Einführung in die Analysis
7. Ableitungsregeln

Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

Frühlingssemester 2021

7. Ableitungsregeln

Inhaltsverzeichnis

Ableitungsregeln

Die Bestimmung der Ableitung bzw. der Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion f durch die Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ist bei einfachen Funktionen bereits aufwändig und mühsam.

Wie wir bereits mehrfach gesehen haben, sind viele Funktionen aus elementaren Funktionen, wie etwa Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmus oder trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt, deren Ableitung bekannt ist.

Im folgenden werden wir Ableitungsregeln zusammenstellen und erarbeiten, mit deren Hilfe man für Summen, Produkte und Quotienten von elementaren Funktionen sowie für zusammengesetzte Funktionen die Ableitung bestimmen kann.

Konstantenregel

Der Graph einer konstanten Funktion $f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$ ist eine horizontale Linie, besitzt also überall die Steigung null, d.h.

Satz (Konstantenregel)

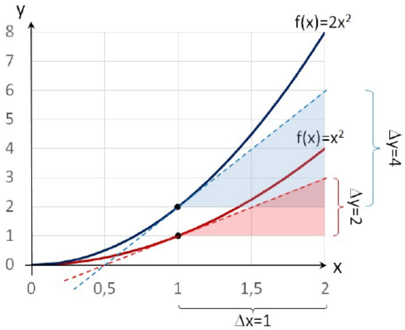
Die Ableitung einer additiven Konstanten ist gleich null

$$f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0, \quad C \in \mathbb{R}$$

Beweis:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0 \quad \blacksquare$$

Faktorregel



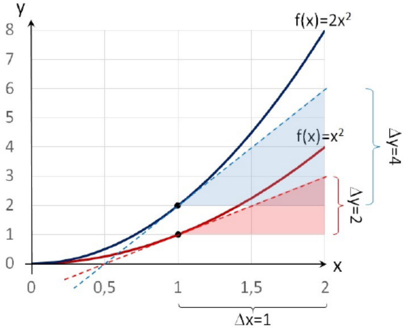
Ein konstanter Faktor $k \in \mathbb{R}$ vor einer Funktion skaliert die $y-$Werte, lässt aber die $x-$Werte unverändert. Im Steigungsdreieck ändert sich also nur der $y-$Wert und somit auch die Steigung um den Faktor k:

Satz (Faktorregel)

Beim Ableiten einer Funktion, bleibt ein konstanter Faktor $k \in \mathbb{R}$ vor einer Funktion unverändert erhalten:

$$g(x) = k \cdot f(x) \rightarrow g'(x) = k \cdot f'(x)$$

Faktorregel



Ein konstanter Faktor $k \in \mathbb{R}$ vor einer Funktion skaliert die $y-$Werte, lässt aber die $x-$Werte unverändert. Im Steigungsdreieck ändert sich also nur der $y-$Wert und somit auch die Steigung um den Faktor k:

Satz (Faktorregel)

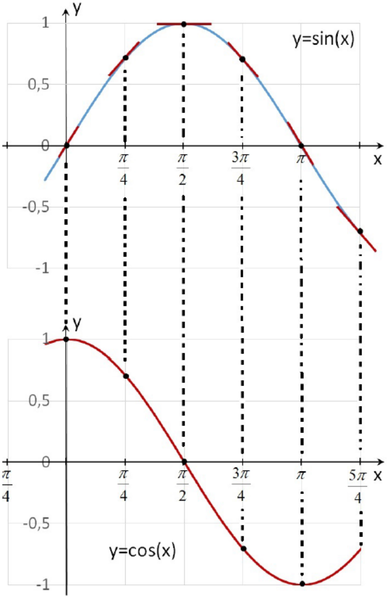
Beim Ableiten einer Funktion, bleibt ein konstanter Faktor $k \in \mathbb{R}$ vor einer Funktion unverändert erhalten:

$$g(x) = k \cdot f(x) \to g'(x) = k \cdot f'(x)$$

Beweis:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k\left(f(x+h)-(f(x)\right)}{h} = k\cdot f'(x) \blacksquare$$

Ableitung Trigonometrischer Funktionen (Sinus & Cosinus)



→ Geogebra-Datei

Wertet man die Steigung der Tangente an die Funktion $f(x) = \sin(x)$ an verschiedenen Punkten aus und trägt den Wert der Tangentensteigung für gleiche $x-$Werte in ein neues Schaubild ab, so erhält man die Funktion $f'(x) = cos(x)$.

- Stellen mit horizontaler Tangente (Maximum bzw. Minimum von $f(x)$) entsprechen den Nullstellen der Ableitung $f'(x)$
- Stellen maximaler Steigung der Funktion $f(x)$ entsprechen den Maximalstellen von $f'(x) = cos(x)$

Für die Ableitung der Funktion $g(x) = cos(x)$ kann man analog vorgehen und erhält $g'(x) = -sin(x)$

Ableitung von Sinus und Cosinus

Satz (Ableitung Sinus und Cosinus)

Für die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen gilt:

- $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$
- $g(x) = \cos(x) \Rightarrow g'(x) = -\sin(x)$
- $h(x) = \tan(x) \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ für $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
- $u(x) = \cot(x) \Rightarrow u'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$ für $x \neq k\pi$

Beweis (Sinus - mithilfe des Additionstheorems $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$):

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)) - \sin(x)}{h} \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) - \sin(x)}{h}}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \cos(x) = \cos(x) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Potenzregel

Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar:

Satz (Potenzfunktion)

Die Ableitung der Potenzfunktion

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

gilt für *beliebige* ganzzahlige Komponenten n

Beweis:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} && \mid \text{binomische Formel} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h} && \mid h \text{ kürzen} \\
&= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}n}_{\to 0} = nx^{n-1} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Potenzregel

Beispiele:

1. Die Funktion $f(x) = 8x^5$ besitzt die Ableitung:

$$f'(x) = \left(8x^5\right)' = 8 \cdot 5x^{5-1} = 40x^4$$

2. Die Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ besitzt die Ableitung:

$$g'(x) = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

3. Bemerkung:
Für die allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ gilt ebenfalls
$f'(x) = ax^{a-1}$
Die Funktion $h(x) = \sqrt{x}$ besitzt die Ableitung:

$$h'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Summenregel

Bei Summen und Differenzen von Funktionen darf man die Ableitung der Funktionen einzeln berechnen:

Satz (Summenregel)

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen

$$s(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow s'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
s'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - (f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - (f(x))}{h} + \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - (f(x))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= f'(x) + g'(x) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Summenregel

Beispiele:

1. Die Funktion $f(x) = 2x + \tan(x)$ besteht aus der Summe zweier Funktionen, nämlich $2x$ und $\tan(x)$. Bei der Ableitung dürfen wir beide Summanden getrennt ableiten:

$$f(x)' = (2x + \tan(x))' = (2x)' + (\tan(x))' = 2 + \frac{1}{\cos^2(x)} = 3 + \tan^2(x)$$

2. Die Ableitung des Polynoms $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 7$ wird mit der Konstanten-, Faktor-, Potenz- und der Summenregel berechnet:

$$p'(x) = \left(3x^4 - 2x^3 + 2x - 7\right)' = 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 2 = 12x^3 - 6x^2 + 2$$

3. Die Funktion $f(x) = x^3 + \sin(x)$ besteht aus der Summe zweier Funktionen, und die Ableitung beträgt:

$$f'(x) = \left(x^3 + \sin(x)\right)' = \left(x^3\right)' + (\sin(x))' = 3x^2 + \cos(x)$$

Zusatzübungen (Potenz- und Summenregel)

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.
   (a) $f_1(x) = 4x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x - 6$

   (b) $f_1(x) = 3x^6 - 5x^4 + \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^6}$

   (c) $f_3(x) = 3\sqrt[5]{x^4} - 7\sqrt[7]{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}$

   (d) $f_4(x) = (x^3 + x^2)\sqrt{x}$

   (e) $f_5(x) = 4\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}} - \frac{9}{x^5\sqrt{x^3}}$

2. Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen.
   (a) $f_1(x) = x^4 - x^2 - 3$

   (b) $f_2(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$

   (c) $f_3(x) = \sin(x) + \cos(x)$

Lösungen: Zusatzübungen (Potenz- und Summenregel)

Aufgabe 1

(a) $f_1(x) = 4x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x - 6$ Potenzregel: „Hochzahl nach vorne multiplizieren und im Exponenten um eins erniedrigen".

$$f_1'(x) = 4\cdot 5x^{5-1} + 3\cdot 4x^{4-1} - 3\cdot 3x^{3-1} + 1x^{1-1} = 20x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 1$$

(b) $f_2(x) = 3x^6 - 5x^4 + \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^6} = 3x^6 - 5x^4 + 2x^{-2} - 9x^{-6}$

$$f_2'(x) = 3\cdot 6x^{6-1} - 5\cdot 4x^{4-1} + 2\cdot(-2)x^{-2-1} - 9\cdot(-6)x^{-6-1} = 18x^5 - 20x^3 - 4x^{-3} + 54x^{-7}$$
$$= 18x^5 - 20x^3 - \frac{4}{x^3} + \frac{54}{x^7}$$

(c) $f_3(x) = 3\sqrt[5]{x^4} - 7\sqrt[7]{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} = 3x^{\frac{4}{5}} - 7x^{\frac{3}{7}} - 2x^{-\frac{3}{2}}$

$$f_3'(x) = 3\cdot\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} - 7\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{3}{7}-1} - 2\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{12}{5}x^{-\frac{1}{5}} - 3x^{-\frac{4}{7}} + 3x^{-\frac{5}{2}}$$
$$= \frac{12}{5\sqrt[5]{x}} - \frac{3}{\sqrt[7]{x^4}} + \frac{3}{\sqrt{x^5}}$$

(d) $f_4(x) = (x^3 + x^2)\sqrt{x} = x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$

$$f_4'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} + \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{2}x\right)\sqrt{x}$$

(e) $f_5(x) = 4\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}} - \frac{9}{x^5\sqrt{x^3}} = 4\sqrt[3]{x^{\frac{1}{5}}} - \frac{9}{x^5\cdot x^{\frac{3}{2}}} = 4x^{\frac{1}{15}} - 9x^{-\frac{13}{2}}$

$$f_5'(x) = 4\cdot\frac{1}{15}x^{\frac{1}{15}-1} - 9\left(-\frac{13}{2}\right)x^{-\frac{13}{2}-1} = \frac{4}{15}x^{-\frac{14}{15}} + \frac{117}{2}x^{-\frac{15}{2}} = \frac{4}{15\sqrt[15]{x^{14}}} + \frac{117}{2\sqrt{x^{15}}}$$

Lösungen: Zusatzübungen (Potenz- und Summenregel)

Aufgabe 2

(a) $f_1(x) = x^4 - x^2 - 3$

$f_1'(x) = 4x^3 - 2x$

$f_1''(x) = (4x^3 - 2x)' = 12x^2 - 2$

$f_1^{(3)}(x) = (12x^2 - 2)' = 24x$

(b) $f_2(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ für $x \neq 0$

$f_2'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \cdot \frac{1!}{x^2}$

$f_2''(x) = (-x^{-2})' = -(-2)\frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3} = (-1)^2 \cdot \frac{2!}{x^3}$

$f_2^{(3)}(x) = (2x^{-3})' = 2 \cdot (-3)\frac{1}{x^4} = \frac{-6}{x^4} = (-1)^3 \cdot \frac{3!}{x^4}$

allgemein: $f_2^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot \frac{k!}{x^{k+1}}$

(c) $f_3(x) = \sin(x) + \cos(x)$

$f_3'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

$f_3''(x) = (\cos(x) - \sin(x))' = -\sin(x) - \cos(x)$

$f_3^{(3)}(x) = (-\sin(x) - \cos(x))' = -\cos(x) + \sin(x)$

Kahoot: Ableitungsregeln 1

https://kahoot.it/
Quiz

Produktregel

Satz (Produktregel)

Für die Ableitung eines Produktes zweier ableitbarer Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beim Ableiten von f summiert man das Produkt aus der Ableitung der ersten Funktion u' mit der zweiten Funktion v und das Produkt aus der ersten Funktion u mit der Ableitung der zweiten Funktion v'.

Produktregel

Beispiele:

1. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x \cdot \sin x$ kann mit der Produktregel berechnet werden:

$$f'(x) = (\underbrace{x}_{\substack{=u(x) \\ u'(x)=1}} \cdot \underbrace{\sin x}_{\substack{=v(x) \\ v'(x)=\cos x}})' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

2. Die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ wird mit der Produktregel berechnet:

$$f'(x) = (\underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v})' = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x$$

3. Bei der Funktion $f(x) = (x^2 + 3x) \cdot (\cos x - \sin x)$ könnte man zuerst die Klammern ausmultiplizieren und dann die Ableitung berechnen. Schneller kommt man mit der Produktregel ans Ziel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\underbrace{(x^2 + 3x)}_{u} \cdot \underbrace{(\cos x - \sin x)}_{v} \\ &= (2x + 3) \cdot (\cos x - \sin x) + (x^2 + 3x) \cdot (-\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

Produktregel

Satz (Produktregel)

Für die Ableitung eines Produktes zweier ableitbarer Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beim Ableiten von f summiert man das Produkt aus der Ableitung der ersten Funktion u' mit der zweiten Funktion v und das Produkt aus der ersten Funktion u mit der Ableitung der zweiten Funktion v'.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x) + \overbrace{u(x)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x+h)}^{=0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[(u(x+h) - u(x)]\cdot v(x+h) + u(x)\cdot [v(x+h) - v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} v(x+h) + u(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\
&= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Produktregel

Die Produktregel lässt sich leicht auf mehr als zwei Faktoren verallgemeinern. Will man etwa das Produkt $u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ ableiten, so setzt man vorübergehend $v \cdot w = z$ und bildet in einem ersten Schritt die Ableitung:

$$(u \cdot z)' = u' \cdot z + u \cdot z'$$

und erhält mit $z' = v' \cdot w + v \cdot w'$ in einem zweiten Schritt die Ableitung:

$$\begin{aligned} (uvw)' &= (u \cdot z)' = u' \cdot z + u \cdot z' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot (v' \cdot w + v \cdot w') \\ &= u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w' \end{aligned}$$

Satz (Allgemeine Produktregel)

Allgemein gilt für die Ableitung eines Produktes aus n Faktoren:

$$f(x) = u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n \Rightarrow f'(x) = u_1' \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot \ldots \cdot u_n + \ldots + u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n'$$

Ein Produkt wird abgeleitet, indem man nur den ersten Faktor, dann nur den zweiten Faktor und schließlich nur den letzten Faktor ableitet und die entstehenden Produkte addiert.

Produktregel

Beispiel:

Die Ableitung der Funktion $f(x) = (x-1)(4x-3)(3-x)$ lautet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(\underbrace{(x-1)}_{u_1}\underbrace{(4x-3)}_{u_2}\underbrace{(3-x)}_{u_3}\Big)' = u_1'u_2u_3 + u_1u_2'u_3 + u_1u_2u_3' \\ &= 1\cdot(4x-3)(3-x) + (x-1)\cdot 4\cdot(3-x) + (x-1)(4x-3)\cdot(-1) \\ &= (4-x^2+15x-9) + (-4x^2+16x-12) - (4x^2-7x+3) \\ &= -12x^2+38x-24 \end{aligned}$$

Quotientenregel

Satz (Quotientenregel)

Der Quotient der beiden ableitbaren Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$ wird mit der Quotientenregel berechnet:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

oder kurz

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
y(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow u(x) &= y(x)v(x) && \mid \text{ableiten von } u \text{ mit Produktregel} \\
\Rightarrow u'(x) &= y'(x)v(x) + y(x)v'(x) && \mid \text{umstellen nach } y' \\
\Rightarrow y'(x) &= \frac{u'(x) - y(x)v'(x)}{v(x)} && \mid \text{einsetzen von } y(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \\
\Rightarrow y'(x) &= \frac{u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)}v'(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} && \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel:

- Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{\overbrace{2x^2 - 3x + 1}^{u}}{\underbrace{2x - 5}_{v}}$ lautet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 5}\right)' = \frac{(4x - 3)(2x - 5) - (2x^2 - 3x + 1)(2)}{(2x - 5)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 26x + 15 - (4x^2 - 6x + 2)}{(2x - 5)^2} = \frac{4x^2 - 20x + 13}{(2x - 5)^2} \end{aligned}$$

- Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ lautet:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{0 \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Zusatzübungen (Produkt- und Quotientenregel)

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

   (a) $f(x) = \sin x \cdot \frac{10}{x^3}$

   (b) $f(x) = x^n \cdot e^x$

   (c) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

   (d) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

   (e) $f(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$

   (f) $f(x) = \tan x$

Aufgabe 1

(a) $$f'(x)=\Big(\overbrace{\sin x}^{u}\cdot\overbrace{10x^{-3}}^{v}\Big)'=\overbrace{\cos x}^{u'}\cdot\overbrace{10x^{-3}}^{v}+\overbrace{\sin x}^{u}\cdot\overbrace{\left(-30x^{-4}\right)}^{v'}=\frac{10}{x^3}\cdot\left(\cos x-\frac{3\sin x}{x}\right)$$

(b) $$f'(x)=\left(x^n\cdot e^x\right)'=\overbrace{nx^{n-1}}^{u'}\cdot\overbrace{e^x}^{v}+\overbrace{x^n}^{u}\cdot\overbrace{e^x}^{v'}=x^{n-1}\cdot e^x\cdot(n+x)$$

(c) $$f'(x)=\left(\frac{\overbrace{x}^{u}}{\underbrace{x^2+2}_{v}}\right)'=\frac{\overbrace{1}^{u'}\cdot\overbrace{(x^2+2)}^{v}-\overbrace{x}^{u}\cdot\overbrace{2x}^{v'}}{\underbrace{\left(x^2+2\right)^2}_{v^2}}=\frac{-x^2+2}{\left(x^2+2\right)^2}$$

(d) $$f'(x)=\left(\frac{\overbrace{x^2-5x+6}^{u}}{\underbrace{x^2-12x+20}_{v}}\right)'=\frac{\Big(\overbrace{2x-5}^{u'}\Big)\cdot\Big(\overbrace{x^2-12x+20}^{v}\Big)-\Big(\overbrace{x^2-5x+6}^{u}\Big)\cdot\Big(\overbrace{2x-12}^{v'}\Big)}{\underbrace{\left(x^2-12x+20\right)^2}_{v^2}}$$

$$=\frac{\left(2x^3-29x^2+100x-100\right)-\left(2x^3-22x^2+72x+72\right)}{\left(x^2-12x+20\right)^2}$$

$$=\frac{-7x^2+28x-28}{\left(x^2-12x+20\right)^2}=\frac{-7(x-2)^2}{(x-2)^2\cdot(x-10)^2}=\frac{-7}{(x-10)^2}$$

(e) $$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot(1-\cos x)-\sin x\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}=\frac{\cos x-\overbrace{(\cos^2 x+\sin^2 x)}^{=1}}{(1-\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)^2}=\frac{-1}{1-\cos x}$$

(f) $$f'(x)=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Kettenregel

Definition (Verkettung von Funktionen)

Unter der Verkettung der Funktionen g und h versteht man die Nacheinanderausführung

$$f(x) = g(h(x)), \qquad f(x) = (g \circ h)(x)$$

der beiden Funktionen. Man wendet die **äußere Funktion** g auf das Ergebnis der **inneren Funktion** h an und erhält somit die **verkettete Funktion** f. Die Reihenfolge der Ausführung ist *von innen nach außen*.

Anmerkung:

Man setzt für die **innere Funktion**

$$z = h(x),$$

so dass sich für die **äußere Funktion**

$$f = g(z) = g(h(x))$$

ergibt.

Kettenregel

Beispiele:

- $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4}$:
- $f(x) = \sin x^2$:
- $f(x) = e^{\sin x}$:
- $f(x) = \ln \cot x$:
- $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$:
- $f(x) = \frac{1}{(1-x)^6}$:

Kahoot: Verkettung von Funktionen

https://kahoot.it/
Quiz

Kettenregel

Beispiele:

- $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4}:$ $\quad z = h(x) = 3x^2 - 4;$ $\quad g(z) = \sqrt{z}$
- $f(x) = \sin x^2:$ $\quad z = h(x) = x^2;$ $\quad g(z) = \sin z$
- $f(x) = e^{\sin x}:$ $\quad z = h(x) = \sin x;$ $\quad g(z) = e^z$
- $f(x) = \ln \cot x:$ $\quad z = h(x) = \cot x;$ $\quad g(z) = \ln z$
- $f(x) = 3^{\sqrt{x}}:$ $\quad z = h(x) = \sqrt{x};$ $\quad g(z) = 3^z$
- $f(x) = \frac{1}{(1-x)^6}:$ $\quad z = h(x) = 1 - x;$ $\quad g(z) = z^{-6}$

Kettenregel

Die Ableitung einer verketteten Funktion erfolgt mit der **Kettenregel**:

Satz (Kettenregel)

Seien die Funktionen g und h differenzierbar. Für die Ableitung der verketteten Funktion $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$ gilt:

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(z) \cdot h'(x)$$

d.h. die Ableitung $f'(x)$ ist gleich der Ableitung der äußeren Funktion $g'(z)$ mal der Ableitung der inneren Funktion $h'(x)$. Dabei werden die äußere Funktion nach z und die innere Funktion nach x abgeleitet.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{g(h(x+t)) - g(h(x))}{t} && |\text{erweitern} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{g(h(x+t)) - g(h(x))}{h(x+t) - h(x)} \frac{h(x+t) - h(x)}{t} \\
&= \lim_{\hat{t} \to 0} \frac{g(z+\hat{t}) - g(z)}{z + \hat{t} - z} \lim_{t \to 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t} \\
&= g'(z)h'(x) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Kettenregel

Beispiele:

- $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4}: \quad z = h(x) = 3x^2 - 4; \quad g(z) = \sqrt{z}$
  $g'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}; \quad h'(x) = 6x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3x^2 - 4}} \cdot 6x = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 - 4}}$

- $f(x) = \sin x^2: \qquad z = h(x) = x^2; \qquad g(z) = \sin z$
  $g'(z) = \cos z; \quad h'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

- $f(x) = e^{\sin x}: \qquad z = h(x) = \sin x; \qquad g(z) = e^z$
  $g'(z) = e^z; \quad h'(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$

- $f(x) = \ln \cot x: \qquad z = h(x) = \cot x; \qquad g(z) = \ln z$
  $g'(z) = \dfrac{1}{z}; \quad h'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cot x} \cdot -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x}$

Kettenregel

Beispiele:

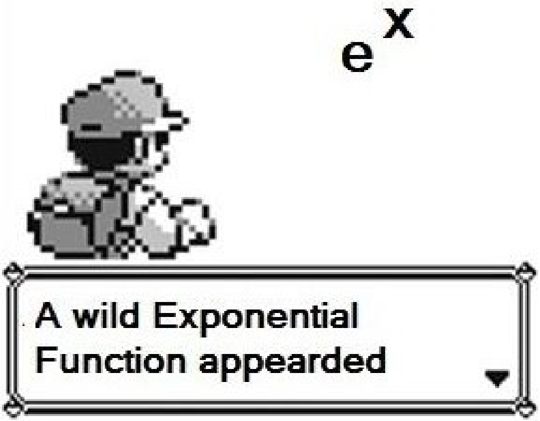
- $f(x) = 3^{\sqrt{x}}: \qquad z = h(x) = \sqrt{x}; \qquad g(z) = 3^z$

  $g'(z) = \ln 3 \cdot 3^z; \quad h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \ln 3 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

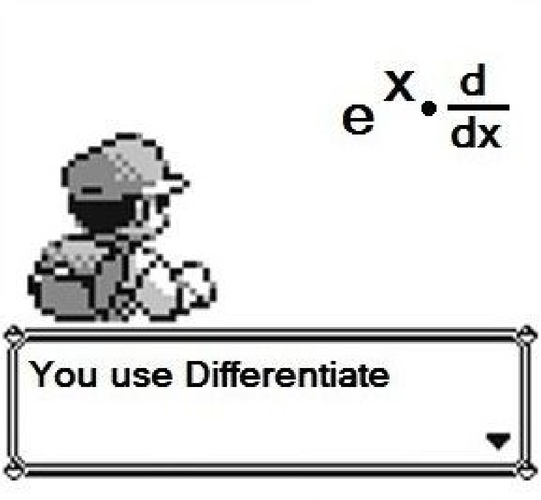
- $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^6}: \qquad z = h(x) = 1 - x; \qquad g(z) = z^{-6}$

  $g'(z) = -6z^{-7}; \quad h'(x) = -1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-6}{(1-x)^7} \cdot (-1) = \dfrac{6}{(1-x)^7}$

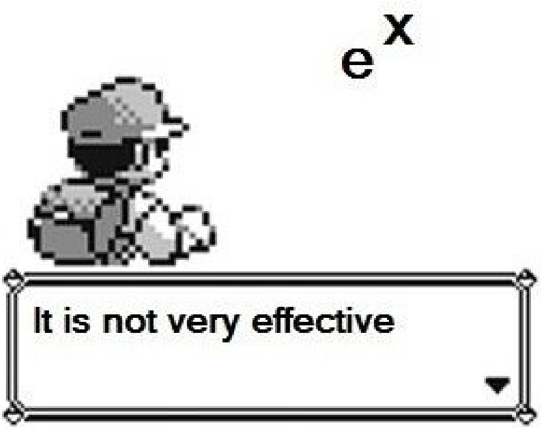
Ableitung der Exponentialfunktion e^x



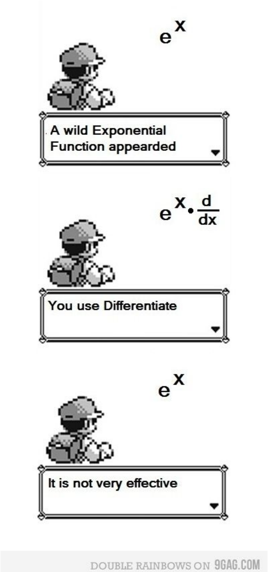
Ableitung der Exponentialfunktion e^x



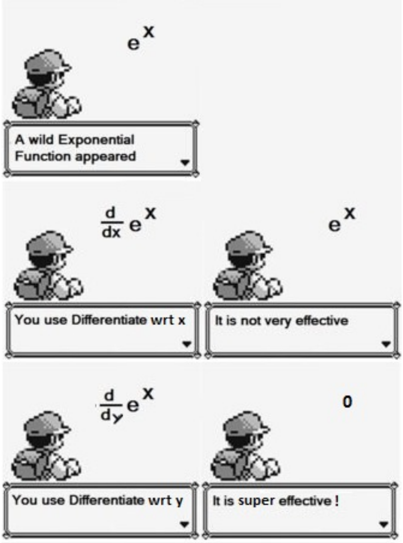
Ableitung der Exponentialfunktion e^x



Ableitung der Exponentialfunktion e^x



Ableitung der Exponentialfunktion e^x



Zusatzübungen (Kettenregel)

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

   (a) $f(x) = \ln \sqrt{x}$

   (b) $f(x) = \cos(3x + 2)$

   (c) $f(x) = \ln(\sin(2x - 3))$

   (d) $f(x) = e^{3x^2+2x+2}$

   (e) $f(x) = 10\ln(1 + x^2)$

Aufgabe 1

(a) $f(x) = \ln\sqrt{x};$

$z = h(x) = \sqrt{x};\quad g(z) = \ln z;$

$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};\quad g'(z) = \frac{1}{z};$

$\Rightarrow f'(x) = \left(\ln\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

(b) $f(x) = \cos(3x+2);$

$z = h(x) = 3x+2;\quad g(z) = \cos z;$

$h'(x) = 3;\quad g'(z) = -\sin z;$

$\Rightarrow f'(x) = (\cos(3x+2))' = -\sin(3x+2) \cdot 3 = -3\sin(3x+2)$

(c) $f(x) = \ln(\sin(2x-3);$

$z = h(x) = \sin(2x-3);\quad g(z) = \ln z;$

$h'(x) = 2\cos(2x-3);\quad g'(z) = \frac{1}{z};$ Ableitung von *h(x)* auch mit Kettenregel berechnen!

$\Rightarrow f'(x) = (\ln(\sin(2x-3)))' = \frac{1}{\sin(2x-3)} \cdot 2\cos(2x-3) = \frac{2}{\tan(2x-3)}$

(d) $f(x) = e^{3x^2+2x+2};$

$z = h(x) = 3x^2+2x+2;\quad g(z) = e^z;$

$h'(x) = 6x+2;\quad g'(z) = e^z;$

$\Rightarrow f'(x) = \left(e^{3x^2+2x+2}\right)' = e^{3x^2+2x+2} \cdot (6x+2)$

(e) $f(x) = 10\ln(1+x^2);$

$z = h(x) = 1+x^2;\quad g(z) = 10\ln(z);$

$h'(x) = 2x;\quad g'(z) = \frac{10}{z};$

$\Rightarrow f'(x) = \left(10\ln(1+x^2)\right)' = \frac{10}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{20x}{1+x^2}$

Kahoot: Ableitungsregeln 2

https://kahoot.it/
Quiz

Ableitung der Umkehrfunktion

Viele wichtige Funktionen (Wurzel-, Arkus-, Logarithmusfunktion) basieren auf dem Prinzip der Umkehrfunktion. Zwischen der Ableitung einer Funktion und der Ableitung ihrer Umkehrfunktion besteht folgender Zusammenhang:

Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Die Funktion $f(x)$ sei differenzierbar mit der Ableitung $f'(x)$ und besitze die Umkehrfunktion $x = g(y)$. Die Ableitung der Umkehrfunktion $g(y)$ ist berechenbar durch

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ersetzt man die Variable x durch $g(y)$ und vertauscht anschließend formal auf beiden Seiten der Gleichung die Variable x mit y, so erhält man $g'(x)$.

Beweis: Bilden der Umkehrfunktion von $y = f(x)$ liefert: $x = f^{-1}(y) = g(y)$.

$$\begin{aligned}
y = f(x) &= f(g(y)) && |\text{ableiten nach } y \\
\frac{d}{dy}(y) &= \frac{d}{dy}(f(g(y))) && |\text{Kettenregel} \\
1 &= f'(g(y)) \cdot g'(y) = f'(x) \cdot g'(y) && |\text{umstellen nach } g'(y) \\
g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} && \blacksquare
\end{aligned}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Beispiel:

- Ableitung von $\ln x$:
  - Gegeben: $y = f(x) = e^x$ mit $f'(x) = e^x$
  - Gesucht: Ableitung der Umkehrfunktion $g(x) = \ln x$
  - Ansatz: $y = e^x$ nach x auflösen $\Rightarrow x = g(y) = \ln y$
    $$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$
  - Vertauschen der Variablen $(x \leftrightarrow y)$: $g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
- Ableitung von $\arctan x$:
  - Gegeben: $y = f(x) = \tan x$ mit $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$
  - Gesucht: Ableitung der Umkehrfunktion $g(x) = \arctan x$
  - Ansatz: $y = \tan x$ nach x auflösen $\Rightarrow x = g(y) = \arctan y$
    $$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\tan^2 x + 1} = \frac{1}{y^2 + 1}$$
  - Vertauschen der Variablen $(x \leftrightarrow y)$: $g'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$

Zusatzübungen (Ableitung der Umkehrfunktionen)

1. Bestimmen Sie die Ableitungen der Arkusfunktionen indem Sie die Ableitung der Umkehrfunktion der trigonometrischen Funktionen berechnen.

   (a) $\arcsin x$

   (b) $\arccos x$

   (c) $\operatorname{arc}\cot x$,

Aufgabe 1

(a) Gegeben: $y = f(x) = \sin x$ mit $f'(x) = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

Gesucht: Ableitung der Umkehrfunktion $g(x) = \arcsin x$

Ansatz: $y = \sin x$ nach x auflösen: $\Rightarrow x = g(y) = \arcsin y$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Vertauschen der Variablen: $g'(x) = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) Gegeben: $y = f(x) = \cos x$ mit $f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$

Gesucht: Ableitung der Umkehrfunktion $g(x) = \arccos x$

Ansatz: $y = \cos x$ nach x auflösen: $\Rightarrow x = g(y) = \arccos y$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Vertauschen der Variablen: $g'(x) = (\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) Gegeben: $y = f(x) = \cot x$ mit $f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$

Gesucht: Ableitung der Umkehrfunktion $g(x) = arc\cot x$

Ansatz: $y = \cot x$ nach x auflösen: $\Rightarrow x = g(y) = arc\cot y$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{-1}{1+\cot^2 x} = \frac{-1}{1+y}$$

Vertauschen der Variablen: $g'(x) = (arc\cot x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$