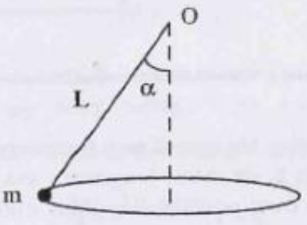
Exercice 9

Un point matériel de masse m est suspendu en un point O fixe par un fil inextensible, de longueur L et de masse négligeable. Ce point décrit un cercle de rayon r à la vitesse angulaire constante ω, et l'angle que fait le fil avec la verticale est noté α.



1) Calculer la tension T du fil en fonction de m, ω et L.
2) Calculer la valeur de α et montrer qu'une valeur minimale ω_m est nécessaire pour que ce pendule conique puisse fonctionner.

Le mouvement de m est tel que :

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P} \quad (1)$$

A un instant t, la masse m décrivant un mouvement circulaire de rayon $r = L\sin\alpha$ avec une vitesse $V = \omega r$, l'accélération est centripète et vaut $a = \frac{V^2}{r} = \omega^2 L \sin\alpha$. En projetant la relation (1) sur les axes X et Y, nous obtenons le système suivant :

$$T\cos\alpha = mg$$
$$T\sin\alpha = ma = m\omega^2 L\sin\alpha$$

On en tire : $\boxed{T = m\omega^2 L}$

2) Puisque $T\cos\alpha = mg$, il vient : $\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}}$

Comme $\cos\alpha < 1$, il s'en suit qu'il faut $\frac{g}{\omega^2 L} < 1 \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{g}{L}}$. Pour que le pendule conique puisse fonctionner, il faut donc :

$$\boxed{\omega > \omega_m = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Exercice 12

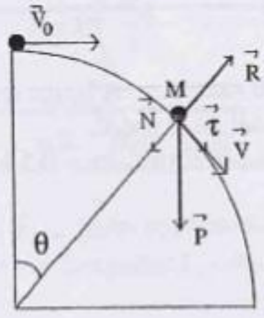
Une bille de masse m est lancée au sommet d'une sphère de rayon r avec une vitesse $\vec{V}_0$ horizontale. La bille glisse sans frottement et on repère sa position par l'angle θ que fait sa position à l'instant t avec sa position initiale.

1) Calculer le module R de la réaction qu'exerce la sphère sur la bille en fonction des grandeurs g, V_0, θ et m.

2) En déduire la valeur de l'angle θ_m pour lequel la bille décolle de la sphère.

AN) $r = 1$ m $\quad g = 9{,}81$ m.s^{-2} $\quad V_0 = 1$ m.s^{-1}

1)



Le théorème du centre d'inertie donne :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{R} + \vec{P}.$$

En projetant dans la base de Frenet (voir exercice 3), il vient :

$$m\frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{mV^2}{r}\vec{N} = mg\sin\theta\,\vec{\tau} + (mg\cos\theta - R)\vec{N}$$

d'où :

$$R = mg\cos\theta - \frac{mV^2}{r} \quad (1)$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ et l'instant t, on obtient :

$$\Delta E_c = W_R + W_P$$

Le travail de la réaction est nul puisque $\vec{R}$ est perpendiculaire au déplacement, on en déduit :

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = mgr(1-\cos\theta)$$

En reportant dans (1), il vient :

$$\boxed{R = mg(3\cos\theta - 2 - \frac{V_0^2}{rg})}$$

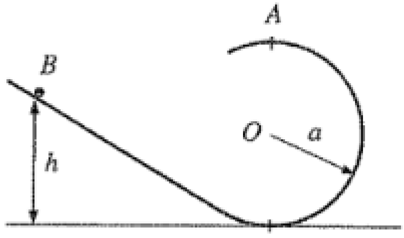
2) La formule précédente montre que R décroît constamment quand θ augmente. D'autre part, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ l'expression précédente montre que $R < 0$ ce qui est contraire à la supposition du contact entre la bille et la sphère.

Exo : Anneau sur un cerceau : arccos(g/rw*2)

72. Looping dans une gouttière

Une gouttière a l'allure ci-contre :

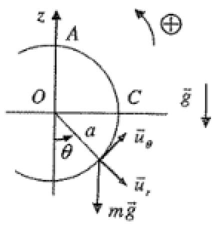
On lâche un point matériel de masse m, du point B avec une vitesse initiale nulle. Le mouvement se fait sans frottements et dans le plan vertical. De quelle hauteur h doit-on lâcher le point matériel pour qu'il effectue un tour complet du cercle intérieur (c'est-à-dire pour qu'il passe le point A) ?



Pour quelles valeurs de h, le point matériel quitte-t-il la gouttière dans la partie circulaire ? Dans ce cas, donnez la relation entre h et le point de « décollage ».

72. Looping dans une gouttière

Les forces appliquées sur le point sont, dans le référentiel de la gouttière lié au référentiel terrestre galiléen, le poids et la réaction normale car il n'y a pas de frottements. La direction de $\vec{R}_n$ est connue, portée par $\vec{u}_r$ car le mouvement a lieu sur une surface.



La RFD projetée sur $\vec{u}_r$ donne :

$$mg\cos\theta - R_n = -ma^2\dot{\theta} = -m\frac{v^2}{a}$$

car $r = a = \text{cste}$ et $v = a\dot{\theta}$. On en déduit :

$$R_n = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{a}$$

Il est donc évident que R_n ne peut s'annuler que pour $\cos\theta < 0$ soit entre C et A.

Le théorème de l'E_C entre B et M quelconque permet de calculer v :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg\left(h - (a - a\cos\theta)\right) + 0$$

En remplaçant : $\boxed{R_n = mg\left(3\cos\theta + \frac{2h}{a} - 2\right)}$

R_n est une fonction décroissante de θ, sa valeur est minimale en A, donc la condition $R_n \neq 0$ en A suffit pour assurer le looping.

$R_n > 0$ pour $\cos\theta = -1$ donne la condition : $\boxed{h > \frac{5a}{2}}$

Donc pour passer le point A il faut partir sur la rampe de lancement au moins un demi-rayon au-dessus de A, ce qui montre que la condition énergétique $v_A > 0$ est largement insuffisante. La valeur limite $5a/2$ permet le looping.

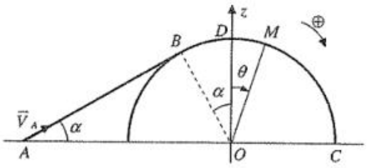
Si le point M quitte la gouttière entre C et A,

$-1 < \cos\theta < 0$, pour $R_n = 0$ fixant $\cos\theta$:

$\boxed{a < h < \frac{5a}{2}}$ et $z = a - a\cos\theta \Rightarrow \boxed{z_{\text{déc.}} = \frac{1}{3}(a + 2h) < h}$

73. Franchissement d'une bosse

Un palet M de masse m, assimilé à un point matériel, est lancé sur une piste contenue dans un plan vertical. Elle est composée d'une portion rectiligne AB, inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, tracée sur une sphère, de rayon R et d'angle $\widehat{BOC} = \pi/2 + \alpha$ (cf. figure). α est un angle arithmétique, non orienté. Le palet initialement lancé depuis A avec une vitesse de norme V_A et glisse sans frottement sur la piste. On désigne par g la norme du champ de pesanteur.



a) Montrer que le palet ne peut pas décoller entre A et B.

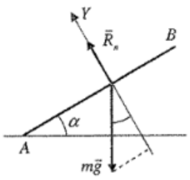
b) À quelle condition sur V_A, le point B est-il atteint ?

c) À quelle condition sur V_A n'y aura-t-il pas de décollage avant le sommet de la sphère ?

d) Le palet ayant franchi le sommet sans décoller, pour quelle valeur θ_d de θ quittera-t-il la piste après le sommet ? Comparer θ_d et α.

73. Franchissement d'une bosse

a) Les forces appliquées sur le point sont, dans le référentiel terrestre galiléen, le poids et la réaction normale car il n'y a pas de frottements. La direction de $\vec{R}_n$ est connue, car le mouvement a lieu sur une surface, elle est portée par la normale à la surface $\vec{u}_Y$.



La RFD projetée sur $\vec{u}_Y$ donne :

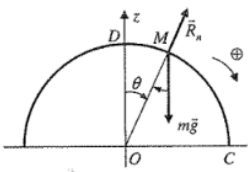
$R_n - mg\cos\alpha = m\ddot{Y}$, un décollage nécessite simultanément : $R_n = 0$ et $\ddot{Y} > 0$, ce qui est manifestement impossible. Attention dans cette question de ne pas poser $\ddot{Y} = 0$, ce qui impose un non décollage, ou pire d'invoquer une « compensation » du poids et de la réaction, alors que la réaction n'est jamais connue a priori (sa valeur dépend de l'accélération).

b) Pour atteindre le point B la condition énergétique suffit, soit $v_B \geq 0$, le théorème de l'énergie cinétique donne entre A et B :

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = -mg(z_B - z_A) = -mgR\cos\alpha$$

il faut donc $\boxed{v_A \geq (2gR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$

c) Pour l'étude du mouvement du point matériel sur la sphère, on se place en un point quelconque, mais favorable, sur le schéma : $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$.



L'expression obtenue est bien sûr valable en tout point, notamment entre B et D où $-\alpha \leq \theta \leq 0$.

La relation fondamentale s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{R}_n = m\vec{a}$$

avec pour un mouvement circulaire :

$$\vec{a} = R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$$

et en projection sur la normale (ici $\vec{u}_r$) : $R_n - mg\cos\theta = -m\dfrac{v^2}{R}$

$$\Rightarrow R_n = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

On calcule v avec le théorème de l'énergie cinétique entre A et M quelconque :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = -mgR\cos\theta \quad \text{soit} \quad v^2 = v_A^2 - 2gR\cos\theta$$

En remplaçant : $\boxed{R_n = 3\,mg\cos\theta - \dfrac{mv_A^2}{R}}$

Entre B et D, $\theta < 0$, $\cos\theta > 0$ et $\cos\theta \nearrow$ de B à D. On a donc $\|\vec{R}_n\|_{min}$ au point B, soit pour $\theta = -\alpha$.

Le palet ne décollera pas entre B et D si $R_{n,B} > 0$, soit $\boxed{v_A < (3gR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$ (1)

d) Après D, le palet décolle pour $R_n = 0$ avec $\theta > 0$:

$$\boxed{\cos\theta_d = \frac{v_A^2}{3\,gR}}$$

Avec la condition précédente on a : $\cos\theta_d < \cos\alpha$.

En effet pour $\theta = \alpha$, $v = v_B$ (même cote), or $R_{n,B} > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\text{décollage pour } \theta_d > \alpha}$$

Rq : Pour atteindre D il faut $v_A \geq (2gR)^{\frac{1}{2}}$ ce qui avec la relation (1) impose des conditions sur α : $\cos\alpha > \dfrac{2}{3}$.

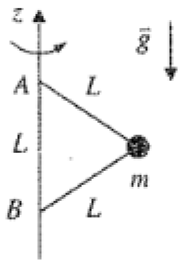
74. Un pendule tournant

Une bille, masse m, est attachée à deux fils inextensibles, de longueur L, fixés en A et B tels que $AB = L$.

La bille convenablement lancée, puis abandonnée, a un mouvement circulaire uniforme dans un plan horizontal (les fils étant tendus).

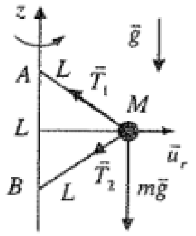
a) Exprimer la tension de chaque fil en fonction de m, L, g et ω, vitesse angulaire du mouvement circulaire de la bille.

b) Quelle est la vitesse angulaire minimale pour que les fils restent tendus ?



74. Un pendule tournant

a) Dans le référentiel terrestre galiléen lié à l'axe Oz, les forces sur m sont le poids, la tension $\vec{T}_1$ du fil supérieur dirigée vers A, la tension $\vec{T}_2$ du fil inférieur dirigée vers B. Le triangle ABM est équilatéral. Le mouvement ici est connu, on cherche les forces. La RFD donne $m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -m\omega^2 R\,\vec{u}_r$, le mouvement étant circulaire uniforme de rayon $R = L\cos\frac{\pi}{6}$.



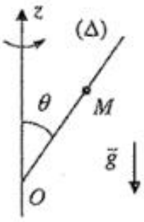
En projection sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$:

$$\begin{cases} T_1\cos\frac{\pi}{6} + T_2\cos\frac{\pi}{6} = m\,\omega^2 L\cos\frac{\pi}{6} \\ -mg + T_1\sin\frac{\pi}{6} - T_2\sin\frac{\pi}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} T_1 = m\left(\dfrac{L\omega^2}{2} + g\right) \\ T_2 = m\left(\dfrac{L\omega^2}{2} - g\right) \end{array}}$$

b) Le fil supérieur ne peut pas se détendre, le fil inférieur reste tendu si :

$$\boxed{\omega > \sqrt{\frac{2g}{L}}}$$

58. Anneau glissant sur un axe incliné en rotation



Un petit anneau, assimilé à un point matériel noté M, est enfilé sur une tige (Δ) sur laquelle il glisse sans frottement. La tige d'extrémité O fait avec l'axe Oz un angle θ constant et elle est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de Oz. On pose $OM = s$.

a) Pour quelle valeur s_e de s l'anneau est-il en équilibre par rapport à la tige ? Prévoir qualitativement, par l'étude des forces, si cette position d'équilibre est stable ou instable. Retrouver ce résultat avec l'énergie potentielle totale dans le référentiel relatif.

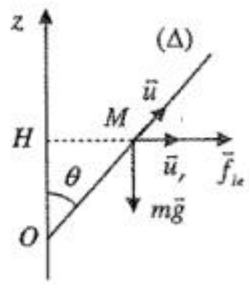
b) On abandonne l'anneau, avec une vitesse initiale nulle par rapport à la tige, en une position M_0 définie par $OM_0 = s_0$ (avec $s_0 \neq s_e$). Établir l'équation différentielle définissant le mouvement de M le long de la tige. La résoudre et en déduire $s = f(t)$.

Dans quel sens se produit le mouvement relatif de M si $s_0 > s_e$, si $s_0 < s_e$?

c) Déterminer, à chaque instant, les composantes de la réaction exercée par la tige sur l'anneau, en fonction de s, ω et θ.

58. Anneau glissant sur un axe inclinée en rotation

Le référentiel (R) lié à la tige (Δ) est en rotation pure uniforme autour d'un axe vertical fixe du référentiel terrestre galiléen, il n'est pas galiléen. Le vecteur rotation d'entraînement est $\vec{\omega}_e = \omega \vec{u}_z$ (pas de confusion possible ici avec $\dot{\theta}$ car θ est constant). L'étude de l'équilibre relatif est faite dans le référentiel relatif (R) lié à (Δ). Le système anneau, considéré comme un point matériel, est soumis à :



- son poids qui dérive de $E_{P1} = mgz + cste$
- la réaction normale à (Δ) (pas de frottements) qui ne travaille pas dans (R)
- $\vec{f}_{ie} = +m\omega^2 \overline{HM} = m\omega^2 s \sin\theta\, \vec{u}_r$ qui dérive de
$$E_{P2} = -\frac{1}{2} m\omega^2\ HM^2 + cste$$
- $\vec{f}_{ic} = -m(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r) = \vec{0}$ à l'équilibre relatif et qui, sinon, ne travaille pas dans (R)

a) La RFD : $m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}(M)_{(R)}$, à l'équilibre relatif et en projection sur $\vec{u}$:
$$-mg\cos\theta + 0 + m\omega^2 s\sin^2\theta + 0 = 0$$
Pour $\theta = 0$ il n'y a évidemment pas de solution $\Rightarrow$ $\boxed{s = s_e = \dfrac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}}$

Remarquer que pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ l'équilibre est logiquement $s_e = 0$.

Considérons un petit déplacement de M à partir de l'équilibre :
- vers le haut soit $s > s_e$; alors $\vec{f}_{ie}.\vec{u} = m\omega^2 s\sin^2\theta > mg\cos\theta$ et le mouvement vers le haut

■ Réponses aux questions

- vers le bas soit $s < s_e$; alors $\vec{f}_{ie}.\vec{u} = m\omega^2 s\sin^2\theta < mg\cos\theta$ et le mouvement vers le bas

<u>L'équilibre est instable.</u>

Le système est conservatif à un paramètre s, avec $z = s\cos\theta$, l'énergie potentielle est : $E_p = mgs\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2 s^2\sin^2\theta + cste$

$$\frac{dE_p}{ds} = mg\cos\theta - m\omega^2 s\sin^2\theta = 0 \Rightarrow s = s_e = \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$$

et $\frac{d^2E_p}{ds^2} = -m\omega^2\sin^2\theta < 0$ l'équilibre est instable.

b) La RFD projetée sur $\vec{u}$, colinéaire à (Δ) et orthogonal à $\vec{f}_{ic}$, donne :

$$-mg\cos\theta + 0 + m\omega^2 s\sin^2\theta + 0 = m\ddot{s} \Rightarrow \ddot{s} - \omega^2\sin^2\theta\, s = -g\cos\theta$$

équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre constant,

$$s(t) = A\mathrm{e}^{+(\omega\sin\theta)t} + B\mathrm{e}^{-(\omega\sin\theta)t} + \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$$

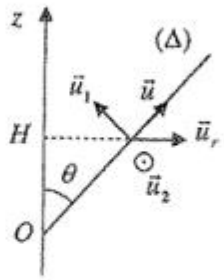
La solution particulière est la position d'équilibre $s = s_e$; avec les conditions initiales $s(0) = s_0$ et $\dot{s}(0) = 0$, on obtient :

$$\boxed{s(t) = s_e + \frac{s_0 - s_e}{2}\left(\mathrm{e}^{+(\omega\sin\theta)t} + \mathrm{e}^{-(\omega\sin\theta)t}\right)}$$

Si $s_0 > s_e$, $s(t)$ est une fonction croissante et le mouvement est vers le haut.

Si $s_0 < s_e$, $s(t)$ est une fonction décroissante et le mouvement est vers le bas.

c) La réaction de la tige peut maintenant être déterminée entièrement car le mouvement est connu, elle est orthogonale à la tige et s'écrit : $\vec{R}_n = R_1\vec{u}_1 + R_2\vec{u}_2$.



Il faut exprimer la force de Coriolis, avec la vitesse relative :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{(R)} = 2\omega\dot{s}\,(\vec{u}_z \wedge \vec{u}) = -2\omega\dot{s}\sin\theta\,\vec{u}_2$$

$$\Rightarrow \vec{f}_{ic} = 2m\omega\dot{s}\sin\theta\,\vec{u}_2$$

La RFD projetée sur $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$\begin{cases} -mg\sin\theta + R_1 - m\omega^2 s\sin\theta\cos\theta + 0 = 0 \\ 0 + R_2 + 0 + 2m\omega\dot{s}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

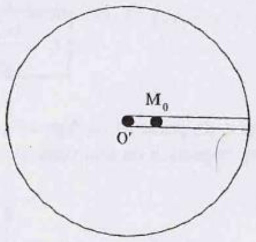
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} R_1 &= m\left(g\sin\theta + \omega^2 s\sin\theta\cos\theta\right) \\ R_2 &= -2m\omega\frac{ds}{dt}\sin\theta \end{aligned}}$$

La réaction dépend de la vitesse relative donc du mouvement.

Exercice avec le ressort bloqué

Exercice 7

Dans un laboratoire, un disque plan horizontal de rayon R tourne autour de son axe vertical avec une vitesse angulaire constante $\omega = 2$ rad.s^{-1}. Au temps $t = 0$, un point M, de masse m, est abandonné sans vitesse initiale par rapport au disque dans une rigole O'A liée au disque. Le mouvement de M dans la rigole se fait sans frottement.



A $t = 0$, M est situé au quart de la distance O'A ($O'M_0 = \frac{1}{4}R$).

1) Déterminer le temps t pour lequel M atteint le point A.

2) Tracer l'allure de la trajectoire de M dans le repère du laboratoire.

Exercice 8

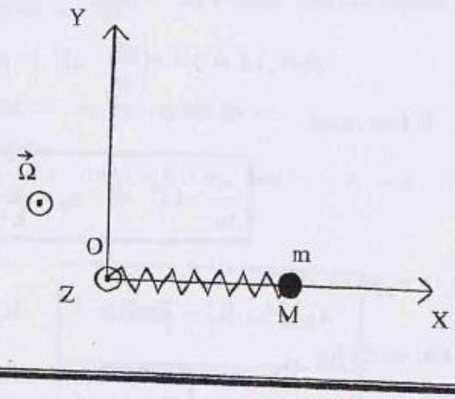
Une masse ponctuelle m est traversée par une tige rigide, et peut se déplacer sans aucun frottement le long de celle-ci. On accroche un ressort de constante de raideur k à m, et le ressort et la tige sont animés dans le plan horizontal d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse de rotation Ω autour de OZ.

On note $x = OM$ la longueur du ressort à l'instant t et L_0 la longueur à vide. A $t = 0$ les conditions initiales sont $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$.

1) Quelle est l'équation différentielle en x donnant le mouvement de m sur l'axe OX ?

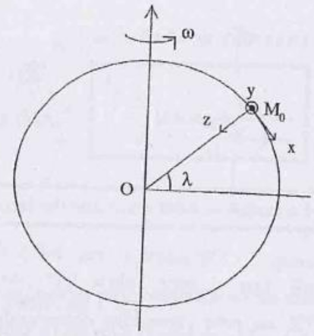
2) Analyser qualitativement les trois types de solution en précisant simplement la nature du mouvement de la masse m. On discutera les conditions pour lesquelles la masse reste immobile.

3) Quelle est la valeur du module de la réaction $\vec{R}$ qu'exerce la barre sur la masse ?



Exercice 11

On cherche à étudier la chute d'une masse m dans un puits de mine. Cette masse m est assimilable à un point matériel M et est abandonnée sans vitesse initiale en M_0. L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$, contenant l'accélération d'entraînement due au mouvement de rotation de la Terre, est supposée verticale et définit un axe M_0Z du repère relatif local. Les axes M_0X et M_0Y sont orientés suivant le schéma suivant :



1) Ecrire la relation fondamentale dans le repère non galiléen M_0XYZ et la projeter sur les axes.

2) En faisant certaines approximations, résoudre ce système et montrer que le point M ne tombe pas tout à fait verticalement, mais subit une légère déviation vers l'est.
Calculer la valeur de cette déviation mise en évidence par Reich en 1831 lors de la chute dans un puits de mine de 158 m de profondeur à la latitude $\lambda = 49°$.
On prendra $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$ et $\omega = 7{,}3.10^{-5}\ rad.s^{-1}$.

75. Pendule oscillant sur un plan incliné (*)

Un pendule simple, de masse m assez petite pour être considérée comme ponctuelle, est accrochée à un fil inextensible de longueur L. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point A fixe dans le référentiel terrestre galiléen.

Le point A est un point d'un plan incliné formant un angle α (constant) avec l'horizontale. La masse m oscille en glissant avec frottements sur le plan incliné, le coefficient de frottement solide est k. Le fil du pendule reste donc dans un plan parallèle au plan incliné.

La masse m lâchée avec une vitesse nulle du point M_1 (AM_1 fait l'angle $\theta_1 > 0$ avec la ligne de plus grande pente) remonte en un point M_2 qu'elle atteint avec une vitesse nulle (AM_2 fait l'angle $\theta_2 < 0$ avec la ligne de plus grande pente).

Exprimer k en fonction de α, θ_1 et θ_2.

La projection de (1) sur la normale au plan incliné (plan π) :

$-mg\cos\alpha + 0 + R_n + 0 = m\ddot{y} = 0$ car il n'y a pas de mouvement sur Oy.

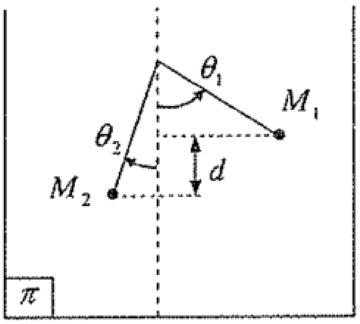
On a donc $\|\vec{R}_t\| = k\|\vec{R}_n\| = k\,mg\cos\alpha$.

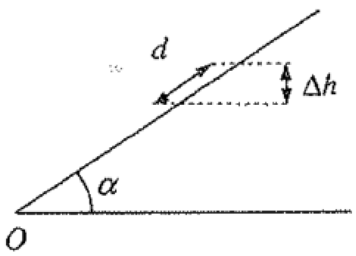
Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre M_1 et M_2 :

les vitesses en M_1 et M_2 sont nulles : $\Delta E_c = 0$

le travail de $\vec{T}$ orthogonale au déplacement est nul

le travail de $\vec{R}_n$ orthogonale au déplacement est nul





$W_{poids} = mg\,\Delta h$ avec $\Delta h = d\sin\alpha$ et $d = L(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$

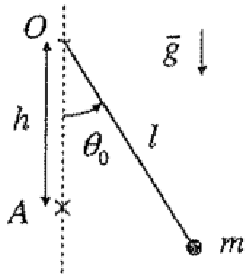
$W_{R_t} = -\|\vec{R}_t\| L(\theta_1 - \theta_2)$ car $\|\vec{R}_t\| = \text{cste}$ et $\vec{R}_t$ est portée par la tangente au mouvement (attention $\theta_2 < 0$).

$W_{poids} + W_{frott} = 0 \Rightarrow mgL(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\sin\alpha = k\,mg\cos\alpha\,L(\theta_1 - \theta_2)$

$$\boxed{k = \tan\alpha \frac{(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}{(\theta_1 - \theta_2)}}$$

Ce qui fournit une méthode de mesure du coefficient de frottement dynamique de glissement.

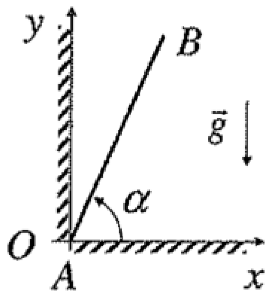
78. Pendule contrarié



Une masse ponctuelle m est accrochée à l'aide d'un fil sans masse de longueur l au point fixe O ; on la lâche avec une vitesse nulle et avec un angle θ_0. On suppose le mouvement dans un plan vertical. À la verticale de O, en un point A à la distance $h < l$, est fixé un clou, de section négligeable (on suppose que m a la même vitesse juste avant et juste après le contact du fil en A).

À quelle condition sur θ_0, la masse fait-elle un tour entier autour de A, fil tendu ?

50. La tige qui tombe (*)

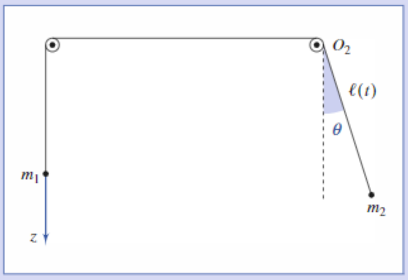


Ox est un sol horizontal et Oy un mur vertical. Une tige AB de masse m, de longueur $2l$ et de moment d'inertie par rapport à l'axe Oz : $J_\Delta = \frac{1}{3}m(2l)^2$ évolue dans le plan de la figure. Initialement, elle est verticale et cet équilibre (instable) est détruit de façon infinitésimale, ce qui signifie que sa vitesse initiale est quasi nulle. L'extrémité A peut tourner librement en O sans frottement.

a) Déterminer par une méthode au choix les expressions de $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$ en fonction de g, l et α.

b) Calculer, tant que A est en O, les composantes R_x et R_y de la force de contact s'exerçant en A sur la tige ; commentaires.

8 Un pendule particulier



Deux poulies, de masse et de dimensions négligeables, supportent un fil inextensible et sans masse aux extrémités duquel sont accrochées deux masses m_1 et m_2 :

- m_2 est assujettie à se déplacer uniquement le long d'un axe vertical ;
- m_1 peut osciller dans le plan vertical en plus du mouvement de translation.

1) Établir les équations des mouvements fixant l'évolution au cours du temps des fonctions $\ell(t)$ et $\theta(t)$.

2) Dans l'hypothèse d'oscillations de faible amplitude, linéariser les équations différentielles. En déduire les expressions de $\ell(t)$ et de $y(t) = \ell(t)\theta(t)$. Que représente $y(t)$? Montrer que, sous certaines conditions, on retrouve les oscillations d'un pendule simple.

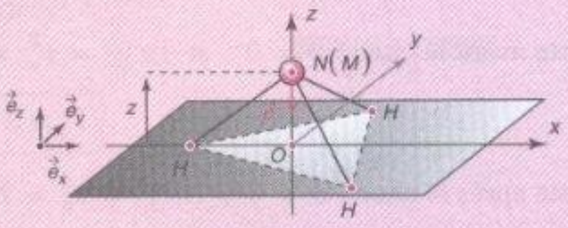
On pourra poser $a = g\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$.

2 – L'inversion de la molécule d'ammoniac

Dans un modèle simplifié de la molécule d'ammoniac NH_3, les trois atomes d'hydrogène H forment la base d'une pyramide dont l'azote N de masse m occupe le sommet.

• Les trois atomes d'hydrogène sont fixes dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen $\mathcal{R}_g(O\,;\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et définissent le plan (Oxy).

• L'atome d'azote est en mouvement suivant l'axe $(O\,;\vec{e}_z)$ perpendiculaire au plan des atomes d'hydrogène. Il peut passer de part et d'autre de ce plan et sa cote est notée z.



Le champ de pesanteur est négligeable pour décrire cette structure atomique et la résultante des forces électromagnétiques qui s'exercent sur l'atome d'azote N supposé ponctuel est :

$$\vec{F} = -\alpha z(z^2 - a^2)\vec{e}_z.$$

Les constantes α et a sont positives.

1 L'origine de l'énergie potentielle est choisie en $z = 0$. De quelle énergie potentielle $\mathscr{E}_P$ la force $\vec{F}$ dérive-t-elle ? Représenter graphiquement $\mathscr{E}_P$ lorsque z varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2 Définir la condition générale de stabilité d'un équilibre et déterminer les positions d'équilibres stables et instables de l'atome d'azote.

3 Une énergie $\Delta\mathscr{E} \leq \frac{1}{4}\alpha a^4$ est cédée au système au moment où l'atome d'azote est dans une position d'équilibre stable. Montrer graphiquement que l'atome d'azote va osciller entre deux valeurs limites z_1 et z_2. Déterminer la fréquence des petites oscillations.

4 Que se passe-t-il si l'énergie cédée $\Delta\mathscr{E}$ est supérieure à $\frac{1}{4}\alpha a^4$?

5 *** 30 min

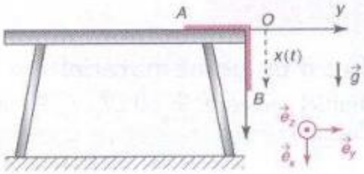
➤ Corrigé p. 106

Chute d'une chaîne

La notion de point matériel est utilisable pour le centre d'inertie d'un système et permet l'étude d'un système solide quelconque en décomposant celui-ci « par la pensée » en éléments matériels considérés comme quasi-ponctuels.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O\,;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur d'intensité g est uniforme.

Une chaîne de longueur ℓ repose en partie sur une table horizontale. Sa masse m est uniformément répartie sur toute la longueur ℓ. La chaîne est lâchée sans vitesse initiale quand son extrémité B est située en $x(0) = x_0$. Le contact entre la chaîne et la table est supposé sans frottement.



1. On pose $\tau^2 = \dfrac{\ell}{g}$. En quelle unité le paramètre τ s'exprime-t-il ?

2. Exprimer l'énergie cinétique $\mathscr{E}_C(\dot{x})$ de la chaîne, en fonction de m et de $\dot{x}$, en la décomposant en éléments matériels ponctuels constitués par chacun de ses maillons.

3. Considérons la partie pendante OB de la chaîne. Exprimer son poids en fonction de m, ℓ, g et de sa longueur x. Quel est le point d'application de cette force ? Donner l'énergie potentielle de pesanteur $\mathscr{E}_P^{\text{pes}}(x)$ de ce fragment de chaîne.

4. En écrivant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par x.

5. En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de x_0, τ et t.

Exercice de la poutre pour les moments cinétiques

Plan incliné

Chaîne – pendule contrarié

Cerceau