Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Fachhochschule Nordwestschweiz

Übungsblatt 1

Zahlenmengen und Repetition Algebra

Aufgabe 1.
Bringen Sie alle Brüche des Terms durch Erweitern auf den Hauptnenner und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(a) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} + \frac{7x}{15} - \frac{x}{9}$

(b) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}$

(c) $\frac{1}{2x} + \frac{x-2y}{4xy}$

(d) $\frac{m+2n^2}{7mn^2} - \frac{6+6m}{21m} + \frac{1+12m^2}{42m^2}$

Aufgabe 2.
Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(a) $(a-b)^2 + (a+b)^2$

(b) $\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)^2 - (x-y)^2}$

(c) $\frac{x^2-y^2}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{x-y}$

(d) $\left(\sqrt{\frac{1}{6} - z} - \sqrt{z + \frac{1}{6}}\right)^2$

Aufgabe 3.
Bei optimaler Vereinfachung bleibt eine einzige Variable übrig; welche?

(a) $\left(1+\frac{s^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{r^2-s^2}-\frac{1}{r^2+s^2}\right)-\frac{2}{r^2-s^2}$

(b) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}-\frac{bc}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{bc}\right)^2\cdot(b+c)^2-\left(\frac{bc}{a}-\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a^2}{b^2}$

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Lösung:

(a) $\frac{7}{x+3}=\frac{5}{x-3}$

(b) $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0$

Aufgabe 5.
Zeigen Sie durch einen indirekten Beweis, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

Aufgabe 6.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Heron-Verfahrens die folgenden Quadratwurzeln auf 8 Nachkommastellen genau.

(a) $\sqrt{10}$

(b) $\sqrt{59}$

Aufgabe 7.
Geben Sie an, zu welchen (minimalen) speziellen Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) folgende Zahlen gehören.

(a) 0

(b) -2

(c) $.31$

(d) 0.2819382671538

(e) $0.28\overline{19382671538}$

(f) $\frac{5}{7}+\sqrt{2}\cdot\frac{13}{17}$

(g) $\sqrt{25}$

(h) $\sqrt{5}$

(i) -2.7

Aufgabe 8.
Beweisen Sie die folgende Behauptung mit einem indirekten Beweis.
Für $n\in\mathbb{Z}$ gilt:

$$n^2 \text{ ist eine gerade Zahl} \implies n \text{ ist eine gerade Zahl}$$

Aufgabe 9.
Skizzieren Sie die folgenden Mengen auf der Zahlengeraden.

(a) $\{x \mid 4 \leq x \leq 6\}$

(b) $\{x \mid x < 0 \text{ oder } x > 7\}$

(c) $(-3, -1)$

(d) $(-0.5, 0.5]$

(e) $[-\frac{3}{4}, \sqrt{2})$

(f) $(-7, -4) \cup (-5, -1)$

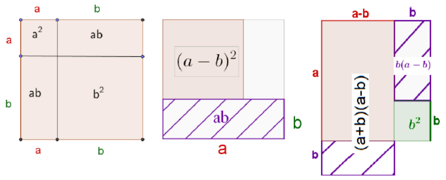
(g) $[0, 5] \setminus [1, 4]$

(h) $[3, 8] \cap (5, 9]$

(i) $(-3, 1) \cap [2, 4]$

Wiederholung - Die Binomischen Formeln

Abbildung aus: https://de.serlo.org/mathe/terme-gleichungen/terme-variablen/binomische-formeln



1. Binomische Formel	2. Binomische Formel	3. Binomische Formel
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Wiederholung — Die wichtigsten Regeln zum Bruchrechnen

Ein Bruch wird durch Zähler und Nenner gebildet. Der Zähler steht über dem Bruchstrich, der Nenner darunter:

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\quad p \in \mathbb{Z}$ wird Zähler und $q \in \mathbb{N}$ Nenner genannt.

Sind im Zähler und im Nenner eines Bruches gemeinsame Faktoren enthalten, so kann man diese aus dem Bruch kürzen. Im folgenden Bruch befindet sich die 7 sowohl im Nenner als auch im Zähler und kann entsprechend gekürzt werden:

$$\frac{28}{217} = \frac{4 \cdot 7}{31 \cdot 7} = \frac{4}{31}$$

Bei dem folgenden Term kann man den Faktor a kürzen. Dabei ist wichtig, dass der Faktor a aus allen Termen, die im Zähler mit $+$ oder $-$ verbunden sind gekürzt wird:

$$\frac{6a^2 - 2a}{5a^3} = \frac{a \cdot (6a - 2)}{a \cdot 5a^2} = \frac{6a - 2}{5a^2}$$

Das Gegenteil von Kürzen ist Erweitern. Hierbei werden Zähler und Nenner mit einem bestimmten Faktor multipliziert:

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot c}{q \cdot c}$$

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man jeweils die Werte im Zähler und Nenner miteinander multipliziert:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

Ein erster Bruch wird durch einen zweiten Bruch geteilt, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert:

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2}$$

Zwei Brüche dürfen nur addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie denselben Nenner haben. Man muss sie auf den Hauptnenner bringen. Man kann z.B. jeweils mit dem Nenner des jeweils anderen Bruchs erweitern.

$$\frac{p_1}{q_1} \pm \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 \pm p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

oder aber das kleinste gemeinsame Vielfache der beteiligten Nenner suchen und die Brüche mit den entsprechenden Faktoren erweitern:

$$\frac{7}{6} \pm \frac{5}{9} = \frac{7 \cdot 3}{6 \cdot 3} \pm \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{21}{18} \pm \frac{10}{18} = \frac{21 \pm 10}{18}$$