Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Übungsblatt 6

Lösungen

Lösung 1.

$$
\begin{aligned}
&\big(\underbrace{f_1(x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)}_{v(x)}\big)'\\
&\quad=f_1'(x)\cdot(f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x))+f_1(x)\cdot\big(\underbrace{f_2(x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)}_{v(x)}\big)'\\
&\quad=f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)+f_1(x)\cdot\Big(f_2'(x)\cdot(f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x))+f_2(x)\cdot\big(f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\big)'\Big)\\
&\quad=f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)+f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\big(f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\big)'\\
&\quad=\ldots\\
&\quad=f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)+\ldots+f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n'(x)
\end{aligned}
$$

Lösung 2.

(a) Potenzregel: $f'(x)=a\cdot x^{a-1}$

Faktor- und Potenzregel: $f''(x)=\Big(a\cdot x^{a-1}\Big)'=a\cdot\Big(x^{a-1}\Big)'=a\cdot(a-1)\cdot x^{a-2}$

(b) Faktor- und Potenzregel: $f'(x)=\Big(3\cdot x^{\frac{1}{2}}\Big)'=3\cdot\Big(x^{\frac{1}{2}}\Big)'=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

Faktor- und Potenzregel:

$$f''(x)=\left(\frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot\Big(x^{-\frac{1}{2}}\Big)'=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{4x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{3}{4\,(x^3)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{3}{4\sqrt{x^3}}$$

(c) Potenzregel: $f'(x)=\Big(x^{-\frac{1}{2}}\Big)'=-\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2\cdot x^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{1}{2\cdot(x^3)^{\frac{1}{2}}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Faktor- und Potenzregel:

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\Big(x^{-\frac{3}{2}}\Big)'=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4\cdot x^{\frac{5}{2}}}=\frac{3}{4\cdot(x^5)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{4\sqrt{x^5}}$$

(d) Potenzregel: $f'(x) = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

Faktor- und Potenzregel:

$$f''(x) = \left(\frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$$

(e) Potenzregel: $f'(x) = \left(x^{\frac{2}{n}}\right)' = \frac{2}{n} \cdot x^{\frac{2}{n}-1} = \frac{2}{n} \cdot x^{\frac{2-n}{n}}$

Faktor- und Potenzregel:

$$f''(x) = \left(\frac{2}{n} \cdot x^{\frac{2-n}{n}}\right)' = \frac{2}{n} \cdot \left(x^{\frac{2-n}{n}}\right)' = \frac{2}{n} \cdot \frac{2-n}{n} \cdot x^{\frac{2-n}{n}-1} = \frac{2 \cdot (2-n)}{n^2} \cdot x^{\frac{2-2n}{n}}$$

Weil die Funktion f von x abhängig ist, ist n als Konstante zu betrachten.

Lösung 3.

(a) Summen-, Faktor-, Konstanten- und Potenzregel:

$$f'(x) = \left(3x^5\right)' + \left(2x^2\right)' + (1)' = 3 \cdot \left(x^5\right)' + 2 \cdot \left(x^2\right)' + 0 = 3 \cdot 5 \cdot x^4 + 2 \cdot 2 \cdot x^1 = 15x^4 + 4x$$

(b) Summen-, Faktor-, Konstanten- und Potenzregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{7}{6} \cdot \sqrt[6]{\frac{x}{a^2}}\right)' + (\sqrt{a})' = \frac{7}{6} \cdot \left(\left(\frac{x}{a^2}\right)^{\frac{1}{6}}\right)' + 0 = \frac{7}{6} \cdot \left(\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{(a^2)^{\frac{1}{6}}}\right)\right)' = \frac{7}{6 \cdot (a^2)^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' \\ &= \frac{7}{6 \cdot (a^2)^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{5}{6}} = \frac{7}{6 \cdot a^{\frac{2}{6}} \cdot 6 \cdot x^{\frac{5}{6}}} = \frac{7}{36 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x^5)^{\frac{1}{6}}} = \frac{7}{36\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{x^5}} \end{aligned}$$

Weil die Funktion f von x abhängig ist, ist a als Konstante zu betrachten.

(c) Summen-, Faktor-, Konstanten- und Potenzregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((a + x^2) \cdot (x - a)\right)' = \left(ax - a^2 + x^3 - ax^2\right)' = (ax)' + \left(-a^2\right)' + \left(x^3\right)' + \left(-ax^2\right)' \\ &= a \cdot (x)' + 0 + 3x^2 + (-a)\left(x^2\right)' = a \cdot 1 + 3x^2 - a \cdot 2 \cdot x^1 = a + 3x^2 - 2ax \end{aligned}$$

Weil die Funktion f von x abhängig ist, ist a als Konstante zu betrachten.

(d) Summen- und Potenzregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x + x^2) \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{1+\frac{1}{2}} + x^{2+\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right)' \\ &= \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' + \left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{3 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 5 \cdot (x^3)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{x} + 5\sqrt{x^3}}{2} \end{aligned}$$

Lösung 4.

(a) Quotienten-, Summen-, Faktor-, Konstanten- und Potenzregel:

$$f'(x) = \frac{(2x^2+1)' \cdot (x^2-2) - (2x^2+1) \cdot (x^2-2)'}{(x^2-2)^2} = \frac{4x \cdot (x^2-2) - (2x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-2)^2}$$
$$= \frac{4x^3 - 8x - 4x^3 - 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-10x}{(x^2-2)^2} = -\frac{10x}{(x^2-2)^2}$$

(b) Quotienten-, Summen-, Konstanten- und Potenzregel:

$$f'(x) = \frac{(1-\sqrt{x})' \cdot (1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) \cdot (1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{\left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot (1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)'}{(1+\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left(-(1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x})\right)}{(1+\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left(-1 - \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}\right)}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2)}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{(-1) \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{x^{\frac{1}{2}} \cdot (1+\sqrt{x})^2}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1+\sqrt{x})^2}$$

Lösung 5.

(a) Ketten-, Potenz-, Summen- und Konstantenregel:

$$f'(x) = \underbrace{2 \cdot (\sqrt{x}+1)^1}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{(\sqrt{x}+1)'}_{\text{innere Ableitung}} = 2 \cdot (\sqrt{x}+1) \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)' = 2 \cdot (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}+1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(b) Produkt-, Potenz-, Ketten-, Summen- und Konstantenregel:

$$f'(x) = \left(x^2\right)' \cdot \sqrt{1+x} + x^2 \cdot \left(\sqrt{1+x}\right)' = 2x^1 \cdot \sqrt{1+x} + x^2 \cdot \left((1+x)^{\frac{1}{2}}\right)'$$
$$= 2x \cdot \sqrt{1+x} + x^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{1}_{\text{innere Ableitung}} = 2x \cdot \sqrt{1+x} + \frac{x^2}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= 2x \cdot \sqrt{1+x} + \frac{x^2}{2 \cdot \sqrt{1+x}} = \frac{2x \cdot \sqrt{1+x} \cdot 2 \cdot \sqrt{1+x} + x^2}{2 \cdot \sqrt{1+x}} = \frac{4x \cdot \left(\sqrt{1+x}\right)^2 + x^2}{2 \cdot \sqrt{1+x}}$$
$$= \frac{4x \cdot (1+x) + x^2}{2 \cdot \sqrt{1+x}} = \frac{4x + 4x^2 + x^2}{2 \cdot \sqrt{1+x}} = \frac{5x^2 + 4x}{2 \cdot \sqrt{1+x}}$$

(c) Quotienten-, Ketten-, Summen-, Potenz- und Konstantenregel:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)' \cdot x - \sqrt{1+x^2} \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\left((1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot x - \sqrt{1+x^2} \cdot 1 \cdot x^0}{x^2} \\
&= \frac{\overbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot}^{\text{äussere Ableitung}} \overbrace{\left(1+x^2\right)'}^{\text{innere Ableitung}} \cdot x - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x^1 \cdot x - \sqrt{1+x^2}}{x^2} \\
&= \frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\frac{x^2-\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} = \frac{\frac{x^2-\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} \\
&= -\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

(d) Quotienten-, Summen-, Potenz- und Konstantenregel:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{a^2-x^2}{\sqrt{x} \cdot (a-x)}\right)' = \left(\frac{(a+x)(a-x)}{\sqrt{x} \cdot (a-x)}\right)' = \left(\frac{a+x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(a+x)' \cdot \sqrt{x} - (a+x) \cdot (\sqrt{x})'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (a+x) \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{x} = \frac{\sqrt{x} - (a+x) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\sqrt{x} - \frac{a+x}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}}{x} = \frac{\sqrt{x} - \frac{a+x}{2\sqrt{x}}}{x} \\
&= \frac{\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^2-(a+x)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x-a-x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{x-a}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-a}{2x\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Weil die Funktion f von x abhängig ist, ist a als Konstante zu betrachten.

(e) Summen-, Faktor-, Konstanten- und Potenzregel:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{ax-\sqrt{ax}}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{ax}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{a\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)' = \left(a\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)' \\
&= \left(a\sqrt{x}\right)' + \left(-\sqrt{a}\right)' = \left(a \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' + 0 = a \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

(f) Ketten-, Potenz-, Summen-, Quotienten- und Konstantenregel:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \underbrace{3\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2}_{\text{äussere Ableitung}}\cdot\underbrace{\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)'}_{\text{innere Ableitung}}\\
&= 3\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\cdot\left((1)'+\left(\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)'\right)\\
&= 3\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\cdot\left(0+\left(\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'\right)\\
&= 3\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äussere Ableitung}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'}_{\text{innere Ableitung}}\\
&= \frac{3}{2}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left((1)'+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'\right)\\
&= \frac{3}{2}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(0+\frac{(x)'\cdot\sqrt{1+x^2}-x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right)\\
&= \frac{3}{2}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2}-x\cdot\left((1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'}{1+x^2}\\
&= \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot\overbrace{\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}^{\text{äussere Ableitung}}\cdot\overbrace{\left(1+x^2\right)'}^{\text{innere Ableitung}}}{1+x^2}\\
&= \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left((1)'+(x^2)'\right)}{1+x^2}\\
&= \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{1+x^2}\\
&= \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}}{1+x^2}\\
&= \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\\
&= \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\\
&= \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}}\\
&= \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Lösung 6.
Wir suchen alle x-Werte, für welche $f_1'(x) = f_2'(x)$ gilt.

$$\begin{aligned}
&\iff \left(x^3+1\right)' = \left((x+4)^2\right)' \\
&\iff 3x^2 + 0 = \underbrace{2\cdot(x+4)^1}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{(x+4)'}_{\text{innere Ableitung}} \\
&\iff 3x^2 = 2\cdot(x+4)\cdot 1 \\
&\iff 3x^2 = 2x+8 \\
&\iff 3x^2 - 2x - 8 = 0 \\
&\implies x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 3\cdot(-8)}}{6} = \frac{2\pm 10}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{4}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

In den x-Werten 2 und $-\frac{4}{3}$ verlaufen die Tangenten an $f_1(x)$ und $f_2(x)$ jeweils parallel.

Lösung 7.
Die Steigung der Kurve ist durch die Ableitungsfunktion gegeben:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 5\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 - 2x^1 + 1 + 0 = x^2 - 2x + 1$$

(a) Die Steigung 0 wird in den Punkten erreicht, welche die Gleichung

$$f'(x) = 0 \implies x^2 - 2x + 1 = 0 \implies (x-1)^2 = 0 \implies x = 1$$

erfüllen. Somit ist die Steigung nur im Punkt $(1, f(1)) = \left(1, \frac{16}{3}\right)$ genau 0.

(b) Die Steigung 4 wird in den Punkten erreicht, welche die Gleichung

$$f'(x) = 4 \implies x^2 - 2x + 1 = 4 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 3$$

erfüllen. Somit ist die Steigung 4 in den Punkten $(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{8}{3}\right)$ und $(3, f(3)) = (3, 8)$ erreicht.

(c) Die Steigung -1 wird in den Punkten erreicht, welche die Gleichung

$$f'(x) = -1 \implies x^2 - 2x + 1 = -1 \implies x^2 - 2x + 2 = 0$$

erfüllen. Es gibt aber keine reelle Zahl x, welche diese Gleichung erfüllt, somit wird die Steigung -1 in keinem Punkt der Kurve erreicht.

Lösung 8.
Wir nennen die beiden Teilfunktionen $f_1(x) = x^2 + x - 6$ und $f_2(x) = -x^2 + bx + a$.

- Die Funktion $f(x)$ ist stetig in $x = 2$, wenn $f_1(2) = f_2(2)$ gilt, also für

$$f_1(2) = 4 + 2 - 6 = 0 \stackrel{!}{=} f_2(2) = -4 + 2b + a \tag{1}$$

- Die Funktion $f(x)$ ist differenzierbar in $x = 2$, wenn $f_1'(2) = f_2'(2)$ gilt. Für

  $$f_1'(x) = 2x + 1$$
  $$f_2'(x) = -2x + b$$

  soll also

  $$f_1'(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \stackrel{!}{=} f_2'(2) = -2 \cdot 2 + b = -4 + b \tag{2}$$

  gelten.

Aus der Gleichung (2) folgt somit $b = 9$ und aus (1) $a = 4 - 2b = 4 - 18 = -14$. Also ist die folgende Funktion in $x = 2$ stetig und differenzierbar:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{für } x \leq 2 \\ -x^2 + 9x - 14 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Lösung 9.
Die Steigung der Parabel ist durch die Gleichung

$$f'(x) = 2ax + b$$

bestimmt. Somit gilt im Punkt $(2 \mid 2)$ mit Steigung $f'(2) = -4$:

$$-4 = 4a + b \iff b = -4 - 4a\,. \tag{3}$$

Wir wissen, dass die Parabel durch die Punkte $(2 \mid 2)$ und $(5 \mid 8)$ geht, was uns durch Einsetzen der Punkte in die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ die folgenden Gleichungen liefert:

$$2 = 4a + 2b + c \tag{4}$$
$$8 = 25a + 5b + c \tag{5}$$

Nun müssen wir also das Gleichungssystem – bestehend aus den Gleichungen (3), (4) und (5) – lösen, indem wir zuerst (3) in (4) und (5) einsetzen:

$$2 = 4a - 8 - 8a + c = -4a - 8 + c \tag{6}$$
$$8 = 25a - 20 - 20a + c = 5a - 20 + c \tag{7}$$

Durch Subtrahieren der Gleichung (6) von (7) bekommen wir

$$6 = 9a - 12$$

und somit $a = \frac{6+12}{9} = \frac{18}{9} = 2$. Setzen wir $a = 2$ in die Gleichung (3) ein, bekommen wir $b = -4 - 4 \cdot a = -4 - 8 = -12$. Nun können wir mit Hilfe der Gleichung (6) den Parameter c ausrechnen:

$$c = 2 + 4a + 8 = 2 + 8 + 8 = 18$$

Somit ist die Gleichung für die Parabel

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 18\,.$$

Lösung 10.
Die Steigung der Tangente ist gegeben durch die Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{\left(2x^2\right)' \cdot (x+2) - 2x^2 \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{4x \cdot (x+2) - 2x^2 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{4x^2 + 8x - 2x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2}$$

Da die Steigung der Geraden $g(x)$ den Wert -6 hat, suchen wir alle Zahlen x, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} -6 = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} &\iff -6 \cdot (x+2)^2 = 2x^2 + 8x \iff -6 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 2x^2 + 8x \\ &\iff -6x^2 - 24x - 24 = 2x^2 + 8x \iff 8x^2 + 32x + 24 = 0 \\ &\implies x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

Die Tangenten an $f(x)$ sind also in den Punkten

$$(x_1 \mid f(x_1)) = (-3 \mid -18)$$
$$(x_2 \mid f(x_2)) = (-1 \mid 2)$$

parallel zur Geraden $g(x)$.

Lösung 11.
Wir setzen $x_0 = 3$, $y_0 = 8$ und $m = 4$ in die Punkt-Steigungs-Form einer Geraden ein:

$$\frac{y-8}{x-3} = 4 \iff y - 8 = 4 \cdot (x-3) \iff y - 8 = 4x - 12 \iff y = 4x - 4$$

Lösung 12.
Schnittpunkt der Geraden mit der Parabel:

$$3x - 1 = x^2 - 2x - \iff x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \implies x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

Die Schnittpunkte sind somit gegeben durch

$$P_1 = (x_1, 3x_1 - 1) = (0, -1) \quad \text{und} \quad P_2 = (x_2, 3x_2 - 1) = (5, 14)\,.$$

Um die Steigung der Tangenten in den Punkten zu bestimmen, leiten wir die Parabelfunktion ab:

$$\left(x^2 - 2x - 1\right)' = 2x - 2$$

Die Steigung in P_1 ist somit $m_1 = 2 \cdot 0 - 2 = -2$ und in P_2 ist $m_2 = 2 \cdot 5 - 2 = 8$. Nun können wir die Tangenten bestimmen, indem wir in die Punkt-Steigungs-Form einsetzen:

- T_1: $\dfrac{y-(-1)}{x-0} = -2 \iff \dfrac{y+1}{x} = -2 \iff y + 1 = -2x \iff y = -2x - 1 = f_1(x)$
- T_2: $\dfrac{y-14}{x-5} = 8 \iff y - 14 = 8 \cdot (x-5) \iff y - 14 = 8x - 40 \iff y = 8x - 26 = f_2(x)$

Der Schnittpunkt der beiden Tangenten ist durch $f_1(x) = f_2(x)$ gegeben:

$$-2x - 1 = 8x - 26 \iff 25 = 10x \iff x = 2.5$$

Somit ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten bei $(2.5, f_1(2.5)) = (2.5, -6)$.