Einführung in die Analysis
8. Geometrische Bedeutung der Ableitung und Optimierungsaufgaben (Kurvendiskussion)

Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

Frühlingssemester 2021

8. Geometrische Bedeutung der Ableitung und Optimierungsaufgaben (Kurvendiskussion)

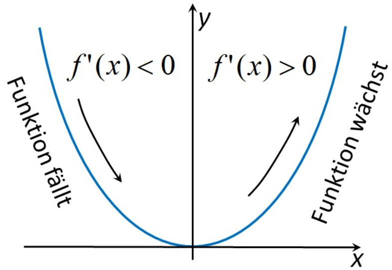
Inhaltsverzeichnis

Monotonie

Bisher haben wir die Monotonie einer Funktion f in einem Intervall I untersucht, indem wir für zwei x-Werte $x_1, x_2 \in I$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ verglichen haben. Das Monotonieverhalten einer Funktion f kann aber auch mithilfe der 1. Ableitung der Funktion f' untersucht werden. Beispiel.

Ableitung und Monotonie:
Die erste Ableitung an der Stelle x_0 beschreibt das Steigungsverhalten einer Funktion f in der unmittelbaren Umgebung der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \begin{cases} < 0 \Rightarrow & \text{Funktion fällt} \\ > 0 \Rightarrow & \text{Funktion wächst} \end{cases}$$



Dabei betrachtet man die Funktion stets in Richtung zunehmender $x-$Werte.

Monotoniesatz

Satz (Monotoniesatz)

Falls die erste Ableitung einer Funktion f existiert und für alle $x-$Werte aus einem Intervall I

- positiv ist, dann ist die Funktion auf ganz I streng monoton wachsend:

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in I \Rightarrow f(x) \text{ streng monoton wachsend.}$$

- negativ ist, dann ist die Funktion auf ganz I streng monoton fallend:

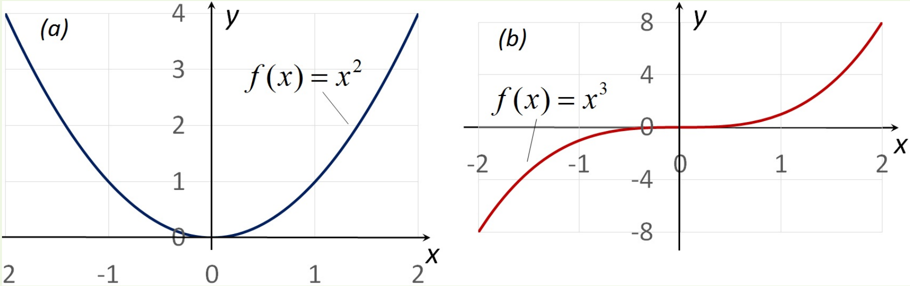
$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in I \Rightarrow f(x) \text{ streng monoton fallend.}$$

Bemerkungen:

- Gilt $f \geq 0$ bzw. $f \leq 0$, dann ist die Funktion monoton fallend bzw. wachsend, aber nicht zwangsläufig streng monoton;
- Das Vorzeichen von f' liefert lediglich ein hinreichendes Kriterium für Monotonie. Bei Funktionen, die an gewissen Stellen nicht differenzierbar sind, muss man die Funktion dort gesondert untersuchen.

Monotoniesatz

Beispiel:



(a) Die Funktion $f(x) = x^2$ besitzt die 1. Ableitung $f'(x) = 2x$ und ist auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend, da dort $f'(x) < 0$ gilt und auf dem Intervall $(0, \infty)$ streng monoton wachsend, da dort $f'(x) > 0$ gilt.

(b) Der Monotoniesatz ist nicht umkehrbar! Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend, aber in x_0 gilt nicht $f'(0) > 0$, sondern $f'(0) = 0$.

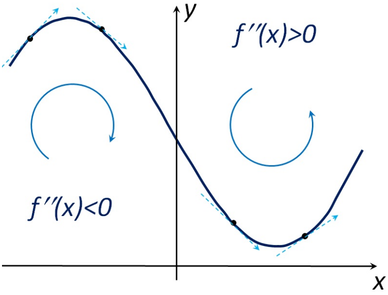
Krümmung

Auch die zweite Ableitung einer Funktion hat eine anschauliche Bedeutung. Die erste Ableitung beschreibt die Veränderung der Funktion. Auf dieselbe Art beschreibt die zweite Ableitung die Veränderung der Steigung:

2. Ableitung und Krümmung:

Die zweite Ableitung an der Stelle x_0 beschreibt das Krümmungsverhalten einer Funktion f in der unmittelbaren Umgebung der Stelle x_0:

$$f''(x_0) = \begin{cases} < 0 \Rightarrow & \text{Rechtskrümmung} \\ & \text{Steigung nimmt ab} \\ > 0 \Rightarrow & \text{Linkskrümmung} \\ & \text{Steigung nimmt zu} \end{cases}$$



Dabei betrachtet man die Funktion stets in Richtung zunehmender $x-$*Werte.* *Beispiel*

Krümmungssatz

Differenzierbare Funktionen können auf zweierlei Arten gekrümmt sein. Sie können:

- **Rechtsgekrümmt (konkav)**
- **Linksgekrümmt (konvex)**

sein.

Satz (Krümmungssatz)

Ist eine Funktion f in einem Intervall I (mindestens) zweimal differenzierbar, dann gilt:

- $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ ist streng monoton fallend
  $\Rightarrow f(x)$ ist rechtsgekrümmt (konkav).
- $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ ist streng monoton wachsend
  $\Rightarrow f(x)$ ist linksgekrümmt (konvex).

Krümmung

Beispiel:

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

auf Monotonie und Krümmungsverhalten.

Monotonie: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1)$:

x	$x < 1$	$1 \leq x \leq 3$	$x > 3$
$f'(x)$	> 0 streng monoton wachsend	< 0 streng monoton fallend	> 0 streng monoton wachsend

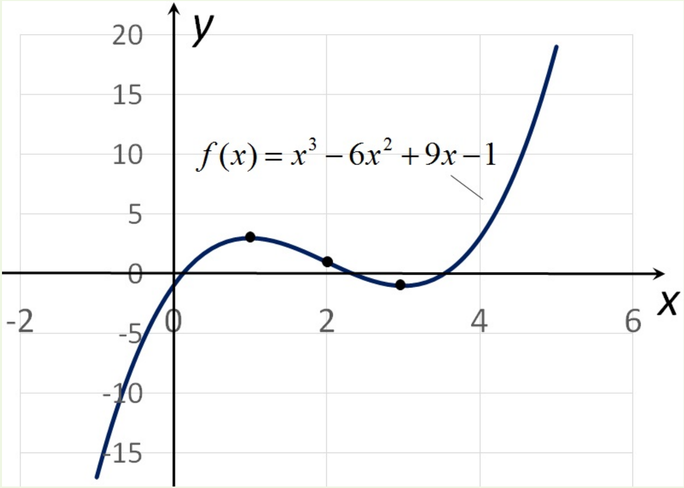
Krümmung: $f''(x) = 6x - 12$:

x	$x < 2$	$x \geq 2$
$f''(x)$	< 0 konkav rechtsgekrümmt	> 0 konvex linksgekrümmt

Krümmung

Beispiel (Fortsetzung:

Der Funktionsgraph des Polynoms 3. Ordnung sieht folgendermaßen aus:



Übungsblatt 8

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die folgenden Funktionen monoton wachsend bzw. fallend sind.

(a) $f(x) = -12x^2 + 8x - 1$

(b) $g(x) = \frac{x}{1-x}$

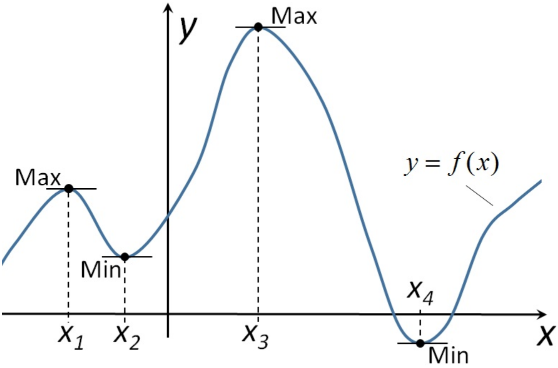
Aufgabe 2.
In welchem Intervall sind die folgenden Funktionen konvex bzw. konkav?

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 60x + 100$

(b) $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$

Extremwerte

Funktionen werden im technischen oder ökonomischen Kontext oft benutzt, um Systeme und deren Einflussgrößen zu modellieren. Die Aufgabe der mathematischen Analyse besteht darin, Werte für die Einflussgrößen zu bestimmen, für die der Funktionswert maximal, bzw. minimal wird. Solche Fragestellungen führen zum Problem, Stellen zu bestimmen, an denen Funktionen, bezogen auf ihre unmittelbare Umgebung, einen Extremwert (Maximum, Minimum) annehmen (Umsatzmaximierung, Schadstoffausstoßminimierung, etc.)



Extremwerte

Definition (Lokales Maximum bzw. Minimum)

- Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum**, wenn in einer Umgebung von x_0 stets

$$f(x_0) > f(x)$$

- Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum**, wenn in einer gewissen Umgebung von x_0 stets

$$f(x_0) < f(x)$$

ist für $x \neq x_0$

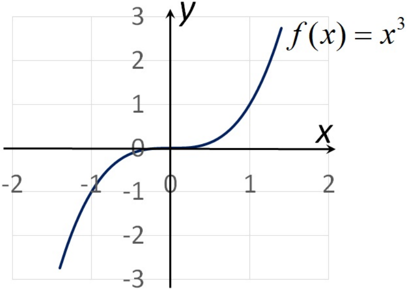
Oft werden die Begriffe „Maximum“ und „Minimum“ unter dem Oberbegriff **Extremalstellen (Extremwerte, Extrema)** zusammengefasst.

Extremwerte

Eine differenzierbare Funktion besitzt in einem lokalen Extremum eine waagrechte Tangente. Somit ist eine *notwendige* Bedingung für einen relativen Extremwert x_0, dass

$$f'(x_0) = 0$$

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist jedoch nicht ausreichend, denn wie das nebenstehende Beispiel zeigt, besitzt die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 0$ eine verschwindende Ableitung $f'(0) = 0$ und somit eine waagrechte Tangente, aber $x_0 = 0$ ist kein lokales Extremum. Diese Funktion ändert bei $x_0 = 0$ gleichzeitig ihre Krümmung.



Extremwerte

Damit eine waagrechte Tangente hinreichend für ein Extremum ist, darf die Kurve in x_0 die Krümmung nicht ändern: $f''(x_0)$ darf *nicht* verschwinden!

Satz (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum)

Ist die Funktion f in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{D}$ zweimal stetig differenzierbar und ist $f'(x_0)$ und $f''(x_0) \neq 0$, dann besitzt f in x_0 ein lokales Extremum:

- Ist

  $$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0, \text{ dann ist } x_0 \text{ ein } \textbf{lokales Maximum};$$

  Für ein **lokales Maximum** muss zusätzlich zur horizontalen Tangente die Kurve **rechtsgekrümmt** sein.

- Ist

  $$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0, \text{ dann ist } x_0 \text{ ein } \textbf{lokales Minimum}.$$

  Für ein **lokales Minimum** muss zusätzlich zur horizontalen Tangente die Kurve **linksgekrümmt** sein.

Extremwerte

Beispiel:

Bestimmen Sie alle Maxima und Minima der Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 2x + 3$

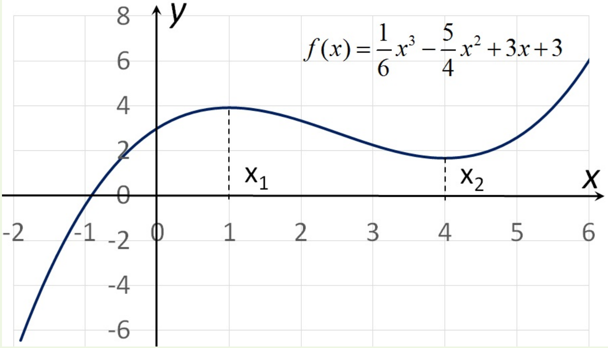
1. Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$
Notwendige Bedingung für Extremwert: $f'(x) = 0$ (horizontale Tangente), d.h. Bestimmen der Nullstellen der 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Wir erhalten die extremwertverdächtigen Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$, an denen nun die Krümmung der Funktion untersucht werden muss.

$f''(x) = x - \frac{5}{2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{3}{2} < 0$, d.h. an der Stelle $x_1 = 1$ besitzt die Funktion ein lokales Maximum.
$f''(4) = \frac{3}{2} > 0$, d.h. an der Stelle $x_2 = 4$ besitzt die Funktion ein lokales Minimum.

Beispiel (Fortsetzung):



Die untersuchte Funktion besitzt

- an der Stelle $x_1 = 1$ ein lokales Maximum;
- an der Stelle $x_2 = 4$ ein lokales Minimum.

Übungsblatt 8

Aufgabe 4.
Die Funktion $p(t) = 0.005 \cdot (15t^2 - t^3)$ beschreibe den Verlauf einer Krankheit, wobei t die Zeit in Tagen und $p(t)$ den Prozentsatz der Erkrankten angibt.

(a) Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich an (mit Begründung).

(b) In welchem Zeitbereich nimmt $p(t)$ zu, in welchem ab?

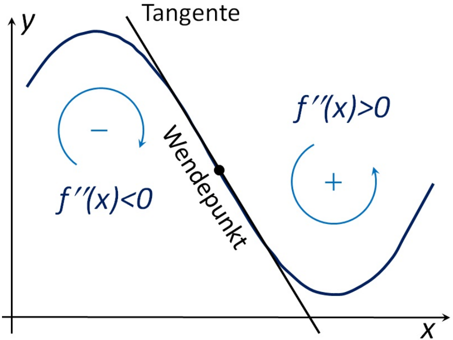
(c) Wann erreicht die Krankheit ihren Höhepunkt? Wieviel Prozent der Bevölkerung sind dann krank?

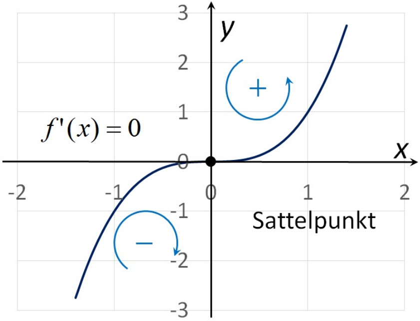
(d) Zu welchem Zeitpunkt nimmt der Prozentsatz der Erkrankten am meisten zu?

Wendepunkte — Sattelpunkte

Definition (Wendepunkte und Sattelpunkte)

- Kurvenpunkte, in denen sich die Krümmung einer Funktion ändert, heißen **Wendepunkte**
- Wendepunkte, die eine waagrechte Tangente besitzen, heißen **Sattelpunkte**





Wendepunkte — Sattelpunkte

In den Wendepunkten einer Funktion $f(x)$ findet eine Änderung der Krümmung statt, d.h. die 2. Ableitung $f''(x)$ wechselt an einem Wendepunkt das Vorzeichen

- von positiv zu negativ (Wechsel von linksgekrümmt zu rechtsgekrümmt)
- von negativ zu positiv (Wechsel von rechtsgekrümmt zu linksgekrümmt)

Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt x_0 lautet also:

$$f''(x_0) = 0$$

Die 2. Ableitung gibt die Tangentensteigung der 1. Ableitung an, d.h. an einem Wendepunkt besitzt die 1. Ableitung eine Extremalstelle. Damit eine Extremalstelle für $f'(x_0)$ vorliegt, muss analog zur Bedingung für ein lokales Extremum zusätzlich $f'''(x_0) \neq 0$ gelten.

Wendepunkte — Sattelpunkte

Satz (Hinreichende Bedingung für Wende- und Sattelpunkte)

Ist eine Funktion f in ihrem Definitionsbereich 3-mal stetig differenzierbar mit $f''(x_0) = 0$, so ändert die Funktion an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ ihre Krümmung:

- Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 ein **Wendepunkt**
- Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ und $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0 zusätzlich noch ein **Sattelpunkt**

Beispiel:

Bestimmen Sie die Lage und die Art der Wendepunkte der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 1$

Wendepunkte — Sattelpunkte

Beispiel (Lösung):

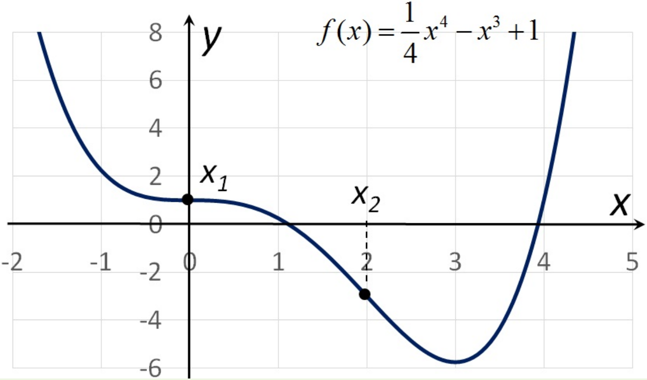
1. Ableitung: $f'(x) = x^3 - 3x^2$
2. Ableitung: $f''(x) = 3x^2 - 6x$
3. Ableitung: $f'''(x) = 6x - 6$

Für die Wendepunkte muss gelten: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.
Wir erhalten die wendepunktverdächtigen Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.
Untersuchung der 3. Ableitung an den entsprechenden Stellen liefert:
$f'''(x_1) = f'''(0) = -6 \neq 0$ und $f'''(x_2) = f'''(2) = 6 \neq 0$, es handelt sich also tatsächlich um Wendepunkte.

Für die Art des Wendepunktes muss die 1. Ableitung untersucht werden:
$f'(x_1) = f'(0) = 0$, d.h. an der Stelle $x_1 = 0$ besitzt die Funktion einen Sattelpunkt.
$f'(x_2) = f'(2) = -4 \neq 0$, d.h. an der Stelle x besitzt die Funktion einen Wendepunkt.

Wendepunkte — Sattelpunkte

Beispiel (Lösung):



- Die Funktion besitzt an der Stelle $x_1 = 0$ einen Sattelpunkt, die Krümmung wechselt von links- zu rechtsgekrümmt.
- Die Funktion besitzt an der Stelle $x_2 = 2$ einen Wendepunkt, die Krümmung wechselt von rechts- zu linksgekrümmt.

Sattelpunkte (3D)

https://de.wikipedia.org/wiki/Sattelpunkt

Kahoot: Kurvendiskussion

https://kahoot.it/

Quiz

Übungsblatt 8

Aufgabe 11.
Die Funktionsgleichung eines kubischen Polynoms $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ soll bestimmt werden. Dazu ermittle man die Konstanten a, b, c und d so, dass $f(x)$ die folgenden Eigenschaften hat:

- $f(x)$ hat bei $x = 0$ eine Nullstelle, die gleichzeitig eine Wendestelle ist.
- Ein lokales Extremum liegt bei $x = -2$.
- Die Tangente an der Stelle $x = 4$ hat die Steigung 3.

Extremwertaufgaben — Optimierung

Bei vielen praktischen Problemen ist man auf der Suche nach möglichst optimalen Ergebnissen. Man versucht die Parameter einer Funktion so einzustellen, dass man beste Ergebnisse erzielt. So müssen in einem Unternehmen beispielsweise Prozesse optimiert, Kosten minimiert und Gewinne maximiert werden.

Definition (Extremwertaufgabe)

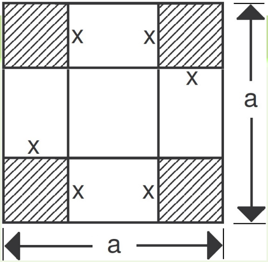
Die Bestimmung des größten oder des kleinsten Wertes einer Funktion f in einem Intervall I bezeichnet man als **Extremwertaufgabe**. In diesem Zusammenhang bezeichnet man f auch als Zielfunktion.
Die Extremwerte können sein:

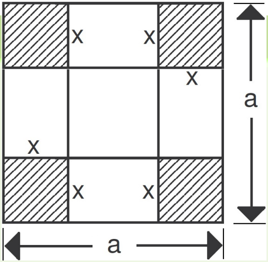
- relative Extrema der Funktion f im Intervall I
- Werte, die die Funktion an den Randpunkten des Intervalls I annimmt.

Extremwertaufgaben — Optimierung

Beispiel (Kartonschachtel):

Zur Herstellung eines Kartons sollen an den Ecken einer quadratischen Pappe mit der Seitenlänge a vier Einschnitte gemacht und die entsprechenden Rechtecke hochgebogen werden. Wie lang muss der Einschnitt x gemacht werden, damit der Rauminhalt V des Kartons möglichst groß wird?





Beispiel (Kartonschachtel):

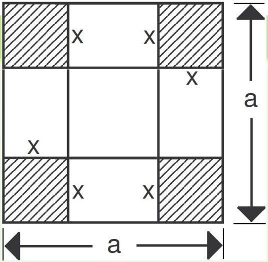
Zur Herstellung eines Kartons sollen an den Ecken einer quadratischen Pappe mit der Seitenlänge a vier Einschnitte gemacht und die entsprechenden Rechtecke hochgebogen werden. Wie lang muss der Einschnitt x gemacht werden, damit der Rauminhalt V des Kartons möglichst groß wird?

Anmerkung:

- Das Volumen der Schachtel berechnet sich nach der Formel: Grundfläche $\times$ Höhe.

Beispiel (Kartonschachtel):

Zur Herstellung eines Kartons sollen an den Ecken einer quadratischen Pappe mit der Seitenlänge a vier Einschnitte gemacht und die entsprechenden Rechtecke hochgebogen werden. Wie lang muss der Einschnitt x gemacht werden, damit der Rauminhalt V des Kartons möglichst groß wird?



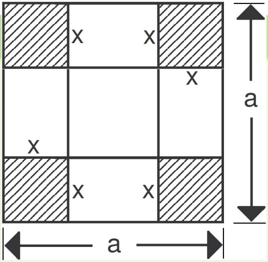
Anmerkung:

- Das Volumen der Schachtel berechnet sich nach der Formel: Grundfläche $\times$ Höhe.
- Für die Grundfläche gilt: $A = (a - 2x)^2$

Extremwertaufgaben — Optimierung

Beispiel (Kartonschachtel):

Zur Herstellung eines Kartons sollen an den Ecken einer quadratischen Pappe mit der Seitenlänge a vier Einschnitte gemacht und die entsprechenden Rechtecke hochgebogen werden. Wie lang muss der Einschnitt x gemacht werden, damit der Rauminhalt V des Kartons möglichst groß wird?



Anmerkung:

- Das Volumen der Schachtel berechnet sich nach der Formel: Grundfläche $\times$ Höhe.
- Für die Grundfläche gilt: $A = (a - 2x)^2$
- Die Zielfunktion lautet somit: $f(x) = (a - 2x)^2 \cdot x$
- Für unser Problem ist das Intervall $x \in (0, \frac{a}{2})$ sinnvoll, denn für $x = 0$ ist die Höhe gleich Null und für $x = \frac{a}{2}$ ist die Grundfläche gleich Null.

Extremwertaufgaben — Optimierung

Beispiel (Fortsetzung):

Untersuchen der Zielfunktion auf lokale Extrema:

- 1. Ableitung der Zielfunktion liefert:

$$f'(x) = \left((a-2x)^2 \cdot x\right)' = \left(a^2x - 4ax^2 + 4x^3\right)' = a^2 - 8ax + 12x^2$$

- Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen für notwendige Bedingung für ein Extremum:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 4a^2 \cdot 12}}{2 \cdot 12} = \frac{8a \pm 4a}{24}$$

$$\text{d.h. } \; x_1 = \frac{a}{6} \text{ und } x_2 = \frac{a}{2}$$

- Es kommt nur der Wert $x_1 = \frac{a}{6}$ in Betracht.
- Überprüfen der hinreichenden Bedingung für ein Maximum an der Stelle x_1 liefert:

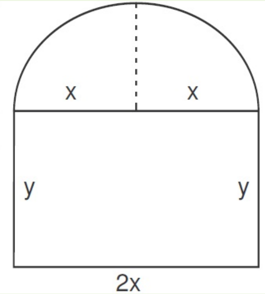
$$f''(x_1) = f'\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + 24\frac{a}{6} = -4a < 0,$$

d.h. es handelt sich an der Stelle $x_1 = \frac{a}{6}$ um ein Maximum.

Extremwertaufgaben — Optimierung

Beispiel (Gewölbegang):

Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks (Seitenlängen y und $2x$) mit aufgesetztem Halbkreis (Radius x). Der Umfang ist mit Rücksicht auf das Baumaterial durch $U = 10\,\text{m}$ fest vorgegeben. Wie muss das Gewölbe gestaltet werden, damit es einen möglichst großen Durchgang (Flächeninhalt) erhält?



Anmerkung:

- Fläche Rechteck: $2x \cdot y$; Fläche Halbkreis (Radius x): $\frac{\pi x^2}{2}$
- Die Zielfunktion lautet somit: $f(x, y) = 2x \cdot y + \frac{\pi}{2} \cdot x^2$
- Länge Kreisbogen $= \frac{\text{Umfang des Kreises}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi x = \pi x$
- Die Nebenbedingung lautet: $U = 2x + 2y + \pi x = 10$
- Der sinnvolle Definitionsbereich $(y > 0)$ ist demnach $x \in \left(0, \frac{10}{2+\pi}\right)$

Extremwertaufgaben — Optimierung

Beispiel (Fortsetzung:

- Mithilfe der Nebenbedingung $2x + 2y + \pi x = 10 \Leftrightarrow y = \frac{10-\pi x-2x}{2}$ die Variable y in der Zielfunktion eliminieren.
- Die, nur noch von der Variablen x abhängige Zielfunktion lautet nun:

$$f(x) = 2x \cdot y + \frac{\pi}{2}x^2 = 2x \cdot \left(\frac{10 - \pi x - 2x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}x^2 = 10x - 2x^2 - \frac{\pi}{2}x^2$$

- Notwendige Bedingung für ein Extremwert: $f'(x) = 0$, d.h.

$$f'(x) = 10 - 4x - \pi x = 0 \to x = \frac{10}{4+\pi} \approx 1.4$$

- Hinreichende Bedingung für ein Maximum: $f''(x) = -4 - \pi < 0$, d.h. an der Stelle $x = 1.4$ liegt ein Maximum vor.
- Setzen wir den Wert für x in die Nebenbedingung ein, so erhalten wir $y = \frac{10}{4+\pi} \approx 1.4$
- Für die Beschaffenheit des Torbogens bei maximaler Querschnittsfläche muss also gelten: $x = 1.4$ und $y = 1.4$

Extremwertaufgaben — Optimierung

Zusammenfassung: Allgemeines Vorgehen bei Optimierungsaufgaben

1. **Zielfunktion aufstellen**: Die zu optimierende Zielfunktion kann am Anfang von mehreren Variablen abhängen. Diese sind jedoch nicht unabhängig voneinander.
2. **Nebenbedingungen bestimmen:** Die Beziehung zwischen den einzelnen Variablen in der Zielfunktion wird durch Nebenbedingungen festgelegt, die entweder explizit in der Aufgabenstellung aufgeführt werden oder die durch elementare mathematische Lehrsätze selbst abgeleitet werden müssen.
3. Mithilfe der Nebenbedingungen lässt sich die Zielfunktion als nur noch von einer Variablen x abhängige Funktion $y = f(x)$ darstellen.
4. **Extremalstellen der Zielfunktion** mithilfe der ersten und zweiten Ableitung von f bestimmen

Beispiele zu Extremwertaufgaben

Übungsblatt 7

Aufgabe 14.
Eine Dose hat einen Radius $r = 2.82\,\text{cm}$ und eine Höhe $h = 1.2\,\text{cm}$. Sie enthält $30\,\text{cm}^3$ bei voller Füllung. Überprüfen Sie die Wirtschaftlichkeit der Verpackung, d. h. geringstmöglicher Materialverbrauch bei gleichem Volumen.

Aufgabe 15.
Einem gleichseitigen Dreieck (Seitenlänge $= 1\,\text{dm}$) soll ein Rechteck mit grösstmöglichem Flächeninhalt A einbeschrieben werden. Bestimmen Sie die Seiten des Rechtecks und den maximalen Flächeninhalt.