Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Fachhochschule Nordwestschweiz

Übungsblatt 5

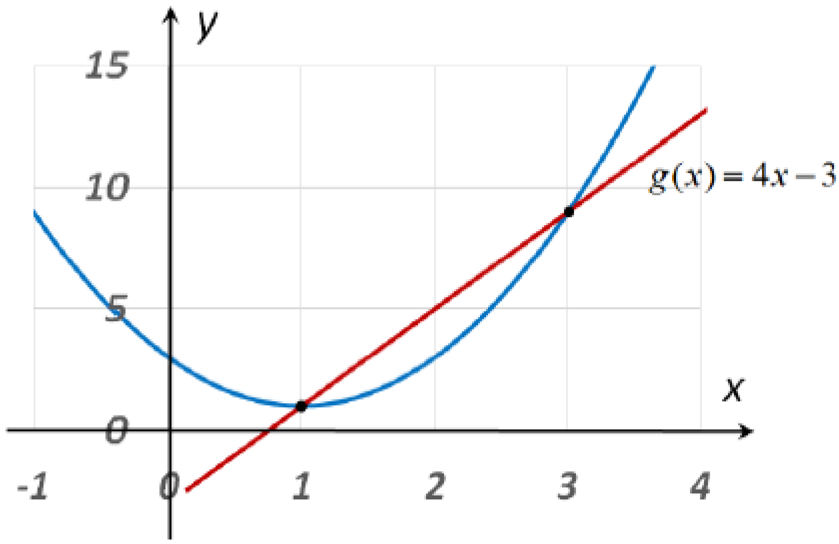
Lösungen

Lösung 1.

(a) Bestimmung der Punkte durch Einsetzen der x-Werte in die Funktionsgleichung $f_1(x)$: $P_0(1|1)$ und $P_1(3|9)$

Steigung der Sekante: $m = \dfrac{f_1(x_1) - f_1(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{9-1}{3-1} = 4$

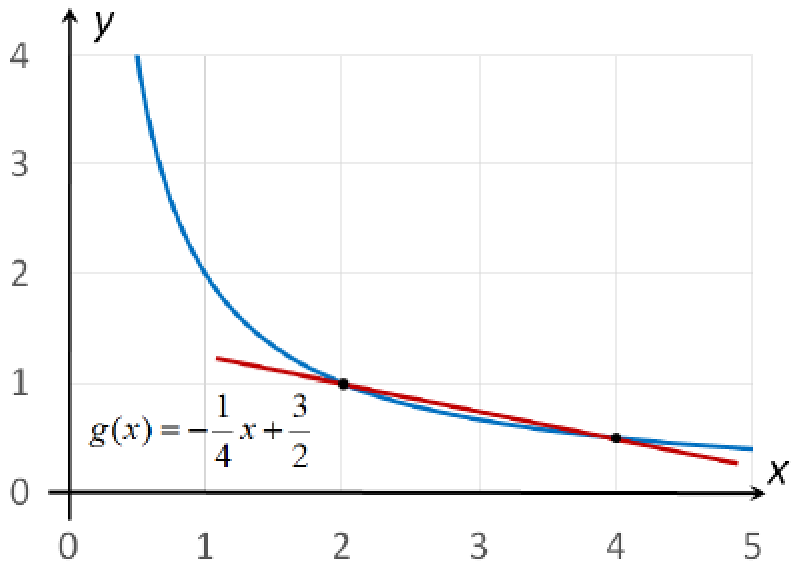
Geradengleichung der Sekante: $g(x) = m(x - x_0) + f_1(x_0) = 4(x-1) + 1 = 4x - 3$



(b) Bestimmung der Punkte durch Einsetzen der x-Werte in die Funktionsgleichung $f_2(x)$: $P_0(2|1)$ und $P_1(4|0.5)$

Steigung der Sekante: $m = \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0.5 - 1}{4 - 2} = -\frac{1}{4}$

Geradengleichung der Sekante: $g(x) = m(x - x_0) + f_2(x_0) = -\frac{1}{4}(x-2) + 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

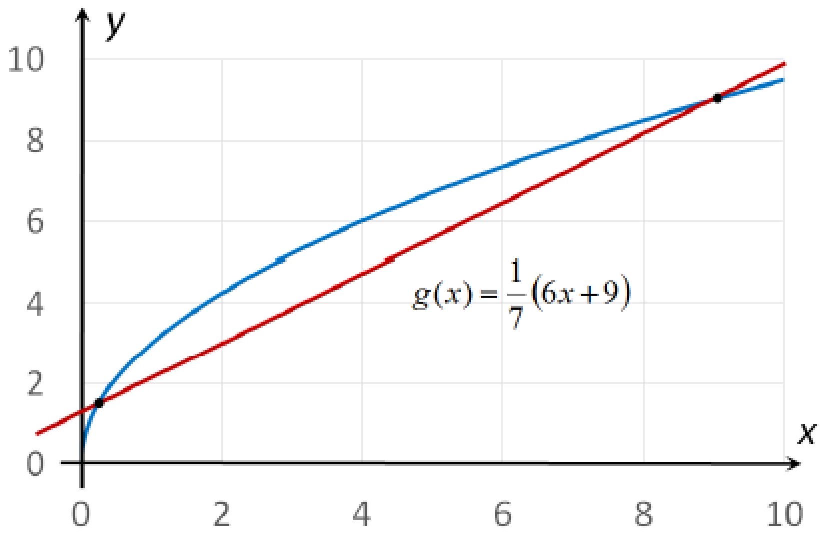


(c) Bestimmung der Punkte durch Einsetzen der x-Werte in die Funktionsgleichung $f_3(x)$: $P_0(0.25|1.5)$ und $P_1(9|9)$

Steigung der Sekante: $m = \dfrac{f_3(x_1) - f_3(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{9 - 1.5}{9 - 0.25} = \dfrac{6}{7}$

Geradengleichung der Sekante:

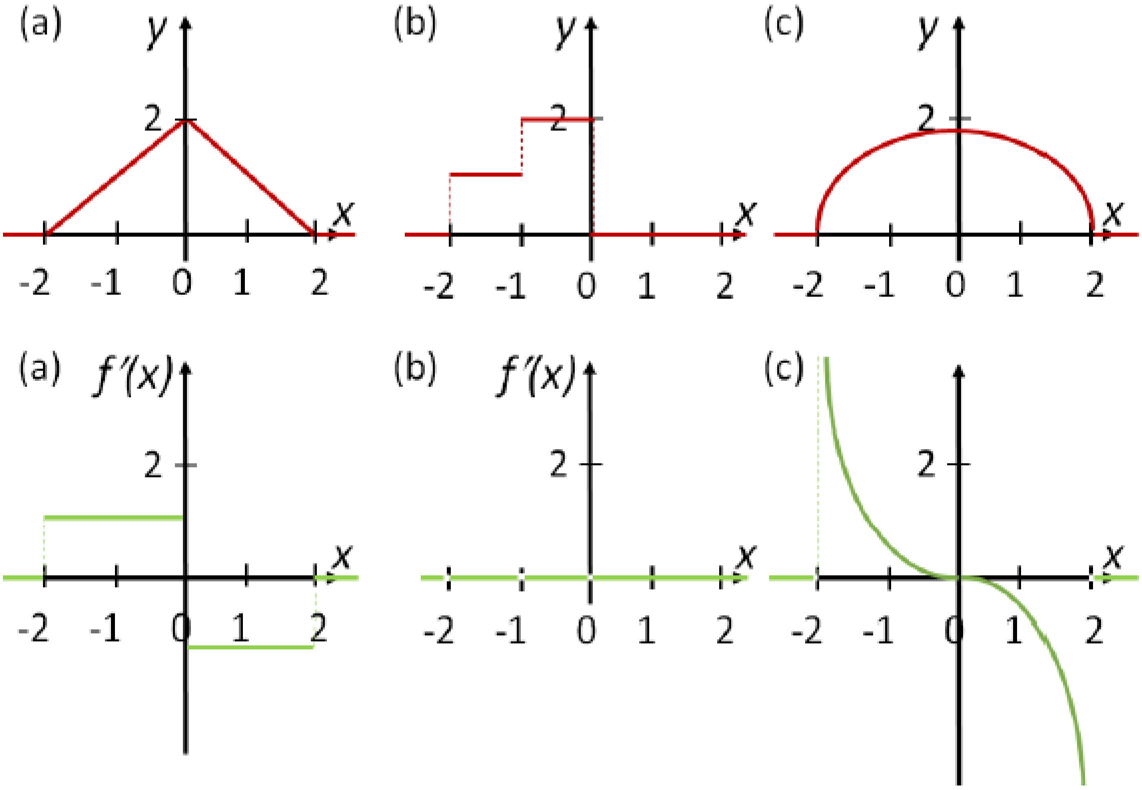
$$g(x) = m(x - x_0) + f_1(x_0) = \frac{6}{7}(x - 0.25) + 1.5 = +\frac{1}{7}(6x + 9)$$



Lösung 2. (a) Die Funktion ist an den Knickstellen $(x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2)$ nicht differenzierbar. Im ansteigenden Bereich ist die Steigung m=1, im absteigenden Bereich beträgt die Steigung m=-1.

(b) Die Funktion ist an den Sprungstellen $(x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0)$ nicht differenzierbar. Ansonsten ist die Steigung überall null, d.h. auch die Ableitung ist null.

(c) Die Funktion besitzt Knickstellen bei $(x_1 = -2, x_2 = 2)$. Dort ist die Funktion nicht differenzierbar. AuSSerdem hat die Funktion an diesen Stellen eine senkrechte Tangente. Im Bereich $(-2 < x < 0)$ nimmt die Steigung von sehr groSSen Werten bis zur Steigung $m = 0$ bei $x = 0$ ab. Im Bereich $(0 < x < 2)$ nimmt die Steigung von null bei $x = 0$ bis zu sehr groSSen negativen Werten ab. Ausserhalb dieser Bereiche ist die Steigung null.



Lösung 3.

(a) Anschaulich ist klar, dass die Steigung dieser Geraden 5 ist, die Ableitungsfunktion also $f(x) = 5$ sein sollte.

Rechnerisch würden wir dieses Resultat wie folgt bekommen:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right) &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{(5\cdot(x_0+\Delta x)+7)-(5\cdot x_0+7)}{\Delta x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{5x_0+5\Delta x+7-5x_0-7}{\Delta x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{5\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5\end{aligned}$$

(b) Ersetzen wir in der Rechnung der Aufgabe (a) jeweils die 5 durch m und die 7 durch q, bekommen wir für die Ableitungsfunktion:

$$f(x) = m$$

(c) Auch bei dieser linearen Funktion ist klar, dass die Steigung dieser Geraden 0 ist, die Ableitungsfunktion also $f(x) = 0$ sein sollte.

Rechnerisch würden wir dieses Resultat wie folgt bekommen:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{4-4}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{0}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

(d) Ersetzen wir in der Rechnung der Aufgabe (c) die 4 durch c, bekommen wir für die Ableitungsfunktion:

$$f(x) = 0$$

Lösung 4.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x)) - (x_0^2 - 2x_0)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x - x_0^2 + 2x_0}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta x (2x_0 + \Delta x - 2)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x - 2) \\
&= 2x_0 - 2
\end{aligned}$$

und damit ist

$$f(x) = 2x - 2\,.$$

Wie wir in Aufgabe 3 gesehen haben, ist somit die Ableitung dieser Ableitung, also die zweite Ableitung von $f(x)$, gegeben durch

$$f'' = (f(x)) = (2x - 2) = 2\,.$$

(b) Die Steigung der Tangente an den Punkt $(8 \mid 48)$ ist $f(8) = 2 \cdot 8 - 2 = 14$. Somit ist die Gleichung für die Tangente gegeben durch

$$y = 14x + q\,.$$

Nun ist noch der y-Achsenabschnitt q zu bestimmen, indem für x und y die Koordinaten des Punktes $(8 \mid 48)$ in die Gleichung eingesetzt werden

$$48 = 14 \cdot 8 + q \iff q = 48 - 14 \cdot 8 = 48 - 112 = -64\,.$$

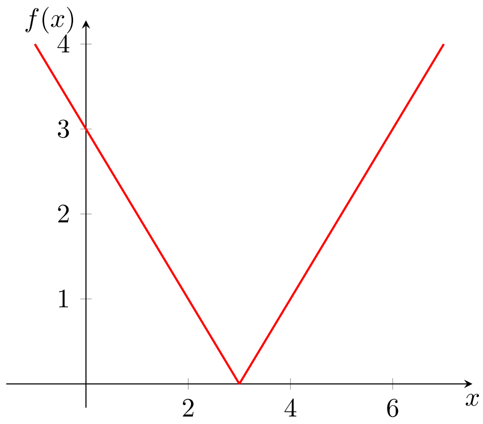
Die Gleichung der Tangente ist somit $y = 14x - 64$.

Lösung 5.

Mit Hilfe der Definition des Betrags bekommen wir

$$f(x) = |x - 3| = \begin{cases} x - 3\,, & \text{falls } x \geq 3 \\ -(x - 3)\,, & \text{falls } x < 3 \end{cases}.$$

Grafisch bedeutet das:



Die Funktion hat also bei $x = 3$ einen Knick und ist somit an diesem Punkt nicht differenzierbar. Wir können aber die Ableitungsfunktion links und rechts davon berechnen:

$x > 0$ und $\Delta x > 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} \left(\frac{((x_0 + \Delta x) - 3) - (x_0 - 3)}{\Delta x} \right)$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} \left(\frac{x_0 + \Delta x - 3 - x_0 + 3}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} \left(\frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} 1 = 1$$

$x < 0$ und $\Delta x < 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} \left(\frac{(-(x_0 + \Delta x) + 3) - (-x_0 + 3)}{\Delta x} \right)$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} \left(\frac{-x_0 - \Delta x + 3 + x_0 - 3}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} \left(\frac{-\Delta x}{\Delta x} \right)$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x>0)}} (-1) = -1$$

Das heisst, dass die Ableitungsfunktion wie folgt definiert ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x > 0 \\ -1\,, & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$