Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Übungsblatt 3

Konvergenz von Reihen

Aufgabe 1.
Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $p > 0$ die Folge $a_n = \frac{1}{n^p}$ nach 0 konvergiert, d. h. dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right) = 0$$

gilt.

Aufgabe 2.

(a) Gegeben sei die geometrische Folge 1000, 800, 640, ... Bestimmen Sie q und damit die explizite Definition a_n der Folge und das Folgenglied a_7.

(b) Setzen Sie zwischen 48 und 243 drei Zahlen so ein, dass eine geometrische Folge entsteht.

(c) Wieviele Folgenglieder der geometrischen Folge 10, 7, ... sind grösser als ein Hundertstel?

(d) Zwischen den Zahlen 800 und 1575 sollen 24 Zahlen so eingeschoben werden, dass die Zahlen die ersten Glieder einer arithmetischen Folge sind. Wie lautet das Bildungsgesetz?

(e) Wie viele ohne Rest durch 6 teilbare Zahlen liegen zwischen 1 und 1000?

Aufgabe 3.

(a) Berechnen Sie die Summe der ersten 10 Glieder der geometrischen Folge 2, 5, 12.5, ...

(b) Kennen Sie schon die Geschichte über Sissa ibn Dahir (ca. 3. oder 4. Jahrhundert n. Chr.), den Erfinder des Schachspiels? Der indische Herrscher Shihram soll ihm eine Belohnung für seine Erfindung versprochen haben. Der Erfinder verlangte, dass man auf das erste Feld seines Schachbretts ein Weizenkorn legte. Auf das zweite Feld kämen zwei Körner, auf das dritte vier und so weiter. Der Herrscher war erfreut über diese kleine Belohnung und stimmte zu...

Wie viele Weizenkörner musste der indische Herrscher dem Erfinder des Schachspiels geben?

(c) Wie viele Felder des Schachbretts hätten bereits genügt, um mehr als eine Million Weizenkörner als Belohnung zu erhalten?

Zwei in der Praxis wichtige Folgentypen:

- Folgen der Art
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \quad d \in \mathbb{R}$$
heißen **arithmetische Folgen**. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist eine Konstante, nämlich d. Sie heißen so, weil jedes Glied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$
Beispiel:
$$2, 5, 8, 11, \ldots \qquad (a_1 = 2, d = 3)$$
$$3, -6, -15, -24, \ldots \qquad (a_1 = 3, d = -9)$$

- Folgen der Art
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} : \quad a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3, \ldots$$
heißen **geometrische Folgen**. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist eine Konstante, nämlich q. Sie heißen so, weil jedes Glied das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$
Beispiel:
$$1, 2, 4, 8, \ldots \qquad (a_1 = 1, q = 2)$$
$$6, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots \qquad (a_1 = 6, q = -\frac{1}{3})$$

Aufgabe 4.
Lassen wir einen Tischtennis-Ball aus 1m Höhe runterfallen, springt er danach wieder um die Hälfte, d. h. um $\frac{1}{2}$m nach oben. Nach dem zweiten Aufprall springt der Ball wieder um die Hälfte, d. h. um $\frac{1}{4}$m nach oben, usw.
Berechnen Sie die gesamte Strecke, die der Ball zurücklegt, bis er zum Stillstand kommt.

Aufgabe 5.
Finden Sie divergente Folgen a_n und b_n, für welche die Summe $c_n = a_n + b_n$ konvergiert.

Aufgabe 6.
Berechnen Sie die folgenden beiden Summen.

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i}$

(b) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i}$

Aufgabe 7.
Bestimmen Sie den Grenzwert von $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot (i+1)}$.

Hinweis: Es gilt $\frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$.

Aufgabe 8.

(a) Berechnen Sie $\sum_{i=0}^{\infty} \left(2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^i\right)$.

(b) Berechnen Sie die Summe aller Folgenglieder der geometrischen Folge $9, -7.2, \ldots$.

Aufgabe 9.
Für welche reellen x konvergiert die folgende geometrische Folge?

$$1, \frac{x}{x+1}, \left(\frac{x}{x+1}\right)^2, \ldots$$

Aufgabe 10.
Welche Reihen sind geometrische Reihen? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2}{3}$

(c) $\sum_{k=2}^{\infty} (\frac{5}{6})^k$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot (0.25)^{k-1}$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} 0.75^{2k}$

Aufgabe 11.
Zeigen Sie, dass gilt:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k = \frac{q}{(1-q)^2} \text{ für } |q| < 1$$

und berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (\tfrac{2}{5})^k$$

Aufgabe 12.
Welche der Reihen sind konvergent? Berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2-4}$ <u>Hinweis:</u> $\frac{1}{k^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+2}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k+2}{5^k}(-1)^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^4-3k^2+2}{5k^4-3k+1}$