Einführung in die Analysis
9. Anwendungen der Differentialrechnung

Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

Frühlingssemester 2021

Inhaltsverzeichnis

Newtonverfahren: Motivation

Das Lösen von Gleichungen gehört zu den wichtigsten Aufgaben der Mathematik. Jedoch können wir schon einfache Gleichungen, wie z. B.

$$x^3 + x = 1 \tag{1}$$

nicht mehr so einfach lösen. Bei vielen konkreten Anwendungen sind die Funktionen oder Gleichungen so komplex, dass eine exakte Berechnung der Nullstellen durch Formeln nur in Ausnahmefällen möglich ist.
In diesem Abschnitt werden wir ein **Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen der Form**

$$\boldsymbol{f(x) = 0}$$

kennenlernen. Jede Gleichung kann auf diese Form gebracht werden. Für die Gleichung (1) gilt z. B.

$$\begin{aligned} x^3 + x = 1 &\iff x^3 + x - 1 = 0 \\ &\iff f(x) = 0 \text{ mit } f(x) = x^3 + x - 1 \end{aligned}$$

Ist ξ eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, d.h. gilt $f(\xi) = 0$, so kann die Stelle ξ auch als eine **Nullstelle** der Funktion $y = f(x)$ aufgefasst werden.

Newtonverfahren

Das **Newtonverfahren** (oder **Tangentenverfahren von Newton**) ist eine sogenanntes **Iterationsverfahren**:

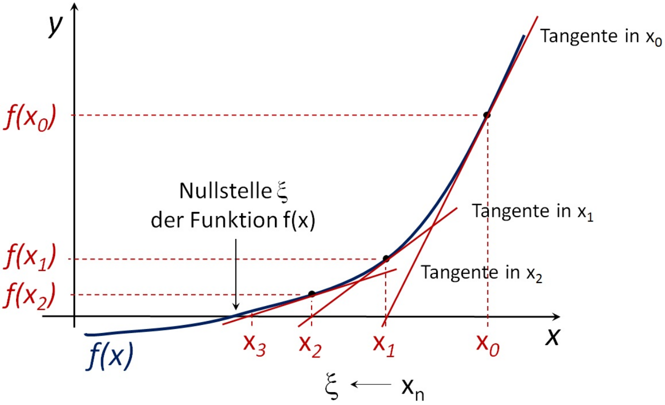
Man beginnt mit einem Startwert x_0 und berechnet daraus durch Anwendung einer bestimmten Rechenvorschrift die Folge von Näherungswerten $x_1, x_2, x_3, ...$ die unter bestimmten Voraussetzungen gegen die exakte Lösung ξ konvergiert:

$$x_0, x_1, x_2, ... \to \xi$$

(Das Heronverfahren war ebenso ein Iterationsverfahren)

Newtonverfahren

Die Grundidee des Newtonverfahrens beruht darauf, die Funktion an geeigneten Punkten durch die Tangente zu Linearisieren und dann die Nullstelle der Tangente zu bestimmen: **Newton-Verfahren**



Newton-Verfahren

Newton-Verfahren — Vorgehen

1. **Wähle einen geeigneten Startpunkt** x_0
2. **Bestimme die Tangente der Funktion** f **im Startpunkt:**

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

3. **Der nächste Punkt** x_1 **ist der Schnittpunkt der Tangente mit der** $x-$**Achse (Nullstelle der Tangente)**

$$\begin{aligned} & 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ \Rightarrow \quad & x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

4. x_1 **ist der neue Startpunkt und durch Iteration erhält man das folgende Verfahren:**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

5. **Man führt die Schritte 2-4 solange durch, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.** **Beispiel**

Newtonverfahren

Beispiel I:

Berechnen Sie mit dem Newtonverfahren eine Näherungslösung für die Gleichung

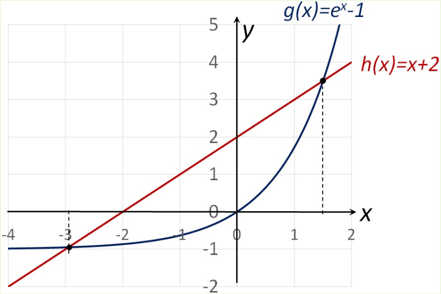
$$x^3 + x = 1$$

Newton-Verfahren

Beispiel:

Wir suchen die Schnittpunkte der beiden Funktionen

$$g(x) = e^x - 1 \quad \text{und} \quad h(x) = x + 2$$



Newton-Verfahren

Beispiel:

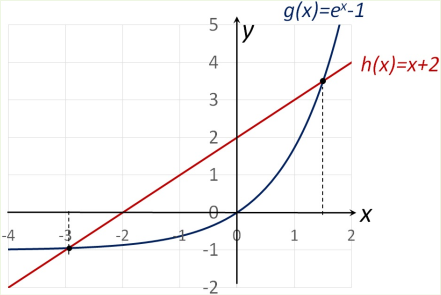
Wir suchen die Schnittpunkte der beiden Funktionen

$$g(x) = e^x - 1 \quad \text{und} \quad h(x) = x + 2$$

Die Suche nach den Schnittpunkten von g und h ist äquivalent mit der Suche der Nullstellen von

$$f(x) = g(x) - h(x) = e^x - x - 3$$

Aus dem Schaubild ergeben sich als geeignete Startwerte für das Newtonverfahren $x_0 = -3$ bzw. $x_0 = 2$



Newtonverfahren

Beispiel (Fortsetzung):

Ausgehend von den Startwerten $x_0 = -3$ bzw. $x_0 = 2$ liefert das Newtonverfahren mithilfe der Formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n - 3}{e^{x_n} - 1}$$

folgende Tabelle für die ersten Werte der Iteration:

n	x_n	x_n
0	-3.00000000000000	2.00000000000000
1	-2.94760430350874	1.62607057099866
2	-2.94753090269145	1.51397360269269
3	-2.94753090254228	1.50529023395952
4	-2.94753090254228	1.50524149731938
5	-2.94753090254228	1.50524149579288

Konvergenz des Newtonverfahrens

Die Wahl des Startwertes bestimmt, wie schnell das Verfahren zum Grenzwert (d. h. zur gesuchten Lösung der Gleichung bzw. zur Nullstelle der Funktion) konvergiert und ob das Verfahren überhaupt konvergiert.

Geeignete Startwerte sind solche, die in der Nähe der Lösung der Gleichung liegen. Durch Einsetzen von ein paar Werten kann ein geeigneter Startwert lokalisiert werden.

Ungeeignete Startwerte sind z. B. solche, bei welchen die Tangente an die Kurve fast parallel ist, weil der Schnittpunkt mit der x-Achse dann sehr weit weg liegt.

Folgende Probleme können auftreten, wenn die Startwerte ungeeignet gewählt werden:

- Die Folge divergiert.
- Sie oszilliert, d.h. sie pendelt zwischen endlich vielen Werten hin und her.
- Sie konvergiert gegen eine andere Nulstelle.

Konvergenz des Newtonverfahrens

Satz (Hinreichendes Konvergenzkriterium für das Newtonverfahren)

Das Newtonverfahren konvergiert immer für eine auf $\mathbb{R}$ konkave oder konvexe Funktion mit

$$f'(x) \neq 0 \textit{ für alle } x \in I \quad \textit{und} \quad \left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K < 1 \textit{ für alle } x \in I$$

Je kleiner die Konstante K, desto besser ist die Konvergenz.

Beispiel

Der Startwert $x_0 = 0.5$ im Beispiel $x^3 + x = 1$ mit $f(x) = x^3 + x - 1$, $f'(x) = 3x^2 + 1$ und $f''(x) = 6x$ erfüllt das Konvergenzkriterium:

$$\left| \frac{f(0.5) \cdot f''(0.5)}{(f'(0.5))^2} \right| = \left| \frac{-0.375 \cdot 3}{3.0625} \right| = 0.3673 \cdots < 1$$

Konvergenz des Newtonverfahrens

Anmerkung Für das Newton Verfahren benötigen wir die Ableitungsfunktion, die manchmal nicht explizit zur Verfügung steht oder deren Berechnung wir uns ersparen wollen.
In diesen Fällen wird diese in der Regel numerisch bestimmt durch

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

für ein geeignetes, genügend kleines aber nicht allzu kleines $\varepsilon \neq 0$ (z. B. $\varepsilon = 0.001$).
Damit wird die Ableitung nur näherungsweise berechnet, dies ist aber fast immer unproblematisch, da zwar die Tangentensteigung etwas falsch bestimmt wird, die Tangente den Kurvenverlauf aber sowieso nur ungefähr wiedergibt. Mit anderen Worten, ein Fehler in der numerischen Ableitung wirkt sich auf die nachfolgenden Berechnungen nicht aus; das Newton Verfahren ist „selbstheilend“.

Newtonverfahren

Eigenschaften des Newtonverfahrens:

- Sehr schnelle Konvergenz (nur wenige Iterationsschritte sind nötig);
- Bei mehrfachen Nullstellen konvergiert das Verfahren langsam oder gar nicht;
- Ausgehend von einem Startwert, findet das Verfahren höchstens eine Nullstelle. Zur Bestimmung mehrerer Nullstellen muss man die Iteration mit unterschiedlichen Startwerten durchführen;
- (Für die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - a$ ist das Ergebnis bekannt: $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$. Die Berechnung mit dem Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

  liefert die seit der 1. Vorlesung bekannt Heron-Folge.)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1.
Sei $f(x) = x^2 - 4$. Führen Sie jeweils vier Schritte des Newtonverfahrens zur Bestimmung einer Lösung von $f(x) = 0$ durch, ausgehend von den Startwerten 10 und -3.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens eine approximative Lösung der Gleichung $x^5 = 100$.

Taylorapproximation: Idee

Beim Newtonverfahren haben wir die Tangente an eine Funktionskurve als Approximation einer Funktion in einem bestimmten Punkt x_0 verwendet. Ändert sich die Steigung in der Nähe von x_0 nur wenig, dann approximiert die Tangente in der Umgebung von x_0 die Funktion ziemlich gut.
In diesem Abschnitt möchten wir eine bessere **Approximation für eine Funktion** kennenlernen. Wir werden wie folgt vorgehen:

1. Zuerst entwickeln wir ein Verfahren für eine Approximation um den Nullpunkt herum (**Mac Laurinsche Reihe)**.
2. Dann erweitern wir das Verfahren für eine Approximation in einem beliebigen Punkt auf der Funktionskurve (**Taylorapproximation**).

Potenzreihen

Definition (Potenzreihe)

Eine Funktion der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

heißt **Potenzreihe**. Der Definitionsbereich einer Potenzreihe besteht aus allen reellen Zahlen x, für die $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert. Man nennt daher die Menge

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{konvergent} \right\}$$

den **Konvergenzbereich** der Potenzreihe.

Bemerkungen:

(1) Man bezeichnet $a_0, a_1, a_2, \ldots$ als die Koeffizienten der Potenzreihe.

(2) Für jedes feste x ist eine Potenzreihe eine Zahlenreihe.

Potenzreihen

Mit Polynomen können wir am besten arbeiten, sie sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, lassen sich mühelos ableiten und auch integrieren. Funktionswerte kann man mit Computern einfach berechnen. **Potenzreihen** beruhen nun auf der Idee, beliebige Funktionen durch Polynome anzunähern.

Beispiel:

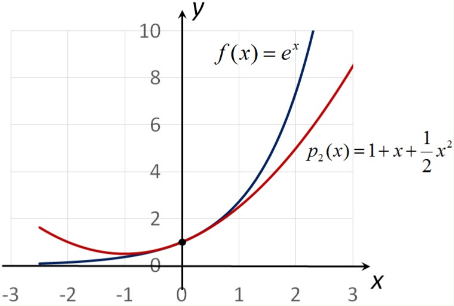
Wir wollen die Funktion $f(x) = e^x$ durch ein Polynom an der Stelle $x = 0$ annähern:

- Die nullte Näherung an die Funktion erhält man durch die konstante Funktion $p_0 = f(0) = 1$
- Die erste Näherung hat mit der Funktion sowohl den Funktionswert $f(0)$, als auch die erste Ableitung $f'(0)$ gemeinsam. Man erhält sie durch die Tangente in $x = 0$: $p_1 = f'(0) \cdot x + f(0) = x + 1$.
- Die zweite Näherung soll zusätzlich noch diesselbe Krümmung $f''(0)$ wie die Funktion besitzen: $p_2 = 1 + x + a_2 x^2$. Der Koeffizient a_2 wird aus der Bedingung $p_2''(0) = f''(0) \Rightarrow 2a_2 = 1$ bestimmt und beträgt $a_2 = \frac{1}{2}$, d.h. $p_2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$
- Dieses Prinzip lässt sich nun auf Polynome mit beliebigem Grad n erweitern.

$$p_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

Potenzreihen

Beispiel (Fortsetzung):



Das Näherungspolynom $p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ nähert die Funktion $f(x) = e^x$ in einer Umgebung von $x = 0$ recht gut an. Entfernt man sich von der Stelle $x = 0$, so wird der Fehler, d.h. die Abweichung zwischen Näherung und eigentlichem Funktionswert größer.

Funktionen lassen sich durch Polynome annähern. Wir wollen dieses Verfahren nun verallgemeinern und dabei fordern, dass die $n-$te Ableitung der Funktion $f^{(n)}(x)$ gleich der $n-$ten Ableitung des Näherungspolynoms $p^{(n)}(x)$ an der Stelle $x = 0$ sein soll

$$f^{(n)}(x) = p^{(n)}(x)$$

Mac Laurinsche Reihe

Wir wollen die Funktion $f(x)$ durch ein Polynom an der Stelle $x = 0$ annähern:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

Dabei soll gelten:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \qquad \Rightarrow a_0 = f(0)$$

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + 4 \cdot a_4 x^3 + \dots \qquad \Rightarrow a_1 = \frac{f'(0)}{1}$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + 3 \cdot 4 \cdot a_4 x^2 + \dots \qquad \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}$$

$$f^{(3)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x + \dots \qquad \Rightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot a_n + 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n+1) a_{n+1} x + \dots \qquad \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n}(0)}{n!}$$

Mac Laurinsche Reihe

Die Koeffizienten $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ sind eindeutig durch die Ableitungswerte $f^{(0)}(0) = f(0)$, $f'(0),\ f''(0), \ldots$ bestimmt und es gilt somit:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\
&= f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} x^n + \ldots \\
&= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots
\end{aligned}$$

Mac Laurinsche Reihe

Satz (Mac Laurinsche Reihe einer Funktion)

Die **Mac Laurinsche Reihe** einer Funktion $f(x)$ lautet:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

- nähert man die Funktion an der Stelle $x = 0$ durch ein Polynom vom Grade n an, so heißt das entsprechende Näherungspolynom **Mac Laurinsches Polynom vom Grad** n;
- die erforderlichen Ableitungen der Funktion an der Stelle $x = 0$ müssen existieren;
- Die Mac Laurinsche Reihe konvergiert gegen $f(x)$ für alle $|x| < r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, r wird der **Konvergenzradius** der Reihe genannt.
- ist die Funktion gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle x, so enthält die Reihe nur gerade Potenzen (und umgekehrt)
- ist die Funktion ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle x, so enthält die Reihe nur ungerade Potenzen (und umgekehrt).

Mac Laurinsche Reihe

Beispiel:

Reihenentwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ an der Stelle $x = 0$:

Die Vorgehensweise zur Berechnung der Koeffizienten a_k ist die Folgende:

1. Ableitungen von $f(x)$ berechnen
2. In Funktion und Ableitung $x = 0$ einsetzen: $f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ \ldots$
3. Zum Berechnen der Koeffizienten a_n durch die Fakultät teilen: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Mac Laurinsche Reihe

Beispiel:

Reihenentwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ an der Stelle $x = 0$:

Die Vorgehensweise zur Berechnung der Koeffizienten a_k ist die Folgende:

1. Ableitungen von $f(x)$ berechnen
2. In Funktion und Ableitung $x = 0$ einsetzen: $f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ \ldots$
3. Zum Berechnen der Koeffizienten a_n durch die Fakultät teilen: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

n	$f^{(n)}$	$f^{(n)}(0)$	$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	$f(x) = (1-x)^{-1}$	$f(0) = 1$	$a_0 = 1$
1	$f'(x) = 1 \cdot (1-x)^{-2}$	$f'(0) = 1$	$a_1 = 1$
2	$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot (1-x)^{-3}$	$f''(0) = 2!$	$a_2 = \frac{2!}{2!} = 1$
3	$f'''(x) = 3! \cdot (1-x)^{-4}$	$f'''(0) = 3!$	$a_3 = \frac{3!}{3!} = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$f^{(n)}(x) = n! \cdot (1-x)^{-(n+1)}$	$f^{(n)}(0) = n!$	$a_n = \frac{n!}{n!} = 1$

Mac Laurinsche Reihe

Beispiel (Fortsetzung):

Die Mac Laurinsche Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ an der Stelle $x = 0$ lautet:

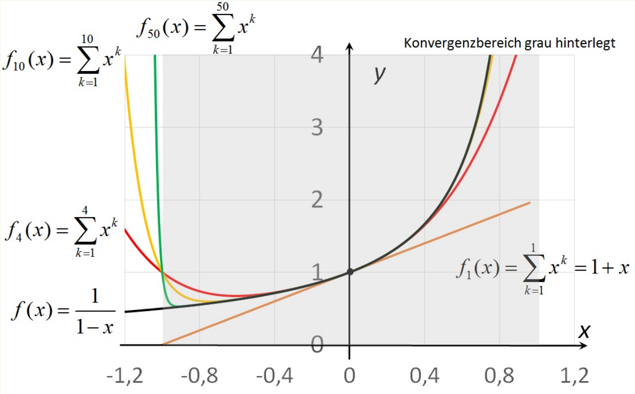
$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Wir erhalten die bereits bekannte geometrische Reihe. Sie besitzt den Konvergenzradius

$$r = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

und konvergiert somit nicht nur für $x = 0$ sondern für alle $-1 < x < +1$

Beispiel (Fortsetzung):



Je höher der Grad des Mac Laurin Polynoms, desto besser wird die Funktion angenähert. Der grau hinterlegte Bereich kennzeichnet den Konvergenzbereich der Mac Laurinschen Reihe, zwischen $-1 < x < 1$ gilt: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Mac Laurinsche Reihe

Beispiel (Fortsetzung): Reminder(geogebra und Summenzeichen)

Mit dem Programm Geogebra (https://www.geogebra.org/) können Funktionen einfach geplottet werden:
Wir geben in der Eingabezeile unten nach und nach die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ und die Annäherungen 1., 2., 3. und 4. Ordnung durch die Mac Laurinsche Reihe ein:

$$\begin{aligned} l_1(x) &= 1 + x \\ l_2(x) &= 1 + x + x^2 \\ l_3(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 \\ l_4(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \end{aligned}$$

Beobachtung: Je grösser der Grad der Reihe ist, desto besser ist die Annäherung an die Funktion $f(x)$ um den Punkt 0 herum.

Mac Laurinsche Reihe

Beispiel:

Die Mac Laurinsche Reihe der Funktion $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x = 0$ lautet:

n	$f^{(n)}$	$f^{(n)}(0)$	$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$	$a_0 = 0$
1	$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$	$a_1 = \frac{1}{1!} = 1$
2	$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$	$a_2 = \frac{0}{2!} = 0$
3	$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$	$a_3 = \frac{-1}{3!}$
4	$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$	$a_4 = \frac{0}{4!} = 0$
5	$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = 1$	$a_5 = \frac{1}{5!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wir erhalten also für die geraden Koeffizienten $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$
und für die ungeraden Koeffzienten $a_1 = 1,\ a_3 = \frac{-1}{3!},\ a_5 = \frac{1}{5!}, a_7 = \frac{-1}{7!},\ \ \ldots,$

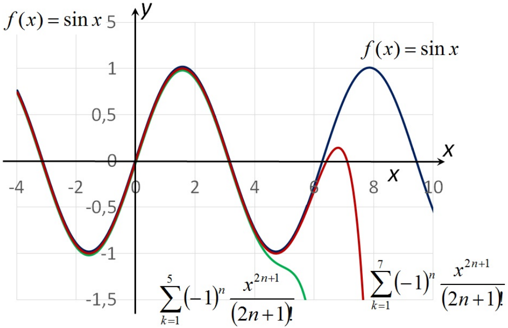
Mac Laurinsche Reihe

Beispiel (Fortsetzung):

Die Mac Laurinsche Reihe für die Funktion $f(x) = \sin x$ lautet:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Die Reihe konvergiert für alle reellen Zahlen x.



Übungsblatt 9

Kopfrechnen

Aufgabe 6.
Bestimmen Sie die Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = (1+x)^n$.

Taylor-Reihen

Bis jetzt haben wir Funktionen an der Stelle $x = 0$ aproximiert (Mac Laurin). Funktionen lassen sich aber auch an anderen Stellen x_0 approximieren. Hierfür verwenden wir als Ansatz ein um x_0 verschobenes Polynom $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

Satz (Taylor-Reihe)

Die Potenzreihe mit der Entwicklungsstelle x_0

$$T(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

heißt **Taylor-Reihe** der Funktion f.

- die Koeffizienten lauten $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$;
- die Ableitungen der Funktion an der Stelle x_0 müssen existieren;
- die Taylor-Reihe konvergiert gegen $f(x)$ für alle $|x| < r = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$;
- ist die Funktion gerade (ungerade) für alle x, so enthält die Reihe nur gerade (ungerade) Potenzen.

Taylor-Reihen

Definition (Taylorpolynom)

Das Polynom T_n vom Grad n, bei dem an der Stelle x_0 der Funktionswert und alle Ableitungen bis zur Ordnung n mit einer Funktion f übereinstimmen

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nennt man **Taylorpolynom** der Ordnung n. Dabei muss die Funktion f in der Umgebung der Entwicklungsstelle x_0 mindestens $n-$mal differenzierbar sein.

Brook Taylor

Das Taylor-Polynom ist nach dem englischen Mathematiker *Brook Taylor* benannt. Die Näherung einer Funktion durch ihr Taylor-Polynom hat gute Approximationseigenschaften in der Nähe des Entwicklungspunktes x_0. Die Differenz zwischen der Funktion f und ihrem Taylor-Polynom T_n hängt von der Ordnung n und dem Abstand des Punktes x von der Entwicklungsstelle x_0 ab.

Taylorapproximation

Anmerkungen

- Das Taylorpolynom 1. Ordnung $f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ entspricht der Tangente an $f(x)$ im Punkt x_0.
- Das Taylorpolynom 2. Ordnung $f_2(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$ stimmt an der Stelle x_0 mit $f(x_0)$ überein. Ausserdem stimmen die ersten beiden Ableitungen dieses Polynoms mit den ersten beiden Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle x_0 überein.
- Allgemein gilt, dass das Taylorpolynom n-ter Ordnung an der Stelle x_0 mit $f(x_0)$ übereinstimmt und die ersten n Ableitungen dieses Polynoms mit den ersten n Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle x_0 übereinstimmen.

Anmerkung Je höher der Grad des Polynoms, desto besser approximiert das Taylorpolynom die Funktion.

Taylor-Reihen

Beispiel:

An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion $f(x) = \ln(x)$ nicht definiert. Wir bestimmen deshalb die Taylor-Reihe von f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$

n	$f^{(n)}$	$f^{(n)}(1)$	$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$
0	$f(x) = \ln(x)$	$f(1) = 0$	$a_0 = 0$
1	$f'(x) = x^{-1}$	$f'(1) = 1$	$a_1 = \frac{1}{1!} = 1$
2	$f''(x) = -x^{-2}$	$f''(1) = -1$	$a_2 = \frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2}$
3	$f'''(x) = 2 \cdot x^{-3}$	$f'''(1) = 2!$	$a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$
4	$f^{(4)}(x) = -3! \cdot x^{-4}$	$f^{(4)}(1) = -3!$	$a_4 = \frac{-3!}{4!} = -\frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n}$	$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$	$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Taylor-Reihen

Beispiel (Fortsetzung):

Wir erhalten also die Taylor-Reihe

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots$$

Diese Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius

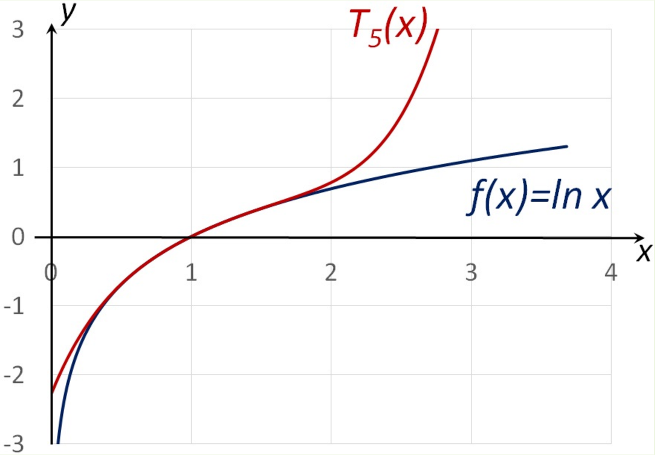
$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

Obwohl die Funktion $f(x) = \ln x$ für alle $x > 0$ definiert ist, konvergiert die Potenzreihe nur für $x-$Werte zwischen 0 und 2. Für $x = 2$ ergibt sich die alternierende harmonische Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \ldots.$$

Für $x = 0$ ergibt sich die harmonische Reihe, die divergent ist.

Beispiel (Fortsetzung):



Taylor-Reihen

Bemerkung:

Die Aussage des Taylorsches Satzes ist, dass sich fast jede elementare Funktion in der Umgebung eines Punktes x_0 durch Polynome beliebig genau annähern lassen. Es hat sich gezeigt, dass eine solche Funktion sich durch eine **Potenzreihe** der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

darstellen lässt. Der Vorteil der Reihendarstellung ist, dass sich Potenzfunktionen meist leichter behandeln lassen (Ableitung, Integration,...) als der geschlossene Ausdruck der eigentlichen Funktion.

Potenzreihen sind einerseits Funktionen (sie hängen von einer Veränderlichen x ab) und andererseits unendliche Reihen (jeder Funktionswert besteht aus einer Summe von unendlich vielen Zahlen)

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.
Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}$ im Punkt $x = 0$.

Aufgabe 10.
Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x},\ x > 0$$

in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Geben Sie den zugehörigen Konvergenzbereich an.

Anwendung: Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital

Beim Berechnen von Funktionsgrenzwerten lautet eine Regel:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \quad \text{wenn} \quad g(x_0) \neq 0$$

Trifft man dabei allerdings auf unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, dann konnte der Grenzwert bisher nicht berechnet werden. Mit Hilfe der Taylorreihe können wir eine Regel für die Berechnung von Grenzwerten von diesem Typ herleiten.

Anwendung: Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital

Satz (Regel von Bernoulli-de l'Hospital)

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x_0 stetig differenzierbar und ist $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $f(x_0) = g(x_0) = \pm\infty$, so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Anmerkung: Dass die Regel tatsächlich richtig ist, lässt sich erklären, wenn man zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ durch ihre Tangenten an der Stelle x_0 annähert:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \approx \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Die Regeln von l'Hospital

Bemerkungen:

- Die Regeln von l'Hospital gelten auch für Grenzübergänge $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ falls}$$

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0\right) \text{ oder}$$
$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty\right)$$

- Die l'Hospitalschen Regeln setzen immer voraus, dass die Funktionen in einer Umgebung von x_0 differenzierbar sind
- Unter Umständen müssen die l'Hospitalschen Regeln mehrfach angewendet werden, um zum Ziel zu führen. Es gibt aber auch Fälle, bei denen die mehrmalige Anwendung der Regeln versagt
- Beispiele

Die Regeln von l'Hospital

Beispiel: (sinc-Funktion:)

Um zu entscheiden, ob die Funktion

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

stetig ist, berechnen wir den Grenzwert für x gegen 0. Die Grenzwerte im Zähler und im Nenner sind beide null und der Grenzwert der Ableitungen existiert:

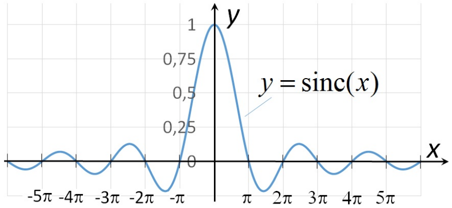
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

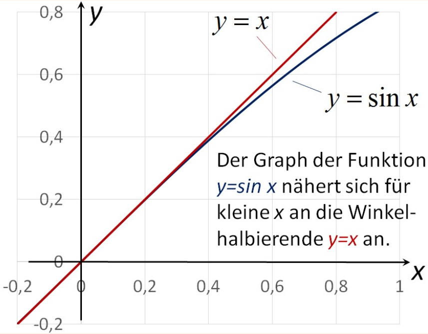
Somit ist die sinc-Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
Weiter haben wir herausgefunden, dass sich $\sin(x)$ für kleine $x-$Werte genau wie x verhält. Oft wird die Funktion $f(x) = \sin x$ für für $x \to 0$ durch die Funktion $h(x) = x$ angenähert: $\sin x \approx x$

Die Regeln von l'Hospital

Satz (Verhalten der Sinusfunktion für kleine Werte)

Für kleine x-Werte verhält sich $\sin x$ wie x, d.h. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$





Anmerkung:

Man beachte, dass das Argument des $\sin x$ im Bogenmaß angegeben ist.

Die Regeln von l'Hospital

Beispiele:

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{-\pi\sin(\pi x)}{2x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(2x-1)}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{2x-1}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{(2x-1)e^x} = 0$

Übungsblatt 9

Aufgabe 13.
Überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen für die Regel von Bernoulli und de L'Hospitale erfüllt sind und bestimmen Sie dann die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$

(c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5^x + 3^x}{x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2x + 1)}{x}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x}$

(h) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{a}{x})^x$

(i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$

(j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x - 1)^2}$

(k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$

(l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2 + 2\cos(x)}{x^4}$

Kahoot: Grenzwerte berechnen

https://kahoot.it/

Quiz