Diskrete Stochastik
Klasse 3Ia/5Ibb/5iCbb

Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Serie 2

Aufgabe 1. Es sei P eine Wahrscheinlichkeit auf Ω. Zeigen Sie:

1. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
2. $A \subseteq B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$

Lösung. Es ist $B = A \cup (B \backslash A)$. Offensichtlich sind A und $B \backslash A$ disjunkt. Wir erhalten also $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$. Daraus erhalten wir:

1. Da $P(B \backslash A) \geq 0$, folgt die Behauptung 1.
2. Durch Umstellen erhalten wir sofort die Behauptung 2.

Aufgabe 2. Zwei ehrliche Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie gross ist unter der Bedingung, dass die beiden Augenzahlen verschieden sind, die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass

1. mindestens ein Würfel eine 6 zeigt
2. beide Würfel eine 5 zeigen
3. der erste Würfel eine 4 zeigt
4. die Summe der Augenzahlen 6 ist.

Lösung. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, Laplace sinnvoll, $A = \Omega \backslash \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$

1. $B \cap A = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$
   $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{3}$
2. $B \cap A = \emptyset$
   $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0$
3. $B \cap A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6)\}$
   $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{6}$
4. $\frac{2}{15}$

Aufgabe 3. Begründen Sie, das für $0 < P(A) < 1$ mit $\Omega = A \cup A^c$ gilt:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^c) \cdot P(A^c)}.$$

Lösung. Mit der Formel von Bayes gilt $P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$ und mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt $P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^c) \cdot P(A^c)$.

Aufgabe 4. Von 500 Personen waren 300 gegen eine Krankheit geimpft. Von den geimpften erkrankten 50 Personen, von dem ungeimpften dagegen 100. Wir wählen zufällig eine Person aus. Mit I bzw. N bezeichnen wir die Ereignisse “geimpft” bzw. “nicht geimpft” und mit K bzw. G Ereignisse “erkrankt” bzw. “gesund geblieben”. Berechnen Sie

1. $P(K)$ 2. $P(I \cap G)$ 3. $P(G \mid I)$ 4. $P(I \mid G)$

Lösung. 1. 0.3 2. 0.5 3. $\frac{250}{300}$ 4. $\frac{250}{350}$

Aufgabe 5. Von meiner Tramhaltestelle fährt sowohl die Linie A als auch die Linie B ins Stadtzentrum. Beide fahren alle 10 Minuten (und zwar ganz pünktlich), die Linie A immer im 7:00, 7:10, 7:20 usw., die Linie B um 7:03, 7:13,7:23 usw. In der Linie A finde ich erfahrungsgemäss mit 60% Wahrscheinlichkeit einen Sitzplatz, in Linie B mit 40%. Ich gehe völlig zufällig zur Haltestelle und nehme die erstbeste Tram.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit einen Sitzplatz zu erwischen?
2. Ich bin, ohne mich umzusehen in eine Tram eingestiegen und finde einen Sitzplatz. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitze ich in einem Tram der Linie A?

Lösung. Es bezeichne S das Ereignis, dass ich einen Sitzplatz bekomme, E_A das Ereignis, dass ich in Linie A sitze und E_B dass ich in Linie B sitze.

1. $P(S) = P(S \mid E_A) \cdot P(E_A) + P(S \mid E_B) \cdot P(E_B) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.54$
2. $P(E_A \mid S) = P(S \mid E_A) \cdot \frac{P(E_A)}{P(S)} = 0.6 \cdot \frac{0.7}{0.54} = \frac{7}{9}$

Aufgabe 6. In der Schulklasse A hat es 10 Mädchen und 15 Knaben. Von der Schulklasse B weiss ich nur, dass sie 20 Personen hat, die Anzahl der Knaben wird daher mit n bezeichnet.

1. Eine aus den beiden Klassen zufällig ausgewählte Person erweist sich als Knabe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser in der Klasse A ist? (In der Antwort kommt natürlich n vor.)
2. Für welches n ist diese Zahl maximal bzw. minimal?
3. Für welches n sind die Ereignisse "Person gehört zur Klasse A" und "Person ist männlich" unabhängig?

Lösung. Es bezeichne K das Ereignis "Knabe", M das Ereignis "Mädchen", A das Ereignis "aus Klasse A" und B das Ereignis "aus Klasse B".

1. $P(A \mid K) = P(K \mid A) \cdot \frac{P(A)}{P(K)} = \frac{15}{25} \cdot \frac{\frac{25}{45}}{\frac{15+n}{45}} = \frac{15}{15+n}$
2. maximal: $n = 0$, minimal: $n = 20$
3. $P(A \cap K) = \frac{15}{45} = P(A) \cdot P(K) = \frac{25}{45} \cdot \frac{15+n}{45}$ gilt für $n = 12$.

Aufgabe 7. In einerm Dorf in den Schweizer Alpen leben während der Ferienzeit dreimal so viele Touristen wie Einheimische. 20% der Einheimischen und 40% der Fremden tragen ein Sennenkäppi. Ich treffe jemanden mit einer solchen Kopfbedeckung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er ein Einheimischer?

Lösung. Es bezeichne E das Ereignis "Einheimischer", T "Tourist", S "trägt Sennenkäppi" und K "trägt kein Sennenkäppi". Dann gilt $P(S) = P(S \mid E) \cdot P(E) + P(S \mid T) \cdot P(T) = 0.2 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 0.75 = 0.35$.

Damit gilt $P(E \mid S) = P(S \mid E) \cdot \frac{P(E)}{P(S)} = 0.2 \cdot \frac{0.25}{0.35} = \frac{1}{7}$

Aufgabe 8. Ein Massenartikel wird auf 3 Maschinen produziert. 50% der Produktion stammt von Maschine A, 30% von B, der Rest von C. Maschine A liefert 10% Ausschuss, Maschine B 5% und Maschine C 2%.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig aus der Gesamtproduktion gewählter Artikel brauchbar?
2. Ich habe einen defekten Artikel erwischt, Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er von Maschine A?

Lösung. Es bezeichne A, B bzw. C das Ereignis, dass ein Artikel von Maschine A, B bzw. C stammt. Es bezeichne D das Ereignis, das der Artikel defekt ist und R, das der Artikel brauchbar ist.

1. $P(R) = P(R \mid A) \cdot P(A) + P(R \mid B) \cdot P(B) + P(R \mid C) \cdot P(C) = 0.9 + \cdot 0.5 + 0.95 \cdot 0.3 + 0.98 \cdot 0.2 = 0.931$
2. $P(A \mid D) = P(D \mid A) \cdot \frac{P(A)}{P(D)} = 0.1 \cdot \frac{0.5}{1-0.931} = 0.7246$

Aufgabe 9. Eine Fernsehanstalt möchte die neue amerikanische Serie "Boston" übernehmen. Sie befragt daher im Anschluss an eine Pilotsendung Zuschauer: Von den Zuschauern, die diese Sendung gesehen hatten, waren 55% älter als 30 Jahre. 30% von diesen und 60% der übrigen fanden die Sendung gut.

1. Berechne den Anteil der Zuschauer, die eine positive Meinung von der Sendung hatten.
2. Ein Zuschauer von "Boston", der sich positiv darüber geäussert hat, wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er älter als 30 Jahre?

Lösung. Es bezeichne A_{30} das Ereignis "älter als 30" und G das Ereignis "fand die Sendung gut".

1. $P(G) = P(G \mid A_{30}) \cdot P(A_{30}) + P(G \mid A_{30}^c) \cdot P(A_{30}^c) = 0.3 \cdot 0.55 + 0.6 \cdot 0.45 = 43.5\%$
2. $P(A_{30} \mid G) = P(G \mid A_{30}) \cdot \frac{P(A_{30})}{P(G)} = 0.3 \cdot \frac{0.55}{0.435} \approx 37.9\%$

Aufgabe 10. In drei Urnen befinden sich je zwanzig Kugeln; in der ersten 4 rote und 16 weisse, in der zweiten 10 rote und 10 weisse und in der dritten nur rote. Nun wird eine Urne zufällig ausgewählt und Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

1. Es wird eine rote Kugel gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Urne gewählt wurde?
2. Es werden nacheinander zwei rote Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Urne gewählt wurde?
3. Es werden nacheinander drei rote Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Urne gewählt wurde?
4. Es werden nacheinander drei rote Kugeln und dann eine weisse gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Urne gewählt wurde

Lösung. Es bezeichne U_i das Ereignis, dass Urne i gewählt wurde.

1. Es bezeichne R das Ereignis, dass eine rote Kugel gezogen wird. Dann gilt $P(R) = P(R \mid U_1) \cdot P(U_1) + P(R \mid U_2) \cdot P(U_2) + P(R \mid U_3) \cdot P(U_3) = \frac{4}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{10}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{20}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{30}$ und somit $P(U_1 \mid R) = P(R \mid U_1) \cdot \frac{P(U_1)}{P(R)} = \frac{4}{20} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{17}{30}} = \frac{2}{17}$

2. $\frac{4}{129}$

3. $\frac{8}{1133}$

4. $\frac{64}{689}$

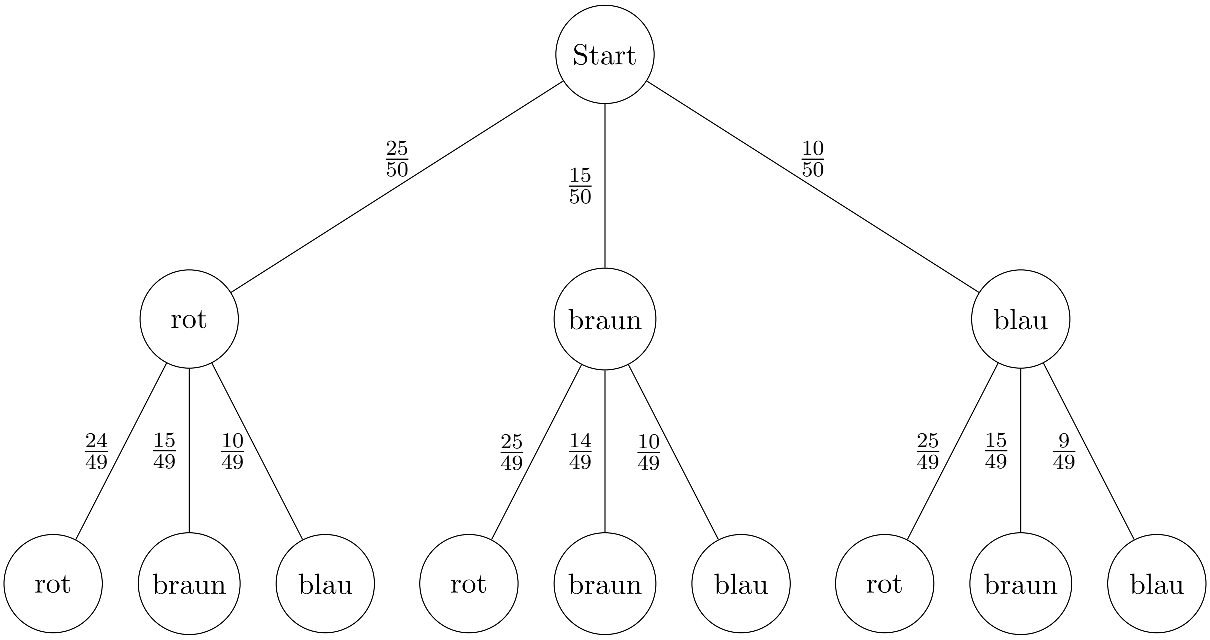
Aufgabe 11. Wir würfeln mit einem roten und einem blauen Würfel. Mit E bezeichnen wir das Ereignis “der rote Würfel zeigt eine gerade Zahl”, mit F das Ereignis “beide Würfel zeigen dieselbe Zahl”. Sind E und F unabhängig?

Lösung. Ja, da $P(E \cap F) = \frac{3}{36}$, was mit $P(E) \cdot P(F) = \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{36}$ übereinstimmt.

Aufgabe 12. In einer Schachtel hat es 25 rote, 15 braune und 10 grüne Gummibärchen. Ihr Kollege und Sie nehme (ohne zu gucken) je ein Bärchen, wobei Sie ihm den Vortritt lassen. Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm, und berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

1. Beide Gummibärchen haben dieselbe Farbe
2. Genau eines der Gummibärchen ist grün
3. Mindestens ein Gummibärchen ist rot

Lösung.



1. $\frac{25}{50} \cdot \frac{24}{49} + \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} + \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} = 0.3673$
2. 0.3265
3. 0.7551

Aufgabe 13. In einer Schachtel hat es 4 weisse, 6 graue und 10 schwarze Kugeln. Das Ziel ist es, in maximal drei Versuchen eine weisse Kugel zu erwischen, wobei die gezogene Kugel nach jedem Versuch zurückgelegt wird. Zieht man eine schwarze Kugel, dann ist jedoch sofort Schluss. Wie hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?

Lösung. $\frac{4}{20} + \frac{6}{20} \cdot \frac{4}{20} + \frac{6}{20} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{4}{20} = 0.278$

Aufgabe 14. Von 500 befragten Personen (300 Frauen, 200 Männer) waren 400 schweizerischer Nationalität. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig aus dieser Gruppe ausgewählte Person

1. männlich
2. Ausländerin

ist? Welche (plausible) Annahme müssen sie im Fall 2. machen?

Lösung. Es bezeichne M das Ereignis "männlich", W "weiblich" und A "Ausländer".

1. $P(M) = \frac{200}{500}$
2. $P(W \cap A) = P(W) \cdot P(A) = \frac{300}{500} \cdot \frac{100}{500} = 0.12$ falls Geschlecht und Staatszugehörigkeit unabhängig sind.

Aufgabe 15. Cowboy A trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$, Cowboy B mit $\frac{1}{2}$ und Cowboy C trifft immer. Alle drei Cowboys kennen die Trefferwahrscheinlichkeiten aller Cowboys. Es wird solange abwechselnd geschossen, bis nur noch ein Cowboy am Leben ist. Alle Cowboys verfolgen jeweils eine Strategie, die ihnen jeweils die höchste Überlebenswahrscheinlichkeit beschert. Cowboy A beginnt. Danach kommt B, dann C, dann wieder A und so weiter (natürlich nur, wenn jeweils noch am Leben).

1. Geben Sie die optimalen Strategien für die Cowboys an und berechnen Sie jeweils die Überlebenswahrscheinlichkeiten.
2. Berechnen Sie jeweils die Überlebenswahrscheinlichkeiten unter der Bedingung, dass Cowboy A im ersten Schritt nicht trifft. Passen Sie daraufhin ggfs. die von Ihnen als optimal angesehenen Strategien und Überlebenswahrscheinlichkeiten der ersten Teilaufgabe an ;-).

Lösung.

1. Die beste Strategie für A ist es, in der ersten Runde in die Luft zu schiessen. Cowboy B schiesst dann auf C. Falls er trifft, schiessen dann A und B abwechselnd aufeinander, bis einer trifft. Falls B Cowboy C nicht trifft, dann erschiesst C Cowboy B. Dies ist für C besser, da A mit geringerer Wahrscheinlichkeit trifft als B. A zielt danach auf C. Und C, falls noch am Leben, auf A.
2. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten betragen dann $\frac{5}{12}$ für A, $\frac{3}{12}$ für B und $\frac{4}{12}$ für C.
3. Wenn A in der ersten Runde in die Luft schiesst, dann trifft er nicht. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten betragen in dem Fall $\frac{5}{12}$ für A, $\frac{3}{12}$ für B und $\frac{4}{12}$ für C. Und die Überlebenswahrscheinlichkeit für A ist höher, als wenn er im ersten Versuch etwa auf C zielen würde. Daher ist die optimale Strategie für A tatsächlich, zunächst in die Luft zu schiessen.

Aufgabe 16. This problem has been asked in job interviews: On the morning of January 1, a hospital nursery has 3 boys and some number of girls. That night, a woman gives birth to a child, and the child is placed in the nursery. On January 2, a statistician conducts a survey and selects a child at random from the nursery (including the newborn and every child from January 1). The child is a boy. What is the probability the child born on January 1 was a boy?

Lösung. Es bezeichne n die Anzahl Mädchen. Mit $\Omega = \{N, b_1, b_2, b_3, g_1, \ldots g_n\} \times \{B, G\}$, $P =$ Laplace, $A_1 = (\{N, b_1, b_2, b_3\} \times \{B\}) \cup (\{b_1, b_2, b_3\} \times \{G\})$ und $A_2 = \{N, b_1, b_2, b_3, g_1, \ldots g_n\} \times$

$\{B\}$ erhalten wir $P(A_2 \mid A_1) = \frac{4}{7}$. (Die möglichen Ergebnisse aus Ω sind Tupel. Die erste Komponente eines Ergebnisses gibt an, welches Kind der Statistiker gezogen hat, also entweder das Neugeborene (N), einen der drei Jungen oder eines der Mädchen. Die zweite Komponente des Ergebnisses gibt das Geschlecht des Neugeborenen an.