Einführung in die Analysis
5. Ausgewählte Funktionen und deren Eigenschaften: Vorlesungsinput

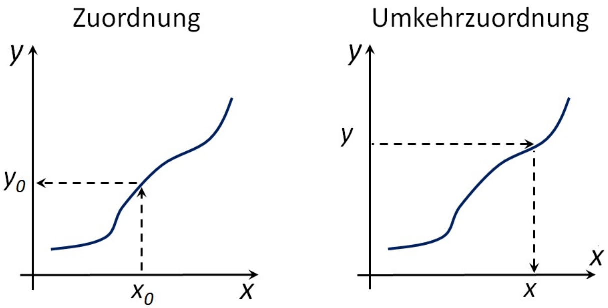
Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

Frühjahrsemester 2021

5. Ausgewählte Funktionen und deren Eigenschaften

Inhaltsverzeichnis

Umkehrfunktion



Umkehrfunktion

Definition (Umkehrfunktion)

- Eine Funktion

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{D} &\to \mathbb{W} \\
x &\mapsto f(x) = y
\end{aligned}
$$

  heißt umkehrbar, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

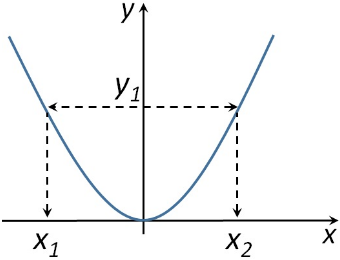
- Ist die Funktion umkehrbar, dann gibt es zu jedem $y \in \mathbb{W}$ genau ein $x \in \mathbb{D}$. Diese eindeutige Zuordnung

$$
\begin{aligned}
f^{-1} : \mathbb{W} &\to \mathbb{D} \\
y &\mapsto f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x
\end{aligned}
$$

  wird **Umkehrfunktion** genannt.

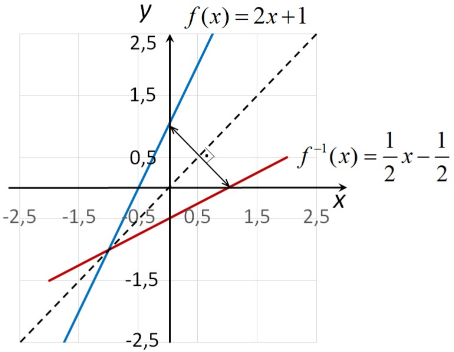
Umkehrfunktion

Anmerkung: Eindeutigkeit (!)



Umkehrfunktion

Beispiel:

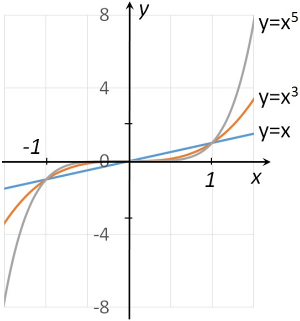


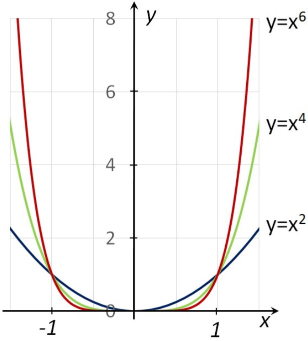
Definition (Potenzfunktionen)

Polynomfunktionen der Form

$$\begin{aligned} p:\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n, \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

heißen **Potenzfunktionen**.





Potenz- und Wurzelfunktionen

Definition (Wurzelfunktion)

Die Funktion

$$\begin{aligned} p^{-1}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \quad \text{für } \ n \text{ ungerade} \\ p^{-1}: \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \quad \text{für } \ n \text{ gerade} \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

heißt $n-$**te Wurzelfunktion** $(n \in \mathbb{N})$.

Beispiel:

- Die Funktion $p: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $x \mapsto x^2$ hat als Umkehrfunktion

$$p^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \ \text{ mit } \ x \mapsto \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

- Die Funktion $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$ hat als Umkehrfunktion

$$p^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \ x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

Approximation von beliebigen Funktionen:
Taylorpolynome

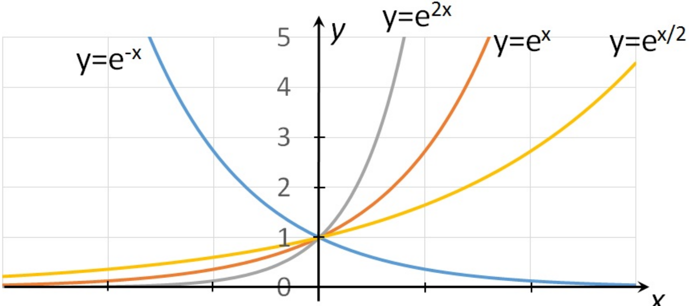
Exponential- und Logarithmusfunktion

Definition (Exponentialfunktion)

Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \quad \text{mit } e = 2.718281828\ldots \quad \text{Eulersche Zahl} \end{aligned}$$

heißt **Exponentialfunktion**



Exponential- und Logarithmusfunktion

Satz (Rechenregeln der Exponentialfunktion)

- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{-x} = (e^x)^{-1} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$
- $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$

Exponentialfunktion

Schnelles Wachstum:

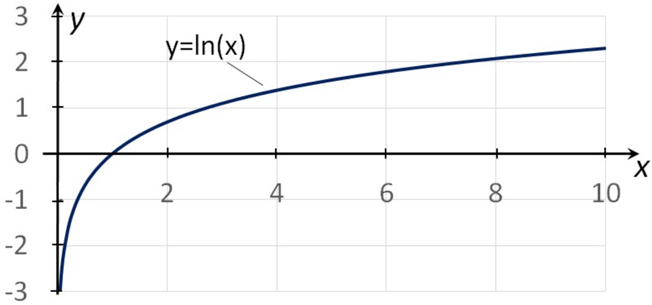
1. Schachparabel
2. Papierfalten
3. Der unmögliche Hamster
4. Exponentielles vs. lineares Wachstum
5. Fibonacchizahlen

Definition (Logarithmusfunktion)

Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion wird **natürliche Logarithmusfunktion** genannt:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$



Satz (Rechenregeln der Logarithmusfunktion)

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(x^n\right) = n \ln x$
- $\ln\left(e^x\right) = x \underbrace{\ln(e)}_{=1} = x$

Logarithmusfunktion

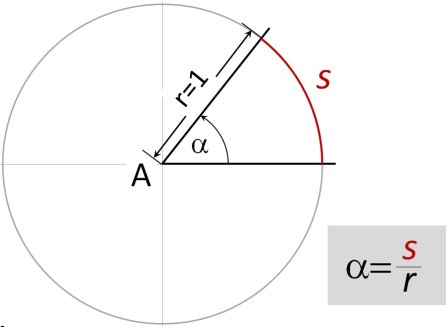
Anwendungen:

1. Darstellen von Wertebereiche über viele Grössenordnungen
2. Kryptologie
3. Informationstheorie

$\Rightarrow$ Wikipedia

Winkel

- Positive Winkel werden immer im Gegenuhrzeigersinn gemessen.
- Die Angabe des Winkels im Bogenmaß (Radiant) entspricht der Länge des Kreisbogens, den die Schenkel aus dem Einheitskreis ausschneiden.

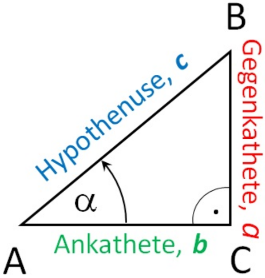


Umrechnungstabelle:

Gradmaß : α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß : s (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Trigonometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

Definition (Trigonometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreieck)



- **Sinus:** $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}$
- **Cosinus:** $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$
- **Tangens:** $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$
- **Cotangens:** $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$

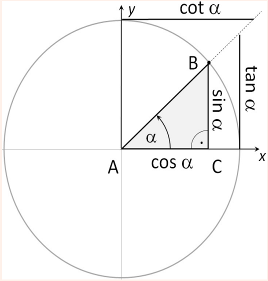
Tringonometrische Funktionen

Zwischen den trigonometrischen Funktionen gelten die Folgenden, für Berechnungen sehr oft nützlichen Zusammenhänge:

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ (*trigonometrischer Pythagoras*)

Trigonometrische Funktionen

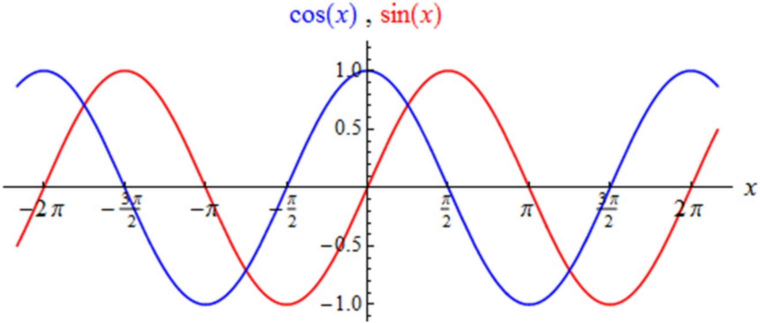
Definition (Trigonometrische Funktionen im beliebigen Dreieck)



Sinus- und Cosinusfunktion

Definition (Sinus- und Cosinusfunktion)

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to [-1,1], \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1,1], \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$



Sinus- und Cosinusfunktion — Funktionsgraph

Anmerkungen:

- Sinus- und Cosinusfunktion sind beschränkt:

$$-1 \leq \quad \sin(x), \cos(x) \quad \leq 1$$

- Die Werte für x im Argument der Funktionen $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$ werden im Bogenmaß angegeben

- Sinus- und Cosinusfunktion sind **periodisch** mit der Periode 2π, d.h. es gilt $f(x) = f(x + k \cdot 2\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$

- Die Funktionsgraphen von Sinus- und Cosinusfunktion sind **kongruent**. Durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links, geht die Cosinus-Kurve aus der Sinus-Kurve hervor.

Eigenschaften der Sinusfunktion

Anwendungen:

1. Periodische Vorgänge
2. The most unexpected answer to a counting puzzle