

Serie 7

Aufgabe 1. Sie haben bei einem Spiel in jeder Runde eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $p = 0.49$. Wenn Sie gewinnen, erhalten Sie einen Franken, andernfalls müssen Sie einen Franken bezahlen. Sie starten mit $N = 50$ Franken und hören auf, wenn Sie 0 Franken besitzen oder bei $T = 100$ Franken angekommen sind. Erstellen Sie (mit Matlab) eine geeignete Übergangsmatrix und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie das Spiel mit einem Gewinn beenden.

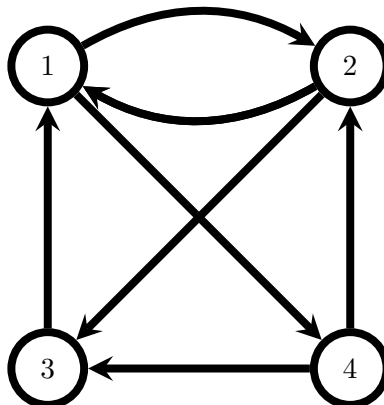
Aufgabe 2. Ein Call-Center hat zwei Telefonleitungen. Die Anzahl der belegten Telefonleitungen soll durch eine homogene Markov-Kette modelliert werden. Die Zustände seien hierbei:

1	keine Leitung belegt
2	eine Leitung belegt
3	zwei Leitungen belegt

Die Übergangsmatrix sei $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Begründen Sie, dass eine Grenzverteilung existiert und berechnen Sie diese.

Aufgabe 3. Gegeben sei folgendes Netzwerk:



Ein Internetsurfer legt folgendes Verhalten an den Tag: Mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$ wählt er zufällig eine Seite des kompletten Netzes, und mit Wahrscheinlichkeit α wählt er einen der Links auf der Seite, auf der er sich gerade befindet, zufällig aus. Geben Sie die Übergangsmatrix an und berechnen Sie die Grenzverteilung für $\alpha = 1$.

Bemerkung: Dies ist die Funktionsweise des (ursprünglichen) PageRank-Algorithmus von Google, wobei die Webseiten gemäss ihrer Auftrittswahrscheinlichkeit gerankt werden. Die Erfinder des PageRank-Algorithmus, Sergey Brin und Larry Page, wählten $\alpha = 0.85$.

Aufgabe 4. Angenommen, in einem Land gibt es vier Krankenkassen, nennen wir sie K_1 , K_2 , K_3 und K_4 . Alle Verträge gelten nur für ein Jahr. Jeweils im November werden die Versicherten aufgefordert, die Verträge zu erneuern oder eine andere Versicherung zu wählen. Das Kundenverhalten wurde in Umfragen ermittelt. Die Ergebnisse sind mit einer Matrix S dargestellt.

$$S = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.05 & 0.1 & 0.25 \\ 0.1 & 0.7 & 0.15 & 0.05 \\ 0.1 & 0.05 & 0.8 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 & 0.1 & 0.75 \end{pmatrix}$$

1. Welches Kundenverhalten beschreibt die Zahl 0.25 in der Matrix S ?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der heute bei K_4 versichert ist,
 - (a) dieser Versicherung vier aufeinander folgende Jahre lang treu bleibt?
 - (b) nach vier Jahren wieder zu den Kunden dieser Versicherung zählt?
3. Welche Bedeutung hat die Matrix S^{20} im Rahmen dieses Modells?
4. Welche prozentuale Verteilung der Kunden auf die Versicherungen K_1, \dots, K_4 sagt das Modell für die ferne Zukunft voraus?
5. Inwiefern ist das Modell nicht realistisch, welche Tatsachen blendet es aus?

Aufgabe 5. Geben Sie eine Markov-Kette mit zwei Zuständen und eine Übergangsmatrix an, so dass keine vom Startwert unabhängige Grenzverteilung existiert.

Aufgabe 6. Eine Autovermietung hat ihre Standorte an den drei Flughafen einer Region in X, Y, Z. Die Kunden beziehen ihr Auto an einem beliebigen Standort und können es an jedem der drei Standorte abgeben. Die Bewegung der Mietwagen von Tag zu Tag zwischen den Standorten wird als Markowprozess betrachtet. Angenommen, die zugehörige Matrix sei

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

1. Angenommen, die Firma hat heute 10 Autos in X, 22 Autos in Y und 48 Autos in Z. Wie verteilen sich diese Autos nach einer Woche auf die drei Standorte?
2. Wie verteilen sich die Autos nach langer Zeit auf die drei Standorte?

Aufgabe 7. Eine Reparaturwerkstatt bearbeitet 2 Motortypen M_1 und M_2 . Die Reparatur von M_1 dauert zwei Tage, die von M_2 dauert einen Tag. An jedem Morgen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein M_1 -Motor repariert werden muss $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein M_2 -Motor repariert werden muss, ist $\frac{1}{2}$. Reparaturaufträge, die die Werkstatt nicht fertigstellen kann, werden anderweitig vergeben. Ist ein Arbeitstag der erste Reparaturtag eines M_1 -Motors, dann wird jede neue Arbeit für den nächsten Tag zurückgewiesen. An jedem anderen Tag wird jeder Motortyp (jeweils nur eine Maschine) zur Reparatur angenommen.

Zwei Strategien sind möglich:

1. Die Reparatur von M_1
2. Die Reparatur von M_2

Welche Strategie ist besser? (D.h. bei welcher Strategie ist die Werkstatt mehr ausgelastet?)

Geben Sie für beide Strategien Übergangsmatrizen an (überlegen Sie sich dazu, welche Zustände möglich sind) und berechnen sie die Grenzverteilung. Vergleichen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten, dass die Werkstatt keine Arbeit hat.

Aufgabe 8. Wir betrachten eine kleines Postamt in einem Dorf, wo im Schnitt 70 Personen (poissonverteilt) pro Tag ankommen. Im Schnitt (exponentialverteilt) dauert die Bedienung eines Kunden 6 Minuten. Das Postamt ist 10 Stunden geöffnet.

1. Was ist die mittlere Warteschlangenlänge?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit warten mehr als 2 Kunden?
3. Wie lange steht man im Schnitt in der Schlange?
4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wartet man länger als 20 Minuten?

Aufgabe 9. In einer Postfiliale dauert eine Bedienung am Schalter im Mittel eine Minute. Die Kunden erreichen die Filiale mit einer konstanten Rate von 5 Kunden pro Minute. Es gibt 6 Schalter und für alle Schalter zusammen eine (im Prinzip beliebig lange) Schlange.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle 6 Schalter frei?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss ein ankommender Kunde warten?
3. Wie lange ist die mittlere Warteschlangenlänge
4. Wie hoch ist die mittlere Wartezeit?

Aufgabe 10. An einem Flughafen, der täglich zwischen 6 und 22 Uhr in Betrieb ist, kommen exponentiell verteilt im Mittel alle 6 Minuten Flugzeuge an. Der Flughafen besitzt nur eine Landebahn; die Landezeit ist ebenfalls exponentiell verteilt und beträgt im Mittel 5 Minuten. Während der Landung eines Flugzeuges werden weitere ankommende Flugzeuge in eine Warteschleife dirigiert. Jedes Flugzeug im System verursacht Kosten in Höhe von 10\$ pro Minute.

1. Bestimmen Sie die mittlere Anzahl von Flugzeugen im Warteflug und im System während der Betriebszeit.
2. Bestimmen Sie die mittlere Wartezeit eines Flugzeuges vor der Landung.
3. Die Kosten und Unbequemlichkeiten könnten durch folgende Massnahmen verringert werden:
 - M1: Mit Hilfe moderner Apparatur kann die Landezeit auf 4 Minuten pro Flugzeug verringert werden. Dies würde Kosten in Höhe von 180.000\$ pro Woche verursachen.
 - M2: Eine zweite Landebahn kann gebaut werden. In diesem Falle würde die dann erforderliche Synchronisation der Landevorgänge die Landezeit auf 8 Minuten pro Flugzeug erhöhen. Die Massnahme M1 würde dann fallen gelassen werden.

- (a) Prüfen Sie, ob die Massnahme M1 zu Einsparungen führen würde.
- (b) Berechnen Sie die bei Vornahme der Massnahme M2 entstehende laufende jährliche Einsparung gegenüber dem gegenwärtigen Zustand.
- (c) Wie verändern sich die Zeiten in der Warteschlange in den Fällen M1 und M2 gegenüber der ursprünglichen Situation ?