{T}$.

Soit $b \in E'$. On pose $\beta = J^{-1}(b)$. Le lemme 3.23 donne l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}^N$ t.q. $\tilde{T}(\alpha) = \beta$. On pose $v = I(\alpha)$ et on a alors $T(v) = T \circ I(\alpha) = J \circ \tilde{T}(\alpha) = J(\beta) = b$. On a ainsi montré l'existence de v dans E t.q. $T(v) = b$. ■

Démonstration du théorème 3.20

Etape 1 Existence de la solution à un problème en dimension finie

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable. Il existe donc une famille dénombrable $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $E_n = \mathrm{Vect}\{f_1 \dots f_n\}$ l'espace vectoriel engendré par les n premières fonctions de cette famille. On a donc $\dim E_n \le n$ et $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et on a $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = W_0^{1,p}$. On en déduit que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $v_n \to v$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$.

Dans cette première étape, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et on cherche u_n solution du problème suivant, posé en dimension finie :

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \in E_n, \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma a(\nabla u_n)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x =< f, v >_{W^{-1,p'},W_0^{1,p}} \ \forall v \in E_n. \end{array}\right. \tag{3.21}$$

L'application $v \mapsto < f, v >_{W^{-1,p'},W_0^{1,p}}$ est une application linéaire E_n dans $\mathbb{R}$ (elle est donc aussi continue car $\dim E_n < +\infty$). On note b_n cette application. On a donc $b_n \in E_n'$ et

$$\langle b_n, v\rangle_{E_n',E_n} =< f, v >_{W^{-1,p'},W_0^{1,p}} .$$

Soit $u \in E_n$. On note $T_n(u)$ l'application de E_n dans $\mathbb{R}$ qui a $v \in E_n$ associe $\int_\Omega \sigma a(\nabla u)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x$. Cette application est linéaire, c'est donc aussi un élément de E_n' et on a

$$\langle T_n(u), v\rangle_{E_n',E_n} = \int_\Omega \sigma a(\nabla u)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x.$$

On a ainsi défini une application T de E_n dans E_n'. On va montrer que T est continue et coercive. On pourra ainsi en déduire, par le lemme 3.24, que T est surjectif, et donc qu'il existe $u_n \in E_n$ vérifiant $T(u_n) = b_n$, that is to say u_n solution du problème (3.21).

(a) Continuité de T_n On rappelle que n est fixé. Pour simplifier les notations, on oublie ici l'indice n, that is to say que l'on pose $E = E_n$ et $T = T_n$. On munit E de la norme définie par $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$. Soit $u, \bar{u} \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(\bar{u})\|_{E'} &= \max_{v\in E,\, \|v\|_E=1} < T(u) - T(\bar{u}), v >_{E',E} \\ &= \max_{v\in E,\, \|v\|_{W_0^{1,p}}=1} \int_\Omega \sigma(a(\nabla u) - a(\nabla\bar{u}))\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x \\ &\le \max_{v\in W_0^{1,p},\, \|v\|_{W_0^{1,p}}=1} \int_\Omega \sigma(a(\nabla u) - a(\nabla\bar{u}))\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On pose $\beta = \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\|T(u) - T(\bar{u})\|_{E'} &\leq \max_{v \in W_0^{1,p},\, \|v\|_{W_0^{1,p}}=1} \beta \|\, |a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})|\, \|_{L^{p'}(\Omega)} \|\, |\nabla v|\, \|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \beta \|\, |a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})|\, \|_{L^{p'}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Donc si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E t.q. $u_n \to \bar{u}$ dans E, on a

$$\|T(u_n) - T(\bar{u})\|_{E'} \leq \beta \|\, |a(\nabla u_n) - a(\nabla \bar{u})|\, \|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Par le lemme 3.22, on a $a(\nabla u_n) \to a(\nabla \bar{u})$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$. On a ainsi montré que $T(u_n) \to T(\bar{u})$ dans E', et donc que T est continue (de E dans E').

(b) Coercivité de T_n On rappelle qu'on a posé $E = E_n$ et $T = T_n$. On veut montrer que

$$\frac{< T(u), u >_{E',E}}{\|u\|_E} \to +\infty \text{ lorsque } \|u\|_E \to +\infty.$$

Par définition, et grâce aux hypothèses (3.17),

$$< T(u), u >_{E',E} = \int_\Omega \sigma\, a(\nabla u) \cdot \nabla u\, dx \geq \sigma_0\, \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p dx.$$

On a donc

$$< T(u), u >_{E',E} \geq C \|u\|^p_{W_0^{1,p}} = C \|u\|_E^p \quad \text{avec } C = \sigma_0\, \alpha.$$

Finalement,

$$\frac{< T(u), u >_{E',E}}{\|u\|_E} \geq C \|u\|_E^{p-1} \to +\infty \text{ lorsque } \|u\|_E \to +\infty,$$

car on a supposé $p > 1$ (le cas $p = 1$ est plus difficile et demande des outils supplémentaires, mais il est intéressant en géométrie pour le problème des surfaces minimales par exemple).

On a ainsi montré que T est coercive. On peut donc appliquer le lemme 3.24. Il donne l'existence d'une solution au problème en dimension finie (3.21) (cette technique permet aussi par exemple de démontrer l'existence de solution pour le problème (3.19) approché par éléments finis $P1$).

Etape 2 Existence de la solution à un problème en dimension infinie On a montré l'existence d'une solution au problème (3.21). On va maintenant tenter (et réussir !) un passage à la limite sur ce problème lorsque $n \to +\infty$ pour montrer l'existence d'une solution au problème (3.19). Pour cela nous allons :

(a) obtenir une *estimation* sur u_n, qui nous permettra d'obtenir de la *compacité*, et donc d'effectuer

(b) un *passage à la limite* sur les problèmes (3.21) de manière à avoir l'existence d'une solution u du problème (3.19) comme limite des solutions u_n des problèmes (3.21) ; pour cela, il nous faudra une

(c) astuce pour montrer que la *limite du terme non linéaire* est bien le terme qu'on veut. . . .

(a) Estimation sur u_n

On prend $v = u_n$ dans (3.21). On obtient :

$$\sigma_0\, \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}$$

par coercivité de a. On a donc : $\sigma_0\, \alpha \|u_n\|^p_{W_0^{1,p}} \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}$, d'où

$$\|u_n\|^{p-1}_{W_0^{1,p}} \leq \frac{1}{\sigma_0 \alpha} \|f\|_{W^{-1,p'}}.$$

(b) Passage à la limite
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, qui est réflexif. On en déduit qu'il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Par hypothèse, $|a(\nabla u_n)| \leq C(1 + |\nabla u_n|^{p-1})$, donc la suite $(a(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$, qui est réflexif. Donc il existe $\zeta \in (L^{p'}(\Omega))^N$ telle que, à une sous-suite près,

$$a(\nabla u_n) \to \zeta \quad \text{faiblement dans} \quad (L^{p'}(\Omega))^N.$$

Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on sait que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = W_0^{1,p}$, donc il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$\begin{aligned} v_n &\to v \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega), \\ \nabla v_n &\to \nabla v \text{ dans } (L^p(\Omega))^N. \end{aligned}$$

On utilise alors (3.21) avec $v = v_n$ on obtient :

$$\int_\Omega \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla v_n dx =< f, v_n > .$$

Mais $< f, v_n > \to < f, v >$, car v_n converge faiblement vers v dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
De plus $a(\nabla u_n) \to \zeta$ faiblement dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et $\nabla v_n \to \nabla v$ (fortement) dans $(L^p(\Omega))^N$. Donc par le lemme 3.21, on a

$$\int_\Omega \sigma\zeta \cdot \nabla v dx =< f, v >_{W^{-1,p'},W_0^{1,p}} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.22}$$

On a ainsi prouvé l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ t.q. u est la limite faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et t.q. la limite faible dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ de la suite $(a(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, notée ζ, vérifie (3.22). Si ζ était égal à $a(\nabla u)$, on aurait terminé. Malheureusement, ceci n'est pas évident car a peut être non linéaire...

(c) Limite du terme non linéaire Pour terminer, il reste à démontrer que

$$\int_\Omega \sigma\zeta \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \sigma \, a(\nabla u) \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.23}$$

On peut le démontrer par deux manières différentes, selon les hypothèses :

1. Par l'astuce de Minty, qui utilise uniquement la monotonie de a, that is to say $(a(\xi) - a(\eta)).(\xi - \eta) \geq 0$. On a dans ce cas uniquement $u_n \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Par la méthode de Leray-Lions, qui utilise la stricte monotonie de a, that is to say $(a(\xi) - a(\eta)).(\xi - \eta) > 0$ pour tout $\xi, \eta, \xi \neq \eta$. On a alors en plus $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (that is to say une convergence forte et non seulement faible).

(A) Etape commune à Minty et Leray-Lions.
Pour montrer (3.23), on commence par étudier la limite de $\int_\Omega \sigma \, a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n \, dx$. L'astuce consiste à utiliser l'équation ! En effet $\int_\Omega \sigma \, a(\nabla u_n).\nabla u_n dx =< f, u_n > \to < f, u >$ car $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ faible. Mais on sait (étape précédente) que u satisfait (3.22), et donc : $< f, u >_{E',E} = \int_\Omega \sigma\zeta \cdot \nabla u \, dx$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \sigma \, a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n \, dx &=< f, u >_{E',E} \\ &= \int_\Omega \sigma\zeta \cdot \nabla u \, dx. \end{aligned}$$

On distingue maintenant les méthodes "Minty" et "Leray-Lions" (qui sont toutefois très voisines).

(B) Démonstration de (3.23)

- **1ére méthode : Astuce de Minty**

  Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$; il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \to v$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$. On va passer à la limite dans le terme $\int_\Omega \sigma\, a(\nabla u_n).\nabla v_n\, dx$ grâce à l'hypothèse de monotonie. En effet,

$$0 \le \int_\Omega \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n)\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{array}{ccccccc} \displaystyle\int_\Omega \sigma\, a(\nabla u_n)\cdot \nabla u_n\,\mathrm{d}x & - & \displaystyle\int_\Omega \sigma\, a(\nabla u_n)\cdot\nabla v_n\,\mathrm{d}x & - & \displaystyle\int_\Omega \sigma a(\nabla v_n)\cdot\nabla u_n\,\mathrm{d}x & + & \displaystyle\int_\Omega \sigma\, a(\nabla v_n)\cdot\nabla v_n\,\mathrm{d}x \\ = \quad T_{1,n} & - & T_{2,n} & - & T_{3,n} & + & T_{4,n} \quad . \end{array}$$

On a vu que en (A) que $T_{1,n} \to \int_\Omega \sigma\zeta\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x$ lorsque $n\to\infty$.

On a

$$\lim_{n\to+\infty} T_{2,n} = \int_\Omega \sigma\,\zeta\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x$$

par produit d'une convergence forte dans $(L^p)^N$ et d'une convergence faible dans $(L^{p'}(\Omega)^N)$ (lemme 3.21). De même,

$$\lim_{n\to+\infty} T_{3,n} = \int_\Omega \sigma\, a(\nabla v)\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x$$

par produit d'une convergence forte dans $(L^{p'}(\Omega)^N)$ et d'unc convergence faible dans $(L^p(\Omega))^N$. Enfin, on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} T_{4,n} = \int_\Omega \sigma\, a(\nabla v)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x$$

lorsque $n\to+\infty$ et ce dernier terme est le plus simple car on a le produit d'une convergence forte dans $(L^{p'}(\Omega)^N)$ et d'une convergence forte dans $(L^p(\Omega))^N$.

Le passage à la limite dans l'inégalité donne donc :

$$\int_\Omega \sigma(\zeta - a(\nabla v))\cdot(\nabla u - \nabla v)dx \ge 0 \text{ pour tout } v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On choisit maintenant astucieusement la fonction test v. On prend $v = u + \frac{1}{n}w$, avec $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $n\in\mathbb{N}^\star$. On obtient ainsi :

$$-\frac{1}{n}\int_\Omega \sigma\left(\zeta - a(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w)\right)\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x \ge 0$$

et donc

$$\int_\Omega \sigma\left(\zeta - a(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w)\right)\cdot\nabla w\, dx \le 0.$$

Mais $u+\dfrac{1}{n}\,w \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc par le lemme 3.22, $a\left(\nabla u+\dfrac{1}{n}\nabla w\right) \to a(\nabla u)$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient alors

$$\int_\Omega \sigma(\zeta - a(\nabla u)) \cdot \nabla w \; dx \le 0 \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Par linéarité (on peut changer w en $-w$), on a donc : $\int_\Omega \sigma(\zeta - a(\nabla u)) \cdot \nabla w \; dx = 0,\ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On en déduit que

$$\int_\Omega \sigma\; \zeta \cdot \nabla w \; dx = \int_\Omega \sigma\; a(\nabla u) \cdot \nabla w \; dx \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On a donc bien démontré que u est solution de (3.19).

Notons que l'on a montré ce résultat par approximation, c'est à dire en montrant d'abord l'existence de solution à un problème approché qui se pose en dimension finie, puis en passant à la limite. Ceci est également possible en utilisant un problème approché obtenu avec des schémas numériques. Par exemple, avec un schéma numérique utilisant des éléments finis $P1$.

- **2ére méthode : Astuce de Leray-Lions** On suppose maintenant la stricte monotonie de a, that is to say :

$$(a(\xi) - a(\eta)).(\zeta - \eta) > 0 \;\text{ si }\; \xi \ne \eta.$$

On va montrer que u est solution de (3.19) (on le sait déjà, grâce à la première méthode) mais aussi que $a(\nabla u) = \zeta$ et surtout que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Comme $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = W_0^{1,p}$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par hypothèse de monotonie, on a :

$$\int_\Omega \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n) \ge 0.$$

Avec le même raisonnement que pour Minty (mais maintenant $v_n \to u$ au lieu de $v_n \to v$), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n) dx = \int_\Omega \sigma(\zeta - a(\nabla u)).\underbrace{(\nabla u - \nabla u)}_{=\,0} dx,$$

donc si on pose $F_n(x) = \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n)$, on a $F_n \ge 0$ p.p. et $\int_\Omega F_n \,\mathrm{d}x \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc $F_n \to 0$ dans L^1, et donc, après extraction d'une sous-suite, $F_n \to 0$ p.p.. On peut aussi supposer, après extraction d'une sous-suite, que $\nabla v_n \to \nabla u$ p.p..

Soit $x \in \Omega$ t.q. $\sigma(x) \ge \sigma_0$, $F_n(x) \to 0$ (on a donc $a(\nabla u_n(x)) - a(\nabla v_n(x)) \cdot (\nabla u_n(x) - \nabla v_n(x)) \to 0$) et $\nabla v_n(x) \to \nabla u(x)$ lorsque $n \to +\infty$.

Etape A : La suite $(\nabla u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}^N$. En effet, grâce aux hypothèses de croissance et coercivité sur a, on a

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\sigma_0} F_n(x) \ge (a(\nabla u_n(x)) - a(\nabla v_n(x)) \cdot (\nabla u_n(x) - \nabla v_n(x)) \\
&\ge \alpha|\nabla u_n(x)|^p - C(1+|\nabla u_n(x)|^{p-1})|\nabla v_n(x)| - C(1+|\nabla v_n(x)|^{p-1})|\nabla u_n(x)| + \alpha|\nabla v_n(x)|^p.
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée si la suite $(\nabla u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée. Or $F_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc il faut que la suite $(\nabla u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit borné.

Etape B : Soit $\zeta \in \mathbb{R}^N$ limite d'une sous suite de la suite $(\nabla u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc pour cette sous suite (encore notée $(\nabla u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$) $\lim_{n\to+\infty} a(\nabla u_n(x)) = a(\zeta)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$, on en déduit

$$(a(\zeta) - a(\nabla u(x)) \cdot (\zeta - \nabla u(x)) = 0.$$

Or, le 1er terme ce cette égalité est strictement positif si $\zeta \neq \nabla u(x)$. On a donc donc $\zeta = \nabla u(x)$. On a donc (sans extraction de sous suite pour cette étape) $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ quand $n \to +\infty$.

En résumé, on a ainsi montré que $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. (à une sous suite près, car on extrait une sous suite pour avoir $F_n \to 0$ p.p. et $\nabla v_n \to \nabla u$ p.p.). On en déduit que $a(\nabla u_n) \to a(\nabla u)$ p.p.. Ceci est suffisant pour montrer que $\zeta = a(\nabla u)$. En effet, on sait déjà que $a(\nabla u_n) \to \zeta$ dans $(L^{p'})^N(\Omega)$ faible. On en déduit alors que $\zeta = a(\nabla u)$ par le lemme d'intégration (voir poly d'intégration) suivant :

Lemme 3.25 (Compacité $L^p - L^q$) *Soit Ω un ouvert borné. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^q, $q > 1$. alors $f_n \to f$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout r t.q. $1 \leq r < q$.*

Du lemme 3.25, on déduit que la suite $(a(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^r(\Omega)^N$, pour $1 \leq r < p'$, vers $a(\nabla u)$. Comme cette même suite converge faiblement dans $(L^{p'})^N(\Omega)$ vers ζ, on peut conclure (par exemple en utilisant l'unicité de la limite faible dans $L^r(\Omega)^N$) que les limites sont égales, that is to say

$$\zeta = a(\nabla u) \text{ p.p..}$$

Il reste à montrer que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. On sait déjà que $u_n \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc (fortement) dans $L^p(\Omega)$. Comme, après extraction d'une sous suite, on a $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p., le lemme 3.25 nous donne $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^r(\Omega)^N$ pour tout $1 \leq r < p$ et donc $u_n \to u$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$ pour tout $1 \leq r < p$. En raisonnant par contradiction on a même $u_n \to u$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$ pour tout $1 \leq r < p$ sans extraction de sous suite. Mais ceci ne donne pas la convergence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour démontrer cette convergence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on réutilise l'étape (A) commune à Minty et Leray-Lions. Cette étape a donné

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx = \int_\Omega \sigma\zeta \cdot \nabla u dx.$$

Mais, on sait maintenant que $\zeta = a(\nabla u)$ p.p., on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx = \int_\Omega \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla u dx.$$

On rappelle maintenant un lemme classique d'intégration (encore...), valable dans tout espace mesuré mais que l'on donne ici dans le cas qui nous intéresse.

Lemme 3.26 (Convergence L^1 pour une suite de fonctions positives)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^1(\Omega)$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $L^1(\Omega)$ vérifie :

1. $f_n \geq 0$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

2. $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$,

3. $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$.

Alors $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$.

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p.. On applique alors le lemme 3.26 à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n = \sigma a(\nabla u_n)\cdot\nabla u_n$. Le lemme 3.26 donne la convergence $L^1(\Omega)$ de cette suite et donc l'équiintégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Avec l'hypothèse de coercivité sur a et l'hypothèse sur σ, on obtient l'équiintégrabilité de la suite $(|\nabla u_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. Il reste à appliquer le théorème de Vitali (voir le poly d'intégration) pour conclure que $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^p(\Omega)^N$ et donc que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme d'habitude, un argument par contradiction montre que cette convergence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ a lieu sans extraction sous suite dès que u_n converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (et pour avoir cette convergence, on a dû extraire une sous suite). Dans l'étape 3 ci dessous, on va démontrer l'unicité de la solution de (3.19) si a est strictement monotone. Ceci permet de conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (sans extraction de sous suite) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers l'unique solution de (3.19).

On a ainsi terminé la partie "existence" du théorème 3.20

Etape 3 : Unicité On suppose que a est strictement monotone. Soient u_1 et u_2 deux solutions.

$$\int_\Omega \sigma a(\nabla u_i)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x =< f, v > \quad i=1,2 \qquad \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On fait la différence des deux équations, et on prend $v = u_1 - u_2$. On obtient :

$$\int_\Omega \sigma(a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2))\cdot\nabla(u_1-u_2)\, dx = 0.$$

Or $Y = \sigma(a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2))\cdot\nabla(u_1-u_2) \geq 0$, et $Y > 0$ si $\nabla u_1 \neq \nabla u_2$; on a donc $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. et donc $u_1 = u_2$ car u_1 et $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 3.27 Dans le cas des opérateurs de Leray - Lions, lorsque a dépend de x, ∇u mais aussi de u, on arrive encore à montrer des résulats d'unicité si $p \leq 2$.

■

3.3 Exercices

Exercice 3.1 (Continuité d'une application de L^p dans L^q)
Soit (E,T,m) un espace mesuré fini, $p,q\in[1,\infty[$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C\in\mathbb{R}_+^\star\,;\ |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C,\ \forall s\in\mathbb{R}. \tag{3.24}$$

1. Soit $u\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $g\circ u\in\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

   On pose $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, pour $r=p$ et $r=q$. Pour $u\in L^p$, on pose $G(u) = \{h\in\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m); h = g\circ v$ p.p.$\}$, avec $v\in u$ (de sorte que $G(u)\in L^q$).
2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset L^p$. On suppose que $u_n\to u$ p.p., quand $n\to+\infty$, et qu'il existe $F\in L^p$ t.q. $|u_n|\leq F$ p.p., pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n)\to G(u)$ dans L^q.
4. Montrer que G est continue de L^p dans L^q.
5. On considère ici $(E,T,m) = ([0,1],\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et on prend $p=q=1$. On suppose que g ne vérifie pas (3.24). On va construire $u\in L^1$ t.q. $G(u)\notin L^1$.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\alpha_n\in\mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)|\geq n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n|\geq n$.

(b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n| n^2} = 1.$$

(c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n|n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1},a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

Corrigé –

1. *La fonction u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et g est borélienne (that is to say mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On en déduit, par composition, que $g \circ u$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).*

   Pour $s \in [-1,1]$, on a $|g(s)| \le 2C$ et donc $|g(s)|^q \le 2^q C^q$. Pour $s \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, on a $|g(s)| \le 2C|s|^{\frac{p}{q}}$ et donc $|g(s)|^q \le 2^q C^q |s|^p$. On a donc, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $|g(s)|^q \le 2^q C^q + 2^q C^q |s|^p$. On en déduit que, pour tout $x \in E$, $|g \circ u(x)|^q = |g(u(x))|^q \le 2^q C^q + 2^q C^q |u(x)|^p$, et donc :

$$\int |g \circ u|^q dm \le 2^q C^q \|u\|_p^p + 2^q C^q m(E),$$

   ce qui donne $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

2. *Soient $v, w \in u$. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $v = w$ sur A^c. On a donc aussi $g \circ v = g \circ w$ sur A^c et donc $g \circ v = g \circ w$ p.p.. On en déduit que $\{h \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m); h = g \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m); h = g \circ w \text{ p.p.}\}$.*

   $G(u)$ ne dépend donc pas du choix de v dans u.

3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to +\infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \to G(u)$ p.p..*

   On remarque aussi que $|g \circ u_n| \le C|u_n|^{\frac{p}{q}} + C \le C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \le C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Comme $F \in L^p$, on a $|F|^{\frac{p}{q}} \in L^q$. Les fonctions constantes sont aussi dans L^q (car $m(E) < \infty$). On a donc $C|F|^{\frac{p}{q}} + C \in L^q$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q, il donne que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$.

4. *On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^p dans L^q. Il existe donc $u \in L^p$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ t.q. $u_n \to u$ dans L^p et $G(u_n) \not\to G(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$.*

   Comme $G(u_n) \not\to G(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et :

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_q \ge \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

   (La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(G(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

   Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans L^p, on peut appliquer la "réciproque partielle de la convergence dominée dans L^p". On obtient l'existence de $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de $F \in L^p$ t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ p.p. et $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).

   On peut maintenant appliquer la question 2 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle donne que $G(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$. Ce qui est en contradiction avec (3.25).

5.(a) *On raisonne par l'absurde. On suppose que $|g(s)| < n|s|$ pour tout s t.q. $|s| \ge n$. On pose $M = \max\{|g(s)|, s \in [-n,n]\}$. On a $M < \infty$ car g est continue sur le compact $[-n,n]$ (noter que n est fixé). en posant $C = \max\{n, M\}$, on a donc :*

$$|g(s)| \le C|s| + C, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R},$$

en contradiction avec l'hypothèse que g ne vérifie pas (3.24).

Il existe donc s, t.q. $|s| \geq n$ et $|g(s)| \geq n|s|$. Ceci prouve l'existence de α_n.

(b) Comme $\alpha_n \geq n$, on a $\frac{1}{|\alpha_n|n^2} \leq \frac{1}{n^3}$ et donc :

$$0 < \beta = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{|\alpha_n|n^2} < \infty.$$

On choisit alors $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

(c) Pour $n \geq 2$, on a $a_n = 1 - \sum_{p=1}^{n-1} \dfrac{\alpha}{|\alpha_p|p^2}$.

Grâce au choix de α, on a donc $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $a_n \downarrow 0$, quand $n \to +\infty$.

La fonction u est bien mesurable et, par le théorème de convergence monotone, on obtient :

$$\int |u|d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |\alpha_n|(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\alpha}{n^2} < \infty.$$

Donc, $u \in \mathcal{L}^1$ et aussi $u \in L^1$ en confondant, comme d'habitude, u avec sa classe.

on remarque ensuite que $g \circ u = \sum_{n=1}^{+\infty} g(\alpha_n) 1_{[a_{n+1},a_n[}$. On a donc :

$$\int |g \circ u|d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |g(\alpha_n)|(a_n - a_{n+1}) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\alpha}{n} = \infty.$$

ceci montre que $g \circ u \notin \mathcal{L}^1$ et donc $G(u) \notin L^1$.

Exercice 3.2 (Existence par Schauder)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, $g \in L^2(\Omega)$, a une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et h une fonction continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

— $0 < \alpha = \inf_{s\in\mathbb{R}} a(s) \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} a(s) = \beta < +\infty$,

— il existe $\delta \in [0, 1[$ et $C_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $|h(s, \xi)| \leq C_1(1 + |s|^\delta + |\xi|^\delta)$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

1. Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $h(\overline{u}, \nabla\overline{u}) \in L^2(\Omega)$ et qu'il existe un unique u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(\overline{u}(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega h(\overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x))v(x)dx = \int_\Omega g(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.26}$$

Dans la suite, on note T l'application qui à $\overline{u}$ associe u, unique solution de (3.26). L'application T est donc de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

2. (Estimation sur u) Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u = T(\overline{u})$. Montrer qu'il existe C_2 ne dépendant que Ω, α, g et C_1 t.q.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2(1 + \|\overline{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta).$$

[On pourra prendre $v = u$ dans (3.26).]
En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q.

$$\|\overline{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R.$$

3. (Continuité de T) Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ et $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. On suppose que $\overline{u}_n \to \overline{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$). On pose $f_n = h(\overline{u}_n, \nabla\overline{u}_n)$, $f = h(\overline{u}, \nabla\overline{u})$, $u_n = T(\overline{u}_n)$ et $u = T(\overline{u})$.

(a) Montrer que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$.

(b) Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

(c) Montrer que $\displaystyle\int_\Omega a(\bar{u}_n(x))\nabla u_n(x)\cdot\nabla u_n(x)dx \to \int_\Omega a(\bar{u}(x))\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)dx$.

En déduire que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra s'inspirer de l'exercice 2.16.]

4. (Compacité de T) Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$. On pose $f_n = h(\overline{u}_n, \nabla\overline{u}_n)$ et $u_n = T(\overline{u}_n)$. Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ t.q.

   $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$,

   $a(\overline{u}_n) \to b$ p.p..

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra raisonner comme dans l'exercice 2.16.]
5. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = T(u)$ (et donc u solution de (3.26) avec $\overline{u} = u$).

Corrigé –

1. *On remarque que* $|h(\bar{u},\nabla\bar{u})| \le C_1(1+|\bar{u}|^\delta+|\nabla\bar{u}|^\delta) \in L^{\frac{2}{\delta}}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *car* $\delta \le 1$.

   Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, *on pose*
$$A(u,v) = \int_\Omega a(\bar{u})\nabla u\cdot\nabla v\,dx.$$
   Comme $0 < \alpha \le a(\bar{u}) \le \beta$, *il est facile de montrer de A est bilinéaire continue et coercive sur* $(H_0^1(\Omega))^2$.
   On conclut alors qu'il existe bien une unique solution à (3.26).
2. *En prenant $v = u$ dans (3.26), on obtient*
$$\alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + C_1|\Omega|^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \Big(C_1\||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} + C_1\||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)}\Big)\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$
   Avec C_Ω donnée par l'inégalité de Poincaré, on en déduit
$$\frac{\alpha}{C_\Omega}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)} + C_1\left(|\Omega|^{1/2} + \||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.27}$$
   Mais, en utilisant l'inégalité de Hölder (ou l'inégalité de Jensen pour la fonction (concave) de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $s \mapsto s^\delta$) on obtient
$$\||\bar{u}|^\delta\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\bar{u}|^{2\delta}dx \le \Big(\int_\Omega \bar{u}^2\Big)^\delta|\Omega|^{1-\delta}.$$
   et
$$\||\nabla\bar{u}|^\delta\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla\bar{u}|^{2\delta}dx \le \Big(\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^2\Big)^\delta|\Omega|^{1-\delta}.$$
   (Si $\delta \in [1/2, 1[$, ces deux inégalités correspondent à l'injection classique de $L^2(\Omega)$ dans $L^{2\delta}(\Omega)$.)
   De ces deux majorations (et avec l'inégalité de Poincaré), on déduit l'existence de $\bar{C}$ ne dépendant que de Ω et δ t.q.
$$\||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} \le \bar{C}\|\bar{u}\|^\delta_{H_0^1(\Omega)} \text{ et } \||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} \le \bar{C}\|\bar{u}\|^\delta_{H_0^1(\Omega)}.$$
   En revenant à (3.27), on obtient l'existence de C_2 ne dépend que α, g, Ω et C_1 t.q.
$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_2\left(1 + \|\bar{u}\|^\delta_{H_0^1(\Omega)}\right).$$
   Pour conclure, on remarque qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $R > C_2(1+R^\delta)$. En effet, on a
$$R - C_2 - C_2R^\delta = R(1 - \frac{C_2}{R} - C_2R^{\delta-1}).$$
   il suffit donc de prendre $R > 2C_2$ et $R > (2C_2)^{\frac{1}{1-\delta}}$. (c'est ici que l'hypothèse $\delta < 1$ est utilisée.)
   On a alors
$$\|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \le R \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_2(1+R^\delta) \le R.$$

3.(a) Si $f_n \not\to f$ dans $L^2(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous suite, encore notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.

$$\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer que

$$\bar{u}_n \to \bar{u} \text{ p.p., avec un domination par une fonction } G \text{ appartenant à } L^2(\Omega).$$

et

$$\nabla\bar{u}_n \to \nabla\bar{u} \text{ p.p., avec un domination par une fonction } H \text{ appartenant à } L^2(\Omega).$$

On a alors $f_n \to f$ p.p. et $|f_n| \leq C_1(1 + |G|^\delta + |H|^\delta)$ p.p. (et pour tout $n \in \mathbb{N}$). Comme $0 \leq \delta \leq 1$, on a $|G|^\delta + |H|^\delta \in L^2(\Omega)$. Le théorème de convergence dominée (dans $L^2(\Omega)$) donne alors $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$, en contradiction avec (3.28).

(b) La question 2 donne que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Si $u_n \not\to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$, $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous suite, encore noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q.

$$|\langle\psi, u_n - u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.29}$$

Puis, après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer

$$\begin{aligned} u_n &\to w \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ \bar{u}_n &\to \bar{u} \quad \text{p.p..} \end{aligned}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $u_n = T(\bar{u}_n)$, on a

$$\int_\Omega a(\bar{u}_n)\nabla u_n \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega f_n v dx = \int_\Omega gv\, dx.$$

Comme $a(\bar{u}_n) \to a(\bar{u})$ p.p. et $|a(\bar{u}_n)| \leq \beta$ p.p., on a, par convergence dominée, $a(\bar{u}_n)\nabla v \to a(\bar{u})\nabla v$ dans $L^2(\Omega)^N$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient donc

$$\int_\Omega a(\bar{u})\nabla w \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega fv dx = \int_\Omega gv\, dx.$$

Ce qui prouve que $w = u$, en contradiction avec (3.29). On a bien ainsi montré que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_\Omega a(\bar{u}_n)\nabla u_n \cdot \nabla u_n\, dx = \int_\Omega gu_n\, dx - \int_\Omega f_n u_n\, dx.$$

Comme $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(\bar{u}_n)\nabla u_n \cdot \nabla u_n\, dx = \int_\Omega gu\, dx - \int_\Omega fu\, dx.$$

et donc, comme $u = T(\bar{u})$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(\bar{u}_n)\nabla u_n \cdot \nabla u_n\, dx = \int_\Omega a(\bar{u})\nabla u \cdot \nabla u\, dx.$$

On remarque maintenant que

$$\alpha\|u_n - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega a(\bar{u}_n)(\nabla u_n - \nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)\, dx.$$

Pour montrer que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$, il suffit donc de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(\bar{u}_n)(\nabla u_n - \nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)\, dx = 0. \tag{3.30}$$

Pour montrer (3.30), on utilise le fait (facile à montrer en raisonnant par l'absurde) que

$$a(\bar{u}_n)\nabla u \to a(\bar{u})\nabla u \text{ dans } L^2(\Omega)^N, \text{ quand } n \to +\infty.$$

On en déduit que (en utilisant le fait que $\nabla u_n \to \nabla u$ faiblement dans $L^2(\Omega)^N$)

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(\bar{u}_n)\nabla u \cdot \nabla u_n\, dx = \int_\Omega a(\bar{u})\nabla u \cdot \nabla u\, dx \\ \text{et } &\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(\bar{u}_n)\nabla u \cdot \nabla u\, dx = \int_\Omega a(\bar{u})\nabla u \cdot \nabla u\, dx. \end{aligned}$$

Ceci permet de montrer (3.30) et donc de conclure que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. Ce qui prouve la continuité de l'opérateur T de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

4. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et la suite $(\bar u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et donc relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. On peut donc supposer, après extraction d'une sous suite, qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ et $\zeta \in L^2(\Omega)$ t.q.*
$$\begin{aligned} &f_n \to f \text{ faiblement dans } L^2(\Omega),\\ &\bar u_n \to \zeta \text{ p.p. .}\end{aligned} \tag{3.31}$$
En posant $b = a(\zeta)$, on a donc $b \in L^\infty(\Omega)$ et $a(\bar u_n) \to b$ p.p..
(On peut montrer que $\zeta \in H_0^1(\Omega)$ mais il est faux de dire que $f = h(\zeta, \nabla\zeta)$ p.p..)

Comme $\alpha \le b \le \beta$ p.p., il existe un et un seul u solution de
$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega),\\ \displaystyle\int_\Omega b\nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega (g-f)v\,dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).\end{array}\right. \tag{3.32}$$
On va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers u, solution de (3.32) (on travaille ici avec la suite extraite qui vérifie (3.31)).
On sait déjà que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En raisonnant par l'absurde, il est alors assez facile de montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, supposons que (après extraction de sous suite) $u_n \to w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in H_0^1(\Omega)$,
$$\int_\Omega a(\bar u_n)\nabla u_n\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega (g-f_n)v\,dx.$$
En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette équation, grâce aux convergences données dans (3.31), on obtient
$$\int_\Omega b\nabla w\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega (g-f)v\,dx.$$
Ceci prouve que $w = u$. On en déduit bien que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On a donc aussi $u_n \to u$ (fortement) dans $L^2(\Omega)$.

Il reste à montrer la convergence (forte) de u_n vers u dans $H_0^1(\Omega)$. Pour cela on remarque tout d'abord que
$$\int_\Omega a(\bar u_n)\nabla u_n\cdot\nabla u_n\,dx = \int_\Omega (g-f_n)u_n\,dx \to \int_\Omega (g-f)u\,dx \text{ quand } n \to +\infty.$$
Comme u est solution de (3.32) on a donc
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(\bar u_n)\nabla u_n\cdot\nabla u_n\,dx = \int_\Omega b\nabla u\cdot\nabla u\,dx.$$
En utilisant cette convergence et (3.31) on montre alors que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(\bar u_n)\nabla(u_n-u)\cdot\nabla(u_n-u)\,dx = 0.$$
Comme $\alpha\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \int_\Omega a(\bar u_n)\nabla(u_n-u)\cdot\nabla(u_n-u)\,dx$ on conclut bien que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

5. *Il suffit ici d'appliquer le théorème de Schauder. L'opérateur T est continu et compact de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe $R > 0$ t.q. T envoie la boule de centre 0 et de rayon R (de $H_0^1(\Omega)$) dans elle-même. Le théorème de Schauder permet alors de dire qu'il existe u dans cette boule (et donc dans $H_0^1(\Omega)$) t.q. $u = T(u)$. La fonction u ainsi trouvée est solution de (3.26) avec $\bar u = u$.*

Exercice 3.3 (Existence par Schauder, généralisation de l'exercice 3.2)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$), a une fonction de $\Omega\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

— a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.

— Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha \le a(x,s) \le \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$.

— f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.

— Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0, 1[$ t.q. $|f(\cdot, s, p)| \leq C(d + |s|^\delta + |p|^\delta)$ p.p., pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Montrer qu'il existe un et un seul u solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, u(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.33}$$

[On pourra construire une application de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et utiliser le théorème de Schauder.]

Corrigé –

On suit la même démarche que pour l'exercice 3.2 (les modifications sont mineures). On construit un opérateur, noté T, de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. On montre que, si R est bien choisi, T envoie la boule de centre 0 et de rayon R dans elle même. Enfin, on montre la continuité et la compacité de T et on conclut alors par le théorème de Schauder.

Construction de T

Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. En choisissant un représentant de la classe de fonctions $\bar{u}$, la fonction $x \mapsto a(x, \bar{u}(x))$ est borélienne et ne change que sur un ensemble de mesure nulle si on change le représentant de $\bar{u}$, ceci est dû au fait que a est une fonction de Carathéodory (ce qui est la première hypothèse sur a). Avec la seconde hypothèse sur a, on a donc $a(\cdot, \bar{u}) \in L^\infty(\Omega)$ et $\alpha \leq a(\cdot, \bar{u}) \leq \beta$ p.p..

De même, en choisissant des représentants de $\bar{u}$ et $\nabla\bar{u}$, la fonction $x \mapsto f(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u})$ est borélienne et ne change que sur un ensemble de mesure nulle si on change les représentants de $\bar{u}$ et $\nabla\bar{u}$, ceci est aussi dû au fait que f est une fonction de Carathéodory (ce qui est la première hypothèse sur f). Avec la seconde hypothèse sur f, on a

$$|f(\cdot, \bar{u}, \nabla\bar{u})| \leq C(d + |\bar{u}|^\delta + |\nabla\bar{u}|^\delta) \text{ p.p.}$$

et donc $f(\cdot, \bar{u}, \nabla\bar{u}) \in L^2(\Omega)$ car $d, \bar{u}, |\nabla\bar{u}| \in L^2(\Omega)$ et $\delta \leq 1$.

On peut maintenant appliquer le théorème 2.6, il donne l'existence et l'unicité de u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \bar{u}(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.34}$$

On pose $u = T(\bar{u})$. On a ainsi construit une application T de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Pour conclure, il suffit maintenant de montrer que T admet un point fixe.

Estimations sur T

Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u = T(\overline{u})$. En prenant $v = u$ dans (3.34), on obtient

$$\alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\|d\|_{L^2(\Omega)} + \||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} + C_1\||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)})\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Avec C_Ω donnée par l'inégalité de Poincaré, on en déduit

$$\frac{\alpha}{C_\Omega}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\|d\|_{L^2(\Omega)} + \||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)}). \tag{3.35}$$

Mais, comme dans l'exercice 3.2, on a (en utilisant l'inégalité de Hölder)

$$\||\bar{u}|^\delta\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big(\int_\Omega \bar{u}^2\Big)^\delta |\Omega|^{1-\delta} \text{ et } \||\nabla\bar{u}|^\delta\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big(\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^2\Big)^\delta |\Omega|^{1-\delta}.$$

On en déduit (avec l'inégalité de Poincaré) l'existence de $\bar{C}$ ne dépendant que de Ω et δ t.q.

$$\||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C}\|\bar{u}\|^\delta_{H_0^1(\Omega)} \text{ et } \||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C}\|\bar{u}\|^\delta_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec (3.27), on obtient l'existence de C_2 ne dépend que α, Ω et C t.q.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2\left(1 + \|\bar{u}\|^\delta_{H_0^1(\Omega)}\right). \tag{3.36}$$

Pour conclure cette étape, on remarque qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $R > C_2(1 + R^\delta)$ (car $\delta < 1$) et donc

$$\|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \le R \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_2(1 + R^\delta) \le R.$$

Ce qui montre que T envoie B_R dans B_R où B_R est la boule (fermée) de centre 0 et de rayon R.

Continuité de T

Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ et $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. On suppose que $\overline{u}_n \to \overline{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$). On pose $u_n = T(\overline{u}_n)$ et $u = T(\overline{u})$. On veut montrer que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On pose aussi $g_n = f(\cdot, \overline{u}_n, \nabla\overline{u}_n)$, $g = f(\cdot, \overline{u}, \nabla\overline{u})$, $A_n = a(\cdot, \bar{u}_n)$ et $A = a(\cdot, \bar{u})$.

On commence par remarquer que $g_n \to g$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$). La démonstration est ici identique à celle de $f_n \to f$ dans l'exercice 3.2. la seule modification est dans la domination de g_n qui ici est $|g_n| \le C(d + |G|^\delta + |H|^\delta)$ p.p. (au lieu de $|f_n| \le C_1(1 + |G|^\delta + |H|^\delta)$ p.p. dans l 'exercice 3.2).

On montre maintenant que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On suit encore le même raisonnement que dans l'exercice 3.2. L'inégalité (3.36) donne que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Si $u_n \not\to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$, $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous suite, encore noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q.

$$|\langle \psi, u_n - u\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \ge \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.37}$$

Puis, après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer

$$\begin{aligned} &u_n \to w \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega),\\ &\bar{u}_n \to \bar{u} \quad \text{p.p..} \end{aligned}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $u_n = T(\bar{u}_n)$, on a

$$\int_\Omega A_n \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega g_n v \, dx. \tag{3.38}$$

Comme $A_n \to A$ p.p. (puisque a est p.p. continue par rapport à son deuxième argument) et $|A_n| \le \beta$ p.p., on a, par convergence dominée, $A_n\nabla v \to A\nabla v$ dans $L^2(\Omega)^N$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient donc

$$\int_\Omega A\nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega gv \, dx.$$

Ce qui prouve que $w = u$ (grâce à l'unicité de la solution de (3.34)) et donc $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, en contradiction avec (3.37). On a bien ainsi montré que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$ (sans extraction de sous-suite).

on veut montrer maintenant que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ (et pas seulement faiblement). En prenant $v = u_n$ dans (3.38), on a

$$\int_\Omega A_n \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_\Omega g_n u_n \, dx.$$

Comme $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et que $g_n \to g$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A_n \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_\Omega gu \, dx.$$

et donc, comme $u = T(\bar{u})$, (3.34) donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A_n \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx. \tag{3.39}$$

On remarque maintenant que

$$\alpha\|u_n - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \int_\Omega A_n(\nabla u_n - \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, dx. \tag{3.40}$$

Comme dans l'exercice 3.2, on utilise le fait que

$$A_n \nabla u \to A\nabla u \text{ dans } L^2(\Omega)^N, \text{ quand } n \to +\infty$$

et que $\nabla u_n \to \nabla u$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$. *Ceci donne*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega A_n\nabla u\cdot\nabla u_n\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u\,dx$$
$$\text{et } \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega A_n\nabla u\cdot\nabla u\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u\,dx,$$

et donc, avec (3.39),

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega A_n(\nabla u_n-\nabla u)\cdot(\nabla u_n-\nabla u)\,dx = 0.$$

On conclut bien, avec (3.40), que $u_n \to u$ *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Ce qui prouve la continuité de l'opérateur* T *de* $H_0^1(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$.

Compacité de T

On suit toujours le raisonnement fait pour l'exercice 3.2. Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de* $H_0^1(\Omega)$. *On pose* $g_n = f(\cdot,\overline{u}_n,\nabla\overline{u}_n)$ *et* $u_n = T(\overline{u}_n)$.

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^2(\Omega)$ *et la suite* $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$ *et donc relativement compacte dans* $L^2(\Omega)$. *On peut donc supposer, après extraction d'une sous suite, qu'il existe* $g\in L^2(\Omega)$ *et* $\zeta\in L^2(\Omega)$ *t.q.*

$$\begin{aligned} &g_n \to g \text{ faiblement dans } L^2(\Omega),\\ &\bar{u}_n \to \zeta \text{ p.p. .}\end{aligned} \tag{3.41}$$

En posant $b = a(\cdot,\zeta)$, *on a donc* $b\in L^\infty(\Omega)$ *et* $a(\cdot,\bar{u}_n)\to b$ *p.p..*

Comme $\alpha\le b\le\beta$ *p.p., il existe un et un seul* u *solution de*

$$\begin{cases} u\in H_0^1(\Omega),\\ \displaystyle\int_\Omega b\nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega gv\,dx \text{ pour tout } v\in H_0^1(\Omega).\end{cases} \tag{3.42}$$

On va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $H_0^1(\Omega)$ *vers* u, *solution de (3.42) (on travaille ici avec la suite extraite qui vérifie (3.41)).*

On sait déjà que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$. *En raisonnant par l'absurde, il est alors assez facile de montrer que* $u_n\to u$ *faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$. *En effet, supposons que (après extraction de sous suite)* $u_n\to w$ *faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$. *On a alors, pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et tout* $v\in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega a(x,\bar{u}_n)\nabla u_n\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega g_n v\,dx.$$

En passant à la limite quand $n\to+\infty$ *dans cette équation, grâce aux convergences données dans (3.41), on obtient*

$$\int_\Omega b\nabla w\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega gv\,dx.$$

Ceci prouve que $w = u$. *On en déduit bien que* $u_n\to u$ *faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$ *quand* $n\to+\infty$. *On a donc aussi* $u_n\to u$ *(fortement) dans* $L^2(\Omega)$.

Il reste à montrer la convergence (forte) de u_n *vers* u *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Pour cela on remarque tout d'abord que*

$$\int_\Omega a(x,\bar{u}_n)\nabla u_n\cdot\nabla u_n\,dx = \int_\Omega g_n u_n\,dx \to \int_\Omega gu\,dx \text{ quand } n\to+\infty.$$

Comme u *est solution de (3.42) on a donc*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\bar{u}_n)\nabla u_n\cdot\nabla u_n\,dx = \int_\Omega b\nabla u\cdot\nabla u\,dx.$$

En utilisant cette convergence et (3.41) on montre alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\bar{u}_n)\nabla(u_n-u)\cdot\nabla(u_n-u)\,dx = 0.$$

Comme $\alpha\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \int_\Omega a(x,\bar{u}_n)\nabla(u_n-u)\cdot\nabla(u_n-u)\,dx$ *on conclut bien que* $u_n\to u$ *dans* $H_0^1(\Omega)$. *(On notera que la convergence est obtenue seulement pour la suite extraite qui vérifie (3.41).)*

On a bien montré la compacité de T.

Conclusion

Il suffit ici d'appliquer le théorème de Schauder. L'opérateur T est continu et compact de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe $R > 0$ t.q. T envoie la boule de centre 0 et de rayon R (de $H_0^1(\Omega)$) dans elle-même. Le théorème de Schauder permet alors de dire qu'il existe u dans cette boule (et donc dans $H_0^1(\Omega)$) t.q. $u = T(u)$. La fonction u ainsi trouvée est solution de (3.33).

Exercice 3.4 (Degré d'une application affine)
Soit E un espace de Banach (réel). Pour $R > 0$, on pose $B_R = \{v \in E \text{ t.q. } \|v\|_E < R\}$.

1. Soit f une application constante de E dans E. Il existe donc $a \in E$ t.q. $f(v) = a$ pour tout $v \in E$. Soit $R > 0$ t.q. $\|a\|_E \neq R$. Montrer que $d(I - f, B_R, 0)$ est bien défini et que $d(I - f, B_R, a) = 1$ si $R > \|a\|_E$ et $d(I - f, B_R, a) = 0$ si $R < \|a\|_E$.
2. Soit L une application linéaire compact de E dans E. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de L. Soit $a \in E$. On définit f de E dans E en posant $f(v) = Lv + a$ pour tout $v \in E$.
 (a) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a au plus une solution.
 (b) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a une unique solution. On note b cette solution. Montrer que $d(I - f, B_R, 0) \neq 0$ si $R > \|b\|_E$ et $d(I - f, B_R, 0) = 0$ si $R < \|b\|_E$.

Corrigé –

1. Il est clair que f est continue et compacte et que $u - f(u) = 0$ si et seulement si $u = a$. Si $\|a\|_E \neq R$, $d(I - f, B_R, a)$ est donc bien défini.

Si $R < \|a\|_E$, l'équation $u - f(u) = 0$ n'a pas de solution dans B_R et donc $d(I - f, B_R, 0) = 0$.

Si $R > \|a\|_E$, on pose $h(t, v) = tf(v)$. La fonction h est continue et compacte de $[0, 1] \times E$ dans E et l'équation $u = tf(u)$ n'a pas de solution sur ∂B_R pour $t \in [0, 1]$ (car l'unique solution de $u = tf(u)$ est ta). On a donc $d(I - f, B_R, 0) = d(I - h(1, \cdot), B_R, 0) = d(I - h(0, \cdot), B_R, 0) = d(I, B_R, 0) = 1$.

2.(a) Soit $u_1, u_2 \in E$ t.q. $u_1 - f(u_1) = 0$ et $u_2 - f(u_2) = 0$. En posant $u = u_1 - u_2$ on a donc $u - Lu = 0$. Comme 1 n'est pas valeur propre de L, on a donc $u = 0$. Ce qui prouve bien que $u - f(u) = 0$ a au plus une solution.

(b) On pose $h(t, u) = Lu + ta$. La fonction h est continue et compacte de $[0, 1] \times E$ dans E. Soit $R > 0$. L'équation $u = h(0, u)$ n'a pas de solution sur ∂B_R (car 1 n'est pas valeur propre de L).

Si l'équation $u = h(t, u)$ n'a pas de solution pour $t \in]0, 1]$ sur ∂B_R, on a

$$d(I - f, B_R, 0) = d(I - h(1, 0), B_R, 0) = d(I - L, B_R, 0) \neq 0,$$

d'après le théorème 3.8. Il existe donc $u \in B_R$ t.q. $u - f(u) = 0$.

D'autre part, si l'équation $u = h(t, u)$ a une solution sur ∂B_R pour un t dans $]0, 1]$. On note c cette solution et on remarque $(c/t) - f(c/t) = 0$.

Dans tous les cas, on a donc montré qu'il existe $u \in E$ t.q. $u - f(u) = 0$.

Enfin, il est facile de voir que $d(I - f, B_R, 0) = d(I - L, B_R, 0) \neq 0$ si $R > \|b\|_E$ et $d(I - f, B_R, 0) = 0$ si $R < \|b\|_E$.

Exercice 3.5 (Convection-diffusion, Dirichlet, existence)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.
On s'intéresse ici au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + \operatorname{div}(W\varphi(u)) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.43}$$

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de solution faible au problème (3.43). L'unicité (et la positivité si $f \geq 0$ p.p.) de la solution faible est montré dans l'exercice 3.6.

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, montrer que $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^N$. [Utiliser le théorème d'injection de Sobolev, théorème 1.28.]

Cette première question permet de définir la formulation faible du problème (3.43). Elle consiste à chercher u solution de (3.44).

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega \varphi(u(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.44}$$

Pour montrer l'existence d'une solution à (3.44) on va utiliser la méthode du degré topologique en construisant une application h de $[0,1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ avec $q = 2p/(p-2)$ (de sorte que $1/p + 1/q = 1/2$). On pose donc pour la suite $q = 2p/(p-2)$. Si $N = 3$, on pose $2^\star = 6$ et si $N = 2$, on choisit pour $2^\star$ un nombre strictement supérieur à q (de sorte que, pour $N = 2$ ou 3, $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{2^\star}(\Omega)$ et compactement dans $L^q(\Omega)$).

2. (Construction des opérateurs B et h) Soit $\tilde{u} \in L^q$. Montrer qu'il existe un unique u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega \varphi(\tilde{u}(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.45}$$

On note B l'opérateur qui à $\tilde{u}$ dans $L^q(\Omega)$ associe u solution de (3.45). Puis, pour $t \in [0,1]$ et $\tilde{u} \in L^q(\Omega)$, on pose $h(t, \tilde{u}) = B(t\tilde{u})$.

3. Montrer que h est continu et compact de $[0,1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

4. (Estimations *a priori*) Soit $u \in L^q(\Omega)$ t.q. $u = h(t,u)$. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega \varphi(t\, u(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.46}$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(s) = \int_0^s \frac{1}{(1+|\xi|)^2} d\xi$.

(a) Montrer que $\psi(u) \in H_0^1(\Omega)$. En prenant $v = \psi(u)$ dans (3.46), montrer qu'il existe C_l ne dépendant que Ω, W, φ et f t.q.

$$\| \ln(1 + |u|) \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_l.$$

(b) Pour $v \in L^{2^\star}(\Omega)$, montrer que pour tout $A \geq 0$ on a

$$\int_\Omega |v(x)|^q dx \leq \Big(\int_\Omega |v(x)|^{2^\star} dx \Big)^{\frac{q}{2^\star}} \lambda_N(\{|v| \geq A\})^{1-\frac{q}{2^\star}} + A^q \lambda_N(\Omega).$$

On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$.

(c) En utilisant (a) et (b), montrer qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω, W, φ et f t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < C$.

5. (Degré topologique) Montrer l'existence d'une solution à (3.44).

6. On retire dans cette question l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution de (3.44) avec $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$.

Corrigé –

1. *Le théorème 1.28 donne que $u \in L^6(\Omega)$ si $N = 3$ et que $u \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$ si $N = 2$. Comme φ est lipschitzienne et $\varphi(0) = 0$, il existe C_1 t.q. $|\varphi(s)| \le C_1|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a donc aussi $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$ si $N = 3$ et $\varphi(u) \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$ si $N = 2$.*

   Pour $N = 3$, on a $W \in L^3(\Omega)^3$ et $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$, ce qui donne $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^3$ car $1/6 + 1/3 = 1/2$.

   Pour $N = 2$, on a $W \in L^p(\Omega)^2$ et $\varphi(u) \in L^{2p/(p-2)}(\Omega)$, ce qui donne $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^2$ car $1/p + (p-2)/2p = 1/2$.

2. *L'application $v \mapsto \int_\Omega \varphi(\tilde{u}(x))W(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. L'existence et l'unicité de u solution de (3.45) est donc une conséquence du théorème 2.9.*

3. *On montre tout d'abord la continuité de h. Soit $(t_n, \tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ t.q. $t_n \to t$ et $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $L^q(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On pose $u_n = h(t_n, \tilde{u}_n)$ et $u = h(t, \tilde{u})$. On veut montrer que $u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$. On raisonne par l'absurde. Si $u_n \not\to u$ dans $L^q(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q.*
$$\|u_n - u\|_{L^q(\Omega)} \ge \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.47}$$
   Après une éventuelle extraction de sous suite (ce qui ne change pas (3.47)), on peut aussi supposer que
$$\tilde{u}_n \to \tilde{u} \text{ p.p. et } |\tilde{u}_n| \le H \text{ p.p. pour tout } n \in \mathbb{N},$$
   avec $H \in L^q(\Omega)$. On en déduit (par convergence dominée dans $L^q(\Omega)$ car φ est continue et $|\varphi(s)| \le C_1|s|$) que $\varphi(t_n\tilde{u}_n) \to \varphi(t\tilde{u})$ dans $L^q(\Omega)$ et donc $\varphi(t_n\tilde{u}_n)W \to \varphi(t\tilde{u})W$ dans $L^2(\Omega)^N$ (en remarquant que $|HW| \in L^2(\Omega)$, car $|W| \in L^p(\Omega)$ et $1/p + 1/q = 1/2$).

   Comme la suite $(\varphi(t_n\tilde{u}_n)W)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)^N$ et que u_n est solution de (3.45) avec $t_n\tilde{u}_n$ au lieu de $\tilde{u}$, on montre (en prenant $v = u_n$ dans 3.45) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc supposer (toujours après extraction de sous suite) qu'il existe $\bar{u}$ t.q. $u_n \to \bar{u}$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc aussi (par compacité de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$) $u_n \to \bar{u}$ dans $L^q(\Omega)$. On montre alors que $\bar{u}$ est solution de (3.45) avec $t\tilde{u}$ au lieu de $\tilde{u}$ (et donc que $\bar{u} = u$). Il suffit pour cela de passer à limite, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, dans l'équation suivante
$$\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega \varphi(t_n\tilde{u}_n(x))W(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$
   Ce passage à limite découle facilement du fait que $\nabla u_n \to \nabla\bar{u}$ faiblement dans $L^2(\Omega)^N$ et $\varphi(t_n\tilde{u}_n)W \to \varphi(t\tilde{u})W$ dans $L^2(\Omega)^N$.

   On obtient ainsi que $\bar{u} = B(t\tilde{u}) = u$, en contradiction avec (3.47) (car $u_n \to \bar{u}$ dans $L^q(\Omega)$). On a ainsi montré que $u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$. En fait, un raisonnement semblable par contradiction montrerait même que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ mais ceci est inutile pour la suite.

   On montre maintenant la compacité de h (ce qui est un peu plus facile). On suppose que t est quelconque dans $[0, 1]$ et que $\tilde{u}$ reste dans un borné de $L^q(\Omega)$. On pose $u = h(t, \tilde{u})$. La fonction u est donc solution de (3.45) avec $t\tilde{u}$ au lieu de $\tilde{u}$. Grâce $|\varphi(s)| \le C_1|s|$, la fonction $\varphi(\tilde{u})$ reste dans un borné de $L^q(\Omega)$ et donc $\varphi(\tilde{u})W$ reste dans un borné de $L^2(\Omega)^N$. En prenant maintenant $v = u$ dans (3.45) (avec $t\tilde{u}$ au lieu de $\tilde{u}$), on en déduit que u reste dans un borné de $H_0^1(\Omega)$. Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^q(\Omega)$, on en déduit que u reste dans un compact de $L^q(\Omega)$. Ce qui prouve bien la compacité de h.

   Remarque : un moyen probablement un peu plus rapide pour montrer la continuité et la compacité de h est de remarquer que h est la composée de B, qui est un opérateur continu et compact et $L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, avec l'application $(t, u) \mapsto tu$ qui est continue de $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

4.(a) *La fonction ψ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et est lipschitzienne (car $|\psi'(s)| \le 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Lemme 2.21 donne alors que $\psi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla\psi(u) = (\nabla u)/(1 + |u|)^2$. On remarque aussi $|\psi(s)| \le 1$ pour tout s.*

En prenant $v = \psi(u)$ dans (3.46) et en utilisant $|\varphi(s)| \leq C_1|s|$ et $|\psi(s)| \leq 1$, on obtient

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2}{(1+|u(x)|)^2}dx \leq C_1 \int_\Omega \frac{|tu(x)|}{(1+|u(x)|)^2}|W(x)||\nabla u(x)|dx + \|f\|_{L^1(\Omega)}$$
$$\leq C_1 \int_\Omega |W(x)|\frac{|\nabla u(x)|}{1+|u(x)|}dx + \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

En utilisant $ab \leq \frac{a^2}{2C_1} + 2C_1b^2$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2}{(1+|u(x)|)^2}dx \leq 2C_1^2\||W|\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

On remarque maintenant que (toujours par le lemme 2.21) $\ln(1+|u|) \in H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité précédente donne

$$\|\ln(1+|u|)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 2(2C_1^2\||W|\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)}).$$

Ce qui donne la majoration désirée avec $C_l^2 = 2(2C_1^2\||W|\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)})$.

(b) On a

$$\int_\Omega |v(x)|^q dx = \int_{\{|v|\geq A\}} |v(x)|^q dx + \int_{\{|v|<A\}} |v(x)|^q dx \leq \int_{\{|v|\geq A\}} |v(x)|^q dx + A^q\lambda_N(\Omega).$$

Puis, l'inégalité de Hölder (avec $2^\star/q$ et son conjugué) donne

$$\int_{\{|v|\geq A\}} |v(x)|^q dx = \int_\Omega |v(x)|^q 1_{\{|v|\geq A\}}dx \leq \Big(\int_\Omega |v(x)|^{2^\star}dx\Big)^{\frac{q}{2^\star}} \lambda_N(\{|v|\geq A\})^{1-\frac{q}{2^\star}}.$$

Ce qui donne bien l'inégalité désirée.

(c) On prend $v = u$ dans (3.46), on obtient, avec l'inégalité de Hölder,

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{L^q(\Omega)}\||W|\|_{L^p(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2}C_\Omega\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{3.48}$$

où C_Ω ne dépend que Ω et est donné par l'inégalité de Poincaré.

On commence par utiliser l'inégalité donnée dans 4(b) (élevée à la puissance $1/q$). Pour tout $A > 0$ on a

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq 2\|u\|_{L^{2^\star}}\lambda_N(\{|u|\geq A\})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2^\star}} + 2A\lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}}.$$

Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^\star}(\Omega)$ est continue, il existe $\bar{C}_\Omega$ ne dépendant que de Ω t.q. $\|u\|_{L^{2^\star}(\Omega)} \leq \bar{C}_\Omega\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. On a donc

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq 2\bar{C}_\Omega\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\lambda_N(\{|u|\geq A\})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2^\star}} + 2A\lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}}.$$

On utilise maintenant 4(a) (et l'inégalité de Poincaré). Pour tout $A \geq 0$ on a

$$\ln(1+A)\lambda_N(\{|u|\geq A\})^{\frac{1}{2}} \leq \|\ln(1+|u|)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|\ln(1+|u|)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega C_l.$$

Comme $\lim_{A\to+\infty}\ln(1+A) = +\infty$, il existe donc A ne dépendant (comme C_l, noter aussi que p et q sont donnés par W) que de Ω, W, φ et f t.q.

$$\lambda_N(\{|u|\geq A\})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2^\star}} \leq \frac{1}{4\bar{C}_\Omega C_1\||W|\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Avec ce choix de A, (3.48) donne

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + (2AC_1\||W|\|_{L^p(\Omega)}\lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L^2(\Omega)}C_\Omega)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2(2AC_1\||W|\|_{L^p(\Omega)}\lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L^2(\Omega)}C_\Omega).$$

Ce qui est une estimation sur $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ ne dépendant que Ω, W, φ et f.

5. *Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^q(\Omega)$, la question 4(c) $R > 0$ t.q.*

$$t \in [0,1],\ u \in L^q(\Omega),\ u = h(t,u) \Rightarrow \|u\|_{L^q(\Omega)} < R.$$

La question 3 donne la continuité et la compacité de h de $[0,1]\times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. On peut donc appliquer l'invariance par homotopie du degré topologique sur la boule (ouverte) de $L^p(\Omega)$ de centre 0 et de rayon R avec comme point cible 0. On obtient

$$d(I-h(1,\cdot),B_R,0) = d(I-h(0,\cdot),B_R,0).$$

L'application $\tilde{u} \mapsto h(0,\tilde{u})$ est constante ($h(0,\tilde{u})$ est, pour tout $\tilde{u}$, la solution faible de $-\Delta u = f$ dans Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$). La solution de $v = h(0,v)$ est unique et appartient à B_R. Ceci suffit pour dire que $d(I - h(0,\cdot), B_R, 0) \neq 0$ (on peut ramener la constante à 0 par homotopie en remarquant, par exemple, que $d(I - th(0,\cdot), B_R, 0)$ ne dépend pas de $t \in [0,1]$, voir l'exercice 3.4).

6. *On commence par remplacer $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ dans (3.44). La démonstration est alors très semblable à la précédente. Les seuls points demandant une petite modification sont dans les questions 4(a) et 4(c). Dans la question 4(a), On a majoré $\int_\Omega |f\psi(u)|dx$ par $\|f\|_{L^1(\Omega)}$. Il faut maintenant majorer*
$$|\langle T, \psi(v)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}|.$$
Cette majoration se fait en remarquant que
$$|\langle T, \psi(v)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \le \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\psi(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\frac{|\nabla u|}{(1+|u|)^2}\|_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\le \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\frac{|\nabla u|}{1+|u|}\|_{L^2(\Omega)} \le 4\|T\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\frac{|\nabla u|}{1+|u|}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$
Dans la question 4(c), on a majoré $\int_\Omega |fu|dx$ par $C_\Omega\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Il faut maintenant majorer
$$|\langle T, u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}|.$$
Ce qui est facile car
$$|\langle T, u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \le \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Il reste maintenant à retirer l'hypothèse $\varphi(0) = 0$. Ceci est assez facile car il suffit de se ramener au cas précédent en remplaçant φ par $\varphi - \varphi(0)$ et en ajoutant au second membre de (3.44) $-\int_\Omega \varphi(0)W(x)\cdot\nabla v(x)dx$. On se ramène bien au cas précédent car l'application $v \mapsto \int_\Omega \varphi(0)W(x)\cdot\nabla v(x)dx$ est bien un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (car $W \in L^2(\Omega)^N$).

Exercice 3.6 (Convection-diffusion, Dirichlet, unicité)
On reprend ici les mêmes hypothèses que dans l'exercice 3.5, that is to say :
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.
L'exercice 3.5 a montré qu'il existait u solution faible de (3.43), that is to say u solution de

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega \varphi(u(x))W(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.49}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité de la solution de (3.49) et de montrer que $u \ge 0$ p.p. si $f \ge 0$ p.p..

1. Montrer l'unicité de la solution de (3.49).
2. On retire dans cette question (et seulement dans cette question) l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer que le problème (3.44) avec $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ a une unique solution (l'existence a été montrée dans l'exercice 3.5).
3. On suppose $f \le 0$ p.p.. Soit u la solution de (3.49). Montrer que $u \le 0$ p.p.. [Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pourra prendre $v = S_n(u)$ dans (3.49) avec $S_n \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

Corrigé –

1. *La démonstration d'unicité faite pour le théorème 3.16 n'a pas utilisée complètement les hypothèses sur G (qui étaient $G \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $\operatorname{div} G = 0$). Elle a utilisé seulement le fait que $G \in L^2(\Omega)^N$. Ici nous avons $W \in L^p(\Omega)^N$. Comme $p > N$, ceci donne bien $W \in L^2(\Omega)^N$ et la démonstration faite pour le théorème 3.16 est donc aussi valable ici. Nous la rappelons rapidement.*

   Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.49)*. On a donc :*
$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi(u_1) W \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \tag{3.50}$$
   et
$$\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi(u_2) W \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x. \tag{3.51}$$
   Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit $T_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $T_n(s) = \max(-1/n, \min(s, 1/n))$. Le lemme 2.22 (ou plutôt sa généralisation, voir la remarque 2.23) donne $T_n(u_1 - u_2) \in H^1_0(\Omega)$ et $\nabla T_n(u_1 - u_2) = \nabla(u_1 - u_2) 1_{A_n}$ avec $A_n = \{0 < |u_1 - u_2| < 1/n\}$.

   On prend $v = T_n(u_1 - u_2)$ dans (3.50) et (3.51), on obtient
$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla T_n(u_1 - u_2) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) W \cdot \nabla(T_n(u_1 - u_2)) \,\mathrm{d}x.$$
   Avec C_1 t.q. $|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \le C_1 |s_1 - s_2|$ pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, ceci donne
$$\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_{A_n} C_1 |u_1 - u_2| \, |W| \, |\nabla(u_1 - u_2)| \,\mathrm{d}x.$$
   On a $|u_1 - u_2| \le 1/n$ p.p. dans A_n. En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz dans la dernière intégrale, on obtient donc :
$$\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{C_1}{n} \left(\int_{A_n} |W|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$
   On a donc
$$\| \, |\nabla T_n(u_1 - u_2)| \, \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \right)^{1/2} \le \frac{C_1}{n} a_n, \text{ avec } a_n = \left(\int_{A_n} |W|^2 dx \right)^{1/2}.$$
   On utilise maintenant l'inégalité de Sobolev et Hölder pour obtenir, avec $1^\star = \frac{N}{N-1}$ et en désignant par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$,
$$\|T_n(u_1 - u_2)\|_{L^{1^\star}} \le \| \, |\nabla T_n(u_1 - u_2)| \, \|_{L^1(\Omega)} \le m(\Omega)^{1/2} \| \, |\nabla T_n(u_1 - u_2)| \, \|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C_1 m(\Omega)^{1/2}}{n} a_n.$$
   On pose $B_n = \{|u_1 - u_2| \ge 1/n\}$, de sorte que
$$\frac{1}{n} (m(B_n))^{\frac{N-1}{N}} \le \left(\int_{B_n} |T_n(u_1 - u_2)|^{1^\star} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{1^\star}} \le \|T_n(u_1 - u_2)\|_{L^{1^\star}}.$$
   On a donc
$$(m(B_n))^{\frac{N-1}{N}} \le C_1 m(\Omega)^{1/2} a_n. \tag{3.52}$$
   Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $A_{n+1} \subset A_n$. Comme $\cap_{n \in \mathbb{N}^\star} A_n = \emptyset$, la continuité décroissante de m donne que $\lim_{n \to +\infty} m(A_n) = 0$. Comme $W \in L^2(\Omega)^N$ on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ et donc, grâce à (3.52), que $\lim_{n \to +\infty} m(B_n) = 0$.

   On remarque enfin que $B_{n+1} \supset B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{|u_1 - u_2| > 0\}$. Donc $\lim_{n \to +\infty} m(B_n) = m\{|u_1 - u_2| > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). On obtient donc $m\{|u_1 - u_2| > 0\} = 0$ et donc $u_1 = u_2$ p.p..
2. *La démonstration est identique à la précédente. Il suffit de remplacer, dans (3.50) et (3.51), $\int_\Omega f(x) v(x) dx$ par $\langle T, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)}$.*

3. La démonstration est voisine de celle de la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on prend $v = S_n(u)$ dans (3.49) avec $S_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$. Ceci est possible car $S_n(u) \in H_0^1(\Omega)$. On sait aussi que $\nabla S_n(u) = 1_{E_n} \nabla u$ avec $E_n = \{0 < u < 1/n\}$ (voir la remarque 2.23). Comme $S_n(u) \geq 0$ p.p. et $f \leq 0$ p.p., on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla S_n(u) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi(u) W \cdot \nabla S_n(u) \,\mathrm{d}x \leq 0. \tag{3.53}$$

On a donc

$$\int_\Omega |\nabla S_n(u)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla S_n(u) \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \varphi(u) W \cdot \nabla S_n(u) \,\mathrm{d}x.$$

Il existe $C_1 > 0$ t.q. $|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq C_1 |s_1 - s_2|$ pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, ceci donne, avec l'inégalité de Cauchy Schwarz dans la dernière intégrale

$$\| \, |\nabla S_n(u)| \, \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1}{n} \Big(\int_{E_n} |W(x)|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose $\gamma_n = \Big(\int_{E_n} |W(x)|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}}$.

On utilise maintenant l'inégalité de Sobolev et Hölder pour obtenir, avec $1^\star = \frac{N}{N-1}$ et en désignant par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$,

$$\|S_n(u)\|_{L^{1^\star}} \leq \| \, |\nabla S_n(u)| \, \|_{L^1(\Omega)} \leq m(\Omega)^{1/2} \| \, |\nabla S_n(u)| \, \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1 m(\Omega)^{1/2}}{n} \gamma_n.$$

On pose $D_n = \{u \geq 1/n\}$, de sorte que

$$\frac{1}{n} (m(D_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq \Big(\int_{D_n} |S_n(u)|^{1^\star} \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{1^\star}} \leq \|S_n(u)\|_{L^{1^\star}}.$$

On a donc

$$(m(D_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_1 m(\Omega)^{1/2} \gamma_n. \tag{3.54}$$

On conclut comme à la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $E_{n+1} \subset E_n$. Comme $\cap_{n \in \mathbb{N}^\star} E_n = \emptyset$, la continuité décroissante de m donne que $\lim_{n \to +\infty} m(E_n) = 0$. Comme $W \in L^2(\Omega)^N$ on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \gamma_n = 0$ et donc, grâce à (3.54), que $\lim_{n \to +\infty} m(D_n) = 0$.

On remarque enfin que $D_{n+1} \supset D_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\cup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \{u > 0\}$. Donc $\lim_{n \to +\infty} m(D_n) = m\{u > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). On obtient donc $m\{u > 0\} = 0$ et donc $u \leq 0$ p.p..

Exercice 3.7 (Existence par minimisation)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), a une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

— $a \in L^\infty(\Omega)$.

— Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha \leq a$ p.p..

— f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.

— Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0, 1[$ t.q. $|f(\cdot, s)| \leq C|s|^\delta + d$ p.p., pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$, on pose $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$.

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $F(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$.

   Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on pose $E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx - \int_\Omega F(x, u(x)) dx$.

2. Montrer que $E(u) \to +\infty$ quand $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$.

3. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $E(u) \leq E(v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

4. Montrer qu'il existe u solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.55}$$

Exercice 3.8 (Minimisation avec contrainte)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et $p \in]1, \frac{N+2}{N-2}[$. On cherche une solution non nulle au problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u = |u|^{p-1}u \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.56}$$

1. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on pose $E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$ et $F(v) = \int_\Omega |v|^{p+1}dx$. On pose aussi $A = \{v \in H_0^1(\Omega),\ F(v) = 1\}$. Montrer qu'il existe $u \in A$ t.q. $u \geq 0$ p.p. et $E(u) \leq E(v)$ pour tout $v \in A$.
2. Montrer qu'il existe u non nulle, $u \geq 0$ p.p., solution faible de (3.56).

Exercice 3.9 (Convergence faible et non linéarité)

Remarque liminaire : Soit $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Lorsque qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers u dans un espace L^p et que la suite $\varphi(u_n)$ tend faiblement vers f dans un espace L^q, il est en général faux que $f = \varphi(u)$ p.p.. On ajoute l'hypothèse que $\int u_n\varphi(u_n)$ converge vers $\int uf$. Si φ est croissante, l'"astuce de Minty" permet alors de montrer que $f = \varphi(u)$ p.p.. Si φ est strictement croissante, on obtient même une convergence forte de u_n vers u (c'est l'"astuce de Leray-Lions"). Cet exercice détaille ces idées dans le cadre $p = q = 2$ avec une mesure finie.

Soit (X, T, m) un espace mesuré fini (that is to say $m(X) < +\infty$). On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(X,T,m)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de L^2 et $u, v \in L^2$. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement dans L^2 vers u et v. On rappelle que ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty}\int u_n w\,dm = \int uw\,dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int v_n w\,dm = \int vw\,dm \text{ pour tout } w \in L^2.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $v_n = u_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $u = v$ p.p.). Montrer que $u_n \to u$ dans L^2 (quand $n \to +\infty$) si et seulement si $\int u_n^2 dm \to \int u^2 dm$ (quand $n \to +\infty$).

On suppose pour toute la suite de l'exercice que $\int u_n v_n\,dm \to \int uv\,dm$ (quand $n \to +\infty$) et qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q.

— φ continue et il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|\varphi(s)\ \leq C + C|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

— $v_n = \varphi(u_n)$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $w \in L^2$, montrer que, quand $n \to +\infty$,

$$\int(\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w)\,dm \to \int(v - \varphi(w))(u - w)\,dm. \tag{3.57}$$

3. On suppose que φ est croissante.

(a) Soit $\bar{w} \in L^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int(v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w}\,dm \leq 0.$$

[Utiliser (3.57).] En déduire que $\int(v - \varphi(u))\bar{w}\,dm = 0$.

(b) Montrer que $v = \varphi(u)$ p.p..

4. On suppose que φ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = (\varphi(u_n) - \varphi(u))(u_n - u)$.
   (a) Montrer que $G_n \to 0$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (utiliser (3.57)).
   (b) Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p.. En déduire que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p. (utiliser la croissance stricte de φ).
   (c) Montrer que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

Corrigé –

1. On remarque que

$$\|u_n - u\|_2^2 = \int u_n^2 dm + \int u^2 dm - 2\int u_n u dm. \tag{3.58}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^2, on a $\lim_{n\to+\infty} \int u_n u dm = \int u^2 dm$. On déduit alors facilement de (3.58) que $u_n \to u$ dans L^2 si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \int u_n^2 dm = \int u^2 dm$.

2. On commence par remarquer que $\varphi(w) \in L^2$ (grâce aux hypothèses sur φ et $m(X) < +\infty$). On a alors

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) = \int (v_n u_n - v_n w - \varphi(w)u_n + \varphi(w)w)dm.$$

Les convergences faibles de u_n et v_n vers u et v donnent

$$\lim_{n\to+\infty} \int u_n\varphi(w)dm = \int u\varphi(w)dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int v_n w dm = \int vwdm.$$

Enfin on a, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \int u_n v_n dm = \int uvdm$. On en déduit que bien que

$$\lim_{n\to+\infty} (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w)dm = \int (v - \varphi(w))(u - w)dm.$$

3.(a) On utilise ici (3.57) avec $w = u + t\bar{w}$. On obtient, quand $n \to +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w})\, dm \to -\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w}\, dm.$$

Comme φ est croissante, on a $(\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) \geq 0$ p.p. et donc $\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w})dm \geq 0$. On en déduit, quand $n \to +\infty$, $\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w}\, dm \leq 0$.

En prenant $t = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^\star$), on a donc $\int (v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w} \leq 0$. En appliquant le théorème de convergence dominée (remarquer que $|(v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w}| \leq F$ p.p. avec $F = (|v| + C + C|u| + C|\bar{w}|)|\bar{w}| \in L^1$), on obtient, quand $m \to \infty$,

$$\int (v - \varphi(u))\bar{w}dm \leq 0.$$

De même, en prenant $t = -\frac{1}{m}$, on montre $\int (v - \varphi(u))\bar{w}dm \geq 0$. On a donc $\int (v - \varphi(u))\bar{w}dm = 0$.

(b) On choisit $\bar{w} = 1_A - 1_{A^c}$, avec $A = \{v - \varphi(u) \geq 0\}$. La question précédente donne alors $\int |v - \varphi(u)|dm = 0$ et donc $v = \varphi(u)$ p.p..

4.(a) En prenant $w = u$ dans (3.57), on obtient $\lim_{n\to+\infty} \int G_n dm = 0$. Comme φ est croissante, on a $G_n \geq 0$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\|G_n\|_1 = \int G_n dm$. On en déduit bien que $G_n \to 0$ dans L^1.

(b) Comme $G_n \to 0$ dans L^1, il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p. (c'est la réciproque partielle du théorème de convergence dominée). Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $G_{\psi(n)}(x) \to 0$ (quand $n \to +\infty$) si $x \in A^c$.

Soit $x \in A^c$. On pose $a = u(s)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $f(s) = (\varphi(s) - \varphi(a))|s - a|$. Comme φ est strictement croissante continue, la fonction f est aussi strictement croissante continue. Elle admet donc une fonction réciproque, notée g, qui est continue. Comme $|f(u_{\psi(n)}(x)| = G_{\psi(n)}(x) \to 0$, on a $f(u_{\psi(n)}(x)) \to 0$ et donc $u_{\psi(n)}(x) = g(f(u_{\psi(n)}(x))) \to g(0) = a$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_{\psi(n)}(x) = u(x)$ pour tout $x \in A^c$. Ce qui prouve bien que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p..

(c) On montre que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1,2[$ en raisonnant pas l'absurde. On suppose qu'il existe $p \in [1,2[$ t.q. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers u dans L^p. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. Par le raisonnement de la question précédente, de cette sous suite, un peut extraire une sous suite, notée $(u_n)_{\psi(n)}$ qui converge p.p. vers u. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2, on peut alors montrer que cette sous suite converge dans L^p vers u (c'est une conséquence du théorème de Vitali). En contradiction avec le fait que cette sous suite reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. On a ainsi montré que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1,2[$.

Exercice 3.10 (Opérateur de Leray-Lions)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), a une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ et $p \in]1,+\infty[$ vérifiant (avec $p' = p/(p-1)$) :

- a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.
- (Coercivité) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha(x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p$ pour tout $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.
- (Croissance) Il existe $d \in L^{p'}(\Omega)$ et $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|a(\cdot,s,\xi)| \leq C(d + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$ p.p., pour tout $s,\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.
- (Monotonie) $(a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta)\cdot(\xi-\eta) > 0$ pour tout $(s,\xi,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $\xi \neq \eta$, et p.p. en $x \in \Omega$.

Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u(x),\nabla u(x))\cdot\nabla v(x)dx = \langle f,v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}, \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.59}$$

[Reprendre la démonstration du cours.]

Chapitre 4

Problèmes paraboliques

4.1 Aperçu des méthodes

Equation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$, solutions classiques

Soit $N \geq 1$ et $u_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On s'intéresse ici à chercher des solutions classiques au problème suivant

$$\begin{aligned} &\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \; x \in \mathbb{R}^N, \; t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ &u(x,0) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\partial_t u$ désigne la dérivée partielle de u par rapport au temps t, et Δu désigne le laplacien de u :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u,$$

où $\partial_i^2 u$ désigne la dérivée partielle seconde de u par rapport à la i-ème variable d'espace x_i. Par “solution classique”, on entend une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ solution de (4.1) au sens classique de la dérivation et de la condition initiale.

On commence par un petit calcul formel (le terme “formel” signifiant souvent en mathématiques “non nécessairement justifié”). On suppose qu'on peut utiliser pour la condition initiale et pour la solution la transformée de Fourier (en espace). On retient comme formule pour la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^N$ la formule suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Si u est solution de (4.1), on obtient ainsi (si on est autorisé à utiliser la transformée de Fourier)

$$\hat{\partial}_t u(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0, \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0, \text{ et } \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi), \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

ce qui donne

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi), \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t \geq 0.$$

En choisissant $g(t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$, on a donc $\hat{u}(\cdot,t) = \widehat{g(t)}\hat{u}_0$ pour tout $t \geq 0$ et donc (en utilisant le fait que la transformée de Fourier transforme la convolution en produit),

$$\hat{u}(\cdot,t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \widehat{g(t) \star u_0} \text{ pour } t \geq 0.$$

ou encore
$$u(\cdot,t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} g(t) \star u_0 \text{ pour } t \geq 0.$$
Il reste à calculer $g(t)$. Comme $\widehat{g(t)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour $t > 0$, le théorème d'inversion de Fourier nous donne $g(t) = \widehat{\widehat{g(t)}}(-\cdot)$, that is to say
$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix\cdot\xi} e^{-|\xi|^2 t} d\xi \;\text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0.$$
Le changement de variable $\xi = \eta/\sqrt{2t}$ donne alors
$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix\cdot\frac{\eta}{\sqrt{2t}}} e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} d\eta \;\text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0.$$
Finalement, on obtient
$$g(t)(x) = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} e^{-|\frac{x}{\sqrt{2t}}|^2 \frac{1}{2}} = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \;\text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0,$$
Ce qui donne
$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \;\text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0. \tag{4.2}$$
Il est maintenant possible de donner des conditions sur u_0 pour lesquelles (4.2) donne une solution classique de (4.1). Voici deux exemples de conditions suffisantes pour lesquelles la fonction u donnée par (4.2) est une solution classique de (4.1) :

Exemple 1 :
$$u_0 \in (L^1(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)) \cap C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$
Exemple 2 :
$$u_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ et il existe } \exists C \in \mathbb{R} \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{ t.q. } |u_0(x)| \leq C(1 + |x|^p) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.3}$$

On a ainsi obtenu des résultats d'existence d'une solution classique pour (4.1). A-t-on alors unicité de la solution ? On n'a pas de résultat d'unicité si on ne met des hypothèses que sur u_0. Plus précisément, on peut construire une solution classique non nulle de (4.1) avec $u_0 = 0$. Il n'y a donc jamais unicité de la solution classique de (4.1). Par contre, si on rajoute une hypothèse convenable de croissance sur la solution, on a un résultat d'unicité.

Théorème 4.1 *Sous l'hypothèse* (4.3)*, il existe une et une seule fonction u vérifiant :*

1. *u est solution classique de* (4.1).
2. $\forall T > 0, \exists C_T \in \mathbb{R}, P_T \in \mathbb{N}$ *t.q.* $|u(x,t)| \leq C_T(1 + |x|^{P_T}),\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall t \in [0,T]$.

Comme nous l'avons déjà dit, sans la deuxième condition sur u donnée dans le théorème 4.1, il n'y a pas unicité de la solution puisque l'on peut trouver $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)$, $u \neq 0$ et t.q.
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Un exemple est donné dans le livre de Smoller[1]. La démonstration de l'unicité dans le théorème 4.1 peut se faire en utilisant la transformée Fourier dans l'espace $\mathcal{S}'$ (où $\mathcal{S}'$ est le dual de l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, muni de sa topologie naturelle). Pour cela, on remarque que, sous l'hypothèse de croissance donnée dans le théorème 4.1, on a $u \in \mathcal{S}'$. Notons que ce raisonnement par analyse de Fourier est limité à $\mathbb{R}^N$ et essentiellement au cas du laplacien.

Solutions presque classiques, équation de diffusion, Ω ouvert borné

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour u_0 donné, on s'intéresse maintenant au problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,t) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Pour cela on définit un opérateur $\mathcal{A}$ d'une partie de $L^2(\Omega)$, notée $D(\mathcal{A})$, dans $L^2(\Omega)$ en posant

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

et, pour $u \in D(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}u = -\Delta u$. Dans la définition de $D(\mathcal{A})$, Δu est une dérivée faible de u. Le fait que $u \in D(\mathcal{A})$ signifie donc simplement que $u \in H_0^1(\Omega)$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$ pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (ou, de manière équivalente, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$).
On suppose maintenant que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et va chercher une solution de (4.4) au sens suivant :

$$\begin{cases} u \in C^1(]0,+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C([0,+\infty[, L^2(\Omega)), \\ u(t) \in D(\mathcal{A}) \text{ et } u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0 \text{ p.p., pour tout } t > 0, \\ u(0) = u_0 \text{ p.p..} \end{cases} \tag{4.5}$$

On rappelle (voir le chapitre 2) qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (c'est à dire une famille orthonormale dense dans $L^2(\Omega)$), notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, formée de fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction e_n est une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n \text{ dans } \Omega, \\ e_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \uparrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $e_n \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n$.
Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. En notant $(u|v)_2$ le produit scalaire de u et v dans $L^2(\Omega)$, on a

$$u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_0|e_n)_2 e_n$$

(cette série étant convergente dans $L^2(\Omega)$).
On a aussi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (u_0|e_n)_2^2 = \|u_0\|_2^2 < +\infty$.
On pose, pour $t \geq 0$,

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}(u_0|e_n)_2 e_n,$$

1. J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 258. Springer-Verlag, New York, 1994. xxiv+632 pp. ISBN : 0-387-94259-9

qui est une série convergente dans $L^2(\Omega)$. On a donc ainsi $u(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t \geq 0$ et on a même (comme la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée inférieurement par λ_1 avec $\lambda_1 > 0$) $u \in C([0,+\infty[, L^2(\Omega))$ et $u(0) = u_0$ p.p.. D'autre part, comme $\lambda_n \uparrow +\infty$ quand $n \to +\infty$, il est facile de montrer que la fonction u est dérivable de $]0,+\infty[$ dans $L^2(\Omega)$ et que la dérivée de u est obtenue est dérivant la série terme à terme (ceci est une conséquence du fait que la série dérivée terme à terme est, sur $]0,+\infty[$, localement uniformément convergente dans $L^2(\Omega)$). On a donc, pour tout $t > 0$,

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-\lambda_n)e^{-\lambda_n t}(u_0|e_n)_2 e_n.$$

(La série écrite dans le terme de droite est convergente dans $L^2(\Omega)$).

On rappelle que (selon le chapitre 2) $u(t) \in D(\mathcal{A})$ pour tout $t > 0$ car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t}(u_0|e_n)_2 e_n$ est convergente dans $L^2(\Omega)$. Le chapitre 2 donne aussi, pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{A}u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t}(u_0|e_n)_2 e_n.$$

On a donc $u \in C^1(]0,+\infty[, L^2(\Omega))$ et $u'(t) + \mathcal{A}(u(t)) = 0$ p.p. pour tout $t \in]0,+\infty[$. On a ainsi trouvé une solution au problème (4.5).

On veut montrer maintenant que cette solution est unique. Pour cela, nous allons montrer que si u est solution du problème avec donnée initiale nulle, that is to say

$$\left\{\begin{array}{l} u \in C^1(]0,+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C([0,+\infty[, L^2(\Omega)), \\ u(t) \in D(\mathcal{A}) \text{ et } u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0 \text{ p.p., pour tout } t > 0, \\ u(0) = 0 \text{ p.p.,} \end{array}\right.$$

alors u reste nulle pour tout temps, that is to say $u(t) = 0$ p.p. pour tout $t \geq 0$.
Soit $t > 0$. Comme $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0$ p.p., en prenant le produit scalaire avec $u(t) \in L^2(\Omega)$, on obtient $(u'(t)|u(t))_2 + (\mathcal{A}u(t)|u(t))_2 = 0$. Comme $(\mathcal{A}u(t)|u(t))_2 = \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$, on a donc

$$(u'(t)|u(t))_2 = -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \leq 0.$$

Soit ψ l'application définie par $t \mapsto \psi(t) = \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$. L'application ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\psi'(t) = 2(u'(t)|u(t))_2$ pour tout $t > 0$. On a donc $\psi'(t) \leq 0$ pour tout $t > 0$. L'application ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $\psi(0) = 0$, on en déduit que $\psi(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc $\psi(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. On a bien finalement $u(t) = 0$ p.p. pour tout $t \geq 0$.

Nous avons ainsi montré l'existence et l'unicité de la solution de (4.5). Cette solution est dite “presque classique” car la dérivation en temps est prise au sens classique (puisque u est de classe C^1 à valeurs dans $L^2(\Omega)$), la condition intiale est prise au sens classique dans $L^2(\Omega)$. Par contre le laplacien de $u(t)$ est pris au sens des dérivées faibles. Il faut un travail supplémentaire (sur la régularité des fonctions e_n) pour montrer que l'équation $\partial_t u - \Delta u$ est vérifiée au sens classique sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^\star$. Ceci est fait pour $N = 1$ dans l'exercice 4.1.

Remarque 4.2 (Généralisation) On peut aussi montrer l'existence et l'unicité (pour $u_0 \in L^2(\Omega)$) de la solution de (4.5) en remplaçant, dans la définition de $\mathcal{A}$, Δu par $\sum_{i,j=1}^N D_j(a_{ij}D_i u)$, avec $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, sous une hypothèse de coercivité, that is to say si il existe $\alpha > 0$ t.q. $\alpha|\xi|^2 \leq \sum a_{ij}\xi_i\, \xi_j$ p.p. dans Ω et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. On peut aussi remplacer $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0$ par $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t)$ si $f \in C([0,\infty[, L^2(\Omega))$.

Solutions presque classiques par semi-groupes

Soit E un espace de Banach réel et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire. L'ensemble $D(\mathcal{A})$ est donc le s.e.v. de E sur lequel $\mathcal{A}$ est défini. On dit que $\mathcal{A}$ est m-accrétif si $\mathcal{A}$ vérifie :

(i) $D(\mathcal{A})$ est dense dans E,

(ii) $\forall \lambda > 0, (I + \lambda\mathcal{A})$ est inversible, d'inverse continue et $\|(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,E)} \le 1$.

On rappelle que $\mathcal{L}(E, E)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans E, et que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)} = \sup_{u\in E, u\neq 0} \frac{\|T(u)\|_E}{\|u\|_E}, \text{ pour tout } T \in \mathcal{L}(E, E).$$

Remarque 4.3 (Opérateur maximal monotone) Soit E est un espace de Hilbert réel et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire. L'opérateur $\mathcal{A}$ est m-accrétif si et seulement si il vérifie :

$$\begin{cases} (\mathcal{A}u|u)_E \ge 0 \quad \forall u \in D(\mathcal{A}), \\ (Id + \mathcal{A}) \text{ surjectif.} \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{A}$ est maximal monotone.

Exemple : Le laplacien Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $E = L^2(\Omega)$ et $\mathcal{A}$ défini par $D(\mathcal{A}) = \{u \in H^1_0(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ et $\mathcal{A}u = -\Delta u$ si $u \in D(\mathcal{A})$. L'opérateur $\mathcal{A}$ est alors un opérateur m-accrétif (ou maximal monotone puisqu'on est dans le cas d'un Hilbert).

Remarque 4.4 (Graphe d'un opérateur m-accrétif) Le graphe d'un opérateur m-accrétif est fermé. En ce sens, il est maximal, d'où le "m" dans m-accrétif.

On admettra le théorème suivant :

Théorème 4.5 (Hille-Yosida) *Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire m-accrétif et $u_0 \in D(\mathcal{A})$. Alors il existe un unique $u : \mathbb{R}_+ \to E$ tel que*

$$u \in C^1([0, +\infty[, E), \tag{4.6a}$$
$$u(t) \in D(\mathcal{A}), \forall t \ge 0, \tag{4.6b}$$
$$u'(t) + \mathcal{A}(u(t)) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^\star_+, \tag{4.6c}$$
$$u(0) = u_0. \tag{4.6d}$$

La démonstration de ce théorème peut s'effectuer par une discrétisation en temps : on considére le problème elliptique $\frac{u_{n+1}-u_n}{\delta t} + \mathcal{A}u_{n+1} = 0$, qui s'écrit encore $u_{n+1} = (I + \delta t\mathcal{A})^{-1} u_n$, où $\delta t > 0$ est le pas de la discrétisation. On effectue ensuite un passage à la limite $\delta t \to 0$.

Définition 4.6 (Semi-groupe) *Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire m-accrétif. Pour $u_0 \in D(\mathcal{A})$ et $t \ge 0$, on pose $S(t)u_0 = u(t)$, où u est l'unique fonction vérifiant* (4.6). *Alors l'opérateur $S(t)$ est un opérateur linéaire continu de $D(\mathcal{A}) \subset E$ dans E qui vérifie*

$$\begin{cases} S(t + s) = S(t) \circ S(s) \text{ pour } t, s \ge 0; \\ S(0) = Id \\ \|S(t)u_0\|_E \le \|u_0\|_E, \end{cases}$$

On dit que $\{S(t), t \ge 0\}$ est un semi-groupe de contraction.

Soit $t \geq 0$. Comme $\overline{D(\mathcal{A})} = E$, l'opérateur $S(t)$ se prolonge de manière unique à tout E en un opérateur $\overline{S(t)}$ et $\overline{S(t)} \in \mathcal{L}(E, E)$.

Définition 4.7 (Solution "mild") *Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire m-accrétif. Soit $u_0 \in E$, la fonction $u(t) = \overline{S(t)}u_0$, définie de manière unique, s'appelle solution mild du problème*

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{A}u = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Dans le cas du laplacien, on peut se demander en quel sens la solution mild satisfait (4.4). On peut montrer que la solution mild est solution en un sens faible que nous verrons dans la section 4.3. De plus, cette solution mild est, dans ce cas particulier, l'unique solution faible. Cependant, cette situation n'est pas complètement générale. La solution mild, obtenue par densité, est toujours unique (dès que $u_0 \in E$, quelque soit l'espace de Banach E et l'opérateur m-accrétif $\mathcal{A}$). Pour les problèmes issus d'équations aux dérivées partielles, cette solution mild est en général une solution faible du problème que l'on veut résoudre ; toutefois le problème de l'unicité de la solution faible est beaucoup plus difficile. On peut avoir non unicité de la solution faible quand on prend une "solution faible" dans un sens qui semble pourtant raisonnable. Il n'y a pas alors d'équivalence entre la notion de solution mild et de solution faible, car la solution mild est unique et, malheureusement, il n'y a pas unicité de la solution faible.

Pour essayer d'éclairer cette difficulté, nous nous intéressons, dans le paragraphe qui suit, à un problème un peu plus simple. Nous nous intéressons à un problème elliptique pour lequel nous montrons que la solution obtenue par densité, à la manière de la solution mild introduite ci-dessus, est unique alors qu'on n'a pas unicité des solutions faibles en prenant une définition "naturelle" de solution faible. Ceci montre en particulier que dans le cas parabolique, il n'y a pas non plus d'équivalence entre solution mild et solution faible (par exemple en considérant les solutions stationnaires).

Le Laplacien avec donnée L^1 On considère un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, des fonctions a_{ij}, pour $i, j = 1, \ldots, N$, appartenant à $L^\infty(\Omega)$ et satisfaisant l'hypothèse de coercivité habituelle :

$$\exists\, \alpha > 0; \quad \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

On note A la fonction à valeurs matricielle donnée par les fonctions a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$. On sait (par le lemme de Lax-Milgram) que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u.\nabla v\, dx = \int f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.7}$$

On considère le même problème avec une donnée moins régulière $f \in L^1(\Omega)$.

Etape 1 - Estimation, cas régulier. Pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, on montre qu'il existe $C_q \in \mathbb{R}$ tel que si u est (l'unique) solution de (4.7) avec $f \in L^2(\Omega)$ alors $\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_q \|f\|_{L^1(\Omega)}$. On pose alors $T_q(f) = u$.

Etape 2 - Solution mild Pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, l'application T_q de $L^2(\Omega)$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ est continue de $L^2(\Omega)$ muni de la norme de $L^1(\Omega)$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ (muni de sa norme naturelle). On peut donc prolonger T_q de manière unique par densité sur tout $L^1(\Omega)$ (car $L^2(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$). On appelle $\overline{T}_q$ ce prolongement. On remarque alors que $\overline{T_{q_1}} f = \overline{T_{q_2}} f$ pour tout q_1, q_2 t.q. $1 \leq q_1 < q_2 < \frac{N}{N-1}$. On peut ainsi définir un opérateur (linéaire) T de L^1 dans $\bigcap_{1 \leq q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ par $T(f) = \overline{T_q}(f)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

Définition 4.8 (Solution mild pour un problème elliptique à donnée L^1) *Sous les hypothèses précédentes sur Ω et A, soit $f \in L^1(\Omega)$. La fonction Tf est la solution mild de*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Etape 3 - Quel sens donner à la solution mild ? Il est naturel de se demander quel rapport il y a entre la solution mild $u = Tf$ et une solution faible du problème de Dirichlet homogène. Il est assez facile de montrer que u est solution faible dans le sens (naturel) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \displaystyle\bigcap_{1 \le q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u . \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega). \end{array} \right. \tag{4.9}$$

Remarque : un résultat analogue d'existence de solution mild et donc d'existence de solution faible est encore vrai si f est une mesure sur Ω (dans (4.9), on remplace alors $fvdx$ par vdf). Pour montrer ce résultat, on utilise la densité de $L^2(\Omega)$ dans l'ensemble des mesures sur Ω au sens de la convergence faible-$\star$ dans $C(\bar{\Omega})'$(car l'ensemble des mesures sur Ω peut être vu comme une partie du dual de $C(\overline{\Omega})$). Il faut aussi utiliser le fait que les éléments de $W_0^{1,r}(\Omega)$ sont des fonctions continues pour $r > N$.

Etape 4 - Unicité mild, non unicité faible La solution mild est unique. La solution de (4.9) est-elle unique ? pas toujours. . . . Montrons d'abord que si $N = 2$, la solution faible est unique. Ceci se montre par régularité sur le problème dual, qui entraîne l'unicité sur le problème primal. Soit u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \displaystyle\bigcap_{1 \le q < 2} W_0^{1,q}(\Omega), \\ \displaystyle\int A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in \bigcup_{r>2} W_0^{1,r}(\Omega). \end{array} \right. \tag{4.10}$$

On veut montrer que $u = 0$. On ne peut pas prendre comme fonction test $v = u$ dans (4.9) ou (4.10) , en raison du manque de régularité de u. Pour contourner ce problème, on va raisonner en utilisant la régularité des solutions du problème dual. On remarque d'abord que u est solution de (4.10) et que (4.10) peut se re-écrire ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \displaystyle\bigcap_{1 \le q < 2} W_0^{1,q}, \\ \displaystyle\int A^t\nabla v \cdot \nabla u \, dx = 0, \quad \forall v \in \bigcup_{r>2} W_0^{1,r}(\Omega). \end{array} \right. \tag{4.11}$$

Or on sait (par le lemme de Lax-Milgram) que si $g \in L^2(\Omega)$ il existe un unique v solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int A^t\nabla v \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x = \int g w \, \mathrm{d}x, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{4.12}$$

((4.12) est le problème dual de (4.7).)
On aimerait pouvoir prendre $w = u$ dans (4.12), car on aurait alors, grâce à (4.11), $\int_\Omega gu \, \mathrm{d}x = 0$ pour tout $g \in L^2(\Omega)$, ce qui permettrait de conclure que $u = 0$. Mais pour l'instant, on ne peut pas car u et v ne sont pas dans les bons espaces. L'astuce consiste à considérer un second membre g plus régulier dans (4.12) et d'utiliser le résultat de régularité dû à Meyers suivant.

Théorème 4.9 (Meyers) *Il existe $p^\star > 2$, ne dépendant que de A et Ω, t.q. si $g \in L^\infty(\Omega)$ et v solution de* (4.12) *alors $v \in W_0^{1,p^\star}(\Omega)$.*

Soit donc $g \in L^\infty(\Omega)$ et v solution de (4.12). On a alors $v \in W_0^{1,p^\star}(\Omega)$ grâce au théorème de Meyers. On note $(p^\star)'$ l'exposant conjugué de $p^\star$, de sorte que $(p^\star)' = \frac{p^\star}{p^\star-1} < 2$. Par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,(p^\star)'}(\Omega)$, on déduit de (4.12) que

$$\int A^t\nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x = \int gw \,\mathrm{d}x, \quad \forall w \in W_0^{1,(p^\star)'}(\Omega). \tag{4.13}$$

Or, comme $(p^\star)' = \frac{p^\star}{p^\star-1} < 2$, toute solution u solution de (4.11) appartient à $W_0^{1,(p^\star)'}(\Omega)$. On peut donc prendre $w = u$ dans (4.13). Mais comme $v \in W_0^{1,p^\star}(\Omega)$ avec $p^\star > 2$, on a également, par (4.11), $\int_\Omega A^t\nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x = 0$. On a donc $\int_\Omega gu \,\mathrm{d}x = 0$, pour tout $g \in L^\infty(\Omega)$. On en déduit que $u = 0$ en prenant successivement $g = 1_{\{u>0\}}$ puis $g = 1_{\{u<0\}}$.
Pour $N = 3$, le théorème de régularité de Meyers est encore vrai, la démonstration d'unicité est donc encore juste si A est telle que $p^\star > N = 3$ (afin de pouvoir prendre v comme fonction test dans (4.9)). Mais il existe des fonctions matricielle $A = (a_{ij})_{i,j=1,N}$ (à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et coercive) pour lesquelles $p^\star < 3$. L'unicité n'est plus assuré et on peut effectivement construire des cas pour lesquels la solution de (4.9) n'est pas unique (voir l'article de Prignet sus-mentionné).
Etape 5 Que peut-on rajouter à solution faible pour avoir l'unicité ? Pour $f \in L^1(\Omega)$, on montre qu'il existe une et une solution à une nouvelle formulation, due à Ph. Bénilan[2] . Cette nouvelle formulation (aussi appelée formulation entropique), est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \text{ pour tout } 1 \le q < \frac{N}{N-1}, \qquad T_k(u) \in H_0^1(\Omega), \ \forall k > 0, \\ \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla T_k(u-\varphi) \,\mathrm{d}x = \int fT_k(u-\varphi) \,\mathrm{dx} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \forall k \ge 0. \end{array}\right. \tag{4.14}$$

où T_k est la fonction troncature, définie par : $T_k(s) = \max(\min(k,s),-k)$. L'article de Bénilan *et al.* démontre qu'il existe une unique solution au problème (4.14) (qui est donc la solution mild de (4.8)). Ph. Bénilan conjecturait que le fait d'ajouter la condition $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ (pour tout $k > 0$) à la formulation (4.9) devait suffire à assurer l'unicité. De fait, dans le contre exemple de Serrin-Prignet[3], le contre exemple consiste à constuire une solution non nulle de (4.9) avec $f = 0$. Mais, cette solution ne vérifie pas $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ pour $k > 0$. Toutefois, la conjecture de Bénilan reste une conjecture…
Une autre question ouverte consiste à trouver une formulation semblable à (4.14) donnant l'unicité lorsque f est une mesure sur Ω.

Remarque 4.10 (Limitation de la méthode semi-groupe) Une difficulté importante de cette méthode par semi-groupe est sa généralisation au cas où A dépend de t.

2. Ph. Bénilan, Philippe, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.-L. Vazquez, An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 22 (1995), no. 2, 241–273.
3. **J. Serrin**, Pathological solutions of elliptic differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 18 1964 385–387.
A. Prignet, Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures. Rend. Mat. Appl. (7) 15 (1995), no. 3, 321–337.

Méthode de Faedo-Galerkin (discrétisation en espace)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, u_0 une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega\times]0,T[$ dans $\mathbb{R}$. On considère le problème

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(.,0) = u_0 \end{array}\right. \tag{4.15}$$

Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et f dans un espace convenablement choisi, on va chercher $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ solution faible de ce problème.
Comme $H_0^1(\Omega)$ est séparable, il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces inclus dans $H_0^1(\Omega)$, de dimension finie, par exemple $\dim E_n = n$, et tels que $E_n \subset E_{n+1}$ et

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = H_0^1(\Omega).$$

Soit $\{e_1 \dots e_n\}$ une base de E_n. On cherche $u_n(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i$ t .q.

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \alpha_i'(t) e_i\, e_k \,\mathrm{d}x \; + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \alpha_i(t) \nabla e_i . \nabla e_k \, dx = \int_\Omega f(t) e_k \,\mathrm{d}x, \text{ pour tout } k = \{1 \dots n\} \text{ et } t > 0,$$

et les $\alpha_i(0)$ sont choisis pour que $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(0) e_i \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, un système de n équations différentielles avec condition initiale pour lequel on montre l'existence d'une solution. On cherche alors des estimations sur la solution u_n qui permettent de passer à la limite quand $n \to +\infty$. Cette technique, qu'on va développer plus loin, permet de montrer que pour $f \in L^2(]0,T[,H^{-1})$ la limite u des u_n satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)), u \in C([0,T],L^2(\Omega)), u(0) = u_0 \text{ p.p.}, \\ \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t + \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \right) \,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t, \; \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)). \end{array}\right. \tag{4.16}$$

Discrétisation en espace et en temps

On discrétise le problème (4.15) par un schéma numérique, par exemple par éléments finis $P1$ en espace et par un schéma d'Euler implicite en temps. On obtient une solution approchée notée u_n. On obtient alors des estimations sur u_n. On passe ensuite à la limite lorsque $n \to +\infty$.
Pour $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, on obtient ainsi pour le problème de la chaleur (4.15) que la limite u du schéma numérique satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\ \displaystyle -\int_0^T \int_\Omega u \varphi_t \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0) \,\mathrm{d}x \\ \displaystyle \qquad = \int_0^T \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t, \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty([0,T[\times\Omega)). \end{array}\right. \tag{4.17}$$

On montrera plus loin que les problèmes (4.16) et (4.17) sont équivalents. Ceci est donné dans le lemme suivant.

Lemme 4.11 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$. Alors, la fonction u est solution de* (4.16) *si et seulement si u est solution de* (4.17).

Existence par degré topologique

Dans le cas de problèmes non linéaires, plutôt que d'approcher ou de discrétiser, on peut se ramener à un problème linéaire et appliquer un argument de type degré topologique, en utilisant les résultats connus dans le cas linéaire. C'est ce qu'on fera par exemple sur le problème (voir le problème (4.33))

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathrm{div}(v(t,x)f(u)) - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(\cdot,0) = u_0. \end{cases}$$

4.2 Intégration de fonctions à valeurs vectorielles

On a utilisé dans les formulations faible de la section 4.1 les espaces $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$, $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Ce sont des espaces pour lesquels on utilise l'intégration de fonctions à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie (comme, par exemple, $L^2(\Omega)$). Il nous faut donc préciser comment on définit une telle intégrale. Rappelons d'abord comment on définit l'intégrale sur $\mathbb{R}$. On commence par définir la notion de mesurabilité. On rappelle que si (X,T,m) est un espace mesuré, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Une généralisation facile de cette notion de mesurabilité aux espaces de Banach est donc la suivante : une fonction f de X dans E est mesurable si $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$ (où $\mathcal{B}(E)$ est la tribu engendrée par les ouverts de E). En fait cette notion n'a aucun intérêt du point de vue de l'intégrale si E n'est pas séparable. Par ailleurs, une fonction réelle $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si f est une limite simple de fonctions étagées, *i.e.* si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées t.q. $f_n \to f$ simplement (cette équivalence n'est plus vraie si f est à valeurs dans E où est E est un espace de Banach non séparable). C'est cette dernière notion (limite simple de fonctions étagées) qui est intéressante pour définir l'intégrale. Plus précisément, comme l'intégrale ne voit pas les changements d'une fonction sur un ensemble de mesure nulle, nous allons définir la notion de "m-mesurabilité" de la manière suivante :

Définition 4.12 (Fonction m-mesurable) *Soit (X,T,m) un espace mesuré. On dit qu'une fonction f, définie de X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou à valeurs dans un Banach E est m- mesurable si elle est limite presque partout de fonctions étagées.*

Proposition 4.13 (Mesurabilité et m-mesurabilité) *Soit (X,T,m) un espace mesuré.*

1. Une fonction f de X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est m-mesurable si et seulement si il existe g mesurable t.q. $f = g$ p.p..

2. Soit E est un espace de Banah séparable et f une fonction de X dans E. Alors,

(a) f est mesurable au sens "$f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in B(E)$" si et seulement si f est limite simple de fonctions étagées.

(b) Comme dans le cas réel, la fonction f de X dans E est m-mesurable si et seulement si il existe g mesurable t.q. $f = g$ p.p..

Soit (X,T,m) un ensemble mesuré, E un espace de Banach et f une fonction m-mesurable de X dans E. Il est facile de voir que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|_E$ est m-mesurable de X dans $\mathbb{R}_+$. la quantité $\int \|f(x)\|_E dm(x)$ est donc parfaitement définie dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Ceci permet de définir l'espace $\mathcal{L}^1_E(X,T,m)$.

Définition 4.14 (L'espace $\mathcal{L}^1_E(X,T,m)$) *Soit (X,T,m) un ensemble mesuré, E un espace de Banach et f une fonction m-mesurable de X dans E. La fonction f appartient à $\mathcal{L}^1_E(X,T,m)$ si*

$$\int \|f(x)\|_E dm(x) < +\infty.$$

On veut maintenant définir l'intégrale d'un élément de $\mathcal{L}^1_E(X,T,m)$ où (X,T,m) est un espace mesuré et E un espace de Banach. Soit $f \in \mathcal{L}^1_E(X,T,m)$. On ne peut pas utiliser la même technique que pour $E = \mathbb{R}$ (that is to say décomposer f en f^+ et f^- et commencer par intégrer des fonctions mesurables positives). Par contre, comme f est m-mesurable, on sait qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées t.q. $f_n \to f$ p.p.. Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A^c) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A$. On pose alors

$$A_n = \{x \in A; \|f_n(x)\|_E \le 2\|f(x)\|_E\} \text{ et } g_n = f_n\, 1_{A_n}.$$

(le nombre 2 pourrait être remplacé ici par n'importe quel nombre > 1 et A pourrait être remplacé par un autre ensemble vérifiant les mêmes propriétés. Cela ne changerait pas la définition de l'intégrale donnée dans la définition 4.15.) La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\begin{aligned} & g_n \text{ étagée pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ & g_n \to f \text{ p.p.}, \\ & \int \|g_n - f\|_E dm \to 0 \text{ par convergence dominée.} \end{aligned}$$

La définition de l'intégrale d'une fonction étagée est immédiate. On pose

$$I_n = \int g_n dm.$$

On peut alors montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Cette suite converge donc dans E. On peut aussi montrer que la limite de cette suite ne dépend que de f (et non du choix de f_n et de A). Il est donc naturel de définir l'intégrale de f comme la limite de cette suite. C'est ce qui est fait dans la définition 4.15.

Définition 4.15 (Intégrale à valeurs dans *E*) *Soit $f : X \to E$ où (X,T,m) est un espace mesuré et E un espace de Banach.*

1. *(Rappel) $f \in \mathcal{L}^1_E(X,T,m)$ si f est m-mesurable et $\int \|f\|_E dm < +\infty$.*
2. *(Intégrale) Soit $f \in \mathcal{L}^1_E(X,T,m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions étagées t.q. $f_n \to f$ p.p.. Soit $A \in T$ t.q. $m(A^c) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A$. On pose $A_n = \{x \in A \text{ t.q. } \|f_n(x)\|_E \le 2\|f(x)\|\}$ et $g_n = f_n\, 1_{A_n}$. On définit l'intégrale de f par :*

$$\int f d_m = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm \in E.$$

Avec la relation d'équivalence $=$ p.p., on définit alors $L^1_E(X,T,m)$. Il est alors facile aussi de deviner les définitions de $\mathcal{L}^p_E(X,T,m)$ et $L^p_E(X,T,m)$ pour tout $1 \le p \le +\infty$. Un élément de $L^p_E(X,T,m)$ est donc un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}^p_E(X,T,m)$ (et deux fonctions appartenant à cet ensemble sont égales p.p.). Comme d'habitude en intégration, si $F \in L^p_E(X,T,m)$, on confond F et f si $f \in F$ (de sorte que l'on raisonne comme si $F \in \mathcal{L}^p_E(X,T,m)$).

Proposition 4.16 *Soit $1 \le p \le +\infty$, (X,T,m) un espace mesuré σ-fini et E un espace de Banach. Alors*

1. *$L^p_E(X,T,m)$ (avec sa norme naturelle) est complet. C'est donc un espace de Banach.*
2. *Si $p < +\infty$ et E est séparable, $L^p_E(X,T,m)$ est séparable.*
3. *Si $p = 2$ et E est un Hilbert, alors $L^2_E(X,T,m)$ est aussi un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est défini par :*

$$(u|v)_{L^2_E(X,T,m)} = \int_X (u(x)|v(x))_E dm(x).$$

Par conséquent, de toute suite bornée de $L^2_E(X,T,m)$ on peut extraire une sous-suite faiblement convergente dans $L^2_E(X,T,m)$.

4. *Si $1 < p < +\infty$ et si E est un espace de Banach réflexif séparable, l'espace $L^p_E(X,T,m)$ est alors un espace de Banach réflexif séparable.*
5. *(Dualité dans $L^p_E(X,T,m)$) Soit $1 \le p \le +\infty$, $p' = p/(p-1)$ et $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$. Pour $u \in L^p_E(X,T,m)$, l'application $T_v \ : \ u \mapsto \int \langle v,u\rangle_{E',E} dm$ est bien définie, linéaire et continue de $L^p_E(X,T,m)$ dans $\mathbb{R}$. (On a donc $T_v \in (L^p_E(X,T,m))'$).*

   De plus, l'application $T \ : \ v \mapsto T_v$ est une isométrie de $L^{p'}_{E'}(X,T,m)$ sur son image (qui est donc une partie de $L^p_E(X,T,m)'$).
   Si E' est séparable et $p < \infty$, l'image de T est $(L^p_E(X,T,m))'$ en entier.
6. *(Convergence dominée) Soit $1 \le p < +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p_E(X,T,m)$. Si*
   (a) $u_n \to u$ p.p.,
   (b) $\|u_n\|_E \le G$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $G \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X,T,m)$,
   alors $u_n \to u$ dans $L^p_E(X,T,m)$.

Démonstration de la proposition 4.16
Les propriétés 1-4 ne sont démontrées pas ici. La propriété 5 est partiellement démontrée dans l'exercice 4.2. La propriété 6 est plus facile. Il suffit de remarquer que

$$\|u_n - u\|_E \le \|u_n\|_E + \|u\|_E \le 2G.$$

On a donc $\|u_n - u\|^p_E \le 2^p|G|^p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$. Par le théorème de convergence dominée pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int \|u_n - u\|^p_E dm \to 0$ et donc que $u_n \to u$ dans $L^p_E(X,T,m)$. $\blacksquare$

Remarque 4.17 Soit E une espace de Banach. On dit que E est uniformément convexe si

$$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } (\|x\|_E = 1,\ \|y\|_E = 1,\ \|x-y\| \ge \eta) \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| \le 1 - \varepsilon.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ sont uniformément convexes. Une conséquence importante du fait que E soit un Banach uniformément convexe est que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E t.q. $x_n \to x$ faiblement dans E et $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$, alors $x_n \to x$ dans E. Cette propriété permet éventuellement de simplifier certaines démonstrations de la proposition 4.16 (mais n'est pas nécessaire).

<u>Différentes notions de dérivée</u> pour une fonction à valeurs vectorielles.
Plaçons nous maintenant dans le cadre qui va nous intéresser pour les équations paraboliques, c'est à dire :

$$(X,T,m) = (]0,T[, \mathcal{B}(]0,T[), \lambda).$$

On va d'abord définir "proprement" la dérivée par rapport au temps, $\partial_t u = du/dt$, pour une fonction de $]0,T[$ dans E qui n'est pas dérivable au sens classique (that is to say au sens de l'existence de la limite, dans E, du quotient différentiel habituel).
On note maintenant $L^p_E(]0,T[)$ l'espace $L^p_E(]0,T[,\mathcal{B}(]0,T[),\lambda)$ et $L^1_{E,loc}(]0,T[)$ l'ensembles des (classes de) fonctions à valeurs dans E localement intégrables sur $]0,T[$ (avec la mesure de Lebesgue).

Lemme 4.18 *Soit $u \in L^1_{\rm loc}(]0,T[,E)$ on suppose que $\int_0^T u(t)\varphi(t)dt = 0$ pour tout $\varphi \in C^\infty_c(]0,T[,\mathbb{R})$. Alors $u = 0$ p.p.*

<u>Démonstration :</u> Semblable au cas $E = \mathbb{R}$.

On peut ainsi définir la dérivée par transposition de u.

Définition 4.19 (Dérivée par transposition) *Soit E un espace de Banach, $1 \le p \le +\infty$ et $u \in L^p_E(]0,T[)$. On note $\mathcal{D}$ l'espace $C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}^\star_E$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{D}$ dans E. On définit $\partial_t u \in \mathcal{D}^\star_E$ par :*

$$\langle \partial_t u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star_E,\mathcal{D}} = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt \in E.$$

Remarque 4.20 Si $u \in C^1(]0,T[,E)$ on a

$$-\int_0^T u(t)\varphi'(t) = \int_0^T u'(t)\varphi(t) = \langle \partial_t u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star_E,\mathcal{D}}.$$

On confond alors u' (dérivée classique) avec $\partial_t u$ (dérivée par transposition), c'est à dire la fonction u' qui appartient à $C([0,T],E)$ avec l'application linéaire de $\mathcal{D}$ dans E notée $\partial_t u$. (Grâce au lemme 4.18, la fonction u' est entièrement déterminée par $\partial_t u$, ce qui justifie la confusion entre u' et $\partial_t u$.)

Définition 4.21 (Dérivée faible) *Soit E et F deux espaces de Banach et$1 \le p,q \le +\infty$. On suppose qu'il existe un espace vectoriel G t.q. $E \subset G$ et $F \subset G$. Soit $u \in L^p_E(]0,T[)$ (on a donc $\partial_t u \in \mathcal{D}^\star_E$). On dit que $\partial_t u \in L^q_F(]0,T[)$ si il existe une fonction $v \in L^q_F(]0,T[)$ telle que*

$$\langle \partial_t u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star_E,\mathcal{D}} = -\underbrace{\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt}_{\in E} = \underbrace{\int_0^T v(t)\varphi(t)dt}_{\in F}.$$

Cette égalité n'a de sens que s'il existe un espace vectoriel G tel que $E \subset G$ et $F \subset G$. Dans ce cas, on confond $\partial_t u \in \mathcal{D}^\star_E$ et $v \in L^q_F(]0,T[)$. (Ici aussi le lemme 4.18 est utile pour faire cette confusion car, grâce au lemme 4.18, si la fonction v existe elle est alors unique.)
En résumé, on a donc trois notions de dérivée d'une fonction u de $]0,T[$ à valeurs dans E (espace de Banach).

(1) Dérivée classique : $u' :]0,T[\to E$ (existe rarement…).
(2) Dérivée par transposition : $\partial_t u \in \mathcal{D}^\star_E$ (existe dès que $u \in L^p_E(]0,T[)$).
(3) Dérivée faible : $\partial_t u \in L^q_F(]0,T[)$ où F est un Banach tel que $E \subset G$ et $F \subset G$ avec G espace vectoriel.

Exemples Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

1. $E = H^1_0(\Omega)$, $F = H^{-1}(\Omega)$. On a alors $E, F \subset G = \mathcal{D}^\star(\Omega)$.
2. $1 \le p < +\infty$, $q = p/(p-1)$, $E = W^{1,p}_0(\Omega)$, $F = W^{-1,q}(\Omega)$. On a aussi $E, F \subset G = \mathcal{D}^\star(\Omega)$.
3. $E = H^1(\Omega)$ $F = (H^1(\Omega))'$. Pour cet exemple, on a $F \not\subset \mathcal{D}^\star(\Omega)$. En effet, on prend par exemple T définie, pour $v \in H^1(\Omega)$, par
$$T(v) = \int_{\partial\Omega} v d\gamma(x).$$
L'application T est bien une application linéaire continue sur $H^1(\Omega)$, donc $T \in H^1(\Omega)'$. Mais $T = 0$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$, et donc, comme T n'est pas l'application nulle, F ne s'injecte pas dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

   Dans cet exemple, pour injecter E et F dans le même espace G, on commence par identifier $(L^2(\Omega))'$ (dual topologique de $L^2(\Omega)$) avec $L^2(\Omega)$. Ceci est possible car si $T \in L^2(\Omega)'$, par le théorème de représentation de Riesz, il existe un et un seul $u \in L^2(\Omega)$ t.q. $T(v) = (v/u)_2$ pour tout $v \in L^2(\Omega)$. On confond alors u et T. Par cette identification, on a donc $L^2(\Omega)' = L^2(\Omega)$. On remarque maintenant que, si E, H sont deux espaces de Banach avec $E \subset H$, injection continue de E dans H et densité de E dans H, on a alors $H' \subset E'$. On prend ici $E = H^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$ et on a donc (grâce à l'identification entre $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)'$) $H' = L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)'$. Finalement, on a donc $E, F \subset G$ en prenant $G = (H^1(\Omega))'$. On a ainsi mis E et F dans le même espace $G = (H^1(\Omega))'$ grâce à l'identification de $L^2(\Omega)$ avec $(L^2(\Omega))'$.

4. Dans l'exemple précédent, on a deux espaces de Banach E et H avec $E \subset H$, injection continue de E dans H et densité de E dans H. On a alors $H' \subset E'$. L'espace H est une espace de Hilbert. En identifiant H avec H' on a donc $E \subset E'$. Mais, si l'objectif est seulement d'avoir $E \subset E'$, il n'est pas nécessaire d'avoir $H' \subset E'$ et on peut retirer l'hypothèse de densité de E dans H. Plus précisément, soit E un espace de Banach et H un espace de Hilbert avec $E \subset H$ et injection continue de E dans H. On identifie H avec H'. Soit maintenant $u \in E$. Comme $u \in H$, on a donc identification entre u et T_u qui est l'application $v \mapsto (v|u)_H$ de H dans $\mathbb{R}$. On peut alors aussi identifier u (qui est dans E) avec la restriction de T_u à E (qui est un élément de E'). Cette identification est légitime car si u_1 et u_2 sont deux éléments différents de E, les restrictions de T_{u_1} et T_{u_2} à E sont des applications différentes. On a ainsi $E \subset E'$. Dans cet exemple, il faut toutefois noter que (en l'absence de densité de E dans H) des éléments différents de H' ont la même restriction à E (et peuvent donc correspondre au même élément de E).
   Un exemple intéressant de cette situation est obtenu en prenant $H = L^2(\Omega)^N$ (avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$) et $E = \{u \in H \text{ t.q. } \mathrm{div}(u) = 0\}$.

Remarque 4.22 (Comparaison de $L^p(]0,T[, L^p(\Omega))$ et $L^p(\Omega\times]0,T[)$)
Soient $T > 0$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \le p < +\infty$.
Soit $u \in L^p(]0,T[, L^p(\Omega))$. Il existe alors $v \in L^p(\Omega\times]0,T[)$ tel que $u(t) = v(\cdot,t)$ p.p. (dans Ω) et pour presque tout $t \in]0,T[$. (Noter que cette égalité est vraie quel que soit les représentants choisis pour u et v.)
Récripoquement, si $v \in L^p(\Omega\times]0,T[)$, il existe $u \in L^p(]0,T[, L^p(\Omega))$ tel que $u(t) = v(\cdot,t)$ p.p. (dans Ω) et pour presque tout $t \in]0,T[$.
En conservant ces notations, on peut alors comparer du/dt (qui s'applique à un élément de $C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$) et $\partial v/\partial t$ (qui s'applique à un élément de $C_c^\infty(\Omega\times]0,T[,\mathbb{R})$). La réponse est que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$ et tout $\psi \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ on a

$$\int_\Omega \langle \frac{du}{dt}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}_E^\star,\mathcal{D}}(x)\psi(x)dx = -\int_\Omega (\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt)(x)\psi(x)dx$$
$$= -\int_\Omega\int_0^T v(x,t)\varphi'(t)\psi(x)dxdt = \langle \frac{\partial v}{\partial t}, \varphi\psi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega\times]0,T[),\mathcal{D}(\Omega\times]0,T[)}.$$

Proposition 4.23 (Commuter action et intégrale) Soit E un espace de Banach, $u \in L^1_E(]0,T[)$, $\psi \in E'$ et $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[)$. Alors,

$$< \psi, \int_0^T u(t)\varphi(t)dt >_{E',E} = \int_0^T < \psi, u(t) >_{E',E} \varphi(t)dt.$$

La preuve de la proposition 4.23 est laissée en exercice.

Lemme 4.24 *Soit E un espace de Banach, $1 \le p \le +\infty$ et $u \in L^p_E(]0,T[)$. On suppose que $\partial_t u \in L^p_E(]0,T[)$ (on a alors $u \in W^{1,p}_E(]0,T[)$. Alors, $u \in C([0,T],E)$, et même $u \in C^{0,1-1/p}([0,T],E)$. Plus précisément, il existe $a \in E$ t.q. $u(t) = a + \int_0^t \partial_t u(s)ds$ pour presque tout $t \in]0,T[$ et u est alors identifié à la fonction (continue sur $[0,T]$) $t \mapsto a + \int_0^t \partial_t u(s)ds$.*

Démonstration La démonstration est semblable au cas $E = \mathbb{R}$. On pose $\partial_t u = v \in L^p_E(]0,T[)$ et on définit w par $w(t) = \int_0^t v(s)ds$, de sorte que $w \in C([0,T],E)$. On montre assez facilement que $w_t = v = \partial_t u$ et donc $(w-u)_t = 0$. On a donc

$$\int_0^T (w-u)\varphi_t \, dt = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R}). \tag{4.18}$$

On choisit maintenant une fonction $\varphi_0 \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$ t.q. $\int_0^T \varphi_0(s)ds = 1$. Pour $\psi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$ on définit φ par

$$\varphi(t) = \int_0^t \psi(s)ds - \int_0^t \varphi_0(s)ds \int_0^T \psi(s)ds,$$

de sorte que $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$ et on peut prendre φ dans (4.18). On en déduit (la preuve est laissée en exercice) qu'il existe $a \in E$ t.q. $w - u = a$ p.p. Donc $u \in C([0,T],E)$. Avec l'inégalité de Hölder, on montre ensuite que $u \in C^{0,1-1/p}$. ■

Nous allons maintenant montrer un lemme plus difficile donnant aussi la continuité de u. On suppose que E est un espace de Banach et F un espace de Hilbert t.q. $E \subset F$, avec injection continue, et E dense dans F. On a donc aussi $F' \subset E'$. Comme F est un espace de Hilbert, on peut identifier F avec son dual par le théorème de représentation de Riesz, that is to say que l'on identifie $v \in F$ avec l'appliaction $T_v \ : \ u \mapsto (v|u)_F$ (qui est un élément de F'). L'application $v \mapsto T_v$ est une isométrie (bijective) de F dans F'. Avec cette identification, on a donc $E \subset F = F' \subset E'$. Donc, tout élément de E est alors un élément de E'. Pour $u, v \in E$, on a

$$< v, u >_{E',E} = (v|u)_F,$$

that is to say $< T_v, u >_{E',E} = (v|u)_F$. où T_v est l'élément de F' identifié à $v \in F$. Avec cette identification de F avec F', on va maintenant donner un résultat de continuité de u dans F si $u \in L^2(]0,T[,E)$ et $\partial_t u \in L^2(]0,T[,E')$. Il faut faire très attention que cette dernière hypothèse n'a de sens que par l'identification de F avec F' (si on change d'espace F, on change le sens de $\partial_t u \in L^2(]0,T[,E')$, alors que E' n'est pas changé...).

Lemme 4.25 *Soit E un espace de Banach et F un espace de Hilbert t.q. $E \subset F$, avec injection continue, et E dense dans F. On identifie F avec F' (de sorte que $E \subset F = F' \subset E'$). Soit $u \in L^2_E(]0,T[)$. On suppose que $\partial_t u \in L^2_{E'}(]0,T[)$. Alors $u \in C([0,T],F)$ et, pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$ on a*

$$\|u(t_1)\|_F^2 - \|u(t_2)\|_F^2 = 2\int_{t_2}^{t_1} < \partial_t u, u >_{E',E} dt.$$

Démonstration On va montrer que $u \in C([0,T[,F)$.
Soit $\rho \in C_c^\infty(]-2,-1[)$ t.q. $\int_{\mathbb{R}} \rho dx = 1$ et $\rho \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\rho_n = n\rho(n\cdot)$ de sorte que le support de ρ_n est inclus dans $]-\dfrac{2}{n}, -\dfrac{1}{n}[$ et que $\displaystyle\int \rho_n dx = 1$. On définit u_n par convolution avec ρ_n, that is to say $u_n = \tilde{u} \star \rho_n$ avec

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u \text{ sur }]0,T[\\ u &= 0 \text{ sur }]0,T[^c. \end{aligned}$$

On a donc $u_n \to u$ dans $L^2_E(]0,T[)$, $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R},E)$ et $u_n' = \tilde{u} \star \rho_n'$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n'(t) = \int_0^T u(s)\rho_n'(t-s)ds.$$

On remarque maintenant que $\rho_n(t-s) = 0$ si $t - s \notin \left]\dfrac{-2}{n}, \dfrac{-1}{n}\right[$ c'est à dire $s \notin \left]t + \dfrac{1}{n}, t + \dfrac{2}{n}\right[$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, T-\varepsilon[$. Pour $n \geq n_0$ avec n_0 t.q. $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$ on a $t + \frac{2}{n} < T$ et donc

$$\rho_n(t - \cdot) \in C_c^\infty(]0,T[).$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n'(t) &=< \partial_t u, \rho_n(t-\cdot) >_{\mathcal{D}^\star_E,\mathcal{D}} \\ &= \int_0^T \partial_t u(s)\rho_n(t-s)ds \in E', \text{ car } \partial_t u \in L^2_{E'}(]0,T[). \end{aligned}$$

Donc, $u_n' = \tilde{\partial_t u} \star \rho_n$ sur $[0, T-\varepsilon[$, avec

$$\tilde{\partial}_t u = \begin{cases} \partial_t u \text{ sur }]0,T[\\ 0 \text{ sur }]0,T[^c. \end{cases}$$

Mais $\tilde{\partial_t u} \star \rho_n \to \tilde{\partial}_t u$ dans $L^2(\mathbb{R}, E')$. Donc $u_n' = \tilde{\partial_t u} \star \rho_n \to \partial_t u$ dans $L^2_{E'}(]0, T-\varepsilon[)$.

En résumé, $\begin{cases} u_n \to u \text{ dans } L^2_E(]0,T[) \\ u_n' \to \partial_t u \text{ dans } L^2_{E'}(]0,T-\varepsilon[) \quad \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$

On va maintenant montrer que $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F pour tout $t \in [0,T[$, et même, pour tout $\varepsilon > 0$, uniformément si $t \in [0, T-\varepsilon]$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ définie par $\varphi(t) = \|u_n(t) - u_m(t)\|_F^2$. On a donc, pour $t \in]0,T[$,

$$\varphi'(t) = 2(\underbrace{(u_n' - u_m')(t)}_{\in E} \mid \underbrace{(u_n - u_m)(t)}_{\in E})_F.$$

Soient $t_1, t_2 \in [0, T-\varepsilon]$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} 2(u_n'(s) - u_n'(s)|u_n(s) - u_m(s))_F ds \\ &= 2\int_{t_1}^{t_2} < (u_n)_t(s) - (u_m)_t(s), u_n(s) - u_m(s) >_{E',E} ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \varphi(t_2) - \varphi(t_1) &\le 2\left(\int_0^{T-\varepsilon} \|(u_n)_t - (u_m)_t\|_{E'}^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u_n - u_m\|_E^2 ds\right)^{1/2} \\ &\le 2\|(u_n)_t - (u_m)_t\|_{L^2_{E'}} \|u_n - u_m\|_{L^2_E}. \end{aligned}$$

Soit $\eta > 0$, comme $u_n \to u$ dans $L^2_E(]0,T[)$ et que la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2_{E'}(]0, T-\varepsilon[)$, il existe n_0 t.q.

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \le \eta \text{ pour } m, n \ge n_0.$$

On a donc

$$\varphi(t_2) \le \varphi(t_1) + \eta \quad \text{ pour } n, m \ge n_0.$$

On intègre cette inégalité pour $t_1 \in]0, T-\varepsilon[$. On obtient

$$\begin{aligned} (T-\varepsilon)\varphi(t_2) &\le \int_0^{T-\varepsilon} \|u_n - u_m\|_F^2 dt_1 + T\eta \\ &\le \|u_n - u_m\|^2_{L^2_F} + T\eta \end{aligned}$$

En utilisant une nouvelle fois que $u_n \to u$ dans $L^2_E(]0,T[)$, il existe n_1 t.q.

$$(T-\varepsilon)\varphi(t_2) \le (T+1)\eta \text{ pour } n, m \ge n_1.$$

On a donc $\varphi(t) \leq \frac{(T+1)\eta}{T-\varepsilon}$ pour $n, m \geq n_1$ et $t \in [0, T-\varepsilon]$. On a ainsi montré que, pour tout $t \in [0, T-\varepsilon]$,

$$n, m \geq n_1 \Rightarrow \|u_n(t) - u_m(t)\|_F^2 \leq \frac{(T+1)\eta}{T-\varepsilon}.$$

Ceci montre bien que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F uniformément par rapport à t, si $t \in [0, T-\varepsilon]$. Il existe donc une fonction w de $[0, T[$ dans F t.q. $u_n(t) \to w(t)$ dans F pour tout $t \in [0, T[$. Comme cette convergence est uniforme sur $[0, T-\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction w est continue sur $[0, T-\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$. On a donc $w \in C([0, T[, F)$.
Comme $u_n \to u$ dans $L^2_E(]0, T[)$ (et donc p.p. sur $]0, T[$ après extraction éventuelle d'une sous suite), on a donc $u = w$ p.p., et donc $u \in C([0, T[, F)$ (car on identifie, comme d'habitude, la classe de fonctions u avec son représentant continu qui est justement w).
De manière analogue, en décentrant les noyaux régularisants de l'autre côté, on montre que $u \in C(]0, T], F)$. On a donc $u \in C([0, T], F)$.
Enfin, on a aussi pour $t_1, t_2 \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\|u_n(t_1)\|_F^2 - \|u_n(t_2)\|_F^2 \quad &= 2\int_{t_2}^{t_1} (u_n'(s)|u_n(s))_F ds \\ &= 2\int_{t_2}^{t_1} < (u_n)_t(s), u_n(s) >_{E',E} ds\end{aligned}$$

en passant à la limite sur n, on obtient

$$\|u(t_1)\|_F^2 - \|u(t_2)\|_F^2 = 2\int_{t_2}^{t_1} < \partial_t u(s), u(s) >_{E',E} ds.$$

4.3 Existence par la méthode de Faedo-Galerkin

Notation : Si E est un espace de Banach et $T > 0$, on notera souvent $L^2(]0, T[, E)$ (au lieu de $L^2_E(]0, T[)$) l'espace $L^2_E(]0, T[, \mathcal{B}(]0, T[, \lambda)$.
On s'intéresse dans ce paragraphe au problème suivant :
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T \in \mathbb{R}_+^\star$, f une fonction de $\Omega\times]0, T[$ dans $\mathbb{R}$ et u_0 une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. On cherche u tel que

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0, T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

On va donner pour ce problème linéaire un résultat d'existence et d'unicité de solution faible.

Théorème 4.26 (Faedo-Galerkin) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Alors, il existe un et un seul u tel que*

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T < \partial_t u(s), v(s) >_{H^{-1}, H_0^1} ds + \int_0^T \Big(\int_\Omega \nabla u(s).\nabla v(s) dx \Big) ds = \int_0^T < f(s), v(s) >_{H^{-1}, H_0^1} ds \\ \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.}. \end{cases} \tag{4.19}$$

Démonstration du théorème 4.26
On rappelle que l'on a identifié $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega))'$, de sorte que $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \subset H^{-1}(\Omega)$. Comme on cherche u t.q. $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a nécessairement $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$ (d'après le lemme 4.25). La fonction u est donc définie en tout $t \in [0,T]$, ce qui permet de donner un sens à la condition $u(0) = u_0$ p.p..

L'idée, pour démontrer ce théorème, est de résoudre d'abord le problème dans des espaces de dimension finie ; on pourrait le faire par exemple avec des espaces d'éléments finis, mais c'est plus simple en utilisant une base hilbertienne formée de fonctions propres du Laplacien ; that is to say une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ t.q. e_n est (pour tout n) une solution faible de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad \text{dans } \Omega, \\ e_n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Etape 1, remarques liminaires. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} e_n \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v dx = \lambda_n \int_\Omega e_n v dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

avec $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\lambda_n \uparrow +\infty$ quand $n \to +\infty$.
Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, on a, pour tout $w \in L^2(\Omega)$, $w = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star}(w|e_n)_2 e_n$ au sens de la convergence $L^2(\Omega)$ (that is to say que $\sum_{i=1}^n (w|e_i)e_i \to w$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$).

On va montrer maintenant que la famille $(\lambda_n^{-1/2} e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, la norme de u dans $H_0^1(\Omega)$ est définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\,|\nabla u|\,\|_{L^2(\Omega)}$ et donc le produit scalaire de u et v dans $H_0^1(\Omega)$ est donné par $(u|v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$.
On remarque tout d'abord que pour tout $n, m \geq 1$, on a

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m dx = \lambda_n \int_\Omega e_n e_m dx = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

On en déduit que $(e_n|e_m)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ si $n \neq m$ et

$$\|\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\nabla e_n \cdot \nabla e_n}{\lambda_n} dx = 1.$$

Puis, on remarque que l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, noté $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$, est dense dans $H_0^1(\Omega)$. En effet soit $v \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $(v|e_n)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$0 = (v|e_n)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v dx = \lambda_n \int_\Omega e_n v dx.$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (et $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$), on en déduit que $v = 0$ p.p.. Ceci montre que l'orthogonal dans $H_0^1(\Omega)$ de $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ est réduit à $\{0\}$ et donc que $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Finalement, on obtient ainsi que la famille $(\lambda_n^{-1/2} e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

Etape 2, solution approchée.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $E_n = ev\{e_p, p = 1, \dots n\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$ avec $\alpha_i \in C([0,T], \mathbb{R})$. En supposant que les α_i sont dérivables pour tout t (ce qui n'est pas vrai, en général), on a donc

$$u'_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t)e_i,$$

de sorte que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et tout $t \in]0,T[$, on a (compte tenu de l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$),

$$\langle u'_n(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t) \int_\Omega e_i\varphi dx.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$-\Delta u_n(t) = -\sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\Delta e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i(t)e_i \text{ dans } \mathcal{D}^\star(\Omega) \text{ et dans } H^{-1}(\Omega),$$

that is to say , pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle -\Delta u_n(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u_n(t) \cdot \nabla\varphi dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i(t) \int_\Omega e_i\varphi dx.$$

Enfin, comme $f \in L^2(]0,T[, H^{-1})$, on a pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\langle f(\cdot), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \in L^1_{\mathbb{R}}(]0,T[)$. La quantité $\langle f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ est donc définie pour presque tout t et on obtient finalement, pour presque tout t et pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u'_n(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (\alpha'_i(t) + \lambda_i\alpha_i(t)) \int_\Omega e_i\varphi dx - \langle f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}.$$

Pour obtenir u_n, une idée naturelle est de choisir les fonctions α_i pour que

$$\langle u'_n(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = 0$$

pour tout $\varphi \in E_n$. En posant $f_i(t) = \langle f(t), e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$, ceci est équivalent à demander pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\alpha'_i(t) + \lambda_i\alpha_i(t) = f_i(t).$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0|e_i)_2$, ceci suggère donc de prendre

$$\alpha_i(t) = \alpha_i^{(0)}e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)}f_i(s)ds. \tag{4.20}$$

Les fonctions α_i ainsi définies appartiennent à $C([0,T], \mathbb{R})$ et on a donc $u_n \in C([0,T], E_n) \subset C([0,T], H_0^1(\Omega))$ avec $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$.

Etape 3, précision sur la dérivée en temps. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et u_n la solution approchée donnée par l'étape précédente. Les fonctions α_i ne sont pas nécessairement dérivables. On va préciser ici ce que vaut la dérivée (par transposition) de u_n. On va noter cette dérivée $(u_n)_t$. Par définition de la dérivation par transposition, $(u_n)_t$ est un élément de $\mathcal{D}_E^\star$ avec $E = H_0^1(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[, \mathbb{R})$ on a

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}_E^\star,\mathcal{D}} = -\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt \in E_n \subset H_0^1(\Omega).$$

Comme $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, on a donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}_E^\star,\mathcal{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \alpha_i(t) e_i \varphi'(t)dt = -\sum_{i=1}^n \big(\int_0^T \alpha_i(t)\varphi'(t)dt\big) e_i.$$

On utilise maintenant (4.20),

$$\int_0^T \alpha_i(t)\varphi' dt = T_i + S_i,$$

avec

$$T_i = \int_0^T \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t}\varphi'(t)dt = \int_0^T \alpha_i^{(0)}\lambda_i e^{-\lambda_i t}\varphi(t)dt.$$

$$S_i = \int_0^T \big(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s)ds\big)\varphi'(t)dt.$$

Pour transformer S_i on utilise le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} S_i &= \int_0^T \big(\int_0^T 1_{[0,t]}(s) e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s)ds\big)\varphi'(t)dt = \int_0^T \big(\int_0^T 1_{[s,T]}(t) e^{-\lambda_i(t-s)}\varphi'(t)dt\big) f_i(s)ds \\ &= \int_0^T \big(\int_s^T e^{-\lambda_i(t-s)}\varphi'(t)dt\big) f_i(s)ds = \int_0^T \big(\int_s^T \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)}\varphi(t)dt\big) f_i(s)ds - \int_0^T \varphi(s) f_i(s)ds. \\ &= \int_0^T \big(\int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s)ds\big)\varphi(t)dt - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

On en déduit que $T_i + S_i = \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t)\varphi(t)dt - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt$, et donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star,\mathcal{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \lambda_i\alpha_i(t) e_i\varphi(t)dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T f_i(t) e_i \varphi(t)dt.$$

Since this equality holds for all $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$, one has finally

$$(u_n)_t = -\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0,T[,E_n).$$

Ce qui peut aussi s'écrire, avec $f^{(n)} = \sum_{i=1}^n f_i e_i$,

$$(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0,T[,E_n) \subset L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)).$$

Soit maintenant $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$. Comme $(u_n)_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a $\langle (u_n)_t, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \in L^1(]0,T[)$ et

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega f_i e_i v dx dt.$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla v dx dt &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \langle f(t), e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \big(\int_\Omega e_i v dx\big) dt \\ &= \int_0^T \langle f(t), \sum_{i=1}^n (v|e_i)_2 e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

On note P_n l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le s.e.v. E_n. L'opérateur P_n peut donc être vu comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $E_n \subset H_0^1(\Omega)$). On note alors P_n^t l'opérateur transposé qui est donc un opérateur de $H^{-1}(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))'$ qui est lui même identifié à $L^2(\Omega)$ et est aussi un s.e.v. de $H^{-1}(\Omega)$. On obtient alors (pour tout $v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$)

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v dx dt = \int_0^T \langle f, P_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt = \int_0^T \langle P_n^t f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt. \quad (4.21)$$

On a aussi $u_n \in C([0,T], H_0^1(\Omega))$ et $u_n(0) = P_n u_0$.

Etape 4, estimations sur la solution approchée.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. D'après la section 4.2, on a donc

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 = \int_0^T \langle (u_n)_t, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

En prenant $v = u_n$ dans (4.21), on en déduit

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx dt = \int_0^T \langle f, P_n u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt,$$

et donc

$$\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} = \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx dt \le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, P_n u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

On en déduit, en remarquant que $P_n u_n = u_n$,

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \\ &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \\ &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \le \|u_0\|_2^2 + \|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Ce qui donne aussi

$$\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \le \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Comme $(u_n)_t = \Delta u_n + P_n^t f$ (égalité (4.21)) et que $\|P_n w\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, on obtient aussi une borne sur $(u_n)_t$:

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \le \|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}$$

et donc

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \le \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc bornée dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$.

Etape 5, passage à la limite. Grâce aux estimations obtenues à l'étape précédente, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que, quand $n \to +\infty$,

$$u_n \to u \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)),$$

$$(u_n)_t \to w \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$$

et les estimations sur u_n et $(u_n)_t$ donnent aussi les estimations suivantes sur u et $\partial_t u$:

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}$$

$$\|(u)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Nous allons montrer tout d'abord que $w = \partial_t u$ (puis nous montrerons que u est solution de $\partial_t u = \Delta u + f$ au sens demandé par (4.19)).

Par définition de $\partial_t u$, on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$\int_0^T \partial_t u(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt.$$

Pour démontrer que $\partial_t u = w$, il suffit donc de montrer que l'on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt. \tag{4.22}$$

On rappelle que le terme de gauche de l'égalité (4.22) est dans $H^{-1}(\Omega)$ alors que le terme de droite est dans $H_0^1(\Omega)$. Cette égalité utilise donc le fait que $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, cette inclusion étant due au fait que nous avons identifié $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$.

Soit donc $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$. Nous allons montrer (4.22). Pour $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on considère l'application S de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$S(v) = \int_\Omega \big(-\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt\big)\psi(x)dx \text{ pour } v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)).$$

L'application S est linéaire continue de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$. Comme $u_n \to u$ faiblement $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, on a donc $S(u_n) \to S(u)$ quand $n \to +\infty$. Or, pour $v = u_n$ et pour $v = u$, on a

$$S(v) = -(\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt|\psi)_2 = -\langle\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On a donc, quand $n \to +\infty$,

$$-\langle\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \to -\langle\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On utilise maintenant le fait que $-\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt$ (par définition de $(u_n)_t$). On a donc

$$\langle\int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \to -\langle\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On considère maintenant l'application $\bar{S}$ de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\bar{S}(v) = \langle \int_0^T v(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \text{ pour } v \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)).$$

L'application $\bar{S}$ est linéaire continue de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$. Comme $(u_n)_t \to w$ faiblement $L^2(]0,T[,$ $H^{-1}(\Omega))$, on a donc $\bar{S}((u_n)_t) \to \bar{S}(w)$ quand $n \to +\infty$, that is to say

$$\langle \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \to \langle \int_0^T w(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On en déduit que pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$-\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle \int_0^T w(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On a donc bien montré que $-\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T w(t)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$, that is to say que $\partial_t u = w$.

Nous savons donc que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $\partial_t u_n \to \partial_t u$ faiblement dans $L^2(]0,T[,$ $H^{-1}(\Omega))$. Pour montrer que u est solution de $\partial_t u = \Delta u + f$ au sens demandé par (4.19), il suffit maintenant de passer à la limite dans (4.21). Soit $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, selon (4.21),

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T (u_n|v)_{H_0^1} dt = \int_0^T \langle f, P_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Les deux termes de gauche de cette égalité passent à limite quand $n \to +\infty$ grâce aux convergences de u_n et $(u_n)_t$. Pour le terme de droite, on utilise l'étape liminaire. On remarque que $P_n v(t) \to v(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour presque tout t et $\|P_n v(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour presque tout t. Cela permet de passer à la limite dans le terme de droite, par le théorème de convergence dominée. On obtient ainsi

$$\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T (u|v)_{H_0^1} dt = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Ce qui est bien le sens souhaité dans la formulation (4.19).

Etape 6, condition initiale. Comme $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on sait que $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$ (voir la section 4.2). Pour terminer la démonstration du fait que u est solution de (4.19), il reste donc seulement à montrer que $u(0) = u_0$ p.p. (that is to say $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$).

On sait que $u(t) \to u(0)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to 0$. On sait aussi que $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} e_i \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Pour en déduire que $u(0) = u_0$, il suffit de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $C([0,T],H^{-1}(\Omega))$. En effet, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $C([0,T],H^{-1}(\Omega))$, il existe $w \in C([0,T],H^{-1}(\Omega))$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $u_n(t) \to w(t)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$ (et donc aussi dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$). En particulier, on a donc $w(0) = u_0$. Mais, on sait déjà que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et donc aussi faiblement dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Par unicité de la limite, on a donc $u = w$ p.p. sur $]0,T[$ et donc $u(t) = w(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ car u et w sont continues sur $[0,T]$. On obtient ainsi, finalement, $u(0) = w(0) = u_0$.

Il reste à montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $C([0,T],H^{-1}(\Omega))$. Par le théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que

1. Pour tout $t \in [0,T]$, $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.

2. $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \to 0$, quand $s \to t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^\star$ (et pour tout $t \in [0,T]$).

Par démontrer le deuxième item, on utilise la fait que $(u_n)_t \in L^1([0,T], H^{-1}(\Omega))$. La section 4.2 nous donne que pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 > t_2$, et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a (dans $H^{-1}(\Omega)$)

$$u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} (u_n)_t(s)ds,$$

et donc

$$\begin{aligned}\|u_n(t_1) - u_n(t_2)\|_{H^{-1}} \le \int_{t_2}^{t_1} \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}} ds &\le \Big(\int_0^T \|(u_n)_t(s)\|^2_{H^{-1}} ds\Big)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t_1 - t_2}\\ &\le \|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \sqrt{t_1 - t_2}.\end{aligned}$$

Comme la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on en déduit bien que $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \to 0$, quand $s \to t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^\star$ (et pour tout $t \in [0,T]$).

Pour démontrer de premier item, on utilise encore la section 4.2. Comme $u_n \in L^2(]0,T[, H^1_0(\Omega))$ et $(u_n)_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on a, pour tout $t, s \in [0,T]$,

$$\|u_n(t)\|_2^2 = \|u_n(s)\|_2^2 + 2\int_s^t \langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi)\rangle_{H^{-1},H^1_0} d\xi,$$

et donc

$$\|u_n(t)\|_2^2 \le \|u_n(s)\|_2^2 + 2\int_s^t |\langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi)\rangle_{H^{-1},H^1_0}| d\xi \le \|u_n(s)\|_2^2 + 2\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H^1_0)}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à s sur $[0,T]$, on en déduit

$$T\|u_n(t)\|_2^2 \le \|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,L^2(\Omega))} + 2T\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H^1_0)}.$$

Ceci montre que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$ (et même uniformément par rapport à t). On en déduit que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et conclure, comme cela est indiqué au début de cette étape, que $u(0) = u_0$ p.p.. Ceci termine la démonstration du fait que u est solution de (4.19) et donc la démonstration de la partie “existence” du théorème 4.26.

Etape 7, unicité. On montre maintenant la partie “unicité” du théorème 4.26. Soit u_1, u_2 deux solutions de (4.19). On pose $u = u_1 - u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et en prenant, pour $t \in [0,T]$, $v = u1_{]0,t[}$ comme fonction test, on obtient

$$\int_0^t \langle \partial_t u(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H^1_0} ds + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla u(s) dx ds = 0.$$

Comme $u \in L^2(]0,T[, H^1_0(\Omega))$ et $\partial_t u \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on a, d'après la section 4.2,

$$\frac{1}{2}(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) = \int_0^t \langle \partial_t u(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H^1_0} ds.$$

On en déduit, pour tout $t \in [0,T]$,

$$(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) + 2\int_0^t \int_\Omega \nabla u(s)\cdot\nabla u(s)dxds = 0.$$

Enfin, comme $u(0) = 0$, on obtient bien, finalement, $u(t) = 0$ p.p. dans Ω, pour tout $t \in [0,T]$. Ce qui montre la partie "unicité" du théorème 4.26. ■

Nous allons maintenant donner quelques propriétés complémentaires sur la solution de (4.19)

Proposition 4.27 (Dépendance continue)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $T > 0$. Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on note $T(u_0,f)$ la solution de (4.19)*. L'opérateur T est linéaire continu de $L^2(\Omega)\times L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et dans $C([0,T],L^2(\Omega))$.*

Démonstration On note u la solution de (4.19). Il suffit de remarquer que

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)} \le \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} + \|u_0\|_2,$$

$$\|u(t)\|_2^2 \le \|u_0\|_2^2 + \|\partial_t u\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1})} + \|u\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1)} \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

et enfin que

$$\|\partial_t u\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \le \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}.$$

On en déduit bien la continuité de T dans les espaces annoncés. ■

Proposition 4.28 (Positivité et principe du maximum)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On note u la solution de (4.19) *avec $f = 0$.*

1. *On suppose $u_0 \ge 0$ p.p.. On a alors $u(t) \ge 0$ p.p. et pour tout $t \in [0,T]$.*
2. *On suppose que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Soit $A, B \in \mathbb{R}$ t.q. $A \le 0 \le B$ et $A \le u_0 \le B$ p.p.. On a alors $A \le u(t) \le B$ p.p. et pour tout $t \in [0,T]$.*

Démonstration Pour démontrer le premier item, on montre plutôt (ce qui est équivalent) que $u_0 \le 0$ p.p. implique $u(t) \le 0$ p.p. pour tout $t \in [0,T]$. On suppose donc que $u_0 \le 0$ p.p.. On utilise alors le lemme 4.29 avec $\varphi(s) = s^+$. Il donne que $u^+ \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$. Pour $t \in [0,T]$, on peut donc prendre $v = u^+ 1_{]0,t[}$ dans l'équation de (4.19) et on obtient

$$\int_0^t \langle \partial_t u(s), u^+(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s)\cdot\nabla u^+(s)dxds = 0.$$

En utilisant encore le lemme 4.29, on a donc

$$\frac{1}{2}\|u^+(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u^+(0)\|_2^2 + \int_0^t \|u^+(s)\|^2_{H_0^1} ds = 0.$$

Comme $u^+(0) = u_0^+ = 0$ p.p., on en déduit bien que $\|u^+(t)\|_2 = 0$ et donc $u(t) \le 0$ p.p..
La démonstration du deuxième item est semblable en utilisant le lemme 4.29 avec $\varphi(s) = (s-B)^+$ et $\varphi(s) = (s-A)^-$. ■

Lemme 4.29 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $T > 0$. Soit φ une fonction lipchitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(0) = 0$. On définit Φ par*

$$\Phi(\xi) = \int_0^\xi \varphi(\bar{\xi})d\bar{\xi} \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}.$$

Soit $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ t.q. $\partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. On a alors $\varphi(u) = L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, $\Phi(u) \in C([0,T],L^1(\Omega))$ et, pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$,

$$\int_\Omega \Phi(u(t_2))dx - \int_\Omega \Phi(u(t_1))dx = \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t u(s), \varphi(u(s)) \rangle_{H^{-1},H_0^1} ds.$$

On a aussi pour presque tout $t \in]0,T[$, $\varphi(u(t)) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla\varphi(u(t)) = \varphi'(u(t))\nabla u$ p.p., that is to say , en étant plus précis, $\nabla\varphi(u)(x,t) = \varphi'(u(x,t))\nabla u(x,t)$ pour presque tout $x \in \Omega$. Dans cette égalité, on peut prendre pour $\varphi'(u(x,t))$ n'importe quelle valeur si φ n'est pas dérivable au point $u(x,t)$. En particulier ceci montre que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\nabla u = 0$ p.p. sur l'ensemble $\{u = a\}$.

Démonstration Ce lemme est la version “parabolique” des lemmes 2.21 et 2.22 vus précédemment. La démonstration consiste à considérer d'abord (comme dans le lemme 2.21) que φ est de classe C^1 et à régulariser u. Puis à approcher φ par des fonctions de classe C^1 (au moins lorsque φ est dérivable sauf en un nombre fini de points, le cas général étant plus difficile). Cette preuve n'est pas détaillée ici. ∎

On donne maintenant l'équivalence entre la formulation faible (4.19) et une autre formulation faible, la formulation (4.23). Cette deuxième formulation est, en particulier, intéressante lorsque l'on cherche à prouver la convergence des solutions approchées obtenues par une discrétisation en espace et en temps.

Proposition 4.30 (Equivalence entre deux formulations faibles) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ (on identifie, comme d'habitude $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$). Alors u est solution de* (4.19) *si et seulement si u vérifie :.*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\ -\displaystyle\int_0^T \int_\Omega u\varphi_t dxdt - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi dxdt \\ = \displaystyle\int_0^T < f(s), \varphi(\cdot,s) >_{H^{-1},H_0^1} ds \;\; \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty([0,T[\times\Omega,\mathbb{R}). \end{array} \right. \tag{4.23}$$

Démonstration On montre tout d'abord que “u solution de (4.19) $\Rightarrow$ u est solution de (4.23)”. On suppose donc que u est solution de (4.19). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T[,\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$\varphi_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} 1_{]t_i,t_{i+1}[}(t)\varphi(x,t_i), \tag{4.24}$$

où $t_i = (i/n)T$. Comme φ est une fonction régulière, il est clair que $\varphi_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $\varphi_n \to \varphi$ dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ quand $n \to +\infty$. Comme $\varphi_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que u est solution de (4.19), on a

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \varphi_n \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_n dxdt = \int_0^T \langle f, \varphi_n \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

On pose $T_n = \int_0^T \langle \partial_t u, \varphi_n \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt$. Comme $\varphi_n \to \varphi$ dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ quand $n \to +\infty$, l'égalité précédente donne

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx dt + \int_0^T \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt. \tag{4.25}$$

On va maintenant calculer $\lim_{n\to+\infty} T_n$ en utilisant (4.24). On a

$$\begin{aligned} T_n = \int_0^T \langle \partial_t u(t), \sum_{i=0}^{n-1} 1_{]t_i,t_{i+1}[}(t) \varphi(\cdot, t_i) \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \partial_t u(t), \varphi(\cdot, t_i) \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \langle \int_{t_i}^{t_{i+1}} \partial_t u(t) dt, \varphi(\cdot, t_i) \rangle_{H^{-1},H_0^1}. \end{aligned}$$

Comme $u, \partial_t u \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$ (on rappelle que $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ par l'identification de $L^2(\Omega)$ avec son dual), on a (d'après la section 4.2) $u \in C([0,T], H^{-1}(\Omega))$ et

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \partial_t u(t) dt = u(t_{i+1}) - u(t_i) \in H^{-1}(\Omega).$$

On a donc

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \langle u(t_{i+1}) - u(t_i), \varphi(\cdot, t_i) \rangle_{H^{-1},H_0^1} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_\Omega (u(x, t_{i+1}) - u(x, t_i)) \varphi(x, t_i) dx.$$

La dernière égalité venant de la manière avec laquelle un élément de $H_0^1(\Omega)$ est considéré comme un élément de $H^{-1}(\Omega)$. Une intégration par parties discrète donne alors (en remarquant que $\varphi(\cdot, t_n) = 0$)

$$T_n = -\int_\Omega u(x,0)\varphi(x,0) dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\varphi(x, t_{i-1}) - \varphi(x, t_i)) u(x, t_i) dx.$$

Puis, comme φ est une fonction régulière,

$$\begin{aligned} T_n &= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0) dx - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_t(x,t) dt \big) u(x, t_i) dx \\ &= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0) dx - \int_0^T \int_\Omega \varphi_t(x,t) \Big(\sum_{i=1}^{n} 1_{]t_{i-1},t_i[} u(x, t_i) \Big) dx dt \\ &= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0) dx - \int_0^T \int_\Omega \varphi_t(x,t) (u(x,t) + R_n(x,t)) dx dt, \end{aligned}$$

avec $R_n(x,t) = \sum_{i=1}^n 1_{]t_{i-1},t_i[} u(x,t_i) - u(x,t)$. Pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\|R_n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le \max\{\|u(s_1) - u(s_2)\|_{L^2(\Omega)},\ s_1, s_2 \in [0,T],\ |s_1 - s_2| \le \frac{T}{n}\}.$$

Comme $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \|R_n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$ et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega \varphi_t(x,t) R_n(x,t) dx dt = 0.$$

En résumé, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx - \int_0^T \int_\Omega \varphi_t(x,t)u(x,t)dxdt.$$

Avec (4.25) on a donc, pour tout $\varphi \in C_c^\infty([0,T[\times\Omega, \mathbb{R})$,

$$-\int_0^T \int_\Omega \varphi_t(x,t)u(x,t)dxdt - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi dxdt = \int_0^T \langle f,\varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt.$$

Ceci montre que u est bien solution de (4.23).

On montre maintenant que "u solution de (4.23) $\Rightarrow$ u est solution de (4.19)". On suppose donc que u est solution de (4.23). On veut montrer que u est solution de (4.19). On va raisonner en deux étapes. On va d'abord montrer que $\partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $\partial_t u = \Delta u + f$ (remarquer que $\Delta u, f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ puis que $u(0) = u_0$.

Etape 1 On montre ici que $\partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $\partial_t u = \Delta u + f$. On utilise la définition de $\partial_t u$. On a $\partial_t u \in \mathcal{D}_E^\star$, avec $E = H_0^1(\Omega)$, et pour tout $\phi \in C^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$

$$\langle \partial_t u, \phi\rangle_{\mathcal{D}_E^\star,\mathcal{D}} = -\int_0^T u(t)\phi'(t)dt \in H_0^1(\Omega).$$

Pour montrer que $\partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $\partial_t u = \Delta u + f$, il s'agit donc de montrer que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$-\int_0^T u(t)\phi'(t)dt = \int_0^T (\Delta u(t) + f(t))\phi(t)dt.$$

Noter que le membre de gauche de cette égalité est dans $H_0^1(\Omega)$ et donc dans $H^{-1}(\Omega)$ (grâce à l'identification entre $L^2(\Omega)$ et son dual) et que le membre de droite est dans $H^{-1}(\Omega)$. Pour montrer l'égalité de ces deux termes, il suffit de montrer que

$$\langle -\int_0^T u(t)\phi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle \int_0^T (\Delta u(t) + f(t))\phi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \text{ pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega),$$

that is to say que

$$-\int_0^T \langle u(t)\phi'(t), \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt = \int_0^T \langle (\Delta u(t) + f(t))\phi(t), \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt \text{ pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Par densité de $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ dans $H_0^1(\Omega)$, il suffit de considérer $\psi \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. En utilisant la manière donc $H_0^1(\Omega)$ est inclus dans $H^{-1}(\Omega)$, on a

$$-\int_0^T \langle u(t)\phi'(t), \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt = -\int_0^T \int_\Omega u(x,t)\phi'(t)\psi(x)dxdt.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle (\Delta u(t) + f(t))\phi(t), \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt &= \int_0^T \phi(t)\langle \Delta u(t) + f(t), \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt \\ &= -\int_0^T \phi(t)\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x)dxdt + \int_0^T \phi(t)\langle f,\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt.\end{aligned}$$

En résumé, pour terminer l'étape 1, il suffit donc de montrer que

$$-\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\phi'(t)\psi(x)dxdt = \int_0^T \phi(t)\Big(-\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x)dxdt + \langle f,\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\Big)dt \tag{4.26}$$
$$\text{pour tout } \phi\in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R}) \text{ et tout } \psi\in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}).$$

Comme cela a été déjà dit, ceci donnera $\partial_t u\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $\partial_t u=\Delta u+f$.
Pour montrer (4.26), on utilise (4.23). Soit $\phi\in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$ et $\psi\in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. On choisit dans (4.23), $\varphi(x,t)=\phi(t)\psi(x)$ (ce qui est possible car on a bien $\varphi\in C_c^\infty(]0,T[\times\Omega,\mathbb{R})$. On obtient

$$-\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\phi'(t)\psi(x)dxdt + \int_0^T\int_\Omega(\nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x))\phi(t)dxdt = \int_0^T\langle f(t),\phi(t)\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt.$$

Ceci donne (4.26) et termine donc l'étape 1, that is to say $\partial_t u\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $\partial_t u=\Delta u+f$ (ce qui l'équation demandée dans (4.19)).

Etape 2 Comme $u\in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a (d'après la section 4.2), $u\in C([0,T],L^2(\Omega))$. On montre dans cette deuxième étape que $u(0)=u_0$. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on choisit une fonction r_n de $C_c^\infty([0,T[,\mathbb{R})$ décroissante et t.q. $|r_n'(t)|\le 2n$ pour tout t, $r_n(0)=1$ et $r_n(t)=0$ si $t\ge 1/n$.
Soit $\psi\in C_c^\infty(\Omega)$ et $n\in\mathbb{N}^\star$ t.q. $1/n<T$. On prend $\varphi(x,t)=r_n(t)\psi(x)$ dans (4.23). On obtient

$$-\int_0^{\frac1n}\int_\Omega u(x,t)r_n'(t)\psi(x)dxdt - \int_\Omega u_0(x)\psi(x)dx + \int_0^{\frac1n}\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x)r_n(t)dxdt$$
$$= \int_0^{\frac1n}\langle f(t),\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}r_n(t)dt,$$

that is to say

$$T_n = \int_\Omega u_0(x)\psi(x)dx - R_n + S_n, \tag{4.27}$$

avec

$$T_n = -\int_0^{\frac1n}\int_\Omega u(x,t)r_n'(t)\psi(x)dxdt,$$

$$R_n = \int_0^{\frac1n}\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x)r_n(t)dxdt \text{ et } S_n = \int_0^{\frac1n}\langle f(t),\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}r_n(t)dt.$$

On montre tout d'abord que R_n et S_n tendent vers 0. En effet, on a

$$\begin{aligned}|R_n| &\le \int_0^{\frac1n}\int_\Omega|\nabla u(x,t)||\nabla\psi(x)|dxdt\\ &\le \Big(\int_0^{\frac1n}\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^{\frac1n}\int_\Omega|\nabla\psi(x)|^2dxdt\Big)^{\frac12}\\ &\le \|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)}\frac{1}{\sqrt n}\|\psi\|_{H_0^1}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty}R_n=0$. On a aussi $\lim_{n\to+\infty}S_n=0$ car

$$|S_n|\le\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}\frac{1}{\sqrt n}\|\psi\|_{H_0^1}.$$

On remarque maintenant que

$$T_n = -\int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega u(x,0)r_n'(t)\psi(x)dxdt - \int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega (u(x,t)-u(x,0))r_n'(t)\psi(x)dxdt$$
$$= \int_\Omega u(x,0)\psi(x)dx - \int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega (u(x,t)-u(x,0))r_n'(t)\psi(x)dxdt$$

(On a utilisé ici $r_n(0)=1$ et $r_n(1/n)=0$.) On majore de dernier terme de cette égalité :

$$|\int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega (u(x,t)-u(x,0))r_n'(t)\psi(x)dxdt| \le \frac{1}{n}2n\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \max_{t\in[0,\frac{1}{n}]} \|u(\cdot,t)-u(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$ ce denier terme tend vers 0 quand $n\to+\infty$ et on a donc, finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_\Omega u(x,0)\psi(x)dx.$$

Avec (4.27), comme $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0$, on en déduit

$$\int_\Omega u(x,0)\psi(x)dx = \int_\Omega u_0(x)\psi(x)dx \text{ pour tout } \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Ceci permet de conclure que $u(0)=u_0$ et termine la démonstration de la proposition 4.30. ■

Nous donnons maintenant un théorème de compacité qui sera très utile pour la résolution de problèmes non linéaires comme ceux de la section 4.4. C'est l'équivalent parabolique des théorèmes de compacité vus pour les problèmes elliptiques. Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, on note $T(f)$ la solution faible de l'équation $-\Delta u = f$ avec $u \in H_0^1(\Omega)$. On a déjà montré que l'opérateur T était compact de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. La proposition 4.31 donne l'équivalent parabolique de ce résultat.

Proposition 4.31 (Compacité)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T>0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$.
Pour $f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on note $S(f)$ la solution de (4.19).
L'opérateur S est compact de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$.

Démonstration La proposition 4.27 donne déjà la continuité de S. Il reste donc à montrer que S transforme les parties bornées de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ en parties relativement compactes de $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$. Soit donc A une partie bornée de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. On pose $B=\{S(f),\ f\in A\}$. Les estimations vues dans le théorème 4.26 montrent que B est une partie bornée de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $\{\partial_t u,\ u\in B\}$ est une partie bornée de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ (en effet, si $u\in B$, il existe $f\in A$ t.q. $u=S(f)$, on a donc $\partial_t u = \Delta u + f$ au sens donné par (4.19), ce qui donne l'estimation voulue sur u). Le lemme de compacité donné ci-après (lemme 4.32), dû à J. L. Lions, donne alors la relative compacité de A dans $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$. ■

Lemme 4.32 (Compacité espace-temps, cadre L^2) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$. On suppose que*

1. *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$,*
2. *la suite $((\partial_t u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$.*

Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$.

Démonstration Ce lemme sera démontré plus loin dans un cadre plus général, voir théorème 4.36. ■

Remarque 4.33 (Opérateurs elliptiques généraux) Les résultats de ce paragraphe, that is to say le théorème 4.26 et les propositions 4.27, 4.28, 4.30 et 4.31, sont encore vrais en remplaçant l'opérateur Δu par div$(A\nabla u)$ si la matrice A est à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $A\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$ p.p. et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ (exercice 4.4). Il est aussi possible de considérer le cas où les coefficients de la matrice A dépendent aussi de t. Une possibilité est alors de faire une discrétisation en temps et de remplacer sur chaque intervalle de temps la matrice A par sa moyenne sur l'intervalle considéré. On résout alors le problème sur chacun de ces intervalles temporels. Il suffit ensuite d'obtenir des estimations sur la solution approchée et de passer à la limite sur le pas de discrétisation.

4.4 Existence et unicité pour des problèmes paraboliques non linéaires

Comme dans le cas elliptique, l'existence de la solution d'un problème parabolique non linéaire peut se prouver par point fixe de Schauder ou par degré topologique.
Considérons le premier exemple suivant : soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ (où $M_N(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $N \times N$ à coefficiens réels) t.q.

$$\forall s \in \mathbb{R}, A(s) = (a_{i,j}(s))_{i,j=1,\ldots,N} \text{ où } a_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \tag{4.29}$$

$$\exists \alpha > 0; A(s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.30}$$

$$f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_0 \in L^2(\Omega). \tag{4.31}$$

Alors on peut montrer par le théorème de Schauder qu'il existe u solution de (toujours avec $L^2(\Omega)$ identifié à $L^2(\Omega)'$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))(\text{ et donc } u \in C([0,T], L^2(\Omega))), \\ \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega A(u)\nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \displaystyle\int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \, \mathrm{d}t, \ \ \forall v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{array} \right. \tag{4.32}$$

Pour utiliser le théorème de Schauder, on utilise la résolution de problèmes linéaires : soit $\bar{u} \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$, on définit l'opérateur T de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est **la** solution du problème (4.32) où on a remplacé $A(u)$ par $A(\bar{u})$, that is to say :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega A(\bar{u})\nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \displaystyle\int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \, \mathrm{d}t, \ \forall v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{array} \right.$$

On montre ensuite qu'il existe $R > 0$ tel que l'image de T est incluse dans B_R où B_R est la boule (de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$) de rayon R et de centre 0. On montre que T est continu et que T est compact (par le lemme de compacité espace-temps 4.32). On conclut avec le théorème de Schauder. Ceci est laissé à titre d'exercice (exercice 4.5).
Notons qu'on peut aussi montrer l'unicité si A est lipschitzienne.

Considérons maintenant l'équation de convection-diffusion suivante (avec une convection éventuellement non linéaire) : $\partial_t u + \mathrm{div}(\boldsymbol{b}f(u)) - \Delta u = 0$, avec $\boldsymbol{b} \in L^2(]0,T[,(L^2(\Omega)^N)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $\mathrm{div}\boldsymbol{b} = 0$. On suppose de plus que f est lipschitzienne et bornée. Une formulation faible du problème s'écrit (avec $L^2(\Omega)$ identifié à $L^2(\Omega)'$) :

$$
\left\{
\begin{aligned}
& u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))(\text{et donc } u \in C([0,T],L^2(\Omega))), \\
& \int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{b}f(u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
& \qquad\qquad + \int_0^T \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0,\ \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\
& u(\cdot,0) = u_0.
\end{aligned}
\right. \tag{4.33}
$$

Montrons l'existence d'une solution au problème (4.33) par degré topologique. Pour cela on va montrer que le problème (4.33) peut s'écrire sous la forme $u - h(1,u) = 0$, où l'application h, définie de $[0,1]\times E$ dans E, avec $E = L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$, vérifie :

1. h est compacte,
2. il existe $R \in \mathbb{R}_+$ t.q.
$$u - h(s,u) = 0,\ s \in [0,1],\ u \in E \Rightarrow u \notin \partial B_R,$$
3. l'application définie de E dans E par $u \mapsto u - h(0,u)$ est linéaire.

(Ceci est suffisant pour obtenir l'existence d'une solution au problème (4.33).)

Soit $s \in [0,1]$ et $u \in E$. On note $h(s,u)$ la solution du problème suivant :

$$
\left\{
\begin{aligned}
& w \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), w_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)), \\
& \int_0^T \langle w_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega s\,\boldsymbol{b}f(u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
& \qquad\qquad + \int_0^T \int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0,\ \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\
& w(\cdot,0) = su_0.
\end{aligned}
\right. \tag{4.34}
$$

Notons que $h(s,u) = w$ est bien définie car $\boldsymbol{b}f(u) \in L^2(]0,T[,(L^2(\Omega)^N)$.

De plus, il est facile de voir que le point 3. ci-dessus est vérifié, car $h(0,u) = 0$ et donc $u - h(0,u) = u$. Il reste à montrer les points 1 et 2, that is to say que h est continue, que $\{h(s,u),\ s \in [0,1], u \in B\}$ est une partie relativement compacte de E, si B est une partie bornée de E, et qu'il existe $R > 0$ t.q. $u - h(s,u) = 0$ n'a pas de solution avec $s \in [0,1]$ et $u \in \partial B_R$.

Montrons d'abord que h est continue. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E t.q. $s_n \to s$ dans $\mathbb{R}$ et $u_n \to u$ dans E lorsque $n \to +\infty$. On pose $w_n = h(s_n,u_n)$, $w = h(s,u)$ et on veut montrer que $w_n \to w$ dans E. Les fonctions w_n vérifient :

$$
\left\{
\begin{aligned}
& w_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), (w_n)_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)), \\
& \int_0^T \langle (w_n)_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega s_n\,\boldsymbol{b}f((u_n)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
& \qquad\qquad + \int_0^T \int_\Omega \nabla w_n\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0,\ \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\
& w_n(\cdot,0) = s_n u_0.
\end{aligned}
\right. \tag{4.35}
$$

En prenant $v = w_n$ dans (4.35), on montre que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que la suite $((w_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. On en déduit par le lemme 4.32 que $w_n \to \tilde{w}$ dans E, après extraction éventuelle d'une sous suite. Mais les bornes sur w_n et $(w_n)_t$ donnent aussi $w_n \to \tilde{w}$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $(w_n)_t \to \tilde{w}_t$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Enfin, on peut supposer, toujours après extraction éventuelle d'une sous suite que $u_n \to u$ p.p.. En passant à la limite dans léquation satisfaite par w_n et en passant à la limite sur la condition initiale, on montre alors que $\tilde{w} = w$ (comme cela a été fait dans la démonstration du théorème 4.26). Ceci permet de conclure (sans extraction de sous suite) que $w_n \to w$ dans E et donne donc la continuité de h.

On pose maintenant $A = \{h(s,u),\, u \in L^2(]0,T[,L^2(\Omega)),\, s \in [0,1]\}$. Il est facile de voir que A est borné dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $\{w_t,\, w \in A\}$ est borné dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))\}$. Le lemme 4.32 donne alors la relative compacité de A dans E. Enfin l'existence de $R > 0$ t.q. $u - h(s,u) = 0$ n'ait pas de solution avec $s \in [0,1]$ et $u \in \partial B_R$ vient du fait que A est borné dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et donc aussi dans E.

En conclusion, on peut utiliser l'invariance par homotopie du degré. On obtient $d(Id - h(1,\cdot), B_R, 0) = d(Id - h(0,\cdot), B_R, 0) = d(Id, B_R, 0) = 1$. Donc, il existe $u \in B_R$ t.q. $u - h(1,u) = 0$, that is to say u solution de (4.33).

On montre maintenant l'unicité de la solution de (4.33). On va montrer cette unicité dans un cadre un peu plus général (pour lequel on aurait aussi pu montrer l'existence) en remplaçant Δu par $\mathrm{div}(a(u)\nabla u)$, that is to say en considérant l'équation

$$\partial_t u + \mathrm{div}(bf(u)) - \mathrm{div}(a(u)\nabla u) = 0,$$

avec une fonction a lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifant $\alpha \le a(s) \le \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et deux nombres strictement positifs α, β.

Soit u_1, u_2 deux solutions de (4.33) (avec $\mathrm{div}(a(u)\nabla u)$ au lieu de Δu). On pose $u = u_1 - u_2$ et on va montrer que $u = 0$ p.p..

Pour $\varepsilon > 0$ on définit la fonction T_ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $T_\varepsilon(s) = \max\{-\varepsilon, \min\{s, \varepsilon\}\}$. On note aussi ϕ_ε la primitive de T_ε s'annulant en 0. En prenant $v = T_\varepsilon(u)$ dans les formulations faibles satisfaites par u_1 et u_2, on obtient

$$\int_0^T \langle \partial_t u, T_\varepsilon(u)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt - \int_0^T \int_\Omega b(f(u_1) - f(u_2)) \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega a(u_1)\nabla u \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt = \int_0^T \int_\Omega (a(u_2) - a(u_1))\nabla u_2 \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt.$$

Comme $\nabla T_\varepsilon(u) = \nabla u 1_{0<|u|<\varepsilon}$ p.p., on en déduit que

$$\int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x,T))dx - \int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x,0))dx + \alpha \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u 1_{0<|u|<\varepsilon} dx dt$$
$$\le \int_0^T \int_\Omega |b||f(u_1) - f(u_2)||\nabla u| 1_{0<|u|<\varepsilon} dx dt + \int_0^T \int_\Omega |a(u_1) - a(u_2)||\nabla u_2||\nabla u| 1_{0<|u|<\varepsilon} dx dt. \quad (4.36)$$

Comme a et f sont des fonctions lipschitziennes, il existe L t.q.

$$|f(s_1) - f(s_2)| \le L|s_1 - s_2| \text{ et } |a(s_1) - a(s_2)| \le L|s_1 - s_2|, \text{ pour tout } s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

On utilise alors le fait que $u_0 = 0$ p.p. et $\phi_\varepsilon \ge 0$ pour déduire de (4.36), avec $A_\varepsilon = \{0 < |u| < \varepsilon\}$ et $y = (x,t)$,

$$\alpha \int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt \le L\varepsilon \Big(\int_{A_\varepsilon} |b|^2 dy \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt \Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ L\varepsilon \Big(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc $\alpha \| | \nabla T_\varepsilon(u) | \|_{L^2(Q)} \leq a_\varepsilon \varepsilon$, avec $Q =]0, T[\times \Omega$ et

$$a_\varepsilon = L\Big(\int_{A_\varepsilon} |b|^2 dy \Big)^{\frac{1}{2}} + L\Big(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\cap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = \emptyset$ la continuité décroissante d'une mesure donne que la mesure de Lebesgue ($N+1$ dimensionnelle) de A_ε tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ et on a donc, comme $b, \nabla u_2 \in L^2(Q)^N$, (noter que $L^2(Q)$ peut être identifié à $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A_\varepsilon} |b|^2 dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy = 0,$$

ce qui donne $\lim_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon = 0$. Il nous reste maintenant à utiliser, par exemple, l'injection de $W_0^{1,1}(\Omega)$ dans $L^{1^\star}(\Omega)$. elle donne pour $t \in]0, T[$,

$$\|T_\varepsilon(u(t))\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \leq \| |\nabla T_\varepsilon(u(t))| \|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.37}$$

On désigne par "mes" le mesure de le Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$. On remarque maintenant que pour $t \in]0, T[$

$$\varepsilon \mathrm{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{1}{1^\star}} \leq \Big(\int_\Omega |T_\varepsilon(u)|^{1^\star} dx \Big)^{\frac{1}{1^\star}}.$$

On a donc, avec (4.37),

$$\varepsilon \mathrm{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{1}{1^\star}} \leq \| | \nabla T_\varepsilon(u(t)) | \|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u(x,t))| dx,$$

et, en intégrant par rapport à t, sachant que $1/1^\star = (N-1)/N$ et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\varepsilon \int_0^T \mathrm{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq \int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u(x,t))| dx dt \leq \| |\nabla T_\varepsilon(u)| \|_{L^2(Q)} (T \mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{(T \mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha} a_\varepsilon \varepsilon.$$

On a donc

$$\int_0^T \mathrm{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq \frac{(T \mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha} a_\varepsilon.$$

quand $\varepsilon \to 0$, par convergence dominée, on en déduit (comme $\lim_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon = 0$)

$$\int_0^T \mathrm{mes}\{|u(t)| > 0\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq 0.$$

On en déduit que $\mathrm{mes}\{|u(t)| > 0\} = 0$ p.p. en $t \in]0, T[$ et donc $u = 0$ p.p., ce qui termine cette preuve d'unicité.

Remarque 4.34 Voici un complément et quelques généralisations possibles (laissées en exercice) du résultat d'existence et unicité de solution que nous venons de donner dans cette section.

1. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Il existe donc $A \leq 0$ et $B \geq 0$ t.q. $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. Soit u la solution de (4.33). On a alors $A \leq u \leq B$ p.p.. Pour démontrer ce résultat, il suffit de prendre $v = (u - B)^+$ (pour montrer $u \leq B$ p.p.) et $v = (A - u)^+$ (pour montrer $u \geq A$ p.p.) dans (4.33).
2. On a supposé f lipschitzienne et bornée. En fait si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, et donc $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. avec $A \leq 0 \leq B$, on peut remplacer cette hypothèse sur f par "f localement lipschitzienne" (exemple : $f(s) = s^2$). La démonstration consiste à remplacer dans (4.33) f par $\bar{f}$ où $\bar{f}$ est définie par $\bar{f}(s) = \max\{A, \min\{s, B\}\}$. La solution obtenue, u, vérifie alors $A \leq u \leq B$ p.p. (d'après l'item précédent) et est donc solution de (4.33) (avec f).

3. Pour montrer l'existence et l'unicité de solution à (4.33), on a supposé $\mathrm{div}\boldsymbol{b} = 0$. Cette hypothèse peut être remplaçée par $\mathrm{div}\boldsymbol{b} \in L^\infty(\Omega)$ (mais en conservant l'hypothèse f lipschitzienne et bornée). On peut toujours montrer un résultat d'existence et d'unicité de solution à (4.33).
4. Enfin si $\mathrm{div}\boldsymbol{b} \in L^\infty(\Omega)$, $\|\mathrm{div}\boldsymbol{b}\|_\infty = C$, f lipschitzienne de constante de Lipschitz L (mais f non nécessairement bornée) et $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\|u_0\|_\infty = M$, on peut aussi montrer un résultat d'existence et d'unicité de solution à (4.33). La solution u vérifie alors $\|u(t)\|_\infty \le M\exp(CLt)$ pour tout $t \in [0,T]$.

4.5 Compacité en temps

Dans cette section, on démontre le lemme de compacité dans L^2 4.32 comme conséquence du théorème 4.40, énoncé dans un cadre plus général, et utile pour la résolution de nombreux problèmes paraboliques.

Commençons par la version abstraite du lemme 4.32 de compacité dans L^2, qu'on obtient en remplaçant l'espace L^2 par un espace de Hilbert quelconque.

Lemme 4.35 (Compacité en temps, cadre hilbertien) *On suppose que X et H sont des espaces de Hilbert, que X s'injecte compactement dans H, et que X est dense dans H On identifie H avec H' (par le théorème de représentation de Riesz). On suppose maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^2(]0,T[,X)$ ($T > 0$ est donné) et que $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^2(]0,T[,X')$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(]0,T[,H)$.*

Notons dans le lemme 4.32 on a $X = H^1_0(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$). Ce résultat de compacité dans le cadre hilbertien (attribué à J.L. Lions) a ensuite été généralisé par Aubin dans le cadre d'espaces de Banach :

Théorème 4.36 (Compacité en temps, cadreL^p, $p > 1$) *Soit X, B, Y trois espaces de Banach et $1 < p < +\infty$. On suppose que X s'injecte compactement dans B et que B s'injecte continûment dans Y. On suppose maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. est une suite bornée de $L^p(]0,T[,X)$ ($T > 0$ est donné) et que $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^p(]0,T[,Y)$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^p(]0,T[,B)$.*

Ce résultat a ensuite été généralisé par J. Simon (en 1985) pour avoir aussi le cas $p = 1$. C'est ce dernier résultat que nous donnons dans ce paragraphe ainsi que sa démonstration (qui contient donc les démonstrations des lemmes 4.32,4.32 et du théorème 4.36.
Nous donnons enfin quelques généralisations du résultat de Simon utiles en particulier lors de l'étude mathématique de schémas numériques.

Nous donnons d'abord le théorème fondamental de compacité de Kolmogorov (sous deux formes légèment différentes) dont nous déduisons ensuite les théorèmes 4.40 et 4.49. En anglais, parce que vous le valez bien.

Théorème 4.37 (Kolmogorov (1)) *Let B be a Banach space, $1 \le p < +\infty$, $T > 0$ and $A \subset L^p((0,T),B)$. The subset A is relatively compact in $L^p((0,T),B)$ if A verifies the following conditions :*

1. *For all $f \in A$, there exists $Pf \in L^p(\mathbb{R},B)$ such that $Pf = f$ a.e. in $(0,T)$ and $\|Pf\|_{L^p(\mathbb{R},B)} \le C$, where C depends only on A.*
2. *For all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, the family $\{\int_{\mathbb{R}}(Pf)\varphi dt,\ f \in A\}$ is relatively compact in B.*
3. *$\|Pf(\cdot + h) - Pf\|_{L^p(\mathbb{R},B)} \to 0$, as $h \to 0$, uniformly with respect to $f \in A$.*

(Indeed, the conditions 1, 2 and 3 are also necessary in order to have relative compactness of A but this is not the interesting part of this theorem.)

Proof of Theorem 4.37
Let $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ be a sequence of mollifiers, that is :

$$\begin{aligned}&\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} \rho dx = 1,\ \rho \geq 0,\ \rho(-\cdot) = \rho\\ &\text{and, for } n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \mathbb{R},\ \rho_n(x) = n\rho(nx).\end{aligned} \tag{4.38}$$

We set $K = [0,T]$ and, for $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_n = \{(Pf \star \rho_n)_{|_K},\ f \in A\}$. The proof is divided in two steps. In Step 1 we prove, using Ascoli's theorem and Assumption 2 of Theorem 4.37, that, for $n \in \mathbb{N}^\star$, the set A_n is relatively compact in $C(K,B)$ endowed with its usual topology. Then, we deduce that A_n is also relatively compact in $L^p((0,T),B)$. In Step 2, we show that the first and third hypotheses of Theorem 4.37 give that $Pf \star \rho_n \to Pf$ in $L^p(\mathbb{R},B)$, as $n \to +\infty$, uniformly with respect to $f \in A$. This allows to conclude that the family A is relatively compact in $L^p((0,T),B)$.

Step 1. Let $n \in \mathbb{N}^\star$. In order to prove that A_n is relatively compact in $C(K,B)$, we use Ascoli's theorem ; hence we need to prove the following properties :

1. for all $t \in K$, the set $\{Pf \star \rho_n(t),\ f \in A\}$ is relatively compact in B,
2. the sequence $\{Pf \star \rho_n,\ f \in A\}$ is equicontinuous from K to B (that is to say that the continuity is uniform with respect to $f \in A$).

We first prove Property 1. Let $t \in K$.

$$Pf \star \rho_n(t) = \int_{\mathbb{R}} Pf(s)\rho_n(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} Pf(s)\varphi(s)ds.$$

Then, the second hypothesis of Theorem 4.37 gives Property 1, that is $\{Pf \star \rho_n(t),\ f \in A\}$ is relatively compact in B.

We now prove Property 2. Let $t_1, t_2 \in K$ and let $q = p/(p-1)$ by Hölder's inequality, we have

$$\begin{aligned}\|Pf \star \rho_n(t_2) - Pf \star \rho_n(t_1)\|_B &\leq \int_{\mathbb{R}} \|Pf(s)\|_B \,|\rho_n(t_2 - s) - \rho_n(t_1 - s)|\, ds\\ &\leq \|Pf\|_{L^p(\mathbb{R},B)} \|\rho_n(t_2 - \cdot) - \rho_n(t_1 - \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R},\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Since ρ_n is uniformly continuous with compact support, we easily deduce from this inequality (and with Hypothesis 1 of Theorem 4.37) and that the family A_n is uniformly equicontinuous from K to B. This gives the Property 2 and concludes the proof that A_n is relatively compact in $C(K,B)$. This relative compactness is equivalent to say that for all $\varepsilon > 0$, there exists a finite number of ball of radius ε (for the natural norm of $C(K,B)$) covering the whole set A_n. Then, since $\|\cdot\|_{L^p((0,T),B)} \leq T^{1/p}\|\cdot\|_{C(K,B)}$, we also obtain the relative compactness of A_n in $L^p((0,T),B)$.

Step 2.
Let $t \in \mathbb{R}$, we have, using $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(s)ds = 1$ and $\overline{s} = ns$,

$$Pf \star \rho_n(t) - Pf(t) = \int_{\mathbb{R}} (Pf(t-s) - Pf(t))\rho_n(s)ds = \int_{-1}^{1} (Pf(t - \frac{\overline{s}}{n}) - Pf(t))\rho(\overline{s})d\overline{s}.$$

Then, by Hölder's inequality and with $q = p/(p-1)$,

$$\|Pf \star \rho_n(t) - Pf(t)\|_B^p \leq \left(\int_{-1}^{1} \|Pf(t - \frac{s}{n}) - Pf(t))\|_B^p ds\right) \|\rho\|_{L^q}^p.$$

Integrating with respect to $t \in \mathbb{R}$ and using the Fubini-Tonelli theorem leads to

$$\|Pf \star \rho_n - Pf\|^p_{L^p((0,T),B)} \leq 2 \sup\{\|Pf(\cdot + h) - Pf\|^p_{L^p(\mathbb{R},B)},\ |h| \leq 1\}\|\rho\|^p_{L^q}.$$

Finally, the third hypothesis of Theorem 4.37 gives the fact that $\|Pf \star \rho_n - Pf\|_{L^p((0,T),B)} \to 0$, as $n \to +\infty$, uniformly with respect to $f \in A$. As a consequence, the relative compactness of A_n in $L^p((0,T),B)$ for all $n \in \mathbb{N}$ (proven in Step 1) gives the relative compactness of A in $L^p((0,T),B)$. This concludes the proof of Theorem 4.37.

■

We now give a second form of the previous theorem which does not require the prolongment of f outside $[0,T]$.

Théorème 4.38 (Kolmogorov (2)) *Let B be a Banach space, $1 \leq p < +\infty$, $T > 0$ and $A \subset L^p((0,T),B)$. The subset A is relatively compact in $L^p((0,T),B)$ if A verifies the following conditions :*

1. *The subset A is bounded in $L^p((0,T),B)$.*
2. *For all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, the family $\{\int_0^T f\varphi dt,\ f \in A\}$ is relatively compact in B.*
3. *There exists a nondecreasing function from $(0,T)$ to $\mathbb{R}_+$ such that $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$ and, for all $h \in (0,T)$ and $f \in A$,*

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|^p_B dt \leq \eta(h).$$

Proof of Theorem 4.38
The proof uses Theorem 4.37 with $Pf = 0$ on $[0,T]^c$. The first and second item of the hypotheses of Theorem 4.37 are clearly satisfied. The only difficulty is to prove the third item. We prove this third item in two steps.

Step 1. In this step, we prove that $\lim_{\delta\to 0} \int_0^\delta \|f(t)\|^p_B dt \to 0$ as $\delta \to 0^+$, uniformly with respect to $f \in A$.
Let $\delta, h \in (0,T)$ such that $\delta + h \leq T$. For all $t \in (0,\delta)$ one has $\|f(t)\|_B \leq \|f(t+h)\|_B + \|f(t+h) - f(t)\|_B$ and then

$$\|f(t)\|^p_B \leq 2^p\|f(t+h)\|^p_B + 2^p\|f(t+h) - f(t)\|^p_B$$

Integrating this inequality for $t \in (0,\delta)$ gives

$$\int_0^\delta \|f(t)\|^p_B dt \leq 2^p \int_0^\delta \|f(t+h)\|^p_B dt + 2^p \int_0^\delta \|f(t+h) - f(t)\|^p_B dt. \tag{4.39}$$

Now let $h_0 \in (0,T)$ et $\delta \in (0, T - h_0)$. For all $h \in (0,h_0)$, Inequality (4.39) gives, using $\eta(h) \leq \eta(h_0)$,

$$\int_0^\delta \|f(t)\|^p_B dt \leq 2^p \int_0^\delta \|f(t+h)\|^p_B dt + 2^p \eta(h_0).$$

Integrating this inequality for $h \in (0,h_0)$ leads to

$$h_0 \int_0^\delta \|f(t)\|^p_B dt \leq 2^p \int_0^{h_0} \big(\int_0^\delta \|f(t+h)\|^p_B dt\big) dh + 2^p h_0 \eta(h_0).$$

Then, using the Fubini-Tonelli Theorem, we obtain

$$\begin{aligned}\int_0^{h_0} \big(\int_0^\delta \|f(t+h)\|^p_B dt\big) dh &= \int_0^\delta \big(\int_0^{h_0} \|f(t+h)\|^p_B dh\big) dt \\ &\leq \int_0^\delta \big(\int_0^T \|f(s)\|^p_B ds\big) \leq \delta \|f\|^p_{L^p((0,T),B)},\end{aligned}$$

from which one deduces

$$h_0 \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq \delta 2^p \|f\|_{L^p((0,T),B)}^p + 2^p h_0 \eta(h_0). \tag{4.40}$$

In order to conclude this step, let $\varepsilon > 0$. First, we choose $h_0 \in (0,T)$ such that $2^p \eta(h_0) \leq \varepsilon$. Then, with $C = \sup_{f\in A} \|f\|_{L^p((0,T),B)}^p$, we take $\overline{\delta} = \min\{T - h_0, \varepsilon h_0/(2^p C)\}$. We obtain, for all $f \in A$,

$$0 \leq \delta \leq \overline{\delta} \Rightarrow \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p \leq 2\varepsilon.$$

This gives that $\int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \to 0$ as $\delta \to 0^+$, uniformly with respect to $f \in A$, and concludes Step 1.

A similar proof gives $\int_{T-\delta}^T \|f(t)\|_B^p dt \to 0$ as $\delta \to 0^+$, uniformly with respect to $f \in A$ (this can be proven using g instead of f with $g(t) = f(T-t)$).

Step 2. We now prove that the third item of the hypotheses of Theorem 4.37 is satisfied (and this conludes the proof of Theorem 4.38).
Recall that $Pf(t) = 0$ if $t \in [0,T]^c$ so that, for all $h \in (0,T)$ et $f \in A$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \|Pf(t+h) - Pf(t)\|_B^p dt &\leq \int_{-h}^0 \|f(t+h)\|_B^p dt + \int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt + \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p dt \\ &\leq \int_0^h \|f(t)\|_B^p dt + \int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt + \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p dt.\end{aligned}$$

Let $\varepsilon > 0$. There exists $h_1 > 0$ such $\eta(h_1) \leq \varepsilon$. With Step 1, there exists $h_2 > 0$ such that, for all $f \in A$,

$$0 \leq h \leq h_2 \Rightarrow \int_0^h \|f(t)\|_B^p dt \leq \varepsilon \text{ and } \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p dt \leq \varepsilon.$$

with $h_3 = \min\{h_1, h_2\}$, one has, for all $f \in A$,

$$0 \leq h \leq h_3 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \|Pf(t+h) - Pf(t)\|_B^p dt \leq 3\varepsilon.$$

This concludes Step 2 and the proof of Theorem 4.38. ■

We now deduce from Theorem 4.38 a corollary which will be useful for Theorem 4.40.

Corollaire 4.39 (Time compactness) *Let B be a Banach space, $1 \leq p < +\infty$, $T > 0$ and $A \subset L^p((0,T),B)$. Let X be a Banach space compactly embedded in B. One assumes that A verifies the following conditions :*

1. *The subset A is bounded in $L^p((0,T),B)$.*
2. *The subset A is bounded in $L^1((0,T),X)$.*

Note these two assumptions are true if A is bounded in $L^p((0,T),X)$.

3. *There exists a nondecreasing function from $(0,T)$ to $\mathbb{R}_+$ such that $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$ and, for all $h \in (0,T)$ and $f \in A$,*

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt \leq \eta(h).$$

Then, the subset A is relatively compact in $L^p((0,T),B)$.

Proof In order to apply Theorem 4.38, we only have to prove that, for all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, the family $\{\int_0^T f\varphi dt,$ $f \in A\}$ is relatively compact in B.

Let $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. For $f \in A$, one has, with $\|\varphi\|_u = \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$,

$$\| \int_0^T f\varphi dt\|_X \le \|\varphi\|_u \|f\|_{L^1((0,T),X)}.$$

Then, since A is bounded in $L^1((0,T),X)$, the family $\{\int_0^T f\varphi dt, f \in A\}$ is bounded in X and therefore relatively compact in B. ∎

We now give a Theorem, essentially due to J. P. Aubin (for $p > 1$) and J. Simon (for $p = 1$), which we used in a previous section to prove the existence of a solution for some parabolic equations.

Théorème 4.40 (Aubin-Simon) *Let $1 \le p < +\infty$, X, B, Y be three Banach spaces such that*

(i) $X \subset B$ with compact embedding,

(ii) $X \subset Y$ and if $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in X such that $(\|f_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, $f_n \to f$ in B and $f_n \to 0$ in Y (as $n \to +\infty$), then $f = 0$.

Let $T > 0$ and $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0,T),X)$ such that

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0,T),X)$,*
2. *$(\frac{du_n}{dt})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $L^1((0,T),Y)$.*

Then there exists $u \in L^p((0,T),B)$ such that, up to a subsequence, $u_n \to u$ in $L^p((0,T),B)$.

Remarque 4.41 Note that the hypothesis (ii) of Theorem 4.40 is weaker than the hypothesis of the original works of Aubin and Simon, which reads :

(ii)' $B \subset Y$ with continuous embedding.

Let $X \subset B$. It is also interesting to notice that the hypothesis (i) may also be written :

(i)' If $(\|w_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, then, up to a subsequence, there exists $w \in B$ such that $w_n \to w$ in B.

This reformulation leads to an easy generalization which is used to prove the convergence of numerical approximations of the solution of parabolic equations : in this generalization, X is replaced by a sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, see Theorem 4.49 below.

Proof of Theorem 4.40 The proof uses Corollary 4.39 with $A = \{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. The subset A is bounded in $L^p((0,T),B)$ (since X is continuously embedded in B) and then in $L^1((0,T),X)$, so that we only have to prove the third item of the hypotheses of Corollary 4.39, which is equivalent to say

$$\int_0^{T-h} \|u_n(\cdot + h) - u_n\|_B^p dt \to 0 \text{ as } h \to 0, \text{ uniformly w.r.t. } n \in \mathbb{N}. \tag{4.41}$$

Let $0 < h < T$ and $\varepsilon > 0$. For $t \in (0, T-h)$, one has, using the Lions lemma given below (lemma 4.42),

$$\begin{aligned}\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B &\le \varepsilon\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_X + C_\varepsilon\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y \\ &\le \varepsilon\|u_n(t+h)\|_X + \varepsilon\|u_n(t)\|_X + C_\varepsilon\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y,\end{aligned}$$

and then

$$\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p \le (3\varepsilon)^p\|u_n(t+h)\|_X^p + (3\varepsilon)^p\|u_n(t)\|_X^p + (3C_\varepsilon)^p\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p.$$

Integrating this inequality with respect to t (between 0 and $T-h$) leads to

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|u_n\|^p_{L^p((0,T),X)} + (3C_\varepsilon)^p \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p dt. \quad (4.42)$$

We now use the second item of Remark 4.44 (also given in Section 4.2). It gives that $u_n \in C([0,T],Y)$ and $u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{du_n}{dt}(s)ds$ for all $t_1, t_2 \in [0,T]$. This allows us to bound the second term of the RHS of (4.42) :

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p dt &\leq \int_0^{T-h} \left(\int_t^{t+h} \|\frac{du_n}{dt}(s)\|_Y ds \right)^p dt \\ &\leq M^{p-1} \int_0^{T-h} \left(\int_t^{t+h} \|\frac{du_n}{dt}(s)\|_Y ds \right) dt \\ &\leq M^{p-1} \int_0^{T-h} \left(\int_0^{T} 1_{[t,t+h]}(s) \|\frac{du_n}{dt}(s)\|_Y ds \right) dt,\end{aligned}$$

where M is a bound of the $L^1((0,T),Y)$-norm of $\frac{du_n}{dt}$ (that is $\|\frac{du_n}{dt}\|_{L^1((0,T),Y)} \leq M$ for all n).
Then, using $1_{[t,t+h]}(s) = 1_{[s-h,s]}(t)$ and the Fubini-Tonelli Theorem, we obtain

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p dt \leq hM^p. \quad (4.43)$$

Then, with (4.43), (4.42) gives

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|u_n\|^p_{L^p((0,T),X)} + (3C_\varepsilon)^p hM^p. \quad (4.44)$$

We can now conclude. Let $\eta > 0$. we choose $\varepsilon > 0$ in order to bound by η this first term of (4.44) (independently of $n \in \mathbb{N}$). Now, since C_ε is given, there exists $h_0 \in (0,T)$ such that the second term of the RHS of (4.44) is bounded by η (independently of $n \in \mathbb{N}$) if $0 < h < h_0$. Finally, we obtain

$$0 < h < h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2\eta.$$

This concludes the proof of Theorem 4.40. ■

Lemme 4.42 *Let X, B, Y be three Banach spaces such that*

(i) $X \subset B$ with compact embedding,

(ii) $X \subset Y$ and if $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in X such that the sequence $(\|u_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, $u_n \to u$ in B and $u_n \to 0$ in Y (as $n \to +\infty$), then $u = 0$.

Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists C_ε such that, for $w \in X$,

$$\|w\|_B \leq \varepsilon \|w\|_X + C_\varepsilon \|w\|_Y.$$

Remarque 4.43 In Lemma 4.42, as for Theorem 4.40, the hypothesis (ii) can be replaced by the stronger hypothesis (ii)' $B \subset Y$ with continuous embedding.

Proof of Lemma 4.42 We perform the proof by contradiction. We assume that there exists $\varepsilon > 0$ and a sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that $u_n \in X$ and $1 = \|u_n\|_B > \varepsilon\|u_n\|_X + n\|u_n\|_Y$, for all $n \in \mathbb{N}$.
Then, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in X and therefore relatively compact in B. Thus, we can assume (up to a subsequence) that $u_n \to u$ in B and $\|u\|_B = 1$. Furthermore $u_n \to 0$ in Y (since $\|u_n\|_Y \leq 1/n$). Then the second hypothesis of Lemma 4.42 gives $u = 0$. In contradiction with $\|u\|_B = 1$. ■

Remarque 4.44 (On the weak derivative on u) We recall here (items 1 and 2) some results essentially given in Section 4.2 (with a different proof for the second item). Let X, Y be two Banach spaces and Z be a vectorial space such that $X, Y \subset Z$ (of course, a simple case is $Z = Y$). Let $p, q \in [1, \infty]$.

1. Assuming that $u \in L^p((0,T), X)$, the weak derivative of u, denoted as du/dt, is defined by its action on test functions, that is its action on φ for all $\varphi \in C_c^\infty((0,T))$ (note that φ takes its values in $\mathbb{R}$). Actually, if $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,T))$ (and φ' is the classical derivative of φ), the function $\varphi' u$ belongs to $L^p((0,T), X)$ and therefore to $L^1((0,T), X)$ and the action of du/dt on φ is defined as

$$\langle \frac{du}{dt}, \varphi \rangle = -\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt.$$

   Note that $\langle \frac{du}{dt}, \varphi \rangle \in X$.

   Then $du/dt \in L^q((0,T), Y)$ means that there exists $v \in L^q((0,T), Y)$ (and then v is unique) such that

$$-\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = \int_0^T \varphi(t)v(t)dt \text{ for all } \varphi \in C_c^\infty((0,T)). \tag{4.45}$$

   Note that $\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt \in X \subset Z$ and $\int_0^T \varphi(t)v(t)dt \in Y \subset Z$, so the equality in (4.45) holds in Z. Finally we identify the weak derivative of u (which is a linear form on $\mathcal{C}_c^\infty((0,T))$) with the function v (which belongs to $L^q((0,T), Y)$).

2. If $u \in L^p((0,T), X)$ and $du/dt \in L^q((0,T), Y)$, it is quite easy to prove that $u \in C([0,T], Y)$ and that

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \frac{du}{dt}(s)ds, \text{ for all } t \in [0,T].$$

   Indeed, let $v = du/dt$ and define $w \in C([0,T], Y)$ by

$$w(t) = \int_0^t v(s)ds \text{ for all } t \in [0,T].$$

   For $n \in \mathbb{N}^\star$, let $u_n = u \star \rho_n$ with ρ_n defined by (4.38) and setting $u = 0$ outside $[0,T]$. Since $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$, one has $u_n \to u$ in $L^p(\mathbb{R}, X)$ and then, up to a subsequence, $u_n(t) \to u(t)$ in X (as $n \to +\infty$) for a.e. $t \in (0,T)$.
   Let $t_1, t_2 \in (0,T)$ such that $0 < t_1 < t_2 < T$ and $u_n(t_i) \to u(t_i)$ in X (as $n \to +\infty$) for $i = 1, 2$. For $n \in \mathbb{N}^\star$ such that $1/n < t_1$ and $1/n < T - t_2$, one defines φ_n by

$$\varphi_n(t) = \int_{t_2}^t \rho_n(t_2 - s)ds - \int_{t_1}^t \rho_n(t_1 - s)ds.$$

One has $\varphi_n \in C_c^\infty((0,T),\mathbb{R})$ and $\varphi_n'(t) = \rho_n(t_2 - t) - \rho_n(t_1 - t)$ for $t \in (0,T)$. Then, we have

$$u_n(t_2) - u_n(t_1) = \int_0^T u(s)\varphi_n'(s)ds = -\int_0^T v(s)\varphi_n(s)ds.$$

We now remark that (using $\rho(-\cdot) = \rho$ and changing variables)

$$\varphi_n(t) = \int_{t_2}^t \rho_n(s - t_2))ds - \int_{t_1}^t \rho_n(s - t_1)ds = -\int_{t_1}^{t_2} \rho_n(t-s)ds = -1_{(t_1,t_2)} \star \rho_n(t).$$

Then, $\varphi_n \to -1_{(t_1,t_2)}$ a.e. and since $|\varphi_n| \le 1$ a.e. (for all n), the Dominated Convergence Theorem gives

$$-\int_0^T v(s)\varphi_n(s)ds \to \int_{t_1}^{t_2} v(s)ds \text{ in } Y.$$

We then obtain, as $n \to +\infty$,

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(s)ds = w(t_2) - w(t_1).$$

This proves that there exists $c \in \mathbb{R}$ such that $u = w + c$ a.e. on $(0,T)$ and then that $u \in C((0,T),Y)$ (since, as usual, we identify u with the continuous function $w + c$).

3. In Theorem 4.40, thanks to the previous item of the present remark, one has $u_n \in C([0,T],Y)$ for all $n \in \mathbb{N}$. However the limit u is not necessarily continuous. A simple counter example is obtain with $p = 1$, $X = B = Y$ and, for instance, $T = 2$. Then, it is quite easy to construct a sequence $(u_n)_n$ bounded in $W^{1,1}((0,T))$ whose the limit is the characteristic function of $[1,2]$.

Remarque 4.45 There is a classical case where Lemma 4.42 is simpler. Let B be a Hilbert space and X be a Banach space $X \subset B$. We define on X the dual norm of $\|\cdot\|_X$, with the scalar product of B, namely

$$\|u\|_Y = \sup\{(u|v)_B,\ v \in X, \|v\|_X \le 1\}.$$

Then, for any $\varepsilon > 0$ and $u \in X$,

$$\|u\|_B \le \varepsilon\|u\|_X + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_Y.$$

The proof is simple since

$$\|u\|_B = (u|u)_B^{\frac{1}{2}} \le (\|u\|_Y\|u\|_X)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon\|u\|_X + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_Y.$$

Note that the compactness of X in B is not needed here (but, even in this simple case of Lemma 4.42, the compactness of X in B is needed for Theorem 4.40.)

We now give an improvement of Corollary 4.39 and Theorem 4.40, using a sequence of subspaces of B instead of X and Y.

Définition 4.46 (Compactly embedded sequence) *Let B be a Banach space and $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B. We say that the sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is compactly embedded in B if any sequence satisfying*

— $u_n \in X_n$ *for all* $n \in \mathbb{N}$,

— *the sequence* $(\|u_n\|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *is bounded*

is relatively compact in B.

Proposition 4.47 (Time compactness with a sequence of subspaces) $1 \le p < +\infty$, $T > 0$. *Let* B *be a Banach space and* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be a sequence of Banach spaces compactly embedded in* B *(see Definition 4.46). Let* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be a sequence of* $L^p((0,T),B)$ *satifying the following conditions*

1. *The sequence* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is bounded in* $L^p((0,T),B)$.
2. *The sequence* $(\|f_n\|_{L^1((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *is bounded.*
3. *There exists a nondecreasing function from* $(0,T)$ *to* $\mathbb{R}_+$ *such that* $\lim_{h\to 0^+}\eta(h) = 0$ *and, for all* $h \in (0,T)$ *and* $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p dt \le \eta(h).$$

Then, the sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is relatively compact in* $L^p((0,T),B)$.

Proof of Proposition 4.47 As in Corollary 4.39, in order to apply Theorem 4.38, we only have to prove that, for all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, the sequence $\{\int_0^T f_n\varphi dt,\, n\in\mathbb{N}\}$ is relatively compact in B.
Let $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. For $n\in\mathbb{N}$, one has, with $\|\varphi\|_u = \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$,
$$\|\int_0^T f_n\varphi dt\|_{X_n} \le \|\varphi\|_u \|f_n\|_{L^1((0,T),X_n)}.$$
Then, since the sequence $(\|f_n\|_{L^1((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, the sequence $\{\|\int_0^T f_n\varphi dt\|_{X_n},\, n\in\mathbb{N}\}$ is also bounded. Therefore the sequence $\{\int_0^T f_n\varphi dt,\, n\in\mathbb{N}\}$ in relatively compact in B. ■

We now give a generalization of Theorem 4.40 using a sequence of subspaces of B.

Définition 4.48 *Let* B *be a Banach space,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be a sequence of Banach spaces included in* B *and* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be a sequence of Banach spaces. We say that the sequence* $(X_n,Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is compact-continuous in* B *if the following conditions are satisfied*

1. *The sequence* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is compactly embedded in* B *(see Definition 4.46).*
2. $X_n \subset Y_n$ *(for all* $n\in\mathbb{N}$*) and if the sequence* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is such that* $u_n \in X_n$ *(for all* $n\in\mathbb{N}$*),* $(\|u_n\|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *bounded and* $\|u_n\|_{Y_n} \to 0$ *(as* $n\to+\infty$*), then any subsequence converging in* B *converge (in* B*) to* 0.

Théorème 4.49 (Aubin-Simon with a sequence of subspaces) *Let* $1 \le p < +\infty$. *Let* B *be a Banach space,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be a sequence of Banach spaces included in* B *and* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be a sequence of Banach spaces. We assume that the sequence* $(X_n,Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is compact-continuous in* B *(see Definition 4.48).*
Let $T > 0$ *and* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be a sequence of* $L^p((0,T),B)$ *satifying the following conditions*

1. *The sequence* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is bounded in* $L^p((0,T),B)$.
2. $f_n \in L^p((0,T),X_n)$ *(for all* $n\in\mathbb{N}$*) and the sequence* $(\|f_n\|_{L^p((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *is bounded.*
3. $\frac{df_n}{dt} \in L^1((0,T),Y_n)$ *(for all* $n\in\mathbb{N}$*) and the sequence* $(\|\frac{df_n}{dt}\|_{L^1((0,T),Y_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *is bounded.*

Then there exists $f \in L^p((0,T),B)$ *such that, up to a subsequence,* $f_n \to f$ *in* $L^p((0,T),B)$.

Proof of Theorem 4.49 The proof uses Proposition 4.47. We only have to prove the third item of the hypotheses on $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of Proposition 4.47, which is equivalent to say

$$\int_0^{T-h} \|f_n(\cdot+h)-f_n\|_B^p dt \to 0 \text{ as } h\to 0, \text{ uniformly w.r.t. } n\in\mathbb{N}.$$

Indeed, for all $n\in\mathbb{N}$, since $f_n\in L^p((0,T),B)$, one has $\int_0^{T-h}\|f_n(\cdot+h)-f_n\|_B^p dt\to 0$ as $h\to 0$. The only difficulty is to prove the uniformity of this convergence with respect to $n\in\mathbb{N}$. So, we only have to prove that for all $\eta>0$ there exist $n_0\in\mathbb{N}$ and $0<h_0<T$ such that

$$n\ge n_0,\ 0<h\le h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h}\|f_n(\cdot+h)-f_n\|_B^p dt\le\eta. \tag{4.46}$$

Let $\varepsilon>0$. Lemma 4.50 gives the existence of $n_0\in\mathbb{N}$ and $C_\varepsilon\in\mathbb{R}$ such that

$$n\ge n_0,\ u\in X_n\Rightarrow \|u\|_B\le\varepsilon\|u\|_{X_n}+C_\varepsilon\|u\|_{Y_n}.$$

Then, for $n\ge n_0$, $0<h<T$ and $t\in(0,T-h)$, one has

$$\begin{aligned}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_B &\le \varepsilon\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{X_n}+C_\varepsilon\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}\\ &\le \varepsilon\|f_n(t+h)\|_{X_n}+\varepsilon\|f_n(t)\|_{X_n}+C_\varepsilon\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n},\end{aligned}$$

and then

$$\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_B^p\le(3\varepsilon)^p\|f_n(t+h)\|_{X_n}^p+(3\varepsilon)^p\|f_n(t)\|_{X_n}^p+(3C_\varepsilon)^p\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}^p.$$

Integrating this inequality with respect to t leads to

$$\int_0^{T-h}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_B^p dt\le 2(3\varepsilon)^p\|f_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p+(3C_\varepsilon)^p\int_0^{T-h}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}^p dt. \tag{4.47}$$

We now recall (see Remark 4.44) that $f_n\in C([0,T],Y_n)$ and $f_n(t_1)-f_n(t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{df_n}{dt}(s)ds$ for all $t_1,t_2\in[0,T]$. This allows us to bound the second term of the RHS of (4.47) :

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}^p dt &\le \int_0^{T-h}\left(\int_t^{t+h}\|\frac{df_n}{dt}(s)\|_{Y_n}ds\right)^p dt\\ &\le \int_0^{T-h}M^{p-1}\left(\int_t^{t+h}\|\frac{df_n}{dt}(s)\|_{Y_n}ds\right)dt\\ &\le M^{p-1}\int_0^{T-h}\left(\int_0^T 1_{[t,t+h]}(s)\|\frac{df_n}{dt}(s)\|_{Y_n}ds\right)dt,\end{aligned}$$

where M is a bound of the $L^1((0,T),Y_n)$-norm of $\frac{df_n}{dt}$.
Then, using $1_{[t,t+h]}(s)=1_{[s-h,s]}(t)$ and the Fubini-Tonelli Theorem, we obtain

$$\int_0^{T-h}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}^p dt\le hM^p. \tag{4.48}$$

Then, with (4.48), (4.47) gives

$$\int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p dt \le 2(3\varepsilon)^p \|f_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p + (3C_\varepsilon)^p h M^p. \tag{4.49}$$

We can now conclude. Let $\eta > 0$. we choose $\varepsilon > 0$ in order to bound by η this first term of (4.49) (independently of $n \in \mathbb{N}$). This choice of ε gives also n_0 and C_ε. Since C_ε is given, there exists $h_0 \in (0,T)$ such that the second term of the RHS of (4.49) is bounded by η (independently of $n \in \mathbb{N}$) if $0 < h < h_0$. Finally, we obtain

$$n \ge n_0,\ 0 < h < h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p dt \le 2\eta.$$

This concludes the proof of Theorem 4.49. ■

Lemme 4.50 *Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We assume that the sequence $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is compact-continuous in B (see Definition 4.48).*
Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ and C_ε such that, for $n \ge n_0$ and $w \in X_n$, one has

$$\|w\|_B \le \varepsilon \|w\|_{X_n} + C_\varepsilon \|w\|_{Y_n}.$$

Proof of Lemma 4.50 We perform the proof by contradiction. The contradiction gives that there exists $\varepsilon > 0$, an increasing fonction φ from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$ and, for all $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in X_{\varphi(n)}$ such that

$$1 = \|u_{\varphi(n)}\|_B > \varepsilon \|u_{\varphi(n)}\|_{X_n} + n \|u_{\varphi(n)}\|_{Y_n}.$$

In order to define u_n for all n, we can set $u_n = 0$ for $n \notin \mathrm{Im}(\varphi)$. The sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is such that $u_n \in X_n$ (for all $n \in \mathbb{N}$), $(\|u_n\|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bounded and $\|u_n\|_{Y_n} \to 0$ (as $n \to +\infty$), then the second assumption of Definition 4.48 gives that any subsequence (of the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converging in B converge (in B) to 0. But, since $(\|u_n\|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, the first assumption of Definition 4.48 gives that the subsequence $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admits a subsequence converging in B. Then, the limit of this subsequence must be 0 and its norm in B must be equal to 1, which is impossible. This concludes the proof of Lemma 4.50. ■

It is also possible to replace in Theorem 4.49 the time derivative by a discrete derivative. This is interesting for proving the convergence of the approximate solution of a parabolic problem using a numerical scheme. It is the purpose of Theorem 4.51

Théorème 4.51 (Aubin-Simon with a sequence of subspaces and a discrete derivative) *Let $1 \le p < +\infty$. Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We assume that the sequence $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is compact-continuous in B (see Definition 4.48).*
Let $T > 0$ and $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0,T), B)$ satifying the following conditions

1. *For all $n \in \mathbb{N}$, there exists $N \in \mathbb{N}^\star$ and $k_1, \ldots, k_N$ in $\mathbb{R}_+^\star$ such that $\sum_{i=1}^N k_i = T$ and $u_n(t) = v_i$ for $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, $t_0 = 0$, $t_i = t_{i-1} + k_i$, $v_i \in X_n$. (Of course, the values N, k_i and v_i are depending on n.)*
   Furthermore, we define a.e. the function $\eth_t u_n$ by setting
   $$\eth_t u_n(t) = \frac{v_i - v_{i-1}}{k_i} \text{ for } t \in (t_{i-1}, t_i).$$
2. *The sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0,T), B)$.*

3. The sequence $(\|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded.
4. The sequence $(\|\eth_t u_n\|_{L^1((0,T),Y_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded.
Then there exists $u \in L^p((0,T),B)$ such that, up to a subsequence, $u_n \to u$ in $L^p((0,T),B)$.

Proof of Theorem 4.51
We follow closely the proof of Theorem 4.49. The proof uses also Proposition 4.47 and we only have to prove the third item of the hypotheses on $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of Proposition 4.47, which is equivalent to say

$$\int_0^{T-h} \|u_n(\cdot+h)-u_n\|_B^p dt \to 0 \text{ as } h\to 0, \text{ uniformly w.r.t. } n\in\mathbb{N}.$$

Here also, for all $n\in\mathbb{N}$, since $u_n \in L^p((0,T),B)$, one has $\int_0^{T-h} \|u_n(\cdot+h)-u_n\|_B^p dt \to 0$ as $h\to 0$. The only difficulty is to prove the uniformity of this convergence with respect to $n\in\mathbb{N}$. So, we only have to prove that for all $\eta>0$ there exist $n_0\in\mathbb{N}$ and $0<h_0<T$ such that

$$n\ge n_0,\ 0<h\le h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|u_n(\cdot+h)-u_n\|_B^p dt \le \eta. \tag{4.50}$$

Let $\varepsilon>0$. Lemma 4.50 gives the existence of $n_0\in\mathbb{N}$ and $C_\varepsilon\in\mathbb{R}$ such that

$$n\ge n_0,\ u\in X_n \Rightarrow \|u\|_B \le \varepsilon\|u\|_{X_n} + C_\varepsilon\|u\|_{Y_n}.$$

Then, for $n\ge n_0$, $0<h<T$ and $t\in(0,T-h)$, one has

$$\begin{aligned}\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_B &\le \varepsilon\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{X_n} + C_\varepsilon\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n}\\ &\le \varepsilon\|u_n(t+h)\|_{X_n} + \varepsilon\|u_n(t)\|_{X_n} + C_\varepsilon\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n},\end{aligned}$$

and then

$$\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_B^p \le (3\varepsilon)^p\|u_n(t+h)\|_{X_n}^p + (3\varepsilon)^p\|u_n(t)\|_{X_n}^p + (3C_\varepsilon)^p\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n}^p.$$

Integrating this inequality with respect to t leads to

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h)-u_n(t)\|_B^p dt \le 2(3\varepsilon)^p\|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p + (3C_\varepsilon)^p\int_0^{T-h}\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n}^p dt. \tag{4.51}$$

The proof now differs from the proof of Theorem 4.49. We have to use the discrete derivative of u_n instead of the derivative of u_n. We remark that for a.e. $t\in(0,T-h)$ (n and h are fixed)

$$u_n(t+h)-u_n(t) = \sum_{i;\, t_i\in(t,t+h)} (v_{i+1}-v_i) = \sum_{i=1}^{N-1}(v_{i+1}-v_i)1_{(t,t+h)}(t_i) = \sum_{i=1}^{N-1}\frac{v_{i+1}-v_i}{k_{i+1}}k_{i+1}1_{(t,t+h)}(t_i),$$

where $1_{(t,t+h)}(t_i)=1$ if $t_i\in(t,t+h)$ and 0 if $t_i\notin(t,t+h)$.
Let M be a bound of the $L^1((0,T),Y_n)$-norm of $\eth_t u_n$ (then, $M\ge\sum_{i=1}^{N-1}\|\frac{v_{i+1}-v_i}{k_{i+1}}\|_{Y_n}k_{i+1}$ for all n). We then obtain

$$\begin{aligned}\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n}^p &\le \Big(\sum_{i=1}^{N-1}\|\frac{v_{i+1}-v_i}{k_{i+1}}\|_{Y_n}k_{i+1}1_{(t,t+h)}(t_i)\Big)^p\\ &\le M^{p-1}\Big(\sum_{i=1}^{N-1}\|\frac{v_{i+1}-v_i}{k_{i+1}}\|_{Y_n}k_{i+1}1_{(t,t+h)}(t_i)\Big)\end{aligned}$$

Integrating this inequality with respect to $t \in (0, T-h)$ gives, since $1_{(t,t+h)}(t_i) = 1_{(t_i-h,t_i)}(t)$,

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{Y_n}^p dt \leq hM^p.$$

Using this inequality in (4.51) we obtain

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p + (3C_\varepsilon)^p M^p h. \tag{4.52}$$

We can now conclude as in Theorem 4.49. Let $\eta > 0$. we choose $\varepsilon > 0$ in order to bound by η this first term of (4.52) (independently of $n \in \mathbb{N}$). This choice of ε gives also n_0 and C_ε. Since C_ε is given, there exists $h_0 \in (0, T)$ such that the second term of the RHS of (4.52) is bounded by η (independently of $n \in \mathbb{N}$) if $0 < h < h_0$. Finally, we obtain

$$n \geq n_0,\ 0 < h < h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2\eta.$$

This concludes the proof of Theorem 4.51. ■

With the hypotheses of Theorem 4.49 or Theorem 4.51, another interesting question is to prove an additional regularity for u, namely that $u \in L^p((0,T), X)$ where X is some space closely related to the X_n (and included in B). In definition 4.52 we precise the meaning of the sentence "X closely related to the X_n" and we give in Theorem 4.53 a regularity result.

Définition 4.52 *Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and X be a Banach space included in B. We say that the sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is B-limit-included in X if there exist $C \in \mathbb{R}$ such that if u is the limit in B of a subsequence of a sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifying $u_n \in X_n$ and $\|u_n\|_{X_n} \leq 1$, then $u \in X$ and $\|u\|_X \leq C$.*

Théorème 4.53 (Regularity of the limit) *Let $1 \leq p < +\infty$ and $T > 0$. Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and B-limit-included in X (where X is a Banach space included in B) in the sense of Definition 4.52.*
Let $T > 0$ and, for $n \in \mathbb{N}$, let $u_n \in L^p((0,T), X_n)$. We assume that the sequence $(\|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded and that $u_n \to u$ in $L^p((0,T), B)$ as $n \to +\infty$. Then $u \in L^p((0,T), X)$.

Proof of Theorem 4.53
Since $u_n \to u$ in $L^p((0,T), B)$ as $n \to +\infty$, we can assume, up to subsequence, that $u_n \to u$ in B a.e..
Then, since the the sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is B-limit-included in X, we obtain, with C given by Definition 4.52,

$$\|u\|_X \leq C \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_{X_n} \ \text{ a.e..}$$

Using now Fatou's lemma, we have

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \leq C^p \int_0^T \liminf_{n\to+\infty} \|u_n(t)\|_{X_n}^p dt \leq C^p \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T \|u_n(t)\|_{X_n}^p dt.$$

Then, since $(\|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, we conclude that $u \in L^p((0,T), X)$. ■

4.6 Exercices

Exercice 4.1 (Solution classique en dimension 1) *Solution 4.1*

Soit $u_0 \in L^2(]0,1[)$. On s'intéresse ici au problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in]0,1[,\ t \in]0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \in]0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in [0,1]. \end{array}\right. \tag{4.53}$$

La notation $\partial_t u$ désigne la dérivée de u par rapport à t et $\partial_x^2 u$ désigne la dérivée seconde de u par rapport à x. On dit que u est une solution classique de (4.53) si u vérifie les trois conditions suivantes

(c1) u est de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,+\infty[$ et vérifie au sens classique $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ en tout point de $]0,1[\times]0,+\infty[$,

(c2) pour tout $t > 0$, les fonctions u, $\partial_x u$ et $\partial_x^2 u$ sont continues sur $[0,1] \times [t,+\infty[$ et $u(0,t) = u(1,t) = 0$,

(c3) $u(\cdot,t) \to u_0$ dans $L^2(]0,1[)$ quand $t \to 0$ ($t > 0$).

1. Montrer que le problème (4.53) admet au plus une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1.]
2. Montrer que le problème (4.53) admet une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1 en explicitant une base hilbertienne convenable de $L^2(]0,1[)$, voir l'exercice 2.2.]

Exercice 4.2 (Dual de L^p_E) *Solution 4.2*

Soit (X,T,m) un espace mesuré, E un espace de Banach et $1 < p < +\infty$. On pose $p' = p/(p-1)$.

1. Soit $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$ et $u \in L^p_E(X,T,m)$. Montrer que l'application $x \mapsto \langle v(x), u(x)\rangle_{E',E}$ est m-mesurable de X dans $\mathbb{R}$ puis que $\langle v,u\rangle_{E',E} \in L^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$ et
$$\int |\langle v,u\rangle_{E',E}|dm \le \|v\|_{L^{p'}_{E'}} \|u\|_{L^p_E}.$$
2. Soit $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$.
   (a) Montrer que l'application $u \mapsto \int \langle v,u\rangle_{E',E} dm$ est bien définie, linéaire et continue de $L^p_E(X,T,m)$ dans $\mathbb{R}$.
   On note T_v cette application (on a donc $T_v \in L^p_E(X,T,m)'$.)
   (b) Montrer que $\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} \le \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}$.
   (c) (Question plus difficile) Montrer que $\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} = \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}$.

Exercice 4.3 (Dérivée faible pour une union de domaines)

On suppose que Ω_1 et Ω_2 sont deux disjoints de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$) et on note Ω l'intérieur de l'adhérence de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ (l'ouvert Ω peut donc être différent de $\Omega_1 \cup \Omega_2$).
Soit $f \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$. Pour $i = 1,2$, on note f_i la fonction obtenue en restreignant f à Ω_i, on a donc $f_i \in L2(]0,T[, L^2(\Omega_i))$.
On identifie (comme d'habitude) $L^2(\Omega)$ avec son dual et $L^2(\Omega_i)$ avec son dual (pour $i = 1,2$).
On suppose $df_i/dt \in L^2(]0,T[, H^1(\Omega_i)')$ (pour $i = 1,2$). Montrer que $df/dt \in L^2(]0,T[, H^1(\Omega)')$.

Corrigé – *Il s'agit de montrer qu'il existe $u \in L^2(]0,T[, H^1(\Omega)')$ tel que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$,*
$$-\int_0^T f(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt.$$

Le terme de gauche de cette égalité est dans $L^2(\Omega)$ et le terme de droite est dans $H^1(\Omega)'$. Comme on a identifié $L^2(\Omega)$ avec son dual et que $H^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on a $L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)'$ et montrer cette égalité consiste donc à montrer que pour tout $\psi \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \big(- \int_0^T f(t)\varphi(t)dt\big)(x)\psi(x)dx = \langle \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^1(\Omega)',H^1(\Omega)}. \tag{4.54}$$

On cherche donc $u \in L^2(]0,T[, H^1(\Omega)')$ vérifiant (4.54) pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et tout $\psi \in H^1(\Omega)$.

Pour $i = 1, 2$, on sait que $df_i/dt \in L^2(]0,T[, H^1(\Omega_i)')$, il existe donc $u_i \in L^2(]0,T[, H^1(\Omega_i)')$ (que peut confondre avec df_i/dt) tel que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et tout $\psi \in H^1(\Omega_i)$ on a

$$\int_{\Omega_i} \big(- \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt\big)(x)\psi(x)dx = \langle \int_0^T u_i(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^1(\Omega_i)',H^1(\Omega_i)}. \tag{4.55}$$

Soient $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $\psi \in H^1(\Omega)$. On note ψ_i la restriction de ψ a Ω_i. On a donc $\psi_i \in H^1(\Omega_i)$ et $\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)} \le \sum_{i=1}^2 \|\psi_i\|^2_{H^1(\Omega_i)}$. En utilisant (4.55) (et la proposition 4.23) on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \big(- \int_0^T f(t)\varphi(t)dt\big)(x)\psi(x)dx &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \big(- \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt\big)(x)\psi_i(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^2 \langle \int_0^T u_i(t)\varphi(t)dt, \psi_i\rangle_{H^1(\Omega_i)',H^1(\Omega_i)} = \int_0^T \sum_{i=1}^2 \langle u_i(t)\varphi(t), \psi_i\rangle_{H^1(\Omega_i)',H^1(\Omega_i)} dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^2 \langle u_i(t), \psi_i\rangle_{H^1(\Omega_i)',H^1(\Omega_i)}\varphi(t)dt = \int_0^T \langle u(t), \psi\rangle_{H^1(\Omega_i)',H^1(\Omega_i)}\varphi(t)dt \\
&= \langle \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^1(\Omega)',H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

où $u(t)$ est défini (pour presque tout t) par

$$\langle u(t), \psi\rangle_{H^1(\Omega)',H^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 \langle u(t), \psi\rangle_{H^1(\Omega_i)',H^1(\Omega_i)}.$$

Comme $u_i \in L^2(]0,T[, H^1(\Omega_i)')$ et $\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)} \le \sum_{i=1}^2 \|\psi_i\|^2_{H^1(\Omega_i)}$, on a bien $u \in L^2(]0,T[, H^1(\Omega)')$ et cela termine la démonstration.

Exercice 4.4 (Diffusion non homogène et non isotrope) *Solution 4.3*

On reprend les hypothèses du théorème 4.26. Soit donc Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$.

On se donne aussi une application, notée A, de Ω dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices carrés à N lignes et N colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$). On suppose que les coefficients de A appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$A\xi \cdot \xi \ge \alpha|\xi|^2 \text{ p.p., pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

En suivant la démonstration donnée dans ce chapitre, montrer qu'il existe un et un seul u tel que

$$\left\{\begin{array}{l}
u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), \\
\displaystyle\int_0^T < \partial_t u(s), v(s) >_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^T \big(\int_\Omega A\nabla u(s).\nabla v(s)dx\big)ds = \\
\qquad \int_0^T < f(s), v(s) >_{H^{-1},H_0^1} ds \text{ pour tout } v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \\
u(0) = u_0 \text{ p.p..}
\end{array}\right. \tag{4.56}$$

Exercice 4.5 (Existence par le théorème de Schauder) *Solution 4.4*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ (où $M_N(\mathbb{R})$ désigne les matrices $N \times N$ à coefficients réels) t.q.

$$\forall s \in \mathbb{R}, A(s) = (a_{i,j}(s))_{i,j=1,\ldots,N} \text{ où } a_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \tag{4.57}$$

$$\exists \alpha > 0; A(s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.58}$$

$$f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_0 \in L^2(\Omega). \tag{4.59}$$

On identifie $L^2(\Omega)$ à $L^2(\Omega)'$, comme d'habitude. On veut, dans cet exercice, montrer l'existence d'une solution au problème (4.32).
Soit $\bar{u} \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$, on définit l'opérateur T de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est **la** solution (donnée par l'exercice 4.4) du problème

$$\begin{cases} u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega A(\bar{u})\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ \quad = \displaystyle\int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t, \ \forall v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

1. Montrer que T est continu de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.
2. Montrer que T est compact de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.
3. Montrer qu'il existe $R > 0$ t.q. $\|T(\bar{u})\|_{L^2(]0,T[,L^2(\Omega))} \leq R$ pour tout $u \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.
4. Montrer qu'il existe u solution de (4.32).
5. On suppose maintenant de plus que $a_{i,j}$ est, pour tout i, j, une fonction lipschitzienne. Montrer que (4.32) admet une unique solution.

Exercice 4.6 (Existence par schéma numérique) *Solution 4.5*

On se propose, dans cet exercice, de montrer l'existence d'une solution faible au problème (4.60)-(4.62) en passant à la limite sur un solution approchée donnée par un schéma numérique.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x,t) = v(x,t), \ x \in]0,1[, \ t \in]0,T[, \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1,t) = 0, \ t \in]0,T[, \tag{4.61}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in]0,1[, \tag{4.62}$$

où φ, v, T, u_0 sont donnés et sont t.q.

1. $T > 0$, $v \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$,
2. φ croissante, lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
3. $u_0 \in L^\infty(]0,1[)$ et $\varphi(u_0)$ lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Un exemple important est donné par $\varphi(s) = \alpha_1 s$ si $s \leq 0$, $\varphi(s) = 0$ si $0 \leq s \leq L$ et $\varphi(s) = \alpha_2(s - L)$ si $s \geq L$, avec α_1, α_2 et L donnés dans $\mathbb{R}_+^\star$. Noter pour cet exemple que $\varphi' = 0$ sur $]0, L[$.
Les ensembles $]0,1[$ et $]0,1[\times]0,T[$ sont munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue sur cette tribu. On appelle "solution faible" de (4.60), (4.61), (4.62) une solution de

$$u \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[), \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^1 (u(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) + \varphi(u(x,t))\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) + v(x,t)\psi(x,t))dxdt \\ + \int_0^1 u_0(x)\psi(x,0)dx = 0, \quad \forall \psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2),\end{aligned} \tag{4.64}$$

où $C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2) = \{\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 2 fois continûment dérivable par rapport à x et une fois continûment dérivable par rapport à t, t.q. $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(1,t) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et $\psi(x,T) = 0$ pour tout $x \in [0,1]\}$.

1. (Question indépendante des questions suivantes.) On suppose, dans cette question seulement, que φ est de classe C^2, v est continue sur $[0,1] \times [0,T]$ et u_0 est continue sur $[0,1]$. Soit $w \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et u la restriction de w à $]0,1[\times]0,T[$. Montrer que u est solution de (4.63),(4.64) si et seulement si u vérifie (4.60), (4.61) et (4.62) au sens classique (that is to say pour tout $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$).
2. (Un résulat de compacité.) Soit $A \subset C([0,T], L^2(]0,1[))$. On munit $C([0,T], L^2(]0,1[))$ de la norme usuelle, that is to say
$$\|u\| = \sup\{\|u(t)\|_{L^2(]0,1[)},\, t \in [0,T]\}.$$
On suppose que A vérifie les 2 hypothèses suivantes
   (a) Pour tout $t \in [0,T]$, $\{u(t),\, u \in A\}$ est un borné de $L^\infty(]0,1[)$ et il existe C t.q.
   $$\int_{\mathbb{R}} |u(t)(x+\eta) - u(t)(x)|^2 dx \le C\eta,$$
   pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^\star$ et tout $u \in A$, avec $u(t)$ prolongée par 0 hors de $[0,1]$.
   (b) Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|u(t) - u(s)\|_{L^2(]0,1[)} \le C|t-s|$, pour tout $t,s \in [0,T]$ et tout $u \in A$.

   Montrer que A est relativement compacte dans $C([0,T], L^2(]0,1[))$.
3. (Passage à la limite sur une non linéarité, cette question est indépendante de la question précédente.) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$. Soient $u \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ et $f \in L^1(]0,1[\times]0,T[)$. On suppose que, quand $n \to \infty$,
   (a) $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$,
   (b) $\varphi(u_n) \to f$ dans $L^1(]0,1[\times]0,T[)$ et p.p..

   Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p. sur $]0,1[\times]0,T[$.
   [Indication : Utiliser l'astuce de Minty…]

On cherche maintenant une solution approchée de (4.60),(4.61),(4.62).
Soient $N, M \in \mathbb{N}^\star$. On pose $h = \frac{1}{N}$ et $k = \frac{T}{M}$. On va construire une solution approchée de (4.60),(4.61),(4.62) à partir de la famille $\{u_i^n,\, i = 1,\dots,N,\, n = 0,\dots,M\}$ vérifiant les équations suivantes

$$u_i^0 = \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} u_0(x)dx,\ i = 1,\dots,N, \tag{4.65}$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} - \frac{\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - 2\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})}{h^2} = v_i^n,\ i=1,\ldots,N,\ n=0,\ldots,M-1, \tag{4.66}$$

avec $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$, pour tout $n=0,\ldots,M-1$ et $v_i^n = \dfrac{1}{kh}\displaystyle\int_{nk}^{(n+1)k}\int_{(i-1)h}^{ih} v(x,t)dxdt$, pour tout $i=1,\ldots,N$, pour tout $n=0,\ldots,M$.

4. (Existence et unicité de la solution approchée.)
   Soit $n \in \{0,\ldots,M-1\}$. On suppose connu $\{u_i^n,\ i=1,\ldots,N\}$.

   (a) On suppose que φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\{u_i^{n+1},\ i=1,\ldots,N$. On pose $r_i = \varphi(u_i^{n+1})$ pour tout $i=1,\ldots,N\}$. Montrer que $\{u_i^{n+1},\ i=1,\ldots,N\}$ est solution de (4.66) si et seulement si $(r_i)_{i=1,\ldots,N}$ est un point fixe de l'application (bien définie...) qui à $w=(w_i)_{i=1,\ldots,N}$ associe $r=(r_i)_{i=1,\ldots,N}$ défini (avec $w_0 = w_1$ et $w_{N+1} = w_N$) par

   $$\varphi^{-1}(r_i) + \frac{2k}{h^2}r_i = \frac{k}{h^2}(w_{i-1}+w_{i+1}) + u_i^n + kv_i^n,\ \ i=1,\ldots,N.$$

   Montrer que cette application est strictement contractante (de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$) pour la norme dite “du sup”. En déduire qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1},\ i=1,\ldots,N\}$ solution de (4.66).

   (b) (plus difficile) On ne suppose plus que φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1},\ i=1,\ldots,N\}$ solution de (4.66).

Les trois questions suivantes donnent des estimations sur la solution approchée dont on vient de montrer l'existence et l'unicité.

5. (Estimation $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ sur la solution approchée.)
   On pose $A = \|u_0\|_{L^\infty(]0,1[)}$ et $B = \|v\|_{L^\infty(]0,1[\times]0,T[)}$.
   Montrer, par récurrence sur n, que $u_i^n \in [-A-nkB, A+nkB]$ pour tout $i=1,\ldots,N$ et tout $n=0,\ldots,M$.
   [On pourra, par exemple, considérer (4.66) avec i t.q. $u_i^{n+1} = \min\{u_j^{n+1},\ j=1,\ldots,N\}$.]
6. (Estimation de la dérivée p.r. à x de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_1 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q., pour tout $n=0,\ldots,M-1$,

   $$\sum_{i=1}^{N-1}(\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \le C_1\frac{h}{k}.$$

   [indication : multiplier (4.66) par u_i^{n+1} et sommer sur i.]
7. (Estimation de la dérivée p.r. à t de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_2 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q.

   $$\sum_{n=0}^{M-1} h\sum_{i=0}^{N+1}(\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))^2 \le C_2 k.$$

   [indication : multiplier (4.66) par $\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)$ et sommer sur i et n]

L'objectif est maintenant de passer à la limite sur les paramètres de discrétisation. Pour $M \in \mathbb{N}^\star$ donné, on prend $N = M^2$ (et donc h et k sont donnés et $k = T\sqrt{h}$), on définit, avec les u_i^n trouvés dans les questions précédentes, une fonction, u_h, sur $[0,1]\times[0,T]$ en posant

$$u_h(x,t) = \frac{t-nk}{k} u_h^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)k-t}{k} u_h^{(n)}(x), \text{ si } t \in [nk,(n+1)k]$$

et

$$u_h^{(n)}(x) = u_i^n, \text{ si } x \in [(i-1)h, ih],\ i = 1,\ldots,N,\ n = 0,\ldots,M.$$

8. Soient $A_1 = \{u_h, M \in \mathbb{N}^\star\}$ et $A_2 = \{\varphi(u_h), M \in \mathbb{N}^\star\}$.
   Montrer que A_1 est relativement séquentiellement compacte dans $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$, pour la topologie faible-$\star$, et que A_2 est relativement (séquentiellement) compacte dans $C([0,T],L^2(]0,1[))$.
   En déduire que l'on peut trouver une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ t.q., en posant $u_n = u_{h_n}$ (on rappelle que $k_n = T\sqrt{h_n}$), on ait, quand $n \to \infty$,
   (a) $h_n \to 0$ et $k_n \to 0$,
   (b) $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$,
   (c) $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^p(]0,1[\times]0,T[)$, pour tout $p \in [1,\infty[$.
9. Montrer que la fonction u trouvée à la question précédente est solution de (4.63),(4.64).

Remarque. On peut aussi montrer l'unicité de la solution de (4.63),(4.64).

Exercice 4.7 (Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$) *Solution 4.6* Le but de cet exercice est de refaire la démonstration du théorème 4.38 dans le cas (plus simple) $B = \mathbb{R}$ et $p = 1$.
Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1(]0,T[,\mathbb{R})$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$).
On suppose que pour tout $h \in]0,T[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \le \eta(h),$$

où η est une fonction croissante de $]0,T[$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$.
L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.

1. Soit $\delta, h \in]0,T[$ t.q. $\delta + h \le T$. Montrer que

$$\int_0^\delta |u_n(t)|dt \le \int_0^\delta |u_n(t+h)|dt + \int_0^\delta |u_n(t+h) - u_n(t)|dt. \tag{4.67}$$

2. Soit $h_0 \in]0,T[$ et $\delta \in]0, T-h_0[$, montrer que

$$h_0 \int_0^\delta |u_n(t)|dt \le \delta \|u_n\|_1 + h_0 \eta(h_0). \tag{4.68}$$

3. Montrer que $\int_0^\delta |u_n(t)|dt \to 0$ quand $\delta \to 0^+$, uniformément par rapport à n.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.
   [Appliquer le théorème de Kolmogorov, théorème 4.37, en utilisant le prolongement de u_n par 0.]

4.7 Corrigés d'exercices

Corrigé 4.1 (Solution classique en dimension 1)

Soit $u_0 \in L^2(]0,1[)$. On s'intéresse ici au problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0,\ x \in]0,1[,\ t \in]0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \in]0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in [0,1]. \end{array}\right. \tag{4.69}$$

La notation $\partial_t u$ désigne la dérivée de u par rapport à t et u_{xx} désigne la dérivée seconde de u par rapport à x. On dit que u est une solution classique de (4.69) si u vérifie les trois conditions suivantes

(c1) u est de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,+\infty[$ et vérifie au sens classique $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ en tout point de $]0,1[\times]0,+\infty[$,

(c2) pour tout $t > 0$, les fonctions u, u_x et u_{xx} sont continues sur $[0,1] \times [t,+\infty[$ et $u(0,t) = u(1,t) = 0$,

(c3) $u(\cdot,t) \to u_0$ dans $L^2(]0,1[)$ quand $t \to 0$ ($t > 0$).

1. Montrer que le problème (4.69) admet au plus une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1.]

Corrigé – *Si u et $\bar{u}$ sont deux solutions classiques de (4.69). La fonction $(u - \bar{u})$ est alors une solution classique de (4.69) avec $u_0 = 0$ p.p. (sur $]0,1[$). Pour montrer que $u = \bar{u}$, il suffit donc de montrer que la fonction nulle est l'unique solution de (4.69) lorsque $u_0 = 0$ p.p..*

On suppose donc que u est une solution classique de (4.69) avec $u_0 = 0$ p.p.. On va montrer que $u(x,t) = 0$ pour tout $(x,t) \in [0,1]\times]0,+\infty[$.

Soit $t > 0$, les hypothèses (c1) et (c2) permettent de dire que

$$\int_0^1 \partial_t u(x,t) u(x,t) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2)_t(x,t) dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 u^2(x,t) dx\Big)$$

et

$$\int_0^1 u_{xx}(x,t) u(x,t) dx = -\int_0^1 u_x(x,t)^2 dx.$$

Comme $\partial_t u u - u_{xx} u = 0$ sur $]0,1[\times]0,+\infty($, on en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 u^2(x,t) dx\Big) + \int_0^1 u_x(x,t)^2 dx = 0.$$

Soit $0 < \varepsilon < T < +\infty$. En intégrant l'équation précédente entre ε et T, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,T) dx + \int_0^T \int_0^1 u_x^2(x,t) dx dt = \frac{1}{2}\int_0^1 u(x,\varepsilon) dx,$$

ce qui donne

$$\int_0^1 u^2(x,T) dx \le \int_0^1 u^2(x,\varepsilon) dx.$$

Quand $\varepsilon \to 0$, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 (par (c3)), on a donc $\int_0^1 u^2(x,T) dx = 0$, ce qui donne $u(\cdot,T) = 0$ p.p. et donc $u(x,T) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ (car $u(\cdot,T)$ est supposée être continue sur $[0,1]$). Comme $T > 0$ est arbitraire, on a bien montré que $u(x,t) = 0$ pour tout $(x,t) \in [0,1]\times]0,+\infty[$.

2. Montrer que le problème (4.1) admet une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1 en explicitant une base hilbertienne convenable de $L^2(]0,1[)$, voir l'exercice 2.2.]

Corrigé –

On utilise un résultat de l'exercice 2.2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $c_n = 2\int_0^1 u_0(t)\sin(n\pi t)dt$. L'exercice 2.2. donne que

$$\|u_0 - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

(On rappelle que $\|\cdot\|_2$ désigne $\|\cdot\|_{L^2(]0,1[)}$. Comme $|c_n| \le 2\|u_0\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée. On en déduit que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi^2 t} c_n \sin n\pi x$$

est convergente (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2\pi^2\varepsilon}|c_n| \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2\pi^2\varepsilon}|c_n|$$

sont convergentes. Ceci montre que la fonction

$$x, t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi^2 t} c_n \sin n\pi x$$

est, pour tout $\varepsilon > 0$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times]\varepsilon, +\infty[$ (elle est même de classe C^∞) et que la série peut être dérivée terme à terme, une fois en t et deux fois en x. On pose donc, pour $x \in]0,1[$ et $t > 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi^2 t} c_n \sin n\pi x.$$

La fonction u ainsi définie vérifie bien les conditions (c1) et (c2).

Il reste à montrer que u vérifie (c3). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $t > 0$ et $n_0 > 0$, on a

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_2 \le \|\sum_{n=1}^{n_0} c_n(1 - e^{-n^2 t^2})\sin(n\pi\cdot)\|_2 + 2\|u_0 - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \sin(n\pi\cdot)\|_2.$$

On commence par choisir n_0 pour que le deuxième terme du membre de droite de cette inégalité soit inférieur à ε. Puis, comme n_0 est maintenant fixé, on remarque qu'il existe $t_0 > 0$ t.q. le premier terme du membre de droite de cette inégalité est inférieur à ε dès que $t \in]0, t_0]$. On en déduit bien que u vérifie (c3).

Corrigé 4.2 (Dual de L^p_E)

Soit (X, T, m) un espace mesuré, E un espace de Banach et $1 < p < +\infty$. On pose $p' = p/(p-1)$.

1. Soit $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$ et $u \in L^p_E(X,T,m)$. Montrer que l'application $x \mapsto \langle v(x), u(x)\rangle_{E',E}$ est m-mesurable de X dans $\mathbb{R}$ puis que $\langle v, u\rangle_{E',E} \in L^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$ et

$$\int |\langle v,u\rangle_{E',E}|dm \le \|v\|_{L^{p'}_{E'}}\|u\|_{L^p_E}.$$

Corrigé – On choisit pour u et v des représentants, de sorte que $v \in \mathcal{L}^{p'}_{E'}(X,T,m)$ et $u \in \mathcal{L}^p_E(X,T,m)$. La m-mesurabilité de l'application $x \mapsto \langle u(x), v(x)\rangle_{E',E}$ (notée $\langle v,u\rangle_{E',E}$) est assez simple à montrer (et ne dépend pas des représentants choisis pour u et v). Il suffit de remarquer qu'il existe deux suites de fonctions étagées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (v_n est une fonction de X dans E' et u_n de X dans E) t.q. $v_n \to v$ p.p. et $u_n \to u$ p.p. (quand $n \to +\infty$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\langle v_n, u_n\rangle_{E',E}$ est alors une fonction étagée de X dans $\mathbb{R}$. Quand $n \to +\infty$, elle converge p.p. vers la fonction $\langle v,u\rangle_{E',E}$ qui est donc m-mesurable.

On remarque ensuite que $|\langle v(x), u(x)\rangle_{E',E}| \le \|v(x)\|_{E'}\|u(x)\|_E$ pour tout $x \in X$. En intégrant par rapport à la mesure m (on utilise ici la monotonie de l'intégrale pour les fonctions m-mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'inégalité de Hölder), on obtient que $\langle v,u\rangle_{E',E} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$ (et donc $\langle v,u\rangle_{E',E} \in L^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$ avec la confusion habituelle entre $\mathcal{L}^1$ et L^1) et

$$\int |\langle v,u\rangle_{E',E}|dm \le \int \|v\|_{E'}\|u\|_E dm \le \|v\|_{L^{p'}_{E'}}\|u\|_{L^p_E}.$$

2. Soit $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$.

(a) Montrer que l'application $u \mapsto \int \langle v,u\rangle_{E',E} dm$ est bien définie, linéaire et continue de $L^p_E(X,T,m)$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *La question précédente donne bien que $\langle v,u\rangle_{E',E} \in L^1_E(X,T,m)$ pour tout $u \in L^p_E(X,T,m)$. L'application $u \mapsto \int \langle v,u\rangle_{E',E} dm$ est donc bien définie de $L^p_E(X,T,m)$ dans $\mathbb{R}$. Elle est trivialement linéaire. Sa continuité est une conséquence du fait que*

$$|\int \langle v,u\rangle_{E',E} dm| \le \int |\langle v,u\rangle_{E',E}| dm \le \|v\|_{L^{p'}_{E'}} \|u\|_{L^p_E}.$$

On note T_v cette application (on a donc $T_v \in L^p_E(X,T,m)'$.)

(b) Montrer que $\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} \le \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}$.

Corrigé – *Par définition de la norme dans le dual d'un espace de Banach, on a*

$$\|T_v\|_{(L^p_E)'} = \sup\{|T_v(u)|,\ u \in L^p_E \text{ t.q. } \|u\|_{L^p_E} = 1\}.$$

La question précédente donne que $|T_v(u)| \le \|v\|_{L^{p'}_{E'}}$ si $\|u\|_{L^p_E} = 1$, on a donc

$$\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} \le \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}.$$

(c) (Question plus difficile) Montrer que $\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} = \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}$.

Corrigé – *On pose $q = p'$. On raisonne ici en deux étapes. On commence par montrer l'égalité demandée si v est une fonction étagée. Puis, on traite le cas général.*

Etape 1

On suppose, dans cette étape, que v est une fonction étagée non nulle. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^\star$, une famille $A_1, \ldots, A_n$ d'éléments de la tribu T et une famille $b_1, \ldots, b_n$ d'éléments de E', non nuls, t.q.

$$v = \sum_{i=1}^n b_i 1_{A_i}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. De la définition de la norme dans E', on déduit que, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, il existe $\bar{a}_i \in E$ t.q.

$$\|\bar{a}_i\|_E = 1 \text{ et } \langle b_i, \bar{a}_i\rangle_{E',E} \ge (1-\varepsilon)\|b_i\|_{E'}.$$

On pose $a_i = \|b_i\|^{q-1}_{E'} \bar{a}_i$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et

$$u = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}.$$

La fonction u est une fonction étagée (de X dans E) et on a

$$\int \langle v,u\rangle_{E',E} dm = \sum_{i=1}^n m(A_i)\langle b_i, a_i\rangle_{E',E} \ge (1-\varepsilon)m(A_i)\|b_i\|^q_{E'} = (1-\varepsilon)\|v\|^q_{L^q_{E'}}.$$

D'autre part, on a (comme $p(q-1) = q$)

$$\|u\|^p_{L^p_E} = \sum_{i=1}^n m(A_i)\|b_i\|^{p(q-1)}_{E'} = \sum_{i=1}^n m(A_i)\|b_i\|^q_{E'} = \|v\|^q_{L^q_{E'}}.$$

On a donc

$$\frac{1}{\|u\|_{L^p_E}} \int \langle v,u\rangle_{E',E} dm \ge (1-\varepsilon)\frac{\|v\|^q_{L^q_{E'}}}{\|v\|^{\frac{q}{p}}_{L^q_{E'}}} = (1-\varepsilon)\|v\|_{L^q_{E'}}.$$

En posant $\bar{u} = \dfrac{u}{\|u\|_{L^p_E}}$, on a donc $\|\bar{u}\|_{L^p_E} = 1$ et $\int \langle v,\bar{u}\rangle_{E',E} dm \ge (1-\varepsilon)\|v\|_{L^q_{E'}}$. Ceci prouve que

$$\|T_v\|_{(L^p_E)'} \ge (1-\varepsilon)\|v\|_{L^q_{E'}}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient donc, avec la question 2(b), $\|T_v\|_{(L^p_E)'} = \|v\|_{L^q_{E'}}$.

Etape 2

On traite maintenant le cas général. Soit $v \in L^q_{E'}$ non nulle (si $v = 0$ p.p. l'égalité demandée est triviale). Il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagée (de X dans E') t.q. $v_n \to v$ dans $L^q_{E'}$ (cette suite peut se construire comme cela a été pour la définition de L^1, that is to say en construisant v_n t.q. $\|v_n(x)\|_{E'} \le 2\|v(x)\|_{E'}$ pour presque tout $x \in E'$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc w fonction étagée t.q. $\|w - v\|_{L^p_{E'}} \le \varepsilon$. Par l'étape 1, il existe $u \in L^p_E$ t.q. $\|u\|_{L^p_E} = 1$ et

$$\int \langle w, u\rangle_{E',E} dm \ge \|w\|_{L^q_{E'}} - \varepsilon.$$

On a donc (avec la question 1)

$$\int \langle v, u\rangle_{E',E} dm = \int \langle w, u\rangle_{E',E} dm + \int \langle v - w, u\rangle_{E',E} dm \ge \|w\|_{L^q_{E'}} - \varepsilon - \|v - w\|_{L^q_{E'}}.$$

Comme $\|v - w\|_{L^q_{E'}} \le \varepsilon$ et $\|w\|_{L^q_{E'}} \ge \|v\|_{L^q_{E'}} - \varepsilon$, on a donc

$$\int \langle v, u\rangle_{E',E} dm \ge \|v\|_{L^q_{E'}} - 3\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci permet d'affirmer que $\|T_v\|_{(L^p_E)'} \ge \|v\|_{L^q_{E'}}$. Finalement, avec la question 2(b), on a bien $\|T_v\|_{(L^p_E)'} = \|v\|_{L^q_{E'}}$.

Corrigé 4.3 (Diffusion non homogène et non isotrope)

On reprend les hypothèses du théorème 4.26. Soit donc Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$.

On se donne aussi une application, notée A, de Ω dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices carrés à N lignes et N colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$). On suppose que les coefficients de A appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$A\xi\cdot\xi \ge \alpha|\xi|^2 \text{ p.p., pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

En suivant la démonstration donnée dans ce chapitre, montrer qu'il existe un et un seul u tel que

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[, H^1_0(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)),\\ \displaystyle\int_0^T < \partial_t u(s), v(s) >_{H^{-1},H^1_0} ds + \int_0^T \Big(\int_\Omega A\nabla u(s).\nabla v(s) dx\Big) ds = \\ \qquad \int_0^T < f(s), v(s) >_{H^{-1},H^1_0} ds \text{ pour tout } v \in L^2(]0,T[, H^1_0(\Omega)),\\ u(0) = u_0 \text{ p.p..}\end{array}\right. \tag{4.70}$$

Corrigé – *Si A est symétrique, le plus simple consiste à utiliser une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres de l'opérateur $u \mapsto -\mathrm{div}(A\nabla u)$ (avec condition de Dirichlet, that is to say $u = 0$ sur $\partial\Omega$). On prend donc une famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ t.q. e_n est (pour tout n) une solution faible de*

$$\left\{\begin{array}{l} -\mathrm{div} A\nabla e_n = \lambda_n e_n \quad \text{dans } \Omega,\\ e_n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,\end{array}\right.$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$. (On a vu dans la section 2.2 qu'une telle base existait.) La démonstration de l'existence (et de l'unicité) d'une solution de (4.70) est alors très voisine de celle donnée pour le cas où A est la matrice Identité.

Le cas où A est non symétrique est plus difficile car on n'a pas nécessairement une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres de l'opérateur $u \mapsto -\mathrm{div}(A\nabla u)$. Il faut alors modifier légèrement la démonstration. On va faire cette *démonstration ici en prenant la base hilbertienne $\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ associée au Laplacien (avec condition de Dirichlet). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction e_n est donc solution faible (non nulle) de*

$$\begin{aligned} -\Delta e_n &= \lambda_n e_n \text{ dans } \Omega, \\ e_n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On rappelle que $\|e_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $\lambda_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$. On a aussi $\|e_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\lambda_n}$ et la famille $\{e_n/\sqrt{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. C'était l'étape 1 de la démonstration du théorème 4.26).

Remarque 4.54 *Compte tenu de la manière dont $H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $H^{-1}(\Omega)$ (par l'identification de $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$) et de la définition du produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$ (à partir du produit scalaire dans $H_0^1(\Omega)$) , on peut aussi remarquer que*

$$\begin{aligned} (e_n/e_m)_{H^{-1}} &= 0 \text{ si } n \neq m, \\ (e_n/e_m)_{H^{-1}} &= \tfrac{1}{\lambda_n} \text{ si } n = m. \end{aligned} \tag{4.71}$$

La famille $\{\sqrt{\lambda_n} e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ est donc une famille orthonormée de $H^{-1}(\Omega)$ (c'est même une base hilbertienne de $H^{-1}(\Omega)$). Pour montrer (4.71), on rappelle tout d'abord la définition du produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$, on définit T_u dans $H^{-1}(\Omega)$ par

$$\langle T_u, \varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = (u/\varphi)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx.$$

L'application T est bijective de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on définit alors le produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$ par

$$(T_u/T_v)_{H^{-1}(\Omega)} = (u/v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, compte tenu de la manière dont $H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $H^{-1}(\Omega)$ (par l'identification de $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$), on a, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\lambda_n\langle e_n, \varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \lambda_n \int_\Omega e_n\varphi dx = \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla\varphi dx,$$

ce qui montre que $T_{e_n} = \lambda_n e_n$. On a donc, pour $n, m \in \mathbb{N}^\star$,

$$\lambda_n\lambda_m(e_n/e_m)_{H^{-1}(\Omega)} = (T_{e_n}/T_{e_m})_{H^{-1}(\Omega)} = (e_n/e_m)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m dx = \lambda_n\delta_{n,m}.$$

On en déduit bien (4.71).

On construit maintenant une solution approchée (étape 2 du théorème 4.26).

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $E_n = ev\{e_p, p = 1, \ldots n\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$ avec $\alpha_i \in C([0,T], \mathbb{R})$. Le calcul formel fait dans la démonstration du théorème 4.26 donne ici (en supposant que les α_i sont dérivables pour tout t), pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et presque tout $t \in]0,T[$,

$$\begin{aligned} &\langle u_n'(t) - \mathrm{div}(A\nabla u_n(t)) - f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\alpha_i'(t) \int_\Omega e_i\varphi dx + \alpha_i(t) \int_\Omega A\nabla e_i \cdot \nabla\varphi dx\Big) - \langle f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On souhaite alors choisir les fonctions α_i pour que $\langle u_n'(t) - \mathrm{div}(A\nabla u_n)(t) - f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = 0$ pour tout $\varphi \in E_n$.

On pose $f_i(t) = \langle f(t), e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ et on note $F(t)$ le vecteur donc les composantes sont les $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. On définit aussi la matrice $n \times n$ (à coefficients réels) M en posant $M_{i,j} = \int_\Omega A\nabla e_j \cdot \nabla e_i dx$ ($M_{i,j}$ est le coefficient de M en ligne i et colonne j). en notant $\alpha(t)$ le vecteur donc les composantes sont les $\alpha_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, on souhaite donc avoir

$$\alpha'(t) + M\alpha(t) = F(t).$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0/e_i)_2$ et $\alpha^{(0)}$ le vecteur donc les composantes sont les $\alpha_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, n$, ceci suggère donc de prendre

$$\alpha(t) = e^{-Mt}\alpha^{(0)} + \int_0^t e^{-M(t-s)}F(s)ds. \tag{4.72}$$

Les fonctions α_i ainsi définies appartiennent à $C([0,T],\mathbb{R})$ et on a donc $u_n \in C([0,T],E_n) \subset C([0,T],H_0^1(\Omega))$ avec $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$.

Nous avons ici raisonné à n fixé. La matrice M et les fonctions F et α dépendent donc de n.

Nous adaptons maintenant l'étape 3 du théorème 4.26. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et u_n la solution approchée donnée par l'étape précédente. On va préciser ici ce que vaut la dérivée (par transposition) de u_n. Cette dérivée est notée $(u_n)_t$. Par définition de la dérivation par transposition, $(u_n)_t$ est un élément de $\mathcal{D}_E^\star$ avec $E = H_0^1(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$ on a

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}_E^\star,\mathcal{D}} = -\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt \in E_n \subset H_0^1(\Omega).$$

Comme $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, on a donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}_E^\star,\mathcal{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \alpha_i(t)e_i\varphi'(t)dt = -\sum_{i=1}^n \big(\int_0^T \alpha_i(t)\varphi'(t)dt\big)e_i.$$

On utilise maintenant (4.72),

$$\int_0^T \alpha_i(t)\varphi' dt = T_i + S_i,$$

avec

$$T_i = \int_0^T (e^{-Mt}\alpha^{(0)})_i\varphi'(t)dt = \int_0^T (Me^{-Mt}\alpha^{(0)})_i\varphi(t)dt.$$

$$S_i = \int_0^T \big(\int_0^t e^{-M(t-s)}F(s)ds\big)_i\varphi'(t)dt.$$

Pour transformer S_i on utilise le théorème de Fubini et on obtient

$$S_i = \int_0^T \big(\int_0^t (Me^{-M(t-s)}F(s))_i ds\big)\varphi(t)dt - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt.$$

On en déduit que $T_i + S_i = \int_0^T (M\alpha(t))_i\varphi(t)dt - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt$, et donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star,\mathcal{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T (M\alpha(t))_i e_i\varphi(t)dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T f_i(t)e_i\varphi(t)dt.$$

Comme φ est arbitraire dans $C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$, on a donc (p.p. en t)

$$(u_n)_t = -\sum_{i=1}^n (M\alpha)_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0,T[,E_n).$$

Le premier terme du membre de droite de cette égalité est même continu de $[0,T]$ à valeurs dans E_n. En reprenant la définition de M, cette égalité donne (p.p. en t)

$$(u_n)_t = -\sum_{i=1}^n \big(\int_\Omega A\nabla u_n\cdot\nabla e_i dx\big)e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i. \tag{4.73}$$

La situation est légérement différente de celle du théorème 4.26. Mais on a toujours

$$(u_n)_t \in L^2(]0,T[,E_n) \subset L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)).$$

Compte tenu de la manière dont $H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $H^{-1}(\Omega)$ (par l'identification de $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$) on a pour tout $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$,

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt = -\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^n (M\alpha(t))_i e_i v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T\int_\Omega f_i e_i v dx dt.$$

Ceci est intéressant surtout lorsque $v \in L^2(]0,T[,E_n)$ car en reprenant la définition de M on obtient

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt = -\int_0^T\int_\Omega A\nabla u_n\cdot\nabla v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T\int_\Omega f_i e_i v dx dt.$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i, toujours pour $v \in L^2(]0,T[,E_n)$,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla v dx dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \langle f(t), e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \big(\int_\Omega e_i v dx\big) dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt.\end{aligned} \tag{4.74}$$

On rapelle aussi que $u_n \in C([0,T], H_0^1(\Omega))$ et $u_n(0) = P_n u_0$ où P_n est l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le s.e.v. E_n.

On cherche maintenant (étape 4) des estimations sur la solution approchée.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$u_n \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)) \text{ et } (u_n)_t \in L^2(]0,T[, E_n) \subset L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)).$$

D'après la section 4.2, on a donc

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 = \int_0^T \langle (u_n)_t, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

En prenant $v = u_n$ dans (4.74), on en déduit

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla u_n dx dt = \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt,$$

et donc

$$\alpha \|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \le \int_0^T \int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla u_n dx dt \le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\alpha \|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \\ &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \\ &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2\alpha}\|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} + \frac{\alpha}{2}\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha \|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \le \|u_0\|_2^2 + \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Ce qui donne une borne sur u_n dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$.

Pour obtenir la borne sur $(u_n)_t$, on utilise (4.73). Pour presque tout t on a

$$(u_n)_t(t) = -\sum_{i=1}^n \big(\int_\Omega A\nabla u_n(t) \cdot \nabla e_i dx\big) e_i + \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i.$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v = \sum_{i=1}^\infty (v/e_i)_{L^2} e_i$ et cette série est convergente dans $L^2(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$. En posant $P_n(v) = \sum_{i=1}^n (v/e_i)_{L^2} e_i$ on a $\|P_n v\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$. Comme

$$\begin{aligned}\langle (u_n)_t(t), P_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1} &= \langle (u_n)_t(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega (u_n)_t(t) v dx \\ &= -\sum_{i=1}^n \big(\int_\Omega A\nabla u_n(t) \cdot \nabla e_i dx\big)(v/e_i)_{L^2} + \sum_{i=1}^n f_i(t)(v/e_i)_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.75}$$

on en déduit que

$$\|(u_n)_t(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle (u_n)_t(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1},\ v \in E_n,\ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1\}.$$

Or, pour $v \in E_n$, on obtient avec (4.75)

$$\langle (u_n)_t(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega A\nabla u_n(t) \cdot \nabla v dx + \langle f(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

En utilisant le fait que les coefficients de A sont dans $L^\infty(\Omega)$, on en déduit l'existence de β, ne dépendant que de A, t.q. pour presque tout t,

$$\|(u_n)_t(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \beta \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc bornée dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$.

Il s'agit maintenant (étape 5) de passer à la limite quand $n\to+\infty$. Grâce aux estimations obtenues à l'étape précédente, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que, quand $n\to+\infty$,

$$u_n \to u \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)),$$
$$(u_n)_t \to w \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)).$$

Comme nous l'avons dans la démonstration du théorème 4.26, on a $w=\partial_t u$.

Soit $v\in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On pose $v_n(t)=P_n(v(t))$, de sorte que, par convergence dominée, $v_n\to v$ dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$. On utilise alors (4.74) avec v_n au lieu de v . On obtient

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T\int_\Omega A\nabla u_n\cdot\nabla v_n dx dx dt = \int_0^T \langle f, v_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Les trois termes de cette égalité passent à limite quand $n\to+\infty$ grâce aux convergences de u_n, v_n et $(u_n)_t$. On obtient ainsi

$$\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T A\nabla u\cdot\nabla v dx dt = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Ce qui est bien ce qui était souhaité.

Comme $u\in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on sait que $u\in C([0,T],L^2(\Omega))$. Pour terminer la démonstration du fait que u est solution de (4.70)*, il reste donc seulement à montrer que $u(0)=u_0$ p.p. (that is to say $u(0)=u_0$ dans $L^2(\Omega)$). La démonstration de ce point est identique à celle donnée dans la démonstration du théorème 4.26. Cela termine la démonstration de l'existence d'une solution à* (4.70).

On montre maintenant l'unicité de la solution de (4.70)*. La démonstration est très proche de celle donnée pour le théorème 4.26. Soit u_1,u_2 deux solutions de* (4.70)*. On pose $u=u_1-u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et en prenant, pour $t\in[0,T]$, $v=u1_{]0,t[}$ comme fonction test, on obtient*

$$\int_0^t \langle \partial_t u(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^t\int_\Omega A\nabla u(s)\cdot\nabla u(s) dx ds = 0.$$

Comme $u\in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a, d'après la section 4.2,

$$\frac{1}{2}(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) = \int_0^t \langle \partial_t u(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds.$$

On en déduit, pour tout $t\in[0,T]$,

$$(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) + 2\int_0^t\int_\Omega A\nabla u(s)\cdot\nabla u(s) dx dt = 0.$$

Enfin, comme $u(0)=0$ et $A\nabla u\cdot\nabla u\ge 0$ p.p., on obtient bien, finalement, $u(t)=0$ p.p. dans Ω, pour tout $t\in[0,T]$. Ce qui termine la démonstration de l'unicité de la solution de (4.70).

Corrigé 4.4 (Existence par le théorème de Schauder)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $A:\mathbb{R}\to M_N(\mathbb{R})$ (où $M_N(\mathbb{R})$ désigne les matrices $N\times N$ à coefficients réels) t.q.

$$\forall s\in\mathbb{R}, A(s)=(a_{i,j}(s))_{i,j=1,\dots,N} \text{ où } a_{i,j}\in L^\infty(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \tag{4.76}$$

$$\exists\alpha>0; A(s)\xi\cdot\xi\ge\alpha|\xi|^2, \forall\xi\in\mathbb{R}^N, \forall s\in\mathbb{R}, \tag{4.77}$$

$$f\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_0\in L^2(\Omega). \tag{4.78}$$

On identifie $L^2(\Omega)$ à $L^2(\Omega)'$, comme d'habitude. On veut, dans cet exercice, montrer l'existence d'une solution au problème (4.32).

Soit $\bar{u} \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$, on définit l'opérateur T de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est **la** solution (donnée par l'exercice 4.4) du problème

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega A(\bar{u})\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \displaystyle\quad = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t,\ \forall v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot,0) = u_0. \end{array}\right. \tag{4.79}$$

1. Montrer que T est continu de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.

Corrigé – *Soit $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ et $\bar{u} \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ t.q. $\bar{u}_n \to \bar{u}$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ quand $n \to +\infty$. On pose $u_n = T(\bar{u}_n)$ et $u = T(\bar{u})$. Pour montrer que $u_n \to u$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ quand $n \to +\infty$, on raisonne par l'absurde. Si $u_n \not\to u$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q.*

$$\|u_n - u\|_{L^2(]0,T[,L^2(\Omega))} \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.80}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est la solution de (4.79) avec $\bar{u}_n$ au lieu de $\bar{u}$. En prenant $v = u_n$ comme fonction test, on en déduit, grâce à (4.77), que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$. Puis, comme

$$(u_n)_t = \mathrm{div}(A(\bar{u}_n)\nabla u_n) + f$$

dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on en déduit que la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$.

Après extraction éventuelle de sous suite, on peut donc supposer qu'il existe $w \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $\zeta \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$ t.q., quand $n \to +\infty$,

$$u_n \to w \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)),$$
$$(u_n)_t \to \zeta \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)).$$

Par le théorème 4.40, on a aussi $u_n \to u$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.
Comme cela a été montré dans la démonstration du théorème 4.26 on a nécessairement $\zeta = w_t$.

On peut également supposer, toujours après extraction de sous suite, que $\bar{u}_n \to \bar{u}$ p.p. de sorte que $A(\bar{u}_n) \to A(\bar{u})$ p.p. (grâce à la continuité des $a_{i,j}$).

Soit $v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$, on peut alors passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans (4.79) écrit avec $\bar{u}_n$ et u_n (au lieu de $\bar{u}$ et u). On obtient que w est ***la*** *solution de (4.79), that is to say que $w = u = T(\bar{u})$. On a donc $u_n \to u$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$, en contradiction avec (4.80).*

On a bien ainsi montré la continuité de T.

2. Montrer que T est compact de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.

Corrigé – *Le début du raisonnement de la question précédente montre que $\mathrm{Im}(T)$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et que $\{\partial_t u,\, u \in \mathrm{Im}(T)\}$ est une partie bornée de $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. Le lemme de compacité 4.32 donne alors que $\mathrm{Im}(T)$ est relativement compacte dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$, ce qui donne la compacité de T.*

3. Montrer qu'il existe $R > 0$ t.q. $\|T(\bar{u})\|_{L^2(]0,T[,L^2(\Omega))} \leq R$ pour tout $u \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.

Corrigé – *Ici encore, ceci découle du raisonnement fait à la première question. En effet, on sait que $\mathrm{Im}(T)$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et donc aussi dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.*

4. Montrer qu'il existe u solution de (4.32).

Corrigé – *On note B_R la boule de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ de centre 0 et de rayon R, avec R donné à la question précédente. L'opérateur T est continu et compact de B_R dans B_R. Le théorème de Schauder donne alors l'existence de $u \in B_R$ (et donc $u \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$) t.q. $u = T(u)$, that is to say u solution de (4.32).*

5. On suppose maintenant de plus que $a_{i,j}$ est, pour tout i, j, une fonction lipschitzienne. Montrer que (4.32) admet une unique solution.

Corrigé – *La démonstration est ici très proche de celle faite pour montrer l'unicité de la solution de* (4.33).

Soit u_1, u_2 deux solutions de (4.32). On pose $u = u_1 - u_2$ et on va montrer que $u = 0$ p.p..

Pour $\varepsilon > 0$ on définit la fonction T_ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $T_\varepsilon(s) = \max\{-\varepsilon, \min\{s, \varepsilon\}\}$. On note aussi ϕ_ε la primitive de T_ε s'annulant en 0. En prenant $v = T_\varepsilon(u)$ dans les formulations faibles satisfaites par u_1 et u_2, on obtient

$$\int_0^T \langle \partial_t u, T_\varepsilon(u)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega A(u_1)\nabla u \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega (A(u_2) - A(u_1))\nabla u_2 \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt.$$

Comme $\nabla T_\varepsilon(u) = \nabla u 1_{0<|u|<\varepsilon}$ p.p., on en déduit que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x,T))dx - \int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x,0))dx + \alpha \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u 1_{0<|u|<\varepsilon} dx dt \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |(A(u_1) - A(u_2))\nabla u_2||\nabla u| 1_{0<|u|<\varepsilon} dx dt. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Comme les $a_{i,j}$ sont des fonctions lipschitziennes, il existe L t.q., pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ et s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$,

$$|a_{i,j}(s_1) - a_{i,j}(s_2)| \leq L|s_1 - s_2|,$$

On utilise alors le fait que $u_0 = 0$ p.p. et $\phi_\varepsilon \geq 0$ pour déduire de (4.81), *avec $A_\varepsilon = \{0 < |u| < \varepsilon\}$ et $y = (x,t)$,*

$$\alpha \int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt \leq N^2 L\varepsilon \Big(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc $\alpha \| |\nabla T_\varepsilon(u)| \|_{L^2(Q)} \leq a_\varepsilon \varepsilon$, avec $Q =]0,T[\times\Omega$ et

$$a_\varepsilon = N^2 L\Big(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\cap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = \emptyset$ la continuité décroissante d'une mesure donne que la mesure de Lebesgue ($N+1$ dimensionnelle) de A_ε tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ et on a donc, comme $\nabla u_2 \in L^2(Q)^N$, (noter que $L^2(Q)$ peut être identifié à $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy = 0,$$

ce qui donne $\lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon = 0$. Il nous reste maintenant à utiliser, par exemple, l'injection de $W_0^{1,1}(\Omega)$ dans $L^{1^\star}(\Omega)$. elle donne pour $t \in]0,T[$,

$$\|T_\varepsilon(u(t))\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \leq \||\nabla T_\varepsilon(u(t))|\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.82}$$

On désigne par "mes" le mesure de le Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$. On remarque maintenant que pour $t \in]0,T[$

$$\varepsilon \mathit{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{1}{1^\star}} \leq \Big(\int_\Omega |T_\varepsilon(u)|^{1^\star} dx\Big)^{\frac{1}{1^\star}}.$$

On a donc, avec (4.82),

$$\varepsilon \mathit{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{1}{1^\star}} \leq \| |\nabla T_\varepsilon(u(t))| \|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u(x,t))| dx,$$

et, en intégrant par rapport à t, sachant que $1/1^\star = (N-1)/N$ et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T \mathit{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}} dt &\leq \int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u(x,t))| dx dt \leq \| |\nabla T_\varepsilon(u)| \|_{L^2(Q)} (T\mathit{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{(T\mathit{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha} a_\varepsilon \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^T mes\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq \frac{(Tmes(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha} a_\varepsilon.$$

quand $\varepsilon \to 0$, par convergence dominée, on en déduit (comme $\lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon = 0$)

$$\int_0^T mes\{|u(t)| > 0\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq 0.$$

Ce qui donne mes$\{|u(t)| > 0\} = 0$ p.p. en $t \in]0,T[$ et donc $u = 0$ p.p., ce qui termine cette preuve d'unicité.

Corrigé 4.5 (Existence par schéma numérique)

On se propose, dans cet exercice, de montrer l'existence d'une solution faible au problème (4.83)-(4.85) en passant à la limite sur un solution approchée donnée par un schéma numérique.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x,t) = v(x,t),\ x \in]0,1[,\ t \in]0,T[, \tag{4.83}$$

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1,t) = 0,\ t \in]0,T[, \tag{4.84}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in]0,1[, \tag{4.85}$$

où φ, v, T, u_0 sont donnés et sont t.q.

1. $T > 0$, $v \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$,
2. φ croissante, lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
3. $u_0 \in L^\infty(]0,1[)$ et $\varphi(u_0)$ lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Un exemple important est donné par $\varphi(s) = \alpha_1 s$ si $s \leq 0$, $\varphi(s) = 0$ si $0 \leq s \leq L$ et $\varphi(s) = \alpha_2(s-L)$ si $s \geq L$, avec α_1, α_2 et L donnés dans $\mathbb{R}_+^\star$. Noter pour cet exemple que $\varphi' = 0$ sur $]0,L[$.
Les ensembles $]0,1[$ et $]0,1[\times]0,T[$ sont munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue sur cette tribu.
On appelle "solution faible" de (4.83), (4.84), (4.85) une solution de

$$u \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[), \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^1 (u(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) + \varphi(u(x,t))\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) + v(x,t)\psi(x,t))dxdt \\ + \int_0^1 u_0(x)\psi(x,0)dx = 0, \quad \forall \psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2),\end{aligned} \tag{4.87}$$

où $C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2) = \{\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 2 fois continûment dérivable par rapport à x et une fois continûment dérivable par rapport à t, t.q. $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(1,t) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et $\psi(x,T) = 0$ pour tout $x \in [0,1]\}$.

1. (Question indépendante des questions suivantes.) On suppose, dans cette question seulement, que φ est de classe C^2, v est continue sur $[0,1]\times[0,T]$ et u_0 est continue sur $[0,1]$. Soit $w \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et u la restriction de w à $]0,1[\times]0,T[$. Montrer que u est solution de (4.86),(4.87) si et seulement si u vérifie (4.83), (4.84) et (4.85) au sens classique (that is to say pour tout $(x,t) \in [0,1]\times[0,T]$).
2. (Un résulat de compacité.) Soit $A \subset C([0,T],L^2(]0,1[))$. On munit $C([0,T],L^2(]0,1[))$ de la norme usuelle, that is to say
$$\|u\| = \sup\{\|u(t)\|_{L^2(]0,1[)},\ t \in [0,T]\}.$$
On suppose que A vérifie les 2 hypothèses suivantes

(a) Pour tout $t \in [0,T]$, $\{u(t),\, u \in A\}$ est un borné de $L^\infty(]0,1[)$ et il existe C t.q.

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)(x+\eta) - u(t)(x)|^2 dx \le C\eta,$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^\star$ et tout $u \in A$, avec $u(t)$ prolongée par 0 hors de $[0,1]$.

(b) Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|u(t) - u(s)\|_{L^2(]0,1[)} \le C|t-s|$, pour tout $t,s \in [0,T]$ et tout $u \in A$.

Montrer que A est relativement compacte dans $C([0,T], L^2(]0,1[))$.

3. (Passage à la limite sur une non linéarité, cette question est indépendante de la question précédente.)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$. Soient $u \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ et $f \in L^1(]0,1[\times]0,T[)$.
On suppose que, quand $n \to \infty$,

(a) $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$,

(b) $\varphi(u_n) \to f$ dans $L^1(]0,1[\times]0,T[)$ et p.p..

Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p. sur $]0,1[\times]0,T[$.
[Indication : Utiliser l'astuce de Minty. . .]

On cherche maintenant une solution approchée de (4.83),(4.84),(4.85).
Soient $N, M \in \mathbb{N}^\star$. On pose $h = \dfrac{1}{N}$ et $k = \dfrac{T}{M}$. On va construire une solution approchée de (4.83),(4.84),(4.85) à partir de la famille $\{u_i^n,\, i = 1,\ldots,N,\, n = 0,\ldots,M\}$ vérifiant les équations suivantes

$$u_i^0 = \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} u_0(x)dx,\ i = 1,\ldots,N, \tag{4.88}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - 2\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})}{h^2} = v_i^n,\ i = 1,\ldots,N,\ n = 0,\ldots,M-1, \tag{4.89}$$

avec $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$, pour tout $n = 0,\ldots,M-1$ et $v_i^n = \dfrac{1}{kh}\displaystyle\int_{nk}^{(n+1)k}\int_{(i-1)h}^{ih} v(x,t)dxdt$, pour tout $i = 1,\ldots,N$, pour tout $n = 0,\ldots,M$.

4. (Existence et unicité de la solution approchée.)
Soit $n \in \{0,\ldots,M-1\}$. On suppose connu $\{u_i^n,\, i = 1,\ldots,N\}$.

(a) On suppose que φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\{u_i^{n+1},\, i = 1,\ldots,N$. On pose $r_i = \varphi(u_i^{n+1})$ pour tout $i = 1,\ldots,N\}$. Montrer que $\{u_i^{n+1},\, i = 1,\ldots,N\}$ est solution de (4.89) si et seulement si $(r_i)_{i=1,\ldots,N}$ est un point fixe de l'application (bien définie. . .) qui à $w = (w_i)_{i=1,\ldots,N}$ associe $r = (r_i)_{i=1,\ldots,N}$ défini (avec $w_0 = w_1$ et $w_{N+1} = w_N$) par

$$\varphi^{-1}(r_i) + \frac{2k}{h^2} r_i = \frac{k}{h^2}(w_{i-1} + w_{i+1}) + u_i^n + kv_i^n,\ \ i = 1,\ldots,N.$$

Montrer que cette application est strictement contractante (de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$) pour la norme dite "du sup". En déduire qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1},\, i = 1,\ldots,N\}$ solution de (4.89).

(b) (plus difficile) On ne suppose plus que φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1},\, i = 1,\ldots,N\}$ solution de (4.89).

Les trois questions suivantes donnent des estimations sur la solution approchée dont on vient de montrer l'existence et l'unicité.

5. (Estimation $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ sur la solution approchée.)
   On pose $A = \|u_0\|_{L^\infty(]0,1[)}$ et $B = \|v\|_{L^\infty(]0,1[\times]0,T[)}$.
   Montrer, par récurrence sur n, que $u_i^n \in [-A - nkB, A + nkB]$ pour tout $i = 1, \ldots, N$ et tout $n = 0, \ldots, M$.
   [On pourra, par exemple, considérer (4.89) avec i t.q. $u_i^{n+1} = \min\{u_j^{n+1}, j = 1, \ldots, N\}$.]
6. (Estimation de la dérivée p.r. à x de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_1 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q., pour tout $n = 0, \ldots, M-1$,

$$\sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \le C_1 \frac{h}{k}.$$

   [indication : multiplier (4.89) par u_i^{n+1} et sommer sur i.]
7. (Estimation de la dérivée p.r. à t de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_2 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q.

$$\sum_{n=0}^{M-1} h \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))^2 \le C_2 k.$$

   [indication : multiplier (4.89) par $\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)$ et sommer sur i et n]

L'objectif est maintenant de passer à la limite sur les paramètres de discrétisation. Pour $M \in \mathbb{N}^\star$ donné, on prend $N = M^2$ (et donc h et k sont donnés et $k = T\sqrt{h}$), on définit, avec les u_i^n trouvés dans les questions précédentes, une fonction, u_h, sur $[0,1] \times [0,T]$ en posant

$$u_h(x,t) = \frac{t - nk}{k} u_h^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)k - t}{k} u_h^{(n)}(x), \text{ si } t \in [nk, (n+1)k]$$

et

$$u_h^{(n)}(x) = u_i^n, \text{ si } x \in [(i-1)h, ih],\ i = 1, \ldots, N,\ n = 0, \ldots, M.$$

8. Soient $A_1 = \{u_h, M \in \mathbb{N}^\star\}$ et $A_2 = \{\varphi(u_h), M \in \mathbb{N}^\star\}$.
   Montrer que A_1 est relativement séquentiellement compacte dans $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$, pour la topologie faible-$\star$, et que A_2 est relativement (séquentiellement) compacte dans $C([0,T], L^2(]0,1[))$.
   En déduire que l'on peut trouver une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ t.q., en posant $u_n = u_{h_n}$ (on rappelle que $k_n = T\sqrt{h_n}$), on ait, quand $n \to \infty$,
   (a) $h_n \to 0$ et $k_n \to 0$,
   (b) $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$,
   (c) $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^p(]0,1[\times]0,T[)$, pour tout $p \in [1, \infty[$.
9. Montrer que la fonction u trouvée à la question précédente est solution de (4.86),(4.87).

Remarque. On peut aussi montrer l'unicité de la solution de (4.86),(4.87).

Corrigé 4.6 (Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$) Le but de cet exercice est de refaire la démonstration du théorème 4.38 dans le cas (plus simple) $B = \mathbb{R}$ et $p = 1$.
Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(]0,T[,\mathcal{B}(]0,T[),\lambda)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$).
On suppose que pour tout $h \in]0,T[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \le \eta(h),$$

où η est une fonction croissante de $]0,T[$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$.
L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans L^1.

1. Soit $\delta, h \in]0,T[$ t.q. $\delta + h \le T$. Montrer que

$$\int_0^{\delta} |u_n(t)|dt \le \int_0^{\delta} |u_n(t+h)|dt + \int_0^{\delta} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt. \tag{4.90}$$

Corrigé – *Pour tout $t \in]0,\delta[$ on a $|u_n(t)| \le |u_n(t+h)| + |u_n(t+h) - u_n(t)|$. En intégrant cette inégalité entre 0 et δ, on obtient bien* (4.90)*.*

2. Soit $h_0 \in]0,T[$ et $\delta \in]0,T-h_0[$, montrer que

$$h_0 \int_0^{\delta} |u_n(t)|dt \le \delta\|u_n\|_1 + h_0\eta(h_0). \tag{4.91}$$

Corrigé – *Comme d'habitude, on choisit pour u_n l'un de représentants, de sorte que $u_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,T[,\mathcal{B}(]0,T[),\lambda)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).*

L'inégalité (4.90) *est vraie pour tout $h \in]0,h_0[$. En intégrant* (4.90) *entre 0 et h_0 et en remarquant que $\int_0^{\delta} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \le \eta(h) \le \eta(h_0)$ (car $h \le h_0$ et $\delta \le T - h_0 \le T - h$) on obtient*

$$\begin{aligned} h_0 \int_0^{\delta} |u_n(t)|dt &\le \int_0^{h_0} \Big(\int_0^{\delta} |u_n(t+h)|dt\Big)dh + \int_0^{h_0} \Big(\int_0^{\delta} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt\Big)dh \\ &\le \int_0^{h_0} \Big(\int_0^{\delta} |u_n(t+h)|dt\Big)dh + h_0\eta(h_0). \end{aligned}$$

La mesure de Lebesgue est σ-finie et l'application $(t,h) \mapsto u_n(t+h)$ est borélienne de $]0,\delta[\times]0,h_0[$ dans $\mathbb{R}$ (car c'est la composée de $(t,h) \mapsto t+h$ qui est continue donc borélienne et de $s \mapsto u_n(s)$ qui est borélienne). On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir que

$$\begin{aligned} \int_0^{h_0} \Big(\int_0^{\delta} |u_n(t+h)|dt\Big)dh &= \int_0^{\delta} \Big(\int_0^{h_0} |u_n(t+h)|dh\Big)dt \\ &\le \int_0^{\delta} \Big(\int_0^{T} |u_n(s)|ds\Big) \le \delta\|u_n\|_1. \end{aligned}$$

On en déduit (4.91)*.*

3. Montrer que $\int_0^{\delta} |u_n(t)|dt \to 0$ quand $\delta \to 0^+$, uniformément par rapport à n.

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. On choisit d'abord $h_0 \in]0,T[$ t.q. $\eta(h_0) \le \varepsilon$. Puis, avec $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1$, on pose $\overline{\delta} = \min\{T - h_0, \varepsilon h_0/C\}$. On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$0 \le \delta \le \overline{\delta} \Rightarrow \int_0^{\delta} |u_n(t)|dt \le 2\varepsilon.$$

On a donc $\int_0^\delta |u_n(t)|dt \to 0$ quand $\delta \to 0^+$, uniformément par rapport à n.

Une démonstration analogue donne aussi que $\int_{T-\delta}^T |u_n(t)|dt \to 0$ quand $\delta \to 0^+$, uniformément par rapport à n (il suffit de raisonner avec $v_n(t) = u_n(T-t)$).

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.
[Appliquer le théorème de Kolmogorov, théorème 4.38, qui utilise le prolongement de u_n par 0.]

Corrigé – On prolonge u_n par 0 hors de $]0,T[$ (et on note toujours u_n la fonction prolongée). Pour appliquer le théorème 4.38, il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \to 0 \text{ quand } h \to 0^+, \text{ uniformément par rapport à } n \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, on remarque que pour $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} &|u_n(t+h) - u_n(t)|dt \\ &\le \int_{-h}^0 |u_n(t+h)|dt + \int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt + \int_{T-h}^T |u_n(t)|dt \\ &= \int_0^h |u_n(t)|dt + \int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt + \int_{T-h}^T |u_n(t)|dt.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h_1 > 0$ t.q. $\eta(h_1) \le \varepsilon$. Puis, avec la question précédente, il existe $h_2 > 0$ t.q. (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \le h \le h_2 \Rightarrow \int_0^h |u_n(t)|dt \le \varepsilon \text{ et } \int_{T-h}^T |u_n(t)|dt \le \varepsilon.$$

Avec $h_3 = \min\{h_1, h_2\}$, on a donc (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \le h \le h_3 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \le 3\varepsilon.$$

Ceci termine la question.

Chapitre 5

Problèmes hyperboliques

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux équations hyperboliques scalaires, et nous allons démontrer le théorème d'existence et d'unicité de la solution entropique dû à Kruskov. Nous n'aborderons pas le cas des systèmes, pour lesquels la théorie reste pour le moment très incomplète. Nous commençons par le cas unidimensionnel.

5.1 Le cas unidimensionnel

Les équations de type hyperbolique interviennent principalement en mécanique des fluides (aéronautique, écoulements diphasiques, modélisation de rupture de barrage et d'avalanches). Elles sont souvent obtenues en négligeant les phénomènes de diffusion (parce qu'ils sont faibles à l'échelle considérée) dans les équations de conservation de la mécanique. L'exemple le plus classique d'équation hyperbolique linéaire est l'équation de transport (ou d'advection).

$$\partial_t u - \partial_x u = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

avec condition initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{5.2}$$

Dans le cas où la condition initiale u_0 est suffisamment régulière, il est facile de voir que la fonction :

$$u(x, t) = u_0(x + t), \tag{5.3}$$

est solution de (5.1)-(5.2). Si u_0 est non régulière (par exemple discontinue), nous verrons qu'il y a encore moyen de montrer que la fonction définie par (5.3) est solution en un sens que nous qualifierons de “faible”.
Si l'équation est non linéaire, i.e.

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

avec par exemple $f(u) = u^2$, et condition initiale (5.2), on peut encore définir des solutions faibles, mais leur calcul est plus difficile.

Remarque 5.1 Sur le plan de la simulation numérique, les équations hyperboliques sont discrétisées de manière usuelle par la méthode des volumes finis. Les discrétisations par éléments finis mènent souvent à des schémas instables (en particulier, les solutions discrètes ne vérifient pas certaines propriétés physiques souvent souhaitées).

On se donne $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et on considère maintenant l'équation hyperbolique non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Commençons par donner la définition de solution classique de ce problème même si, comme nous le verrons après, le problème (5.5) n'a pas, en général, de solution classique.

Notations. Soit Q une partie de $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$) et $k \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in C^k(\bar{Q})$ si u est la restriction à Q d'une fonction de classe C^k sur $\mathbb{R}^p$. (Ceci est équivalent à la définition usuelle si $k = 0$. Bien sûr, cette définition s'applique aussi si Q est fermé et donc $\bar{Q} = Q$.) On utilisera aussi la notation $u \in C_c^k(Q)$ qui signifie que $u \in C^k(\bar{Q})$ et qu'il existe $K \subset Q$, K compact t.q. $u = 0$ sur K^c. Cette notation sera utilisée par exemple pour $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ou $Q = \mathbb{R} \times [0, T[$.

Définition 5.2 (Solution classique) *On suppose que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors u est solution classique de* (5.5) *si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et u vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u(x,t) + \partial_x(f(u))(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Avant de donner un résultat de non existence d'une solution classique (proposition 5.5), nous rappelons le résultat classique d'existence et d'unicité locale de solutions pour une équation différentielle non linéaire (théorème de Cauchy-Lipschitz), avec une fonction a localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a(x(t), t), \quad t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ x(0) = x_0. \end{array} \right. \tag{5.6}$$

Pour tout $T > 0$, le problème (5.6) admet au plus une solution (classique) définie sur $[0, T[$. Il existe $T_{\max} > 0$ (éventuellement égal à $+\infty$) et une fonction x continue sur $[0, T_{\max}[$, de classe C^1 sur $]0, T_{\max}[$, solution (classique) de (5.6). De plus, si $T_{\max} < +\infty$ alors $|x(t)| \to +\infty$ lorsque $t \to T_{\max}$.

Soit u une solution classique de (5.5). On pose alors $a(x,t) = f'(u(x,t))$ (de sorte que $a \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$). Il est clair que la fonction u est alors une solution classique du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(x,t) + a(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{array} \right. \tag{5.7}$$

Nous donnons maintenant la définition des courbes caractéristiques pour l'équation (5.7), qui permet le lien entre les équations hyperboliques linéaires et les équations différentielles ordinaires.

Définition 5.3 (Courbe caractéristique) *On suppose que la fonction a est localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle courbe caractéristique du problème* (5.7) *issue de $x_0 \in \mathbb{R}$, la courbe définie par le problème de Cauchy suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a(x(t), t) \\ \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \tag{5.8}$$

Proposition 5.4 (Solutions classiques et courbes caractéristiques) *Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et u une solution classique de* (5.5). *Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0)$. Autrement dit, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction u est constante sur la droite $t \mapsto x(t) = x_0 + f'(u_0(x_0))t$. (Cette droite est la courbe caractéristique du problème* (5.7) *issue de $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $a(x,t) = f'(u(x,t))$.)*

Démonstration On pose $a(x,t) = f'(u(x,t))$. Comme $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, La fonction a est bien a localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc pour le problème (5.7). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème (5.7) a alors une solution maximale $x(t)$ définie sur $[0, T_{\max}[$, et $|x(t)|$ tend vers l'infini lorsque t tend vers $T_{\max}$ si $T_{\max} < +\infty$. Les trois étapes de la démonstration sont les suivantes :

1. Comme u est solution classique, on a $u(x(t), t) = u_0(x_0), \forall t \in [0, T_{\max}[$, et donc u (solution de (5.5)) est constante sur la droite caractéristique issue de x_0. En effet, soit φ définie par $\varphi(t) = u(x(t), t)$; en dérivant φ, on obtient : $\varphi'(t) = \partial_t u(x(t), t) + \partial_x u(x(t), t) x'(t)$. Comme x vérifie (5.8), ceci entraîne : $\varphi'(t) = \partial_t u(x(t), t) + f'(u(x(t), t)) \partial_x u(x(t), t)$, et donc
$$\varphi'(t) = \partial_t u(x(t), t) + \partial_x u(f(u))(x(t), t) = 0.$$
La fonction φ est donc constante, et on a :
$$u(x(t), t) = \varphi(t) = \varphi(0) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0), \forall t \in [0, T_{\max}[.$$
2. Les courbes caractéristiques sont des droites, car $u(x(t), t) = u_0(x_0), \forall t \in [0, T_{\max}[$, et donc $x'(t) = f'(u_0(x_0))$. En intégrant, on obtient que le système (5.8) décrit la droite d'équation :
$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0. \tag{5.9}$$
3. $T_{\max} = +\infty$ et donc $u(x,t) = u_0(x_0) \quad \forall t \in [0, +\infty[$.
En effet, puisque x vérifie (5.9), on a donc, si $T_{\max} < \infty$,
$$\lim_{t \to T_{\max}} |x(t)| < +\infty. \text{ On en déduit que } T_{\max} = +\infty.$$
■

Proposition 5.5 (Non existence d'une solution classique) *Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose que f' n'est pas constante, alors il existe $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que (5.5) n'admette pas de solution classique.*

Démonstration Comme f' est non constante, il existe v_0, v_1 tel que $f'(v_0) > f'(v_1)$, et on peut construire $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $u_0(x_0) = v_0$ et $u_0(x_1) = v_1$, où x_0 et x_1 sont donnés et $x_0 < x_1$, voir figure 5.1. Supposons

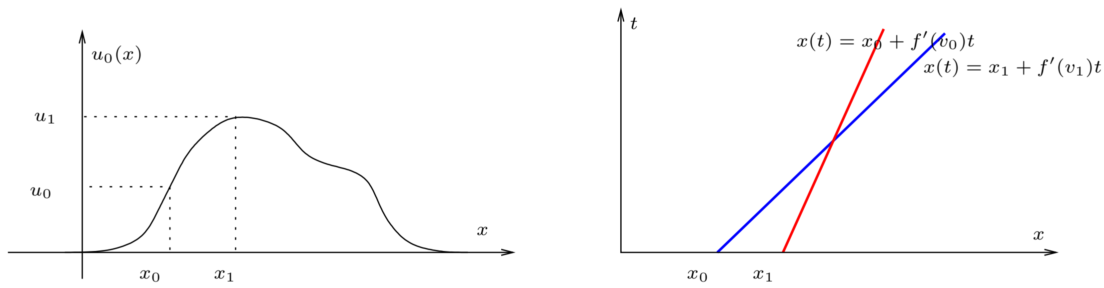

FIGURE 5.1 – Droites caractéristiques, cas non linéaire

que u soit solution classique avec cette donnée initiale. Alors, par la proposition 5.4 :
$$u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0) = v_0 \text{ et } u(x_1 + f'(u_0(x_1))t, t) = u_0(x_1) = v_1.$$

Soit T tel que $x_0 + f'(v_0)T = x_1 + f'(v_1)T = \bar{x}$, c'est à dire

$$T = \frac{x_1 - x_0}{f'(v_0) - f'(v_1)}.$$

On a alors :

$$u(\bar{x}, T) = u_0(x_0) = v_0 = u_0(x_1) = v_1,$$

ce qui est impossible. On en conclut que (5.5) n'admet pas de solution classique pour cette donnée initiale.

■

On introduit maintenant la notion de solution faible. Nous allons donner cette définition dans un cadre légèrement plus général consistant à supposer que f est localement lipschitzienne (au lieu d'être de classe C^1). On note $Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions localement lipschiziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que si $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction f est alors derivable p.p., sa dérivée est localement bornée et on a $f(c) - f(d) = \int_c^d f'(t)dt$ pour tout $c, d \in \mathbb{R}$.

Définition 5.6 (Solution faible) *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, On appelle solution faible de (5.5) une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} [u(x,t)\varphi_t(x,t) + f(u(x,t))\varphi_x(x,t)]dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0)dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \quad (5.10)$$

Donnons maintenant les liens entre solution classique et solution faible.

Proposition 5.7 *Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

1. *Si u est solution classique de (5.5) (et donc $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) alors u est solution faible de (5.5).*
2. *Si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est solution faible de (5.5) alors $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (au sens où la classe de fonctions u_0 admet un représentant de classe C^1 et est alors identifiée à ce représentant) et u est solution classique de (5.5).*
3. *Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star; x > \sigma t\}$.*
   (a) *On suppose que $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star)$, que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, que la première équation de (5.5) est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ ($i = 1, 2$) et que la condition initiale (de (5.5)) est satisfaite p.p.. Alors u est solution faible de (5.5).*
   (b) *Plus généralement, on suppose que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ ($i = 1, 2$), que la première équation de (5.5) est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ ($i = 1, 2$) et que la condition initiale (de (5.5)) est satisfaite p.p.. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose*
   $$u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x,t) \text{ et } u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x,t),$$
   $$[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t),$$
   $$[f(u)](\sigma t, t) = f(u_+(\sigma t, t)) - f(u_-(\sigma t, t)).$$
   Alors u est solution faible de (5.5) si et seulement si
   $$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.11)$$
   Cette relation s'appelle "relation de Rankine-Hugoniot".

Démonstration

1. Supposons que u est solution classique de (5.5), that is to say de :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Multiplions (5.5) par φ et intégrons sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_x(f(u))(x,t)\varphi(x,t)dtdx = 0.$$

L'application du théorème de Fubini et une intégration par parties donnent alors :

$$-\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt = 0,$$

(car le support de φ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$). On obtient donc bien la relation (5.10), grâce à la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$.

2. Soit u une solution faible de (5.5), qui vérifie de plus $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$. On a donc suffisamment de régularité pour intégrer par parties dans (5.10).

Commençons par prendre φ à support compact dans $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. On a donc $\varphi(x,0) = 0$, et une intégration par parties dans (5.10) donne :

$$-\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_x(f(u))(x,t)\varphi(x,t)dxdt = 0.$$

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\partial_t u(x,t) + \partial_x(f(u))(x,t))\,\varphi(x,t)dtdx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}\times]0,+\infty[).$$

Comme $\partial_t u + \partial_x(f(u))$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star$, on en déduit que $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$. En effet, on rappelle que si $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$ et $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} h(x,t))\varphi(x,t)dtdx = 0$ pour toute fonction φ appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$, alors $f = 0$ p.p. ; si de plus h est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, alors $f = 0$ partout sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

On prend alors $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, une intégration par parties dans (5.10) donne

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\partial_t u(x,t) + \partial_x(f(u))(x,t))\,\varphi(x,t)dtdx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0)dx = 0.$$

Mais on vient de montrer que $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x,0))\varphi(x,0)dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times R_+).$$

Ceci donne $u_0 = u(\cdot,0)$ p.p.. Comme u est continue, on a donc u_0 continue (au sens où on identifie u_0 et $u(\cdot,0)$) et u est solution classique de (5.5).

3. On montre directement l'item (b) (qui contient l'item (a)). On suppose que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ $(i = 1,2)$, que la première équation de (5.5) est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ $(i = 1,2)$ et que la condition initiale (de

(5.5)) est satisfaite p.p. sur $\mathbb{R}$. Nous allons montrer que u est solution faible de (5.5) si et seulement si (5.11) est vérifiée. Pour cela, on pose

$$X = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt.$$

On a donc $X = X_1 + X_2$, avec

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx \text{ et } X_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (f(u))(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt.$$

Calculons X_1. Comme u n'est de classe C^1 que sur chacun des domaines D_i, on n'a pas le droit d'intégrer par parties sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ entier. On va donc décomposer l'intégrale sur D_1 et D_2 ; supposons par exemple $\sigma < 0$, voir figure 5.2. (Le cas $\sigma > 0$ se traite de façon similaire et le cas $\sigma = 0$ est plutôt plus simple). On a alors $D_1 = \{(x,t); x \in \mathbb{R}_- \text{ et } 0 < t < \frac{x}{\sigma}\}$ et $D_2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cup \{(x,t); x \in \mathbb{R}_- \text{ et } \frac{x}{\sigma} < t < +\infty\}$.

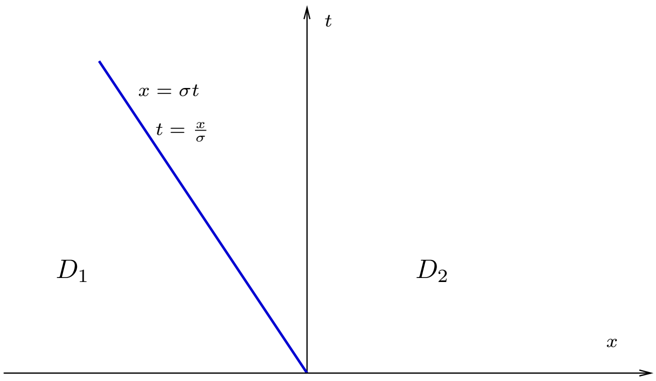

FIGURE 5.2 – Les domaines D_1 et D_2

On a donc :

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{x/\sigma} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx + \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx.$$

Comme u est de classe C^1 sur chacun des domaines, on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} X_1 = \int_{\mathbb{R}_-} u_-(x,\frac{x}{\sigma})\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx - \int_{\mathbb{R}_-} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{\frac{x}{\sigma}} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\ - \int_{\mathbb{R}_-} u_+(x,\frac{x}{\sigma})\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\ - \int_{\mathbb{R}_+} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx. \end{aligned} \tag{5.12}$$

En regroupant, il vient :

$$\begin{aligned} X_1 = -\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int\int_{D_1} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx - \int\int_{D_2} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\ - \int_{\mathbb{R}_-} [u](x,\frac{x}{\sigma})\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx. \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, on effectue le changement de varaible $t = x/\sigma$. On obtient

$$X_1 = -\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int\int_{D_1} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx - \int\int_{D_2} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx + \sigma\int_{\mathbb{R}_+} [u](\sigma t,t)\varphi(\sigma t,t)dt.$$

On décompose de même X_2 sur $D_1 \cup D_2$, en remarquant maintenant que $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star; x > \sigma t\}$:

$$X_2 = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{-\infty}^{\sigma t} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\sigma t}^{+\infty} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt.$$

La fonction u est de classe C^1 sur chacun des domaines, on peut là encore intégrer par parties. Comme φ est à support compact sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$X_2 = -\int\int_{D_1} (f(u))_x(x,t)\varphi(x,t)dxdt - \int\int_{D_2} (f(u))_x(x,t)\varphi(x,t)dxdt - \int_{\mathbb{R}_+} [f(u)](\sigma t,t)\varphi(\sigma t,t)dt.$$

Comme $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$ sur D_1 et D_2, on a donc :

$$X = X_1 + X_2 = -\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx + \int_{\mathbb{R}_+} (\sigma[u](\sigma t,t) - [f(u)](\sigma t,t))\varphi(\sigma t,t)dt.$$

On en déduit bien que u est solution faible de (5.5) si et seulement si (5.11) est vérifiée.

■

Notons qu'il existe souvent plusieurs solutions faibles. On a donc besoin d'une notion supplémentaire pour les distinguer. C'est la notion de solution entropique, qui nous permettra d'obtenir l'unicité. Donnons tout d'abord un exemple de non-unicité de la solution faible. Pour cela on va considérer une équation modèle, appelée équation de Burgers, qui s'écrit

$$\partial_t u + \partial_x(u^2) = 0, \tag{5.13}$$

et des données initiales particulières, sous la forme

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g \text{ si } x < 0, \\ u_d \text{ si } x > 0, \end{cases}$$

avec $u_g, u_d \in \mathbb{R}$. Ces données initiales définissent un problème de Cauchy particulier, qu'on appelle problème de Riemann.

Nous considérons maintenant l'exemple simple obtenu avec $u_g = -1$ et $u_d = 1$. Le problème considéré est donc le problème suivant, avec $f(u) = u^2$, $u_g = -1$, $u_d = 1$:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \\ u_0(x) = \begin{cases} u_g \text{ si } x < 0, \\ u_d \text{ si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{5.14}$$

On cherche tout d'abord une solution faible de la forme :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g \text{ si } x < \sigma t, \\ u_d \text{ si } x > \sigma t. \end{cases} \tag{5.15}$$

Cette éventuelle solution est discontinue au travers de la droite d'équation $x = \sigma t$ dans le plan (x, t). On remplace $u(x, t)$ par ces valeurs dans (5.10). D'après la proposition 5.7 on sait que u est solution faible si la condition suivante (condition de Rankine et Hugoniot) est vérifiée :

$$\sigma(u_d - u_g) = (f(u_d) - f(u_g)), \tag{5.16}$$

ce qui avec la condition initiale particulière choisie ici, donne $2\sigma = 1^2 - (-1)^2 = 0$.
Mais on peut trouver d'autres solutions faibles. Si u est solution régulière, on sait que sur les courbes caractéristiques, qui ont pour équation $x(t) = x_0 + f'(u_0(x_0))t$, la fonction u est constante. Comme $f'(u) = 2u$, les courbes caractéristiques sont donc des droites de pente -2 si $x_0 < 0$, et de pente 2 si $x_0 > 0$. Construisons ces caractéristiques sur la figure 5.3 : Dans la zone du milieu, où l'on a représenté un point d'interrogation, on cherche

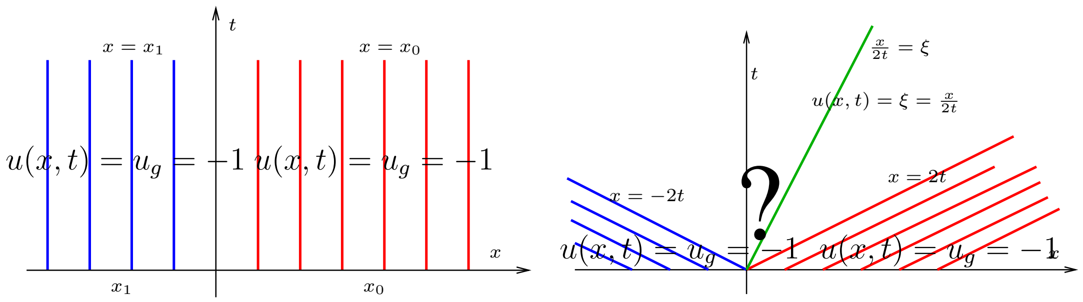

FIGURE 5.3 – Problème de Riemann pour léquation de Burgers

u sous la forme $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$ et telle que u soit continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$. La fonction u suivante convient :

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < -2t, \\ \dfrac{x}{2t} \text{ si } -2t < x < 2t, \\ 1 \text{ si } x > 2t. \end{cases} \tag{5.17}$$

Comment choisir la "bonne" solution faible, entre (5.15) et(5.17) ? Comme les problèmes hyperboliques sont souvent obtenus en négligeant les termes de diffusion dans des équations paraboliques, une technique pour choisir la solution est de chercher la limite du problème de diffusion associé qui s'écrit :

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) - \varepsilon u_{xx} = 0, \tag{5.18}$$

lorsque le terme de diffusion devient négligeable, that is to say lorsque ε tend vers 0. Soit u_ε la solution de (5.18) avec la condition initiale $u_\varepsilon(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$ (on admet pour l'instant l'existence et l'unicité de u_ε). On peut montrer que u_ε tend vers u (en un sens convenable) lorsque ε tend vers 0, où u est la "solution faible entropique" de (5.18), définie comme suit.

Définition 5.8 (Solution entropique) *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. On dit que u est solution faible entropique de* (5.5) *si pour toute fonction η de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe, appelée "entropie", et pour ϕ définie par $\phi(s) = \int_0^s f'(\tau)\eta'(\tau)d\tau$ (pour $s \in \mathbb{R}$), appelé "flux d'entropie", on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u)\varphi_t + \phi(u)\varphi_x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(x, 0)dx \geq 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+). \tag{5.19}$$

On rappelle que si la fonction η (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est convexe, elle est localement lipschitzienne (ce qui permet de remarquer que ϕ est bien définie). Il est intéressant aussi de remarquer que dans la définition 5.8 on peut se limiter à des fonctions η de classe C^2 (il suffit de régulariser η avec une famille de noyaux régularisants pour s'en convaincre). Si f et η sont des fonctions de classe C^1, la fonction ϕ est simplement une fonction de classe C^1 telle que $\phi' = \eta' f'$.
Enfin, bien sûr, si u est solution faible entropique alors u est solution faible (proposition 5.11).

Remarque 5.9 (Condition initiale) Noter que dans la définition 5.8, on prend une fois de plus $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ de manière à bien prendre en compte la condition initiale ; ceci n'est pas toujours fait de cette manière dans les travaux plus anciens sur le sujet. Si la condition initiale est prise en compte seulement dans la définition de solution faible (et n'est pas reprise dans la condition d'entropie), le choix de l'espace fonctionel dans lequel on recherche la solution devient crucial pour ne pas perdre l'unicité de la solution entropique. Un exemple est donné dans l'exercice 5.10. On peut toutefois préciser en quel sens la condition initiale est satisfaite. Si u est solution entropique, alors $u \in C([0, +\infty[, L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}))$ et $u(t) \to u_0$ dans $L^1_{\rm loc}$ quand $t \to 0$.

Nous démontrerons plus loin le théorème 5.19 dans le cadre multidimensionnel (mais avec la variable spatiale dans un domaine borné plutôt que dans tout l'espace). Ce théorème affirme que si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors il existe une unique solution entropique de (5.5) au sens de la définition 5.8. Voyons maintenant les liens entre solution classique, solution faible et solution entropique.

Proposition 5.10 *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si u est solution classique de* (5.5)*, alors u est solution (faible) entropique.*

Démonstration Soit u une solution classique de (5.5). Soit $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ (la convexité de η est inutile ici) et ϕ tel que $\phi' = f'\eta'$ (ϕ est la fonction flux associée à η). Multiplions (5.5) par $\eta'(u)$:

$$\eta'(u)\partial_t u + f'(u)\partial_x u \eta'(u) = 0$$

Soit encore, puisque $\phi' = f'\eta'$,

$$(\eta(u))_t + \phi'(u)u_x = 0$$

On a donc finalement :

$$(\eta(u))_t + (\phi(u))_x = 0 \tag{5.20}$$

De plus, comme $u(x, 0) = u_0(x)$, on a aussi : $\eta(u(x, 0)) = \eta(u_0(x))$. Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on multiplie (5.20) par φ, on intègre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et on obtient (5.19) (avec égalité) en intégrant par parties. Dans le cas d'une solution classique, l'inégalité d'entropie est une égalité. ■

Une solution faible entropique est solution faible :

Proposition 5.11 *Soit $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Si u est solution faible entropique de* (5.5)*, alors u est solution faible de* (5.5)*.*

Démonstration Il suffit de prendre $\eta(u) = u$ et $\eta(u) = -u$ dans (5.19) pour se convaincre du résultat. ■

On déduit de la proposition 5.10 et du théorème 5.19 de Kruskov que si on a plusieurs solutions faibles au problème (5.5) et que l'une d'entre elles est régulière, alors cette dernière est forcément la solution entropique. La caractérisation suivante, que l'on admettra, est souvent utilisée en pratique :

Proposition 5.12 (Entropies de Kruskov) *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. La fonction u est solution entropique de* (5.5) *(au sens de la définition 5.8) si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$* (5.19) *est vérifiée avec η définie par $\eta(s) = |s - k|$, et ϕ, flux d'entropie associé, défini par :*

$$\phi(u) = f(\max(u, k)) - f(\min(u, k)).$$

Notons que la fonction η, dite "entropie de Kruskov", n'est pas de classe C^1.

Nous examinons maintenant le cas particulier des solutions ayant une ligne de discontinuité, comme dans la dernière partie de la proposition 5.7.

Proposition 5.13 *Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star; x > \sigma t\}$. On suppose que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$, que la première équation de* (5.5) *est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ $(i = 1, 2)$ et que la condition initiale (de* (5.5)*) est satisfaite p.p.. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose*

$$u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x,t) \text{ et } u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x,t),$$

$$[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t),$$

$$[f(u)](\sigma t, t) = f(u_+(\sigma t, t)) - f(u_-(\sigma t, t)).$$

Alors u est solution faible entropique de (5.5) *si et seulement si*

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \tag{5.21}$$

et, pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexe et $\phi \in C^1$ telle que $\phi' = f'\eta'$,

$$\sigma[\eta(u)](\sigma t, t) \geq [\phi(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.22}$$

Démonstration La proposition 5.7 montre que u est solution faible si et seulement si (5.21) est satisfaite. En reprenant la démonstration de la proposition 5.7, on montre que u est solution faible entropique si et seulement si (5.21) et (5.22) sont satisfaites. Ceci fait l'objet de la première question de l'exercice 5.11. ■

Dans le cas où la fonction f est strictement convexe, la proposition 5.13 peut être précisée. Ceci est fait dans la proposition 5.14.

Proposition 5.14 *Sous les hypothèses de la proposition 5.13, on suppose que u est solution faible de* (5.5)*. On suppose de plus que f est strictement convexe, les trois conditions suivantes sont alors équivalentes :*

1. u est solution faible entropique,

2. $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

3. il existe η strictement convexe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) t.q. (5.22) est vérifiée (avec ϕ telle que $\phi' = f'\eta'$).

Démonstration

This proposition is a consequence of Lemma 5.15 below. We first prove the equivalence between items 1 and 2.

If u is a weak entropy solution, one has (5.22) for all t and all convex C^1-function η. Taking for η a stritly convex function, Lemma 5.15 gives necessarily, thanks to the fact that f is also strictly convex, $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ for $t \in \mathbb{R}^+$.

Reciprocally, if u satifies $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ for $t \in \mathbb{R}^+$, then Lemma 5.15 gives (5.22) for all t and all convex C^1-function η (and this is also true if f is only a convex function). This concludes the equivalence between items 1 and 2.

In order to conclude the proof of Proposition 5.14, we remark that, of course, item 1 implies item 3. Reciprocally, if u satisfies item 3, Lemma 5.15 gives necessarily, thanks to the fact that f is also strictly convex, that $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ for $t \in \mathbb{R}^+$. Then u is a weak entropy solution. ■

Lemme 5.15

Let f and η be two convex functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Let $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, and $\sigma = (f(b) - f(a))/(b - a)$. Let ϕ be defined by $\phi(s) = \int_0^s \eta'(t) f'(t) dt$ for $s \in \mathbb{R}$ (so that $\phi' = \eta' f'$ a.e. on $\mathbb{R}$). Then,

1. $\sigma(\eta(b) - \eta(a)) \leq (\phi(b) - \phi(a))$, *2. if η is strictly convex and f is convex and non affine between a and b, then $\sigma(\eta(b)-\eta(a)) < (\phi(b)-\phi(a))$.*

Démonstration We first recall that if φ is a convex function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, then it is a locally Lipschitz continuous function. Therefore it is a.e derivable, its derivative is locally bounded and $\varphi(\alpha)-\varphi(\beta) = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)dt$ for all $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Then, one has, for any $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$(\phi(b)-\phi(a)) - \sigma(\eta(b)-\eta(a)) = \int_a^b \eta'(t)(f'(t)-\sigma)dt = \int_a^b (\eta'(t)-\gamma)(f'(t)-\sigma)dt \qquad (5.23)$$

Since f is convex, the function f' is nondecreasing. Since σ is the mean value of f' on $]a,b[$, there exists $c \in]a,b[$ such that

$$f'(t) \le \sigma \text{ for a.e. } t \in]a,c[, \qquad f'(t) \ge \sigma \text{ for a.e. } t \in]c,b[.$$

We now choose $\gamma = \sup\{\eta'(s), s \le c\}$ in (5.23) (so that $\eta'(s) \le \gamma$ if $s \le c$ et $\eta'(s) \ge \gamma$ if $s > c$. Of course, if η' is continuous, one has $\gamma = \eta'(c)$), we obtain

$$(\phi(b)-\phi(a)) - \sigma(\eta(b)-\eta(a)) = \int_a^b (\eta'(t)-\gamma)(f'(t)-\sigma)dt \ge 0,$$

since $(\eta'(t)-\gamma)(f'(t)-\sigma) \ge 0$ for a.e. $t \in]a,b[$. This gives the first item of the lemma.
For the second item, we remark that $\sigma(\eta(b)-\eta(a)) = (\phi(b)-\phi(a))$ gives $(\eta'(t)-\gamma)(f'(t)-\sigma) = 0$ a.e. on $]a,b[$. Since η is strictly convex, one has $(\eta'-\gamma) \neq 0$ a.e. on $]a,b[$. Then $f' = \sigma$ a.e. on $]a,b[$ and this gives that f is affine on $]a,b[$ in contradiction with the hypothesis. ■

Remarque 5.16 The proposition 5.14 is false is one replaces the hypothesis "f strictly convex" by the weaker hypothesis "f convex". Of course, this is obvious if u_0 takes its values in an interval where f is an affine function but this is also the case for more general u_0. We first give here an example which appears in some papers concerning the modelling of road traffic. Then, we slightly adapt this example in order to be exactly in the hypotheses of Proposition 5.14.
Let $\alpha > 0$, $\beta < 0$ and $a = -\beta/(\alpha-\beta)$ (note that $a \in]0,1[$ and $a\alpha = \beta(a-1)$). One defines f by $f(s) = \alpha s$ for $s \in [0,a]$, $f(s) = \beta(s-1)$ $s \in]a,1[$. Let $u_g \in]a,1[$ and $u_d \in]0,a[$ and $u_0 = u_g$ in $\mathbb{R}_-$, $u_0 = u_d$ in $\mathbb{R}_+$. In this case, it is quite easy to prove that the weak entropy solution of (5.5) is the function u defined by

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_g \ \text{ if } \ x < \beta t, \\ u(x,t) &= a \ \text{ if } \ \beta t < x < \alpha t, \\ u(x,t) &= u_d \ \text{ if } x > \alpha t. \end{aligned}$$

Since $u_g > a$ (and also $a > u_d$) and since f is concave, this solution seems in contradiction with Proposition 5.14. In this example, the function f is Lipschitz continuous and the solution has two lines of discontinuities. We can modify slightly this example in order to have a C^1 function f and only one discontinuity. One takes $a = 1/2$ and $f(s) = \alpha s$ for $s \in [0,a]$, $f(s) = \beta s - \gamma s^2 + \delta$ with $\alpha = \gamma = 4/3$, $\beta = 8/3$, $\delta = -1/3$. The function f is of class C^1, strictly concave on $[a,1]$, affine on $[0,a]$. As before, one take $u_g \in]a,1[$ and $u_d \in]0,a[$ and $u_0 = u_g$ in $\mathbb{R}_-$, $u_0 = u_d$ in $\mathbb{R}_+$. Then the weak entropy solution of (5.5) is the function u defined by (since $f'(a) = \alpha$)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_g \ \text{ if } \ x < f'(u_g)t, \\ u(x,t) &= \xi \ \text{ if } \ f'(u_g)t < x < f'(a)t \ \text{ and } \ f'(\xi) = \frac{x}{t}, \ \xi \in]a, u_g[, \\ u(x,t) &= u_d \ \text{ if } x > f'(a)t = \alpha t. \end{aligned}$$

Here also, since $a > u_d$ and f is concave, this solution seems in contradiction with Proposition 5.14.

Remarquons que les solutions d'une équation hyperbolique non linéaire respectent les bornes de la solution initiale.

Proposition 5.17 (Maximum principle) *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ and let A and $B \in \mathbb{R}$ such that $A \le u_0 \le B$ a.e.. Let $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, then the entropy weak solution $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ of Problem* (5.5) *satisfies : $A \le u(x) \le B$ a.e. in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.*

This property may be proven by passing to the limit either on the solutions of the associated viscous equation, or on numerical solutions approximated ; in this latter case, special care must be paid to develop a scheme which respects the bounds ; besides, it is desirable that the approximate solutions indeed satisfy the physical bounds.

Remarque 5.18 (Domaine borné) Que faire si le domaine spatial est différent de $\mathbb{R}$, par exemple si le problème (5.5) est posé pour $x \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f' ne change pas de signe, il est assez facile de donner une bonne définition de solution entropique et de montrer un théorème d'existence et d'unicité de la solution entropique. Dans le cas où f' change de signe (et ce cas est très intéressant pour de nombreux problèmes), le problème est beaucoup plus difficile. Le premier résultat sur la question est celui de Bardos-Leroux-Nedelec (1979). Dans la thése de Otto (1996), il y a une très jolie formulation pour les conditions aux limites. Un intérêt considérable de cette formulation est qu'elle est très pratique pour montrer la convergence des schémas numériques. Dans le cas multidimensionnel de la section suivante, on s'intéressera à un problème similaire à (5.5) posé dans un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ mais sans aborder vraiment ce délicat problème des conditions aux limites (car dans le théorème 5.19 on considère un champ de vecteurs $\boldsymbol{b}$ nul sur le bord du domaine considéré).

On termine ce paragraphe en introduisant les notions de "discontinuité de contact", "onde de choc" et "onde de détente". Si f est linéaire (ou affine, ce qui revient au même car on peut supposer $f(0) = 0$) et si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, la solution faible de (5.5) est unique (voir l'exercice 5.2), c'est donc la solution entropique. On peut aussi montrer dans ce cas que les inégalités d'entropie (5.19) sont des égalités. Si la solution u a une courbe de discontinuité (nécessairement une demi droite en fait), on parle alors de "discontinuité de contact". Si f est strictement convexe et que la solution faible entropique u de (5.5) a une courbe de discontinuité, on parle d'un "choc" ou d'une "onde de choc". On peut montrer dans ce cas que les inégalités d'entropie (5.19) sont strictes pour certains η et φ. Si u_0 a une discontinuité en un point mais que cette discontinuité ne se propage pas dans la solution faible entropique, on parle d'une "détente" ou d'une "onde de détente".

5.2 Cas multidimensionnel

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, $T > 0$, $\boldsymbol{b} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])^N$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (mais on pourrait aussi considérer le cas $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). On étudie maintenant le problème suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}(\boldsymbol{b} f(u)) &= 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Plus précisément, nous allons démontrer, avec des hypothèses convenables sur les données, le théorème d'existence et d'unicité des solutions entropiques de ce problème.

Théorème 5.19 (Kruskov,1955) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ à frontière lipschitzienne. Soit $T > 0$ et $\boldsymbol{b} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])^N$ t.q. $\boldsymbol{b} = 0$ sur $\partial\Omega \times [0, T]$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{b} = 0$ dans $\Omega \times [0, T]$. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors, il existe une unique solution entropique de* (5.24)*, that is to say solution de*

$$
\begin{aligned}
& u \in L^\infty(\Omega\times]0,T[),\\
& \int_0^T \int_\Omega (\eta(u)\varphi_t + \Phi(u)\ \boldsymbol{b}\cdot\nabla\varphi)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_\Omega \eta(u_0(x))\varphi(x,0)\ \mathrm{d}x \geq 0,\\
& \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega\times[0,T[,\mathbb{R}_+), \forall\eta \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \textit{ convexe et } \Phi \textit{ tel que } \Phi' = \eta' f'.
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

De plus, si $A \leq 0$ et $B \geq 0$ sont t.q. $A \leq u_0 \leq B$ p.p. sur Ω, on a alors $A \leq u \leq B$ p.p. sur $\Omega\times]0,T[$.

Démonstration
Etape 1 Construction d'une solution approchée. Soit $u^{(n)}$ solution de

$$
\begin{aligned}
& u^{(n)} \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)),\\
& \qquad -\int_0^T\!\!\int_\Omega u^{(n)}\varphi_t\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t - \int_0^T\!\!\int_\Omega \boldsymbol{b}f(u^{(n)})\cdot\nabla\varphi\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int\int \nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\\
& \qquad\qquad - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\ \mathrm{d}x = 0, \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega\times[0,+\infty[).
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

On connait l'existence et l'unicite de $u^{(n)}$ par le chapitre 4. On a vu aussi au chapitre 4 que cette formulation est équivalente au problème suivant :

$$
\begin{aligned}
& u^{(n)} \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \partial_t u^{(n)} \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)), u^{(n)}(0) = u_0,\\
& \qquad \int_0^T \langle\partial_t u^{(n)}, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\ \mathrm{d}t - \int_0^T\!\!\int_\Omega \boldsymbol{b}f(u^{(n)})\cdot\nabla v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int_0^T\!\!\int_\Omega \nabla u^{(n)}\cdot\nabla v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = 0,\\
& \qquad\qquad \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)).
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

On va se servir fortement de cette équivalence.

Etape 2 Estimations sur la solution approchée.
Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ il existe A et $B \in \mathbb{R}$, $A \leq 0 \leq B$, tels que $A \leq u_0 \leq B$ p.p. (A et B sont donc indépendants de n). On en déduit par les résultats du chapitre 4 que pour tout $t \in [0,T]$, $A \leq u^{(n)} \leq B$ p.p.. La suite$(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$.
On prend maintenant $v = u^{(n)}$ dans (5.27). Par des calculs vu au chapitre 4, on a :

$$
\frac{1}{2}\left(\|u^{(n)}(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u^{(n)}|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = 0.
$$

On en déduit que

$$
\frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u^{(n)}|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty \tag{5.28}
$$

ce qui donne une estimation $L^2(\Omega\times\ ]0,T[)^d$ sur $(\frac{1}{\sqrt{n}}\nabla u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Cette estimation ne donne rien pour la compacité, mais elle est utile pour passer à la limite (quand $n\to+\infty$).
Grâce à la première estimation (l'estimation de u_n dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$), après extraction d'une sous suite, on peut supposer que $u^{(n)} \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\Omega\ \times]0,T[)$.
Si $f(u) = u$, on montre assez facilement que u est solution faible de (5.24) (that is to say solution de 5.25 avec seulement $\eta(s) = s$ mais avec tout φ dans $C_c^\infty(\Omega\times[0,T[,\mathbb{R})$ et avec $=$ au lieu de $\geq$). Puis on peut montrer

(un peu moins facilement) que u est solution de (5.25) et cela termine la partie “existence” du théorème 5.19. Si la fonction f' est non constante, la situation est beaucoup plus difficile, même pour montrer seulement que u est solution faible de (5.24), car la convergence de $u^{(n)}$ vers u n'est que faible et donc on ne sait pas si $f(u^{(n)})$ tend vers $f(u)$ (et, plus généralement, on ne sait pas si $\eta(u^{(n)})$ tend vers $\eta(u)$ et $\phi(u^{(n)})$ tend vers $\phi(u)$). Pour résoudre cette difficulté, deux méthodes ont été développées.

Une premiére méthode, due à Kruskov, suppose, dans un premier temps, que la donnée initiale u_0 appartient à l'espace $BV(\overline{\Omega})$. Par définition,

$$|u_0|_{BV(\bar{\Omega})} = \sup\{\int_\Omega u_0 \mathrm{div}\varphi \,\mathrm{d}x, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\}.$$

On démontre alors que la suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\overline{\Omega} \times [0,T])$. L'idée, pour montrer cette borne sur $u^{(n)}$ est de dériver la première équation de (5.24) par rapport à x_i et de multiplier par $\mathrm{sign}(\partial_i u)$. Grâce à cette estimation sur $u^{(n)}$, on peut appliquer ensuite le théorème de Helly donné ci après.

Théorème 5.20 (Helly) *Soit $d \geq 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^1(Q)$ et bornée dans $BV(Q)$ où Q est un compact de $\mathbb{R}^d$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $L^1(Q)$.*

On applique donc le théorème de Helly avec $Q = \bar{\Omega} \times [0,T]$ (et $d = N+1$). Puisque $u^{(n)} \to u$ dans $L^1(Q)$, à une sous suite près, on a $u^{(n)} \to u$ dans $L^p(Q)$ pour tout $p < +\infty$ et on peut aussi supposer (toujours après extraction éventuelle d'une sous suite) que $u^{(n)} \to u$ p.p.. On peut alors montrer que u est solution de (5.25) (ce qu'on fera a l'étape 3 plus loin), ce qui donne l'existence d'une solution à (5.25) si $u_0 \in BV(\bar{\Omega})$. Si u_0 n'est que dans $L^\infty(\Omega)$ (et c'est probablment ici l'apport majeur de Kruskov), on peut approcher u_0 par une suite d'éléments de $L^\infty(\Omega) \cap BV(\bar{\Omega})$ et montrer que la suite des solutions entropiques associées converge (en un sens convenable, après extraction d'une sous suite) vers une solution entropique associée à u_0. On peut également montrer l'unicité de la solution de (5.25) (étape 4 ci après). L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne semble pas marcher pour montrer la convergence des schémas numériques car même si la condition initiale est supposée être dans $BV(\bar{\Omega})$, la solution approchée obtenue par un schéma numérique n'est pas bornée dans $BV(\bar{\Omega} \times [0,T])$ indépendamment des paramètres de discrétisation (sauf dans le cas des maillages cartésiens).
C'est pour cela qu'on peut lui préférer la deuxième méthode, qui ne passe pas par l'estimation BV. On prend uniquement u_0 dans $L^\infty(\Omega)$, et on ne cherche pas à montrer directement une compacité forte de la suite $u^{(n)}$ dans $L^1(\Omega\times]0,T[)$. Grâce à l'estimation de $u^{(n)}$ dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$, on montre que (après extraction d'une sous suite) $u^{(n)} \to \tilde{u}$, en un sens convenable, où $\tilde{u}$ dépend d'une variable supplémentaire. (Il s'agit donc d'un théorème de compacité un peu inhabituel donnant une convergence que nous appelons “convergence non linéaire faible-$\star$”). Puis, on montre que $\tilde{u}$ est une solution du problème en un sens plus général que (5.25), que nous appelons “sens processus”. Cette preuve est très voisine de celle de l'étape 3 ci après. On démontre ensuite l'unicité de la solution au sens processus et que la solution processus est solution entropique (that is to say solution de (5.25)). Cette preuve d'unicité est très voisine de celle donnée dans l'étape 4 ci après. Ceci termine la démonstration de l'existence d'une solution à (5.25) (directement avec u_0 dans $L^\infty(\Omega)$). (L'unicité est toujours donnée par l'étape 4.) Un sous produit de cette démonstration est la convergence (forte) de $u^{(n)}$ vers u dans tout les espaces $L^p(\Omega\times]0,T[)$, $p < +\infty$, y compris si f est linéaire (ou est linéaire sur des intervalles de $\mathbb{R}$). L'idée essentielle a donc été de remplacer le théorème de compacité (forte) de Helly par un théorème de compacité plus faible combiné avec un résulat d'unicité de la solution “au sens processus” de (5.24).
Etape 3. On reprend ici la méthode 1, et on va effectuer le passage à la limite, quand $n \to +\infty$, en supposant que $u_0 \in BV$ et donc que $u^{(n)} \to u$ p.p. (pour une sous suite). On admet donc la partie “estimation BV de $u^{(n)}$”.

1. Montrons que u est solution faible. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,+\infty[)$, on a

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega (u^{(n)}\varphi_t + \boldsymbol{b} f(u^{(n)}) \cdot \nabla\varphi) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0) \,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_0^T\!\!\int_\Omega \nabla u^{(n)} \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = 0$$

On remarque tout d'abord que le dernier terme du membre de gauche tend vers 0, grâce à l'estimation (5.28) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en effet

$$|\frac{1}{n}\int_0^T\!\!\int_\Omega \nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi dxdt| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|\frac{1}{\sqrt{n}}\,|\nabla u^{(n)}|\,\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\|\,|\nabla\varphi|\,\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}$$

et $\|\frac{1}{\sqrt{n}}|\nabla u^{(n)}|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq (1/\sqrt{2})\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ par (5.28) et donc $\frac{1}{n}\int\int\nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\to 0$ lorsque $n\to 0$. Les autres termes convergent par convergence dominée, et donc en passant à la limite, on obtient

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega (u\varphi_t + \boldsymbol{b}f(u)\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5.29}$$

2. Montrons que u est solution entropique. Comme $u^{(n)}$ est solution faible de

$$u_t^{(n)} + \mathrm{div}(\boldsymbol{b}f(u^{(n)})) - \frac{1}{n}\Delta u^{(n)} = 0, \tag{5.30}$$

on peut montrer (on l'admettra) que $u^{(n)}\in C^2(\Omega\times]0,T[)$ (c'est ce que l'on appelle l'effet régularisant pour une équation parabolique). La fonction $u^{(n)}$ est donc solution classique de (5.30). On peut alors mutiplier cette équation par $\eta'(u^{(n)})$ avec $\eta\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convexe. On obtient, sur $\Omega\times]0,T[$,

$$(\eta(u^{(n)}))_t + \boldsymbol{b}f'(u^{(n)})\eta'(u^{(n)})\cdot\nabla u_n - \frac{1}{n}\eta'(u^{(n)})\Delta u^{(n)} = 0.$$

On en déduit :

$$(\eta(u^{(n)}))_t + \boldsymbol{b}\cdot\nabla(\Phi(u^{(n)}) - \frac{1}{n}\mathrm{div}(\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)}) + \frac{1}{n}\eta''(u^{(n)})|\nabla u^{(n)}|^2 = 0.$$

Mais $\frac{1}{n}\eta''(u^{(n)})|\nabla u^{(n)}|^2\geq 0$, on a donc

$$(\eta(u^{(n)}))_t + \boldsymbol{b}\cdot\nabla(\Phi(u^{(n)}) - \frac{1}{n}\mathrm{div}(\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)})) \leq 0.$$

En multipliant cette équation par φ, avec $\varphi\in C_c^\infty(\Omega\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$, on obtient, toujours sur $\Omega\times]0,T[$,

$$\varphi(\eta(u^{(n)}))_t + \varphi\boldsymbol{b}\cdot\nabla(\Phi(u^{(n)}) - \frac{1}{n}\varphi\mathrm{div}(\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)})) \leq 0$$

On intègre sur $[\varepsilon,T[\times\Omega$ avec $\varepsilon>0$ et, après intégration par parties, on obtient :

$$-\int_\varepsilon^T\!\!\int_\Omega(\eta(u^{(n)}))\varphi_t - \int_\Omega\eta(u^{(n)}(\varepsilon))\varphi(x,\epsilon)\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^T\!\!\int_\Omega\big(\boldsymbol{b}\Phi(u^{(n)})\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{n}\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq 0.$$

Mais on a, quand $\varepsilon\to 0$, $u^{(n)}(\varepsilon)\to u^{(n)}(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$ et $\eta(u^{(n)}(\varepsilon))\to\eta(u_0)$ dans $L^2(\Omega)$ et donc

$$-\int_0^T\!\!\int_\Omega(\eta(u^{(n)}))\varphi_t - \int_\Omega\eta(u_0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x - \int_0^T\!\!\int_\Omega\big(\boldsymbol{b}\Phi(u^{(n)})\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{n}\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq 0.$$

Lorsque $n\to\infty$, on a $\eta(u^{(n)})\to\eta(u)$ et $\Phi(u^{(n)})\to\Phi(u)$ dans $L^2(\Omega\times]0,T[)$ et, avec $C_{\eta,A,B} = \max\{|\eta'(s)|, A\leq s\leq B\}$,

$$|\frac{1}{n}\int_0^T\!\!\int_\Omega \eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x dt| \le C_{\eta,A,B}\frac{1}{\sqrt{n}}\|\frac{1}{\sqrt{n}}|\nabla u^{(n)}|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\||\nabla\varphi|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \to 0$$

lorsque $n\to+\infty$.
On obtient ainsi, finalement,

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega (\eta(u))\varphi_t + \boldsymbol{b}\cdot\Phi(u^{(n)})\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \eta(u_0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \ge 0$$

pour tout $\varphi\in C_c^\infty(\Omega\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$, ce qui termine la preuve de l'existence.

Etape 4. Unicité
Soit u une solution de (5.25). On montre tout d'abord que l'on peut prendre $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$ dans (5.25). C'est ici que l'hypothèse $\boldsymbol{b}=0$ sur le bord de Ω est utile.
On constuit une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ et telle que $\varphi_n=1$ sur $K_n=\{x\in\Omega; d(x,\partial\Omega)\ge\frac{1}{n}\}$, $0\le\varphi_n\le 1$ et $|\nabla\varphi_n|\le C_\Omega n$, où C_Ω ne dépend que Ω (la régularité lipschitzienne de Ω est importante ici). Soit $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$, On prend alors $\varphi(x,t)\varphi_n(x)$ comme fonction test dans (5.25), on obtient

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega \big(\varphi_n\eta(u)\varphi_t+\varphi_n\Phi(u)\boldsymbol{b}\cdot\nabla\varphi\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \eta(u_0(x))\varphi_n(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x + \int_0^T\!\!\int_\Omega \boldsymbol{b}\Phi(u)\varphi\cdot\nabla\varphi_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \ge 0.$$

Les premiers termes convergent par convergence dominée. Appelons R_n le dernier terme. On va montrer sa convergence assez facilement grâce au fait qu'on a suppose b nul sur le bord.

$$R_n=\int_0^T\!\!\int_\Omega \boldsymbol{b}\Phi(u)\varphi\cdot\nabla\varphi_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{C_n}\boldsymbol{b}\Phi(u)\varphi\cdot\nabla\varphi_n,$$

où $C_n=\Omega\setminus K_n$. On a donc

$$|R_n|\le T\|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty(C_n)}C_{u,\phi}\|\varphi\|_\infty C_\Omega n\ \mathrm{mes}(C_n),$$

où $C_{u,\phi}=\max\{|\phi(s)|,\, s\in[-\gamma,\gamma]\}$, avec $\gamma=\|u\|_{L^\infty(\Omega\times]0,T[)}$. Comme $\boldsymbol{b}=0$ sur $\partial\Omega\times[0,T]$ (et $\boldsymbol{b}$ continue), on a $\|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty(C_n)}\to 0$ quand $n\to\infty$. Enfin, la suite $(n\ \mathrm{mes}(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On a donc $\lim_{n\to+\infty}R_n=0$ et on obtient donc

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega \eta(u)\varphi_t+\boldsymbol{b}\Phi(u)\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_\Omega\eta(u_0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\ge 0\ \forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}_+),$$

pour tout $\eta\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, η convexe.
Par un procédé de régularisation, il est alors assez facile de montrer que l'hypothèse de régularité sur η (that is to say η de classe C^2) peut être remplacée par l'hypothèse plus faible "η localement lipschitzienne", ce qui a l'intérêt de pouvoir utiliser les entropies de Kruskov.

On peut maintenant montrer l'unicité de la solution de (5.25). Soient u et v deux solutions de (5.25). On va utiliser (5.25) en prenant pour η une entropie de Kruskov et des fonctions $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$ (on vient de montrer que cela est possible). On reprend ici une idée de Kruskov, dite de dédoublement de variables. Elle consiste tout d'abord à choisir, dans (5.25), $k=v(y,s)$ et à prendre $\varphi(x,t)=\psi(t)\rho_n(x-y)\bar\rho_n(t-s)$ avec $\psi\in C_c^\infty([0,T[,\mathbb{R}_+)$, $\rho_n(x)=n^N\rho(nx)$ et $\bar\rho_n(t)=n\bar\rho(nt)$, où ρ et $\bar\rho$ sont des noyaux régularisants, et à intégrer par rapport à y et s. La fonction ρ est à valeurs positives, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$, a son support dans la boule de rayon 1 et son intégrale sur $\mathbb{R}^N$ vaut 1. De même, la fonction $\bar{\rho}$ est à valeurs positives, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, a son support dans la boule de rayon 1 et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. De plus, on choisit $\bar{\rho}$ de manière à ce que son support soit dans $\mathbb{R}_-$. Avec ce choix de fonction test (et n assez grand pour que la fonction test soit admissible dans (5.25)) écrit avec des éléments de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T[, \mathbb{R})$, on obtient :

$$A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n} \geq 0, \tag{5.31}$$

avec

$$A_{1,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |u(x,t) - v(y,s)|\psi'(t)\rho_n(x-y)\bar{\rho}_n(t-s)dxdtdyds,$$

$$A_{2,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |u(x,t) - v(y,s)|\psi(t)\rho_n(x-y)\bar{\rho}'_n(t-s)dxdtdyds,$$

$$A_{3,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega (f(u(x,t)) - f(v(y,s))(sign(u(x,t) - v(y,s))\psi(t)\boldsymbol{b} \cdot \nabla\rho_n(x-y)\bar{\rho}_n(t-s)dxdtdyds,$$

$$A_{4,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega |u_0(x) - v(y,s)|\psi(0)\rho_n(x-y)\bar{\rho}_n(-s)dxdyds.$$

On passe maintenant à limite quand $n \to +\infty$ dans (5.31). Il n'est pas difficile de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} A_{1,n} = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t) - v(x,t))|\psi'(t)dxdt.$$

On montre ensuite que $A_{2,n} + A_{3,n} \leq 0$. Pour cela, on considère la formulation entropique pour v, écrite avec y et s comme variables. On choisit l'entropie de Kruskov associée à $k = u(x,t)$ et $\varphi(y,s) = \psi(t)\rho_n(x-y)\overline{\rho}_n(t-s)$. Enfin, on intègre par rapport à $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |v(y,s) - u(x,t)|\psi(t)\rho_n(x-y)\bar{\rho}'_n(t-s)dydsdxdt$$
$$-\int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega (f(v(y,s)) - f(u(x,t))(sign(v(y,s) - u(x,t))\psi(t)\boldsymbol{b} \cdot \nabla\rho_n(x-y)\bar{\rho}_n(t-s)dydsdxdt \geq 0.$$

Ce qui donne $A_{2,n} + A_{3,n} \leq 0$. On notera que le terme associé à la condition initiale est nul car $\bar{\rho}_n(t) = 0$ si $t \geq 0$.

Il suffit maintenant de montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_{4,n} = 0$ pour conclure en passant à limite dans (5.31) que

$$\int_0^T \int_\Omega |u(x,t) - v(x,t)|\psi'(t)dxdt \geq 0. \tag{5.32}$$

Pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_{4,n} = 0$, on reprend la formulation entropique pour v écrite avec y et s comme variables. On choisit l'entropie de Kruskov associée à $k = u_0(x)$ et $\varphi(y,s) = \psi(0)\rho_n(x-y)\int_s^\infty \overline{\rho}_n(-\tau)d\tau$ (avec n assez grand pour cette fonction test φ soit admissible). Enfin, on intègre par rapport à $x \in \Omega$. On obtient

$$-A_{4,n} - \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega (f(v(y,s)) - f(u_0(x))(sign(v(y,s) - u_0(x))\psi(0)\boldsymbol{b} \cdot \nabla\rho_n(x-y)(\int_s^\infty \bar{\rho}_n(-\tau)d\tau)dydsdx$$
$$+\int_\Omega \int_\Omega |u_0(y) - u_0(x)|\psi(0)\rho_n(x-y)dxdy \geq 0.$$

On a donc

$$0 \leq A_{4,n} \leq A_{5,n} + A_{6,n},$$

avec

$$A_{5,n} = -\int_0^T \int_\Omega \int_\Omega (f(v(y,s)) - f(u_0(x))(sign(v(y,s) - u_0(x))\psi(0)\boldsymbol{b}\cdot\nabla\rho_n(x-y)(\int_s^\infty \bar\rho_n(-\tau)d\tau)dydsdx,$$

$$A_{6,n} = \int_\Omega \int_\Omega |u_0(y) - u_0(x)|\psi(0)\rho_n(x-y)dxdy.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_{5,n} = \lim_{n\to+\infty} A_{6,n} = 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} A_{4,n} = 0$ et, finalement, on obtient (5.32).

On peut maintenant conclure. Soit $0 < \varepsilon < T$. On peut choisir $\psi \in C_c^\infty([0,T[,\mathbb{R}_+)$ t.q. $\psi' < 0$ sur $]0, T-\varepsilon]$. L'inégalité (5.32) donne alors $u = v$ p.p. sur $\Omega\times]0,T-\varepsilon[$. Comme ε est arbitrairement petit, on en conclut que $u = v$ p.p. sur $\Omega\times]0,T[$, ce qui termine la preuve de l'unicité. ■

Remarque 5.21 (Pour le cas où Ω est non borné) Dans la partie "unicité" (Etape 4) de la démonstration précédente, il aurait été possible de prendre un fonction ψ dépendant aussi de x. On aurait alors obtenu

$$\int_0^T\int_\Omega |u-v|\psi_t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega \boldsymbol{b}(f(u) - f(v)\mathrm{sign}(u-v)\cdot\nabla\psi dxdt \geq 0 \;\forall\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}_+). \quad (5.33)$$

Ceci est intéressant pour montrer alors l'unicité dans le cas où l'ouvert Ω est non borné (par exemple, $\Omega = \mathbb{R}^N$) en profitant de la propriété de "propagation à vitesse finie" pour les problèmes hyperboliques. Plus précisément, on prend dans (5.33) $\psi(x,t) = r(t)\varphi_a(|x| + \omega t)$, avec $\omega = L_f\|\boldsymbol{b}\|_\infty$, où L_f est un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle $[-\gamma,\gamma]$ avec $\gamma = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$, $r(t) = (1/T)(T-t)^+$ et $\varphi_a \in C_c^\infty([0,\infty[,\mathbb{R}_+)$, $\varphi_a = 1$ sur $[0,a]$ pour $a > 0$ donné et φ_a décroissante (on peut remarquer qu'un argument simple de régularisation autorise de prendre une telle fonction ψ dans (5.33)). On obtient alors

$$-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|\varphi_a(|x|+\omega t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)\omega\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \boldsymbol{b}(f(u) - f(v))\mathrm{sign}(u-v)r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)\frac{x}{|x|}dxdt \geq 0.$$

Mais,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \boldsymbol{b}(f(u) - f(v)\mathrm{sign}(u-v)r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)\frac{x}{|x|} \leq -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \|\boldsymbol{b}\|L_f|u-v|r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)dxdt$$
$$\leq -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)\omega dxdt,$$

car $\omega = L_f\|\boldsymbol{b}\|$. On a donc

$$-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|\varphi_a(|x|+\omega t)dxdt \geq 0.$$

On en déduit, avec $B_{a,t} = \{x \text{ t.q. } |x| + \omega t \leq a\}$ que $\int_0^T(\int_{B_{a,t}} |u-v|dx)dt = 0$. On fait tendre maintenant a vers $+\infty$. On obtient, par convergence monotone, $\int_0^T\int_\Omega |u-v|dxdt = 0$ et donc $u = v$ p.p. sur $\Omega\times]0,T[$.

Remarque 5.22 (hypothèses sur b)

1. On a utilisé la régularité C^1 de $\boldsymbol{b}$ pour obtenir l'estimation BV sur les solutions approchées. Si on n'utilise pas l'estimation BV, on utilise quand même la régularité C^1 de $\boldsymbol{b}$ pour l'unicité. En fait, on peut remarquer que les démonstrations de l'estimation BV et de l'unicité restent justes dés que $\boldsymbol{b}$ est localement lipschitzienne.
2. On a supposé $\mathrm{div}\boldsymbol{b} = 0$. On pourrait remplacer cette hypothèse par $\mathrm{div}\boldsymbol{b} \in L^\infty$ à condition de supposer que f soit lipschitzienne. On a aussi supposé que $\boldsymbol{b} = 0$ sur $\partial\Omega$ (pour ne pas traiter le cas, difficile, des conditions aux limites) mais on pourrait remplacer cette condition par $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sans grande difficulté supplémentaire. Le problème des conditions aux limites interviendrait si $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n} \neq 0$.

5.3 Exercices

Exercice 5.1 (Système hyperbolique linéaire) *Corrigé en page 210* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})^n$. On suppose A diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on cherche $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)^n$ solution faible du problème suivant :

$$\partial_t u(x,t) + A\partial_x u(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in]0,+\infty[, \tag{5.34a}$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.34b}$$

Soit $\{v_i,\ i \in \{1,\dots,n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A. On a donc $Av_i = \lambda_i v_i$ pour tout $i \in \{i,\dots,n\}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on décompose $u_0(x)$ sur la base $\{v_i,\ i \in \{i,\dots,n\}\}$. On a donc $u_0 = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ p.p. avec $a_i \in L^\infty(\mathbb{R})$ Montrer que u défini presque partout par $u(x,t) = \sum_{i=1}^n a_i(x - \lambda_i t)v_i$ est solution faible de (5.34).

Exercice 5.2 (Uniqueness of the weak solution using the dual problem)
Let $c \in \mathbb{R}$ and $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. One proves here the uniqueness of the weak solution u (in $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$) of the following problem :

$$\partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in]0,+\infty[, \tag{5.35}$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.36}$$

1. Show that we have only to prove uniqueness of the weak solution if $u_0 = 0$ p.p..

We assume now that u is a weak solution of (5.35)-(5.36) with $u_0 = 0$ p.p..

2. Let $\psi \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
   For $x \in \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R}_+$ we set $\varphi(x,t) = -\int_t^{+\infty} \psi(x - c(t-s), s)ds$.
   (a) Prove that $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$ and that $\varphi_t + c\varphi_x = \psi$ in $\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$.
   (b) Prove that $\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\psi(x,t)dxdt = 0$
3. Prove that $u = 0$ p.p..
4. Prove that the weak solution of the system (5.34) in Exercice 5.1 is unique.

Exercice 5.3 (Construction d'une solution faible entropique, I) *Solution on page 5.4 page 212*
On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(u^2) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.37}$$

Construire une solution faible de (5.37) pour u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 5.4 (Non unicité des solutions faibles)
On considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(u^2) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u_g & si\ x < 0 \\ u_d & si\ x > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{5.38}$$

avec $u_g < u_d$.

1. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que si $\begin{cases} u(t,x) = u_g & si\ x < \sigma t \\ u(t,x) = u_d & si\ x > \sigma t \end{cases}$ alors u est solution faible de (5.38). Vérifier que u n'est pas solution entropique de (5.38).
2. Montrer que u définie par :

$$\begin{cases} u(t,x) = u_g & si\ x < 2u_g t \\ u(t,x) = \frac{x}{2t} & si\ 2u_g t \le x \le 2u_d t \\ u(t,x) = u_d & si\ x > 2u_d t \end{cases} \tag{5.39}$$

   alors u est solution faible entropique de (5.38).

Exercice 5.5 (Construction d'une solution faible entropique, II) *Corrigé parge 212*
On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(u^2) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.40}$$

Construire la solution entropique de (5.40) pour u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 5.6 (Problème de Riemann (1))
Soit u_d et u_g des nombres réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

1. On suppose que f est strictement convexe. Calculer la solution entropique du problème de Riemann (5.14) avec données u_d et u_g. Expliciter la solution dans le cas $f(s) = s^4$.
2. On suppose que f est strictement concave. Calculer la solution entropique du problème de Riemann (5.14) avec données u_d et u_g.

Exercice 5.7 (Problème de Riemann (2))
On suppose ici que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ f est convexe puis concave : plus précisément, on considère $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec

(i) $f(0) = 0,\ f'(0) = f'(1) = 0$

(ii) $\exists a \in]0,1[$, tel que f est strictement convexe sur$]0,a[$, f est strictement concave sur $]a,1[$.

On suppose de plus que $u_g = 1$, $u_d = 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique point b de l'intervalle $]a,1[$ tel que $\frac{f(b)}{b} = f'(b)$. Puis, montrer qu'il existe un unique point c de $]0,b[$ tel que $f'(c) = f'(b)$.

On conserve dans la suite cette notation des points b et c.

2. On définit (p.p.) la fonction u de $\mathbb{R} \times R_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} u(x,t) = 1 & si\ x \leq 0 \\ u(x,t) = \xi & si\ x = f'(\xi)t,\ b < \xi < 1 \\ u(x,t) = 0 & si\ x > f'(b)t \end{cases}$$

   Montrer que u est la solution faible entropique de (5.14).
   [Pour montrer que la condition d'entropie, on pourra commencer par remarquer que pour toute fonction η (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) de classe C^1 et convexe, on a $\int_0^b (f'(b) - f'(x))(\eta'(x) - \eta'(c))dx \leq 0$.]

3. Construire la solution entropique du problème de Riemann dans le cas $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \frac{(1-u)^2}{4}}$ et $u_g,\ u_d \in [0,1]$.
   [Compliqué. On distinguera plusieurs cas.)

Exercice 5.8 (Construction d'une solution faible entropique, III) *Corrigé de l'exercice en page 213*
Construire la solution entropique du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(u^2) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $t > 0$ on a bien $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$.

Exercice 5.9 (Construction d'une solution faible entropique, IV)
Construire la solution entropique du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(u^2) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 5.10 (Solution non entropique)
On s'intéresse à l'équation de Burgers.

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x(u^2)(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.41}$$

$$u(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.42}$$

1. (Question de cours...) Donner le sens de "u solution faible de (5.41)-(5.42)" et "u solution entropique de (5.41)-(5.42)".

   On définit u de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$u(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R},\ x < -\sqrt{t}, \tag{5.43}$$

$$u(t,x) = \frac{x}{2t},\ t \in \mathbb{R}_+^\star,\ x \in \mathbb{R},\ -\sqrt{t} < x < \sqrt{t}, \tag{5.44}$$

$$u(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R},\ x > \sqrt{t}. \tag{5.45}$$

2. Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $u^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. (On rappelle qu'une fonction v de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ si $v\mathbf{1}_K \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ pour tout $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = [0, \infty[\times\mathbb{R}$, K compact.)
3. (Solution faible ?) Montrer que u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (u(t,x)\varphi_t(t,x) + u^2(t,x)\varphi_x(t,x))dxdt = 0, \ \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}). \tag{5.46}$$

   En déduire que la fonction u est solution faible de (5.41)-(5.42).
4. (Solution entropique ?) Soit η une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. On définit ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\phi(s) = \int_0^s \eta'(\xi)f'(\xi)d\xi$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Montrer que u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (\eta(u)(t,x)\varphi_t(t,x) + \phi(u)(t,x)\varphi_x(t,x))dxdt \geq 0, \ \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^\star_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+). \tag{5.47}$$

   [On pourra commencer par étudier, grâce à la convexité de η, le signe de $\phi(s) - s\eta(s)$.]
   Montrer que la fonction u n'est pas la solution entropique de (5.41)-(5.42).

N.B. : Dans tout l'exercice, bien distinguer $\mathbb{R}^\star_+$ et $\mathbb{R}_+$ (en particulier distinguer $C^1_c(\mathbb{R}^\star_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Bien justifier dans les 3ème et 4ème questions que les quantités sous le signe $\int$ sont intégrables. La 4ème question montre que $\eta(u)_t + \phi(u)_x \leq 0$ au sens des dérivées par transposition dans $\mathbb{R}^\star_+ \times \mathbb{R}$.

Exercice 5.11 (Flux strictement convexe et entropie) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On s'intéresse ici à la solution entropique du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{5.48}$$

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star_+; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star_+; x > \sigma t\}$. On suppose que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$ et que u est solution faible de (5.48). En particulier, on a donc (voir la proposition 5.7)

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.49}$$

1. Montrer que u est solution entropique de (5.48) si et seulement si

$$\sigma[\eta(u)](\sigma t, t) \geq [\phi(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.50}$$

   pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe et $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\phi' = f'\eta'$.
2. Si f est strictement convexe et u est solution entropique de (5.48), montrer que $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. [On pourra choisir $\eta = f$ dans (5.50).]

On rappelle que $u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x,t)$, $u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x,t)$, $[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t)$ et $[g(u)](\sigma t, t) = g(u_+(\sigma t, t)) - g(u_-(\sigma t, t))$ pour $g = f, \eta$ ou ϕ.

Exercice 5.12 (Effet "Landau") *Solution 5.4 page 216*

Soit f une fonction borélienne bornée et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (pour simplifier, on peut supposer que f est continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On s'intéresse dans cet exercice à la limite quand $t \to +\infty$ de la solution (faible) du problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) = 0, \ x, y \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}^\star_+, \tag{5.51a}$$

$$u(x,y,0) = f(x), \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.51b}$$

1. Donner explicitement en fonction de f l'unique solution faible de (5.51).

   Dans la suite, on note u cette solution faible.
   On remarquera que u est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < \infty$.

   On note aussi m la moyenne de f sur une période. Enfin, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on pose

$$F(y,r) = \frac{1}{2r}\int_{y-r}^{y+r} f(z)dz.$$

2. (Question liminaire) Montrer que $\lim_{r\to+\infty} F(y,r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{b-\delta}^{b+\delta}\int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = 4\delta^2 m.$$

   [On pourra remarquer que $\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x-yt)dy = 2\delta F(x-bt,\delta t)$.]
4. Montrer que $u(\cdot,\cdot,t) \to m$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \to +\infty$.
5. Montrer que le résultat de la question 4 reste vrai si on remplace dans (5.51) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par $a(y)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ où $a \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a'(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. (Plus généralement, ce résultat reste vrai sous l'hypothèse plus faible demandant que l'ensemble des points ou a' s'annule soit de mesure nulle.)

Exercice 5.13 (Principe du maximum et positivité)

Soit v une fonction lipschitzienne et de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $u_0 \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On s'intéresse aux deux problèmes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star,\\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial vu}{\partial x}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star,\\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.53}$$

1. Soit $A, B \in \mathbb{R}$ t.q. $A \le u_0(x) \le B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit u la solution (continue) de (5.52), montrer que $A \le u(x,t) \le B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer (en donnant un exemple) que cette propriété peut être fausse si u est solution de (5.53).
2. On suppose que $u_0(x) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit u la solution (continue) de (5.53), montrer que $u(x,t) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

5.4 Corrigés d'exercices

Corrigé de l'exercice 5.1 page 206 (Système hyperbolique linéaire)

Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)^n$; décomposons u sur la base des vecteurs propres $\{v_i, i \in \{1,\dots,n\}$:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^n u_i(x,t)v_i,\ \text{ et donc } \partial_t u(x,t) = \sum_{i=1}^n \partial_t u_i(x,t)v_i \text{ et } A\partial_x u(x,t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\partial_x u_i(x,t)v_i.$$

On en déduit que $u = \sum_{i=1}^n u_i(x,t)v_i$ est solution faible de (5.34) si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\partial_t u_i(x,t) + \lambda_i \partial_x u_i(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in]0,+\infty[, \tag{5.54a}$$
$$u_i(x,0) = a_i(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.54b}$$

Montrons que la fonction $u_i \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ définie par $u_i(x,t) = a_i(x - \lambda t)$ est une solution faible de (5.54). Remarquons d'abord que si a_i est une fonction régulière, alors u_i ainsi définie est solution classique, donc faible et on a terminé. Maintenant si a_i est seulement L^∞, on a bien $u_i \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ et il nous reste à montrer que pour toute fonction $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, la fonction u_i satisfait :

$$\int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} [u_i(x,t)\partial_t\varphi(x,t) + \lambda_i u_i(x,t)\partial_x\varphi(x,t)]\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} a_i(x)\varphi(x,0)dx = 0.$$

Posons
$$X = \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} [u_i(x,t)\partial_t\varphi(x,t) + \lambda_i u_i(x,t)\partial_x\varphi(x,t)]\, dxdt.$$

Puisque $u_i(x,t) = a_i(x - ct)$, on a donc :

$$X = \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} [u_0(x-ct)\partial_t\varphi(x,t) + cu_0(x-ct)\partial_x\varphi(x,t)]\, dxdt.$$

En appliquant le changement de variable $y = x - \lambda_i t$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$X = \int_{\mathbb{R}} a_i(y) \int_{\mathbb{R}_+} [\partial_t\varphi(y + \lambda_i t, t) + \lambda_i \partial_x\varphi(y + \lambda_i t, t)]\, dtdy.$$

Posons alors
$$\psi_y(t) = \varphi(y + \lambda_i t, t).$$

On a donc :
$$X = \int_{\mathbb{R}} \left(a_i(y) \int_0^{+\infty} \psi_y'(t)dt \right) dy,$$

et comme ψ est à support compact sur $[0, +\infty[$, on a

$$X = -\int_{\mathbb{R}} a_i(y)\psi_y(0)dy = -\int_{\mathbb{R}} a_i(y)\varphi(y,0)dy.$$

On a ainsi démontré que la fonction u définie par $u(x,t) = a_i(x - \lambda_i t)$ est solution faible de l'équation (5.54). On en déduit que la fonction $u : (x,t) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i(x - \lambda_i t)$ est solution faible du système (5.34).

Corrigé de l'exercice 5.2 page 206 (Unicité de la solution faible du problème linéaire par dualité)

1. Soient u_1 et u_2 des solutions faibles de (**??**), alors $u_1 - u_2$ est solution faible de (**??**) avec $u_0 = 0$; on en déduit qu'il est équivalent de montrer qu'il existe une unique solution à (**??**) que de montrer que la fonction nulle est l'unique solution faible de (**??**) avec $u_0 = 0$.
2. (a) Montrer que $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ and that $\varphi_t + c\varphi_x = \psi$ in $\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$.

Corrigé de l'exercice 5.3 (Construction d'une solution faible entropique, I)

Pour $0 < t < 1/2$, la solution est continue et on peut la trouver en construisant les courbes caractéristiques, comme indiqué sur la figure 5.4. En $t = 1/2$, certaines courbes caractéristiques se rencontrent (au point $x = 1$) ; une discontinuité apparaît et se propage à une vitesse conforme à la relation de Rankine Hugoniot. Ceci nous permet de construire la solution $u(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times R_+$ de la manière suivante. On pose :

$$u(x,t) = 1 \qquad \text{si } (x,t) \in D_1 = \{(x,t), 0 < t \leq \frac{1}{2}, x < 2t\} \cup \{(x,t), t > \frac{1}{2}, x < t + \frac{1}{2}\}, \tag{5.55}$$

$$u(x,t) = \frac{1-x}{1-2t} \qquad \text{si } (x,t) \in D_2 = \{(x,t), 0 < t < \frac{1}{2}, 2t < x < 1\}, \tag{5.56}$$

$$u(x,t) = 0 \qquad \text{si } (x,t) \in D_3 = \{(x,t), 0 < t \leq \frac{1}{2}, 1 < x\} \cup \{(x,t), t > \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} < x\}. \tag{5.57}$$

La fonction u est bien solution faible de (5.37). Cette solution est même entropique (voir la proposition 5.14).

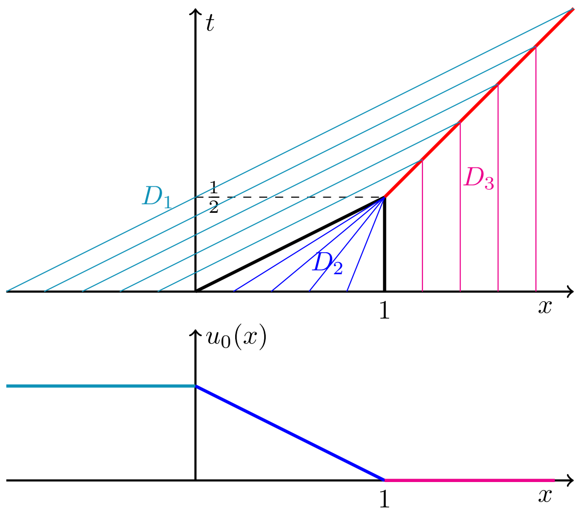

FIGURE 5.4 – En haut : Droites caractéristiques pour l'équation de Burgers avec condition initiale u_0 ; en rouge la ligne de choc, en noir les lignes de discontinuité C^1. – En bas : allure de la condition initiale u_0.

Corrigé de l'exercice 5.5 (Construction d'une solution faible entropique, II)

Pour $0 < t < 1/2$, la solution est continue et on peut la trouver en construisant les courbes caractéristiques, voir Figure 5.4.

Elle correspond à deux détentes prenant leur origine aux points $x = 0$ et $x = 1$. Puis, en $t = 1/2$, un choc apparaît. En calculant la solution sur les caractéristiques de l'équation et en utilisant la relation de Rankine-Hugoniot, on montre qu'il se propage à vitesse 1. Enfin, on vérifie que la solution est bien entropique (grâce à la proposition 5.14).

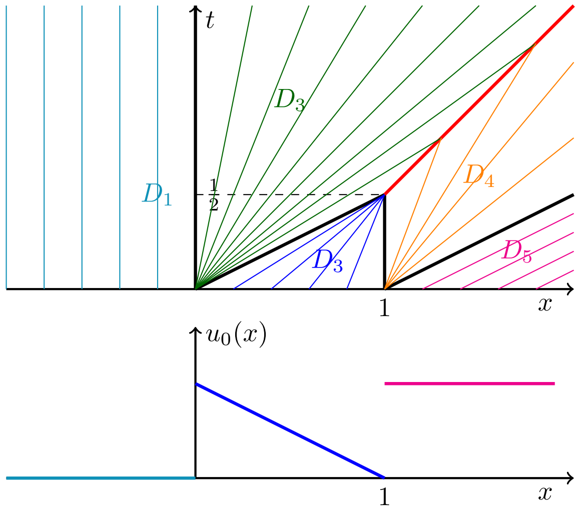

FIGURE 5.5 – En haut : Droites caractéristiques pour l'équation de Burgers avec condition initiale u_0 ; en rouge la ligne de choc, en noir les lignes de discontinuité C^1 – En bas : allure de la condition initiale u_0.

Pour définir cette solution, on pose :

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = 0 && \text{sur } D_1 = \{(x,t), 0 < t, x < 0\},\\
&u(x,t) = \frac{x}{2t} && \text{sur } D_2 = \{(x,t), 0 < t \le \frac{1}{2}, 0 < x < 2t\} \cup \{(x,t), t > \frac{1}{2}, 0 < x < t + \frac{1}{2}\},\\
&u(x,t) = \frac{1-x}{1-2t} && \text{sur } D_3 = \{(x,t), 0 < t < \frac{1}{2}, 2t < x < 1\},\\
&u(x,t) = \frac{x-1}{2t} && \text{sur } D_4 = \{(x,t), 0 < t \le \frac{1}{2}, 1 < x < 1+2t\} \cup \{(x,t), t > \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} < x < 1+2t\},\\
&u(x,t) = 1 && \text{sur } D_5 = \{(x,t), 0 < t, 1+2t < x\}.
\end{aligned}
$$

La fonction u est discontinue sur l'ensemble $\{(x,t), t > 1/2, x = t + 1/2\}$ (ligne de choc, en rouge sur la figure). On vérifie que la relation de Rankine-Hugoniot est satisfaite en tout point de cet ensemble. En effet, soit $t > 1/2$ et $x = t + 1/2$. Avec les notations de la proposition 5.14, on a

$$
\begin{aligned}
u_-(x,t) &= \frac{x}{2t} = \frac{t+1/2}{2t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4t} (\text{ on utilise ici } D_2),\\
u_+(x,t) &= \frac{x-1}{2t} = \frac{t-1/2}{2t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4t} (\text{ on utilise ici } D_4).
\end{aligned}
$$

Ceci donne $u_-(x,t) + u_+(x,t) = 1$ et la relation de Rankine-Hugoniot est bien vérifiée. D'autre part, la solution contruite est bien entropique car $u_- > u_+$.

Corrigé de l'exercice 5.8 (Construction d'une solution faible entropique, III)

Au vu de la condition initiale, il est probable que la solution entropique contient une discontinuité issue du point $x = 1$. On cherche donc la solution sous la forme d'une fonction continue à gauche et à droite d'une ligne de

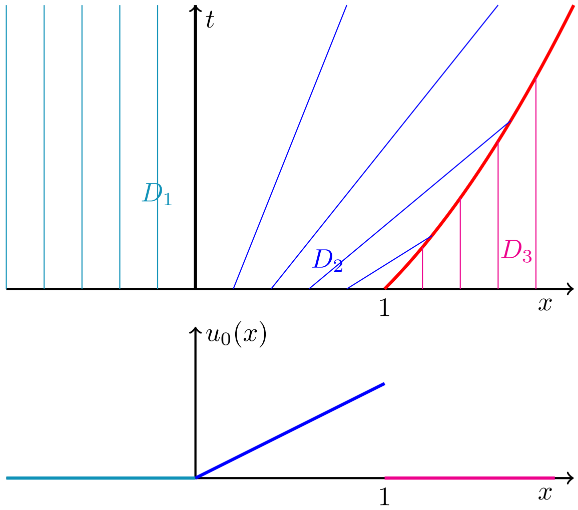

FIGURE 5.6 – En haut : Droites caractéristiques pour l'équation de Burgers avec condition initiale u_0 ; en rouge la ligne de choc, en noir les lignes de discontinuité C^1 – En bas : allure de la condition initiale u_0.

discontinuité notée L (en rouge sur la figure 5.4), définie par $L = \{(x,t), t > 0, x = \sigma(t)\}$, où σ est une fonction de classe C^1 croissante telle que $\sigma(0) = 1$ et $\sigma'(t) < 2$ pour tout $t > 0$.
On pose (voir figure 5.4) :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,t), 0 < t, x < 0\}, \\ D_2 &= \{(x,t), 0 < t, 0 < x < \sigma(t)\}, \\ D_3 &= \{(x,t), 0 < t, \sigma(t) < x\}. \end{aligned}$$

On prend $u(x,t) = 0$ si $(x,t) \in D_1$. Dans D_2, u est construite en utilisant les caractéristiques, ce qui donne $u(x,t) = x/(1+2t)$ si $(x,t) \in D_2$. Enfin, on pose $u(x,t) = 0$ si $(x,t) \in D_3$.
Pour que u soit solution faible du problème considéré, il suffit de vérifer la relation de Rankine-Hugoniot sur L, that is to say (avec les notations de la proposition 5.14) que

$$\sigma'(t) = u_-(x,t) + u_+(x,t) \text{ pour tout } (x,t) \in L.$$

Soit $t > 0$ et $x = \sigma(t)$, on a $u_-(x,t) + u_+(x,t) = \sigma(t)/(1+2t)$. Il suffit donc que

$$\begin{aligned} &\sigma'(t) = \sigma(t)/(1+2t) \text{ pour tout } t > 0, \\ &\sigma(0) = 1. \end{aligned}$$

La solution de cette équation différentielle est $\sigma(t) = \sqrt{1+2t}$ (pour tout $t > 0$). Avec ce choix de la fonction σ, la fonction u ainsi construite est solution faible du problème considéré. Cette fonction est même solution entropique car $u_- > u_+$ sur L (voir la proposition 5.14).
Pour $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_0^{\sqrt{1+2t}} \frac{x}{1+2t} dt = \frac{1}{2} = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$.

Corrigé de l'exercice 5.9 (Construction d'une solution faible entropique, IV)

L'allure de la solution entropique est donnée sur la figure 5.4. La discontinuité de u_0 en $x = -1$, commence par se propager à la vitesse 1 (c'est-à-dire sur la droite $x = -1 + t$), c'est une onde de choc ; elle sépare les régions D_1 et D_2 sur la figure. Noter que, conformément à la théorie, les caractéristiques "rentrent" dans la ligne de choc. La discontinuité de u_0 en $x = 1$, commence par se propager à la vitesse 2 (c'est-à-dire sur la droite $x = 1 + 2t$), c'est aussi une onde de choc. La discontinuité de u_0 en $x = 0$ disparaît, elle donne une onde de détente (région D_3). Dans cette onde de détente, on a $u(x, t) = x/(2t)$.

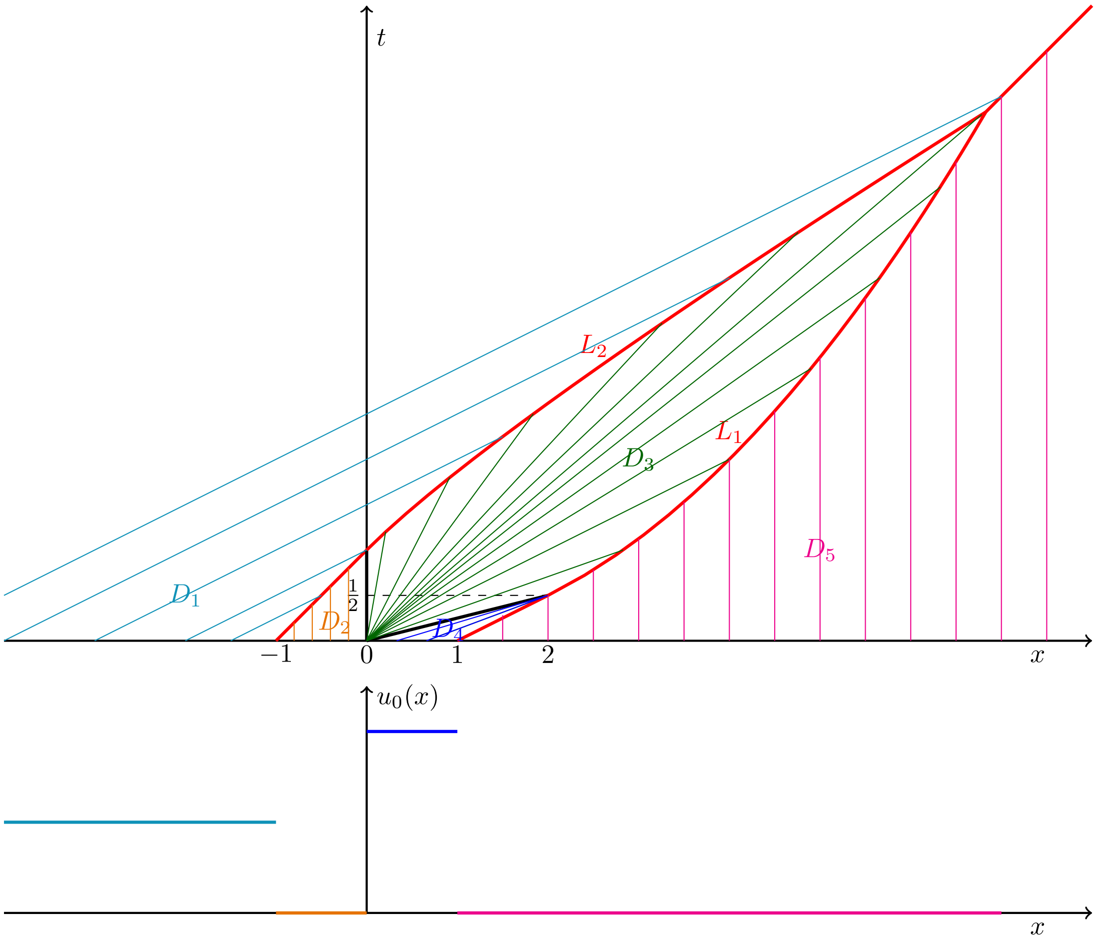

FIGURE 5.7 – En haut : Droites caractéristiques pour l'équation de Burgers avec condition initiale u_0 ; en rouge la ligne de choc, en noir les lignes de discontinuité C^1 – En bas : allure de la condition initiale u_0.

Puis, en $t = 1/2$, la "tête" de l'onde détente rattrape l'onde de choc de droite (au point $x = 2$) qui alors "ralentit" et continue sur une courbe que nous notons L_1, avec $L_1 = \{(x, t), t > 1/2, x = \sigma_1(t)\}$. En $t = 1$, l'onde de choc de gauche rattrape le "pied" de l'onde de détente (au point $x = 0$). L'onde de choc "ralentit" et continue sur une courbe que notons L_2, avec $L_2 = \{(x, t), t > 1, x = \sigma_1(t)\}$. Les fonctions σ_1 et σ_2 se calculent grâce aux relations de Rankine et Hugoniot.

1. **Calcul de σ_1.** Soit $(x,t) \in L_1$. L'ensemble L_1 sépare l'onde de détente D_2 de la zone D_5 dans laquelle $u = 0$. On a donc, avec la relation de Rankine-Hugoniot,
$$\sigma_1'(t) = u_-(x,t) + u_+(x,t) = \frac{x}{2t} = \frac{\sigma_1(t)}{2t}.$$
Comme $\sigma_1(1/2) = 2$, la résolution de cette équation différentielle donne $\sigma_1(t) = 2\sqrt{2t}$ pour tout $t > 1/2$.
2. **Calcul de σ_2.** Soit $(x,t) \in L_2$. L'ensemble L_2 sépare la zone D_1 dans laquelle $u = 1$ de l'onde de détente D_2. On a donc, avec la relation de Rankine-Hugoniot,
$$\sigma_2'(t) = u_-(x,t) + u_+(x,t) = 1 + \frac{x}{2t} = 1 + \frac{\sigma_2(t)}{2t}.$$
Comme $\sigma_2(1) = 0$, la résolution de cette équation différentielle donne $\sigma_2(t) = 2(t - \sqrt{t})$ pour tout $t > 1$.

Les courbes L_1 et L_2 se rencontrent pour en t tel que $1 + \frac{\sigma_2(t)}{2t} = \frac{\sigma_1(t)}{2t}$, c.à.d. $t = 3 + 2\sqrt{2}$, pour donner naissance à une seule discontinuité qui se propage à la vitesse 1, car cette discontinuité sépare la zone D_1 dans laquelle $u = 1$ de la zone D_5dans laquelle $u = 0$.
La solution ainsi construite est bien entropique car sur chaque courbe de discontinuité on a $u_g > u_d$, or la fonction flux $s \mapsto s^2$ de l'équation de Burgers est bien convexe.

Corrigé de l'exercice 5.12 (Effet "Landau")

Solution 5.4 page 216 Soit f une fonction borélienne bornée et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (pour simplifier, on peut supposer que f est continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On s'intéresse dans cet exercice à la limite quand $t \to +\infty$ de la solution (faible) du problème suivant :
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) = 0,\ x,y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,y,0) = f(x),\ x,y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.58}$$

1. Donner explicitement en fonction de f l'unique solution faible de (5.58).

Corrigé – *La première équation de (5.58) peut s'écrire* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + \frac{\partial yu}{\partial x}(x,y,t) = 0$*. La notion de solution faible pour cette équation est donc parfaitement définie.*

Etape 1, construction d'une solution

Le problème (5.58) correspond à une équation de transport dans la direction x, la vitesse du transport dépendant de la variable y (que l'on peut voir ici comme un paramètre). Le début du chapitre 5 nous suggère alors la forme de la solution faible. Pour $(x,y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on pose
$$u(x,y,t) = f(x - yt).$$
La fonction u ainsi définie appartient bien à $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. On montre maintenant que u est solution faible de (5.58).
Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On va montrer que
$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x,y,0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5.59}$$
Ceci montrera bien que u est solution faible de (5.58). On considère de terme de gauche de (5.59) en remplaçant $u(x,y,t)$ par $f(x-yt)$ et on utilise dans l'intégrale par rapport à x le changement de variable $x - yt = z$ (pour y et t fixés, on profite aussi ici du théorème de Fubini). On obtient
$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-yt)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)(\varphi_t(z+yt,y,t) + y\varphi_x(z+yt,y,t))\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(Noter que φ_x désigne toujours la dérivée de φ par rapport à sa première variable et φ_t désigne toujours la dérivée de φ par rapport à sa troisième variable.)

Pour $z, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $\psi(z, y, t) = \varphi(z + yt, y, t)$, de sorte que $\psi_t(z, y, t) = y\varphi_x(z + yt, y, t) + \varphi_t(z + yt, y, t)$. On obtient ainsi

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-yt)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)\psi_t(z,y,t)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

On peut maintenant intégrer le terme de droite d'abord par rapport à t (grâce au théorème de Fubini), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-yt)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)\psi(z,y,0)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

Ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-yt)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)\varphi(z,y,0)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

On a bien montré (5.59). La fonction u est donc bien une solution faible de (5.58).

Unicité de la solution faible de (5.58)

Grâce à la linéarité de la première équation de (5.58), il suffit de montrer que si u est solution de (5.59) (pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$) avec $f = 0$ p.p., alors $u = 0$ p.p.. On suppose donc que u appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \tag{5.60}$$

On va montrer que $u = 0$ p.p..

Soit $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x,y,t) = -\int_t^{+\infty} \psi(x - y(t-s), y, s)\,\mathrm{d}s.$$

On a aussi $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et on remarque que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned}\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t) = \psi(x,y,t) &+ y\int_t^{+\infty} \psi_x(x - y(t-s), y, s)\,\mathrm{d}s\\ &-y\int_t^{+\infty} \psi_x(x - y(t-s), y, s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

et donc

$$\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t) = \psi(x,y,t).$$

En prenant cette fonction φ dans (5.60) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)\psi(x,y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour tout } \psi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

On en déduit que $u = 0$ p.p..

N.B. La méthode que nous venons d'utiliser est une méthode classique pour obtenir l'unicité d'un problème par la résolution du problème adjoint (qui est ici $\varphi_t + y\varphi_x = \psi$ avec $\varphi = 0$ comme donnée "finale".)

Dans la suite, on note u cette solution faible.
On remarquera que u est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < \infty$.

On note aussi m la moyenne de f sur une période. Enfin, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on pose

$$F(y,r) = \frac{1}{2r}\int_{y-r}^{y+r} f(z)dz.$$

2. (Question liminaire) Montrer que $\lim_{r\to+\infty} F(y,r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit $T > 0$ t.q. $f(z+T) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ (la fonction f est donc de période T).*
Soit $y \in \mathbb{R}$ et $r > T$. Il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ t.q. $(p-1)T < y - r \le pT < qT \le y + r < (q+1)T$. On a alors

$$2rF(y,r) = \int_{y-r}^{pT} f(z)dz + \int_{pT}^{qT} f(z)dz + \int_{qT}^{y+r} f(z)dz = \int_{y-r}^{pT} f(z)dz + (q-p)mT + \int_{qT}^{y+r} f(z)dz.$$

Ceci donne

$$F(y,r) = m + \big(\frac{(q-p)T}{2r} - 1\big)m + \frac{1}{2r}\int_{y-r}^{pT} f(z)dz + \frac{1}{2r}\int_{qT}^{y+r} f(z)dz.$$

Comme $0 \le 2r - (q-p)T \le 2T$ et que, avec $M = \max\{|f(z)|, z \in \mathbb{R}\}$,

$$\Big|\int_{y-r}^{pT} f(z)dz\Big| \le \int_{y-r}^{pT} |f(z)|dz \le MT, \quad \Big|\int_{qT}^{y+r} f(z)dz\Big| \le \int_{qT}^{y+r} |f(z)|dz \le MT,$$

on a donc

$$|F(y,r) - m| \le \frac{(|m| + M)T}{r}.$$

ce qui prouve bien que $\lim_{r\to+\infty} F(y,r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta}\int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = 4\delta^2 m.$$

[On pourra remarquer que $\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x-yt)dy = 2\delta F(x-bt, \delta t)$.]

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. En utilisant le changement de variable $z = x - yt$, that is to say $y = (x-z)/t$, on obtient*

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x-yt)dy = \int_{x-bt-\delta t}^{x-bt+\delta t} \frac{f(z)}{t}dz = 2\delta F(x-bt,\delta t).$$

Soit maintenant $t > 0$. On sait que $u(x,y,t) = f(x-yt)$, on a donc

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta}\int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = \int_{b-\delta}^{b+\delta}\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x-yt)dxdy.$$

Avec le théorème de Fubini, on a donc

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta}\int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = \int_{a-\delta}^{a+\delta}\Big(\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x-yt)dy\Big)dx = 2\delta\int_{a-\delta}^{a+\delta} F(x-bt,\delta t)dx.$$

La deuxième question donne $\lim_{t\to\infty} F(x-bt,\delta t) = m$, uniformément par rapport à x, on a donc bien

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta}\int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = 4\delta^2 m.$$

4. Montrer que $u(.,.,t) \to m$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \to +\infty$.

Corrigé – *On remarque d'abord que (avec $M = \max\{|f(z)|, z \in \mathbb{R}\}$)*

$$\|u(\cdot,\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le M \text{ pour tout } t > 0.$$

On pose

$$\mathcal{C} = \{1_{]a-\delta,a+\delta[\times]b-\delta,d+\delta[},\ a,b \in \mathbb{R},\ \delta > 0\}.$$

La question précédente montre que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$ on a

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)\varphi(x,y)dxdy = m\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)dxdy. \tag{5.61}$$

On note maintenant E l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{C}$. Par linéarité de l'intégrale, on a alors (5.61) pour tout $\varphi \in E$.

L'espace vectoriel E est dense dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ (pour la mesure de Lebesgue). Pour montrer ceci, il suffit, par exemple, d'utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ puis de remarquer que tout élément de $C_c(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ peut être approché d'aussi près que l'on veut pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^2)$ par un élément de E. On en déduit bien que E est dense dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Grâce à cette densité et à la borne $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ sur $u(\cdot,\cdot,t)$, on conclut facilement que (5.61) est vrai pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Ceci donne bien que $u(.,.,t) \to m$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \to +\infty$.

5. Montrer que le résultat de la question 4 reste vrai si on remplace dans (5.51) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par $a(y)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ où $a \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a'(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. (Plus généralement, ce résultat reste vrai sous l'hypothèse plus faible que l'ensemble des points ou a' s'annule est de mesure nulle.)

Bibliographie

[1] ADAMS, R.A. (1975), *Sobolev spaces* (Academic Press, Boston). Version élevtornique `http://www.heroturko.org/index.php?do=search`

[2] BREZIS, H. (1983), *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications* (Masson, Paris).

[3] GALLOUËT, T. and HERBIN, R., *Mesure, intégration, probabilités*, Ellipses, 2013.

[4] GALLOUËT, T. and HERBIN, R., *Théorie de l'intégration et de la mesure.* `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/mes-int-pro.pdf`

[5] GODLEWSKI E. and P. A. RAVIART (1991), *Hyperbolic systems of conservation laws*, Ellipses.

[6] HERBIN, R., *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. http ://www.cmi.univ-mrs.fr/ herbin/PUBLI/anedp.pdf

[7] LERAY, J., *Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*, Acta. Math. 63 (1934), no. 1, 193-248.