Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Fachhochschule Nordwestschweiz

Übungsblatt 3

Lösungen

Lösung 1.
Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p} = \frac{1}{n^p \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^p} < \frac{1}{n^p} = a_n\,,$$

weil der Term $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$ grösser als 0 ist und somit der Bruch grösser gemacht wird, wenn dieser Term aus dem Nenner gestrichen wird. Deshalb ist die Folge streng monoton fallend.
Diese Folge ist auch durch $s = 0$ nach unten beschränkt. Weil eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge zur grössten möglichen unteren Schranke (in unserem Fall $s = 0$) konvergiert, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right) = 0\,.$$

Lösung 2.

(a) $q = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5} = 0.8$
Explizite Darstellung: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1000 \cdot 0.8^{n-1}$
Daraus folgt $a_7 = 1000 \cdot 0.8^6 = 262.144$.

(b) Sei $a_1 = 48$. Dann sind a_2, a_3, a_4 gesucht, so dass eine geometrische Folge entsteht und $a_5 = 243$ gilt. Wir suchen also ein q, so dass

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 48 \cdot q^4 = 243$$

gilt. Daraus folgt, dass $q = \pm\sqrt[4]{\frac{243}{48}} = \pm\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \pm\frac{3}{2}$ ist.
Also sind die drei Folgenglieder zwischen a_1 und a_5 entweder definiert durch

$$a_2 = a_1 \cdot q = 48 \cdot \frac{3}{2} = 72\,,$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = 72 \cdot \frac{3}{2} = 108\,,$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = 108 \cdot \frac{3}{2} = 162\,,$$

oder durch

$$a_2 = a_1 \cdot q = 48 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -72\,,$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = -72 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 108\,,$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = 108 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -162\,.$$

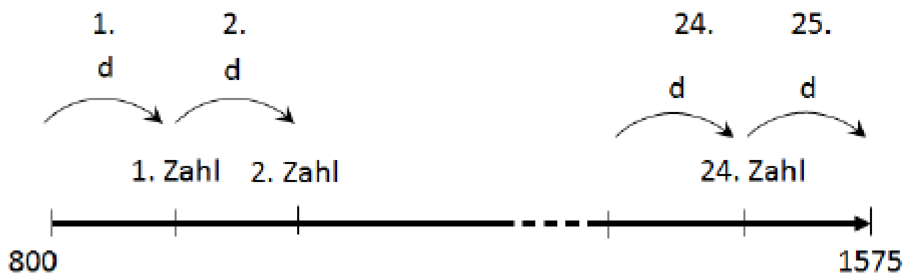
(c) In dieser Teilaufgabe ist $q = \frac{7}{10} = 0.7$. Die Frage ist nun also, welche $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 10 \cdot 0.7^{n-1}$ grösser als $\frac{1}{100} = 0.01$ sind. Gesucht sind deshalb alle a_n, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} a_n = 10 \cdot 0.7^{n-1} &> 0.01 \\ 0.7^{n-1} &> 0.001 \\ \log\left(0.7^{n-1}\right) &> \log(0.001) \\ (n-1)\underbrace{\log(0.7)}_{<0} &> \log(0.001) \\ (n-1) &< \frac{\log(0.001)}{\log(0.7)} = 19.367\ldots \\ n &< 20.367\ldots \end{aligned}$$

Die ersten 20 Folgenglieder sind also grösser als ein Hundertstel.

(d)

Bei der arithmetischen Folge haben alle Folgenglieder denselben Abstand



In unserer Aufgabe beträgt der Abstand: $d = \dfrac{1575-800}{25} = 31$

Bildungsgesetz: $a\_n = 800 + 31 \cdot (n-1)$

(e) Alle durch 6 teilbaren Zahlen bilden die arithmetische Reihe mit dem Bildungsgesetz: $a_n = 6 + 6(n-1)$.

Es gilt $a_{166} = 996$, d.h. es sind insgesamt 166 Zahlen.

Lösung 3.

(a) Es ist $q = \frac{5}{2} = 2.5$ und somit $a_n = 2 \cdot 2.5^{n-1}$. Nach dem Satz für geometrische Reihen gilt, dass

$$s_{10} = \sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i=1}^{10} \left(a_1 \cdot q^{i-1}\right) = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-2.5^{10}}{1-2.5} = 12\,714.32422\ldots$$

(b) Die Anzahl der Weizenkörner auf den einzelnen Feldern kann beschrieben werden durch die geometrische Folge

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = 2\,, \quad a_3 = 4\,, \quad a_4 = 8\,, \ldots$$

mit $q = 2$. Somit ist die Summe der Körner auf allen 64 Feldern gegeben durch

$$s_{64} = \sum_{i=1}^{64} \left(1 \cdot 2^{i-1}\right) = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615\,.$$

Als der Herrscher gemerkt hat, dass er gar nicht so viele Körner auftreiben kann, hat ihm der Rechenmeister, der die Anzahl der Körner für den Herrscher berechnen sollte, geraten, dass er doch Sissa ibn Dahir die Körner, die ihm zustehen, selber zählen lassen soll...

(c) Gesucht ist der kleinste Index n jenes Folgengliedes s_n der geometrischen Reihe, für welches die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
s_n = 1 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} &> 1\,000\,000 \\
\frac{1-2^n}{-1} &> 1\,000\,000 \\
2^n - 1 &> 1\,000\,000 \\
2^n &> 1\,000\,001 \\
\log(2^n) &> \log(1\,000\,001) \\
n \cdot \log(2) &> \log(1\,000\,001) \\
n &> \frac{\log(1\,000\,001)}{\log(2)} = 19.93157\ldots
\end{aligned}$$

20 Felder hätten also schon gereicht.

Lösung 4.
Die gesamte Strecke lässt sich formulieren als

$$1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)\,.$$

Der Term in der Klammer entspricht dem Limes einer konvergenten geometrischen Reihe mit $a_1 = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1\,.$$

Deshalb ist die gesamte Wegstrecke endlich und beträgt nur $1 + 2 \cdot 1 = 3$m.

Lösung 5.
Dies ist der Fall z. B. für die divergenten Folgen $a_n = (-1)^n$ und $b_n = -(-1)^n$, weil die Summe $c_n = (-1)^n - (-1)^n = 0$ die konstante Nullfolge mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ ist.

Ein anderes mögliches Beispiel sind die Folgen $a_n = n$ und $b_n = -n$ mit $a_n + b_n = 0$.

Lösung 6.

(a) Die Summe ist eine konvergente geometrische Reihe mit $a_1 = \frac{1}{3}$ und $q = \frac{1}{3}$ und dem Limes

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

(b) Es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3^0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \overset{\text{(a)}}{=} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

Lösung 7.
Diese Reihe ist keine geometrische Reihe. Es gilt aber

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Damit ist der Grenzwert dieser Reihe gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

Lösung 8.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} \left(2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^i\right) &= 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}\right) = 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{6}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}\right) \\ &= 2 + \frac{\frac{6}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 2 + \frac{\frac{6}{4}}{\frac{1}{4}} = 2 + \frac{6}{4} \cdot \frac{4}{1} = 2 + 6 = 8\,.\end{aligned}$$

(b) Die geometrische Folge beginnt mit $a_1 = 9$ und es ist $q = \frac{-7.2}{9} = -0.8$. Also möchten wir die folgende Summe berechnen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(a_1 \cdot q^{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(9 \cdot (-0.8)^{i-1}\right) = \frac{9}{1 - (-0.8)} = \frac{9}{1.8} = 5\,.$$

Lösung 9.
Für diese geometrische Folge gilt $q = \frac{\frac{x}{x+1}}{1} = \frac{x}{x+1}$.

- Somit konvergiert die Folge für alle x, für welche der Betrag von q kleiner als 1 ist, zum Grenzwert 0, also für alle x, für welche

  $$\left|\frac{x}{x+1}\right| = \frac{|x|}{|x+1|} < 1$$

  gilt und somit für alle x, für welche die folgende Ungleichung erfüllen:

  $$|x| < |x+1|$$

  - Falls also $x > 0$ ist, dann gilt

    $$\begin{aligned} x &< x+1 \\ 0 &< 1\,. \end{aligned}$$

    Dies ist für alle x erfüllt und somit darf $x > 0$ sein, damit die Folge zum Grenzwert 0 konvergiert.
  - Für den Fall, dass $-1 < x < 0$ ist (für $x = -1$ ist q nicht definiert, weil wir nicht durch 0 teilen dürfen), gilt

    $$\begin{aligned} -x &< x+1 \\ -1 &< 2x \\ -0.5 &< x \end{aligned}$$

    und somit konvergiert in diesem Fall die Folge gegen den Grenzwert 0 für $x > -0.5$.
  - Es fehlt noch der Fall, in welchem beide Argumente der Beträge negativ sind, d. h. dass $x < -1$ ist. Hier gilt

    $$\begin{aligned} -x &< -(x+1) = -x-1 \\ 0 &< -1 \end{aligned}$$

    Diese Aussage ist falsch und damit konvergiert die Folge für $x < -1$ nicht gegen den Grenzwert 0.
  - Für $x = 0$ ist die daraus resultierende Folge $1, 0, 0, 0, \ldots$ keine geometrische Folge, weil der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Folgegliedern ab dem zweiten Folgenglied nicht definiert ist, weil nicht durch 0 geteilt werden darf.

  Zusammengefasst konvergiert also diese Folge gegen den Grenzwert 0 für alle $x > -0.5$ mit $x \neq 0$.

- Für alle $q = 1$ würde die Folge zum Grenzwert $a_1 = 1$ konvergieren, aber es gilt

  $$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &= 1 \\ x &= x+1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

  und somit gibt es keine Werte für x, für welche dies passieren würde.

Lösung 10.

(a) keine geometrische Reihe

(b) geometrische Reihe mit den Parametern $a_1 = \frac{2}{3}$ und $q = -1$ nicht konvergent

(c) geometrische Reihe, Achtung der Summationsindex startet nicht bei 1.

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdots = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{25}{36} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

Geometrische Reihe mit den Parametern $a_1 = \frac{25}{36}$ und $q = \frac{5}{6}$

Grenzwert: $\frac{25}{36} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{\frac{25}{36}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{25}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{25}{6}$

(d) geometrische Reihe mit den Parametern $a_1 = 3$ und $q = \frac{1}{4}$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

(e) geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(0.75)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(0.75^2\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^k = \frac{9}{16} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^{k-1}$

mit den Parametern $a_1 = 1$ und $q = \frac{9}{16}$.

Grenzwert: $\frac{9}{16} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^{k-1} = \frac{\frac{9}{16}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{9}{7}$

Lösung 11.

Betrachte n-te Teilsumme:

$s_n = q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots + nq^n$

Berechne

$s_n - q \cdot s_n = \left(q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots + nq^n\right) - \left(q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + \ldots + nq^{n+1}\right)$

$\Rightarrow s_n - q \cdot s_n = s_n \cdot (1-q) = q + q^2 + q^3 + q^n - nq^{n+1}$

$\Rightarrow s_n = \dfrac{q \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3 + q^{n-1}\right) - nq^{n+1}}{1-q}$

Mit dem Ergebnis aus der Vorlesung: $\Rightarrow s_n = q \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3 + q^{n-1}\right) = \dfrac{q \cdot \left(1-q^n\right)}{1-q}$ erhalten wir

$\Rightarrow s_n = \dfrac{q \cdot \left(1-q^n\right) - nq^{n+1}}{(1-q)^2}$

Im Grenzübergang gilt dann: $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q\cdot\left(1-\overbrace{q^n}^{\to 0}\right)-\overbrace{nq^{n+1}}^{\to 0}}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}$ für $|q|<1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{\frac{2}{5}}{\left(1-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{10}{9}$$

Lösung 12.

(a) Die ersten Glieder der Reihe ausgeschrieben lauten:

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\ldots\right)$$

Fast alle Zahlen in der Summe tauchen mit positivem und negativem Vorzeichen auf, bis auf. Dies nennt man in der Mathematik eine Teleskopsumme.

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}.\right) = \frac{25}{48}$$

(b) Durch Umformen erhält man eine Summe aus zwei konvergenten geometrischen Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k+2}{5^k}\cdot(-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^k + 2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^k + 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^k$$

$$-\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^{k-1} + \left(-\frac{2}{5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}\right) = \frac{-\frac{4}{5}}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)} + \frac{-\frac{2}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{4}{9}-\frac{1}{3} = -\frac{7}{9}$$

(c) Die Folge $a_k = \frac{2k^4-3k^2+2}{5k^4-3k+2}$ besitzt den Grenzwert $\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{2}{5}$, d.h. es handelt sich nicht um eine Nullfolge und die Reihe ist divergent.