Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Fachhochschule Nordwestschweiz

Übungsblatt 2

Lösungen

Lösung 1.
Aus der expliziten Darstellung $a_n = 0.5n^2 - 12.4n + 3$ der Folge sehen wir, dass es sich hierbei um eine quadratische Funktion handelt. Die Parabel ist nach oben geöffnet, also befindet sich das Minimum dieser Funktion genau im Scheitelpunkt, der nun zu berechnen ist. Dafür formen wir die explizite Darstellung in die Scheitelpunktform um:

$$\begin{aligned} a_n &= 0.5n^2 - 12.4n + 3 = 0.5 \cdot (n^2 - 24.8n + 6) = 0.5 \cdot (\underbrace{(n-12.4)^2}_{=n^2-24.8n+153.76} - 153.76 + 6) \\ &= 0.5 \cdot ((n-12.4)^2 - 147.76) = 0.5 \cdot (n-12.4)^2 - 73.88 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt auf der ersten Zeile haben wir quadratisch ergänzt. Der Scheitelpunkt lässt sich nun aus dem letzten Term herauslesen:

$$S = (12.4 \mid -73.88)$$

Das Minimum wird also bei $n = 12$ erreicht.

Lösung 2.

$$\begin{aligned} 1.5^n &> 1000 \\ \log(1.5^n) &> \log(1000) \\ n \cdot \log(1.5) &> \log(1000) \\ n &> \frac{\log(1000)}{\log(1.5)} = 17.03662\ldots \end{aligned}$$

Ab $n = 18$ sind die Folgenglieder also grösser als 1000.

Anmerkung: In der Informatik bezeichnen wir mit log normalerweise den Zweierlogarithmus $\log_2$. Im Beispiel oben spielt es aber keine Rolle, welcher Logartihmus verwendet wird.

Lösung 3.

(a) **rekursiv:** $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 3$

explizit: $a_n = 3n - 2$

(b) **rekursiv:** $a_1 = 2$, $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$

explizit: $a_n = 2^n$

(c) **rekursiv:** $a_1 = 3$, $a_n = 10 \cdot a_{n-1} + 3$

explizit: $a_n = \sum_{i=1}^{n}(3 \cdot 10^{i-1}) = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}$

oder $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$

Fazit:

- Die rekursive Darstellung ist oft einfacher aus der aufzählenden Darstellung zu bestimmen.
- Die explizite Darstellung ist aber einfacher anzuwenden, um für eine beliebige natürliche Zahl das entsprechende Folgenglied zu bestimmen.
- Um mit der rekursiven Darstellung ein beliebiges Folgenglied a_n zu berechnen, muss der Wert von a_{n-1} gegeben sein.

Lösung 4.

3 Blütenblätter: Lilien, Iris

5 Blütenblätter: Veilchen, manche Orchideen, Glockenblumen, Heckenrosen, Butterblumen

8 Blütenblätter: Rittersporn

13 Blütenbätter: Ringelblumen

21 Blütenblätter: Zichorien, Astern, Gänseblümchen

34 Blütenblätter: Mutterkraut

55 oder 89 Blütenblätter: Sonnenblumen

Lösung 5. (a) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \sum_{i=1}^{10} i$

(b) $2+4+6+\cdots+100 = \sum_{i=1}^{50} 2i$

(c) $1-4+9-16+25-36+49-64 = \sum_{i=1}^{8} (-1)^{i+1} i^2$

(d) $5+5+5+5+5+5+5 = \sum_{i=1}^{7} 5$

(e) $-9-8-7-6-5-4-3-2-1+0+1+2+3 = \sum_{i=-9}^{3} i$

(f) $-1+3-5+7-9+11-13+15-17=\sum_{i=1}^{9}(-1)^i(2i-1)$

(g) $3^2+5^3+7^4+9^5+11^6+13^7+15^8=\sum_{i=1}^{7}(2i+1)^{i+1}$

(h) $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{9}+\frac{9}{11}+\frac{11}{13}+\frac{13}{15}=\sum_{i=1}^{7}\frac{2i-1}{2i+1}$

Lösung 6.

(a) $\sum_{i=1}^{n}(2i)=2\cdot\sum_{i=1}^{n}i=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$

(b)
$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2=\sum_{i=1}^{n}(i^2+2i+1)=\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}(2i)+\sum_{i=1}^{n}1=\sum_{i=1}^{n}i^2+2\cdot\sum_{i=1}^{n}i+n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}i^2+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n=\sum_{i=1}^{n}i^2+n^2+n+n=\sum_{i=1}^{n}i^2+n^2+2n$$

(c) $\sum_{i=-n}^{n}i=\sum_{i=-n}^{-1}i+0+\sum_{i=1}^{n}i=\sum_{i=1}^{n}(-i)+\sum_{i=1}^{n}i=-\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}i=0$

Lösung 7. (a) $\prod_{i=0}^{4}(i+2)=2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$

(b) $\prod_{i=0}^{100}i^2=0^2\cdot1^2\cdot2^2\cdot\dots\cdot1^2=0$

Lösung 8.

(a) Es ist $\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}$, also gilt $a_{n+1}<a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und somit ist die Folge streng monoton fallend.

Die Folge a_n ist auch beschränkt mit der oberen Schranke $S=a_1=\frac{2}{1}=2$ und der unteren Schranke $s=0$.

(b) Die Folge ist nicht monoton, weil die Werte zwischen dem negativen und positiven Bereich hin- und herwechseln:

$$b_1=-2,\quad b_2=1,\quad b_3=\frac{-2}{3},\quad b_4=\frac{1}{2},\quad b_5=\frac{-2}{5},\quad \dots$$

Die Folge b_n ist aber beschränkt mit der oberen Schranke $S=b_2=1$ und der unteren Schranke $s=b_1=-2$.

(c) Um die Monotonie der Folge c_n zu untersuchen, betrachten wir die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Folgegliedern

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1-2(n+1)}{n+1} - \frac{1-2n}{n} = \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} + 2 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0\,.$$

Das bedeutet, dass $c_{n+1} < c_n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, womit die Folge streng monoton fallend ist.

Die Folge c_n ist nach oben beschränkt durch $S = c_1 = -1$. Sie ist auch nach unten beschränkt durch $s = -2$ (der Beweis dazu folgt später).

(d) Die Folge d_n ist wegen $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}}$ streng monoton fallend und beschränkt mit der oberen Schranke $S = d_1 = \frac{1}{2}$ und der unteren Schranke $s = 0$.

(e) Die Folge ist wegen

$$\frac{e_n}{e_{n+1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} < 1$$

streng monoton fallend. e_n ist beschränkt mit der oberen Schranke $S = e_1 = 2$ und der unteren Schranke $s = 1$.

(f) Die Folge f_n ist wegen dem von Folgeglied zu Folgeglied wechselnden Vorzeichen nicht monoton. Diese Folge ist aber beschränkt:

$$f_1 = -\frac{2}{3} = -0.\overline{6}, \quad f_2 = \frac{4}{9} = 0.\overline{4}, \quad f_3 = -\frac{8}{27} = -0.\overline{296},$$
$$f_4 = \frac{16}{81} = 0.197530\ldots, \quad f_5 = -\frac{32}{243} = -0.131687\ldots, \quad f_6 = \frac{64}{729} = 0.087791\ldots, \quad \ldots$$

Die obere Schranke ist $S = f_2 = \frac{4}{9}$ und die untere Schranke $s = f_1 = -\frac{2}{3}$.

Lösung 9.

Wir untersuchen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1 \cdot q^n}{a_1 \cdot q^{n-1}} = q, \quad \text{d.h. für} \begin{cases} 0 < q < 1 & \text{streng monoton fallend} \\ q > 1 & \text{streng monoton wachsend} \end{cases}$$

Für negative Werte von *q* ist die Folge alternierend, d.h. benachbarte Glieder haben entgegengesetzte Vorzeichen, damit ist die Folge nicht monoton.
Für *q=1* bleiben die Folgenglieder konstant beim Wert a_1.

Lösung 10.

Die Folge a_n ist beschränkt, also gibt es eine obere Schranke S^a mit $a_n \leq S^a$ und eine untere Schranke s^a mit $a_n \geq s^a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die obere und untere Schranke von b_n bezeichnen wir mit S^b und s^b.
Für die obere Schranke von $a_n + b_n$ gilt also

$$a_n + b_n \leq S^a + S^b$$

und für die untere Schranke ist

$$a_n + b_n \geq s^a + s^b .$$

Somit ist die Folge $c_n = a_n + b_n$ auch beschränkt.

Lösung 11.

(a) Es gilt

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{8}, \quad a_5 = \frac{1}{16}, \quad a_6 = \frac{1}{32}, \quad \ldots$$

und somit ist $a_n = \frac{1}{2^{n-1}} = 2^{1-n}$.

Diese Zahlenfolge ist streng monoton fallend und beschränkt durch die obere Grenze $S = a_1 = 1$ und die untere Grenze $s = 0$. Diese Folge ist nicht alternierend.

(b) Es gilt

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{4}, \quad b_4 = -\frac{1}{8}, \quad b_5 = \frac{1}{16}, \quad b_6 = -\frac{1}{32}, \quad \ldots$$

und somit ist $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot 2^{1-n}$.

Diese Folge ist alternierend, nicht monoton, aber beschränkt durch die obere Grenze $S = b_1 = 1$ und die untere Grenze $s = b_2 = -\frac{1}{2}$, weil die positiven Folgenglieder immer kleiner werden und die negativen immer grösser.

(c) Es gilt

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = 4, \quad c_4 = -8, \quad c_5 = 16, \quad c_6 = -32, \quad \ldots$$

und somit ist $c_n = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}$.

Die Folge ist alternierend, nicht beschränkt und nicht monoton.

(d) Es gilt

$$d_1 = -1, \quad d_2 = -1, \quad d_3 = -1, \quad d_4 = -1, \quad d_5 = -1, \quad d_6 = -1, \quad \ldots$$

und somit ist die explizite Darstellung der Folge gegeben durch $d_n = -1$.

Die Folge ist konstant und somit beschränkt durch die obere und untere Grenze $S = s = -1$. Sie ist nicht alternierend, aber sowohl monoton fallend wie auch monoton wachsend, aber weder streng monoton fallend noch streng monoton wachsend.

(e) Es gilt

$$e_1 = -\frac{1}{3}, \quad e_2 = -\frac{1}{27}, \quad e_3 = -\frac{1}{19\,683}, \quad e_4 = -\frac{1}{7\,625\,597\,484\,987}, \quad \ldots$$

und damit ist die explizite Darstellung gegeben durch $e_n = -\frac{1}{3^{3^{n-1}}}$.

Somit ist die Folge nicht alternierend, aber monoton wachsend und beschränkt durch die obere Grenze $S = 0$ und die untere Grenze $s = e_1 = -\frac{1}{3}$.

(f) Es gilt

$$f_1 = -2, \quad f_2 = -8, \quad f_3 = -512, \quad f_4 = -134\,217\,728, \quad \dots$$

und somit ist $f_n = -2^{3^{n-1}}$.

Die Folge ist also nicht alternierend, aber nach oben beschränkt durch $S = f_1 = -2$ und streng monoton fallend.

Lösung 12.
Wir unterscheiden 4 Fälle:

(a) $a \geq 0$ und $b \geq 0$: Dann sind $|a| = a$ und $|b| = b$ und $a \cdot b \geq 0$, also gilt

$$|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|\,.$$

(b) $a < 0$ und $b < 0$: Dann sind $|a| = -a$ und $|b| = -b$ und $a \cdot b > 0$, also gilt

$$|a \cdot b| = a \cdot b = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|\,.$$

(c) $a < 0$ und $b \geq 0$: Dann sind $|a| = -a$ und $|b| = b$ und $a \cdot b \leq 0$, also gilt

$$|a \cdot b| = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b = |a| \cdot |b|\,.$$

(d) $a \geq 0$ und $b < 0$: Dann sind $|a| = a$ und $|b| = -b$ und $a \cdot b \leq 0$, also gilt

$$|a \cdot b| = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|\,.$$

Lösung 13.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}$

Der Zähler strebt gegen 0, der Nenner gegen 1, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n}}$

Sowohl der Zähler wie auch der Nenner streben gegen 1, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1}$

Sowohl der Zähler wie auch der Nenner streben gegen 1, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1-\frac{1}{n}}{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$

Der Zähler strebt gegen 0, der Nenner gegen 1, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n+n^2}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n+n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}+1}{1+\frac{1}{n}}$

Sowohl der Zähler wie auch der Nenner streben gegen 1, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 1$.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n+n^3}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n+n^3}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^2}+1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$

Der Nenner würde gegen 0 streben, also existiert kein Grenzwert für f_n in $\mathbb{R}$. Die Folge f_n ist also divergent.

(g) Weil zwei immer grösser werdende Zahlen voneinander subtrahiert werden, bringen wir beide Zahlen zuerst auf einen Bruch:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1-n+n^3}{n(n+1)} - n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-n+n^3-n^2(n+1)}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n+n^3-n^3-n^2}{n^2+n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-n-n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Der Zähler strebt gegen -1 und der Nenner gegen 1, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = -1$.

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

Der Zähler strebt gegen 1, der Nenner gegen 2, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \frac{1}{2}$.

Anmerkung: Allgemein lässt sich über Folgen, die aus einem Quotienten $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ von Polynomen $p(n)$ und $q(n)$ bestehen, Folgendes feststellen:

- Ist der Grad von $p(n)$ grösser als jener von $q(n)$, dann ist die Folge unbeschränkt und somit nicht konvergent.
- Ist der Grad von $p(n)$ kleiner als jener von $q(n)$, dann konvergiert die Folge gegen 0.
- Ist der Grad von beiden Polynomen gleich, so ist die Folge konvergent und der Grenzwert kann durch Kürzen des Bruches mit der höchsten Potenz berechnet werden.

- Werden zwei nicht konvergente Quotienten b_n und c_n voneinander subtrahiert, $a_n = b_n - c_n$, dann sollte der Ausdruck $b_n - c_n$ zuerst auf einen gemeinsamen Bruch gebracht werden, der dann wiederum auf Konvergenz untersucht wird.

Lösung 14.
siehe nächste Seite

Wie Heron die Wurzel zog

Ziehe die Wurzel aus 84			
a_0	7	b_0	12
a_1	9,5	b_1	8,842105263
a_2	9,171052632	b_2	9,159253945
a_3	9,165153289	b_3	9,165149491
a_4	9,16515139	b_4	9,16515139

Ziehe die Wurzel aus 135			
a_0	10	b_0	13,5
a_1	11,75	b_1	11,4893617
a_2	11,61968085	b_2	11,61821927
a_3	11,61895006	b_3	11,61895002
a_4	11,61895004	b_4	11,61895004

Ziehe die Wurzel aus 561			
a_0	20	b_0	28,05
a_1	24,025	b_1	23,35067638
a_2	23,68783819	b_2	23,68303918
a_3	23,68543869	b_3	23,68543844
a_4	23,68543856	b_4	23,68543856

Ziehe die Wurzel aus 751			
a_0	25	b_0	30,04
a_1	27,52	b_1	27,28924419
a_2	27,40462209	b_2	27,40413633
a_3	27,40437921	b_3	27,40437921

Ziehe die Wurzel aus 6892			
a_0	80	b_0	86,15
a_1	83,075	b_1	82,96117966
a_2	83,01808983	b_2	83,01805082
a_3	83,01807032	b_3	83,01807032

Ziehe die Wurzel aus 39			
a_0	5	b_0	7,8
a_1	6,4	b_1	6,09375
a_2	6,246875	b_2	6,243121561
a_3	6,24499828	b_3	6,244997716
a_4	6,244997998	b_4	6,244997998

Ziehe die Wurzel aus 441			
a_0	15	b_0	29,4
a_1	22,2	b_1	19,86486486
a_2	21,03243243	b_2	20,96761758
a_3	21,00002501	b_3	20,99997499
a_4	21	b_4	21

Ziehe die Wurzel aus 4			
a_0	0,5	b_0	8
a_1	4,25	b_1	0,941176471
a_2	2,595588235	b_2	1,541076487
a_3	2,068332361	b_3	1,933925164
a_4	2,001128762	b_4	1,998871874
a_5	2,000000318	b_5	1,999999682
a_6	2	b_6	2

Ziehe die Wurzel aus 1654			
a_0	40	b_0	41,35
a_1	40,675	b_1	40,6637984
a_2	40,6693992	b_2	40,66939843
a_3	40,66939882	b_3	40,66939882

Ziehe die Wurzel aus 1000			
a_0	25	b_0	40
a_1	32,5	b_1	30,76923077
a_2	31,63461538	b_2	31,61094225
a_3	31,62277882	b_3	31,62277439
a_4	31,6227766	b_4	31,6227766