Data Science Academy

www.datascienceacademy.com.br

Programação Paralela em GPU

Álgebra Linear
Parte 2

Vamos continuar nosso estudo sobre Álgebra Linear, mas agora dando um pouco mais de ênfase a um dos principais objetos usados em modelos de Machine Learning e Deep Learning para representar dados, as matrizes.

1. Matrizes

Matrizes são uma maneira de escrever coisas semelhantes juntas para manipulá-las de acordo com nossos requisitos de forma mais fácil. Em Data Science, geralmente é usado para armazenar informações como pesos em uma Rede Neural Artificial ao treinar diversos algoritmos.

Tecnicamente, uma matriz é uma matriz de números 2-D. Por exemplo, veja a matriz A abaixo:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Geralmente, as linhas são indicadas por 'i' e as colunas são indicadas por 'j'. Os elementos são indexados por "i" linha e "j" coluna". Indicamos a matriz por alguma letra do alfabeto, por exemplo. A e seus elementos por A (ij).

Na matriz A acima, o número 8 seria representado por: A32 = 8

Para chegar ao resultado, siga a terceira linha e alcance a segunda coluna.

1.1. Termos Relacionados a Matrizes

Esses são termos usados normalmente para representar matrizes:

Termo	**Descrição**
Ordem da matriz	Se uma matriz tiver 3 linhas e 4 colunas, a ordem da matriz é 3 * 4, ou seja, linha * coluna.
Matriz quadrada	A matriz na qual o número de linhas é igual ao número de colunas.
Matriz diagonal	Uma matriz com todos os elementos não diagonais iguais a 0 é chamada de matriz diagonal.
Matriz triangular superior	Matriz quadrada com todos os elementos abaixo da diagonal iguais a 0.
Matriz triangular inferior	Matriz quadrada com todos os elementos acima da diagonal iguais a 0.
Matriz escalar	Matriz quadrada com todos os elementos diagonais iguais a alguma constante k.
Matriz identidade	Matriz quadrada com todos os elementos diagonais iguais a 1 e todos os elementos não diagonais iguais a 0.
Matriz de coluna	A matriz que consiste apenas em 1 coluna. Às vezes, é usado para representar um vetor.
Matriz de linhas	Uma matriz constituída apenas por uma linha.
Trace	É a soma de todos os elementos diagonais de uma matriz quadrada.

2. Representação de Equações em forma de Matriz

Deixe-me fazer algo emocionante para você. Pegue um papel e caneta e tente encontrar o valor da multiplicação da matriz mostrada abaixo:

$$\overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{matrix}}^{A} \quad \overbrace{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}}^{X} = \overbrace{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}}^{Z}$$

Pode-se verificar que a expressão contém três equações. Vamos nomear nossas matrizes como 'A', 'X' e 'Z'. Podemos escrever nossas equações juntas em um só lugar como:

$$AX = Z$$

O próximo passo é encontrar os possíveis métodos de solução. Passaremos por dois métodos para encontrar a solução desse nosso problema.

3. Resolvendo o Problema

Para resolver o problema apresentado anteriormente, podemos utilizar 2 técnicas:

- Escalonamento de Matrizes (Row Echelon Form)
- Inversa da Matriz

3.1. Escalonamento de Matrizes

Já vimos anteriormente o que representa uma equação em 3 variáveis. Agora, vamos encontrar a solução do conjunto de equações que nos foram fornecidas para entender nosso primeiro método de interesse, o Escalonamento de Matrizes.

Na álgebra linear, uma matriz está em forma escalonada se tiver a forma resultante de uma eliminação Gaussiana. A forma escalonada significa que a eliminação gaussiana funcionou nas linhas e a forma escalonada de coluna significa que a eliminação gaussiana operou nas colunas. Em outras palavras, uma matriz está na forma escalonada de coluna se a sua transposição estiver na forma escalonada de linha. As propriedades similares da forma escalonada de coluna são facilmente deduzidas através da transposição de todas as matrizes.

Especificamente, uma matriz está em forma escalonada de linha (Row Echelon Form) se:

- Todas as linhas diferentes de zero (linhas com pelo menos um elemento diferente de zero) estão acima de qualquer linha de todos os zeros (todas as linhas de zero, se houver, pertencem na parte inferior da matriz).

- O coeficiente de liderança (o primeiro número diferente de zero a partir da esquerda, também chamado de pivô) de uma linha diferente de zero é sempre estritamente à direita do coeficiente de liderança da linha acima (alguns textos adicionam a condição de que o coeficiente de liderança deve ser 1).

Essas duas condições implicam que todas as entradas em uma coluna abaixo de um coeficiente de liderança são zeros.

Este é um exemplo de uma matriz de 3 × 5 na forma escalonada de linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_6 \end{bmatrix}$$

Muitas propriedades das matrizes podem ser facilmente deduzidas de sua forma escalonada de linha, como o rank e o kernel. O grau de uma matriz (rank) é igual ao número máximo de vetores de linha independentemente lineares em uma matriz. Um conjunto de vetores é linearmente dependente se pudermos expressar pelo menos um dos vetores como uma combinação linear de vetores remanescentes no conjunto.

Resolver as equações pelo método de substituição pode revelar-se tedioso e tomar tempo. O Escalonamento de Matrizes apresenta-se com um método mais puro e mais sistemático para realizar o trabalho em que manipulamos nossas equações originais de forma sistemática para encontrar a solução. Mas quais são essas manipulações válidas? Existem critérios de qualificação que essas manipulações devem cumprir? A resposta é sim. Existem duas condições que devem ser cumpridas por qualquer manipulação para que sejam válidas (ou seja, para resolver o problema temos que seguir um procedimento). Essas duas regras são:

- A manipulação deve preservar a solução, ou seja, a solução não deve ser alterada ao impor a manipulação.
- A manipulação deve ser reversível.

E quais são essas manipulações?

- Podemos trocar a ordem das equações.
- Podemos multiplicar ambos os lados das equações por qualquer constante 'c' não-zero.
- Podemos multiplicar uma equação por qualquer constante não-zero e depois adicionar a outra equação.

Esses pontos vão se tornar mais claros quando você passar pelo algoritmo e praticá-lo. A ideia básica é limpar variáveis em equações sucessivas e formar uma matriz triangular superior. Agora que sabemos quais são os pré-requisitos para o Escalonamento de Variáveis, vamos começar.

Vamos resolver o nosso problema original e vamos fazê-lo em etapas.

$$\overbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 2\end{matrix}}^{A}\quad \overbrace{\begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}}^{X} = \overbrace{\begin{matrix}1\\ 1\\ 4\end{matrix}}^{Z}$$

Passo 1: Criaremos uma matriz composta dos valores de 'A' e 'Z':

$$\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 5 & 3 & 2 & 4\end{matrix}$$

O que fizemos aqui foi apenas concatenar as duas matrizes (Z é uma matriz de coluna, como vimos no item 1). A matriz resultante simplesmente diz que os elementos em uma linha são coeficientes de 'x', 'y' e 'z' e o último elemento na linha é o lado direito da equação.

Passo 2: Multiplique a linha (1) com 2 e subtraia da linha (2). Da mesma forma, multiplique a equação 1 com 5 e subtraia da linha (3). Aquele papel e caneta podem ser bem úteis neste momento.

$$\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & -2 & -3 & -1\end{matrix}$$

Passo 3: Para fazer uma matriz triangular superior, multiplique a linha (2) por 2 e depois subtraia da linha (3).

$$\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{matrix}$$

Lembre-se de fazer cada coeficiente de liderança (leading coeficiente), também chamado de pivô, por manipulações adequadas; neste caso, multiplicando a linha 2 por -1. Além disso, se uma linha consistir apenas de 0, ela deve estar abaixo de cada linha, que consiste em uma entrada diferente de zero. A forma resultante de Matrix é chamada de forma Row Echelon. Observe que os planos correspondentes às novas equações formadas por manipulação não são equivalentes. Fazendo essas operações, estamos apenas conservando a solução das equações e tentando chegar a ela.

Passo 4: Agora simplificamos o nosso trabalho, vamos recuperar as equações modificadas. Começaremos do mais simples, isto é, aquela com o número mínimo de variáveis restantes. Temos, portanto, a nossa primeira equação que resolve o valor do primeiro elemento da Matriz Z:

```
0*x+0*y+1*z=1
z=1
```

Todas as equações seguintes são deduzidas da mesma forma, ou seja, aplicamos o Escalonamento de Matrizes para nos ajudar a encontrar a solução das equações representadas na Matriz. Vejamos outro exemplo, usando uma linguagem um pouco menos técnica para fixar este conceito.

A forma escalonada de uma matriz é uma ferramenta bastante útil. Pode ser utilizada para interpretar geometricamente vetores diferentes e encontrar propriedades como dependência linear e extensão. A forma escalonada é aquela em que os primeiros dígitos diferentes de zero de cada linha possuem apenas zeros abaixo deles (está ficando mais claro agora?).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Para reduzir uma matriz a sua forma escalonada, começamos com uma matriz de qualquer tamanho. Não altere a primeira linha, é mais fácil fazer isso sistematicamente. Então olhe para o primeiro dígito em cada linha, e decida por qual linha a linha 1 precisa ser somada/subtraída para zerar o primeiro termo. Neste exemplo, podemos perceber que a linha 2 – a linha 1 dará zero, e que linha 3 – 3*linha 1 também.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

O que fizemos aqui:

Mantivemos a linha 1 intacta.

Subtraíamos a linha 1 da linha 2 e geramos uma nova linha 2.

Subtraímos da linha 3, a linha 1 multiplicada por 3 e geramos a nova linha 3.

Mas ainda não acabou. Lembra da definição da forma escalonada? Vamos repetir: A forma escalonada é aquela em que os primeiros dígitos diferentes de zero de cada linha possuem apenas zeros abaixo deles. Se você observar a matriz resultante vai perceber que ela ainda não está na forma escalonada. Precisamos aplicar mais uma manipulação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Agora sim. Fizemos: Linha3 – Linha2.

Agora nossa matriz final está na forma escalonada, já que o primeiro dígito diferente de zero de cada linha possui apenas zeros abaixo deles.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Matriz Original

Matriz na Forma Escalonada

Por que usar esta técnica?

- Algumas boas interpretações geométricas são: se a linha inferior resulta numa linha só com zeros, isso tem um significado – dependendo do tamanho da matriz.

- Alguns exemplos são: se você tem uma matriz 3x3, três vetores num espaço tridimensional, então uma linha zerada implica que os vetores são linearmente dependentes e, portanto, há infinitas soluções já que eles intercedem numa linha comum.

- Se não há linhas zeradas, então os vetores são linearmente independentes, significando que eles possuem apenas uma solução (encontram-se num único ponto), ou nenhuma solução (eles não intercedem).

- Isso funciona com matrizes de qualquer tamanho.

Gostou do Escalonamento de Matrizes? Então vamos estudar outra técnica, a Matriz Inversa. Mas isso é assunto para a próxima aula.

Obrigado

Equipe DSA