Einführung in die Analysis
11. Integralrechnung - das bestimmte Integral und der Zusammenhang zwischen unbestimmtem und bestimmtem Integral

Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

Frühlingssemester 2021

10. Integralrechnung - das bestimmte Integral und der Zusammenhang zwischen unbestimmtem und bestimmtem Integral

Inhaltsverzeichnis

Wozu Integralrechnung?

Anwendungsbeispiel Integralrechnung

Grundkonzepte Integrale

Integralrechnung

Unbestimmte und bestimmte Integrale:

- $\int f(x)dx$ ist ein *unbestimmtes* Integral (Stichwort: *Stammfunktion*)
- $\int\limits_a^b f(x)dx$ ist ein *bestimmtes* Integral (Stichwort: *Flächeninhalt*)

Diese beiden Integral-Konzepte und ihr Zusammenhang werden im Folgenden erläutert.

Das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$

- Hier geht es um Integration als Umkehrung der Differentiation.
- Gegeben ist eine Funktion $f(x)$. Gesucht ist eine *Stammfunktion* $F(x)$ von $f(x)$, d.h. eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$.
- Die Lösung des Integrals ist eine (unendlich grosse) Menge von Funktionen.

Definition (Das unbestimmte Integral)

Das unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ ist

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

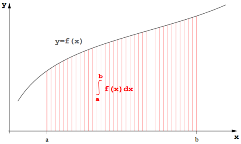
mit einer Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, also $F'(x) = f(x)$, und einer beliebigen Konstanten C, der sog. *Integrationskonstanten*

Beispiel

$$\int \left(\sin(x) + \frac{1}{x}\right) dx = -\cos(x) + \ln|x| + C$$

Das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$

- Hier geht es um einen Flächeninhalt.
- Die Lösung des Integrals wird eine Zahl sein.



Definition (Das bestimmte Integral)

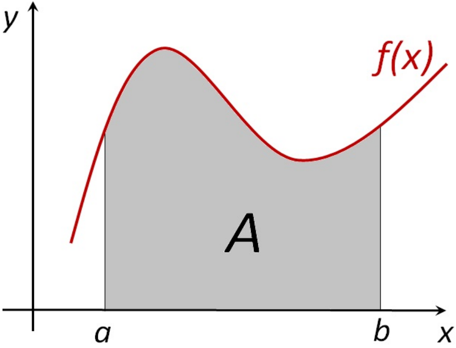
Das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ von a bis b

$$\int_a^b f(x)dx$$

ist der Flächeninhalt der von der Funktionskurve und der x-Achse berandeten Fläche zwischen $x = a$ und $x = b$.

Flächenproblem

Die zweite Hauptaufgabe der Integralrechnung, neben der Umkehrung der Differentialrechnung ist die Berechnung von Flächen. Typischerweise handelt es sich dabei um Flächen, die begrenzt sind vom Graphen einer stetigen Funktion $f(x)$ und der $x-$Achse über einem Intervall $[a, b]$.



Anmerkung:

Wir nehmen zu Beginn an, dass der Graph von $f(x)$ im Intervall $I = [a, b]$ oberhalb der $x-$Achse verläuft.

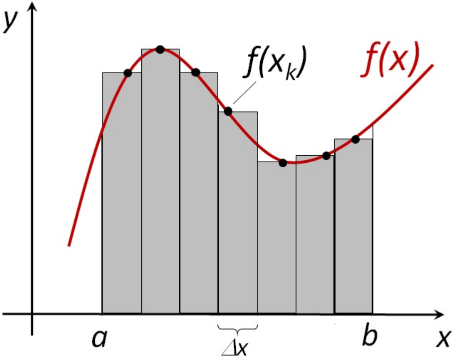
Integral als Grenzwert von Summen

Eine nahe liegende Idee bei der Berechnung einer Fläche unter einer Funktion ist die Verwendung kleiner Rechtecke. Man verwendet geradlinig begrenzte, leicht berechenbare Flächenstücke, um den Flächeninhalt A unter der Kurve anzunähern. Dazu

1. teilt man das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Die Zahl n entspricht der Zahl der entstandenen Rechtecke
2. wählt man in jedem $i-$ten Teilintervall eine beliebige Stelle x_i für $i = 1, 2, \ldots, n$ und berechnet den dazugehörigen Funktionswert $f(x_i)$. Der Flächeninhalt des senkrechten, unten von der $x-$Achse und oben vom Graphen von $f(x)$ begrenzten Flächenstreifens im $i-$ten Intervall wird dann durch die Fläche des zugehörigen Rechtecks angenähert:

$$A_i = f(x_i) \cdot \Delta x$$

Integral als Grenzwert von Summen



Je kleiner man die Breite der Teilintervalle wählt, d.h. wenn man n groß wählt, dann kann man die Fläche entsprechend genau berechnen. Die **Riemannsche Summe**

$$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

liefert einen Näherungswert für die gesamte Fläche A unter dem Graphen $f(x)$

Unter- und Obersumme

Definition (Unter- und Obersumme)

Werden in der Riemannschen Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$ die Werte x_i so gewählt,

- dass der Funktionswert $f(x_i)$ im $i-$ten Intervall jeweils *maximiert* wird, wird diese Summe eine **Obersumme** O_n genannt;
- dass der Funktionswert $f(x_i)$ im $i-$ten Intervall jeweils *minimiert* wird, wird diese Summe eine **Untersumme** U_n genannt.

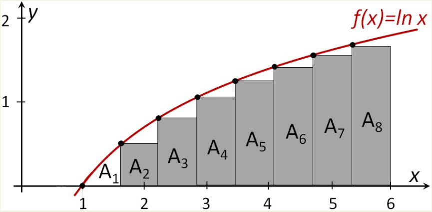
Anmerkung:

Rechtecke, deren Höhen gerade so gewählt werden, dass sie gerade noch unter die Funktion passen, erzeugen die Untersumme. Bei der Obersumme entsprechen die Höhen der Rechtecke den maximalen Funktionswerten.

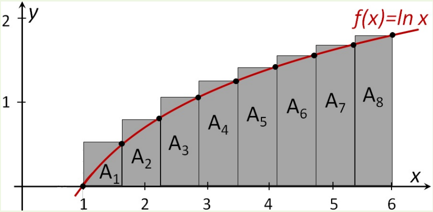
Unter- und Obersumme

Beispiel:

Die Fläche unter der Funktion $f(x) = \ln(x)$ für x-Werte zwischen 1 und 6 soll mithilfe von Unter- und Obersumme näherungsweise berechnet werden.



Untersumme U_8



Obersumme O_8

Für $n = 8$ gilt für die Unter- bzw. Obersumme ($\Delta x = \frac{6-1}{8} = 0.625$):

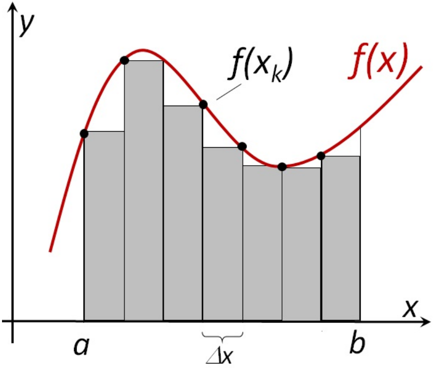
$$U_8 = \Delta x \cdot (\ln(1) + \ln(1.625) + \ln(2.25) + \ldots + \ln(4.75) + \ln(5.375)) = 5.163...$$
$$O_8 = \Delta x \cdot (\ln(1.625) + \ln(2.25) + \ldots + \ln(4.75) + \ln(5.375) + \ln(6)) = 6.283...$$

Unter- und Obersumme

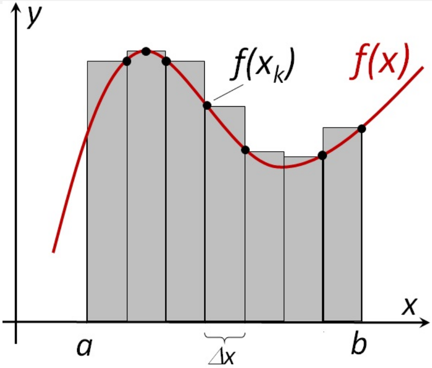
Beispiel (Fortsetzung):

Die folgende Tabelle zeigt, wie die Untersumme und die Obersumme für $n \to \infty$ gegen den Flächeninhalt $A = 5.750556815\ldots$ streben.

n	U_n	O_n
2	3.13190742	7.61130609
4	4.52829725	6.76699656
8	5.16388930	6.28373897
32	5.60888182	5.88884424
128	5.71545556	5.78544616
256	5.73303267	5.76802798
512	5.74180137	5.75929902
1024	5.74616808	5.75492957
2048	5.74836921	5.75274361
4096	5.74946311	5.75165032



Untersumme



Obersumme

Die Folge der Obersumme O_n ist monoton fallend, die Folge der Untersumme U_n ist monoton wachsend. Falls der Grenzwert exisitiert, dann nähern sich für $n \to \infty$ beide Folgen von oben bzw. von unten an den Wert des Flächeninhaltes A unter der Kurve an.

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n = A$$

Riemann-Integral

Definition (Riemann-Integral)

Gegeben ist eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$.
Z_n sei eine Unterteilung des Intervalls $a \leq x \leq b$ in n Teilintervalle

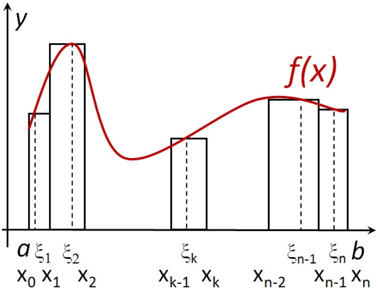
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

der Längen $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Es sei $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ein beliebiger Zwischenwert aus dem Intervall. Dann heißt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(\xi_k)$$

die **Riemannsche Zwischensumme** bezüglich der Zerlegung Z_n

Bestimmtes Integral



Definition (Bestimmtes Integral)

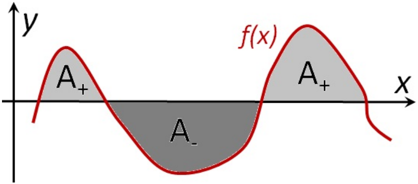
Unter dem **bestimmten Integral** (Riemann-Integral) der stetigen Funktion f in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ wird der Grenzwert der Riemannschen Zwischensumme S_n für $n \to \infty$ verstanden. Der Grenzwert entspricht dem genauen Flächeninhalt unter der Funktion f.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(\xi_k).$$

Bestimmtes Integral

Anmerkungen:

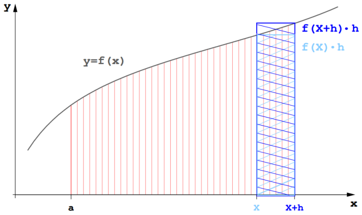
- Für beliebige Funktionen ist nicht sichergestellt, dass der Grenzwert existiert. Man kann jedoch zeigen, dass der Grenzwert für stetige Funktionen immer existiert.
- Bei negativen Funktionwerten ist das Produkt aus Grundseite Δx_k und dem Funktionswert $f(\xi_k)$ negativ, d.h. negative Funktionswerte erzeugen negative Flächenanteile



Zusammenhang dieser zwei Integralkonzepte

Um diesen Zusammenhang zu erkennen, untersuchen wir, wie sich (bei einer stetigen Funktion $f(x)$) der durch das bestimmte Integral gegebene Flächeninhalt ändert, wenn man die obere Grenze variiert. Dazu definieren wir die Flächenfunktion

$$A(X) = \int_a^X f(x)dx.$$



Uns interessiert der Unterschied, der sich ergibt zwischen der Fläche $A(X) = \int_a^X f(x)dx$ und der etwas grösseren Fäche $A(X+h) = \int_a^{X+h} f(x)dx$, die wir erhalten, wenn wir die Obergrenze des Intergrals um den kleinen Betrag h vergrössern, d.h. also die Differenzfläche

$$A(X+h) - A(X)$$

Zusammenhang dieser zwei Integralkonzepte II

Die gesuchte Differenzfläche liegt grössenmässig zwischen dem hellblau schraffierten Rechteck der Fläche $f(X) \cdot h$ und dem dunkler blau schraffierten Rechteck der Fläche $f(X+h) \cdot h$. Es gilt also:

$$f(X) \cdot h \leq A(X+h) - A(X) \leq f(X+h) \cdot h$$

oder, wenn wir durch h dividieren

$$f(X) \leq \frac{A(X+h) - A(X)}{h} \leq f(X+h)$$

Wenn wir nun h gegen Null gehen lassen:

$$f(X) \leq \lim_{h \to 0} \frac{A(X+h) - A(X)}{h} \leq f(X+h)$$

Der Grenzwert in der Mitte ist also die Ableitung $A'(X)$ der Flächenfunktion $A(X)$. Wir haben also

$$f(X) = A'(X)$$

Anmerkung:

Als Vereinfachung nehmen wir an, dass der Integrand $f(x)$, wie im Diagramm gezeichnet, eine monoton steigende Funktion ist.

Zusammenhang dieser zwei Integralkonzepte III

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Für stetige Funktionen $f(x)$ gilt:
Die Flächenfunktion ist eine Stammfunktion

$$F(X) = \int_a^X f(x)dx \Rightarrow F'(X) = f(x)$$

Als eine unmittelbare Folgerung aus dem Hauptsatz ergibt sich nun die Möglichkeit, bestimmte Integrale stetiger Funktionen mithilfe von Stammfunktionen zu berechnen:

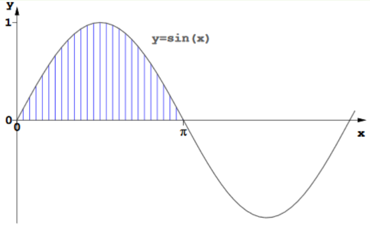
Ist $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, d.h. gilt $F'(x) = f(x)$, so ist

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx = F(b_2) - F(b_1) = |F(x)|_{x=b_1}^{x=b_2}$$

Zusammengang der zwei Integralkonzepte IV

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx &= [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\
&= 1 - (-1) \\
&= 2
\end{aligned}
$$



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Anmerkungen:

- Bei der Anwendung des Hauptsatzes wird immer zuerst die obere, dann die untere Integrationsgrenze eingesetzt.
- In der Praxis liegt das Hauptproblem in der Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$ des Integranden. In den meisten Fällen ist diese Bestimmung nicht so ohne Weiteres möglich. Man ist dann auf spezielle Verfahren wie z. B. numerische Integrationsmethoden angewiesen.
- Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist eine der bedeutendsten geistigen Leistungen des 17. Jahrhunderts und gehört zu den grossen mathematischen Entdeckungen. Mit diesem Satz können wir nun sehr schnell den Inhalt einer Fläche zwischen der $x-$Achse und dem Graphen einer Funktion berechnen. Die Grenzwertbetrachtung der Zerlegungssumme entfällt dabei.

Bestimmtes Integral

Beispiele:

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale

$$\int_0^6 \frac{1}{3}x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = \frac{36}{6} - \frac{0}{6} = 6$$

$$\int_{-5}^2 2\mathrm{d}x = [2x]_{-5}^2 = 2\cdot 2 - 2\cdot(-5) = 14$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

$$\int_1^{\sqrt[3]{25}} \sqrt{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{25}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}25^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Bestimmtes Integral

Satz (Rechenregeln des bestimmten Integrals)

1. Vertauschen der Integrationsgrenzen
   Vertauscht man bei einem bestimmten Integral Ober- und Untergrenze, so ändert sich das Vorzeichen:
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$
2. Obergrenze = Untergrenze
   Setzt man Obergrenze = Untergrenze ist der Flächeninhalt Null (es existiert keine Fläche):
   $$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$
3. Aufspalten
   Ein bestimmtes Integral über dem Intervall $[a, b]$ lässt sich in Teilintervalle aufspalten:
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Übungsblatt 10

Aufgabe 2.
Bestimmten Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_0^4 \frac{3}{4}x^2 \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^2 \left(x^3 + 2x + 1\right) \mathrm{d}x$

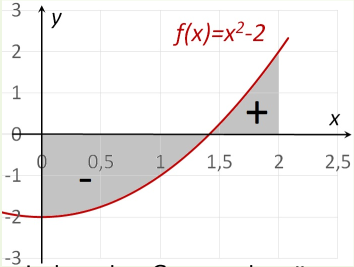
(c) $\int_{-1}^5 \left(3x^2 - 8x - 3\right) \mathrm{d}x$

(d) $\int_{-1}^2 \left(-y^2 + 3y - 4\right) \mathrm{d}y$

Bestimmtes Integral

Beispiel:

Berechnen Sie die Fläche zwischen der $x-$Achse und der Kurve $f(x) = x^2 - 2$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 2$



Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen beträgt:

$$\int_0^2 (x^2 - 2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

und ist negativ, da der Flächenanteil unterhalb der $x-$Achse größer ist als der Flächeninhalt oberhalb der $x-$Achse.

Beispiel:

Um den absoluten Flächeninhalt der grau eingefärbten Fläche zu berechnen, müssen wir das Integral in zwei Bereiche auspalten: ein Bereich, in dem die Funktionswerte negativ sind und ein Bereich, in dem die Funktionswerte positiv sind. In diesen Bereichen wird der Flächeninhalt getrennt voneineinander berechnet und anschließend müssen die Beträge addiert werden. Die Nullstelle der Funktion ist $x = \sqrt{2}$.

$$
\begin{aligned}
A &= \left|\int_0^{\sqrt{2}} (x^2-2)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\sqrt{2}}^{2} (x^2-2)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_0^{\sqrt{2}}\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_{\sqrt{2}}^{2}\right| \\
&= \left|\frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right| + \left|\frac{8}{3} - 4 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right)\right| \\
&= |-1.8856| + |0.5523| = 2.4379
\end{aligned}
$$

Weitere Beispiele

Aufgabe 6.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des von $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $g(x) = 4 - x$ eingeschlossenen endlichen Flächenstücks.

Übungsblatt 10

Aufgabe 7.
In welchem Verhältnis teilt die Gerade mit der Gleichung $f(x) = x$ die Fläche, die zwischen der Kurve mit der Gleichung $g(x) = 3x - x^3$ und der x-Achse im 1. Quadranten liegt?

Anhang

Sie finden im Folgendem finden Sie eine den Zusammenhang zwischen den beiden Integralkonzepten in einer etwas andern Notation erklärt.

Integralfunktion

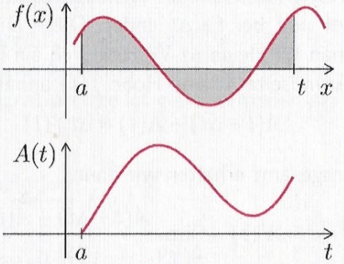
Der Zusammenhang zwischen Differenzial- und Integralrechnung kann mit der **Integralfunktion** hergestellt werden:

Definition (Integralfunktion)

Die **Integralfunktion**

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

ist definiert durch den Wert des bestimmten Integrals der Funktion f über dem Intervall $[a, t]$. Dabei wird A als Funktion der variablen Obergrenze t interpretiert.



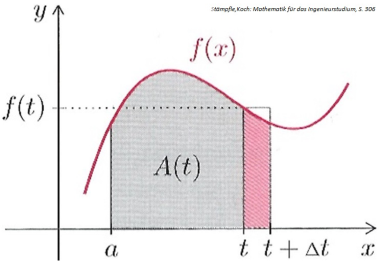
Koch,Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, S.305

Die Integralfunktion hat an der Stelle a immer den Wert 0. Positive Werte der Funktion f lassen die Integralfunktion A anwachsen und negative Werte führen zu Verringerung der Funktionswerte von A.

Integralfunktion

Die Ableitung der Integralfunktion stellt die Verbindung zwischen Differenzial- und Integralrechnung her. Die Berechnung der Ableitung folgt mittels Definition über den Grenzwert:

$$A'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$



Die Differenz der beiden Integralfunktionswerte besteht aus einem Flächenstück, welches bei t startet und bei $t + \Delta t$ endet. Diese Differenz kann man für kleine $\Delta t-$Werte durch ein Rechteck mit Grundseite Δt und Höhe $f(t)$ annähern:
$A(t+\Delta t) - A(t) \approx \Delta t \cdot f(t)$. Insgesamt gilt dann:

$$A'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \approx \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t f(t)}{\Delta t} = f(t)$$

Die Ableitung der Integralfunktion ist also gerade die Funktion selbst.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

- Die Ableitung der Integralfunktion

  $$A(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

  ist die Ausgangsfunktion f. Es gilt also

  $$A'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x = f(t)$$

- Das bestimmte Integral einer Funktion f kann man mithilfe einer beliebigen Stammfunktion F von f bestimmen:

  $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

  Man setzt die Obergrenze b in die Stammfunktion F ein und zieht davon den Wert der Stammfunktion an der Untergrenze a ab.