Einführung in die Analysis
1. Mengen / Zahlenmengen / Heron-Verfahren

Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

Frühlingssemester 2021

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mit **Analysis** bezeichnet man in der Mathematik die Theorie der **rellen Zahlen**. Eine wichtige Disziplin der Analysis ist die **Differential- und Integralrechnung**, die gemeinsam von Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz entwickelt wurde.

Während Leibniz sich mit den infinitesimalen Änderungen von Funktionsgraphen beschäftigte, entdeckte Newton den Zusammenhang zwischen der Ableitung (Steigung der Kurve) und des Integrals (Fläche unter der Kurve).

Mengen

Im Alltag sprechen wir oft von Gesamtheiten von Objekten, z.B. von der Gesamtheit der Mitglieder eines Vereins oder von der Gesamtheit der Dual-Core-Prozessoren. Auch in der Mathematik hat man den Begriff der Mengen eingeführt:

Ziel der Mengenlehre:
Mehrere mathematische Objekte werden zusammengefasst und werden als neues eigenständiges mathematisches Objekt verstanden. Dabei geht es vor allem darum, Kürze und formale Übersichtlichkeit der Notation herzustellen.

Mengen

Definition (Menge, Element)

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte. Die Objekte, die zu einer Menge M gehören, heissen **Elemente** von M.

Eine Menge muss folgende Bedingungen erfüllen:

- Die einzelnen Elemente sind unterscheidbar;
  ($\{1, 1, 2\}$) ist also keine Menge;
- Für jedes Objekt x ist klar festgelegt, ob es zur Menge M gehört oder nicht.

Mengen

Definition (Menge, Element)

Wenn x ein Element der Menge M ist, schreiben wir

$$x \in M \qquad \text{oder} \qquad x \notin M$$

wenn x in M bzw. nicht in M ist.

Die **leere Menge** enthält keine Elemente. Sie wird mit $\emptyset$ oder mit $\{\}$ bezeichnet.

Beispiele

1. Menge der Studenten einer Klasse
2. Menge der Vokale: $V = \{a, e, i, o, u\}$
   $a \in V$ aber $b \notin V$, a ist Element von V, aber b nicht
3. Menge aller Planeten

Natürliche Zahlen

Am Anfang war die Zahl. Oder, noch einfacher: etwas, das abgezählt wurde.

Natürliche Zahlen

Die **natürlichen Zahlen** sind die beim Zählen verwendeten Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Diese Zahlen bilden die Menge der natürlichen Zahlen:

Definition (Natürliche Zahlen)

Die Menge der natürlichen Zahlen lautet

$$\{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$$

Zählen wir die Null noch mit dazu, dann gilt:

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}_0$$

Für die Menge der natürlichen Zahlen bis zur einer bestimmten Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots n\} = \mathbb{N}_0^{\leq n}$$

Natürliche Zahlen

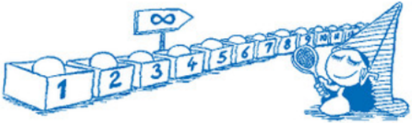
Bemerkungen:

Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen gelten folgende Regeln:

- Addition und Multiplikation sind innere Verknüpfungen auf $\mathbb{N}_0$
  $a, b \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a + b \in \mathbb{N}_0$ bzw. $a, b \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{N}_0$
  Wir können die natürlichen Zahlen addieren und multiplizieren, das Ergebnis ist wieder eine natürliche Zahl
- Beide Operationen sind kommutativ und assoziativ:
  $$a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$
  $$a \cdot b = b \cdot a, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
- Das Element 1 ist neutrales Element der Multiplikation, das Element 0 ist neutrales Element der Addition:
  $1 \cdot a = a$ und $0 + a = a$

Natürliche Zahlen: Exkurs „Unendlichkeit“

1. Unendlich viele Shots?
2. Stell dir vor, du hast unendlich viele Schachteln, und in jeder Schachtel liegt ein Tennisball (mehr passen auch nicht hinein). Es sind also alle Schachteln voll.



Jetzt hast du aber noch einen Tennisball und möchtest ihn gerne in deinen vorhandenen Schachteln ganz vorne unterbringen. Ist das möglich?

Natürliche Zahlen

Auf diese Art und Weise lassen sich noch beliebig viele zusätzliche Bälle unterbringen, denn du hast ja unbegrenzt viele Schachteln.

Ganze Zahlen

Gleichungen der Form

$$a + x = b, \quad \text{mit} \ \ a, b \in \mathbb{N}$$

lassen sich in der Menge der natürlichen Zahlen nicht lösen, falls $a > b$ ist. Eine Lösung kann aber gefunden werden, wenn die Menge $\mathbb{N}$ mit den negativen ganzen Zahlen $-1, -2, -3, \ldots$ zur Menge aller **ganzen Zahlen** erweitert wird:

Definition (Ganze Zahlen)

Die Menge der ganzen Zahlen lautet

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\} = \mathbb{Z}$$

Für die Menge der positiven bzw. negativen ganzen Zahlen schreibt man:

$$\begin{aligned} \{+1, +2, +3, \ldots\} &= \mathbb{Z}^+ \\ \{\ldots, -3, -2, -1\} &= \mathbb{Z}^- \end{aligned}$$

Ganze Zahlen

Bemerkungen:

Für das Rechnen mit ganzen Zahlen gelten folgende Regeln:

- Die ganzen Zahlen sind bezüglich Addition und Multiplikation ebenso abgeschlossen auf $\mathbb{Z}_0$
  $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$ bzw. $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}$
- Beide Operationen sind kommutativ und assoziativ. Weiter gilt das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Das Element 1 ist neutrales Element der Multiplikation,
  das Element 0 ist das neutrale Element der Addition,
  zu jedem $a \in \mathbb{Z}$ ist $-a \in \mathbb{Z}$ das inverse Element der Addition:

$$a + (-a) = a - a = 0$$

Rationale Zahlen

Zum richtigen Rechnen reichen diese kommalosen Zahlen aber immer noch nicht. Wir können zwar addieren, subtrahieren und multiplizieren, aber wie steht es damit:

Rationale Zahlen

Gleichungen der Form

$$q \cdot x = p, \quad \text{mit gegebenen} \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

sind in der Menge der ganzen Zahlen dann nicht mehr lösbar, wenn q kein Teiler von p ist. Auch hier führt eine Bereichserweiterung zum Ziel:

Definition (Rationale Zahlen)

Die Menge der Rationalen Zahlen lautet

$$\left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{Q}$$

Bemerkung:

- Die Menge der rationalen Zahlen ist abgeschlossen bezüglich der Addition, Multiplikation und Division

- Durch Null darf nicht dividiert werden, d.h. $\frac{p}{0} \notin \mathbb{Q}$

Rationale Zahlen

rationale Zahlen.

Mit diesen neuen Zahlen funktioniert auch die Division „restlos“.

Der Mathematiker Leopold Kronecker ist mit seinem Ausspruch berühmt geworden: „Der liebe Gott hat die natürlichen Zahlen gemacht. Alle anderen sind Menschenwerk.“

Dieser Satz gilt nicht nur für die rationalen Zahlen, sondern auch für das Rechnen mit diesen Zahlen.

Wie können wir zwei rationale Zahlen addieren?

Rationale Zahlen

Folgende Darstellungen für die rationalen Zahlen sind üblich:

- **Bruchdarstellung**: $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
- **Dezimaldarstellung**: Jede rationale Zahl liefert beim Ausdividieren „Zähler durch Nenner" entweder eine abbrechende (endliche) oder periodisch-unendliche Dezimalzahl;
- **Geometrische Darstellung**: Jeder rationalen Zahl wird ein Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet.

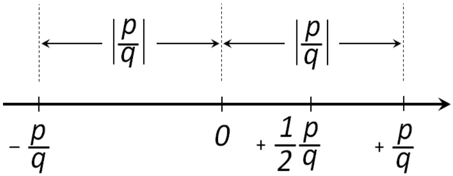
Beispiele

$\frac{23}{99} = 0.2323232323\ldots = 0.\overline{23}$ periodisch unendliche Dezimalzahl

$\frac{-7}{224} = \frac{-1}{32} = -0.03125$ abbrechende Dezimalzahl

Rationale Zahlen

Bei der **geometrischen Darstellung** ordnet man jeder rationalen Zahl einen Punkt der Zahlengeraden. Für eine positive rationale Zahl ist dies der Endpunkt der vom Nullpunkt aus nach rechts abgetragenen Strecke der Länge $|\frac{p}{q}|$:



Die Punkte auf der Zahlengeraden liegen „dicht“, denn zwischen zwei rationalen Zahlen liegt mit dem arithmetischen Mittel wiederum eine rationale Zahl zwischen den beiden Zahlen.
Aber nicht alle Zahlen auf der Zahlengeraden sind rational, denn die einfache Gleichung

$$x^2 = 2$$

bleibt in der Menge der rationalen Zahlen unlösbar.

Rationale Zahlen

Jeder Bruch lässt sich in eine **Dezimalzahl** verwandeln. Dabei kommt entweder eine endliche Zahl von Stellen hinter dem Dezimalkomma heraus – oder eine Ziffer bzw. eine Ziffernfolge wiederholt sich immer wieder.

Rationale Zahlen

Rationale Zahlen

Reelle Zahlen

Die Brüche sind schon eine ganz schöne Menge Zahlen, sollte man meinen. Aber damit haben wir meinen Reichtum erst angekratzt. Denn es gibt auch Zahlen, die keine Brüche sind und eine unendliche Zahl von Dezimalstellen haben, die keine Periode aufweisen.

Reelle Zahlen

Reelle Zahlen

Satz

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis

Wir zeigen dies indirekt, durch die Annahme des Gegenteils und Herleitung eines Widerspruchs:

Reelle Zahlen

Satz

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis

Wir zeigen dies indirekt, durch die Annahme des Gegenteils und Herleitung eines Widerspruchs:
Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei der Bruch gekürzt, also als teilerfremd angenommen wird.
Quadrieren liefert: $p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ gerade $\Rightarrow p$ gerade
Wir können also setzen: $p := 2 \cdot z$ mit $z \in \mathbb{Z}$
In die obige Gleichung eingesetzt, erhalten wir:
$p^2 = 4z^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2z^2 \Rightarrow q$ gerade.
Beide Zahlen p, q sind also gerade, haben also den gemeinsamen Teiler 2; dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass p und q teilerfremd sind.
Damit ist die Behauptung aus obigem Satz bewiesen. ∎

Übungsblatt 1

Aufgabe 5 (Irrationale Zahlen)

Zeigen Sie durch einen indirekten Beweis, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

Aufgabe 7.
Geben Sie an, zu welchen (minimalen) speziellen Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) folgende Zahlen gehören.

(a) 0

(b) -2

(c) $.31$

(d) 0.2819382671538

(e) $0.28\overline{19382671538}$

(f) $\frac{5}{7} + \sqrt{2} \cdot \frac{13}{17}$

(g) $\sqrt{25}$

(h) $\sqrt{5}$

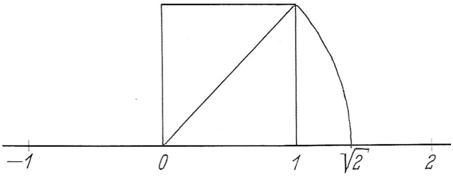
(i) -2.7

Aufgabe 8.
Beweisen Sie die folgende Behauptung mit einem indirekten Beweis.
Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$n^2 \text{ ist eine gerade Zahl} \implies n \text{ ist eine gerade Zahl}$$

Reelle Zahlen

Nicht rationale Zahlen heißen **irrationale Zahlen**. Geometrisch bedeutet das, dass zwischen den rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden noch Lücken vorhanden sind. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Konstruktion einer solchen Lücke: die Abtragung der Diagonalen des Einheitsquadrates:



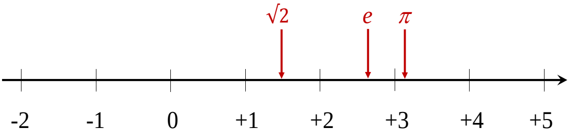
Definition (Irrationale Zahlen — Reelle Zahlen)

Zahlen, die nicht rational sind, aber die sich als Dezimalzahl mit unendlich vielen Nachkommastellen schreiben lassen, welche sich nicht periodisch wiederholen, werden irrational genannt. Die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen bildet die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Reelle Zahlen

Bemerkungen:

- Die Menge der reellen Zahlen kann durch eine nun lückenlose Zahlengerade dargestellt werden



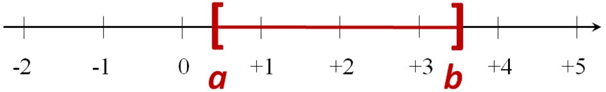
- Weitere Beispiele für irrationale Zahlen sind
  - **Kreiszahl** $\pi = 3.141592653\ldots$
  - **Eulersche Zahl** $e = 2.718281828\ldots$
  - **Wurzeln aus Nichtquadratzahlen** z.B. $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$

- Die reellen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Sie besitzen Körperstruktur.

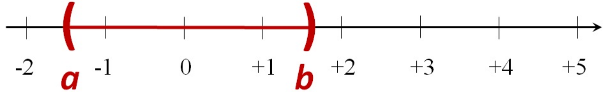
Teilmengen der reellen Zahlen

Definition (Intervalle)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann heißt:
abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$



offenes Intervall: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$



Intervalle, bei denen jeweils nur ein Randpunkt zur Menge gehört, werden **halboffene Intervalle** genannt.

Teilmengen der reellen Zahlen

Definition (Nach oben oder unten abgeschlossene Intervalle)

$$\begin{aligned}
[a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\} \\
(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | x > a\} \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} | x < b\} \\
(-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Bemerkung:

$-\infty$ bzw. $+\infty$ gehören nicht zur Menge der reellen Zahlen, deshalb können Intervalle mit $+\infty$ als obere Grenze (bzw. $-\infty$ als untere Grenze) nie nach oben (bzw. unten) abgeschlossen sein.

Komplexe Zahlen

Gleichungen der Form

$$x^2 = -1$$

lassen sich in der Menge der reellen Zahlen nicht lösen. Eine Erweiterung der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ hilft weiter:

Definition (Komplexe Zahlen)

Die Menge der **komplexen Zahlen** lautet:

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\},$$

wobei für die imaginäre Einheit i gilt: $i^2 = -1$

Bemerkung:

- Die imaginäre Einheit i ist Lösung der obigen Gleichung $x^2 = -1$;
- Es besteht folgende Teilmengenbeziehungen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Zwischen zwei Zahlen aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ kann eine größer bzw. kleiner Beziehung hergestellt werden. Dies ist zwischen zwei komplexen Zahlen nicht möglich.

Zusammenfassung:

Standardmengen und ihre Symbole:

Menge der	Symbol
natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$	$\mathbb{N}$
natürlichen Zahlen zusammen mit der 0	$\mathbb{N}_0$
ganzen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$	$\mathbb{Z}$
rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
reellen Zahlen (rationale und irrationale Zahlen)	$\mathbb{R}$
komplexen Zahlen	$\mathbb{C}$

Eine weitere ständig gebrauchte Klasse von Mengen sind die Intervalle, das sind Teilmengen von $\mathbb{R}$, die zwischen zwei Endpunkten a und b ($a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$) liegen:

$[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}$ und $a \leq x \leq b\}$ heißt abgeschlossenes Intervall;
$(a, b) = \{x : x \in \mathbb{R}$ und $a < x < b\}$ heißt offenes Intervall.

Übungsblatt 1

Aufgabe 7.
Geben Sie an, zu welchen (minimalen) speziellen Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) folgende Zahlen gehören.

(a) 0

(b) -2

(c) $.31$

(d) 0.2819382671538

(e) $0.28\overline{19382671538}$

(f) $\frac{5}{7} + \sqrt{2} \cdot \frac{13}{17}$

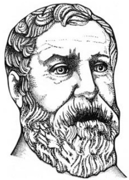
(g) $\sqrt{25}$

(h) $\sqrt{5}$

(i) -2.7

Heron-Verfahren

Auch wenn es nicht möglich ist, reelle Zahlen exakt durch rationale Zahlen (also einen Bruch) darzustellen, so kann man eine reelle Zahl durch eine rationale Zahl mit beliebiger Genauigkeit annähern.

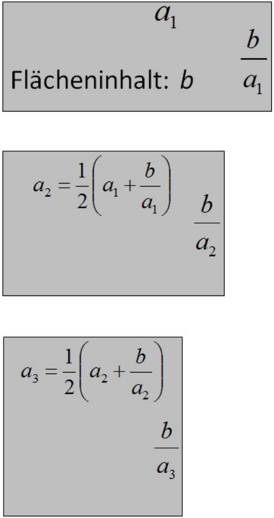


Quelle: wikipedia

Vom griechischen Mathematiker Heron von Alexandria (10 - 70 n.Chr.) ist ein effizientes Verfahren zur Annäherung von Quadratwurzeln durch rationale Zahlen überliefert, das sogenannte **Heron-Verfahren**.

Dabei nähert man sich Rechenschritt für Rechenschritt (iterativ) der gesuchten reellen Zahl an, man spricht auch von einem **Iterationsverfahren**.

Heron-Verfahren



Um den Wert für die Quadratwurzel $\sqrt{b}$ anzunähern, beginnt man mit einem Näherungswert a_1 (in unserem Fall gilt $a_1 > b$) und wählt einen zweiten Wert $\frac{b}{a_1}$ so, dass das Rechteck mit den Seiten a_1 und $\frac{b}{a_1}$ den Flächeninhalt b hat.

Es besitzt aber eine Seite, deren Länge größer und eine Seite, deren Länge kleiner als der gesuchte Wert $\sqrt{b}$ ist.

Einen besseren Näherungswert erhält man, indem man den Mittelwert der beiden Seitenlängen $\frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{b}{a_1}\right)$ wählt.

Der nächste Näherungswert wird dann in gleicher Weise immer aus dem vorangegangenen Wert berechnet:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}}\right)$$

Somit nähert man sich schrittweise dem gesuchten Wert an. (Quadrat, Flächeninhalt b, Seitenlänge $\sqrt{b}$)

Heron-Verfahren

Beispiel:

Heron-Verfahren für $\sqrt{5} \approx 2.23606797749979\ldots$

Näherungswert	Bruchdarstellung	Dezimalbruchdarstellung
a_1	$\frac{5}{2}$	2.5 (Startwert)
a_2	$\frac{9}{4}$	2.25
a_3	$\frac{161}{72}$	2.236111
a_4	$\frac{51841}{23184}$	2.23606797791580...

Man erhält eine **Folge** $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von Näherungswerten. Es kann gezeigt werden, dass dadurch $\sqrt{5}$ in jeder gewünschten Genauigkeit angenähert werden kann.

Heron-Verfahren

Mit MATLAB:

Editor - C:\Users\joana\OneDrive\Dokumente\FHNW\EANA_HS2018\Matlab\Heronverfahren.m

Heronverfahren.m

```
% -------------------------------------------------------------------
% % Procedure to approximate quadratic roots
% -------------------------------------------------------------------


change = 1.0;                              %initialize change
root = 6;                                   %we would like to know the root of 2
x = 100;                                    %our really bad guess at the answer
while change > 1e-6                         %while loop start
    xnext = 0.5 *(x + root / x);            %Heron's equation
    change = abs(xnext - x);                %calculate change
    x = xnext;                              %update x
    disp(x)                                 %print improved guess
end                                         %end of while loop
```

Näherungsverfahren und Rechner

1. Windows 10: aktuell ungültige Eingabe
2. Windows 10: Rechnungsfehler bei Quadratwurzelberechnung

Quiz V01

Link: join.quizizz.com
Code: vgl Wandtafel

Übungsblatt 1

Aufgabe 6.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Heron-Verfahrens die folgenden Quadratwurzeln auf 8 Nachkommastellen genau.

(a) $\sqrt{10}$

(b) $\sqrt{59}$

Aufgabe 3.
Bei optimaler Vereinfachung bleibt eine einzige Variable übrig; welche?

(a) $\left(1+\frac{s^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{r^2-s^2}-\frac{1}{r^2+s^2}\right)-\frac{2}{r^2-s^2}$

(b) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}-\frac{bc}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{bc}\right)^2\cdot(b+c)^2-\left(\frac{bc}{a}-\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a^2}{b^2}$

$\rightarrow$ Vollständiges Übungsblatt und Lösungen auf AD.

Brainfuck Abzählbarkeit: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|, \ldots$

1. Wie viele Zahlen gibt es?
2. Wie viele rationale Zahlen gibt es?
3. Sind die reellen Zahlen abzählbar?