

# Übungsblatt 4

## Konvergenz von Funktionen und Stetigkeit

### Aufgabe 1.

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen.

(a)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

(b)  $g(x) = \frac{2x^7-5x^3+12x-100}{x^3-x^2}$

(c)  $h(x) = \sqrt{x^2-1}$ . Bestimmen Sie zudem der Wertebereich der Funktion  $h(x)$ .

### Aufgabe 2.

Skizzieren Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen. Welche Funktionen sind gerade bzw. ungerade?

(a)  $f_1(x) = \frac{x+|x|}{2}$

(b)  $f_2(x) = |x+1| + |x-1|$

(c)  $f_3(x) = -|x+1| + |x-1|$

(d)  $f_4(x) = 2x + |x|$

Hinweis: Schreiben Sie die Funktionen zunächst betragsfrei. Dabei muss eine Fallunterscheidung gemacht werden.

### Aufgabe 3.

Bestimmen Sie die Polstellen und die Art der Polstellen (d. h. mit oder ohne Vorzeichenwechsel) und die hebbaren Definitionslücken von

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+4)^3 x^2}.$$

### Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die Nullstellen, Polstellen und hebbare Definitionslücken der folgenden Funktionen

- (a)  $f_1(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)}$
- (b)  $f_2(x) = \frac{(x-2)^2 \cdot (x-1)}{(x-2)^3}$
- (c)  $f_3(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)^2(x+1)}$
- (d)  $f_4(x) = \frac{-x^2+x+2}{2x^3+3}$

### Aufgabe 5.

Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte oder begründen Sie, dass kein Grenzwert existiert. Überprüfen Sie das Resultat mit Matlab, wolframalpha oder einem analogen Tool.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 1}{x} \right)$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{|x - 1|}{x - 1} \right)$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{|x|}{x} \right)$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , wobei  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } x > 0 \\ x^3, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$
- (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}}$

### Aufgabe 6.

Überlegen Sie sich, was die folgenden Funktionsgrenzwerte sein sollten (bzw. ob diese überhaupt existieren). Berechnen Sie anschliessend mit Matlab, wolframalpha oder einem analogen Tool die folgenden Funktionsgrenzwerte (falls existent).

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(3x)}{x} \right)$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right)$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{x^2} \right)$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{x^2} \right)$

### Aufgabe 7.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihre Unstetigkeitsstellen.

- (a)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$
- (b)  $g(x) = \frac{1}{x}$

### Aufgabe 8.

Bestimmen Sie reelle Zahlen  $a$  und  $b$  so, dass die folgende Funktion  $f$  stetig ist auf  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{für } 1 < x < 2 \\ 2x + 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

### Aufgabe 9.

(a) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1-x}{1-|x|}$$

ist für  $x = \pm 1$  nicht definiert. Ist es möglich, die Funktionswerte an diesen Stellen so festzulegen, dass  $f$  dort stetig ist?

(b) Die Funktion

$$g(x) = \frac{|x|}{2x}$$

ist für  $x = 0$  nicht definiert. Ist es möglich, den Funktionswert an dieser Stelle so festzulegen, dass  $g$  dort stetig ist?