Einführung in die Analysis
5. Ausgewählte Funktionen und deren Eigenschaften: Vorlesungsinput

Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

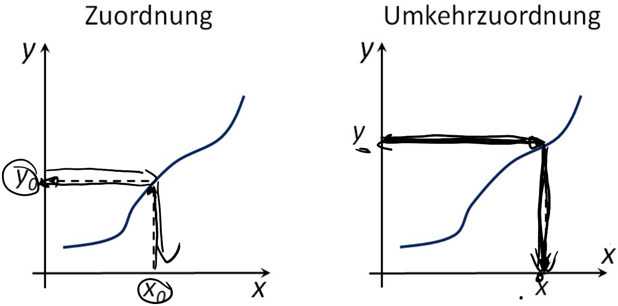
Frühjahrsemester 2021

5. Ausgewählte Funktionen und deren Eigenschaften

Inhaltsverzeichnis

- Kurzinput: Umkehrfunktionen
- Potenz- und Wurzelfunktion
- Exponential - und Logarithmusfunktion
- Trigonometrische Funktionen und Arcusfunktionen

Umkehrfunktion



Definition (Umkehrfunktion)

- Eine Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\to \mathbb{W} \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

heißt umkehrbar, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Ist die Funktion umkehrbar, dann gibt es zu jedem $y \in \mathbb{W}$ genau ein $x \in \mathbb{D}$. Diese eindeutige Zuordnung

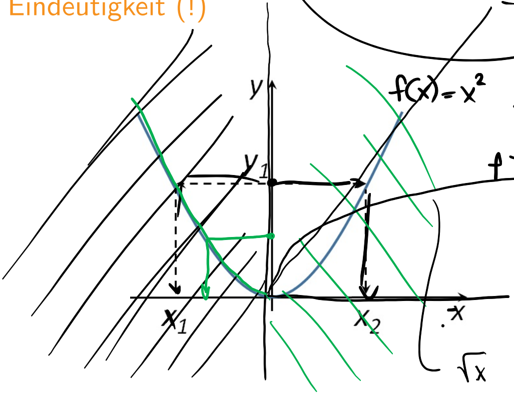
$$\begin{aligned} f^{-1} : \overset{\text{„}\mathbb{D}_{-1}\text{"}}{\mathbb{W}} &\to \overset{\text{„}\mathbb{W}_{-1}\text{"}}{\mathbb{D}} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x \end{aligned}$$

wird **Umkehrfunktion** genannt.

Umkehrfunktion

Anmerkung: Eindeutigkeit (!)

$f^{-1}(1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$



$f(x) = x^2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

$\mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+$

$x \mapsto \sqrt{x}$

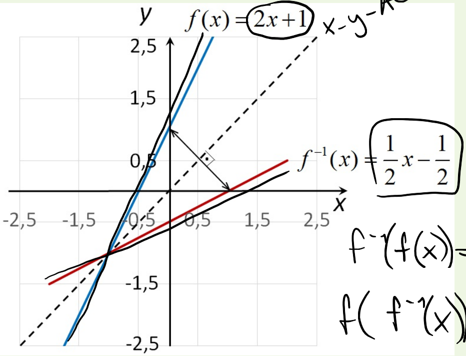
Umkehrfunktion

$f(x) = \underline{2x+1} = \underline{y} \quad | -1, :2 \qquad g(x) = x^2 + 1$

$x = \frac{y-1}{2} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = f(y) \to f^{-1}(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}_{g(x)}$

Beispiel:

x-y-Achse



$f^{-1}(f(x)) = x$

$f(f^{-1}(x)) = x$

Potenz- und Wurzelfunktionen

Definition (Potenzfunktionen)

Polynomfunktionen der Form

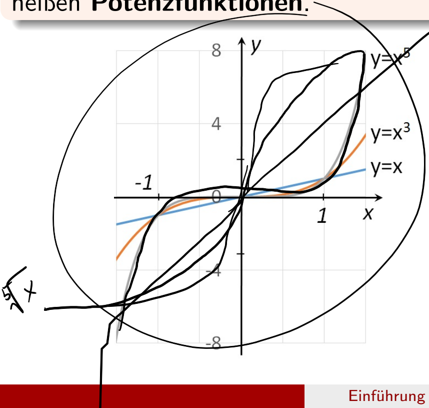
$\sqrt[3]{-1} = -1$

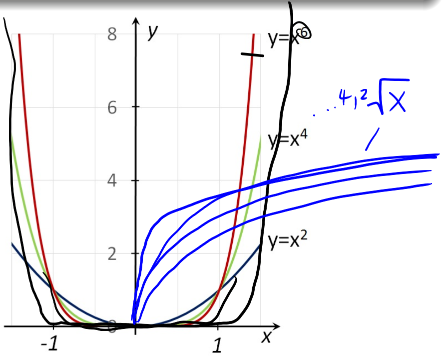
weil $(-1)(-1)(-1) = -1$

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n, \end{aligned}$$ für $n \in \mathbb{N}$

$\cancel{n^x}$

heißen **Potenzfunktionen**.





Potenz- und Wurzelfunktionen

Definition (Wurzelfunktion)

Die Funktion

$$\begin{aligned} p^{-1}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \quad \text{für} \quad n \text{ ungerade} \\ p^{-1}: \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \quad \text{für} \quad n \text{ gerade} \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

heißt $n-$**te Wurzelfunktion** ($n \in \mathbb{N}$).

Beispiel:

- Die Funktion $p: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $x \mapsto x^2$ hat als Umkehrfunktion

$$p^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad x \mapsto \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

- Die Funktion $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$ hat als Umkehrfunktion

$$p^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

Potenz- und Wurzelfunktionen

folgt noch

Approximation von beliebigen Funktionen:
Taylorpolynome

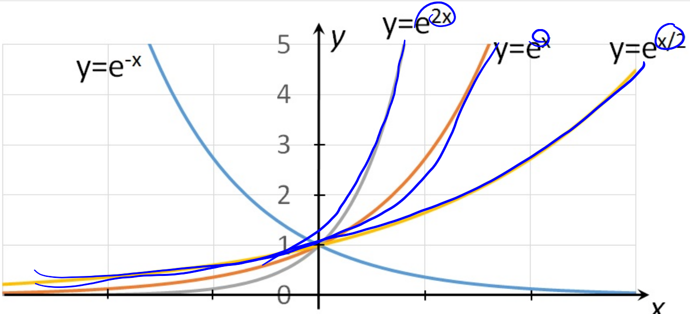
Definition (Exponentialfunktion)

Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \quad \text{mit } e = 2.718281828\ldots \quad \text{Eulersche Zahl} \end{aligned}$$

x^e x^{100} x^n n^x

heißt **Exponentialfunktion**



Exponential- und Logarithmusfunktion

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$\sqrt[3]{x^5} = (x^5)^{1/3} = x^{5 \cdot \frac{1}{3}}$

$= x^{5/3}$

Satz (Rechenregeln der Exponentialfunktion)

- $\boxed{e^0 = 1}$
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ / $e^{x-y} = e^x : e^y$ „ $\frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = (e^x)^{-1} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$
- $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$

$\left(\frac{2}{\sin(5)}\right)^0 = 1$

$\frac{2^{n+2}}{2^{n+4}} = \frac{\cancel{2^n} \cdot \cancel{2^2}}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{2^2} \cdot 2^2} = \frac{1}{4}$

$2^{n+2-(n+4)}$

$= 2^{n+2-n-4}$

$= 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Exponentialfunktion

Schnelles Wachstum:

1. Schachparabel
2. Papierfalten
3. Der unmögliche Hamster
4. Exponentielles vs. lineares Wachstum
5. Fibonacchizahlen

$\log_{10}(1000) = 3$

$10^3 = 1000$

Definition (Logarithmusfunktion)

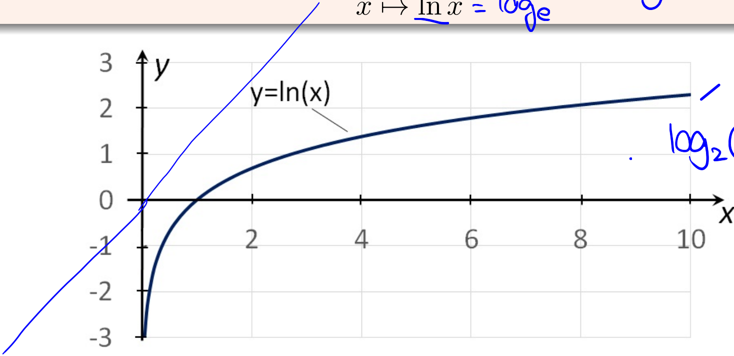
Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion wird **natürliche Logarithmusfunktion** genannt:

$\log_2$

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$\log_{10}$

$$x \mapsto \ln x = \log_e$$



$\log_2(32) = 5$

Exponential- und Logarithmusfunktion

Satz (Rechenregeln der Logarithmusfunktion)

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x^n) = n \ln x$
- $\ln(e^x) = x \underbrace{\ln(e)}_{=1} = x$

$2^x = 18$

$\ln(2^x) = \ln(18)$

$x \cdot \ln(2)$

$| : \ln(2)$

$x = \frac{\ln(18)}{\ln(2)}$

Logarithmusfunktion

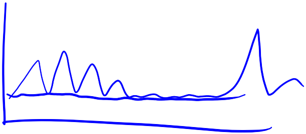
$$\log_{10}(10^6) = 6$$

$$\log_{10}(10^{12}) = 12$$

Anwendungen:

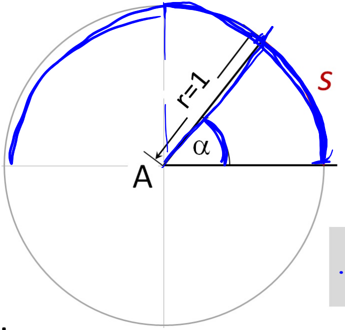
1. Darstellen von Wertebereiche über viele Grössenordnungen
2. Kryptologie
3. Informationstheorie

$\Rightarrow$ Wikipedia



Winkel

- Positive Winkel werden immer im Gegenuhrzeigersinn gemessen.
- Die Angabe des Winkels im Bogenmaß (Radiant) entspricht der Länge des Kreisbogens, den die Schenkel aus dem Einheitskreis ausschneiden.



$\sin(30°)$

$\sin(\pi/6)$

$f(x) = \sin(x)$

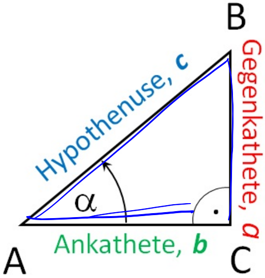
$$\alpha = \frac{s}{r}$$

Umrechnungstabelle:

Gradmaß : α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß : s (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Trigonometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

Definition (Trigonometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreieck)



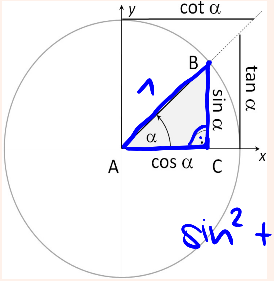
- **Sinus:** $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}$
- **Cosinus:** $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$
- **Tangens:** $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$
- **Cotangens:**
  $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$

Tringonometrische Funktionen

Zwischen den trigonometrischen Funktionen gelten die Folgenden, für Berechnungen sehr oft nützlichen Zusammenhänge:

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ (*trigonometrischer Pythagoras*)

Definition (Trigonometrische Funktionen im beliebigen Dreieck)

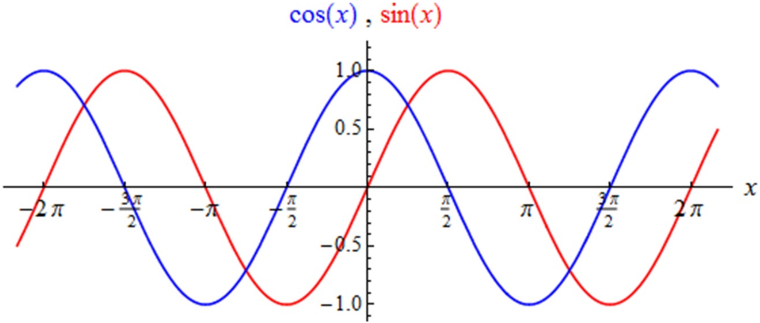


$\sin^2 + \cos^2 = 1$

Sinus- und Cosinusfunktion

Definition (Sinus- und Cosinusfunktion)

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to [-1,1], \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1,1], \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$



Sinus- und Cosinusfunktion — Funktionsgraph

Anmerkungen:

- Sinus- und Cosinusfunktion sind beschränkt:

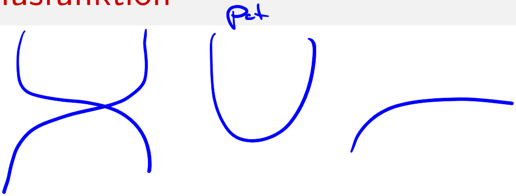
$$-1 \leq \quad \sin(x), \cos(x) \quad \leq 1$$

- Die Werte für x im Argument der Funktionen $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$ werden im Bogenmaß angegeben

- Sinus- und Cosinusfunktion sind **periodisch** mit der Periode 2π, d.h. es gilt $f(x) = f(x + k \cdot 2\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$

- Die Funktionsgraphen von Sinus- und Cosinusfunktion sind **kongruent**. Durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links, geht die Cosinus-Kurve aus der Sinus-Kurve hervor.

Eigenschaften der Sinusfunktion



- Patentgesetze
e^{x+y} ...

Anwendungen:

1. Periodische Vorgänge
2. The most unexpected answer to a counting puzzle