**Einführung in die Analysis**
Joana Portmann
HS 2020

Fachhochschule Nordwestschweiz

# Übungsblatt 11

## Trigonometrische Funktionen

**Aufgabe 1.**
Drücken Sie die folgenden im Gradmass beschriebenen Winkel im Bogenmass aus.

(a) $30°$ (b) $135°$ (c) $270°$ (d) $390°$ (e) $133°$

**Aufgabe 2.**
Zeichnen Sie geeignete Dreiecke, um die Funktionswerte für die Sinus- und Cosinusfunktion bei den Argumenten

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$ (e) $\frac{5\pi}{6}$

ablesen zu können.

**Aufgabe 3.**
Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen über dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ jeweils die Menge aller Nullstellen und die Wertemenge (Bildmenge) $W$.

(a) $f(x) = \sin(2\pi x)$ (b) $f(x) = 2\cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$ (c) $f(x) = \sin^2(x)$

**Aufgabe 4.**
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = 3\sin(3x) - 2$

(b) $f(x) = \sin^2(x) + \cos(2x)$

(c) $f(x) = \frac{\sin(x)\cos(2x)}{2}$

(d) $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$

(e) $f(x) = \frac{\cos^2(x) + \cos(x)}{x^2 + 1}$

(f) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

**Aufgabe 5.**
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass

$$\sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos(x) = -\sin(x)$$

gilt. Beweisen Sie damit, dass

(a) $\cot(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

(b) $\cot(x) = -1 - \cot^2(x)$

**Aufgabe 6.**
Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, indem Sie die Gleichungen $\cos(\arccos(x)) = x$ bzw. $\tan(\arctan(x)) = x$ ableiten, dass die folgenden Formeln richtig sind.

(a) $\arccos(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\arctan(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

**Aufgabe 7.**
Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitung $\sin(x) = \cos(x)$ und der Gleichung $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, dass die Ableitung von $\cos(x)$ gleich $\cos(x) = -\sin(x)$ ist.

**Aufgabe 8.**
Es ist $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$. Welches ist die kleinste natürliche Zahl $n$, für die $f(x)$ gleich der $n$-ten Ableitung von $f(x)$ ist?

**Aufgabe 9.**
Zeigen Sie, dass für die Taylorreihe der Cosinusfunktion um den Nullpunkt $x = 0$ herum gilt:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$$

**Aufgabe 10.**
Bestimmen Sie alle Extremalstellen der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \cos^2\left(1-x^2\right)$

(b) $f(x) = \cos^2\left((1-x)^2\right)$

**Aufgabe 11.**
Lösen Sie die Gleichung $\sin(x) \cdot \cos(2x) = x - 2$ approximativ, indem Sie für die linke Seite ein Taylorpolynom 2. Ordnung um den Punkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ herum bestimmen.

# Integral von trigonometrischen Funktionen

**Stammfunktionen der Sinus- und der Cosinusfunktion:**
Für $x$ im Bogenmass gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \implies F(x) = -\cos(x) \\ f(x) &= \cos(x) \implies F(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

**Aufgabe 12.**
Berechnen Sie die Fläche, die von der Sinusfunktion und der $x$-Achse im Intervall $[0, \pi]$ (erste Hälfte der ersten Periode) aufgespannt wird.

**Aufgabe 13.**
Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

**Aufgabe 14.**
Berechnen Sie den Inhalt der hervorgehobenen Fläche: