Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Fachhochschule Nordwestschweiz

Übungsblatt 2

Eigenschaften von Zahlenfolgen und Konvergenz

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie das kleinste Glied der Folge $a_n = 0.5n^2 - 12.4n + 3$.

Aufgabe 2.
Ab welchem n sind die Glieder der Folge $a_n = 1.5^n$ grösser als 1000?

Aufgabe 3.
Geben Sie für die folgenden Zahlenfolgen in der aufzählenden Darstellung jeweils eine rekursive und eine explizite Darstellung an.

(a) $1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$

(b) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$

(c) $3, 33, 333, 3333, 33333, \dots$

Welche der beiden Darstellungen ist einfacher zu bestimmen?

Aufgabe 4.
Die Fibonacci-Zahlen kommen auch in der Blumenwelt vor: Die Anzahl der Blütenblätter vieler Blumen entspricht einer Fibonacci-Zahl. Suchen Sie Blumen mit 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 oder 89 Blütenblättern!

Summenschreibweise

Beispiel: Die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ lässt sich abgekürzt schreiben als

$$\sum_{i=1}^{n} i\,.$$

Definition (Summenschreibweise): Seien $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ beliebige Zahlen. Die Summe dieser Zahlen lässt sich abgekürzt mit dem **Summenzeichen** $\sum$ schreiben als

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \sum_{i=m}^{n} a_i\,.$$

Beispiel: Im Beispiel oben sind die Summanden $a_i = i$ und der Start ist bei $m = 1$.

Aufgabe 5.
Schreiben Sie die folgenden Summen in der Summenschreibweise.

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

(b) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

(c) $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64$

(d) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$

(e) $-9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3$

(f) $-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + 11 - 13 + 15 - 17$

(g) $3^2 + 5^3 + 7^4 + 9^5 + 11^6 + 13^7 + 15^8$

(h) $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9} + \frac{9}{11} + \frac{11}{13} + \frac{13}{15}$

Rechenregeln für die Summenschreibweise:

(a) Für eine konstante Zahl c gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(c\cdot a_i) &= (c\cdot a_m)+\cdots+(c\cdot a_n) = c\cdot(a_m+\cdots+a_n)\\ &= c\cdot\sum_{m=1}^{n} a_i\,.\end{aligned}$$

(b) Summen lassen sich aufteilen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} a_i &= a_m+\cdots+a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n\\ &= \sum_{i=m}^{k} a_i+\sum_{i=k+1}^{n} a_i\,.\end{aligned}$$

(c) Für die Summe von zwei Summen gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(a_i+b_i) &= (a_m+b_m)+\cdots+(a_n+b_n)\\ &= (a_m+\cdots+a_n)+(b_m+\cdots+b_m)\\ &= \sum_{i=m}^{n} a_i+\sum_{i=m}^{n} b_i\,.\end{aligned}$$

(d) Für eine konstante Zahl c gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} c &= \underbrace{c+c+\cdots+c}_{(n-m+1)\text{-Mal}}\\ &= (n-m+1)\cdot c\end{aligned}$$

Aufgabe 6.
Verwenden Sie die Rechenregeln, um die folgenden Summen möglichst kompakt und ohne Summenzeichen aufzuschreiben.

(a) $\sum_{i=1}^{n}(2i)$ (b) $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2$ (c) $\sum_{i=-n}^{n} i$

Hinweis: In der mgli, haben wir die Gausssche Summenformel (Kleiner Gauss) bewiesen:

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

Produktschreibweise

Analog zum Summenzeichen ist das Produktzeichen definiert:

Definition (Produktschreibweise): Seien $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ beliebige Zahlen. Das Produkt dieser Zahlen lässt sich abgekürzt mit dem **Produktzeichen** $\prod$ schreiben als

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{i=m}^{n} a_i \,.$$

Beispiele:

(a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \quad (= 5!)$

(b) $\displaystyle\prod_{i=0}^{3} 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

Rechenregeln für die Produktschreibweise

(a) Für eine konstante Zahl c gilt:

$$\prod_{i=m}^{n} (c \cdot a_i) = (c \cdot a_m) \cdot \cdots \cdot (c \cdot a_n) = c^{n-m+1} \cdot \prod_{i=m}^{n} a_i$$

(b) Produkte lassen sich aufteilen:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot \cdots \cdot a_k \cdot a_{k+1} \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{i=m}^{k} a_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_i \,.$$

(c) Für das Produkt von zwei Produkten gilt:

$$\prod_{i=m}^{n} (a_i \cdot b_i) = (a_m \cdot b_m) \cdot \cdots \cdot (a_n \cdot b_n) = (a_m \cdot \cdots \cdot a_n) \cdot (b_m \cdot \cdots \cdot b_m) = \prod_{i=m}^{n} a_i \cdot \prod_{i=m}^{n} b_i \,.$$

(d) Für eine konstante Zahl c gilt:

$$\prod_{i=m}^{n} c = \underbrace{c \cdot c \cdot \cdots \cdot c}_{(n-m+1)\text{-Mal}} = c^{n-m+1}$$

Aufgabe 7.
Berechnen Sie die folgenden Produkte.

(a) $\displaystyle\prod_{i=0}^{4} (i+2)$

(b) $\displaystyle\prod_{i=0}^{100} i^2$

Aufgabe 8.
Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit.

(a) $a_n = \frac{2}{n}$

(b) $b_n = \frac{2\cdot(-1)^n}{n}$

(c) $c_n = \frac{1-2n}{n}$

(d) $d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(e) $e_n = \frac{n+1}{n}$

(f) $f_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Aufgabe 9.
Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Folge $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

- streng monoton wachsend?
- streng monoton fallend?

Aufgabe 10.
Beweisen Sie, dass für zwei beschränkte Folgen a_n und b_n auch die Folge $c_n = a_n + b_n$, welche der Summe der beiden ursprünglichen Folgen entspricht, beschränkt ist.

Definition (alternierende Folge): Eine Folge heisst **alternierend**, falls das Vorzeichen von Folgenglied zu Folgenglied wechselt.

Beispiel:

- Die Folge der Quadratzahlen $a_n = n^2$ sowie auch die Folge $b_n = \frac{1}{n}$ sind nicht alternierend.
- Die Folgen $c_n = (-1)^n$ und $d_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ sind beide alternierend.

Aufgabe 11.
Geben Sie für die folgenden rekursiv definierten Zahlenfolgen jeweils eine explizite Darstellung an und untersuchen Sie deren Eigenschaften (monoton, beschränkt, alternierend).

(a) $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, $a_1 = 1$

(b) $b_n = -\frac{b_{n-1}}{2}$, $b_1 = 1$

(c) $c_n = -2c_{n-1}$, $c_1 = 1$

(d) $d_n = (d_{n-1})^3$, $d_1 = -1$

(e) $e_n = (e_{n-1})^3$, $d_1 = -\frac{1}{3}$

(f) $f_n = (f_{n-1})^3$, $f_1 = -2$

Teil 2

Aufgabe 12.
Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung gilt:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|\,.$$

Aufgabe 13.
Bestimmen Sie, ob die folgenden Folgen konvergent sind und berechnen Sie allenfalls deren Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{2}{n+2}$

(b) $b_n = \frac{n}{n+3}$

(c) $c_n = \frac{n+3}{n}$

(d) $d_n = \frac{n-1-\frac{1}{n}}{n^2+n+1}$

(e) $e_n = \frac{1-n+n^2}{n(n+1)}$

(f) $f_n = \frac{1-n+n^3}{n(n+1)}$

(g) $g_n = \frac{1-n+n^3}{n(n+1)} - n$

(h) $h_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Hinweis: Versuchen Sie mit Hilfe der 3. Binomischen Formel die Wurzel zu eliminieren.

Was lässt sich allgemein über die Konvergenz von Quotienten, bei denen der Zähler und der Nenner Polynome sind, feststellen?

Aufgabe 14.
Lesen Sie den Text aus Prof. Nosenix Trickkiste Wie Heron die Wurzel zog und lösen Sie die dazugehörige Aufgabe.

42 

Prof. Nosenix' Trickkiste

Historische Verfahren - zeitgemäß aufbereitet

Wie Heron die Wurzel zog

(Heron von Alexandrien lebte 60 n. Chr.)

Er dachte sich: »Wenn ich doch die Wurzel aus 50 ziehen will, ist das nichts anderes als wenn ich die Seitenlänge eines Quadrats suche, das einen Flächeninhalt von 50 Einheiten (cm^2, dm^2, m^2) hat. Ich fange ganz gemütlich mit einem Rechteck an, das diesen Flächeninhalt hat und nähere mich dann allmählich einem Quadrat.«

Mit diesem Rechteck fing er an:

$b_0 = 1$

Flächeninhalt A = 50 $a_0 = 50$

Diese ersten Werte verfeinerte er, indem er den Mittelwert bildete:

$$a_1 = \frac{50 + 1}{2}$$

$$a_1 = 25{,}5$$

A = 50

$a_1 = 25{,}5$

Wie groß muss dann b_1 sein?

Klar doch, $b_1 = 1{,}960784314$,
weil 50 : 25,5 ungefähr 1,960784314 ergibt.

Er bildete wieder den Mittelwert:

$$a_2 = \frac{25{,}5 + 1{,}960784314}{2}$$

$$a_2 = 13{,}73039216$$

A = 50

$a_2 = 13{,}73039216$

Wie groß muss dann b_2 sein?

Klar doch, $b_2 = 3{,}641556586$,
weil 50 : 13,73039216 ungefähr 3,641556586 ergibt.

Er bildete wieder den Mittelwert:

$$a_3 = \frac{13{,}73039216 + 3{,}641556586}{2}$$

$$a_3 = 8{,}685974373$$

A = 50

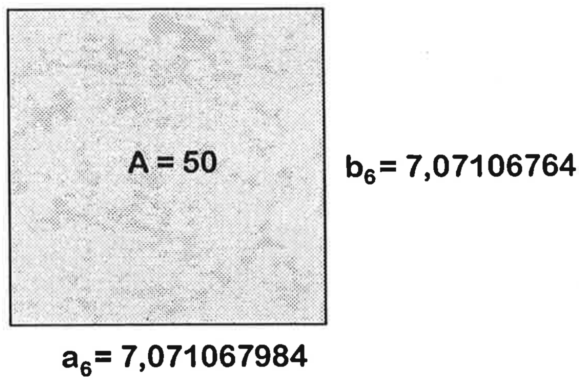
$a_3 = 8{,}685974373$

Wie groß muss dann b_3 sein?

Klar doch, $b_3 = 5{,}756406578$
weil 50 : 8,685974373 ungefähr 5,756406578 ergibt.

Wie Heron die Wurzel zog

Wenn du dieses Verfahren weiterführst, kommst du beim nächsten Versuch schon auf die Werte 7,221190476 bzw. 6,924066076. Die nächste Mittelwertbildung ergibt 7,072628276 bzw. 7,069507692. Ein weiterer Versuch bringt dann schon eine ganz passable Lösung mit 7,071067984 und 7,07106764. Wie du siehst, nähern sich die Werte sehr schnell an. Die ersten 6 Nachkommastellen sind schon identisch. Du kannst dir vorstellen, dass man, wenn man lange genug weitermacht, eine hohe Genauigkeit erzielt. Heron hatte somit »die Wurzel aus 50 gezogen«.



Klar, dass Heron sich nicht jedesmal ein Rechteck aufzeichnete. Er machte sich eine kleine Tabelle, in der er seine Näherungswerte eintrug:

Ziehe die Wurzel aus 50			
a_0	50	b_0	1
a_1	25,5	b_1	1,960784314
a_2	13,73039216	b_2	3,641556586
a_3	8,685974373	b_3	5,756406578
a_4	7,221190476	b_4	6,924066076
a_5	7,072628276	b_5	7,069507692
a_6	7,071067984	b_6	7,07106764

So, jetzt bist du sicherlich in der Lage, ein paar »Würzelchen« auf Heronsche Art zu ziehen.

44 

Prof. Nosenix' Trickkiste

Historische Verfahren - zeitgemäß aufbereitet

Wie Heron die Wurzel zog

Jetzt bist du dran! Schaffst du es, wie Heron die Wurzel zu ziehen? Logo, dass du deinen Taschenrechner einsetzen darfst. Mache dir aber klar, dass Heron seine Rechnungen ohne technische Hilfsmittel schaffte.

Ziehe die Wurzel aus 84			
a_0	7	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	
a_4		b_4	

Ziehe die Wurzel aus 39			
a_0	5	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	
a_4		b_4	

Ziehe die Wurzel aus 135			
a_0	10	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	
a_4		b_4	

Ziehe die Wurzel aus 441			
a_0	15	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	
a_4		b_4	

Ziehe die Wurzel aus 4			
a_0	0,5	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	
a_4		b_4	
a_5		b_5	
a_6		b_6	

Ziehe die Wurzel aus 561			
a_0	20	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	
a_4		b_4	

Ziehe die Wurzel aus 751			
a_0	25	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	

Ziehe die Wurzel aus 1654			
a_0	40	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	

Ziehe die Wurzel aus 6892			
a_0	80	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	

Ziehe die Wurzel aus 1000			
a_0	25	b_0	
a_1		b_1	
a_2		b_2	
a_3		b_3	
a_4		b_4	

Na, so schwer war´s ja auch nicht. Und Spaß gemacht hat es außerdem, oder?