1. Laplace & Kombinatorik

Diskrete Stochastik

Prof. Dr. Andreas Vogt

Fachhochschule Nordwestschweiz

Zufallsexperimente

Definition:

Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, welches beliebig oft wiederholt werden kann und bei jeder Durchführung ein Ergebnis aus einer bestimmten Menge von möglichen Ergebnissen annimmt.

Welches der möglichen Ergebnisse angenommen wird, ist nicht vorhersagbar.

Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes bilden die Ergebnismenge Ω.

Ein Ereignis zu einem Zufallsexperiment ist eine Aussage, die bei der Durchführung des Experimentes entweder wahr oder falsch ist, je nachdem welches Ergebnis eingetreten ist.

Beispiel: Würfelwurf

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Beispiel für ein Ereignis: E : "Die Augenzahl ist gerade"

$$E = \{2, 4, 6\}$$

Jedes Ereignis kann als Teilmenge von Ergebnissen interpretiert werden.

Die einzelnen Ergebnisse selber können ebenfalls als Ereignisse betrachtet werden: Zu einem Ergebnis $\omega \in \Omega$ gehört das sogenannte Elementarereignis $E = \{\omega\}$.

Wahrscheinlichkeiten

Zu einem mathematischen Modell für ein Zufallsexperiment gehört neben dem Ergebnisraum Ω eine Funktion P, die jedem Ereignis $E \subseteq \Omega$ eine reelle Zahl im Intervall $[0, 1]$ zuordnet, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ein Mass für die relative Häufigkeit mit der das Ereignis bei wiederholten Durchführungen des Experimentes eintritt.

Ist die Wahrscheinlichkeit z.B. 0.1, d.h. 10%, so tritt das Ereignis innerhalb von statistischen Schwankungen in 10% aller Fälle ein.

Um die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis festzulegen, kann man also das Experiment sehr oft durchführen, und schauen, welchem Wert sich die relative Häufigkeit annähert.

Dies ist natürlich überhaupt nicht praktikabel und meist nicht möglich.

Stattdessen bestimmt man die Wahrscheinlichkeiten gemäss einem Modell, welches auf "vernünftigen" Annahmen basiert, und hofft, dass das Modell etwas mit der Wirklichkeit zu tun hat.

Wenn sich herausstellt, dass die Modellannahmen falsch waren, kann man immer noch ein anderes Modell hernehmen.

Laplace-Experiment

Definition:

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit n verschiedenen möglichen Ergebnissen, die alle dieselbe Wahrscheinlichkeit, also $\frac{1}{n}$ haben.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ wird für diesen Fall folgendermassen definiert:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}}$$

Dieses mathematische Modell für ein Laplace-Experiment, bestehend aus der Menge Ω mit der Funktion P, nennt man einen Laplace-Raum.

Dieses P heisst auch Gleichverteilung.

Pierre-Simon Laplace
28.03.1749 – 05.03.1827

Beispiel: Würfelwurf

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für eine Augenzahl grösser als 4? $E = \{5, 6\}$

Es scheint sinnvoll, dieses Experiment als Laplace-Experiment zu modellieren.

Die Festlegung des Modells ist nicht Sache der Mathematik.

Wenn uns Physiker sagen, dass die 1 wahrscheinlicher ist als die 6, da die Seite mit der 6 schwerer ist, da sechsmal so viel Farbe drauf ist, dann ist uns das auch egal. Wir würden dann einfach ein anderes Modell nehmen.

Im Laplace-Raum gilt: $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33.33\%$

Laplace-Experiment

Im Laplace-Raum sind für Mengen M die Anzahl der Elemente, $|M|$, zu bestimmen.

Die Kombinatorik liefert systematische Abzählverfahren.

Die Kombinatorik basiert auf sehr wenigen einfachen Regeln, die aber in Kombination beliebig komplex werden können.

Grundlegende Regeln

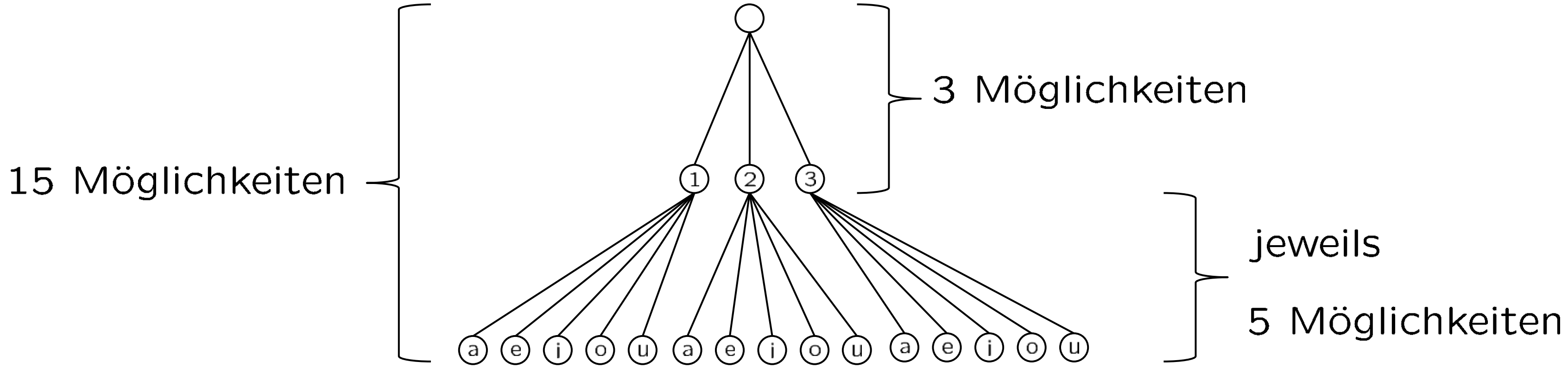
Produktregel

Wenn es bei einem mehrstufigen Auswahlprozess für das 1. Objekt n_1 Möglichkeiten, für das 2. Objekt n_2 Möglichkeiten,..., und für das k-te Objekt n_k Möglichkeiten gibt, dann gibt es für den gesamten Auswahlprozess $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ Möglichkeiten.

Veranschaulichung:

Wir wählen zunächst eine Zahl zwischen 1 und 3, und anschliessend einen Vokal.

Wie viele Möglichkeiten gibt es?



Hintergrund: Für endliche Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ gilt

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$$

Grundlegende Regeln

Produktregel

Wenn es bei einem mehrstufigen Auswahlprozess für das 1. Objekt n_1 Möglichkeiten, für das 2. Objekt n_2 Möglichkeiten,$\ldots$, und für das k-te Objekt n_k Möglichkeiten gibt, dann gibt es für den gesamten Auswahlprozess $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ Möglichkeiten.

Beispiele:

(1) Wie viele Passwörter bestehend aus drei Kleinbuchstaben gibt es?

26 Möglichkeiten für den ersten Buchstaben, 26 für den zweiten und 26 für den dritten, ergibt insgesamt $26^3 = 17.576$.

(2) Wie viele Passwörter bestehend aus drei Kleinbuchstaben gibt es, wenn die ersten beiden Buchstaben verschieden sein müssen?

26 Möglichkeiten für den ersten Buchstaben, 25 für den zweiten und 26 für den dritten, ergibt insgesamt $26 \cdot 25 \cdot 26 = 16.900$.

Grundlegende Regeln

Summenregel

Wenn es n_1 Objekte mit Eigenschaft 1, n_2 Objekte mit Eigenschaft 2, ..., n_k Objekte mit Eigenschaft k gibt, und kein Objekt zwei der Eigenschaften gleichzeitig besitzt, dann gibt es insgesamt $n_1+n_2+\ldots+n_k$ Objekte, die eine der Eigenschaften besitzen.

Beispiel:

Eine Mietwagenfirma hat 5 Kleinwagen, 3 Mittelklassewagen und 2 Oberklassewagen.

Da kein Auto sowohl Klein- und Mittelklasse- oder Klein- und Oberklasse- oder Mittel- und Oberklassewagen ist, hat die Firma insgesamt $5+3+2=10$ Wagen.

Hintergrund: Für endliche paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ gilt

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

Grundlegende Regeln

Summenregel

Wenn es n_1 Objekte mit Eigenschaft 1, n_2 Objekte mit Eigenschaft 2, ..., n_k Objekte mit Eigenschaft k gibt, und kein Objekt zwei der Eigenschaften gleichzeitig besitzt, dann gibt es insgesamt $n_1+n_2+\ldots+n_k$ Objekte, die eine der Eigenschaften besitzen.

Beispiele:

(1) Wie viele Passwörter bestehend aus drei Zeichen gibt es, die entweder nur aus Kleinbuchstaben oder nur aus Ziffern bestehen?

Gemäss der Produktregel gibt es 26^3 Passwörter die nur aus Kleinbuchstaben bestehen.

Gemäss der Produktregel gibt es 10^3 Passwörter die nur aus Ziffern bestehen.

Da kein Passwort gleichzeitig nur aus Ziffern und nur aus Buchstaben besteht, sagt die Summenregel, dass es insgesamt $26^3+10^3 = 18.576$ Passwörter gibt, die aus drei Kleinbuchstaben oder 3 Ziffern bestehen.

Grundlegende Regeln

Summenregel

Wenn es n_1 Objekte mit Eigenschaft 1, n_2 Objekte mit Eigenschaft 2, ..., n_k Objekte mit Eigenschaft k gibt, und kein Objekt zwei der Eigenschaften gleichzeitig besitzt, dann gibt es insgesamt $n_1+n_2+\ldots+n_k$ Objekte, die eine der Eigenschaften besitzen.

Beispiele:

(2) Wie viele Passwörter bestehend aus drei Zeichen gibt es, die aus genau zwei Kleinbuchstaben und einer Ziffer bestehen?

Gemäss der Produktregel gibt es $10 \cdot 26 \cdot 26$ Passwörter, die an der ersten Stelle eine Ziffer haben, und an der zweiten und dritten jeweils einen Buchstaben.
Gemäss der Produktregel gibt es $26 \cdot 10 \cdot 26$ Passwörter, die an der zweiten Stelle eine Ziffer haben, und an der ersten und dritten jeweils einen Buchstaben.
Gemäss der Produktregel gibt es $26 \cdot 26 \cdot 10$ Passwörter, die an der dritten Stelle eine Ziffer haben, und an der ersten und zweiten jeweils einen Buchstaben.
Die Passwörter der einzelnen Gruppen sind alle verschieden (da jedes der betrachteten Passwörter entweder an der ersten, der zweiten oder der dritten Stelle eine Ziffer hat, aber nicht mehr als eine Ziffer), ergibt sich die gesuchte Anzahl mit Hilfe der Summenregel zu $3 \cdot 10 \cdot 26^2 = 20.280$.

Grundlegende Regeln – Lernkontrolle

(1) Wie viele Passwörter der Länge 3 aus Kleinbuchstaben gibt es, in denen genau ein `a` vorkommt?

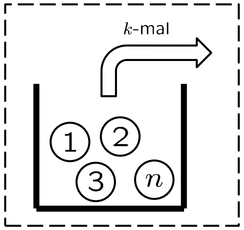
(2) Wie viele Passwörter der Länge 3 aus Kleinbuchstaben gibt es, in denen mindestens ein `a` vorkommt?

Serie 1, A.1–A.15

Urnenmodell

Viele Abzählprobleme lassen sich auf das sogenannte Urnenmodell zurückführen.

Gegeben ist eine Urne mit n unterschiedlichen Kugeln.



Wir ziehen k Kugeln aus den n Kugeln. Auf wie viele Arten geht das, wenn

(1) wir die Kugeln wieder zurücklegen und die Reihenfolge der gezogenen Kugeln wichtig ist?

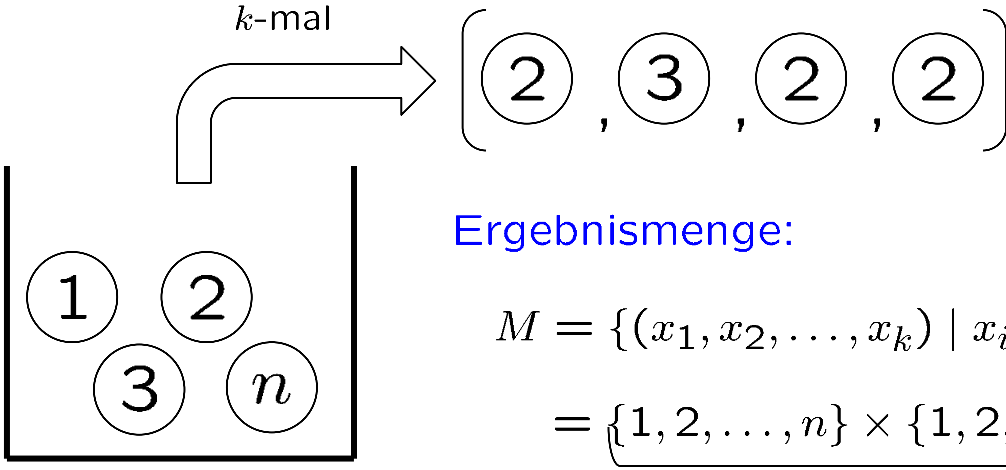
(2) wir die Kugeln nicht zurücklegen und die Reihenfolge der gezogenen Kugeln wichtig ist?

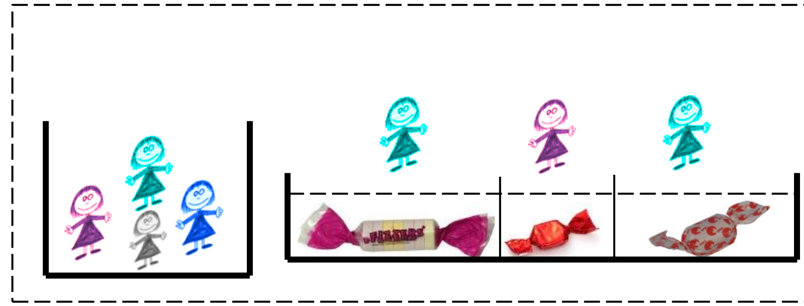
(3) wir die Kugeln nicht zurücklegen und die Reihenfolge der gezogenen Kugeln nicht wichtig ist?

(4) wir die Kugeln wieder zurücklegen und die Reihenfolge der gezogenen Kugeln nicht wichtig ist?

Urnenmodell

(1) Mit Zurücklegen, mit Reihenfolge





Ergebnismenge:

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in \{1, 2, \dots, n\} \ \ (i = 1, 2, \dots, k)\}$$

$$= \underbrace{\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} \times \dots \times \{1, 2, \dots, n\}}_{k\text{-mal}}$$

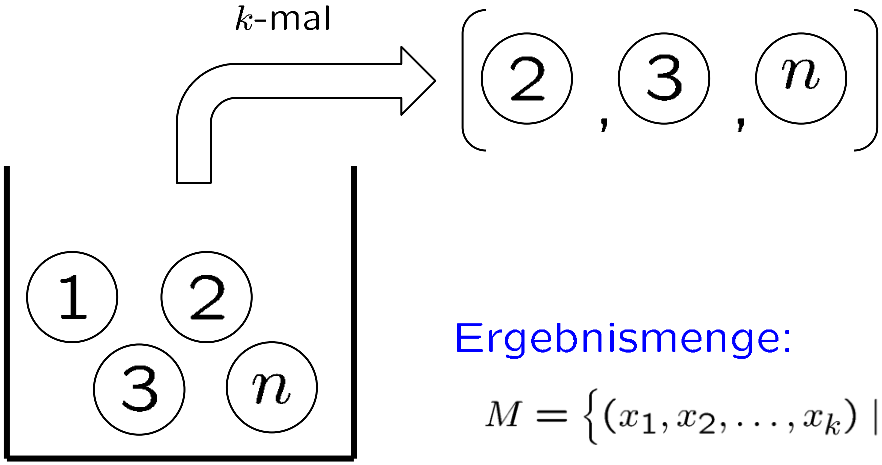
Es gibt also $|M| = n^k$ Möglichkeiten.

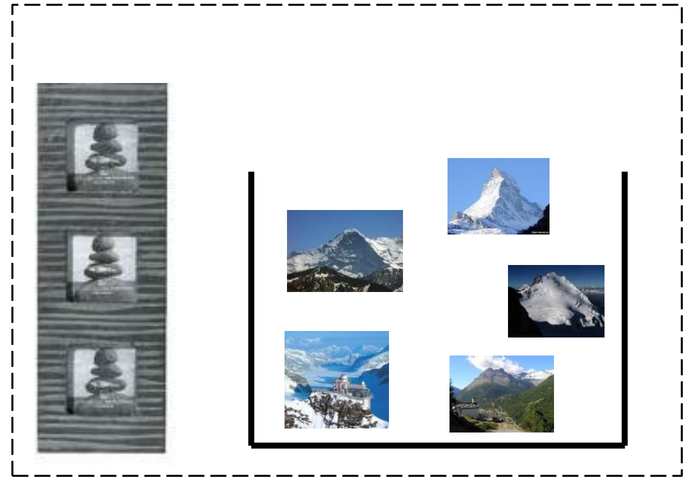
Beispiel:

Gegeben seien 3 unterschiedliche Bonbons und 4 Kinder. Auf wie viele Arten kann man die Bonbons auf die Kinder verteilen (wobei Kinder auch leer augehen können)?

Für jedes Bonbon, also $k = 3$ mal, ziehen wir eins aus den $n = 4$ Kindern, welches das Bonbon bekommt. Dabei ist die Reihenfolge in der wir die Kinder ziehen wichtig, da die Bonbons unterschiedlich sind, und wir legen ein gezogenes Kind wieder zurück, da es auch das nächste Bonbon bekommen kann.

(2) Ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge





Ergebnismenge:

$$M = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ \ (i = 1, 2, \ldots, k) \wedge x_i \neq x_j \ (i \neq j) \right\}$$

Für die erste Kugel gibt es n Möglichkeiten,

für die zweite $n-1$,

für die dritte $n-2$,

$\vdots$

für die k-te $\boxed{}$

insgesamt $|M| = \boxed{}$ Möglichkeiten.

Beispiel:

Gegeben sei ein Bilderrahmen mit drei untereinander angeordneten Plätzen und 5 Fotos. Auf wie viele Arten kann man den Bilderrahmen füllen?
Wir ziehen $k = 3$ mal aus einer Menge von $n = 5$ Fotos. Ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge. Es gibt also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

Fakultät

insgesamt $|M| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten.

(2) Ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge

Spezialfall $n = k$:

Wir ziehen n mal ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit n Kugeln. Dann gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

Definition: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann heisst

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1$$

Fakultät von n.

Zudem ist $0! := 1$.

1!	1
2!	2
3!	6
4!	24
5!	120
6!	720
7!	5.040
8!	40.320
9!	362.880
10!	3.628.800
11!	39.916.800
12!	479.001.600
13!	6.227.020.800
14!	87.178.291.200
15!	1.307.674.368.000
16!	20.922.789.888.000
17!	355.687.428.096.000
18!	6.402.373.705.728.000
19!	121.645.100.408.832.000
20!	2.432.902.008.176.640.000

$n!$ wächst sehr schnell.

Es gilt $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Beispiel:

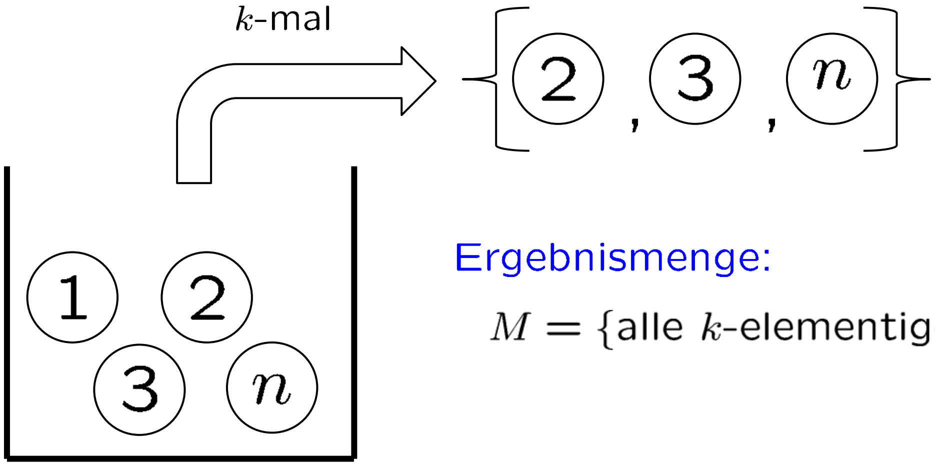
Auf wie viele Arten kann man 10 verschiedene Bücher nebeneinander anordnen?

Wir ziehen also ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge 10 mal ein Buch aus 10 Büchern. Dafür gibt es 10! Möglichkeiten.

Bemerkung: Es gilt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Urnenmodell

(3) Ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge



Ergebnismenge:

$M = \{$alle k-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}\}$

Beispiel: $n = 5$, $k = 3$

$M = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}\}$

Wenn wir mit Beachtung der Reihenfolge ziehen würden, wäre

$$\begin{aligned} M_R = \{&(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),\\ &(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1),\\ &(1,2,5),(1,5,2),(2,1,5),(2,5,1),(5,1,2),(5,2,1),\ \dots\} \end{aligned}$$

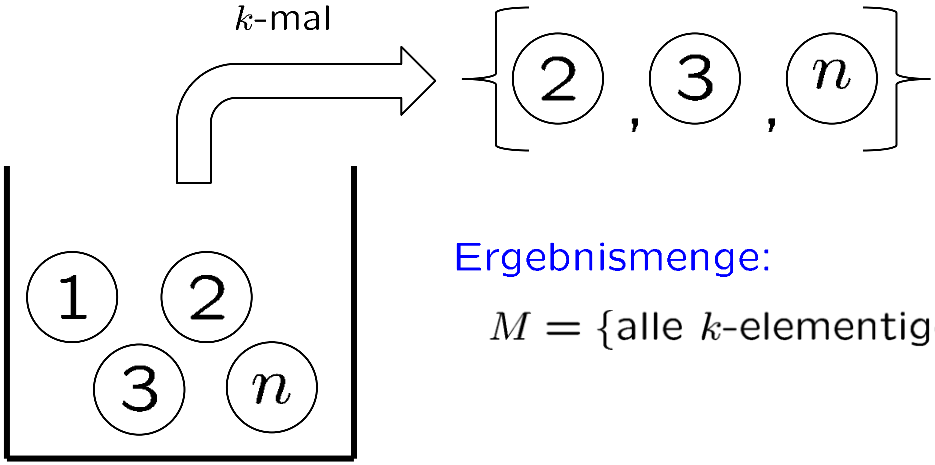
Es gilt $|M_R| = 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Was ist der Zusammenhang zwischen $|M|$ und $|M_R|$?

Für jedes Element in M gibt es 6 Elemente in M_R, also so viele, wie es Anordnungen von $k = 3$ Elementen gibt.

Urnenmodell

(3) Ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge



Ergebnismenge:

$$M = \{\text{alle } k\text{-elementigen Teilmengen von } \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

Es gilt also $|M| \cdot k! = |M_R|$, also $|M| = \frac{|M_R|}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Beispiel:

6 aus 42: Wie viele verschiedene Lotto-Scheine gibt es?

Wir ziehen $k = 6$ mal aus einer Menge von $n = 42$ Zahlen. Ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge. Es gibt also $\frac{42!}{(42-6)!6!} = 5.245.786$ Möglichkeiten.

Binomialkoeffizient

Definition: Es sei $0 \leq k \leq n$.

Dann ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ definiert als $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Für $k > n$ ist $\binom{n}{k} := 0$.

Man sagt: "n über k".

$\binom{n}{k}$ gibt also die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an.

Beispiele:

(1) In einen Ausschuss werden aus einer Gruppe von 12 Leuten 5 gewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Wir ziehen $k = 5$ mal aus einer Menge von $n = 12$ Leuten. Ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge. Es gibt also $\binom{12}{5}$ Möglichkeiten.

(2) In einen Ausschuss werden aus einer Gruppe von 8 Frauen und 4 Männern 3 Frauen und 2 Männer gewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Wir ziehen zunächst $k = 3$ Frauen aus $n = 8$ Frauen, ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. Dafür gibt es $\binom{8}{3}$ Möglichkeiten.

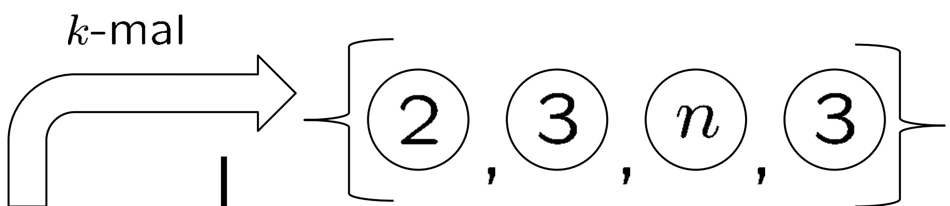
Nun ziehen wir $k = 2$ Männer aus $n = 4$ Männern, ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. Dafür gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es $\binom{8}{3} \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten.

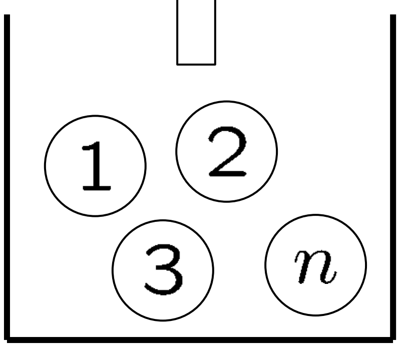
Urnenmodell

(4) Mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge

(Nur der Vollständigkeit halber, wird hier nicht benötigt.)



Das Resultat ist eine sogenannte Multimenge, d.h. eine Menge, die Elemente mehrfach enthält.



Ergebnismenge:

$$M = \{\text{alle } k\text{-elementigen Multimengen von } \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

Es gilt $|M| = \binom{k+n-1}{k}$.

Urnenmodell

Beispiel:

Bei einer Ziehung im Lotto 6 aus 45 werden 6 der Zahlen ohne Zurücklegen gezogen, wobei die Reihenfolge der gezogenen Zahlen nicht beachtet wird.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dafür dass

(1) alle Zahlen grösser als 10 sind?

(2) man 6 Richtige hat?

(3) mindestens 4 Richtige hat?

Lösung: $\Omega = \{$alle 6-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, 45\}\}$
Modellierung als Laplace-Experiment

(1) $E = \{$alle 6-elementigen Teilmengen von $\{11, \ldots, 45\}\}$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{35}{6}}{\binom{45}{6}} \approx 19.93\%$$

(2) $|E| = 1$ $$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{1}{\binom{45}{6}} \approx 0.0000123\%$$

(3) $|E| = \binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2} + \binom{6}{5} \cdot \binom{39}{1} + 1$ (vgl. Ausschuss-Bsp. auf Folie 1.18)

Urnenmodell

Geburtstagsparadoxon

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Leuten zwei am selben Tag Geburtstag haben?

Modellierung: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 365\}^n$

$P =$ Gleichverteilung (nicht ganz realistisch, aber sehr gute Näherung)

Gesuchtes Ereignis: $A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega \mid \exists i \neq j : \omega_i = \omega_j\}$

Es gilt $\Omega \backslash A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega \mid \text{alle } \omega_i \text{ verschieden}\}$.

Wir erhalten also:

$$|A| = |\Omega| - |\{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega \mid \text{alle } \omega_i \text{ verschieden}\}| =$$

$$= 365^n - 365 \cdot (365 - 1) \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1).$$

Und somit: $P(A) = 1 - \dfrac{365 \cdot (365 - 1) \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$.

Für $n = 23$ ergibt sich $P(A)$ $\boxed{}$

Serie 1, A.16–A.32