Data Science Academy

www.datascienceacademy.com.br

Programação Paralela em GPU

Álgebra Linear
Parte 3

Vejamos um outro importante método para resolver problemas baseados no uso de matrizes, a inversa da matriz.

1. Inversa de uma Matriz

Para resolver um grande número de equações de uma só vez, o inverso pode ser usado. Inverso, como assim? Você vai compreender agora em detalhes uma das técnicas mais usadas em Deep Learning para ajustar as matrizes, a Inversa da Matriz. Vamos começar com alguns termos e operações.

1.1. Determinante de uma Matriz

Em matemática, determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar; ela transforma essa matriz em um número real. Esta função permite saber se a matriz tem ou não inversa, pois as que não têm são precisamente aquelas cujo determinante é igual a 0.

O conceito de determinante é aplicável somente às matrizes quadradas. Para começar, vamos considerar uma matriz 2 * 2 abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Por enquanto, apenas se concentre na matriz 2 * 2. A expressão de determinante da matriz A será:

`det(A) =a*d-b*c`

Observe que det (A) é uma notação padrão para determinante. Observe que tudo o que você precisa fazer para encontrar o determinante neste caso é multiplicar elementos diagonais e colocar um sinal positivo ou negativo antes deles. Para determinar o sinal, somamos os índices de um elemento particular. Se a soma for um número par, coloque um sinal positivo antes da multiplicação e, se a soma for ímpar, coloque um sinal negativo. Por exemplo, a soma dos índices do elemento 'a11' é 2. Da mesma forma, a soma dos índices do elemento 'd' é 4. Então colocamos um sinal positivo antes do primeiro termo na expressão.

Agora, considere uma matriz ‘B’ 3 * 3 e encontre seu determinante.

$$B = \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

Vamos escrever a expressão e depois explicarei o procedimento passo a passo.

$$\text{Det(B)} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Cada termo consiste em duas partes basicamente, isto é, uma submatriz e um coeficiente. Antes de tudo, escolha uma constante. Observe que os coeficientes são colhidos apenas da primeira fila. Para começar, coloquei o primeiro elemento da primeira linha. Você pode começar onde quiser. Uma vez que você escolheu o coeficiente, basta apagar todos os elementos na linha e coluna correspondentes ao coeficiente escolhido. Em seguida, faça uma matriz dos elementos restantes; Cada um na sua posição original depois de excluir a linha e a coluna e encontrar o determinante desta submatriz. Repita o mesmo procedimento para cada elemento na primeira linha. Agora, para determinar o sinal dos termos, basta adicionar os índices do elemento coeficiente. Se for par, coloque um sinal positivo e, se for ímpar, coloque um sinal negativo. Finalmente, adicione todos os termos para encontrar o determinante. Agora, vamos tomar uma matriz de ordem superior 'C' e generalizar o conceito.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

Matriz C

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix}$$
$$+c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}.$$

Determinante da Matriz C

Se tivéssemos que fazer isso manualmente, o trabalho seria imenso. Mas temos a linguagem Python e a biblioteca NumPy para nos ajudar. Veja abaixo como calcular a determinante de uma matriz em Python:

```
In [1]: import numpy as np

In [2]: # Cria uma matriz 4*4 com valores no range 100 a 116 (exclusive)
        mat = np.arange(100,116).reshape(4,4)

In [3]: print(mat)

        [[100 101 102 103]
         [104 105 106 107]
         [108 109 110 111]
         [112 113 114 115]]

In [4]: # Para encontrar a determninante da nossa Matriz, usamos a função det() do pacote linalg do NumPy
        np.linalg.det(mat)

Out[4]: -2.9582283945788078e-31
```

Para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem superior a 3 utiliza-se o teorema de Laplace, que estabelece o seguinte:

“ O determinante de uma matriz é igual à soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos respectivos complementos algébricos. “

Existem várias técnicas utilizadas para calcular o determinante de uma matriz, entre elas estão: Regra de Sarrus, Teorema de Laplace, Teorema de Jacobi, Teorema de Binet e a Regra de Chió. Mas todas essas técnicas podem ser facilitadas se aplicarmos as propriedades dos determinantes. Vale lembrar que os determinantes, bem como suas propriedades, são aplicados apenas em matrizes quadradas. Vejamos cada uma dessas propriedades:

1ª)Se uma matriz possuir uma linha ou uma coluna nula, seu determinante será zero.

2ª)O determinante de uma matriz será sempre igual ao determinante de sua transposta.

3ª)Se trocarmos as duas linhas ou as duas colunas da matriz, trocaremos o sinal do determinante.

4ª)Se multiplicarmos os elementos de uma linha ou de uma coluna da matriz por um valor n qualquer, o determinante também será multiplicado por n.

5ª)Se uma matriz possui duas linhas ou colunas iguais ou múltiplas uma da outra, o determinante é nulo.

6ª)Se somarmos uma linha ou coluna à outra que foi multiplicada por um número, o determinante não será alterado.

7ª)O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto de seus determinantes.

Vamos avançar e estudar mais alguns conceitos antes de tratarmos especificamente da Inversa da Matriz, nosso principal objetivo aqui.

1.2. Menor de uma Matriz

Em álgebra linear, um menor de uma matriz A é o determinante de alguma matriz quadrada, obtida a partir de A pela remoção de uma ou mais de suas linhas ou colunas. Menores obtidos pela remoção de exatamente uma linha e uma coluna de matrizes quadradas (primeiros menores) são requeridos para calcular cofatores de matrizes, que por sua vez, são úteis para calcular o determinante e a inversa de matrizes quadradas.

Tomemos uma matriz quadrada A. Um "Menor da Matriz" que corresponde a um elemento A (ij) é o determinante da submatriz formada pela exclusão da linha 'i' e coluna 'j' da matriz. Tente correlacionar o conceito com o que você acabou de aprender em determinantes. Vamos dar um exemplo.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Para encontrar um "Menor da Matriz" correspondente ao elemento A11, exclua a primeira linha e a primeira coluna para encontrar a submatriz.

$$\begin{matrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

Agora, encontre o determinante dessa matriz como já foi explicado. Se você calcular o determinante dessa matriz, você deve obter 4. Se indicarmos o Menor da Matriz por M11, então:

M11 = 4

Da mesma forma, você pode encontrar os "menores" dos outros elementos da Matriz. Quer um outro exemplo para fixar esse conceito? Então vamos lá:

Se A é uma matriz quadrada, então o menor da entrada na i-ésima linha e j-ésima coluna (também chamado de menor (i,j), ou de primeiro menor[1]) é o determinante da submatriz formada ao eliminar a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Este número é geralmente indicado por Mi,j. Considere essa outra matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

Para calcular o menor M23, encontra-se o determinante da matriz que resulta ao remover a linha 2 e a coluna 3 da matriz acima.

$$M_{23} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & \square \\ \square & \square & \square \\ -1 & 9 & \square \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} = (9 - (-4)) = 13$$

1.3. Cofator de uma Matriz

Na discussão acima sobre menores da Matriz, se considerarmos sinais de termos menores, o resultado que obtemos é chamado cofator de uma matriz. Para atribuir o sinal, basta somar os índices do elemento correspondente. Se for par, atribua um sinal positivo. Senão atribua negativo.

Para começar, precisamos encontrar o cofator correspondente a cada elemento. Agora, na matriz original, substitua o elemento original pelo cofator correspondente. A matriz assim encontrada é chamada de matriz do cofator correspondente à matriz original.

Por exemplo, vamos considerar nossa matriz A. Se você descobriu os cofatores correspondentes a cada elemento, basta colocá-los em uma matriz de acordo com a regra indicada acima. Se você o fez corretamente, você deve obter a matriz do cofator.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Matriz Original

$$C = \begin{matrix} 4 & -3 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 10 & -5 & -6 \end{matrix}$$

Matriz do Cofator da Matriz A

1.4. Matriz Adjunta

Em nossa jornada para encontrar a Inversa da Matriz, estamos quase no final. Apenas acompanhe por mais alguns minutos e nós estaremos lá. Mas antes, precisamos falar sobre Matriz Adjunta.

Em álgebra linear uma Matriz Adjunta de uma matriz quadrada é a transposta de sua matriz dos cofatores. Suponhamos que devemos encontrar a Matriz Adjunta da Matriz A. Vamos fazê-lo em duas etapas.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Matriz Original

- No passo 1, encontre a matriz do cofator de A.
- No passo 2, apenas transponha a matriz do cofator.

A matriz resultante é a Matriz Adjunta da Matriz Original. Para ilustração, vamos encontrar a Matriz Adjunta de nossa Matriz A. Já possuímos matriz de cofator C. A transposição da matriz de cofator deve ser:

$$D = \begin{matrix} 4 & -4 & 10 \\ -3 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & -6 \end{matrix}$$

Finalmente, na próxima seção, estamos prontos para encontra a Inversa da Matriz.

1.5. Encontrando a Inversa da Matriz

Você se lembra do conceito do inverso de um número na álgebra elementar? Bem, se existem dois números e após a sua multiplicação obtemos 1, esses dois números são chamados inversos um do outro. Da mesma forma na álgebra linear, se existem duas matrizes de modo que sua multiplicação produz uma matriz de identidade, então as matrizes são chamadas de inversas uma da outra. A melhor maneira de aprender é aprender fazendo. Então, vamos pular diretamente para o algoritmo para encontrar o inverso de uma Matriz A. Novamente, vamos fazê-lo em duas etapas.

Passo 1: Descubra a Matriz Adjunta da Matriz A (agora tudo começa a fazer sentido) pelo procedimento explicado nas seções anteriores.

Passo 2: Multiplique a Matriz Adjunta pelo inverso do determinante da Matriz A. A Matriz resultante é o inverso de A.

Por exemplo, vamos considerar nossa matriz A e descobrir qual seu inverso. Já temos a Matriz Adjunta. O determinante da Matriz A passa a ser -2. Então, o inverso será:

$$\mathrm{Inv(A)} = 1/(-2) * \begin{matrix} 4 & -4 & 10 \\ -3 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & -6 \end{matrix}$$

Agora suponha que o determinante seja 0. O que acontece quando invertemos o determinante, ou seja, 0? Isto faz algum sentido? Ele indica claramente que não podemos encontrar o inverso dessa matriz. Portanto, esta matriz não é reversível. Tecnicamente, esse tipo de matriz é chamado de matriz singular.

Tenha em mente que a resultante da multiplicação de uma matriz e sua inversa é uma matriz de identidade. Esta propriedade vai ser amplamente utilizada na resolução de equações.

Inverse é usado na busca de vetor de parâmetros correspondente a função de custo mínimo em regressão linear, por exemplo.

Tenho certeza que o trecho de código abaixo vai fazer muito mais sentido para você:

```
In [1]: import numpy as np

In [2]: # Cria uma matriz 4*4 com valores no range 5 a 21 (exclusive)
        mat = np.arange(5,21).reshape(4,4)

In [3]: print(mat)

        [[ 5  6  7  8]
         [ 9 10 11 12]
         [13 14 15 16]
         [17 18 19 20]]

In [4]: # Para encontrar a inversa da Matriz, usamos a função inv() do pacote linalg do NumPy
        np.linalg.inv(mat)

Out[4]: array([[ -6.77233027e+13,   6.09509724e+14,  -1.01584954e+15,
                  4.74063119e+14],
               [ -3.26200575e+15,   3.83765382e+15,   2.11070960e+15,
                 -2.68635767e+15],
               [  6.72718140e+15,  -9.50383681e+15,  -1.17387058e+15,
                  3.95052599e+15],
               [ -3.39745235e+15,   5.05667327e+15,   7.90105198e+13,
                 -1.73823144e+15]])
```

Equipe DSA