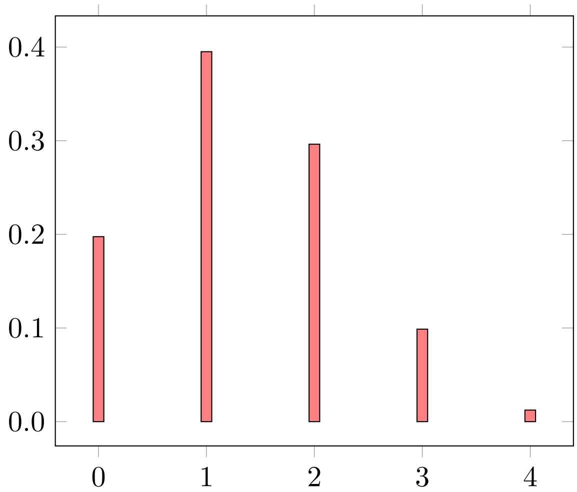
Diskrete Stochastik
Klasse 3Ia/5Ibb/5iCbb

Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

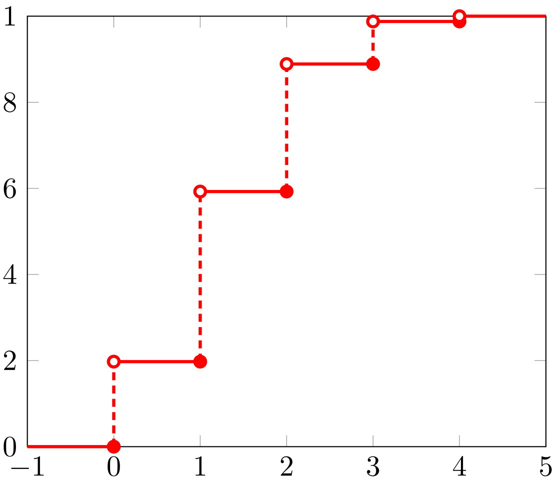
Serie 4

Aufgabe 1. Zeichnen Sie das Stabdiagram und den Graphen der Verteilungsfunktion einer binomialverteilten Zufallsvariablen X mit Parametern $n = 4$ und $p = \frac{1}{3}$.

Lösung. Stabdiagramm:



Verteilungsfunktion:



Aufgabe 2. Es sei $X \sim Bin(8, 0.6)$. Berechnen Sie:

1. $P(X \leq 3)$
2. $P(X \geq 6)$
3. $P(2 \leq X \leq 5)$

Lösung. 1. $binocdf(3, 8, 0.6) = 0.1738$

2. $1 - binocdf(5, 8, 0.6) = 0.3154$

3. $binocdf(5, 8, 0.6) - binocdf(1, 8, 0.6) = 0.6761$

Aufgabe 3. Bei einer Übertragung von Bits besteht bei jedem Bit eine Wahrscheinlichkeit von 0.002 für einen Fehler. Es werden 256 Bit übertragen.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2, 3 und 4 Fehler.

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für höchstens 0, 1 und 4 Fehler.

Lösung.

	x	0	1	2	3	4
(1)	$P(X = x)$	0.5990	0.3073	0.07852	0.0133	0.0017
(2)	$P(X \leq x)$	0.5990	0.9063			0.9998

Hierbei ist $P(X = x) = binopdf(x, 256, 0.002)$ und $P(X \leq x) = binocdf(x, 256, 0.002)$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer $Bin(50, 0.2)$ verteilten Zufallsvariablen.

Lösung. $E(X) = 50 \cdot 0.2 = 10$, $V(X) = 50 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 8$, $\sigma(X) = \sqrt{8}$

Aufgabe 5. Eine binomialverteilte Zufallsvariable hat den Erwartungswert 80 und die Standardabweichung 8. Wie gross sind n und p?

Lösung. Aus $np = 80$ und $np(1 - p) = 64$ ergibt sich $n = 400$ und $p = 0.2$.

Aufgabe 6. Eine Maschine stellt Unterlagsscheiben mit einer Ausschussquote von 10% her. Was ist wahrscheinlicher, kein Ausschuss unter 10 Scheiben oder höchstens ein Ausschuss-Stück unter 20 Scheiben?

Lösung. Es bezeichne X die Anzahl an Ausschuss unter 10 Scheiben und Y unter 20 Scheiben. Dann ist $X \sim Bin(10, 0.1)$ und $Y \sim Bin(20, 0.1)$. Es gilt: $P(X = 0) = binopdf(0, 10, 0.1) = 0.3487 < P(Y \leq 1) = binocdf(1, 20, 0.1) = 0.3917$.

Aufgabe 7. Bei einem Verkehrsflugzeug mit vier Triebwerken müssen mindestens zwei funktionieren, bei solchen mit drei Triebwerken nur eins. Welcher Flugzeugtyp ist sicherer, wenn wir annehmen, dass alle Triebwerke dieselbe Ausfallwahrscheinlichkeit haben und die Ausfälle unabhängig voneinander sind?

Lösung. Es bezeichne p die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Triebwerkes.

Dann ist die Ausfallwahrscheinlichkeit einer dreimotorigen Maschine p^3, und die Ausfallwahrscheinlichkeit einer viermotorigen Maschine $p^4 + 4 \cdot p^3(1 - p) = p^4 + 4p^3 - 4p^4 = 4p^3 - 3p^4$.

Nun gilt $4p^3 - 3p^4 > p^3 \Leftrightarrow 3p^3 - 3p^4 > 0 \Leftrightarrow p^3(1 - p) > 0$. Es folgt also, dass für $0 < p < 1$ Dreimotorige sicherer sind, für $p = 0$ oder $p = 1$ ist es egal.

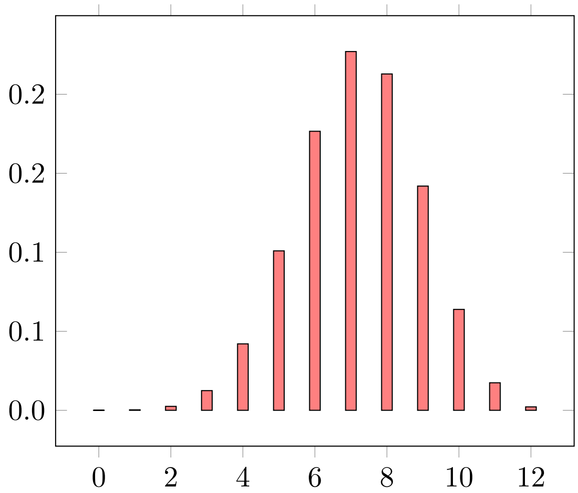
Aufgabe 8. Eine Konditorei produziert äusserlich nicht unterscheidbare Pralinés mit roter (60% der Gesamtproduktion) und weisser Zucker-Fondant-Füllung, welche in hübsche Schachteln zu 12 Stück abgefüllt werden.

1. Welches ist die wahrscheinlichste Anzahl rot gefüllter Pralinés pro Schachtel? Wie gross ist diese Wahrscheinlichkeit?

2. Ich kaufe gleich 5 Schachteln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede dieser Schachteln höchstens drei weiss gefüllte Pralinés enthält?

Lösung. Es bezeichne X die Anzahl an rot gefüllter Pralinés in einer 12er Packung. Dann ist $X \sim Bin(12, 0.6)$.

1. Am Stabdiagramm der Verteilung von X



   erkennt man, dass die Wahrscheinlichkeit für 7 am höchsten ist. Sie beträgt $P(X = 7) = \mathit{binopdf}(7, 12, 0.6) = 0.2270$

2. $\mathit{binocdf}(3, 12, 0.4)^5 = 0.00058$

Aufgabe 9. Drei Produzenten A,B, und C mit den Marktanteilen 50%, 30% und 20% stellen einen Artikel her, der in zufällig abgefüllten Packungen zu sechs Stück auf den Markt gelangen. Die einzelnen Artikel sind mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten defekt: Bei A 5%, bei B 10% und bei C 15%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es in einer zufällig ausgewählten Sechserpackung genau ein defektes Stück, wenn das Erstellen der Packung wie folgt geschieht:

1. Zuerst mischen, dann abfüllen: Die einzelnen Artikel der drei Hersteller werden in einem grossen Lager gemischt und dann werden die Packungen abgefüllt.

2. Zuerst abfüllen, dann mischen: Jeder Hersteller packt seine Produktion in Sechserpackungen; diese Packungen gelangen dann zufällig gemischt in den Handel.

Lösung.

1. Wir erhalten $p_0 = 0.5 \cdot 0.005 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.15 = 0.085$ als Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus der gesamten Produktion herausgegriffener Artikel defekt ist. Wir erhalten $\mathit{binopdf}(1, 6, p_0) = \binom{6}{1} p_0 \cdot (1 - p_0)^5 = 0.3271$ als Lösung.

2. $0.5 \cdot \mathit{binopdf}(1, 6, 0.05) + 0.3 \cdot \mathit{binopdf}(1, 6, 0.1) + 0.2 \cdot \mathit{binopdf}(1, 6, 0.15) = 0.3022$

Aufgabe 10. Im Verlauf einer Stunde erhält eine Telefonzentrale durchschnittlich 60 Anrufe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen im Zeitintervall von a) 30 Sekunden b) 2 Minuten keine Anrufe ein?

Lösung.

1. Es bezeichne X die Anzahl der in 30 Sekunden eintreffenden Anrufe. Dann gilt $X \sim Poi(0.5)$, da im Schnitt $\frac{60}{120} = 0.5$ Anrufe pro 30 Sekunden eintreffen. Wir erhalten $P(X = 0) = \mathit{poisspdf}(0, 0.5) = 0.6065$.

2. Es bezeichne X die Anzahl der in 2 Minuten eintreffenden Anrufe. Dann gilt $X \sim Poi(2)$, da im Schnitt $\frac{60}{30} = 2$ Anrufe pro 2 Minuten eintreffen. Wir erhalten $P(X = 0) = \mathit{poisspdf}(0, 2) = 0.1353$.

Aufgabe 11. Ein Frosch fängt im Durchschnitt 3 Fliegen pro Stunde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fängt er in der nächsten Stunde a) keine Fliege; b) mehr als drei Fliegen?

Lösung. a) $\mathit{poisspdf}(0,3) = 0.0498$ b) $1 - \mathit{poisscdf}(3,3) = 0.3528$

Aufgabe 12. "Entsteinte" Kirschen sind dies nicht immer. Die Erfahrung zeigt, dass pro Stück Kirschkuchen im Mittel eine Kirsche mit Stein vorkommt.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auf einem Stück höchstens 3 Kirschen mit Stein?
2. Vier Leute haben unabhängig voneinander ein Stück gekauft; auf jedem hatte es mindestens eine Kirsche mit Stein. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für ein solches Ereignis?

Lösung.

1. $\mathit{poisscdf}(3,1) = 0.981$
2. $(1 - \mathit{poisspdf}(0,1))^4 = 0.1597$

Aufgabe 13. Sepps Souvenirgeschäft verkauft pro Tag im Mittel zwei Sennenkäppli. Nachdem ein allseits beliebter Sportler am Samstag im Fernsehen ein Sennenkäppli trug, verkaufte Sepp am Montag sechs solcher Dinger. Könnte dies etwas mit dem Fernsehauftritt zu tun haben? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem normalen Tag sechs oder mehr Sennenkäppli verkauft werden und urteilen Sie.

Lösung. Es bezeichne X die Anzahl an verkauften Sennenkäppli pro Tag. Dann gilt $X \sim \mathit{Poi}(2)$. Es gilt $P(X \geq 6) = 1 - \mathit{poisscdf}(5,2) = 0.0166$, also sehr klein. Man kann vermuten, dass ein besondere Grund für den grossen Umsatz an Sennenkäppli existiert. (Ob dies an der Fernsehsendung liegt, muss aber dahingestellt bleiben.)

Aufgabe 14. Ein Städtchen feiert in einem halben Jahr sein 1000-jähriges Bestehen. Der hochwohllöbliche Magistrat beschliesst, jedem Kind, das am Jubeltag zur Welt kommt, 1000 Dukaten zu schenken. Der Schatzmeister wird beauftragt, einen Betrag zu budgetieren, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ausreicht. Wie gross muss dieser Betrag sein, wenn in unserem Städtchen im Mittel zwei Kinder pro Tag geboren werden?

Lösung. Wenn k Kinder geboren werden, dann wird also $1000 \cdot k$ Dukaten benötigt. Es bezeichne X die Zufallsvariable, die die Anzahl an geborenen Kindern an einem Tag zählt. Dann gilt $X \sim \mathit{Poi}(2)$. Nun gilt $P(X > 3) = 1 - \mathit{poisscdf}(3,2) = 0.1429$ und $P(X > 4) = 1 - \mathit{poisscdf}(4,2) = 0.053$. 4000 Dukaten würden also mit Wahrscheinlichkeit $1 - 0.053 > 90\%$ reichen, 3000 Dukaten jedoch nicht.

Aufgabe 15. Eine Person hat drei (zumindest im Dunkeln und in dieser Situation spielt unsere Geschichte) nicht unterscheidbare Schlüssel an ihrem Schlüsselring, von denen genau einer auf die Tür passt. Sie probiert die Schlüssel, bis der passende gefunden ist. Die Zufallsvariable X stellt die Anzahl der dazu nötigen Versuche dar. Berechnen Sie $E(X)$ in den folgenden Fällen:

1. Ein Schlüssel, der erfolglos ausprobiert wurde, wird nicht wiederverwendet.
2. Die Person ist nicht (mehr) in der Lage, sich zu merken, welche Schlüssel schon getestet wurden und probiert völlig zufällig (aber hartnäckig).

Lösung.

1. Hier gilt $P(X=1) = \frac{1}{3}$, $P(X=2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ und $P(X=3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Es ergibt sich $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$.
2. Nun ist $X \sim \mathit{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$. Es gilt also $E(X) = 3$.

Aufgabe 16. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion (als geschlossenen Ausdruck) der geometrischen Verteilung.

Lösung. Es sei $X \sim Geo(p)$. Dann ist

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} P(X = i) = \sum_{i=1}^{x} (1-p)^{i-1} \cdot p = p \sum_{i=0}^{x-1} (1-p)^{i} = p \cdot \frac{1 - (1-p)^{x}}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^{x}.$$

Aufgabe 17. Wie gross ist die erwartete Anzahl an Würfen mit einem fairen Würfel, bis zum ersten Mal eine Sechs kommt?

Lösung. Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl an Versuchen bis zur ersten 6 zählt. Dann ist $X \sim Geo\left(\frac{1}{6}\right)$. Es ergibt sich $E(X) = 6$.

Aufgabe 18. Ein Lachs schwimmt einen Bachlauf hinauf und muss dazu einen kleinen Wasserfall überwinden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er den Wasserfall bei einem Sprung überwindet, liege bei $p = 0.3$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fisch mindestens zweimal, aber höchstens viermal springen muss, um den Wasserfall zu überwinden?

Lösung. Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl an Versuchen bis zur Überwindung zählt. Dann ist $X \sim Geo\,(0.3)$. Es ergibt sich $P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1) = geocdf(3, 0.3) - geocdf(0, 0.3) = 0.4599$.

Aufgabe 19. Für die Mitarbeit in einem Komitee haben sich 14 Personen beworben, davon haben 5 bereits in dieser Art von Komitee mitgearbeitet, die übrigen 9 noch nicht. Es werden nun 5 Mitglieder per Losentscheid ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 erfahrene Mitglieder in dem Komitee arbeiten werden?

Lösung. Es zähle X die erfahrenen Mitglieder im Komitee. Dann ist $X \sim Hyp(14, 5, 5)$. Wir erhalten $P(X = 3) = hygepdf(3, 14, 5, 5) = 0.1798$

Aufgabe 20. Bei einem Jass erhält ein Spieler 9 Karten (aus 36 Karten, wobei 4 Asse dabei sind). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er mindestens 2 Asse?

Lösung. $1 - hygecdf(1, 36, 4, 9) = 0.2552$

Aufgabe 21. Adolf und Harald wollen Euro in die Schweiz schmuggeln. Sie befinden sich in einem Reisecar mit weiteren 23 Reisenden, die kein Schwarzgeld bei sich haben. An der Grenze werden drei Personen ausgewählt und genau durchsucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden

1. weder Adolf noch Harald,
2. Adolf und Harald,
3. nur Adolf erwischt?

Lösung.

1. $\frac{\binom{23}{3}}{\binom{25}{3}}$
2. $\frac{\binom{23}{1}}{\binom{25}{3}}$
3. $\frac{\binom{23}{2}}{\binom{25}{3}}$