Diskrete Stochastik
Klasse 3Ia/5Ibb/5iCbb

Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Serie 5

Aufgabe 1. Es sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ gegeben, wobei a einen positiven Parameter bezeichnet.

1. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass f Dichte ist.
2. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F zu f.
3. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten für eine stetige Zufallsvariable, die gemäss dem obigen f verteilt ist.
   (a) $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)$
   (b) $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$
   (c) $P\left(\frac{3}{4} \leq X\right)$

Lösung. 1. Es muss also gelten $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, d.h. $a = 2$

2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ x^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

3. (a) $F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 0.451$
   (b) $F(0.5) = 0.25$
   (c) $1 - F(0.75) = 0.4375$

Aufgabe 2. Es sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ gegeben. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsvariablen X mit dieser Verteilung.

Lösung. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$, $V(X) = \frac{1}{18}$

Aufgabe 3. Es sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Berechnen Sie

1. $P(X \leq 1)$
2. $P(|X| \geq \frac{1}{2})$
3. $P(-3 \leq X \leq 1)$

Lösung. 1. $P(X \leq 1) = \mathit{normcdf}(1, 0, 1) = 0.8413$

2. $P(|X| \geq \frac{1}{2}) = 1 - \mathit{normcdf}(0.5, 0, 1) + \mathit{normcdf}(-0.5, 0, 1) = 2\mathit{normcdf}(-0.5, 0, 1) = 0.6171$

3. $P(-3 \leq X \leq 1) = \mathit{normcdf}(1, 0, 1) - \mathit{normcdf}(-3, 0, 1) = 0.84$

Aufgabe 4. Berechnen Sie

1. $P(-4 \leq X \leq 8)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(2,2)$
2. $P(2 \leq X)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(1,3)$
3. $P(|X| \leq 1)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(-1,4)$

Lösung. 1. $normcdf(8,2,2) - normcdf(-4,2,2) = 0.9973$

2. $1 - normcdf(2,1,3) = 0.3694$
3. $normcdf(1,-1,4) - normcdf(-1,-1,4) = 0.1915$

Aufgabe 5. Ein Werkstück besitze die gewünschte Qualität, wenn die Abweichung seiner Masse von den Nennwerten dem Absolutbetrag nach $3.45mm$ nicht überschreiten. Die zufällige Abweichungen der Abmessungen von ihren Nennwerten seien normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 3mm$.

1. Mit welches Wahrscheinlichkeit ist ein Werkstück von der gewünschten Qualität?
2. Bestimmen Sie die mittlere Anzahl Werkstücke mit der gewünschten Qualität, wenn 24 Werkstücke hergestellt werden.

Lösung. 1. Es bezeichne Y die Zufallsvariable, die die Abweichung eines Werkstücks beschreibt. Dann gilt $Y \sim \mathcal{N}(0,3)$. Wir erhalten $P(|Y| \leq 3.45) = normcdf(3.45,0,3) - normcdf(-3.45,0,3) = 0.7499$

2. Es bezeichne Z die Zufallsvariable, die die Anzahl an gewünschten Werkstücken in den 24 Werkstücken zählt. Dann ist $Z \sim Bin(24, 0.7499)$ und Wir erhalten $E(Z) = 24 \cdot 0.7499 = 17.9965$

Aufgabe 6. Wir nehmen an, dass Gewicht (in g) einer Singvogelart sei normal verteilt mit $\mu = 2.1$ und $\sigma = 0.2$. Es werden 100 Eier untersucht. Wie viele davon erwarten Sie

1. Mit einem Gewicht von ≤ 2.15?
2. mit einem Gewicht zwischen 1.9 und 2.3?

Lösung. 1. Es bezeichne X die Anzahl an Eiern innerhalb der 100 Eier, die ≤ 2.15 wiegen. Dann ist $X \sim Bin(100, normcdf(2.15, 2.1, 0.2))$ und wir erhalten $E(X) \approx 60$.

2. ≈ 68

Aufgabe 7. Der Intelligenzquotient ist so normiert, dass er einer Normalverteilung mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$ folgt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 5 Leuten

1. genau 2
2. mindestens 2

Leute einen IQ > 130 haben?

Lösung. 1. Es bezeichne X die Azahl an Personen mit einem IQ von > 130 innerhalb von 5 Leuten. Dann ist $X \sim Bin(5, 1 - normcdf(130, 100, 15))$ und wir erhalten $P(X = 2) = binopdf(2, 5, 1 - normcdf(130, 100, 15)) = 0.00485$.

2. $1 - binocdf(1, 5, 1 - normcdf(130, 100, 15)) = 0.00497$

Aufgabe 8. Das Körpergewicht einer gewissen Population von Menschen sei normal verteilt mit $\mu = 80$kg und $\sigma = 10$kg. Die schwersten 10% müssen ein Sondertraining absolvieren. Bei welchem Gewicht ist die Grenze festzusetzen?

Lösung. $norminv(0.9, 80, 10) = 92.8155$

Aufgabe 9. Es sei $X \sim \mathcal{N}(8, 3)$. Bestimmen Sie x so, dass $P(x \leq X \leq 10) = 0.7$ ist.

Lösung. $P(x \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq x)$, also $P(X \leq x) = P(X \leq 10) - 0.7$, woraus sich $x = norminv(normcdf(10, 8, 3) - 0.7, 8, 3) = 2.9914$ ergibt.

Aufgabe 10. Eine Abfüllmaschine füllt ein Erzeugnis in Dosen. Das Nettogewicht einer Dose ist eine normalverteilte Zufallsvariable. Die Standardabweichung, als Mass für die Präzision mit der die Maschine arbeitet, sei 8g. Auf welchen Mittelwert ist die Maschine einzustellen, wenn höchstens 5% aller Dosen weniger als 250g enthalten sollen?

Lösung. Gesucht ist ein μ, so bei $X \sim \mathcal{N}(\mu, 8)$ gilt $P(X \leq 250) \leq 0.05$. Wir erhalten aus $P(X - \mu \leq 250 - \mu) \leq 0.05$, dass $250 - \mu = norminv(0.05, 0, 8)$, also $\mu = 263.2g$.

Aufgabe 11. Der Durchmesser X von serienmässig gefertigten Kugeln sei normalverteilt. Von zwei Sieben weist das eine Löcher mit einem Durchmesser von 10mm auf, das andere solche mit einem Durchmesser von 13mm. Damit werden die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 10mm) = 0.1736$ und $P(X \geq 13mm) = 0.1446$ bestimmt. Wie lauten die Parameter μ und σ der Verteilung von X?

Lösung. Es ist $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{10-\mu}{\sigma}\right) = 0.1736$ und $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{13-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.1446$. Da $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, folgt $\frac{10-\mu}{\sigma} = norminv(0.1736, 0, 1) = -0.94$ und $\frac{13-\mu}{\sigma} = norminv(1 - 0.1446, 0, 1) = 1.06$. Das LGS löst sich zu $\mu = 11.41$, $\sigma = 1.5$

Aufgabe 12. Bei der Untersuchung einer gewissen Population hat man festgestellt, dass 33% der Personen ein Gewicht von ≤ 55kg und 5% der Personen ein solches von > 70kg haben. Wir nehmen an, die Zufallsvariable $X =$ Körpergewicht sei normal verteilt.

1. Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Gewicht einer zufällig aus dieser Gruppe herausgegriffenen Person zwischen 57kg und 64kg?

3. Bestimmen Sie die Zahl z so, dass genau 25% aller Personen aus der Population mehr als z kg wiegen.

Lösung.

1. Aus $P(X \leq 55) = 0.33$ und $P(X > 70) = 0.05$ erhält man analog zur vorigen Aufgabe, dass $\mu = 58.17$ und $\sigma = 7.19$ als Lösung der Gleichungen $\frac{55-\mu}{\sigma} = norminv(0.33, 0, 1)$ und $\frac{70-\mu}{\sigma} = norminv(1-0.05, 0, 1)$. (Etwa via `rref([1 norminv(0.33,0,1) 55;1 norminv(1-0.05,0,1) 70])`).

2. $normcdf(64, 58.17, 7.19) - normcdf(57, 58.17, 7.19) = 0.3559$

3. $z = norminv(1 - 0.25, 58.17, 7.19) = 63.0196$

Aufgabe 13. T sei die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Bargeldbezügen an einem Bankautomaten. Wir nehmen an, dass T exponentialverteilt ist mit $\lambda = 1[\text{min}^{-1}]$ Berechnen Sie

1. die erwartete Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Bargeldbezügen,

2. die Standardabweichung von T,

3. die Wahrscheinlichkeit $P(T \leq 4)$,

4. die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq T \leq 5)$.

Lösung. 1. 1

2. 1

3. $\mathit{expcdf}(4, 1) = 0.982$

4. $\mathit{expcdf}(5, 1) - \mathit{expcdf}(2, 1) = 0.129$

Aufgabe 14. An einer Kreuzung mitten im Nirgendwo kommen im Schnitt 3 Autos pro Stunde vorbei, also im Schnitt alle 20 Minuten eins. Sie kommen zu einem zufällige Zeitpunkt an die Kreuzung und warten auf das nächste Auto. Wie hoch ist die erwartetet Wartezeit?

Lösung. Die Wartezeit ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 3$. Der Erwartungswert ist somit $\frac{1}{3}$ Stunde, also 20 Minuten.

Dieses Problem wird manchmal als Wartezeitparadoxon bezeichnet. Viele würde intuitiv als Antwort 10 Minuten sagen, mit folgender Begründung: Im Schnitt kommt alle 20 Minuten ein Auto und im Schnitt kommt man in der Mitte eines solchen 20-Minuten-Intervalls an, und dann wartet man eben 10 Minuten.

Aufgabe 15. Die Lebenszeit eines Gerätes sei exponentiell verteilt mit $\lambda = 0.02$. Die Zeiteinheit sei in Jahren.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lebt das Gerät länger als 50 Jahre?

2. Das Gerät ist 30 Jahre alt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lebt es länger als 50 Jahre?

3. Nach welcher Zeit sind 25% aller Geräte, die zur Zeit $t = 0$ produziert wurden, noch funktionstüchtig?

Lösung. 1. $1 - \mathit{expcdf}(50, 1/0.02) = 0.3679$

2. $1 - \mathit{expcdf}(20, 1/0.02) = 0.670$

3. $\mathit{expinv}(0.75, 1/0.02) = 69.3$ Jahre

Aufgabe 16. In einem Prozessorsystem mit 3 Prozessoren wird ein Auftrag Prozessor 1 mit Wahrscheinlichkeit 20%, Prozessor 2 mit Wahrscheinlichkeit 30% und Prozessor 3 mit 50% zugewiesen. Die Bearbeitungsdauer der einzelnen Prozessoren sei exponentialverteilt mit Parametern $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 20$ bzw. $\lambda_3 = 30$ für Prozessor 1,2 bzw. 3, wobei die Zeiteinheit Stunden sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

1. dauert die Bearbeitung mehr als 2 Minuten?

2. weniger als 30 Sekunden?

Lösung. 1. $0.2*(1-\mathit{expcdf}(1/30, 1/10))+0.3*(1-\mathit{expcdf}(1/30, 1/20))+0.5*(1-\mathit{expcdf}(1/30, 1/30)) = 0.4813$

2. $0.2 * (\mathit{expcdf}(1/120, 1/10)) + 0.3 * (\mathit{expcdf}(1/120, 1/20)) + 0.5 * (\mathit{expcdf}(1/120, 1/30)) = 0.1726$

Aufgabe 17. An einer Landstrasse kommen im Mittel 5 Autos pro Stunde vorbei.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Minuten kein Auto vorbeikommt?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie mehr als 5 Minuten auf das nächste Auto warten?
3. Sie wollen mindestens ein Auto sehen. Wie lange müssen Sie bleiben, damit mit Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens ein Auto vorbeikommt?
4. Wie viele Autos müssten im Mittel pro Stunde vorbeikommen, wenn Sie mit Wahrscheinlichkeit von 80% höchstens zwei Minuten auf das nächste warten wollen?

Lösung.

1. $\mathit{poisspdf}(0, 25/60) = 0.6592$
2. $1 - \mathit{expcdf}(1/12, 1/5) = \mathit{poisspdf}(0, 25/60) = 0.6592$
3. $P(X \leq t) = 0.9 \Leftrightarrow t = \mathit{expinv}(0.9, 1/5) = -\ln(0.1)/5 = 0.4605$ Stunden
4. Es sei $Y \sim \mathit{Exp}(\lambda)$ mit $P(Y \leq \frac{1}{30}) = 0.8$ Dann gilt also $1 - e^{-\frac{\lambda}{30}} = 0.8$, woraus sich $\lambda = -30\ln(0.2)$ ergibt.

Aufgabe 18. Ein Maschine fertigt Holzleisten, die exakt einen Meter lang sein sollen. Durch Ungenauigkeiten ist die tatsächliche Länge normal verteilt mit Mittelwert 1m und Standardabweichung 10cm. Die Leisten werden in Kartons der Länge 105cm verpackt. Bei der Endkontrolle werden alle Leisten, die nicht in den Karton passen, exakt auf einen Meter gekürzt.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dass eine Leiste 1 Meter ist?
2. Zwischen 99cm und 101cm lang ist?
3. Zwischen 97cm und 98 cm lang ist?
4. Sie kaufen einen Karton mit 5 Leisten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dass alle Leisten exakt einen Meter lang sind?

Lösung.

1. $1 - \mathit{normcdf}(1.05, 1, 0.1) = 0.3085$
2. $1 - \mathit{normcdf}(1.05, 1, 0.1) + \mathit{normcdf}(1.01, 1, 0.1) - \mathit{normcdf}(0.99, 1, 0.1) = 0.3882$
3. $\mathit{normcdf}(0.98, 1, 0.1) - \mathit{normcdf}(0.97, 1, 0.1) = 0.0387$
4. $(1 - \mathit{normcdf}(1.05, 1, 0.1))^5 = 0.0028$