

5.3 Détection de pluie sur un pare-brise

1. Il peut y avoir réflexion totale en I , car le rayon passe du verre à l'air qui est moins réfringent. On calcule l'angle de réflexion limite en I : $R_{\text{lim},v} = \arcsin \frac{1}{n_v} = 41,8^\circ$ (on a pris 1 pour l'indice de l'air). Il y a réflexion totale en I si $i > R_{\text{lim},v}$, ce qui est le cas pour $i = 60^\circ$. Le flux lumineux est donc entièrement réfléchi.

Pour trouver la position du détecteur, on applique la loi de réflexion en I : le rayon est réfléchi symétriquement par rapport à la normale : la distance entre l'émetteur E et le détecteur D doit donc être : $ED = 2e \tan i = 1,7 \text{ cm}$.

2. Les deux dioptries sont maintenant verre-eau et eau-air. Dans les deux cas, il peut y avoir réflexion totale. On calcule les deux angles de réflexion totale :

- Pour le dioptre verre-eau :

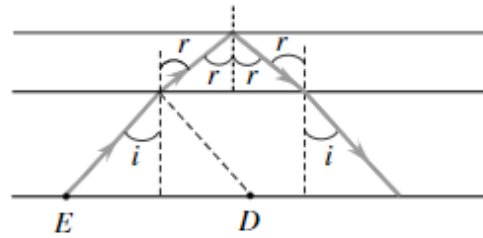
$$n_v \sin R_{\text{lim},1} = n_e \sin \pi/2 \text{ soit } R_{\text{lim},1} = 62,5^\circ.$$

- Pour le dioptre eau-air :

$$n_e \sin R_{\text{lim},2} = \sin \pi/2 \text{ soit } R_{\text{lim},2} = 48,75^\circ.$$

L'angle i est inférieur à $R_{\text{lim},1}$, il y a donc réfraction sur le premier dioptre. On calcule l'angle r après réfraction : $n_v \sin i = n_e \sin r$ donc $r = 77,6^\circ$.

L'angle r est aussi l'angle d'incidence sur le deuxième dioptre, il y a donc réflexion totale sur ce dioptre puisque $r > R_{\text{lim},2}$. On obtient la marche du rayon lumineux représenté sur la figure. On constate que le rayon lumineux ne tombe plus sur le détecteur mais à distance $2e' \tan r = 0,9 \text{ cm}$ de celui-ci. Un système de commande relié au détecteur peut alors déclencher les essuie-glaces.



5.5 Incidence de Brewster

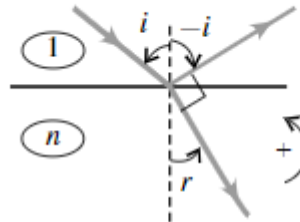
1. D'après la figure on doit avoir :

$$r + \frac{\pi}{2} + i = \pi \text{ soit } r = \frac{\pi}{2} - i.$$

La loi de la réflexion, $\sin i = n \sin r$, donne alors : $\sin i = n \cos i$ soit $\tan i = n$. L'angle d'incidence de Brewster est : $i_B = \arctan(n)$.

Application numérique : pour l'eau $i_{B,\text{eau}} = 53^\circ$ et pour le verre $i_{B,\text{verre}} = 56^\circ$.

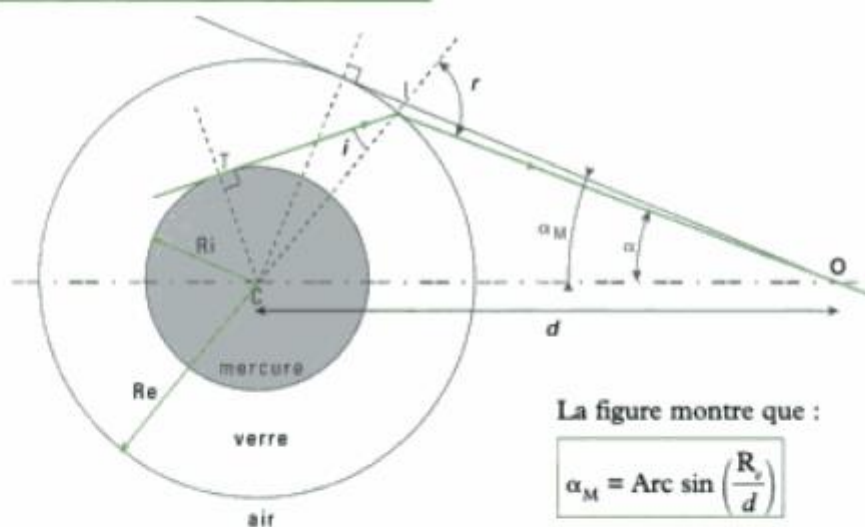
2. En munissant l'objectif d'un polariseur, on peut réduire voire éliminer (si l'incidence est l'incidence de Brewster) les reflets sur l'eau ou sur une vitre en orientant convenablement le polariseur.



A.4

Exercice 11

a)



La figure montre que :

$$\alpha_M = \text{Arc sin} \left(\frac{R_e}{d} \right)$$



- b) Nous cherchons le plus grand angle α tel que la colonne de mercure envoie de la lumière au point O. Par voie de conséquence nous cherchons aussi le plus grand angle r et donc le plus grand angle i qui remplissent cette même condition. En I, le rayon qui donne le plus grand angle i est IT qui se confond avec la tangente au cercle de rayon R_i .

En I nous avons $n \sin i = \sin r$

Or dans le triangle TCI on a $\sin i = \frac{R_i}{R_e}$

On en déduit que $\sin r = n \frac{R_i}{R_e}$

La relation du sinus et de l'angle opposé dans le triangle CIO (non rectangle) donne :

$$\frac{\sin \alpha}{CI} = \frac{\sin (\pi - r)}{CO}$$

$$\text{soit } \sin \alpha = \frac{CI \sin r}{CO} = \frac{R_e}{d} \cdot n \frac{R_i}{R_e} = \frac{n R_i}{d}$$

Alors,
$$\alpha = \text{Arc sin} \left(\frac{n R_i}{d} \right)$$

c) Le mercure semblera occuper tout le tube si $\alpha = \alpha_M$

soit $\frac{n R_i}{d} = \frac{R_e}{d}$ donc $n R_i = R_e$

d) On trouve $\alpha_M = 0,012 \text{ rad}$ soit $0,68^\circ$ ou $41'$

$\alpha = 0,002 \text{ rad}$ soit $0,138^\circ$ ou $8'$

Pour que le mercure semble occuper tout le tube il faut que $R_e = n R_i$ soit $R_e = 0,6 \text{ mm}$.

L'épaisseur du tube est $\frac{2}{10}$ de mm, ce qui le rend très cassant.

Exercice 1

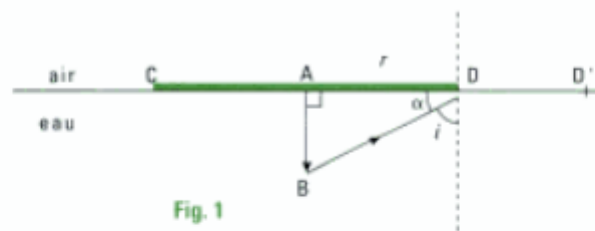


Fig. 1

AB matérialise la grenouille et CD le nénuphar (fig. 1).



Pour que la grenouille ne soit pas vue depuis l'air, il faut que le rayon BD soit toujours réfléchi totalement. Tout autre rayon BD' le sera alors obligatoirement puisque $\angle ADB > \angle AD'B$ (méthode 2).

On a donc $i > i_{\text{lim}}$ donc $\alpha < \frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}$ et $\tan \alpha < \tan \left(\frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}} \right)$

Or, $\tan \alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{h}{r} < \tan \left(\frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}} \right)$

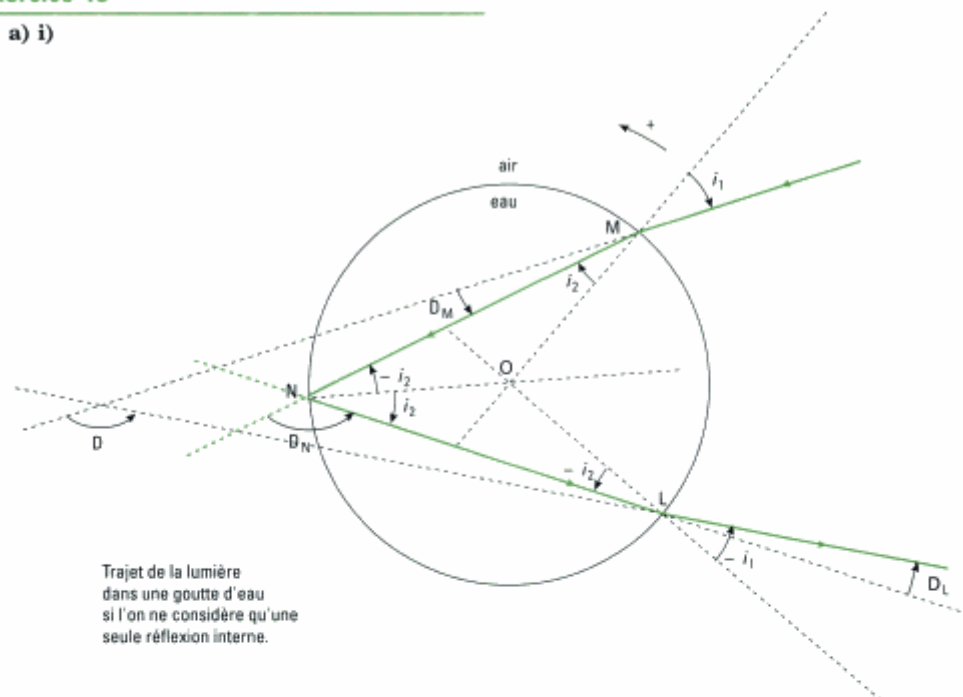
La hauteur de la grenouille doit donc être

$$h < r \tan \left(\frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}} \right) \quad \text{avec } i_{\text{lim}} = \arcsin \left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} \right)$$

A.N. $h < 4,4 \text{ cm}$, ce qui est tout à fait plausible.

Exercice 13

a) i)



- ii)  On remarque que les triangles MON et NOL sont isocèles. De plus, en N, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Ainsi, l'angle de sortie a pour valeur $|i_1|$.

La déviation totale est la somme de la déviation en M, de celle en N et de celle en L.

L'orientation des angles étant celle du sens trigonométrique,

on a $D_M = -(i_1 - i_2) = -i_1 + i_2$

$$D_N = \pi + 2i_2$$

$$D_L = -i_1 + i_2 \text{ (méthode 3).}$$

La déviation totale est donc $D = -i_1 + i_2 + \pi + 2i_2 - i_1 + i_2$

$$D = \pi - 2i_1 + 4i_2.$$

Or $\sin i_1 = n \sin i_2 \Leftrightarrow i_2 = \text{Arc sin} \left(\frac{\sin i_1}{n} \right)$

Ainsi $D = \pi - 2i_1 + 4 \text{Arc sin} \left(\frac{\sin i_1}{n} \right)$

iii) Vérifions qu'il existe un extremum quand $D'(i_1) = 0$

$$D'(i_1) = -2 + 4 \frac{\cos i_1}{n} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n^2}}}$$

$$D'(i_1) = -2 + 4 \frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}$$

Cette dérivée est nulle si $\frac{2 \cos i_{1m}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_{1m}}} = 1$

soit encore $4 \cos^2(i_{1m}) = n^2 - \sin^2(i_{1m}) = n^2 - 1 + \cos^2(i_{1m})$

On obtient donc $3 \cos^2(i_{1m}) = n^2 - 1$, soit

$$|i_{1m}| = \text{Arc cos} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$$

$$\text{A.N. } |i_{1m}| = \text{Arc cos} \sqrt{\frac{1,33^2 - 1}{3}} = -59^\circ.$$

donc $i_{1m} = -59^\circ$.

iv)  Pour montrer que cet extremum est un minimum, il faut montrer que la dérivée seconde de D par rapport à i est positive au voisinage de $i_1 = i_{1m}$.

En dérivant on obtient, après simplification

$$D''(i) = \frac{-4 \sin i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} + \frac{4 \cos^2 i_1}{(n^2 - \sin^2 i_1)^{3/2}} \sin i_1$$

qui se réordonne en :

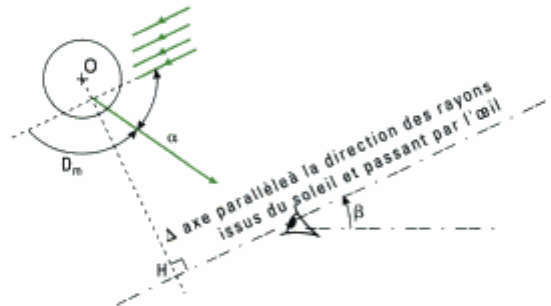
$$D''(i) = \frac{-4 \sin i_1 (n^2 - 1)}{(n^2 - 1 + \cos^2 i_1)^{3/2}}$$

Or, $n^2 - 1 > 0$ puisque $n > 1$; $\sin i_1 < 0$ puisque $i_1 \in \left[0 ; -\frac{\pi}{2}\right]$ et le dénominateur est positif.

On a donc bien $D''(i) > 0$; l'extremum est un minimum.

A.N. : $D_m = D(i_m) \approx 138^\circ$.

v)



Les gouttes sont éclairées par un faisceau de lumière parallèle. Les angles d'incidences varient donc, comme les angles d'émergence et l'œil reçoit des rayons provenant de toutes les directions. Au voisinage du minimum, nombreux sont les rayons à vérifier la condition d'émergence. Il en résulte qu'au voisinage de D_m , l'œil voit une accumulation de lumière.

La condition d'observation est donnée dans un plan contenant la direction des rayons du soleil, le centre de la goutte, et l'œil et elle s'exprime par la constance de cet angle D_m .

Ainsi, tout plan contenant Δ , qui est un axe de révolution du système, peut contenir des gouttes vérifiant la condition sur D_m . **Ces gouttes se trouvent donc sur un arc de cercle de rayon R_0 centré sur Δ .**

vi) On constate que l'angle α entre les rayons du soleil et le rayon émergent a pour valeur $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$.

Si le soleil a cette hauteur $\beta \geq \alpha$ sur l'horizon alors, l'arc-en-ciel est projeté dans le ciel et ne peut être vu que d'avion.

Bien entendu, à midi $\beta = \frac{\pi}{2}$, et cette dernière condition est vérifiée.

vii) **Les droites Δ associées à ces deux observateurs n'étant pas confondues, ils ne voient pas la même image de l'arc-en-ciel** (le pied de l'arc n'est pas vu au même endroit).

Inutile donc de se déplacer pour atteindre le pied de l'arc-en-ciel !

b) i) Le spectre visible s'étend de 380 nm à 780 nm environ.

ii) La déviation $D = \pi - 2 i_i + 4 \text{ Arc sin} \left(\frac{\sin i_i}{n} \right)$ dépend de l'indice de la goutte d'eau.



Or, cet indice dépend de la fréquence, donc de la longueur d'onde car l'eau est un milieu dispersif (cf. chap. 1).
La déviation D dépend donc de la longueur d'onde λ et les gouttes d'eau vont « décomposer » la lumière blanche pour donner les couleurs de l'arc-en-ciel.

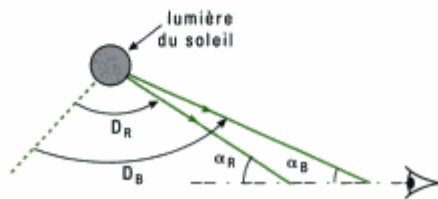
$$\text{iii) } i_{mB} = -\text{Arc cos} \sqrt{\frac{n_B^2 - 1}{3}} \text{ et } i_{mR} = -\text{Arc cos} \sqrt{\frac{n_R^2 - 1}{3}}$$

$$A.N. : i_{mB} = -59,1^\circ \text{ et } i_{mR} = -59,5^\circ$$

$$D_{mB} = 138,5^\circ \text{ et } D_{mR} = 137,6^\circ$$

$\Delta D = D_{mB} - D_{mR} = 0,9^\circ$; comme pour le prisme, la radiation bleue est plus déviée que la rouge.

iii)



Comme on le voit sur le dessin, $\alpha_B < \alpha_R$,
l'observateur voit le rouge à l'extérieur
de l'arc et le bleu à l'intérieur.

1.9

1. On a :

$$\overline{OA'} = \overline{OH} + \overline{HA'} = R \cdot \cos(i) + \frac{d}{\tan(r-i)}$$

En utilisant le fait que OHI est rectangle en H avec $\widehat{HOI} = i$ (angles alterne interne) d'où :

$$\overline{OH} = \overline{OI} \cdot \cos(i) = R \cos(i)$$

et que IHA' est rectangle en A' avec $\widehat{HIA'} = \frac{\pi}{2} - (r-i)$ d'où :

$$\overline{HA'} = \overline{HI} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - (r-i)\right) = \overline{HI} \cdot \frac{1}{\tan(r-i)} = \frac{d}{\tan(r-i)}$$

De plus comme $\sin(i) = \frac{d}{R}$, il vient :

$$\overline{OA'} = R \left(\cos(i) + \frac{\sin(i)}{\tan(r-i)} \right)$$

2. On linéarise les lois de Descartes pour trouver F' car le foyer image est image d'un point à l'infini sur l'axe optique donc envoyant des faisceaux parallèles à l'axe et proches de celui-ci (Cf. conditions de Gauss). Alors $\cos(i) \approx 1$, $\sin(i) \approx i$ et $\tan(i) \approx i$:

$$\overline{OF'} \approx R + R \frac{i}{r-i}$$

La loi de Descartes en I : $n \cdot \sin(i) = \sin(r)$ devient $n \cdot i = r$ d'où $r-i = i(n-1)$ et donc :

$$\overline{OF'} \approx R + R \frac{i}{i(n-1)} = R + \frac{R}{(n-1)} = \frac{nR}{n-1}$$

On a donc une lentille de focale $f' = \frac{nR}{n-1} \approx 30$ cm.

3. En I , on aura réflexion totale si

$$\sin(i) = \frac{d}{R} > \sin(i_{lim}) = \frac{1}{n} \implies d > d_{lim} = \frac{R}{n}$$

AN : $d_{lim} = 67$ mm.

4. On a avec $n \cdot \sin(i) = \sin(r)$:

$$\tan(r-i) = \frac{\tan(r) - \tan(i)}{1 + \tan(r) \tan(i)}$$

$$\tan(r-i) = \frac{\sin(r) \cos(i) - \cos(r) \sin(i)}{\cos(r) \cos(i) + \sin(r) \sin(i)}$$

$$\tan(r-i) = \frac{n \cdot \sin(i) \cos(i) - \sqrt{1-n^2 \sin^2(i)} \sin(i)}{\sqrt{1-n^2 \sin^2(i)} \cos(i) + n \cdot \sin^2(i)}$$

On en déduit en mettant tout au même dénominateur et en développant les calculs que :

$$\overline{OA'} = R \cdot \cos(i) + \frac{R \sin(i)}{\tan(r-i)}$$

donc

$$\overline{OA'} = R \cdot \cos(i) + R \sin(i) \frac{\sqrt{1-n^2 \sin^2(i)} \cos(i) + n \cdot \sin^2(i)}{n \cdot \sin(i) \cos(i) - \sqrt{1-n^2 \sin^2(i)} \sin(i)}$$

soit en réduisant au même dénominateur et en simplifiant :

$$\overline{OA'} = \frac{Rn \cos^2(i) + Rn \sin^2(i)}{n \cos(i) - \sqrt{1-n^2 \sin^2(i)}}$$

ou

$$\overline{OA'} = \frac{Rn}{n \cos(i) - \sqrt{1-n^2 \sin^2(i)}}$$

5. On calcule $i = \text{Arcsin}\left(\frac{d}{R}\right)$ puis $\overline{A'F'} = -\overline{OA'} + \frac{nR}{n-1}$ d'où le tableau suivant (longueurs exprimées en cm, angles en degrés) :

d(cm)	1	2	3	4	5	6,6
i (°)	5,74	11,54	17,47	23,59	30,02	41,3
\overline{OA}	29,77	29,08	27,89	26,10	23,53	15,22
$\overline{A'F'}$	0,23	0,92	2,11	3,90	6,47	14,78

6. Si on diaphragme la lentille en laissant un rayon d'environ 3,3 cm, on trouve $\overline{A'F'} \approx 2,58$ cm. Ainsi en divisant par 2 le faisceau utile, on a réduit quasiment d'un facteur 6 la tâche. La variation n'étant heureusement pas linéaire, on pourra diaphragmer raisonnablement sans trop restreindre la luminosité et avoir une tâche assez petite à la place d'un point, condition de stigmatisme approché. À noter que le faisceau à d_{lim} ressort en incidence rasante de la lentille.

