Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Fachhochschule
Nordwestschweiz

Übungsblatt 6

Die Ableitungsregeln

Aufgabe 1.
Beweisen Sie die verallgemeinerte Produktregel, indem Sie die einfache Produktregel mehrfach auf geeignete Weise anwenden.

Verallgemeinerte Produktregel: Es sei $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ für differenzierbare Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$. Dann lautet die Ableitung

$$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \ldots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n'(x)$$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen. Welche Regeln werden jeweils verwendet?

(a) $f(x) = x^a$

(b) $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

(e) $f(x) = \sqrt[n]{x^2}$

Aufgabe 3.
Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen. Welche Regeln werden jeweils verwendet?

(a) $f(x) = 3x^5 + 2x^2 + 1$

(b) $f(x) = \dfrac{7}{6} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{x}{a^2}} + \sqrt{a}$

(c) $f(x) = (a + x^2) \cdot (x - a)$

(d) $f(x) = (x + x^2) \cdot \sqrt{x}$

Aufgabe 4.
Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen. Welche Regeln werden jeweils verwendet?

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 2}$

(b) $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

Aufgabe 5.
Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen. Welche Regeln werden jeweils verwendet?

(a) $f(x) = \left(\sqrt{x}+1\right)^2$

(b) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1+x}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

(d) $f(x) = \dfrac{a^2 - x^2}{\sqrt{x}\cdot(a-x)}$

(e) $f(x) = \dfrac{ax - \sqrt{ax}}{\sqrt{x}}$

(f) $f(x) = \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^3$

Aufgabe 6.
Seien zwei Funktionen $f_1(x) = x^3 + 1$ und $f_2(x) = (x+4)^2$ gegeben. In welchen Punkten, welche zu gleichen x-Werten gehören, verlaufen die Tangenten an die beiden Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ parallel?

Aufgabe 7.
Bestimmen Sie auf der Kurve $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 5$ diejenigen Punkte, in denen die Steigung der Kurve

(a) 0

(b) 4

(c) -1

ist.

Aufgabe 8.
Gibt es Parameter a und b, so dass die Funktion f, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{für } x \leq 2 \\ -x^2 + bx + a & \text{für } x > 2 \end{cases},$$

bei $x = 2$ stetig und differenzierbar ist?

Aufgabe 9.
Welche Parabel mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat im Punkt $(2 \mid 2)$ die Steigung -4 und geht durch den Punkt $(5 \mid 8)$?

Aufgabe 10.
In welchen Punkten der Kurve $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$ ist die Tangente parallel zur Geraden $g(x) = -6x+1$?

Tangente in einem Punkt an eine Funktion bestimmen:

Es sei $P(x_0 \mid y_0)$ ein Punkt auf der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$. Wir wissen, dass die Tangente $y = mx + q$ an die Kurve durch den Punkt P die Steigung $m = f'(x_0)$ besitzt. Somit erhält man für die Tangentengleichung

$$y = f'(x_0) \cdot x + q.$$

Um q zu bestimmen setzt man den Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ ein:

$$y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + q$$

und löst nach q auf:

$$q = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Somit erhält man die Tangentengleichung

$$y = f'(x_0) \cdot x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Durch Umformung dieser Gleichung erhält man eine Formel, die man sich gut merken kann. Es handelt sich um die sogenannte **Punkt-Steigungs-Form einer Geraden**:

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0) \cdot x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0 \\ y - y_0 &= f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 \\ y - y_0 &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ \frac{y - y_0}{x - x_0} &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Allgemein gilt:
Punkt-Steigungs-Form einer Geraden:
Die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ mit der Steigung m lautet:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

Aufgabe 11.
Bestimmen Sie die Gerade durch den Punkt $P(3 \mid 8)$ mit der Steigung $m = 4$.

Aufgabe 12.
Gegeben seien die Gerade $y = 3x - 1$ und die Parabel $y = x^2 - 2x - 1$. Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten. Legen Sie die Tangenten an die Parabel in diesen zwei Punkten. Bestimmen Sie nun den Schnittpunkt dieser zwei Tangenten.