Fachhochschule Nordwestschweiz

Übungsblatt 8

Lösungen

Lösung 1.
Es ist $f'(x) = 2x$ und somit gilt $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2-4}{2x_{n-1}} = \frac{2x_{n-1}^2-x_{n-1}^2+4}{2x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}^2+4}{2x_{n-1}}$

Startwert $x_0 = 10$: $x_1 = 5.2$, $x_2 = 2.98461\ldots$, $x_3 = 2.16241\ldots$, $x_4 = 2.00609\ldots$

Startwert $x_0 = -3$: $x_1 = -2.16666\ldots$, $x_2 = -2.00641\ldots$, $x_3 = -2.0000102\ldots$, $x_4 = -2.000000000026\ldots$

Lösung 2.
Es ist

$$x^5 = 100 \iff x^5 - 100 = 0$$

und somit sind $f(x) = x^5 - 100$, $f'(x) = 5x^4$ und $f''(x) = 20x^3$.
Zuerst suchen wir uns einen geeigneten Startwert x_0: Es sind

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^5 - 100 = 32 - 100 = -68\,, \\ f(3) &= 3^5 - 100 = 243 - 100 = 144\,, \end{aligned}$$

und deshalb wählen wir $x_0 = 2.5$. Weil das Konvergenzkriterium

$$\left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| = \left|\frac{f(2.5)\cdot f''(2.5)}{(f'(2.5))^2}\right| = \left|\frac{-2.3437\cdot\ldots\cdot 312.5}{38\,146.972\ldots}\right| = 0.0192 < 1$$

erfüllt ist, eignet sich $x_0 = 2.5$ als Startwert. Somit gilt für $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^5-100}{5x_{n-1}^4}$

$$\begin{aligned} x_0 &= 2.5 \\ x_1 &= 2.5 - \frac{f(2.5)}{f'(2.5)} = 2.512 \\ x_2 &= 2.512 - \frac{f(2.512)}{f'(2.512)} = 2.5118864417\ldots \\ x_3 &= 2.5118864417\ldots - \frac{f(2.5118864417\ldots)}{f'(2.5118864417\ldots)} = 2.5118864315\ldots \end{aligned}$$

Lösung 3.
Es ist $f'(x) = 2x$ und somit gilt

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} = \frac{2x_{n-1}^2 - x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}}{2}$$

Dies entspricht dem Heronverfahren aus dem Übungsblatt 2.

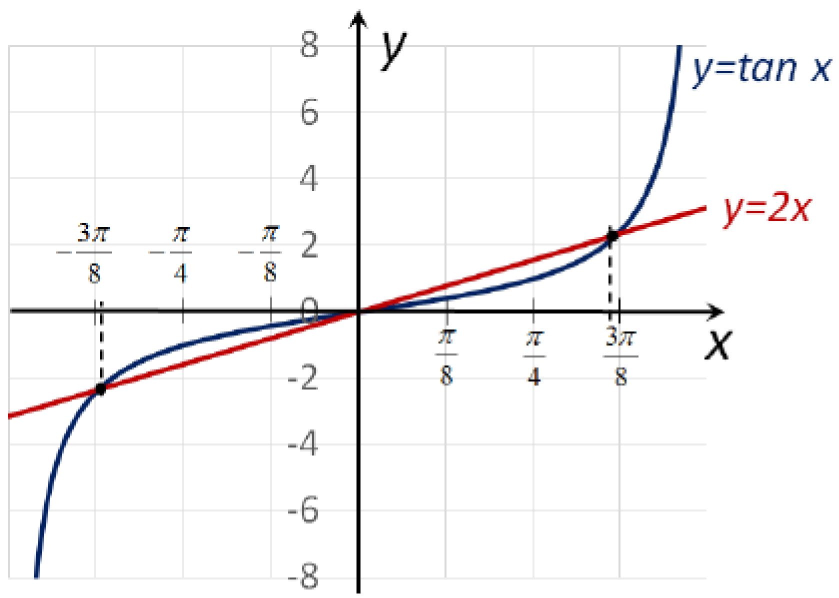
Lösung 4.
Die p-te Wurzel von a ist die Lösung der Gleichung $x^p = a$, was gleichbedeutend ist mit dem Finden von Nullstellen der Funktion $f(x) = x^p - a$. Weil $f'(x) = p \cdot x^{p-1}$ gilt, ist die Rekursionsformel nach dem Newtonverfahren gegeben durch

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^p - a}{p \cdot x_{n-1}^{p-1}}\,.$$

Lösung 5.
Wir suchen die Werte, für die gilt: $\tan(x) = 2x$, d.h. wir suchen die Nullstellen der Funktion $h(x) = \tan(x) - 2x = 0$

Die Iteration wird mithilfe der Formel durchgeführt: $x_{n-1} = x_n - \frac{h(x_n}{h'(x_n)} = x_n - \frac{\tan(x_n) - 2x_n}{\frac{1}{\cos^2(x_n)-2})}$

Aus der Skizze ergeben sich die Startwerte -1.5 und 1



n	x_n	x_n
0	-1,5	1
1	-1,443889727	1,31047803
2	-1,36197635	1,223929096
3	-1,268175447	1,1760509
4	-1,196178713	1,165926508
5	-1,168570868	1,165561636
6	-1,165591659	1,165561185
7	-1,165561188	1,165561185
8	-1,165561185	1,165561185
9	-1,165561185	1,165561185

Lösung 6.
Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^n & &\Longrightarrow f(0) = 1 \\
f'(x) &= n \cdot (1+x)^{n-1} & &\Longrightarrow f'(0) = n \\
f''(x) &= n \cdot (n-1) \cdot (1+x)^{n-2} & &\Longrightarrow f''(0) = n \cdot (n-1) \\
f'''(x) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (1+x)^{n-3} & &\Longrightarrow f''(0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Somit ist die Mac Laurinsche Reihe gegeben durch

$$f(x) = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Lösung 7. (a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	a_n
0	cos x	1	1
1	-sin x	0	0
2	-cos x	-1	$\frac{-1}{2!}=\frac{-1}{2}$
3	sin x	0	0
4	cos x	1	$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$
5	-sin x	0	0

Wir erhalten für die ungeraden Koeffizienten $a_1 = a_3 = a_5 = ... = 0$ ($\cos(x)$ ist eine gerade Funktion). Für die geraden Koeffizienten erhalten wir $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2!}$, $a_3 = \frac{1}{4!}$, $a_6 = -\frac{1}{6!}$...

Die Mac Laurinsche Reihe für $f(x) = \cos(x)$ lautet: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$.

Für den Konvergenzradius gilt: //

$\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}| = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{(2(k+1))!}{(2k)!} = \infty$, d.h. die Reihe ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

(b)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	a_n
0	e^x	1	1
1	e^x	1	1
2	e^x	1	$\frac{1}{2!}$
3	e^x	1	$\frac{1}{3!}$
4	e^x	1	$\frac{1}{4!}$
5	e^x	1	$\frac{1}{5!}$
n	e^x	1	$\frac{1}{n!}$

Die Mac Laurinsche Reihe für $f(x) = e^x$ lautet: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$.

Für den Konvergenzradius gilt: //

$\lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{((k+1))!}{(k)!} = \infty$, d.h. die Reihe ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

Bemerkung:

Potenzreihen lassen sich auch mit komplexen Zahlen definieren. Betrachten wir die Funktion e^x und ersetzen x durch *ix:*

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \ldots$$

Die Potenzen der imaginären Einheit i ergeben nun die Werte 1, i, -1 und –i

$$e^{ix} = 1 + i\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}(x)^2 - i\frac{1}{3!}(x)^3 + \frac{1}{4!}(x)^4 + i\frac{1}{5!}(x)^5 - \frac{1}{6!}(x)^6 - i\frac{1}{7!}(x)^7 + \ldots$$

Realteil und Imaginärteil zusammengefasst, ergibt sich nach der Euler-Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x = \underbrace{1 - \frac{1}{2!}(x)^2 + \frac{1}{4!}(x)^4 - \frac{1}{6!}(x)^6 + \ldots}_{\cos x} + i\underbrace{\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}(x)^3 + \frac{1}{5!}(x)^5 - \frac{1}{7!}(x)^7 + \ldots\right)}_{\sin x}$$

Aus der Potenzreihe der *e*-Funktion ergeben sich die Potenzreihen des Sinus und Kosinus. Beide Reihen konvergieren genau wie die Potenzreihe der *e*-Funktion für alle reellen Zahlen.

Lösung 8.

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} && \Longrightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} && \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit ist das Taylorpolynom 1. Grades von $f(x)$ gegeben durch $f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$. Deshalb gilt

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

Für $g(x)$ haben wir

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} && \Longrightarrow f(0) = 1 \\ g'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} && \Longrightarrow f'(0) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit ist das Taylorpolynom 1. Grades von $g(x)$ gegeben durch $g_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x$. Deshalb gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

Lösung 9.

Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}} && \Longrightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= -\frac{1}{3} \cdot (1+x)^{-\frac{4}{3}} && \Longrightarrow f'(0) = -\frac{1}{3} \\ f'' &= \frac{4}{9} \cdot (1+x)^{-\frac{7}{3}} && \Longrightarrow f''(0) = \frac{4}{9} \\ f''' &= -\frac{28}{27} \cdot (1+x)^{-\frac{10}{3}} && \Longrightarrow f'''(0) = -\frac{28}{27} \end{aligned}$$

und somit ist das Taylorpolynom 3. Grades gegeben durch

$$\begin{aligned}
f_3(0) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 \\
&= 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{1} \cdot x^1 + \frac{\frac{4}{9}}{2} \cdot x^2 + \frac{-\frac{28}{27}}{6} \cdot x^3 \\
&= 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3
\end{aligned}$$

Lösung 10.
$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$, $f(1) = -1$
Bereitstellung der Ableitungen:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2}, \; f'(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 3}{x^4} - \frac{2 \cdot 2}{x^3}, \; f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}; \; f'''(1) = -12$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} + (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot n!}{x^{n+1}} = (-1)^{n+1}\left[\frac{2 \cdot n!}{x^{n+1}} - \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\right]$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(2n! - (n+1)!)$$

Koeffizienten des Taylorpolynoms:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(2n! - (n+1)!)}{n!} = (-1)^{n+1}(2-(n+1)) = (-1)^n(n-1)$$

Die Taylorreihe lautet also:
$f(x) = -1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)(x-1)^n = -1 + (x-1)^2 - 2(x-1)^3 + 3(x-1)^4 + ...$
Für den Konvergenzradius gilt:
$r = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k-1}{k} = 1$, d.h. die Reihe ist für $0 < x < 2$ konvergent.

Lösung 11.
Die Reihenentwicklung der e-Funktion lautet:
$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ...$
Durch die Substitution $x = -\frac{z^2}{2}$ erhalten wir die Reihenentwicklung für die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{48}z^6 + \frac{1}{384}z^8 - \frac{1}{3840}z^{10} \pm ...\right)$$

Für die Taylorpolynome gilt dann: 0,37524034691694

n	T_n	$T_n(0.35)$
1	$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0.39894228
2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{z^2}{2}\right)$	0.37450706
3	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{8}z^4\right)$	0.37525539
4	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{48}z^6\right)$	0.37524012
5	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{48}z^6+\frac{1}{384}z^8\right)$	0.375240349755

Es sind also insgesamt 4 Glieder zu berücksichtigen.

Lösung 12. (a)

Die Reihentwicklung der Funktion *ln u* mit Entwicklungspunkt u_0=1 lautet:

$$\ln u = (u-1) - \frac{1}{2}(u-1)^2 + \frac{1}{3}(u-1)^3 - \frac{1}{4}(u-1)^4 \pm \ldots$$

Die Substitution *u=1-3x* liefert

$$\ln(1-3x) = (-3x) - \frac{1}{2}(-3x)^2 + \frac{1}{3}(-3x)^3 - \frac{1}{4}(-3x)^4 \pm \ldots$$

$$= -3x - \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{3}x^3 - \frac{81}{4}x^4 - \ldots$$

Somit gilt für den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3x - \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{3}x^3 - \frac{81}{4}x^4 - \ldots}{x} = \lim_{x\to 0}\left(-3 - \frac{9}{2}x - \frac{27}{3}x^2 - \frac{81}{4}x^3 - \ldots\right) = -3$$

(b)

Die Reihenentwicklung des Sinus lautet:

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} \pm \ldots$$

Die Substitution $u=x^2$ liefert:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} \pm \ldots$$

Die Reihentwicklung der Funktion *ln u* mit Entwicklungspunkt u_0=1 lautet:

$$\ln u = (u-1) - \frac{1}{2}(u-1)^2 + \frac{1}{3}(u-1)^3 - \frac{1}{4}(u-1)^4 \pm \ldots$$

Die Substitution *u=1+x²* liefert

$$\ln(1+x^2) = (x^2) - \frac{1}{2}(x^2)^2 + \frac{1}{3}(x^2)^3 - \frac{1}{4}(x^2)^4 \pm \ldots$$

Somit gilt für den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} \pm \ldots}{x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 \pm} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{12}}{7!} \pm \ldots}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{4}x^6 \pm} = 1$$

Lösung 13.

(a) Die Voraussetzungen für die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospitale sind erfüllt, denn der Zähler und der Nenner ergeben beim Einsetzen von $x = 2$ jeweils den Wert 0.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2x + 1}{2x} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$$

(Im ersten Schritt wurde die Regel von Bernoulli und de L'Hospitale angewendet.)

(b) Die Voraussetzungen für die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospitale sind erfüllt, denn der Zähler und der Nenner ergeben beim Einsetzen von $x = 2$ jeweils den Wert 0.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3} = \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 1}{3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 + 3} = \frac{7}{3}$$

(Im ersten Schritt wurde die Regel von Bernoulli und de L'Hospitale angewendet.)

(c) Die Voraussetzungen für die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospitale sind nicht erfüllt, aber wir können $x = 2$ direkt einsetzen:

$$\lim_{x \to 2} \frac{5^x + 3^x}{x} = \frac{5^2 + 3^2}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

(d) Die Voraussetzungen für die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospitale sind erfüllt, denn der Zähler und der Nenner ergeben beim Einsetzen von $x = 1$ jeweils den Wert 0.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{5x^4}{3x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{5x^2}{3} = \frac{5}{3}$$

(Im ersten Schritt wurde die Regel von Bernoulli und de L'Hospitale angewendet.)

(e)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(2x+1)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{(2x+1)}}{1} = 2$$

(f)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 1$$

(g)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(1+x^2)}}{1} = 1$$

(h)

Betrachte in einem ersten Schritt den Grenzwert:

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-\frac{a}{x^2}}{\left(1 + \frac{a}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{a}{x}\right)} = a$$

Da dieser Grenzwert existiert, können wir schreiben:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} e^{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x} = e^{\lim_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)} = e^a$$

(i)

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to a}\frac{2x}{1}=2a$$

(j)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2}=-\frac{1}{2}$$

(k)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{\cos x}=2$$

(l)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{12x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{24x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{24}=\frac{1}{12}$$