Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Fachhochschule Nordwestschweiz

Übungsblatt 9

Lösungen

Lösung 1.

(a) $\int 3x^2 - 4x + 7 \,\mathrm{d}x = x^3 - 2x^2 + 7x + C$

(b) $\int x^3 + x^{\frac{8}{7}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{\frac{15}{7}}x^{\frac{15}{7}} + C = \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{15}x^{\frac{15}{7}} + C$

(c) $\int x^2 - \frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^{-\frac{2}{5}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}\cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{5}} + C$

(d) $\int 9x^2 + 12x + 4 \,\mathrm{d}x = 3x^3 + 6x^2 + 4x + C$

(e) $\int 25x^{-2} \,\mathrm{d}x = 25 \cdot \frac{1}{-1} \cdot x^{-1} + C = -25x^{-1} + C$

(f) $\int \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x+1} \,\mathrm{d}x = \int x - 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - x + C$

(g)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 6x + 9}{x^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x &= \int x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + 9x^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 9 \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + 18x^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

Lösung 2.

(a) Es ist $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$. Nun müssen wir noch die Konstante C bestimmen, indem wir die Gleichung $f(2) = 9$ nach C auflösen: Es ist $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + C = 9$ und somit gilt $C = 13$. Deshalb ist $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$.

(b) Es ist $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C$. Lösen wir die Gleichung $f(0) = 8$ nach C auf, bekommen wir $C = 8$ und damit die Lösung $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 8$.

(c) Es ist $f(x) = \int -1 \cdot x^{-2} + x^1 \,\mathrm{d}x = -1 \cdot \dfrac{1}{-2+1} \cdot x^{-2+1} + \dfrac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} + C = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} + C$. Die Konstante $C = -\frac{1}{2}$ ergibt sich aus der Gleichung $f(1) = \frac{1}{1} + \frac{1^2}{2} + C = 1 + \frac{1}{2} + C = \frac{3}{2} + C = 1$. Somit ist $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

Lösung 3.

(a) $\displaystyle\int ax \,\mathrm{d}x = a \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + C = \frac{a}{2}x^2 + C$

Kontrolle: $\left(\frac{a}{2}x^2 + C\right)' = \frac{a}{2} \cdot 2 \cdot x^1 = ax$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$

Kontrolle: $\left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \int x^{-\frac{2}{3}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} \cdot x^{-\frac{2}{3}+1} + C = x^{\frac{1}{3}} + C = \sqrt[3]{x} + C$

Kontrolle: $\left(\sqrt[3]{x} + C\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}} + C\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

(d) $\displaystyle\int x^{a+3b} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+3b+1} \cdot x^{a+3b+1} + C$

Kontrolle: $\left(\frac{1}{a+3b+1} \cdot x^{a+3b+1} + C\right)' = \frac{1}{a+3b+1} \cdot (a+3b+1) \cdot x^{a+3b+1-1} + C = x^{a+3b}$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{a^2} - \frac{a}{x^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2} \cdot x^2 - a \cdot x^{-2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} - a \cdot \frac{1}{-2+1} \cdot x^{-2+1} + C = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{a}{x} + C$

Kontrolle: $\left(\frac{x^3}{3a^2} + \frac{a}{x} + C\right)' = \left(\frac{1}{3a^2} \cdot x^3 + a \cdot x^{-1} + C\right)' = \frac{1}{3a^2} \cdot 3 \cdot x^2 + a \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{a}{x^2}$

(f)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{a^2} - \frac{a}{x^2} \,\mathrm{d}a &= \int x^2 \cdot a^{-2} - \frac{1}{x^2} a^1 \,\mathrm{d}a = x^2 \cdot \frac{1}{-2+1} \cdot a^{-2+1} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+1} \cdot a^{1+1} + C \\ &= -\frac{x^2}{a} - \frac{a^2}{2x^2} + C\end{aligned}$$

Kontrolle:
$\left(-\frac{x^2}{a} - \frac{a^2}{2x^2} + C\right)' = \left(-x^2 \cdot a^{-1} - \frac{1}{2x^2} \cdot a^2 + C\right)' = -x^2 \cdot (-1) \cdot a^{-2} - \frac{1}{2x^2} \cdot 2 \cdot a^1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{a}{x^2}$

Lösung 4.
Es ist $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$ und somit haben wir

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{2x}_{v'(x)} \cdot \left(\underbrace{1+x^2}_{v(x)}\right)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}_{U(v(x))} + C = \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Kontrolle: $\left(\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x + 0 = 2x \cdot \sqrt{1+x^2}$

Lösung 5.

(a) Es ist

$$D(t) = \int 1975 - 1190t + 597t^2 - 71.3t^3 \,\mathrm{d}t = 1975t - 1190 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 + 597 \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 - 71.3 \cdot \frac{1}{4}t^4 + C$$
$$= 1975t - 595t^2 + 199t^3 - 17.825t^4 + C\,.$$

Wegen $D(0) = C = 17.198$ gilt

$$D(t) = 1975t - 595t^2 + 199t^3 - 17.825t^4 + 17.198\,.$$

(b) $D(6) = 10\,329.998$

Lösung 6.
Aus der Mechanik kennt man:

$$s'(t) = v(t)$$
$$v'(t) = a(t)$$

Also ist die Geschwindigkeit gegeben durch

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int -9.81\,\mathrm{d}t = -9.81t + C\,.$$

Mit $v(0) = C = v_0$ folgt somit $v(t) = -9.81t + v_0$. Die Höhe berechnet sich durch

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int -9.81t + v_0\,\mathrm{d}t = -4.905t^2 + v_0t + C\,,$$

und speziell für $s(0) = C = s_0$ gilt

$$s(t) = -4.905t^2 + v_0t + s_0\,.$$

Lösung 7.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x-5}\,\mathrm{d}x = \int (x-5)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot (x-5)^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} \cdot (x-5)^{\frac{3}{2}} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-5)^2}\,\mathrm{d}x = \int (2x-5)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2+1} \cdot (2x-5)^{-2+1} + C = \frac{1}{10-4x} + C$