n|w Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Serie 3

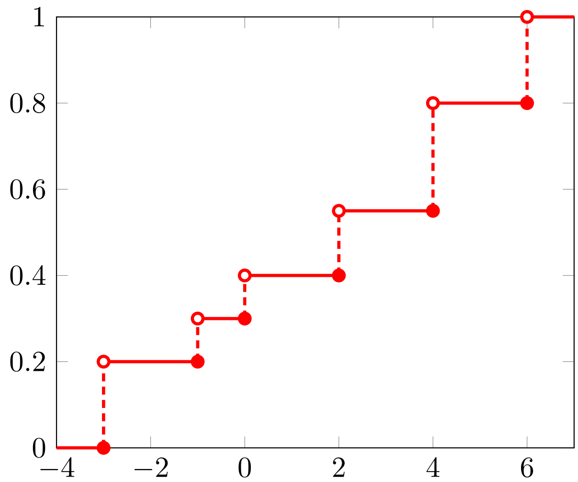
Aufgabe 1. Die Zufallsvariable X ist durch die nachstehende Tabelle definiert:

x_i	-3	-1	0	2	4	6
$P(X = x_i)$	0.2	0.1	0.1	0.15	0.25	a

1. Wie gross ist a?
2. Zeichnen Sie den Graphen der Verteilungsfunktion von X.
3. Berechnen Sie $P(0 < X \leq 4)$ und $P(X^2 \leq 10)$.

Lösung.

1. $1 - 0.2 - 0.1 - 0.1 - 0.15 - 0.25 = 0.2$
2.



3. $P(0 < X \leq 4) = 0.15 + 0.25 = 0.4$ und $P(X^2 \leq 10) = 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.15 = 0.55$

Aufgabe 2. Wir würfeln mit zwei Würfeln. Sind die Augenzahlen gleich, dann ist der Gewinn X gleich dieser Augenzahl. Andernfalls ist der Gewinn gleich der Differenz zwischen der grösseren und der kleineren Augenzahl. Wir gross ist $P(X \leq 3)$?

Lösung. $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = P(\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.75$

Aufgabe 3. Eine ausgewogene Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariablen X bzw. Y bezeichnen die Anzahl Köpfe in den ersten beiden bzw. letzten beiden Würfen.

1. Geben Sie die möglichen Werte für X und Y mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten in einer Tabelle an.
2. Dasselbe für $X + Y$.
3. Berechnen Sie $P(X \leq 1)$ und $P(X + Y \leq 2)$.

Lösung. 1.

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

y	0	1	2
$P(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2.

z	0	1	2	3	4
$P(X+Y=z)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

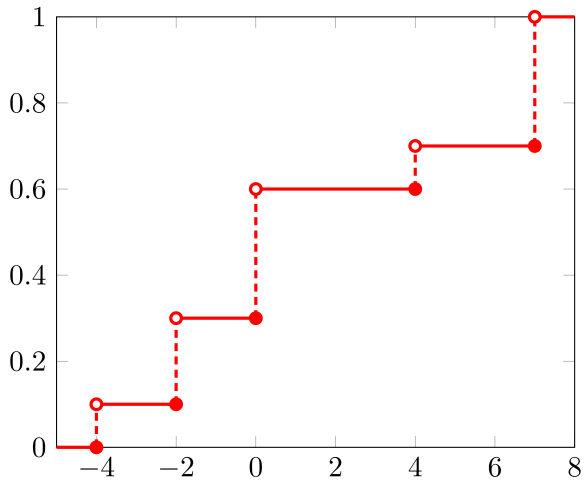
3. $P(X \leq 1) = 0.75$ und $P(X+Y \leq 2) = 0.625$

Aufgabe 4. Die Zufallsvariable X ist durch die nachstehende Tabelle definiert:

x_i	-4	-2	0	4	7
$P(X=x_i)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.3

1. Zeichnen Sie den Graphen der Verteilungsfunktion von X.
2. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung.
3. Berechnen Sie $P(X \geq 2)$ und $P(|X| \geq 3)$.

Lösung. 1.



2. $E(X) = -4 \cdot 0.1 - 2 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.1 + 7 \cdot 0.3 = 1.7$, $V(X) = (-4-1.7)^2 \cdot 0.1 + (-2-1.7)^2 \cdot 0.2 + (0-1.7)^2 \cdot 0.3 + (4-1.7)^2 \cdot 0.1 + (7-1.7)^2 \cdot 0.3 = 15.81$, $\sigma = \sqrt{V(X)} = 3.9762$
3. $P(X \geq 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$ und $P(|X| \geq 3) = 0.1 + 0.1 + 0.3 = 0.5$.

Aufgabe 5. Die Zufallsvariable X ist durch die nachstehende Tabelle definiert:

x_i	-2	-1	1	3	4
$P(X=x_i)$	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3

1. Geben Sie die Tabelle für $Y = 2X + 1$ und $Z = X^2$ an.
2. Berechnen Sie $E(Y), E(Z), V(Y), V(Z)$.
3. Verifizieren Sie die Gültigkeit von $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Lösung. 1.

y_i	-3	-1	3	7	9
$P(Y = y_i)$	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3

z_i	1	4	9	16
$P(Z = z_i)$	0.3	0.1	0.3	0.3

2. $E(Y) = 5$, $E(Z) = 8.2$, $V(Y) = 16.8$, $V(Z) = 35.76$

3. $E(X) = 2$, also $E(X^2) - E(X)^2 = 8.2 - 4 = 4.2 = V(X)$

Aufgabe 6. Bei einem Würfelspiel darf man einmal würfeln, es sei denn, es sei eine Sechs gefallen. In diesem Fall hat man noch einen zweiten (und in jedem Fall letzten) Wurf. Man gewinnt die totale Augenzahl in Franken. Wie gross ist der zu erwartende Gewinn?

1. Bei einem fairen Würfel.

2. Bei einem manipulierten Würfel, wo die Eins die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$, die Sechs eine von $\frac{1}{9}$ hat (übrige Wahrscheinlichkeiten unverändert).

Lösung. 1. $1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{36} + 8 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{1}{36} + 10 \cdot \frac{1}{36} + 11 \cdot \frac{1}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 4.0833$

2. 3.5802

Aufgabe 7. Für eine Prüfung müssen 20 Stoffgebiete vorbereitet werden, von denen dann 4 zufällig ausgewählte an die Reihe kommen. Eine betroffene Person hat leider nur 10 dieser Gebiete gelernt. Die Zufallsvariable G gibt an, wie viele der vier Fragen aus einem gelernten Gebiet stammen.

1. Geben Sie die Verteilung von G in Tabellenform an.

2. Berechnen Sie $E(G)$.

Lösung. 1.

x	0	1	2	3	4
$P(G = x)$	14/323	80/323	135/323	80/323	14/323

Hierbei ist etwa $P(G = 3) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{20}{4}}$.

2. $E(G) = 2$.

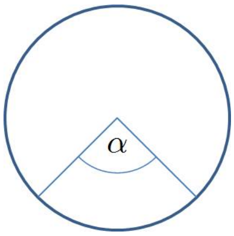
Aufgabe 8. Ein (nicht sehr faires) Glücksspiel hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 25% und offeriert im Gewinnfall eine Auszahlung von CHF 5, wobei der Einsatz CHF 2.50 beträgt. Ich spiele so oft, bis ich zum ersten Mal gewonnen oder bis ich CHF 10 verloren habe. Wir gross ist der zu erwartende Reingewinn?

Lösung. Es bezeichne G den Gewinn. Wir erhalten

x	$P(G = x)$
2.5 (direkt gewonnen)	0.25
0 (einmal verloren, dann gewonnen)	$0.75 \cdot 0.25$
-2.5 (zweimal verloren, dann gewonnen)	$0.75^2 \cdot 0.25$
-5 (dreimal verloren, dann gewonnen)	$0.75^3 \cdot 0.25$
-10 (viermal verloren)	0.75^4

und damit $E(G) = -3.418$.

Aufgabe 9. Durch Drehen eines Glücksrades wird entschieden, ob Ihr Kapital verdoppelt oder halbiert wird. (Falls das Glücksrad in der unteren Skizze im durch α markierten Bereich anhält, wird verdoppelt.) Dies wird zweimal durchgeführt, wobei Sie mit einem Einsatz von CHF 8 beginnen. Wir gross muss der Winkel α sein, damit das Spiel fair ist, d.h. damit der Erwartungswert für das Kapital am Schluss gleich dem Einsatz ist?



Lösung. Wir bezeichnen mit p die Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital verdoppelt wird. Mit X bezeichnen wir das Kapital am Schluss. Dann kann X die Werte 32, 8 und 2 annehmen. Wir erhalten $E(X) = 32 \cdot p^2 + 8 \cdot (p(1-p) + (1-p)p) + 2(1-p)^2 = 32p^2 + 16p(1-p) + 2(1-p)^2 = 32p^2 + 16p - 16p^2 + 2 - 4p + 2p^2 = 18p^2 + 12p + 2$, also $E(X) = 8$ falls $18p^2 + 12p - 6 = 0$, d.h. $p^2 + \frac{2}{3}p - \frac{1}{3} = 0$, was für $p = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$, erfüllt ist. Davon ist nur $p = \frac{1}{3}$ positiv. Damit muss der Winkel $\frac{1}{3} \cdot 360°$ betragen.

Aufgabe 10. Ein Konditor stellt üppige Crème-Torte her, die aber gleichentags verkaufen muss. Die Herstellung kostet in CHF 8, der Verkaufspreis beträgt CHF 20. Mehr als 4 Torten pro Tag sind noch nie verlangt worden. Aus Erfahrung kennt er die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

k	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit für k nachfragte Torten	0.05	0.25	0.4	0.2	0.1

Wie viele Torten muss er pro Tag produzieren, damit sein erwarteter Gewinn (auf das Crème-Torten-Geschäft bezogen) maximal ist?

Lösung. Es sei X_i die Zufallsvariable, die den Gewinn beschreibt, wenn der Konditor i Torten backt. Wir berechnen beispielhaft $E(X_2)$. Er produziert also 2 Torten. X_2 kann nun die Werte -16 (wenn keine Torte nachgefragt wird), 4 (wenn eine Torte nachgefragt wird) und 24 (wenn zwei oder mehr Torten nachgefragt werden). Es ergibt sich: $E(X_2) = -16 \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.25 + 24 \cdot 0.7 = 17$.

Man erhält analog: $E(X_0) = 0$, $E(X_1) = 11$, $E(X_2) = 17$, $E(X_3) = 15$ und $E(X_4) = 9$. Zwei Torten sind also optimal.

Aufgabe 11. An einem Bahnhof wurde festgestellt, dass die Züge im Mittel eine Minute zu früh eintrafen. Zudem wurde festgestellt, dass die Abweichungen vom Fahrplan mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten statt fanden:

$$p = \begin{cases} 0.1 & \text{wenn ein Zug drei Minuten zu früh eintrifft} \\ 0.2 & \text{wenn ein Zug zwei Minuten zu früh eintrifft} \\ 0.4 & \text{wenn ein Zug eine Minute zu früh eintrifft} \\ p_4 & \text{wenn ein Zug rechtzeitig eintrifft} \\ p_5 & \text{wenn ein Zug eine Minute zu spät eintrifft} \\ 0 & \text{alle anderen Ankunftssituationen} \end{cases}$$

1. Ermitteln Sie die unbekannten Wahrscheinlichkeiten p_4 und p_5.
2. Bestimmen Sie die Zähldichte und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X, welche die Abweichung vom Fahrplan in Minuten misst.
3. Wie gross ist die Varianz $V(X)$?

Lösung. 1. Aus den Gleichungen $0.7+p_4+p_5 = 1$ und $-3\cdot 0.1-2\cdot 0.2-0.4+0\cdot p_4+p_5 = -1$ ergibt sich $p_4 = 0.2$ und $p_5 = 0.1$.

2. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X, welche die Abweichung vom Fahrplan in Minuten misst, ist in folgender Tabelle gegeben.

k	1	2	3	4	5
x_k	-3	-2	-1	0	1
$P(X = x_k)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1
$P(X \leq x_k)$	0.1	0.3	0.7	0.9	1.0

3. $V(X) = 1.2$