Serie 7

Aufgabe 1. Sie haben bei einem Spiel in jeder Runde eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $p = 0.49$. Wenn Sie gewinnen, erhalten Sie einen Franken, andernfalls müssen Sie einen Franken bezahlen. Sie starten mit $N = 50$ Franken und hören auf, wenn Sie 0 Franken besitzen oder bei $T = 100$ Franken angekommen sind. Erstellen Sie (mit Matlab) eine geeignete Übergangsmatrix und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dass Spiel mit einem Gewinn beenden.

Lösung.
```
T=100;
N=50;
p=0.49;
A=zeros(T+1,T+1);
A(1,1)=1;
A(T+1,T+1)=1;
for i=2:T
    A(i,i-1)=1-p;
    A(i,i+1)=p;
end

s=zeros(1,T+1);
s(N+1)=1;

R=s*A^100000
R(T+1)
```

(Alternative Lösung: Es sei P_N die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, wenn man N Franken hat. Dann gilt die Rekursionsformel: $P_N = pP_{N+1} + (1-p)P_{N-1}$ und $P_0 = 0$, $P_T = 1$. Dies ist eine lineare Rekursionsgleichung mit konstanten Koeffizienten, die man wie in mgli (für $p \neq 0.5$) zu $P_N = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^T - 1}$ lösen kann.)

Aufgabe 2. Ein Call-Center hat zwei Telefonleitungen. Die Anzahl der belegten Telefonleitungen soll durch eine homogene Markov-Kette modelliert werden. Die Zustände seien hierbei:

1	keine Leitung belegt
2	eine Leitung belegt
3	zwei Leitungen belegt

Die Übergangmatrix sei $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Begründen Sie, dass eine Grenzverteilung existiert und berechnen Sie diese.

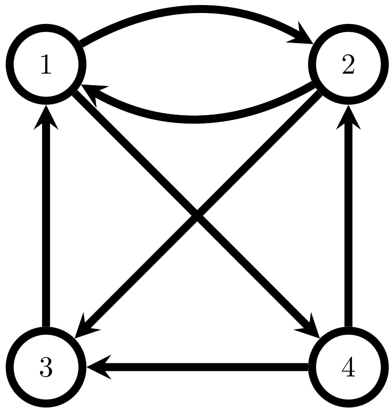
Lösung. P^2 hat nur positive Einträge, es existiert also eine Grenzverteilung (p_1, p_2, p_3). Für diese muss gelten $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ und $(p_1, p_2, p_3) \cdot P = (p_1, p_2, p_3)$. Dies führt auf das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} p_1 & + & p_2 & + & p_3 & = & 1 \\ -0.3p_1 & + & 0.2p_2 & + & 0.1p_3 & = & 0 \\ 0.3p_1 & - & 0.5p_2 & + & 0.4p_3 & = & 0 \\ & & 0.3p_2 & - & 0.5p_3 & = & 0 \end{array}$$

mit der Lösung $p_1 = \frac{13}{37}$, $p_2 = \frac{15}{37}$, $p_3 = \frac{9}{37}$.

Nach einer Einschwingphase sind also etwa zu $p_3 \approx 33.3\%$ beide Leitungen belegt.

Aufgabe 3. Gegeben sei folgendes Netzwerk:



Ein Internetsurfer legt folgendes Verhalten an den Tag: Mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$ wählt er zufällig eine Seite des kompletten Netzes, und mit Wachrscheinlichkeit α wählt er einen der Links auf der Seite, auf der er sich gerade befindet, zufällig aus. Geben Sie die Übergangsmatrix an und berechnen Sie die Grenzverteilung für $\alpha = 1$.

Bemerkung: Dies ist die Funktionsweise des (ursprünglichen) PageRank-Algorithmus von Google, wobei die Webseiten gemäss ihrer Auftrittswahrscheinlichkeit gerankt werden. Die Erfinder des PageRank-Algorithmus, Sergey Brin und Larry Page, wählten $\alpha = 0.85$.

Lösung. $\begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{4} & \frac{1-\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} & \frac{1-\alpha}{4} & \frac{1-\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1-\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} & \frac{1-\alpha}{4} & \frac{1-\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} & \frac{1-\alpha}{4} \\ \frac{1-\alpha}{4} + \alpha & \frac{1-\alpha}{4} & \frac{1-\alpha}{4} & \frac{1-\alpha}{4} \\ \frac{1-\alpha}{4} & \frac{1-\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} & \frac{1-\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} & \frac{1-\alpha}{4} \end{pmatrix}$

Für $\alpha = 1$ ergibt sich $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Da etwa jeder Eintrag von P^5 grösser 0 ist, existiert eine Grenzverteilung (p_1, p_2, p_3, p_4). Für diese gilt $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ und $(p_1, p_2, p_3, p_4)P =$

(p_1, p_2, p_3, p_4), woraus sich das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
p_1 & + & p_2 & + & p_3 & + & p_4 & = & 1 \\
-p_1 & + & \frac{1}{2}p_2 & + & p_3 & & & = & 0 \\
\frac{1}{2}p_1 & - & p_2 & & & + & \frac{1}{2}p_4 & = & 0 \\
& & \frac{1}{2}p_2 & - & p_3 & + & \frac{1}{2}p_4 & = & 0 \\
\frac{1}{2}p_1 & & & & & - & p_4 & = & 0
\end{array}$$

mit der Lösung $p_1 = 8/23$, $p_2 = 6/23$, $p_3 = 5/23$ und $p_4 = 4/23$ ergibt.

Aufgabe 4. Angenommen, in einem Land gibt es vier Krankenkassen, nennen wir sie K_1, K_2, K_3 und K_4. Alle Verträge gelten nur für ein Jahr. Jeweils im November werden die Versicherten aufgefordert, die Verträge zu erneuern oder eine andere Versicherung zu wählen. Das Kundenverhalten wurde in Umfragen ermittelt. Die Ergebnisse sind mit einer Matrix S dargestellt.

$$S = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.05 & 0.1 & 0.25 \\ 0.1 & 0.7 & 0.15 & 0.05 \\ 0.1 & 0.05 & 0.8 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 & 0.1 & 0.75 \end{pmatrix}$$

1. Welches Kundenverhalten beschreibt die Zahl 0.25 in der Matrix S?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der heute bei K_4 versichert ist,
   (a) dieser Versicherung vier auf einander folgende Jahre lang treu bleibt?
   (b) nach vier Jahren wieder zu den Kunden dieser Versicherung zählt?
3. Welche Bedeutung hat die Matrix S^{20} im Rahmen dieses Modells?
4. Welche prozentuale Verteilung der Kunden auf die Versicherungen $K_1, \ldots, K_4$ sagt das Modell für die ferne Zukunft voraus?
5. Inwiefern ist das Modell nicht realistisch, welche Tatsachen blendet es aus?

Lösung. 1. 25% aller Kunden von K_1 wechseln im Jahr zu K_4.

2. (a) $0.75^4 \approx 0.361$
   (b) Für $M = S^4$ gilt $M_{44} = 0.4068$
3. S^{20} beschreibt den Zustandswechsel über 20 Zeitschritte.
4. $K_1 \approx 0.1719$, $K_2 \approx 0.1830$, $K_3 \approx 0.3638$ und $K_4 \approx 0.2813$.
5. Die zeitlich konstante Matrix S vernachlässigt z.B.
   - Demografische Entwicklung (z.B. Überalterung)
   - Ökonomische Entwicklung (etwa neue Angebote der Versicherungen)
   - Geburten und Todesfälle, Migration (d.h. Wechsel der Versicherten durch Gründe, die in S prinzipiell nicht erfasst werden.)

Aufgabe 5. Geben Sie eine Markov-Kette mit zwei Zuständen und eine Übergangsmatrix an, so dass keine vom Startwert unabhängige Grenzverteilung existiert.

Lösung. Etwa $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hier ist $P^n = P$, also $\pi_n = \pi_0$, d.h. die Verteilung nach n Schritten entspricht der Startverteilung.

Aufgabe 6. Eine Autovermietung hat ihre Standorte an den drei Flughafen einer Region in X, Y , Z. Die Kunden beziehen ihr Auto an einem beliebigen Standort und können es an jedem der drei Standorte abgeben. Die Bewegung der Mietwagen von Tag zu Tag zwischen den Standorten wird als Markowprozess betrachtet. Angenommen, die zugehörige Matrix sei

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

1. Angenommen, die Firma hat heute 10 Autos in X, 22 Autos in Y und 48 Autos in Z. Wie verteilen sich diese Autos nach einer Woche auf die drei Standorte?

2. Wie verteilen sich die Autos nach langer Zeit auf die drei Standorte?

Lösung.
1. $(10, 22, 48) \cdot A^7 = (31.8281, 18.3701, 29.8018)$

2. Da alle Einträge von A positiv sind, existiert eine Gleichgewichtsverteilung. Um diese zu berechnen, lösen wir:
$$\begin{array}{rcrcrcl} p_1 & + & p_2 & + & p_3 & = & 1 \\ -0.3p_1 & + & 0.2p_2 & + & 0.2p_3 & = & 0 \\ 0.1p_1 & - & 0.5p_2 & + & 0.2p_3 & = & 0 \\ 0.2p_1 & + & 0.3p_2 & - & 0.4p_3 & = & 0 \end{array}$$
zu $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.2286$ und $p_3 = 0.3714$. Wenn man diese Prozentzahlen mit 80 (der totalen Anzahl Autos der Firma) multipliziert, erhält man die absoluten Anzahlen.

Aufgabe 7. Eine Reparaturwerkstatt bearbeitet 2 Motortypen M_1 und M_2. Die Reparatur von M_1 dauert zwei Tage, die von M_2 dauert einen Tag. An jedem Morgen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein M_1-Motor repariert werden muss $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein M_2-Motor repariert werden muss, ist $\frac{1}{2}$. Reparaturaufträge, die die Werkstatt nicht fertigstellen kann, werden anderweitig vergeben. Ist ein Arbeitstag der erste Reparaturtag eines M_1-Motors, dann wird jede neue Arbeit für den nächsten Tag zurückgewiesen. An jedem anderen Tag wird jeder Motortyp (jeweils nur eine Maschine) zur Reparatur angenommen.

Zwei Strategien sind möglich:

1. Die Reparatur von M_1

2. Die Reparatur von M_2

Welche Strategie ist besser? (D.h. bei welcher Strategie ist die Werkstatt mehr ausgelastet?)

Geben Sie für beide Strategien Übergangsmatrizen an (überlegen Sie sich dazu, welche Zustände möglich sind) und berechnen sie die Grenzverteilung. Vergleichen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten, dass die Werkstatt keine Arbeit hat.

Lösung. Es sind folgende Zustände möglich:

1	keine Arbeit
2	erster Reparaturtag eines M_1-Motors
3	zweiter Reparaturtag eines M_1-Motors
4	Reparaturtag eines M_2-Motors

Als Übergangsmatrix zur ersten Strategie ergibt sich

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Als Übergangsmatrix zur zweiten Strategie ergibt sich

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Mit Matlab überprüft man leicht, dass P_1^3 und P_2^3 jeweils nur positive Einträge haben. Damit sind die zugehörigen HMK regulär und es existiert eine Grenzverteilung.

Für die Grenzverteiltung $(p_1, p_2, p_3, p_4$ im ersten Fall muss gelten $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ sowie $(p_1, p_2, p_3, p_4) \cdot P_1 = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, woraus sich das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} p_1 & + & p_2 & + & p_3 & + & p_4 & = & 1 \\ -\frac{2}{3}p_1 & & & + & \frac{1}{3}p_3 & + & \frac{1}{3}p_4 & = & 0 \\ \frac{1}{3}p_1 & - & p_2 & + & \frac{1}{3}p_3 & + & \frac{1}{3}p_4 & = & 0 \\ & & p_2 & - & p_3 & & & = & 0 \\ \frac{1}{3}p_1 & & & + & \frac{1}{3}p_3 & - & \frac{2}{3}p_4 & = & 0 \end{array}$$

ergibt.

Man erhält als Lösung $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$, womit die Werkstatt an $p_1 = 25\%$ aller Tage keine Arbeit hat.

Für die Grenzverteiltung $(p_1, p_2, p_3, p_4$ im zweiten Fall muss gelten $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ sowie

$(p_1, p_2, p_3, p_4) \cdot P_2 = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, woraus sich das LGS

$$\begin{array}{lclclclcl} p_1 & + & p_2 & + & p_3 & + & p_4 & = & 1 \\ -\frac{2}{3}p_1 & & & + & \frac{1}{3}p_3 & + & \frac{1}{3}p_4 & = & 0 \\ \frac{1}{6}p_1 & - & p_2 & + & \frac{1}{6}p_3 & + & \frac{1}{6}p_4 & = & 0 \\ & & p_2 & - & p_3 & & & = & 0 \\ \frac{1}{2}p_1 & & & + & \frac{1}{2}p_3 & - & \frac{1}{2}p_4 & = & 0 \end{array}$$

ergibt.

Man erhält als Lösung $p_1 = \frac{2}{7}$, $p_2 = \frac{1}{7}$, $p_3 = \frac{1}{7}$ und $p_4 = \frac{3}{7}$, womit die Werkstatt an $p_1 \approx 28.6\%$ keine Arbeit hat.

Damit ist Strategie 1 besser.

Aufgabe 8. Wir betrachten eine kleines Postamt in einem Dorf, wo im Schnitt 70 Personen (poissonverteilt) pro Tag ankommen. Im Schnitt (exponentialverteilt) dauert die Bedienung eines Kunden 6 Minuten. Das Postamt ist 10 Stunden geöffnet.

1. Was ist die mittlere Warteschlangenlänge?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit warten mehr als 2 Kunden?
3. Wie lange steht man im Schnitt in der Schlange?
4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wartet man länger als 20 Minuten?

Lösung. Wir modellieren dies als M|M|1|∞ System mit $\lambda = 7$ und $\mu = 10$. Es ist $C_1(0.7) = 0.7 \cdot 1/(1-0.7) \cdot \frac{1}{1+0.7 \cdot 1/(1-0.7)} = 0.7$.

1. $E(N_Q) = 0.7 \cdot 0.7/(1-0.7) = 1.6333$.
2. Es ist $p_0 = 1/(1+0.7/0.3) = 0.3$, also $P(N_Q > 2) = 1 - P(N_Q \leq 2) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p3 = 1 - 0.3 - 0.3 \cdot 0.7 - 0.3 \cdot 0.7^2 - 0.3 \cdot 0.7^3$. Wenn mehr als 2 Kunden warten, dann sind mindestens 4 Leute mîm System. (3 in der Schlange, eine Person in der Bearbeitung.)
3. $E(W_Q) = 0.7/(10-7) = 0.2333$ Stunden, also ca. 14 Minuten
4. $P(W_Q > \frac{1}{3}) = 0.7 \cdot e^{-3 \cdot \frac{1}{3}} = 0.2575$

Aufgabe 9. In einer Postfiliale dauert eine Bedienung am Schalter im Mittel eine Minute. Die Kunden erreichen die Filiale mit einer konstanten Rate von 5 Kunden pro Minute. Es gibt 6 Schalter und für alle Schalter zusammen eine (im Prinzip beliebig lange) Schlange.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle 6 Schalter frei?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss ein ankommender Kunde warten?
3. Wie lange ist die mittlere Warteschlangenlänge
4. Wie hoch ist die mittlere Wartezeit?

Lösung. Es gibt $s = 6$ Schalter, einen praktisch unendlich grossen Warteraum $c = \infty$, $\lambda = 5$ (Kunden pro Minute) und $\mu = 1$ (Kunde pro Minute).

1. Der Zustand 0 (kein Schalter besetzt) hat im eingeschwungenen Zustand die Wahrscheinlichkeit

$$p_0 = \left(\sum_{k=1}^{5} \frac{5^k}{k!} + \frac{5^6}{6! \cdot (1 - \frac{5}{6})} \right)^{-1} = \frac{8}{1765} = 0.45\%$$

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde warten muss, ist

$$C_s(\frac{\lambda}{\mu}) = p_0 \cdot \frac{1}{s!} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^s \cdot \frac{s}{s - \lambda/\mu} = 0.45\% \cdot \frac{1}{6!} \cdot 5^6 \cdot \frac{6}{6-5} = 59.02\%$$

3. Die erwartete Warteschlangenlänge ist

$$E(N_Q) = C_s(\frac{\lambda}{\mu}) \cdot \frac{\lambda/\mu}{s - \lambda/\mu} = 2.951$$

4. Die erwartete Wartezeit eines Kunden ist

$$E(W_Q) = \frac{C_s(\frac{\lambda}{\mu})}{\mu \cdot s - \lambda} = C_s(\frac{\lambda}{\mu}) = 59.02\%$$

Aufgabe 10. An einem Flughafen, der täglich zwischen 6 und 22 Uhr in Betrieb ist, kommen exponentiell verteilt im Mittel alle 6 Minuten Flugzeuge an. Der Flughafen besitzt nur eine Landebahn; die Landezeit ist ebenfalls exponentiell verteilt und beträgt im Mittel 5 Minuten. Während der Landung eines Flugzeuges werden weitere ankommende Flugzeuge in eine Warteschleife dirigiert. Jedes Flugzeug im System verursacht Kosten in Höhe von 10$ pro Minute.

1. Bestimmen Sie die mittlere Anzahl von Flugzeugen im Warteflug und im System während der Betriebszeit.

2. Bestimmen Sie die mittlere Wartezeit eines Flugzeuges vor der Landung.

3. Die Kosten und Unbequemlichkeiten könnten durch folgende Massnahmen verringert werden:

   M1: Mit Hilfe moderner Apparatur kann die Landezeit auf 4 Minuten pro Flug- zeug verringert werden. Dies würde Kosten in Höhe von 180.000$ pro Woche verursachen.

   M2: Eine zweite Landebahn kann gebaut werden. In diesem Falle würde die dann erforderliche Synchronisation der Landevorgänge die Landezeit auf 8 Minuten pro Flugzeug erhöhen. Die Massnahme M1 würde dann fallen gelassen werden.

   (a) Prüfen Sie, ob die Massnahme M1 zu Einsparungen führen würde.

   (b) Berechnen Sie die bei Vornahme der Massnahme M2 entstehende laufende jährliche Einsparung gegenüber dem gegenwärtigen Zustand.

   (c) Wie verändern sich die Zeiten in der Warteschlange in den Fällen M1 und M2 gegenüber der ursprünglichen Situation ?

Lösung. Es gibt zu Beginn $s = 1$ Landebahn, einen praktisch unendlich grossen Warteraum $c = \infty$, $\lambda = 10$ (Flugzeuge / Stunde) und $\mu = 12$ (Flugzeuge / Stunde). Damit ist $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$.

1. Wie bestimmen zuerst p_0 und $C_s(\frac{\lambda}{\mu})$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}}\right)^{-1} = \frac{1}{6}, \qquad C_s(\frac{\lambda}{\mu}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{5}{6}.$$

Die mittlere Anzahl der Flugzeuge in der Warteschleife / im Warteflug ist nun

$$E(N_Q) = C_s(\frac{\lambda}{\mu}) \cdot \frac{\lambda/\mu}{s - \lambda/\mu} = \frac{25}{6}.$$

Die mittlere Anzahl der Flugzeuge im Landeprozess ist

$$E(N_S) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}.$$

Insgesamt sind also durchschnittlich $E(N_Q) + E(N_S) = \frac{25}{6} + \frac{5}{6} = 5$ Flugzeuge im System.

2. Die erwartete Wartezeit eines Flugzeugs ist

$$E(W_Q) = \frac{C_1(\frac{5}{6})}{12 \cdot 1 - 10} = \frac{5}{12} = 25 \text{ Minuten}.$$

3. a) Die Betriebskosten ohne M1 sind:

$$7 \text{ Tage} \cdot 16 \text{ Stunden} \cdot 60 \text{ Minuten} \cdot 10 \cdot 5 \text{ Flugzeuge} = 336'000$$

Bei Umsetzung von M1 ergibt sich $\mu = 15$ und damit:

$$p_0 = 1/3, \quad C_1(\frac{4}{6}) = 2/3, \quad E(N_Q) = 4/3, \quad E(N_S) = 2/3.$$

Insgesamt sind dann also durchschnittlich $E(N_Q) + E(N_S) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$ Flugzeuge im System. Die Betriebskosten mit M1 sind:

$$7 \text{ Tage} \cdot 16 \text{ Stunden} \cdot 60 \text{ Minuten} \cdot 10 \cdot 2 \text{ Flugzeuge} = 134'400$$

Die Differenz ist $201'600$, mit der Massnahme M1 ist es also günstiger.

b) Mit M2 ist $s = 2$ (Landebahnen), $\lambda = 10$ (Flugzeuge / Stunde) und $\mu = \frac{60}{8}$ (Flugzeuge / Stunde) Es folgt

$$p_0 = 1/5, \quad C_2(\frac{8}{6}) = 16/30, \quad E(N_Q) = 16/15, \quad E(N_S) = 4/3.$$

Insgesamt sind dann also durchschnittlich $E(N_Q) + E(N_S) = \frac{16}{15} + \frac{4}{3} = \frac{12}{5}$ Flugzeuge im System. Die wöchentlichen Betriebskosten mit M2 sind:

$$7 \text{ Tage} \cdot 16 \text{ Stunden} \cdot 60 \text{ Minuten} \cdot 10 \cdot \frac{12}{5} \text{ Flugzeuge} = 161'280,$$

d.h. $174'720$ pro Woche günstiger.

4. Die erwartete Wartezeit ist $E(W_Q) = \frac{C_s(\frac{\lambda}{\mu})}{\mu \cdot s - \lambda}$.

In der ursprünglichen Situation ist $E(W_Q) = 25$ Minuten (siehe 2.)

Mit der Massnahme M1 ist $E(W_Q) = 8$ Minuten.

Mit der Massnahme M2 ist $E(W_Q) = 6.4$ Minuten.