Übungsblatt 7

Lösungen

Lösung 1.

(a) Die Ableitung $f'(x) = -24x + 8$ ist

- grösser Null für
$$-24x + 8 > 0 \iff 8 > 24x \iff \frac{1}{3} > x$$
und somit in diesem Bereich streng monoton wachsend,
- und kleiner Null für
$$-24x + 8 < 0 \iff 8 < 24x \iff \frac{1}{3} < x$$
und somit in diesem Bereich streng monoton fallend.

(b) Die Ableitung $g'(x) = \frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$ ist im ganzen Definitionsbereich, d. h. für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, grösser oder gleich Null, weil der Zähler ≥ 0 ist und der Nenner wegen der zweiten Potenz auch. Die Funktion also monoton steigend auf dem gesamten Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lösung 2.
Eine Funktion ist konkav, wenn die zweite Ableitung kleiner als 0 ist und sie ist konvex, wenn die zweite Ableitung grösser als 0 ist.

(a) Es ist $f'(x) = 3x^2 - 4x + 60$ und somit $f''(x) = 6x - 4$.

- $f''(x) < 0$ ist äquivalent zu
$$6x - 4 < 0 \iff 6x < 4 \iff x < \frac{2}{3}\,.$$
Somit ist die Funktion konkav für $x < \frac{2}{3}$.
- $f''(x) > 0$ ist äquivalent zu
$$6x - 4 > 0 \iff 6x > 4 \iff x > \frac{2}{3}\,.$$
Somit ist die Funktion konvex für $x > \frac{2}{3}$.

(b) Es ist $g'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + x^{-2}$ und somit

$$g''(x) = 0 + (-2) \cdot x^{-3} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}\,.$$

- $g''(x) < 0$ ist äquivalent zu

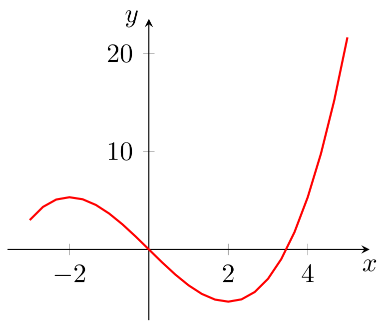
  $$-\frac{2}{x^3} < 0 \iff \frac{2}{x^3} > 0\,.$$

  Der Quotient $\frac{2}{x^3}$ ist grösser als Null, wenn der Nenner x^3 grösser als 0 ist, was für $x > 0$ erfüllt ist. Somit ist die Funktion konkav für $x > 0$.
- $g''(x) > 0$ ist äquivalent zu

  $$-\frac{2}{x^3} > 0 \iff \frac{2}{x^3} < 0\,.$$

  Der Quotient $\frac{2}{x^3}$ ist kleiner als Null, wenn der Nenner x^3 kleiner als 0 ist, was für $x < 0$ erfüllt ist. Somit ist die Funktion konvex für $x < 0$.

Lösung 3.
Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$:



Es gilt $f'(x) = x^2 - 4$, somit sind durch $f'(x) = 0$, d. h. durch

$$x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0 \iff x_1 = 2 \text{ und } x_2 = -2$$

die potentiellen Extremstellen gegeben. Durch die zweite Ableitung $f''(x) = 2x$ sehen wir, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt:

- $x_1 = 2$:
  $f''(x) = 2 \cdot 2 = 4 > 0 \implies x_1$ ist ein lokales Minimum mit $f(x_1) = -\frac{16}{3} = -5.333\ldots$
- $x_2 = -2$:
  $f''(x) = 2 \cdot (-2) = -4 < 0 \implies x_2$ ist ein lokales Maximum mit $f(x_2) = \frac{16}{3} = 5.333\ldots$

An den Randpunkten nimmt die Funktion die folgenden Werte an:

- Linker Rand $x_3 = -3$:
  $f(x_3) = 3$

- Rechter Rand $x_4 = 5$:
  $f(x_4) = \frac{65}{3} = 21.666\ldots$

Somit ist das globale Maximum der Funktion $f(x)$ bei $x_4 = 5$ erreicht und das globale Minimum bei $x_1 = 2$.

Lösung 4.
Es sind

$$\begin{aligned} p(t) &= 0.075t^2 - 0.005t^3 \\ p'(t) &= 0.15t - 0.015t^2 \\ p''(t) &= 0.15 - 0.03t \\ p'''(t) &= -0.03 \end{aligned}$$

(a) Der Definitionsbereich ist $D = [0, 15]$, weil einerseits die Zeit und andererseits die Funktionswerte $p(t)$ nicht negativ sein dürfen:

$$p(t) \geq 0 \iff 0.075t^2 - 0.005t^3 \geq 0 \iff t^2 \cdot (0.075 - 0.005t) \geq 0$$

Der Term links ist grösser oder gleich Null, wenn entweder beide Faktoren kleiner als Null sind (das geht nicht, weil t^2 immer positiv ist) oder beide grösser oder gleich 0 sind, d. h. für

$$(0.075 - 0.005t) \geq 0 \iff 0.075 \geq 0.005t \iff 15 \geq t\,.$$

(b)
- $p(t)$ nimmt zu für $p'(t) > 0$, d. h. für

  $$0.15t - 0.015t^2 > 0 \iff t(0.15 - 0.015t) > 0\,.$$

  Der Term links ist grösser als Null, wenn entweder beide Faktoren positiv sind, also für $t > 0$ und

  $$0.15 - 0.015t > 0 \iff 0.15 > 0.015t \iff 10 > t\,,$$

  also für $0 < t < 10$, oder wenn beide Faktoren negativ sind, was aber nicht vorkommen kann, weil die Zeit t grösser oder gleich 0 ist.

  $\Longrightarrow$ Zunahme im Intervall $0 < t < 10$.
- $p(t)$ nimmt ab für $p'(t) < 0$, d. h. für

  $$0.15t - 0.015t^2 < 0 \iff t(0.15 - 0.015t) < 0\,.$$

  Der Term links ist kleiner als Null, wenn einer der beiden Faktoren positiv und der andere negativ ist, das kann aber nur der Fall sein, wenn $t > 0$ ist und dafür der zweite Faktor $0.15 - 0.015t < 0$, was äquivalent ist zu

  $$0.15 - 0.015t < 0 \iff 0.15 < 0.015t \iff 10 < t\,.$$

  $\Longrightarrow$ Abnahme im Intervall $10 < t$.

(c) Weil $p(t)$ links von 10 zunimmt und rechts von 10 wieder abnimmt, ist bei $t = 10$ das Höhepunkt erreicht mit einem Prozentsatz von $p(10) = 0.075 \cdot 10^2 - 0.005 \cdot 10^3 = 2.5$.

(d) Der Prozentsatz $p(t)$ nimmt am meisten zu, wenn die Steigung der Kurve am grössten ist, also für das globale Maximum der Ableitung $p'(t)$, d. h. potentiell für ein t mit $p''(t) = 0$

$$0.15 - 0.03t = 0 \iff 0.15 = 0.03t \iff t = 5\,.$$

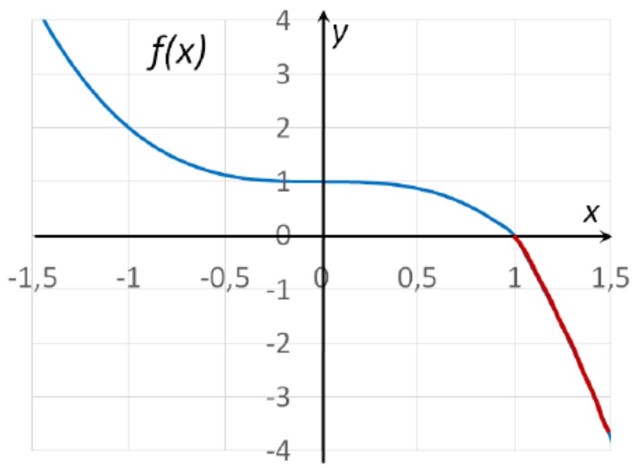
$t = 5$ ist tatsächlich ein Maximum, denn es gilt $p'''(5) = -0.03 < 0$.

Lösung 5. (a) Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 1$ aus zwei verschiedenen Funktionen zusammengesetzt. Links und rechts von $x = 1$ sind die Funktionen (Polynome) auf jeden Fall differenzierbar, sogar unendlich mal. Was passiert an der Stelle $x = 1$? Damit die Funktion an der Stelle $x = 1$ differenzierbar ist, muss sie

- dort stetig sein
- und darf dort keinen Knick haben, d.h. die Steigung links und rechts von $x = 1$ muss gleich grss sein.

Ergebnis: Funktion hat an der Stelle $x = 1$ einen Knick, also nicht differenzierbar.

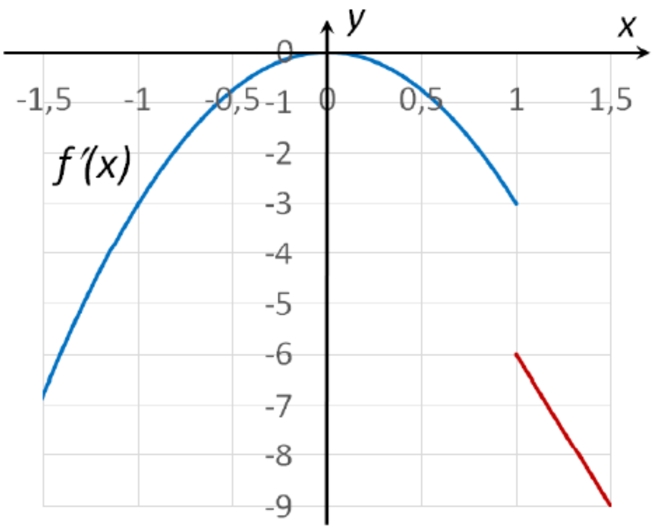
(a) Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 1$ aus zwei Funktionen zusammengesetzt. Für $x < 1$ ist $g(x) = 1 - x^3$ (x^3 an der y-Achse gespiegelt und um 1 nach oben verschoben). Für $x \geq 1$ ist $h(x) = 3(1 - x^2)$ (Parabel mit Scheitel bei (0|3) und Schnittpunkten mit der x-Achse bei (±1|0).
Wegen $g(1) = 0$ und $h(1) = 0$ ist $f(x)$ für alle reellen Zahlen stetig.



Wegen

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & x < 1 \\ -6x & x \geq 1 \end{cases}$$

ist $g'(1) = -3$ und $h'(1) = -6$. Die Steigung der Funktion $f(x)$ wechselt an der Stelle $x = 1$ von -3 auf -6, also die Funktion ist nicht differenzierbar, sondern hat an der Stelle $x = 1$ einen Knick.



Bei der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & x < 1 \\ -6 & x \geq 1 \end{cases}$$

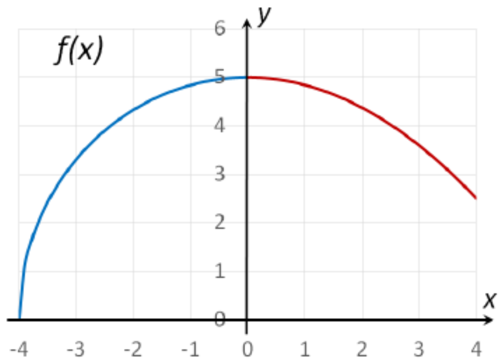
haben $g''(1) = -6$ und $h''(1) = -6$ denselben Wert, also beide Funktionen haben dort dieselbe Rechtskrümmung.

Insgesamt sieht man, dass $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist.

(b) Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ aus zwei Funktionen zusammengesetzt. Weiter ist hier die Nullstelle $x = -4$ noch interessant. Ausserhalb dieser Stellen ist die Funktion als Komposition von differenzierbaren Funktionen zweimal differenzierbar Eine differenzierbare Funktion darf keinen Sprung, Loch, Knick und senkrechte Tangente besitzen.

Ergebnis: Die Funktion ist an der Stelle $x = -4$ nicht differenzierbar, ansonsten im angegebenen Definitionsbereich 2-mal differenzierbar

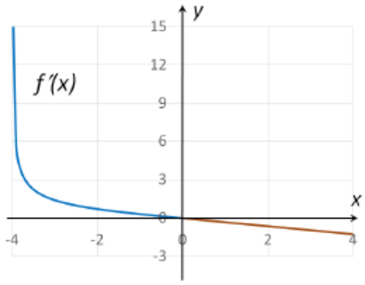
Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ aus zwei Funktionen zusammengesetzt.
Für $-4 \leq x \leq 0$ ist $g(x) = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$ (Wurzelfunktion mit Nullstellen bei ±4). Für $x > 0$ ist $h(x) = 5-\frac{5}{32}x^2$ (Parabel mit Scheitel bei (0|5) und Schnittpunkten mit der x-Achse bei $(\pm\sqrt{32}\,|0)$. Wegen $g(1) = 5$ und $h(1) = 5$ ist $f(x)$ stetig.



Wegen

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{5}{4}\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} & -4 \leq x \leq 0 \\ -\frac{5}{16}x & x > 0 \end{cases}$$

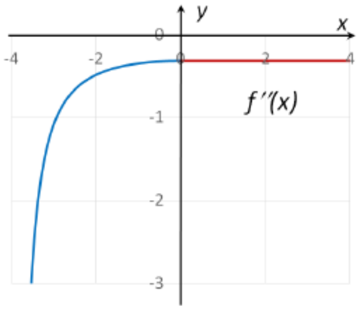
ist $g'(0) = 0$ und $h'(0) = 0$, also es liegt eine waagrechte Tangente vor und die Funktion ist differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Für $x = -4$ ist $f(x)$ nicht differenzierbar (senkrechte Tangente), d.h. der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert an dieser Stelle nicht.



Bei der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-20}{\sqrt{(16-x^2)^3}} & -4 \le x \le 0 \\ -\dfrac{5}{16} & x > 0 \end{cases}$$

haben $g''(0) = -\frac{20}{64} = -\frac{5}{16}$ und $h''(0) = -\frac{5}{16}$ denselben Wert, also beide Funktionen haben dieselbe Rechtskrümmung.



Insgesamt sieht man, dass $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig, und zweimal differenzierbar ist. An der Stelle $x = 0$ hat die Funktionen ein (lokales) Maximum.

Lösung 6.

(a) Die Funktion ist, wie alle Polynome, für alle reellen Zahlen definiert und überall stetig und differenzierbar.

(b) Durch einsetzen von $x_1 = 1$ ergibt sich $f(1) = \frac{1}{5} - \frac{7}{10} - 2 + \frac{5}{2} = 0$

(c) Zur Berechnung der Extremstellen setzt man die erste Ableitung null:

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{14}{10}x - 2 = \frac{1}{5}\left(3x^2 - 7x - 10\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_{4,5} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 + 4\cdot 3\cdot 10}}{2\cdot 3} = \frac{7\pm 13}{6} \Rightarrow x_4 = -1; x_5 = \frac{10}{3}$$

Mit der zweiten Ableitung kann man entscheiden, welche Art von Extremwert vorliegt:

$$f''(x) = \frac{1}{5}\left(6x - 7\right),\ f''(x_4) = f''(-1) = -\frac{13}{5} < 0;\ f''(x_5) = f''(\frac{10}{3}) = \frac{13}{5} > 0$$

An der Stelle $x_4 = -1$ liegt also ein Maximum und an der Stelle $x_5 = 10/3$ ein Minimum vor.

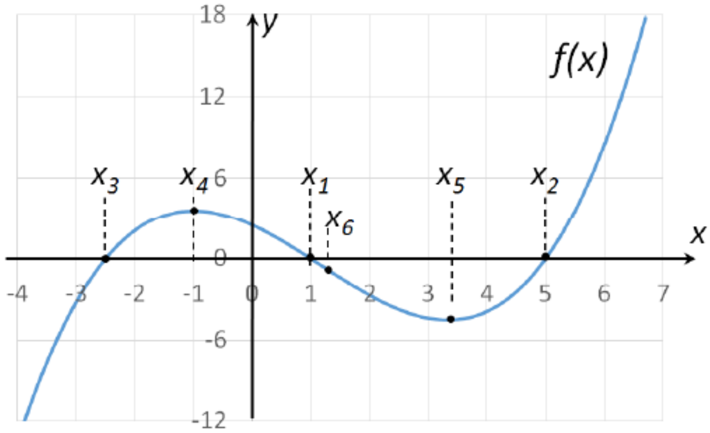
Wendepunkte bestimmt man über die Nullstellen der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \frac{1}{5}\left(6x - 7\right) = 0 \Rightarrow x_6 = \frac{7}{6}$$

Die Stelle $x_6 = \frac{7}{6}$ liegt zwischen dem Maximum und dem Minimum, entsprechend wechselt die Kurve dort von Rechtskrümmung auf Linkskrümmung.

(d) Die Funktion ist weder nach oben noch nach unten beschränkt. Von $-\infty$ bis zum Maximum und vom Tiefpunkt bis $+\infty$ ist die Funktion streng monoton wachsend, dazwischen ist sie streng monoton fallend.

(e) Der Wertebereich umfasst alle reellen Zahlen: W=R.



Lösung 7. (a) Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, denn der Nenner besitzt bei $x = 2$ eine Nullstelle.

(b)

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Nullstellen. Diese erhalten wir aus den Nullstellen des Zählers:

$f(x) = -\frac{(x-2)\cdot(x-2)}{x+2}$, d.h. $x_{1,2}=2$ ist doppelte Nullstelle.

Die Schnittpunkte mit der y-Achse erhält man, indem man in die Funktionsgleichung x=0 einsetzt:

$f(0) = -\frac{(0-2)\cdot(0-2)}{0+2} = -2$, d.h. Schnittpunkt mit y-Achse (0|-2).

(c) Polstellen erhalten wir aus den Nullstellen des Nenners in der gekürzten Darstellung. Keine gemeinsamen Linearfaktoren in Zähler und Nenner, d.h. die Stelle $x = -2$ ist eine nicht hebbare Definitionslücke, ein Pol mit Vorzeichenwechsel, da der Linearfaktor $(x+2)$ im Nenner einfach vorkommt.

(d)

Zur Berechnung der Extremstellen setzt man die erste Ableitung null.
Ableitung mit Quotientenregel berechnen:

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \left(-\frac{(x-2)^2}{x+2}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} = -\frac{2(x-2)(x+2)-(x-2)^2\cdot 1}{(x+2)^2} = -\frac{(x-2)\cdot(x+6)}{(x+2)^2}$$

für alle $x \in D$.

$$f'(x) = -\frac{(x-2)\cdot(x+6)}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x_3 = 2, x_4 = -6$$

Mit der zweiten Ableitung kann man entscheiden, welche Art von Extremwert vorliegt. Zweite Ableitung wieder mit Quotientenregel berechnen:

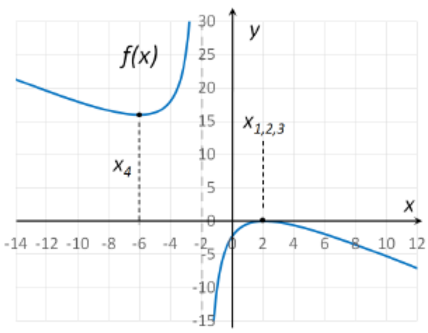
$$f''(x) = -\left(\frac{(x-2)(x+6)}{(x+2)^2}\right)' = \frac{-32}{(x+2)^3}$$

$$f''(x_3) = f''(2) = -\frac{1}{2} < 0;\ f''(x_4) = f''(-6) = \frac{1}{2} > 0$$

An der Stelle $x_3 = 2$ liegt also ein lokales Maximum und an der Stelle $x_4 = -6$ ein lokales Minimum vor.

Wendepunkte gibt es keine, da die zweite Ableitung keine Nullstellen besitzt.

Die Funktion ist im Bereich $-\infty<x<-2$ linksgekrümmt und im Bereich $-2<x<\infty$ rechtsgekrümmt.



Lösung 8.

Nullstellen: $f(x) = 0$ ist äquivalent zu

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \iff (x^2-1)(x^2-5) = 0 \iff (x-1)(x+1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0$$

und somit sind $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{5}$ und $x_4 = -\sqrt{5}$ Nullstellen der Funktion $f(x)$.

Extrema: Es ist $f'(x) = 4x^3 - 12x$. Potentielle Extrema sind die Nullstellen der ersten Ableitung, also alle x, für welche $f'(x) = 0$ erfüllt ist:

$$4x^3 - 12x = 0 \iff x(4x^2 - 12) = 0 \iff x(2x - \sqrt{12})(2x + \sqrt{12}) = 0$$

Somit sind $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$ und $x_7 = -\sqrt{3}$ potentielle Extrema. Mit Hilfe der zweiten Ableitung bestätigen wir unsere Vermutung: Es ist

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

und deshalb gilt

- $f''(0) = -12 < 0 \implies x_5 = 0$ ist ein lokales Maximum
- $f''(\sqrt{3}) = 24 > 0 \implies x_6 = \sqrt{3}$ ist ein lokales Minimum
- $f''(-\sqrt{3}) = 24 > 0 \implies x_7 = -\sqrt{3}$ ist ein lokales Minimum

Wendepunkte: Für Wendepunkte müssen die Bedingungen $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ erfüllt sein. Es sind

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 - 12\,, \\ f'''(x) &= 24x\,. \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$ ist äquivalent zu

$$12x^2 - 12 = 0 \iff 12x^2 = 12 \iff x^2 = 1\,,$$

weshalb $x_8 = 1$ und $x_9 = -1$ potentielle Wendepunkte sind. Mit der dritten Ableitung $f'''(x)$ bestätigen wir unsere Vermutung: Es sind

$$f'''(1) = 24 \neq 0 \text{ und } f'''(-1) = -24 \neq 0$$

und deshalb sind $x_8 = 1$ und $x_9 = -1$ Wendepunkte, aber keine Sattelpunkte, weil

$$f'(1) = -8 \text{ und } f'(-1) = 8$$

gilt.

9. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ f(0) = 0 & : \ d = 0 \\ 2)\ f'(2) = 0 & : \ 12a + 4b + c = 0 \\ 3)\ f''(4) = 0 & : \ 24a + 2b = 0 \\ 4)\ f'(4) = -4 & : \ 48a + 8b + c = -4 \end{array}\right\} f(x) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x}}$$

10. • $c = -4$, (damit der Nenner für $x=-2$ gleich Null ist)

• $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2-4}$

• $f'(x) = \dfrac{a\cdot(x^2-4) - (ax+b)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

• $f'(1) = 0 \Rightarrow a\cdot(1^2-4) - (a\cdot 1 + b)\cdot 2\cdot 1 = 0 \quad (*)$

• $f(1) = -0.25 \Rightarrow \dfrac{a\cdot 1 + b}{1-4} = -0,25 \quad (**)$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt die Lösung:

$$f(x) = \underline{\underline{\frac{-0.5x + 1.25}{x^2-4}}}$$

11. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

1) $(0|0) \in f$, d.h. $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

2) $f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

3) $f'(-2) = 0 \Rightarrow 12a - 4b + c = 0$

4) $f'(4) = 3 \Rightarrow 48a + 8b + c = 3$

Aus 1), 2), 3), 4) folgt $a = \frac{1}{12}$, $b = 0$, $c = -1$, $d = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x}}$$

12. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

1) $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

2) $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (weil x-Achse berührt wird)

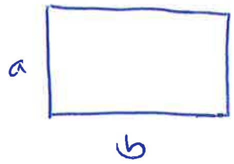
3) $P(-3|0) \in f$, d.h. $f(-3) = 0 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 0$

4) $f'(-3) = 6 \Rightarrow 27a - 6b + c = 6$

Aus 1), 2), 3), 4) folgt $\underline{\underline{f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2}}$

13.

(a)



Ziel: $U(a,b) = 2a+2b \rightsquigarrow$ minimieren

NB: $a\cdot b = 36 \Rightarrow b = \frac{36}{a}$

$\Rightarrow$ Ziel: $U(a) = 2a + \frac{72}{a}$

$U'(a) \stackrel{!}{=} 0$: $2 - \frac{72}{a^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 6}}$

$\Rightarrow b = \frac{36}{a} \underline{\underline{= 6}}$

(b) Ziel: $A(a,b) = a\cdot b \rightsquigarrow$ maximieren

NB: $2a+2b = 64 \rightarrow a = \frac{64-2b}{2} = 32-b$

Ziel: $A(b) = (32-b)\cdot b = 32b - b^2$

$A'(b) = 32 - 2b \stackrel{!}{=} 0$

$\underline{\underline{b = 16}}$

$\stackrel{NB}{\Rightarrow} \underline{\underline{a = 16}}$

14. $V_{Dose} = \pi r^2 h = 30 cm^3$

$O_{Dose} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = \underline{\underline{71.23 cm^2}}$ alte Dose

neue Dose:

Ziel: $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow$ minimieren

NB: $V = \pi r^2 h = 30$

$\Rightarrow h = \frac{30}{\pi r^2}$ (*)

(*) In Ziel einsetzen: $O(r) = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot \frac{30}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}$

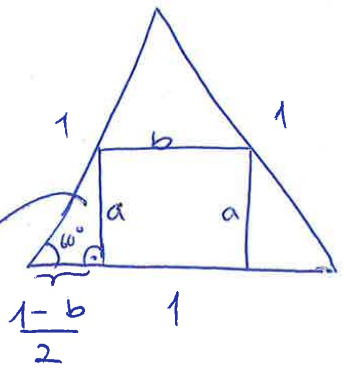
$= 2\pi r^2 + \frac{60}{r}$

$O'(r) = 4\pi r - \frac{60}{r^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow r = 1.6839$

$\underset{NB\,(*)}{\Rightarrow} h = 3.37$

$\Rightarrow O_{neu} = \underline{\underline{53.44 cm^2}}$

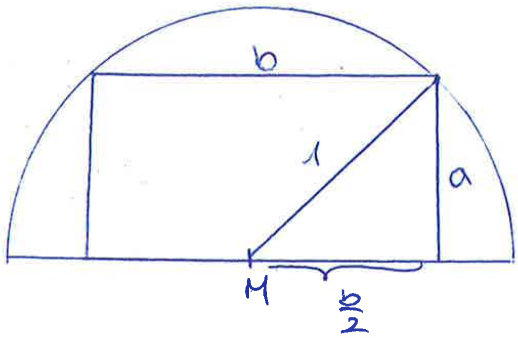
15.



Ziel: $A(a,b) = a \cdot b$

~~~ maximieren

$$\measuredangle \; \underbrace{\tan 60°}_{\sqrt{3}} = \frac{a}{\frac{1-b}{2}} = \frac{2a}{1-b}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{2a}{1-b} \text{ ist Nebenbedingung.}$$

$$\Rightarrow 1-b = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$1 - \frac{2a}{\sqrt{3}} = b \quad (*)$$

(*) in Ziel einsetzen:

$$A(a) = a \cdot \left(1 - \frac{2a}{\sqrt{3}}\right) = a - \frac{2}{\sqrt{3}} a^2$$

$$A'(a) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}} a \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{\sqrt{3}}{4}}}$$

In (*) einsetzen: $\underline{\underline{b = 1/2}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{\sqrt{3}}{8}}}$$
~~~

16.



Ziel: $A(a,b) = a \cdot b \rightsquigarrow$ maximieren

NB: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = 1$ (Pyth.)

$$\frac{b^2}{4} + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - \frac{b^2}{4} \quad (*)$$

Trick: Statt $A(a,b) = a \cdot b$ zu maximieren, maximieren wir das Quadrat davon, also: $A^2(a,b) = a^2 \cdot b^2$
(dadurch ist keine Wurzel vorhanden)

Ziel: $A^2(a,b) = a^2 b^2 = \left(1 - \frac{b^2}{4}\right) \cdot b^2 = A^2(b)$

$$(A^2(b))' = 2b - b^3 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = \sqrt{2}\, m}}$$

Aus (*) folgt: $\underline{\underline{a = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, m = \frac{\sqrt{2}}{2}\, m}}$