Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Fachhochschule Nordwestschweiz

Übungsblatt 1

Lösungen

Lösung 1.

(a) $\frac{x}{3}-\frac{2x}{5}+\frac{7x}{15}-\frac{x}{9}$

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 3, 5, 15, und 9 ist 45.

$=\frac{15\cdot x}{15\cdot 3}-\frac{9\cdot 2x}{9\cdot 5}+\frac{3\cdot 7x}{3\cdot 15}-\frac{5\cdot x}{5\cdot 9}$

Jeder Bruch wird mit dem entsprechenden Faktor erweitert.

$=\frac{15x}{45}-\frac{18x}{45}+\frac{21x}{45}-\frac{5x}{45}$

Erst jetzt, wenn alle Brüche denselben Nenner haben (45), dürfen die Zähler addiert und die Terme zu einem Bruch zusammengefasst werden.

$=\frac{15x-18x+21x-5x}{45}$

Zu Abschluss werden die Terme mit x im Zähler noch zusammengefasst

$=\frac{13x}{45}$

(b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}$

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Terme a^2, b^2 und ab lautet a^2b^2.

$=\frac{b^2\cdot 1}{b^2\cdot a^2}+\frac{a^2\cdot 1}{a^2 b^2}+\frac{ab\cdot 1}{ab\cdot ab}$

Jeder Bruch wird mit dem entsprechenden Faktor erweitert.

$=\frac{b^2}{a^2\cdot b^2}+\frac{a^2}{a^2 b^2}+\frac{ab}{a^2 b^2}$

Erst jetzt, wenn alle Brüche denselben Nenner haben (a^2b^2), dürfen die Zähler addiert und die Terme zu einem Bruch zusammengefasst werden.

$=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2b^2}$

(c) $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{x-2y}{4xy}$

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Terme *2x und 4xy* lautet *4xy*.

$=\dfrac{2y\cdot 1}{2y\cdot 2x}+\dfrac{x-2y}{4xy}$

Der erste Bruch wird mit dem entsprechenden Faktor erweitert, der Zweite besitzt bereits den Hauptnenner und muss nicht erweitert werden.

$=\dfrac{2y\cdot 1}{2y\cdot 2x}+\dfrac{x-2y}{4xy}$

Erst jetzt, wenn alle Brüche denselben Nenner haben *(4xy)*, dürfen die Zähler addiert und die Terme zu einem Bruch zusammengefasst werden.

$=\dfrac{x}{4xy}=\dfrac{1}{4y}$

Den Ergebnisbruch können wir noch mit dem Faktor *x* kürzen

(d) $\dfrac{m+2n^2}{7mn^2}-\dfrac{6+6m}{21m}+\dfrac{1+12m^2}{42m^2}$

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Terme $7mn^2$, $21m$ *und* $42m^2$ lautet $42m^2n^2$.

$=\dfrac{6m\cdot(m+2n^2)}{6m\cdot 7mn^2}-\dfrac{2mn^2\cdot(6+6m)}{2mn^2\cdot 21m}+\dfrac{n^2\cdot(1+12m^2)}{n^2\cdot 42m^2}$

Die Brüche werden mit den entsprechenden Faktoren erweitert.

$=\dfrac{6m\cdot(m+2n^2)-2mn^2\cdot(6+6m)+n^2\cdot(1+12m^2)}{42m^2n^2}$

Erst jetzt, wenn alle Brüche denselben Nenner haben ($42m^2n^2$), dürfen die Zähler addiert und die Terme zu einem Bruch zusammengefasst werden.

$=\dfrac{(6m^2+12mn^2)-(12mn^2+12m^2n^2)+(n^2+12m^2n^2)}{42m^2n^2}$

Nun müssen wir im Zähler die Klammern ausmultiplizieren. Dabei lassen wir jeden der drei Terme noch in Klammern stehen, damit wir mit den Vorzeichen nicht durcheinander kommen.

$=\dfrac{6m^2+12mn^2-12mn^2-12m^2n^2+n^2+12m^2n^2}{42m^2n^2}$

Nun können wir die Klammern im Zähler auflösen und die Terme zusammenfassen

$=\dfrac{6m^2+n^2}{42m^2n^2}$

Lösung 2.

(a) $(a-b)^2+(a+b)^2$

$=a^2-2ab+b^2+\left(a^2+2ab+b^2\right)$

Auflösen der Terme mit den binomischen Formeln. Dabei ist es immer hilfreich, wenn man vorerst um die ursprünglichen Terme eine Klammer lässt.

$=a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2$
$=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)$

Zusammenfassen der Terme liefert das Endergebnis.

(b) $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}$

Auflösen der Terme im Zähler und Nenner mit den binomischen Formeln.

$=\dfrac{x^2+2xy+y^2+\left(x^2-2xy+y^2\right)}{x^2+2xy+y^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)}$

Im zweiten Schritt werden die Klammern aufgelöst, dabei auf das Minus-Zeichen vor der Klammer im Nenner achten.

$=\dfrac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}$

$=\dfrac{2x^2+2y^2}{4xy}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$

Zusammenfassen der Terme im Zähler und im Nenner und kürzen mit dem gemeinsamen Faktor 2

(c) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}+\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

Zuerst müssen wir die Brüche auf den Hauptnenner bringen. Dieser lautet (3. Binomische Formel): x^2-y^2. Wir erweitern mit den entsprechenden Termen

$=\dfrac{(x-y)\cdot\left(x^2-y^2\right)}{(x-y)(x+y)}+\dfrac{(x+y)\cdot\left(x^2+y^2\right)}{(x+y)\cdot(x-y)}$

$=\dfrac{x^3-xy^2-yx^2+y^3}{x^2-y^2}+\dfrac{x^3+xy^2+yx^2+y^3}{x^2-y^2}$

Ausmultiplizieren der Klammern in Zähler und Nenner

$=\dfrac{2x^3+2y^3}{x^2-y^2}$

Brüche können nun addiert werden und die Terme im Zähler werden zusammengefasst.

$=\dfrac{(2x^2-2xy+2y^2)(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{2x^2-2xy+2y^2}{x-y}$

Es kann noch durch (x+y) gekürzt werden.

(d) $\left(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{6}-z}}_{a}-\underbrace{\sqrt{z+\frac{1}{6}}}_{b}\right)^2$

Ausmultiplizieren des Klammerausdrucks mit Hilfe der 2. Binomischen Formel

$=\left(\frac{1}{6}-z\right)-\left(2\sqrt{\frac{1}{6}-z}\cdot\sqrt{z+\frac{1}{6}}\right)+\left(z+\frac{1}{6}\right)$

$=\frac{1}{3}-\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{6}-z\right)\cdot\left(z+\frac{1}{6}\right)}\right)$

Das Produkt zweier Wurzel können wir unter eine Wurzel ziehen und die Terme unter der Wurzel ausmultiplizieren. Weiter können wir den 1. und den 3. Term bereits zusammenfassen

$=\frac{1}{3}-\left(2\sqrt{\frac{1}{36}-z^2}\right)=\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{1}{9}-4z^2}$

Den Vorfaktor 2 kann man noch in die Wurzel ziehen

Lösung 3.

(a) $$\left(1+\frac{s^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{r^2-s^2}-\frac{1}{r^2+s^2}\right)-\frac{2}{r^2-s^2}$$

$$=\left(\frac{r^2}{r^2}+\frac{s^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(r^2+s^2)}{(r^2+s^2)\cdot(r^2-s^2)}-\frac{(r^2-s^2)}{(r^2-s^2)\cdot(r^2+s^2)}\right)-\frac{2}{r^2-s^2}$$

Der 1. und der 2. Term werden auf den jeweiligen Hauptnenner gebracht.

$$=\left(\frac{r^2+s^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(r^2+s^2)-(s^2-r^2)}{(r^2+s^2)\cdot(r^2-s^2)}\right)-\frac{2}{r^2-s^2}$$

Zusammenfassen der Terme liefert:

$$=\left(\frac{r^2+s^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{2s^2}{(r^2+s^2)\cdot(r^2-s^2)}\right)-\frac{2}{r^2-s^2}$$

Im Produkt der beiden Brüche kann man den Term (r^2+s^2) kürzen

$$=\frac{2s^2}{r^2(r^2-s^2)}-\frac{2}{r^2-s^2}$$

$$=\frac{2s^2}{r^2(r^2-s^2)}-\frac{2}{r^2-s^2}$$

Die beiden verbliebenen Brüche wieder auf den Hauptnenner bringen

$$=\frac{2s^2}{r^2(r^2-s^2)}-\frac{r^2\cdot 2}{r^2\cdot(r^2-s^2)}=\frac{2(s^2-r^2)}{r^2(r^2-s^2)}$$

$$=\frac{-2}{r^2}$$

Bis auf einen Faktor (-1) sind die beiden Terme in der Klammer im Zähler und Nenner gleich, d.h. kürzen

(b) $$\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}-\frac{bc}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{bc}\right)^2\cdot(b+c)^2-\left(\frac{bc}{a}-\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a^2}{b^2}$$

1. und 3. Term auf Hauptnenner bringen, 2. Term ausmultiplizieren

$$=\left(\frac{a^2c+a^2b-b^2c^2}{abc}\right)^2-\frac{a^2\cdot\left(b^2+2bc+c^2\right)}{b^2c^2}-\left(\frac{b^2c-a^2}{ab}\right)^2+\frac{a^2}{b^2}$$

Die 4 Terme jetzt auf den Hauptnenner bringen: $a^2b^2c^2$.

$$=\frac{\left(a^2c+a^2b-b^2c^2\right)^2}{a^2b^2c^2}-\frac{a^4\cdot\left(b^2+2bc+c^2\right)}{a^2b^2c^2}-\frac{c^2\left(b^2c-a^2\right)^2}{a^2b^2c^2}+\frac{a^4c^2}{a^2b^2c^2}$$

Ausmultiplizieren der Klammerterme im Zähler und zusammenfassen der Terme

$$=\frac{a^4c^2+2a^4bc-2a^2b^2c^3+a^4b^2-2a^2b^3c^2+b^4c^4}{a^2b^2c^2}$$
$$-\frac{a^4b^2+2a^4bc+a^4c^2}{a^2b^2c^2}-\frac{c^2\left(b^4c^2-2a^2b^2c+a^4\right)}{a^2b^2c^2}+\frac{a^4c^2}{a^2b^2c^2}$$

Zusammenfassen des 1., 3. und 4. Terms. Der 2. Term wird weiter ausmultipliziert.

$$=\frac{a^4c^2-2a^2b^2c^3-2a^2b^3c^2+b^4c^4}{a^2b^2c^2}$$
$$-\frac{b^4c^4-2a^2b^2c^3+a^4c^2}{a^2b^2c^2}$$

Weiter zusammenfassen, fast alle Terme tauchen mit einem positiven und einem negativen Vorzeichen auf und heben sich weg.

$$=\frac{-2a^2b^3c^2}{a^2b^2c^2}=-2b$$

Lösung 4.

(a) $\frac{7}{x+3}=\frac{5}{x-3}$

In einem Bruch darf der Nenner nicht Null werden (die Division durch Null ist nicht erklärt), d.h. die Bruchgleichung ist für alle reellen x außer $x=\pm 3$ erklärt.

$\Rightarrow \frac{7\cdot(x-3)}{x+3}=\frac{5\cdot(x-3)}{x-3}$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit *(x-3)* und können nun auf der rechten Seite den Bruch mit *(x-3)* kürzen

$\Rightarrow \frac{7\cdot(x-3)}{x+3}=5$

Nun wiederholen wir das Vorgehen mit dem Term *(x+3)*, kürzen anschließend wieder und erhalten eine Gleichung, bei der die Brüche verschwunden sind.

$\Rightarrow 7\cdot(x-3)=5\cdot(x+3)$

Ausmultiplizieren der Klammern

$\Rightarrow 7x-21=5x+15$

Nun addieren wir auf beiden Seiten *+21* und ziehen auf beiden Seiten *5x* ab und können die Lösung ablesen.

$\Rightarrow 2x=36 \Rightarrow x=18$

(b) $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0$

Die Bruchgleichung ist für alle rellen x außer $x=-1$, $x=1$, $x=2$ erklärt.

$\Rightarrow \frac{(x-1)\cdot(x+1)-2\cdot(x-2)\cdot(x+1)+(x-2)\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=0$

Wir bringen die Brüche auf der linken Seite auf den Hauptnenner.

$\Rightarrow (x-1)\cdot(x+1)-2\cdot(x-2)\cdot(x+1)+(x-2)\cdot(x-1)=0$

Jetzt multiplizieren wie beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner *(x-2)(x-1)(x+1)* durch.

$\Rightarrow x^2-1-2\cdot(x^2-x-2)+x^2-3x+2=0$

Ausmultiplizieren der Klammerterme

$\Rightarrow -x+5=0 \Rightarrow x=5$

Zusammenfassen der Terme mit x^2, x und ohne x ergibt die Lösung.

Lösung 5.

Wir zeigen dies indirekt, durch Annahme des Gegenteils und Herleitung eines Widerspruchs. Wir nehmen also an, $\sqrt{3}$ sei ein rationale Zahl, d.h. wir können diese als Bruch zweier ganzer Zahlen angeben. Dabei nehmen wir weiter an, dass der Bruch bereits vollständig gekürzt ist, d.h. die beiden Zahlen p und q sind teilerfremd:

Annahme: $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ mit $p,q \in Z$, teilerfremd, $q \neq 0$

Quadrieren der Gleichung liefert: $q^2\cdot 3=p^2$,
d.h. 3 ist ein Teiler von p^2 und somit auch ein Teiler von p.

Stellen wir die Zahl p also folgendermaßen dar: $p=3n$ $(\mathrm{n}\in \mathrm{Z})$ und setzen diese Form in unsere quadrierte Gleichung oben ein:
$q^2\cdot 3=p^2=9n^2 \Rightarrow q^2=3n^2$.

Der letzte Term besagt aber, dass q^2 ein Vielfaches von 3 ist und somit 3 ein Teiler der Zahl q^2 sein muss, d.h. dass 3 auch ein Teiler der Zahl q sein muss.

Wir haben also erhalten, dass 3 ein Teiler der Zahl p und gleichzeitig der Zahl q ist. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, das p, q teilerfremd gewählt sind.

Daraus folgt, dass unsere Annahme falsch sein muss, d.h. dass $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl sein kann und somit der Menge der irrationalen Zahlen angehören muss.

Lösung 6.

(a) Wähle Startwert $a_1=3$: Heronfolge: $a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{n-1} + \frac{10}{a_{n-1}} \right)$

n	a_n
1	3
2	19/6=3.16666667
3	721/228=3.16228070
4	1039681/328776=3.16227766
5	2161873163521/683644320912=3.16227766

(b) Wähle Startwert $a_1=8$: Heronfolge: $a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{n-1} + \frac{59}{a_{n-1}} \right)$

n	a_n
1	8
2	123/16=7.6875
3	30233/3936=7.68114837
4	1828067953/237994176=7.68114575

Lösung 7.

(a) $0 \in \mathbb{Z}$

(b) $-2 \in \mathbb{Z}$

(c) $.31 \in \mathbb{Q}$

(d) $0.2819382671538 \in \mathbb{Q}$

(e) $0.28\overline{19382671538} \in \mathbb{Q}$

(f) $\frac{5}{7} + \sqrt{2} \cdot \frac{13}{17} \in \mathbb{R}$

(g) $\sqrt{25} \in \mathbb{N}$

(h) $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

(i) $-2.7 \in \mathbb{Q}$

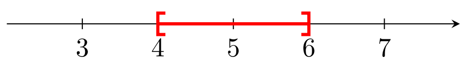
Lösung 8.
Wir nehmen an, die Aussage sei falsch, dass also eine gerade Zahl n^2 existiert, für welche n ungerade ist.

$\Longrightarrow$ $n = 2i + 1$ für ein $i \in \mathbb{Z}$ (nach Definition der Teilbarkeit).
$\Longrightarrow$ $n^2 = (2i+1)^2 = 4i^2 + 4i + 1 = 2 \cdot (2i^2 + 2i) + 1$ für ein $i \in \mathbb{Z}$.
$\Longrightarrow$ n^2 ist ungerade (nach Definition der Teilbarkeit).

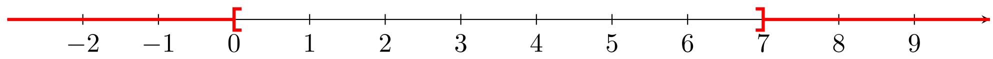
Das ist ein Widerspruch dazu, dass n^2 eine gerade Zahl ist, also kann die falsche Aussage nicht stimmen und somit stimmt die Aussage, die bewiesen werden sollte.

Lösung 9.

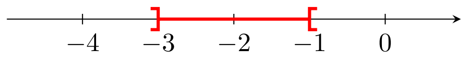
(a)



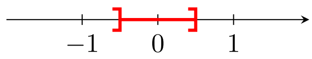
(b)



(c)

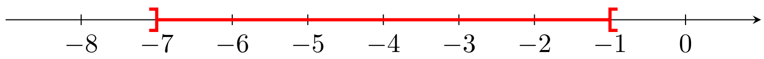


(d)

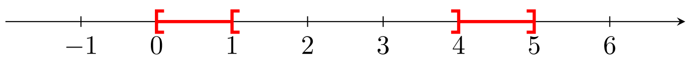


(e)

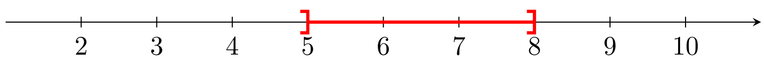
(f)



(g)



(h)



(i) Der Schnitt der beiden Intervalle ist leer: