Einführung in die Analysis
4. Funktionen

Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

Frühlingssemester 2021

4. Funktionen — Grenzwerte — Stetigkeit

Inhaltsverzeichnis

- Funktion
  - Funktionen in der Informatik
  - Funktionsgraphen und -gleichungen
  - Definitions- und Wertebereich
  - Polynome und rationale Funktionen
  - Eigenschaften von Funktionen
- Grenzwerte
  - Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert
- Stetigkeit
  - Stetigkeit elementarer Funktionen
  - Hebbare Stetigkeit
  - Zwischenwertsatz

Einstieg: Funktionen in der Informatik

Beispiel:

```
int addiere (int x, int y){
    int z = x + y;
    return z;
}
```

Diese Methode kann nun z.B. aufgerufen werden mit:

```
int resultat = addiere(3,2);
```

Der Rückgabewert wird hier in der Variable `resultat` gespeichert, deren Datentyp mit dem Rückgabetyp übereinstimmt.

Funktionen

Definition (Funktion)

Eine **Funktion f** ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge $\mathbb{D}$ genau ein Element y einer Wertemenge $\mathbb{W}$ zu.

Schreibweise: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}, x \mapsto y$

Für das dem Element $x \in \mathbb{D}$ zugeordnete Element der Wertemenge schreibt man im Allgemeinen $f(x)$.

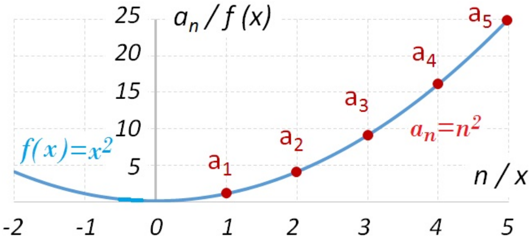
Bemerkung:

Die Umkehrung gilt nicht: Ein Element der Wertemenge kann einem, mehreren, aber auch keinem Element der Definitionsmenge zugeordnet sein.

Funktionen

Bei einer Zahlenfolge a_n gehört zu jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n, die mithilfe des Bildungsgesetzes berechnet wird. Jeder natürlichen Zahl wird also genau eine reelle Zahl zugewiesen, man schreibt:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$



In der Praxis benötigt man aber Abbildungen, die einer reellen Zahl genau eine reelle Zahl zuordnet. Die Abbildungsvorschrift heißt **Funktion** und man schreibt hierfür $x \mapsto y = f(x)$.

Funktionen

Aus dem vorigen Beispiel haben wir gesehen, dass Funktionen durch

- einen Funktionsgraphen
- eine Funktionsgleichung $y = f(x)$

dargestellt werden können.

Definition (Graphen einer Funktion)

Unter dem **Graphen** einer Funktion mit $x \mapsto f(x)$ verstehen wir die Menge aller Paare (x, y), dargestellt in einem Koordinatensystem

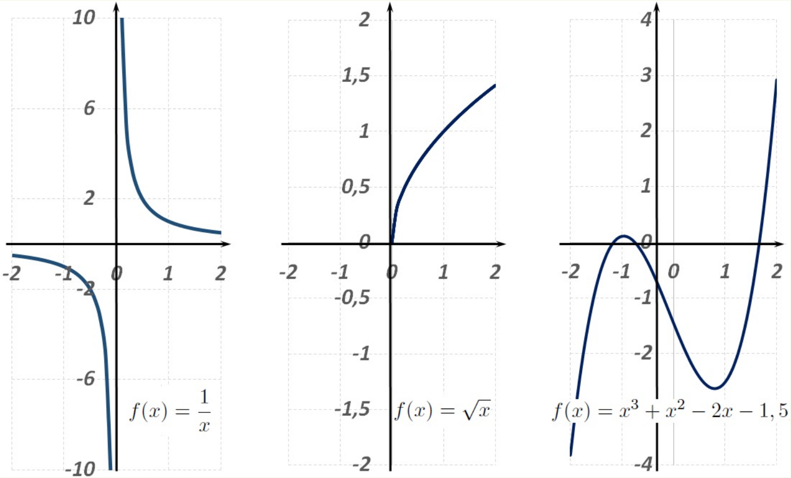
Bemerkung:

Zur visuellen Veranschaulichung einer Funktion trägt man alle Punktepaare $(x, f(x))$ in ein meist kartesisches Koordinatensystem ein und erhält die zugehörige Kurve, den **Funktionsgraphen**.

Funktionen

Beispiele:

Für manche Funktionen ist die Abbildungsvorschrift nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert:



Funktionen

Beispiel (Fortsetzung):

- Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist die Division durch 0 nicht erklärt; die Funktion besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle.
- Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist nur für $x \geq 0$ erklärt, da die Quadratwurzel einer negativen Zahl keine reelle Zahl ist.

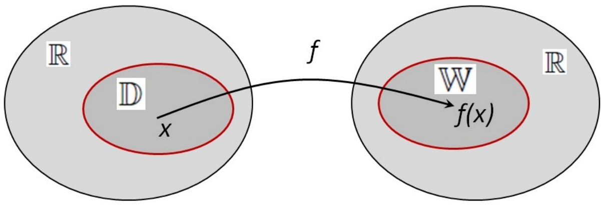
Meist wird ein **Definitionsbereich** (eine Teilmenge der reellen Zahlen) definiert, für den eine vorgebene Funktion betrachtet wird. Wird der Definitionsbereich einer Funktion nicht explizit angegeben, betrachtet man die Funktion auf dem maximal möglichen Definitionsbereich, d.h. für diejenigen reellen Zahlen, für die die Abbildungsvorschrift erklärt ist. **Definitionslücken** sind einzelne Stellen, die nicht im Definitionsbereich liegen.

Funktionen

Definition (Reelle Funktion)

Unter einer **reellen Funktion** f versteht man die Abbildung, die jeder reellen Zahl x aus einer **Definitionsmenge** $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl y aus einer **Wertemenge** $\mathbb{W}$ zuordnet:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$



Für die Wertemenge gilt: $\mathbb{W} := f(\mathbb{D}) := \{f(x) : x \in \mathbb{D}\}$
Man nennt $f(x)$ den Funktionswert an der Stelle x.

Funktionen

Definition (Allgemeine Funktionseigenschaften)

- Eine Funktion f besitzt in x_0 eine **Nullstelle**, falls $f(x_0) = 0$ gilt.
- Eine Funktion heißt **gerade**, falls $f(x) = f(-x)$ gilt.
- Eine Funktion heißt **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Bemerkungen:

- Der Funktionsgraph schneidet die x-Achse in einer Nullstelle der Funktion.
- Der Funktionsgraph einer geraden Funktion ist spiegelsymmetrisch zur $y-$Achse. Zum Nachweis ersetzt man in der Funktionsgleichung alle Ausdrücke x durch $-x$ und weist nach, dass dadurch die Funktionsgleichung unverändert bleibt.
- Der Funktionsgraph einer ungerade Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Zum Nachweis ersetzt man in der Funktionsgleichung alle Ausdrücke x durch $-x$ und weist nach, dass man dadurch die negative Funktionsgleichung erhält.

Funktionen

Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = x^2$ ist gerade.
- Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ ist gerade.
- Jede Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit geradem n ist gerade.

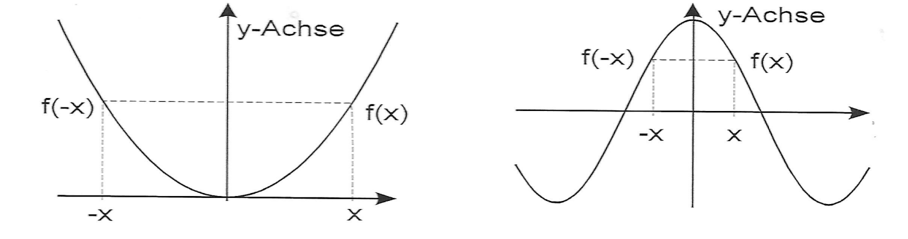


Abbildung aus: Westermann, Mathematik für Ingenieure, S.145, 6. Auflage 2011, Springer Verlag

Funktionen

Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = x^3$ ist ungerade.
- Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ ist ungerade.
- Jede Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit ungeradem n ist ungerade.

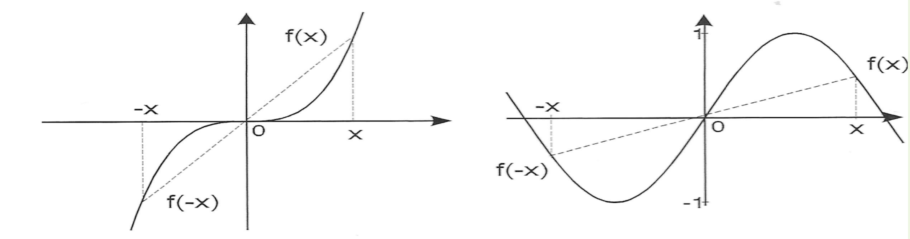


Abbildung aus: Westermann, Mathematik für Ingenieure, S.146, 6. Auflage 2011, Springer Verlag

Übungsblatt 4

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

(b) $g(x) = \frac{2x^7-5x^3+12x-100}{x^3-x^2}$

(c) $h(x) = \sqrt{x^2-1}$. Bestimmen Sie zudem der Wertebereich der Funktion $h(x)$.

Aufgabe 2.
Skizzieren Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen. Welche Funktionen sind gerade bzw. ungerade?

(a) $f_1(x) = \frac{x+|x|}{2}$

(b) $f_2(x) = |x+1| + |x-1|$

(c) $f_3(x) = -|x+1| + |x-1|$

(d) $f_4(x) = 2x + |x|$

Hinweis: Schreiben Sie die Funktionen zunächst betragsfrei. Dabei muss eine Fallunterscheidung gemacht werden.

Funktionen

Polynome spielen in der angewandten Mathematik eine sehr große Rolle. Sie sind einfach in der Darstellung und in der Auswertung, da nur Addition und Multiplikation ausgeführt werden müssen. Reellwertige Funktionen können durch Polynome (Taylor-Reihen) sehr gut angenähert werden.

Definition (Polynom)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit } a_n \neq 0$$

heißt **Polynom vom Grad** n. Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms.

Beispiele:

- $f_1(x) = x^3 - x + 2$: Polynom 3. Grades, kubische Funktion
- $f_2(x) = 2x^7 - 4x^5 + x^2 - 3x + 2$: Polynom 7. Grades

Funktionen

Satz (Linearfaktoren)

- Ist x_0 eine Nullstelle des Polynoms $n-$ten Grades f, dann gilt:

$$f(x) = (x - x_0)(b_n x^{n-1} + \ldots + b_2 x + b_1).$$

- Jedes Polynom $n-$ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen.
- Besitzt ein Polynom $n-$ten Grades n Nullstellen $x_1, x_2, \ldots x_n$, dann lässt es sich als Produkt aus n **Linearfaktoren** darstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned}$$

Bemerkungen

- Als mögliche Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten kommen nur Faktoren von a_0 in Betracht.
- Die Abspaltung eines Linearfaktors erreicht man am besten mit Polynomdivision

Beispiel:

Zerlegen Sie das Polynom $f(x) = x^3 - 7x^2 - 10x + 16$ in Linearfaktoren:

Man sieht durch Einsetzen, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle des Polynoms ist, d.h. $f(1) = 0$. Wir spalten also mittels Polynomdivision den Linearfaktor $(x - 1)$ ab:

$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(\quad x^3 & -7x^2 & -10x & +16\big) & : (x-1) = x^2 - 6x - 16 \\
-x^3 & +x^2 & & & \\
\hline
 & -6x^2 & -10x & & \\
 & 6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-3}
 & & -16x & +16 & \\
 & & 16x & -16 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

und erhalten als Zwischenergebnis: $f(x) = (x - 1)(x^2 - 6x - 16)$

Beispiel (Fortsetzung):

Das Restpolynom 2. Grades kann nun entweder mit der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen oder erneut mit Polynomdivision aufgelöst werden. In unserem Fall sieht man eine Nullstelle recht einfach: $x_2 = -2$, wir spalten also den Linearfaktor $(x+2)$ ab

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^2 - 6x - 16\big) : \big(x+2\big) = x - 8 \\
\underline{\;-x^2 - 2x\;} \\
\qquad\quad -8x - 16 \\
\qquad\quad \underline{\;\;\;8x + 16} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

und erhalten als vollständige Linearfaktorzerlegung das Ergebnis:

$f(x) = x^3 - 7x^2 - 10x + 16 = (x-1)(x+2)(x-8)$ mit den drei Nullstellen $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 8$.

Definition (Rationale Funktion)

Eine **rationale Funktion** ist eine Funktion, die sich als Bruch von zwei Polynomfunktionen $g(x)$ und $h(x)$ darstellen lässt

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{R} : h(x) = 0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0} \end{aligned}$$

dabei unterscheidet man

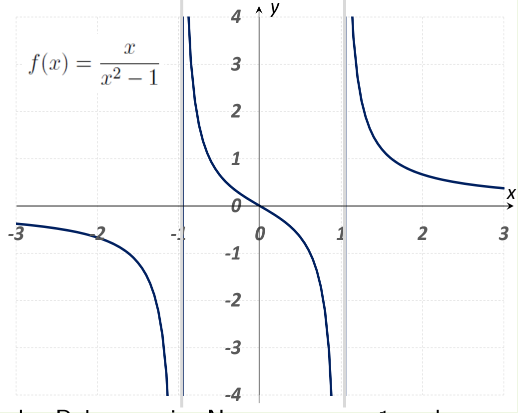
- Polynome: $n = 0$
- echt rationale Funktionen: $m < n$
- unecht rationale Funktionen: $m \geq n$

Bemerkung:

Für die Nullstellen des Nennerpolynoms $h(x)$ sind rationale Funktionen nicht definiert. Sie müssen explizit aus dem Definitionsbereich der Funktion herausgenommen werden, man spricht von **Definitionslücken**.

Funktionen

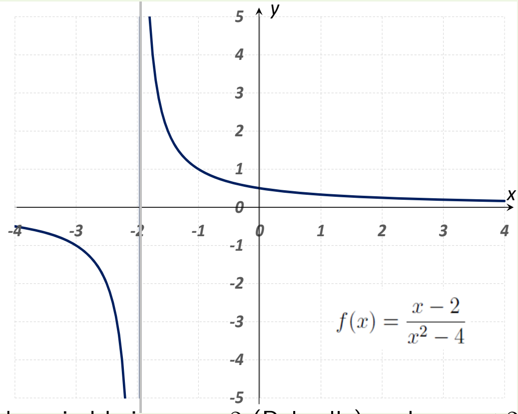
Beispiel:



In den Nullstellen des Polynoms im Nenner $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$ ist die Funktion f nicht definiert. In der unmittelbaren Umgebung von x_1 und x_2 strebt die Funktion gegen unendlich, es bilden sich **Polstellen** aus.
Bei $x_3 = 0$, der Nullstelle des Zählers, besitzt die Funktion eine Nullstelle.

Funktionen

Beispiel:



Die Definitionslücken sind bei $x_1 = -2$ (Polstelle) und $x_2 = +2$.
Kürzen des Linearfaktors $(x-2)$ für $x \neq -2$ ergibt: $f(x) = \frac{1}{x+2}$.
Die Lücke an der Stelle $x = +2$ ist so klein, dass sie im Funktionsgraph nicht zu sehen ist. Es handelt sich um eine **hebbare** Definitionslücke.

Funktionen

Bestimmung von Null- und Polstellen:

Sei $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ eine rationale Funktion. Zerlege Zähler und Nenner soweit möglich in Linearfaktoren und kürze gemeinsame Linearfaktoren.

- Die im Zähler verbleibenden Linearfaktoren ergeben die **Nullstellen** der Funktion $f(x)$.
- Die im Nenner verbleibenden Linearfaktoren ergeben die **Polstellen** der Funktion $f(x)$.
- Die vollständig weggekürzten Linearfaktoren im Nenner geben die **hebbaren Definitionslücken** der Funktion $f(x)$ an.

Funktionen

Definition (Polstellen $k-$ter Ordnung)

Taucht ein Linearfaktor im gekürzten Nenner in k-ter Ordnung auf $(x - x_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$, dann nennt man die Stelle x_0 eine Polstelle $k-$ter Ordnung.

Das Vorzeichen einer Funktion links und rechts einer Polstelle kann entweder gleich oder unterschiedlich sein, man spricht dann von einer Polstelle **mit** bzw. **ohne Vorzeichenwechsel**.

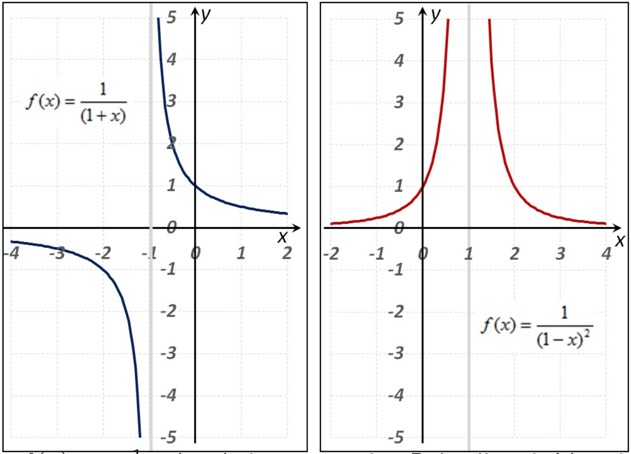
Satz (Polstellen mit Vorzeichenwechsel)

Sei x_0 eine Polstelle $k-$ter Ordnung.

- Ist k gerade, so handelt es sich um eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.
- Ist k ungerade, dann handelt es sich um eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

Funktionen

Beispiel:



Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x+1)}$ hat bei $x = -1$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ hat bei $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Übungblatt 4

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie die Polstellen und die Art der Polstellen (d. h. mit oder ohne Vorzeich
und die hebbaren Definitionslücken von

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+4)^3 x^2}\,.$$

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie die Nullstellen, Polstellen und hebbare Definitionslücken der folgenden

(a) $f_1(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)}$

(b) $f_2(x) = \frac{(x-2)^2 \cdot (x-1)}{(x-2)^3}$

(c) $f_3(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)^2(x+1)}$

(d) $f_4(x) = \frac{-x^2+x+2}{2x^3+3}$

Das Verhalten von rationalen Funktionen im Unendlichen:
Wie bei den Folgen auch, kommt es hier darauf an, wie sich der Grad des Zählerpolynoms zum Grad des Nennerpolynoms verhält:

Satz (Verhalten rationaler Funktionen im Unendlichen)

Sei $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ eine rationale Funktion, dann gilt für den Grenzwert

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{grad } g < \text{ grad } h \\ \frac{a_n}{b_n}, & \text{grad } g = \text{ grad } h \\ \pm\infty, & \text{grad } g > \text{ grad } h \end{cases}$$

Funktionen

Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4+x^3+4}{2x^5+x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^5}\cdot\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^5}}{2+\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^5}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4+x^3+4}{2x^4+x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4}\cdot\frac{5+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^4}}{2+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4+x^3+4}{2x^3+x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4}\cdot\frac{5+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^4}}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = \frac{5}{0} = \infty$$

Man klammert den entsprechenden Funktionsausdruck mit x^k, wobei k der höchste auftretende Exponent ist im Zähler und im Nenner aus. Danach betrachtet man den Grenzwert der einzelnen Terme in Zähler und Nenner und kann so den Grenzwert bestimmen.

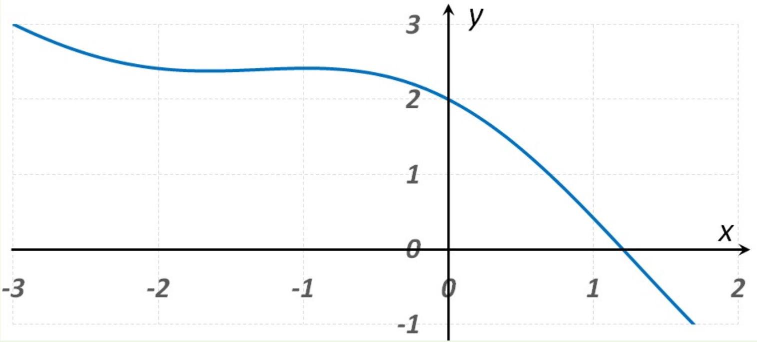
Grenzwerte

Einführendes Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1 - x^3 - \cos(2x)}{x^2}, \quad x \neq 0$$

ist für $x = 0$ nicht definiert, hier besteht eine Definitionslücke, zu allen anderen $x-$Werten können die Funktionswerte berechnet werden.



Grenzwerte

Beispiel (Fortsetzung):

Wir können den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ zwar nicht berechnen, wir können uns aber mit einer Folge x_n beliebig nahe an die Definitionslücke herantasten.

Wir wissen bereits, dass die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, d.h. eine Nullfolge ist. Wenn wir die Folgenglieder in die Funktion einsetzen, erhalten wir folgende Wertetabelle:

n	1	10	100	1000	10000	...	$\to$	∞
x_n	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	...	$\to$	0
$f(x_n)$	0.4161	1.8933	1.9899	1.9999	1.9999	...	$\to$	2?

Wir vermuten, dass die Funktionswerte gegen den Grenzwert 2 konvergieren. Um diese Vermutung zu bestätigen, führen wir dasselbe Experiment mit einer anderen Nullfolge durch:

Grenzwerte

Beispiel:

Die Folge $x_n = \frac{1}{2^n}$ ist eine Nullfolge. Wir setzen die Folgenglieder wieder in die Funktion ein und erhalten die folgende Wertetabelle:

n	1	5	10	15	$\dots$	$\to$	∞
x_n	0.5	0.031250	0.000977	0.000031	$\dots$	$\to$	0
$f(x_n)$	1.338791	1.968099	1.999023	1.999969	$\dots$	$\to$	2

Auch diese Folge konvergiert gegen den Grenzwert 2. Für beide betrachteten Folgen sind alle Folgenglieder größer null und nähern sich von rechts ihrem Grenzwert 0.

Bemerkung:

Es liegt die Vermutung nahe, dass für jede andere, gegen die Zahl 0 konvergierende Folge x_n mit $x_n > 0$, die Folge $f(x_n)$ gegen den Wert 2 konvergiert.

Notation:

In unserem Beispiel gilt auch für jede beliebige Folge $x_n \to 0$, dass stets $f(x_n) \to 2$ gilt. Man schreibt daher

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ (x>0)}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ (x>0)}} \frac{1 - x^3 - \cos(2x)}{x^2} = 2$$

und bezeichnet diesen Wert als den **rechtsseitigen Grenzwert** der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$.

Grenzwerte

Beispiel (Fortsetzung):

Wir wollen nun eine Folge betrachten, die sich von links dem Wert 0 nähert. Dazu nehmen wir die Folge $x_n = -\frac{1}{n}$, deren Folgenglieder alle kleiner 0 sind, die also für $n \to \infty$ von links gegen 0 konvergiert. Wenn wir die Folgenglieder in die Funktion einsetzen, erhalten wir folgende Wertetabelle:

n	1	10	100	1000	10000	...	$\to$	∞
x_n	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	$\to$	0
$f(x_n)$	2.4161	2.0933	2.0099	2.0010	2.0001	...	$\to$	2

Aus der Wertetabelle entnehmen wir auch hier, dass die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ gegen den Wert 2 konvergiert.

Bemerkung:

Dies ist auch für jede beliebige Folge x_n der Fall, die sich von links dem Wert 0 annähert.

Nähert sich die Folge x_n von links dem gesuchten Wert für x, dann schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} \frac{1-x^3-\cos(2x)}{x^2} = 2$$

und bezeichnet diesen Wert als den **linksseitigen Grenzwert** der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x=0$.

Bemerkung:

Im Beispiel der Funktion $f(x) = \frac{1-x^3-\cos 2x}{x^2}$ stimmen die beiden Grenzwerte von links und rechts an die Zahl $x_0 = 0$ überein.
Daher schreibt man kurz $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-x^3-\cos 2x}{x^2} = 2$ und spricht vom Grenzwert der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Grenzwerte

Definition (Grenzwert einer Funktion)

- Betrachtet man bei der Grenzwertbetrachtung einer Funktion f an der Stelle x_0 nur Zahlenfolgen x_n, die kleinere Werte als x_0 enthalten, dann bezeichnet man den Grenzwert als **linksseitigen Grenzwert**

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ (h > 0)}} f(x_0 - h) = G_L$$

- Zahlenfolgen mit größeren Werten als x_0 erzeugen den **rechtsseitigen Grenzwert**

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ (h > 0)}} f(x_0 + h) = G_R$$

- Streben für jede gegen x_0 konvergente Zahlenfolge x_n die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen denselben Wert G, dann besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 den **Grenzwert** G

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G = G_R = G_L$$

Grenzwerte

Satz (Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte)

Seien f und g zwei Funktionen mit den Grenzwerten $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = G$, dann gilt:

- Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $f(x) \pm g(x)$ an der Stelle x_0, nämlich
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G.$$
- Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $f(x) \cdot g(x)$ an der Stelle x_0, nämlich
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G.$$
- Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ an der Stelle x_0, nämlich
$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{F}{G}, \quad \text{für } g(x_0) \neq 0 \text{ in einer Umgebung von } x_0 \text{ und } G \neq 0$$

Grenzwerte

Bemerkungen:

- Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet: x kommt der Stelle x_0 beliebig nahe, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Es ist stets $x \neq x_0$.
- Es wird **nicht** gefordert, dass x_0 aus dem Definitionsbereich der Funktion ist.
- Es kann die Situation eintreten, dass eine Funktion an einer Stelle x_0 einen Grenzwert besitzt, obwohl sie dort überhaupt nicht definiert ist.
- Stimmen der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert einer Funktion f an einer Stelle x_0 überein, dann existiert der Grenzwert G der Funktion f an dieser Stelle:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = G_R = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = G_L = \lim_{x \to x_0} f(x) = G$$

Grenzwerte

Beispiel:

Bestimme: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$

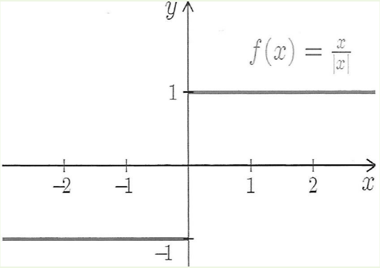


Abbildung aus Koch,Stämpfle, Mathematik für das

Ingenieurstudium, S.212, Hanser Verlag

Die Funktion hat eine Definitionslücke bei $x = 0$. Eine Folge, die von links konvergiert, hat nur negative Glieder. Folglich ist

$$G_L = \lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} \frac{x}{-x} = -1$$

Andererseits hat eine Folge, die von rechts gegen 0 konvergiert, nur positive Glieder:

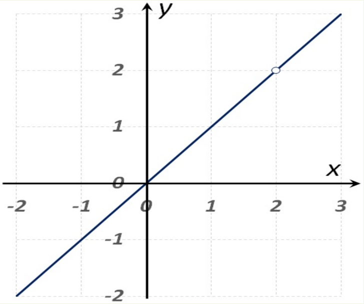
$$G_R = \lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} \frac{x}{x} = 1$$

Da $G_L \neq G_R$ besitzt die Funktion $f(x) = \frac{x}{|x|}$ an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert.

Grenzwerte

Beispiel:

Bestimme: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$



Die Funktion hat eine Definitionslücke bei $x = 2$. Für den linksseitigen Grenzwert gilt:

$$G_L = \lim_{\substack{x \to 2 \\ (x<2)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ (x<2)}} x = 2$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt:

$$G_R = \lim_{\substack{x \to 2 \\ (x>2)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ (x>2)}} x = 2$$

Da $G_L = G_R$ besitzt die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x-2}$ den Grenzwert $G = 2$.
Der Linearfaktor $(x - 2)$ ist im Zähler und Nenner enthalten und kann deshalb gekürzt werden. Die Funktion besitzt bei $x = 2$ eine hebbare Definitionslücke.

Übungsblatt 4

Aufgabe 5.
Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte oder begründen Sie, dass kein Grenzwert existiert. Überprüfen Sie das Resultat mit Matlab, wolframalpha oder einem analogen Tool.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{|x-1|}{x-1}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, wobei $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{falls } x>0 \\ x^3, & \text{falls } x\leq 0\end{cases}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}$

Aufgabe 6.
Überlegen Sie sich, was die folgenden Funktionsgrenzwerte sein sollten (bzw. ob diese überhaupt existieren). Berechnen Sie anschliessend mit Matlab, wolframalpha oder einem analogen Tool die folgenden Funktionsgrenzwerte (falls existent).

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$

Stetigkeit

Bemerkung:

Eine Funktion heißt stetig, wenn ihr Graph kein Loch und keinen Sprung aufweist, d.h. wenn man beim Zeichnen ihres Graphen den Stift nicht absetzen muss.

Stetigkeit

Definition (Stetigkeit)

Eine Funktion heißt an einer Stelle $x = x_0$ **stetig**, wenn der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0 existiert und mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x_0 - h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Bemerkung:

Eine Funktion heißt stetig, wenn ihr Graph kein Loch und keinen Sprung aufweist, d.h. wenn man beim Zeichnen ihres Graphen den Stift nicht absetzen muss.

Stetigkeit

Definition (Stetigkeit)

Eine Funktion heißt an einer Stelle $x = x_0$ **stetig**, wenn der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0 existiert und mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x_0 - h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Eine Funktion, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches $\mathbb{D}$ stetig ist, nennt man eine **stetige Funktion** (auf $\mathbb{D}$).
Existiert der Grenzwert hingegen nicht oder stimmt er nicht mit dem Funktionswert überein, so ist die Funktion an dieser Stelle **unstetig**.

Bemerkung:

Eine Funktion heißt stetig, wenn ihr Graph kein Loch und keinen Sprung aufweist, d.h. wenn man beim Zeichnen ihres Graphen den Stift nicht absetzen muss.

Stetigkeit

Bedingungen für Stetigkeit:

Eine Funktion ist genau dann stetig an der Stelle x_0, wenn **alle** folgenden Bedingungen erfüllt sind:

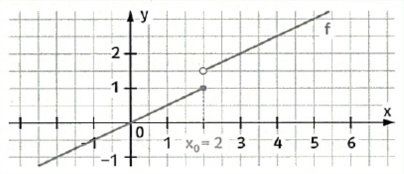
- Die Funktion ist an der Stelle x_0 selbst und in einer Umgebung der Stelle x_0 definiert, d.h. der Funktionswert an der Stelle x_0, $f(x_0)$ existiert;
- Der Grenzwert der Funktion $x \to x_0$ existiert, insbesondere müssen der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle x_0 gleich sein;
- Der Grenzwert $x \to x_0$ und der Funktionswert stimmen an der Stelle x_0 überein.

Beispiele (Zwei Funktionen, die an einer Stelle nicht stetig sind)

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht stetig.

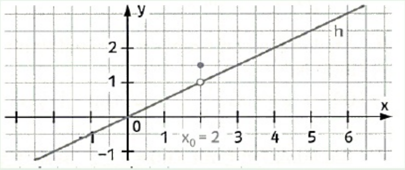


Grund: $\lim_{x \to 2} f(x)$ existiert nicht, denn $\lim_{\substack{x \to 2 \\ (x<2)}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to 2 \\ (x>2)}} f(x)$

Die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \neq 2 \\ \frac{3}{2} & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht stetig.



Grund: $\lim_{x \to 2} h(x) = 1 \neq 1.5 = h(2)$

Stetigkeit

Satz (Stetige Funktionen)

Die wichtigsten, im vollen Erklärungsbereich stetigen Funktionen sind

- Polynome $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig;
- Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig;
- Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_a(x)$, $(a > 0, a \neq 1)$ sind für $x > 0$ stetig;
- Trigonometrische Funktionen $(\cos(x), \sin(x))$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig;
- Hyperbelfunktionen $(\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x))$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

Stetigkeit

Satz (Stetigkeit der Kombination elementarer Funktionen)

Alle elementaren Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich überall stetig, insbesondere gilt für stetige Funktionen f und g an der Stelle x_0

- Die Funktion $f \pm g$ ist ebenfalls stetig in x_0
- Die Funktion $f \cdot g$ ist ebenfalls stetig in x_0
- Die Funktion $\dfrac{f}{g}$ ist auch stetig in x_0, falls $g(x_0) \neq 0$
- Wenn g eine stetige Funktion an der Stelle x_0 ist und f eine stetige Funktion an der Stelle $g(x_0)$ ist, dann ist auch die Komposition $f \circ g$ an der Stelle x_0 stetig

Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = \big(\cos(3x^2 + 2)\big)^2 + e^{\frac{x^2}{2}}$$

ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Stetigkeit

Definition (Hebbare Unstetigkeitsstelle)

Wenn bei einer Funktion f der linksseitige Grenzwert und der rechtsseitige Grenzwert existieren und gleich sind,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x<x_0)}} f(x) = G_L = G_R = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x>x_0)}} f(x) = G$$

aber nicht mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmen oder die Funktion f an der Stelle x_0 nicht definiert ist, dann kann man durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} = f(x) & \text{für } x \neq x_0, \\ = G & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

eine neue Funktion definieren, die an der Stelle x_0 stetig ist. Die Stelle x_0 heißt **hebbare Unstetigkeitsstelle**.

Stetigkeit

Beispiel:

Bei der Funktion aus einem vorigen Beispiel $f(x) = \frac{1-x^3-\cos(2x)}{x^2}$ besitzen der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ den Wert 2. Die Funktion ist aber an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert („Division durch 0“). Die neue Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} = \dfrac{1 - x^3 - \cos(2x)}{x^2} & \text{für } \; x \neq 0, \\ = 2 & \text{für } \; x = 0 \end{cases}$$

ist für alle reellen Zahlen definiert und stetig.

Übungsblatt 4

Aufgabe 7.
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihre Unstetigkeitsstellen.

(a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

(b) $g(x) = \frac{1}{x}$

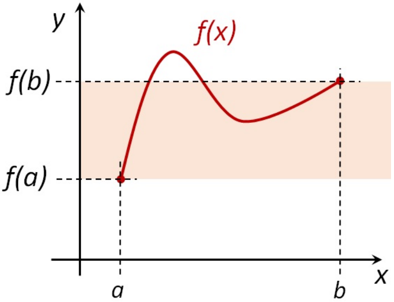
Aufgabe 8.
Bestimmen Sie reelle Zahlen a und b so, dass die folgende Funktion f stetig ist auf $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{für } 1 < x < 2 \\ 2x + 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Stetigkeit

Satz (Zwischenwertsatz)

Eine Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, die Funktionswerte seien $f(a)$ und $f(b)$. Dann nimmt f in $[a, b]$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ jeden Zwischenwert (mindestens einmal) an.



Bemerkung:

Zwischen dem Maximum der Funktion und dem Minimum der Funktion im Intervall [a,b], wird jeder Wert von der Funktion angenommen.

Stetigkeit

Beispiel (Nullstellensatz):

Hat eine auf dem Intervall [a,b] stetige Funktion $f(x)$ zwei Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ mit unterschiedlichem Vorzeichen, dann hat die Funktion im betreffenden Intervall [a,b] mindestens eine Nullstelle.