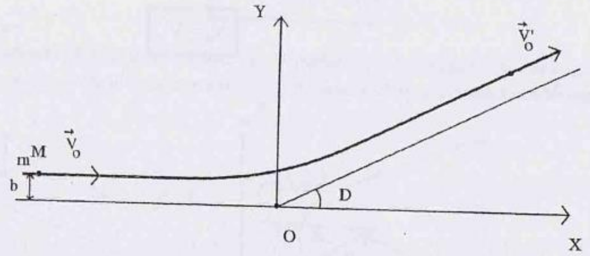
Exercice 4

Rutherford a été le premier à mettre en évidence l'existence du noyau à l'intérieur des atomes en étudiant des expériences de diffusion de particules α.

Une particule α de charge $q = 2e$ et de masse m se dirige vers un noyau lourd de charge Ze placé au point O. Le noyau sera considéré comme fixe durant la diffusion. A l'infini, la vitesse $\vec{V}_o$ de la particule est parallèle à OX, son support étant distant de b de cet axe.

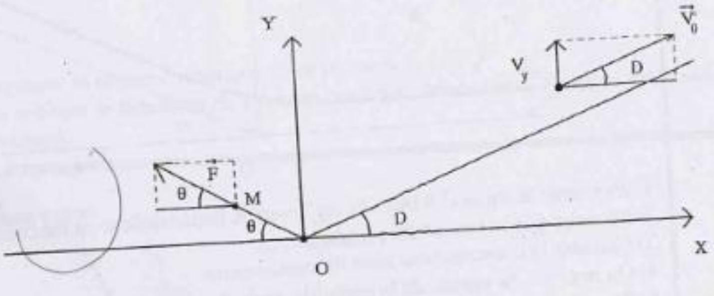


1) Exprimer la force $\vec{F}$ à laquelle est soumise la particule α en fonction de $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.
2) Montrer que la trajectoire est plane.
3) Calculer la constante des aires du mouvement.
4) On note $\vec{V}'_o$ la vitesse de la particule après l'interaction. Montrer que $V'_o = V_o$.
5) En utilisant la RFD et la constante des aires, calculer la composante V_y de $\vec{V}'_0$.
6) En déduire la relation donnant la déviation D de la particule α :

$$\tan\frac{D}{2} = \frac{Ze^2}{2\pi V_o^2 bm}$$

1)

5)



Soit θ l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe X. Nous avons alors :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

En projetant sur l'axe Y, cette relation donne :

$$m\frac{dV_y}{dt} = F\sin\theta = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$$

La relation $C = r^2\dot{\theta} = V_0 b$ donne $r^2 = \frac{V_0 b}{\dot{\theta}}$. La relation précédente devient :

$$m\frac{dV_y}{dt} = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 V_0 b}\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{d'où : } dV_y = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m V_0 b}\sin\theta d\theta$$

Par intégration entre le début et la fin de l'interaction, nous obtenons :

$$\int_0^{V_y} dV_y = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m V_0 b}\int_0^{\pi-D}\sin\theta d\theta$$

$$\text{soit : } V_y = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m V_0 b}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi-D} \Rightarrow \boxed{V_y = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m V_0 b}(1+\cos D)}$$

6) A la fin de l'interaction, $V_y = V'_0 \sin D = V_0 \sin D$. On obtient ainsi :

$$V_0 \sin D = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m V_0 b}(1+\cos D)$$

Exercice 4

Une particule α (noyau d'Hélium ^4_2He) est lancée avec une vitesse $V_0 = 10^7$ m.s^{-1} vers un noyau d'or ($^{197}_{79}Au$) que l'on supposera constamment immobile. La particule subit une rétrodiffusion de 180°, c'est-à-dire qu'elle revient sur elle-même après interaction avec le noyau.

1) Expliquer rapidement le phénomène.

2) En déduire la vitesse de rétrodiffusion V' de la particule α et la distance minimale d'approche r_{min} du noyau d'or lors de l'interaction.

masse d'un nucléon : $m_n = 1{,}66.10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}6.10^{-19}$C ; $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ SI

L'analyse de la formule précédente permet d'obtenir les résultats suivants :

-- Après l'interaction, la particule α repartant à l'infini vers la gauche ($r \to \infty$), nous aurons :

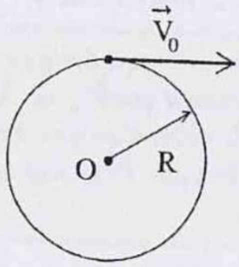
$$E_m = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m V'^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V' = V_0 = 10^7 \text{ m.s}^{-1}}$$

-- La distance minimale entre les noyaux correspond à une vitesse nulle d'où :

$$E_m = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{min} = \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 m V_0^2} = 2{,}7.10^{-13} \text{ m}}$$

Exercice 5

On tire horizontalement un projectile à la surface de la Terre avec une vitesse V_0 telle que $V_0^2 = \alpha \dfrac{GM_T}{R}$ $(1 \leq \alpha \leq 2)$, G désignant la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre et R son rayon.



En raisonnant sur l'énergie potentielle efficace, calculer les altitudes maximale et minimale du projectile. Interpréter les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

soit après simplification : $\left(\dfrac{\alpha-2}{R}\right)r^2 + 2r - \alpha R = 0$ $\qquad \Delta' = 1 + \alpha(\alpha - 2) = (\alpha - 1)^2$

Cette équation admet comme solutions :

$\boxed{r_1 = r_{min} = R}$ $\qquad$ $\boxed{r_2 = r_{max} = \dfrac{\alpha}{2-\alpha} R}$

Dans le cas $\alpha = 1$, r_{min} et r_{max} sont confondus et le projectile décrit le cercle de rayon R.

Dans le cas $\alpha = 2$, r_{max} est infini et le projectile part à l'infini.

Exercice 3

Un satellite décrit une orbite circulaire à l'altitude h autour de la Terre.

1) Montrer que les énergies potentielle, cinétique et mécanique du satellite sont telles que :

$$E_m = -E_C = \frac{1}{2} E_P$$

2) Par suite de l'existence de frottement avec l'atmosphère, le satellite perd légèrement de l'altitude à chaque rotation ($|dh| << h$). On admet cependant que la trajectoire reste circulaire en première approximation.

Trouver la relation liant la variation de vitesse dV à la variation d'altitude dh à chaque tour.

AN) On donne : $g_0 = 9{,}8 \text{m.s}^{-2}$; $R = 6400$ km ; $dh = -1$ m ; $h = 500$ km.

Calculer dV et commenter le résultat.

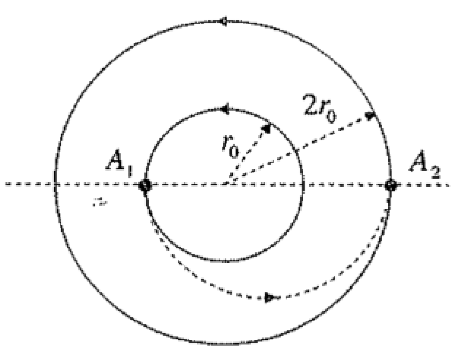
2) Le mouvement restant circulaire, l'énergie mécanique diminue constamment et $dE_m = -dE_c$. Comme à chaque rotation $dE_m = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{(R+h)^2}dh$ et $dE_c = mVdV$, on en déduit : $dV = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM_T}{(R+h)^3}}\,dh$. Avec la relation $g_0R^2 = GM_T$, on obtient :

$$\boxed{dV = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_0R^2}{(R+h)^3}}\,dh} \quad \text{AN) } dV = 5{,}5.10^{-4}\ m.s^{-1}.$$

L'écart de vitesse est très faible, mais ce qui est surprenant, c'est que V augmente durant la chute. Ceci vient du fait que si la force de frottement a tendance à freiner le satellite, le poids de celui-ci fournit un travail positif durant la chute. Ainsi, globalement, le satellite gagne en vitesse à chaque rotation car la somme des travaux est positive.

41. Transfert d'orbites d'un satellite

a) On veut porter un satellite de la trajectoire circulaire $r_1 = r_0$ où sa vitesse est v_0 à la trajectoire circulaire $r_2 = 2r_0$ grâce à un réacteur (on suppose cependant que la masse m du satellite reste constante). En un point A_1, cela revient à lui communiquer une vitesse $v_1' > v_0$ de telle façon qu'il décrive une ellipse (dite de transfert) de grand axe A_1A_2 (la variation de vitesse se produit sur une durée suffisamment brève pour pouvoir considérer que pendant cette variation la vitesse garde la même direction et que l'altitude ne change pas). Il arrive en A_2 avec une vitesse v_2'. On lui communique alors une vitesse v_2 (toujours de façon quasi instantanée) pour qu'il décrive une trajectoire circulaire de rayon r_2.



41. Les énergies, dans le référentiel géocentrique valent, en notant $k = GM_T m$: sur la 1re trajectoire circulaire $E_1 = -\frac{k}{2r_0}$; sur la 2e $E_2 = -\frac{k}{4r_0}$; et sur l'ellipse de transfert $E_t = -\frac{k}{2a} = -\frac{k}{3r_0}$ car $A_1A_2 = 2a = 3r_0$.

Les variations d'énergie mécanique sont dues à un travail des forces intérieures, ici l'énergie est fournie par le moteur du satellite, ce qui permet le changement de trajectoire. L'énergie dépensée par le moteur du satellite est $E_2 - E_1 = \frac{k}{4r_0}$.

En A_1^- : $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0} = -\frac{k}{2r_0}$ soit $v_0^2 = \frac{k}{mr_0}$ (trajectoire circulaire de rayon r_0)

En A_1^+ : $\frac{1}{2}mv_1'^2 - \frac{k}{r_0} = -\frac{k}{3r_0}$ soit $v_1'^2 = \frac{4}{3}\frac{k}{mr_0}$; le rapport donne $\boxed{v_1' = \frac{2}{\sqrt{3}}v_0}$

De A_1^+ en A_2^- sur l'ellipse de transfert, la conservation du moment cinétique : $r_0 v_1' = 2r_0 v_2'$ conduit à :

$$\boxed{v_2' = \frac{v_1'}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{3}}}$$

En A_2^- : $\frac{1}{2}mv_2'^2 - \frac{k}{2r_0} = -\frac{k}{3r_0}$ soit $v_2'^2 = \frac{1}{3}\frac{k}{mr_0}$ (conforme au résultat ci-dessus)

En A_2^+ : $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{k}{2r_0} = -\frac{k}{4r_0}$ soit $v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{mr_0}$ (trajectoire circulaire de rayon $2r_0$)

le rapport donne $\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}v_2' = \frac{v_0}{\sqrt{2}}}$

Ce dernier résultat était prévisible car sur une trajectoire circulaire $v = \sqrt{GM/r}$ et donc si r_0 est multiplié par 2, v_0 est divisé par $\sqrt{2}$.

b) Pour décrire une trajectoire parabolique il faut une énergie nulle : $\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{k}{2r_0} = 0$ soit $v_3^2 = \frac{k}{mr_0} = v_0^2$. Et $\boxed{v_3 = v_0}$, en fait v_3 est la vitesse de libération à l'altitude $2r_0$, qui vaut bien $\sqrt{2}\,v_{circ}$. La variation de vitesse nécessaire est $v_3 - \frac{v_0}{\sqrt{2}} = v_0\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

43. Satellite freiné par l'atmosphère

a) Un satellite est en orbite circulaire autour de la Terre. Montrer qu'il existe alors une relation simple entre E_c et E_p, et exprimer E en fonction de r seulement.

b) En déduire le « paradoxe » du satellite freiné par sa rentrée dans l'atmosphère et qui voit sa vitesse augmenter.

c) Son altitude est $h = 180$ km, et la force de frottement en norme est modélisée par $\beta m v^2 / h$ où $\beta = 10^{-8}$ SI. Préciser l'unité de β et justifier la dépendance en $1/h$ de cette force. Déterminer l'expression de la variation d'altitude Δh après une

révolution, en considérant que sur un tour, la trajectoire reste quasiment circulaire, ce qui conduit à faire un calcul au premier ordre : $h \ll R_T$.

c) mv^2/h est le rapport d'une énergie par une distance, c'est donc une grandeur homogène à une force et donc β est sans unité.

Plus l'altitude décroît, plus l'atmosphère devient dense et donc plus la force de freinage augmente ; c'est ce qui justifie sa dépendance en $1/h$.

La force de frottement est $\vec{F} = -\dfrac{\beta m}{h} v^2 \vec{u}_\theta$; son travail sur une révolution (en supposant toujours l'orbite quasi circulaire) est :

$$W_{\vec{F}} = \int_{tour} \vec{F}.\vec{dl} = \int_0^{2\pi} \vec{F}.r\,d\theta\,\vec{u}_\theta \approx -\frac{\beta m}{h} v^2 .2\pi r$$

et avec $v = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}$, $W_{\vec{F}} = -\dfrac{2\pi\beta\, GmM_T}{h}$ (1)

L'énergie du satellite est, avec $h \ll R_T$:

$$E = -G\frac{M_T m}{2r} = -G\frac{M_T m}{2(R_T + h)} \approx -G\frac{M_T m}{2R_T}\left(1 - \frac{h}{R_T}\right) \quad (2) \quad \text{car} \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit en cas de non conservation de l'énergie mécanique comme ici :

$\Delta E = W_{\vec{F}}$ soit d'après les expressions (2) et (1) : $G\dfrac{M_T m}{2R_T^2}\Delta h = -\dfrac{2\pi\beta\, GmM_T}{h}$

et finalement : $\boxed{\Delta h = -\dfrac{4\pi\beta R_T^2}{h}}$

AN : $\Delta h = -28{,}3$ m, variation très faible justifiant l'hypothèse de la trajectoire quasi circulaire.

Hiroshima sur la lune

Temps de visibilité d'une comète

Exercice 15.4 : Énergie cinétique d'un ballon

On considère un ballon de football, de masse $m = 0,60$ kg et de rayon $r = 11$ cm, animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à une vitesse de valeur $v = 30$ m.s^{-1}.
Déterminer quel pourcentage d'énergie cinétique gagne ce ballon s'il est en outre animé d'un mouvement de rotation sur lui-même à la vitesse angulaire $\omega = 20$ rad.s^{-1}.
On rappelle le moment d'inertie d'une sphère creuse de masse m et de rayon R, par rapport à tout axe de rotation (Δ) passant par son centre : $J_\Delta = \frac{2}{3}mR^2$.

Commençons par exprimer l'énergie cinétique associée à la translation du ballon :

$$E_{c,t} = \frac{1}{2}mv^2$$

Exprimons de même l'énergie liée à la rotation du ballon sur lui-même :

$$E_{c,r} = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = \frac{1}{3}mr^2\omega^2$$

Le gain en énergie cinétique apporté par la rotation comparativement à la seule rotation s'exprime :

$$100 \times \frac{E_{c,r}}{E_{c,t}} = 100 \times \frac{2}{3}\left(\frac{r\omega}{v}\right)^2 = 0,35\ \%$$

Problème 3 : Chute d'une tartine beurrée 1 (Mines-Ponts 1999)

Préoccupé dès le petit-déjeuner par un problème résistant à sa sagacité, un physicien pose distraitement sa tartine beurrée en déséquilibre au bord de la table, côté beurré vers le haut (figure 1). La tartine tombe et atterrit sur le côté beurré, ce qui ne manque pas d'attirer l'attention du physicien. Répétant l'expérience avec méthode et circonspection, notre héros observe la répétitivité du phénomène et le modélise. Nous allons lui emboîter le pas.

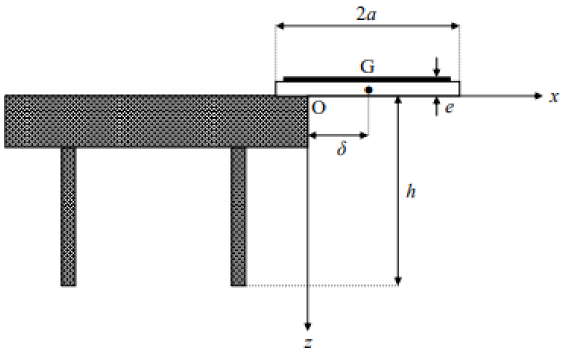


Figure 1 : tartine sur table

Une tartine rectangulaire de longueur $2a$, de largeur $2b$ et d'épaisseur e, de masse m uniformément répartie, est placé au bord d'une table de hauteur h. Le mouvement est décrit dans le repère $R(O,x,y,z)$, direct et supposé galiléen : O est sur le bord de la table, l'axe Ox est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table ; l'axe Oy est porté par le rebord de la table et l'axe Oz, vertical, est dirigé vers le bas ; les petits côtés de la tartine sont parallèles à Oy.

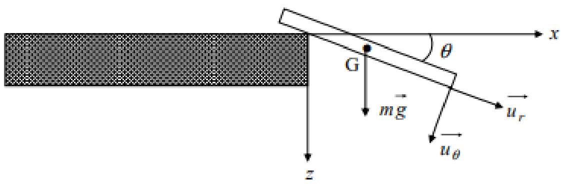


Figure 2 : chute d'une tartine

A l'instant initial, la tartine, supposée d'épaisseur nulle, est horizontale, sa vitesse est nulle. Les coordonnées de son centre de masse G sont $(\delta,0,0)$. La tartine amorce une rotation *sans glissement* autour de l'arête Oy du bord de la table. A l'instant t, la tartine est repérée par l'angle θ de la figure 2. La vitesse angulaire est notée $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$. Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Gy, parallèle à Oy et passant par G, est $J_{Gy}=\dfrac{1}{3}ma^2$ et par rapport à l'axe Oy il est $J_{Oy}=J_{Gy}+m\delta^2=\left(\dfrac{a^2}{3}+\delta^2\right)m$.

1. En introduisant les réactions tangentielle et normale de la table en O, notées respectivement T et N dans la base $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$ représentée sur la figure 2, exprimer le théorème du mouvement du centre de masse, dans le repère galiléen $\mathrm{R}(\mathrm{O}, x, y, z)$, en projection dans la base mobile $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$; on notera g l'intensité de l'accélération de la pesanteur.

2. Exprimer le théorème du moment cinétique pour la tartine, en projection sur l'axe $\mathrm{O}y$. Le *coefficient de surplomb* étant défini par $\eta = \frac{\delta}{a}$ (la distance δ est appelée *distance de surplomb*), en déduire la relation (qui définit, au passage, la vitesse angulaire ω_0) : $\omega^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2} \sin\theta = \omega_0^2 \sin\theta$ (A).

3. Retrouver la relation (A) par des considérations énergétiques.

4. La tartine quitte la table à un instant pris comme origine des temps, l'angle θ vaut alors $\frac{\pi}{2}$, la vitesse angulaire initiale est ainsi ω_0. Quelle est la loi d'évolution ultérieure de l'angle θ ? (on suppose, bien entendu, que le mouvement reste plan et qu'il n'y a pas de contact ultérieur avec la table).

5. On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, à l'instant τ, elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable. Quel est l'angle limite θ_1 tel que la tartine atterrisse côté pain, en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol ?

6. On suppose $\eta << 1$ $(\delta << a)$; montrer que la durée de chute libre (cette dernière commençant lorsque le centre de masse G de la tartine est presque en O) est $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Calculer τ pour $h = 75\,\mathrm{cm}$ et $g = 9{,}8\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

Quelle est la chance de rattraper la tartine avant qu'elle n'atteigne le sol ?

7. Quelle est la valeur $\eta_{\min}$ de η permettant à la tartine d'atterrir côté pain ?

Dans les circonstances courantes, le coefficient de surplomb η ne dépasse guère 0,02. Qu'en déduit-on sur la chute de la tartine ?

8. Comment les considérations précédentes seraient-elles modifiées sur la planète Mars, où le champ de pesanteur vaut $g_{Mars} = 3{,}7\,\mathrm{m.s^{-2}}$?

9. Il est raisonnable de penser que la hauteur d'un éventuel organisme humanoïde marchant sur deux jambes est conditionnée par la valeur du champ de pesanteur de la planète où il vit (par exemple, la hauteur maximale serait celle au-delà de laquelle une chute sur la tête serait certainement mortelle). Sous l'hypothèse que cet humanoïde aurait la même constitution que les Terriens (même résistance de la boîte crânienne, par exemple), quel serait l'ordre de grandeur de sa taille ? Un martien vérifierait-il lui aussi, sous les mêmes hypothèses, que sa tartine beurrée tombe presque toujours sur le côté tartiné ?

1. On étudie le mouvement d'une tartine beurrée dans le référentiel terrestre galiléen. Elle subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ uniforme et vertical (qui s'applique en G) et la réaction $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ de l'arête de la table (qui s'applique en O, point de contact entre la tartine et l'arête).

Le théorème du centre de masse appliqué à la tartine dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit $m\overrightarrow{a_G} = \vec{P} + \vec{R}$.

Dans la base polaire $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$:

$$\overrightarrow{a_G} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\delta\overrightarrow{u_r}\right) = \delta\left(-\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + \ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right),\ \vec{P} = mg\overrightarrow{u_z} = mg\left(\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta}\right) \text{ et } \vec{R} = T\overrightarrow{u_r} + N\overrightarrow{u_\theta}.$$

En projetant sur $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$ on obtient $\boxed{\begin{cases} -m\delta\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - T \\ m\delta\ddot{\theta} = mg\cos\theta - N \end{cases}}$.

2. Le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe O s'écrit $\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt} = \overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}\right) + \overrightarrow{M_O}\left(\vec{R}\right)$.

La tartine effectue un mouvement de rotation autour de l'arête Oy fixe donc $\overrightarrow{\sigma_O} = J_{Oy}\vec{\omega}$ avec $\vec{\omega} = \left(-\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_y}$.

$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}\right) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \delta\overrightarrow{u_r} \wedge mg\left(\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta}\right) = -\delta mg\cos\theta\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{M_O}\left(\vec{R}\right) = \vec{0}$ car $\vec{R}$ s'applique en O.

On en déduit $-J_{Oy}\ddot{\theta}\overrightarrow{u_y} = -\delta mg\cos\theta\overrightarrow{u_y}$, soit $\ddot{\theta} = \dfrac{\delta mg\cos\theta}{J_{Oy}}$.

Or $J_{Oy} = \left(\dfrac{a^2 + 3\delta^2}{3}\right)m$, d'où $\ddot{\theta} = \dfrac{3\delta g}{a^2 + 3\delta^2}\cos\theta = \dfrac{g}{a}\dfrac{3\dfrac{\delta}{a}}{1 + 3\dfrac{\delta^2}{a^2}}\cos\theta$.

En posant $\eta = \dfrac{\delta}{a}$ on obtient $\ddot{\theta} = \dfrac{g}{a}\dfrac{3\eta}{1+3\eta^2}\cos\theta$.

On multiplie par $\dot{\theta}$: $\dot{\theta}\ddot{\theta} = \dfrac{g}{a}\dfrac{3\eta}{1+3\eta^2}\dot{\theta}\cos\theta$ et on intègre avec $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, soit

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{a}\frac{3\eta}{1+3\eta^2}\sin\theta.$$

En notant $\omega = \dot{\theta}$, on obtient $\boxed{\omega^2 = \dfrac{g}{a}\dfrac{6\eta}{1+3\eta^2}\sin\theta}$, ou bien $\omega^2 = \omega_0^2\sin\theta$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{g}{a}\dfrac{6\eta}{1+3\eta^2}$.

3. Etudions la question précédente à l'aide de considérations énergétiques : en effet puisqu'il n'y a pas de glissement, $\vec{R}$ ne travaille pas et le poids est conservatif, donc l'énergie mécanique E_m de la tartine se conserve. Elle s'écrit $E_m = E_c + E_p$, avec l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} J_{Oy} \dot{\theta}^2$ (la tartine est en rotation autour d'un axe fixe), et E_p comprend seulement le terme d'énergie potentielle de pesanteur ($\vec{R}$ ne travaille pas), soit $E_p = -mgz_G = -mg\delta \sin\theta$, soit $E_m = \frac{1}{2} J_{Oy} \dot{\theta}^2 - mg\delta \sin\theta$.

Puisque E_m se conserve $E_m = E_m(0) = 0$ car $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, soit $\frac{1}{2} J_{Oy} \dot{\theta}^2 - mg\delta \sin\theta = 0$ et $\dot{\theta}^2 = \frac{2mg\delta \sin\theta}{J_{Oy}}$. Avec $J_{Oy} = \left(\frac{a^2 + 3\delta^2}{3}\right) m$, on obtient $\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2} \sin\theta}$ (même relation qu'en 2).

4. Prenons une nouvelle origine des temps : la tartine quitte la table en $t = 0$, et les conditions initiales de la chute sont alors $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\dot{\theta}(0) = \omega(0) = \omega_0 \sqrt{\sin\theta(0)} = \omega_0$.

La tartine n'est alors soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\overrightarrow{u_z}$ (qui s'applique en G).

Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique s'écrit $\frac{d\overrightarrow{\sigma_G}}{dt} = \overrightarrow{M_G}(\vec{P}) = \overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$.

On en déduit $\overrightarrow{\sigma_G} = \overrightarrow{cte}$. Or $\overrightarrow{\sigma_G} = \overrightarrow{\sigma^*} = J_{Gy}\vec{\omega} = -\frac{1}{3} ma^2 \omega \overrightarrow{u_y}$, d'où $\omega = \dot{\theta} = cte = \omega_0$ et $\theta = \omega_0 t + \theta(0)$, et finalement $\boxed{\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{2}}$.

5. Pour que la tartine atterrisse côté pain il faut $\theta > \frac{3\pi}{2}$, soit $\boxed{\theta_1 = \frac{3\pi}{2}}$.

8. L'expression de $\eta_{\min}$ est indépendante de g donc sur Mars la tartine atterrit aussi du côté beurré.

Sur Mars le temps de chute s'écrit $\tau_{Mars} = \sqrt{\dfrac{2h}{g_{Mars}}}$, soit $\tau_{Mars} = 0{,}63\ \text{s}$, on a plus de chance de rattraper la tartine avant qu'elle n'atteigne le sol.

9. Sur Mars l'énergie se conserve de la même manière que sur Terre, de sorte que lors d'une chute sur la tête l'énergie potentielle est convertie en énergie cinétique. L'énergie potentielle d'un point de la tête est de la forme $E_p = mgz$, la masse m à la même valeur sur Terre et sur Mars, donc $(gz)_{Terre} = (gz)_{Mars}$.

On en déduit, en appelant h_t la hauteur d'un terrien et h_m la hauteur d'un martien, que $h_t g = h_m g_{Mars}$.

Avec $h_t = 1{,}8\ \text{m}$, on obtient la hauteur d'un martien : $\boxed{h_m = 4{,}8\ \text{m}}$

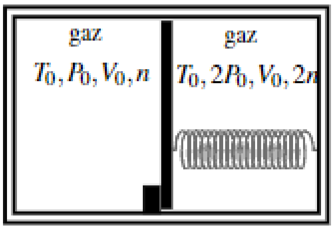
De même, la hauteur H de la table d'un martien serait de l'ordre de $H = h \cdot \dfrac{g}{g_{Mars}} = 2\ \text{m}$, de sorte que le temps de chute serait $\tau' = \sqrt{\dfrac{2H}{g_{Mars}}} = 1\ \text{s}$: la martien a une chance de rattraper la tartine avant qu'elle n'atteigne le sol.

L'expression de $\eta_{\min}$ étant indépendante de g, sur Mars la tartine atterrit aussi du côté beurré.

10. Le glissement de la tartine au début s'effectue sur un temps très court donc ne modifie pas le temps de chute de la tartine. En revanche, s'il y a frottement, ceci diminue l'énergie totale de la tartine, ce qui diminue ω, donc $\eta_{\min}$ augmente : la tartine aura encore plus de chance de retomber du côté beurré.

22.3 Recherche d'un état final ($\star$)

Une enceinte indéformable aux parois calorifugées est séparée en deux compartiments par une cloison étanche de surface S, mobile, diathermane et reliée à un ressort de constante de raideur k. Les deux compartiments contiennent chacun un gaz parfait. Dans l'état initial, le gaz du compartiment 1 est dans l'état (T_0, P_0, V_0), le gaz du compartiment 2 dans l'état $(T_0, 2P_0, V_0, 2n)$, une cale bloque la cloison mobile et le ressort est au repos. On enlève la cale et on laisse le système atteindre un état d'équilibre.



1. Décrire l'évolution du système.

2. Écrire cinq relations faisant intervenir certaines des six variables d'état : V_1, V_2 (volumes finaux des deux compartiments), P_1, P_2 (pressions finales dans les deux compartiments), T_1, T_2 (températures finales dans les deux compartiments).