Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Übungsblatt 4

Lösungen

Lösung 1.

(a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)}$
Daraus folgt, dass $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ ist.

(b) $g(x) = \frac{2x^7-5x^3+12x-100}{x^3-x^2} = \frac{2x^7-5x^3+12x-100}{x^2(x-1)}$
Daraus folgt, dass $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist.

(c) Da die (reelle) Wurzelfunktion nicht für negative Zahlen definiert ist, muss gelten:

$$x^2 - 1 \geq 0$$

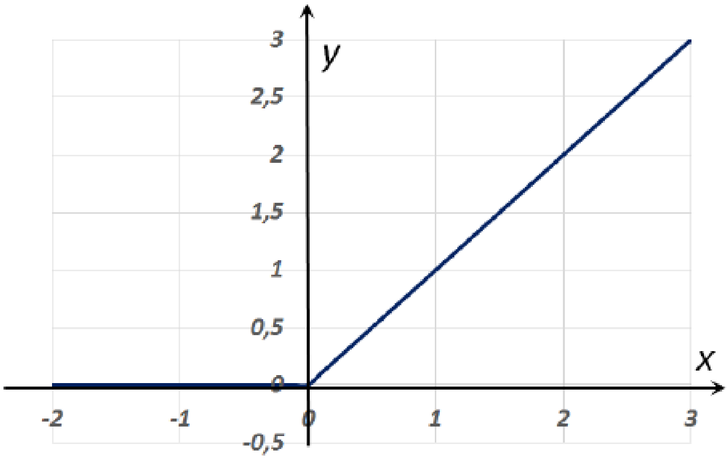
$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ oder $x \leq -1$.

Daraus folgt, dass $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \vee x \leq -1\}$ ist. Mit diesem Definitionsbereich ist der kleinste Wert, der erreicht werden kann 0. Also folgt für den Wertebereich, dass $W = \mathbb{R}_0^+$.

Lösung 2.

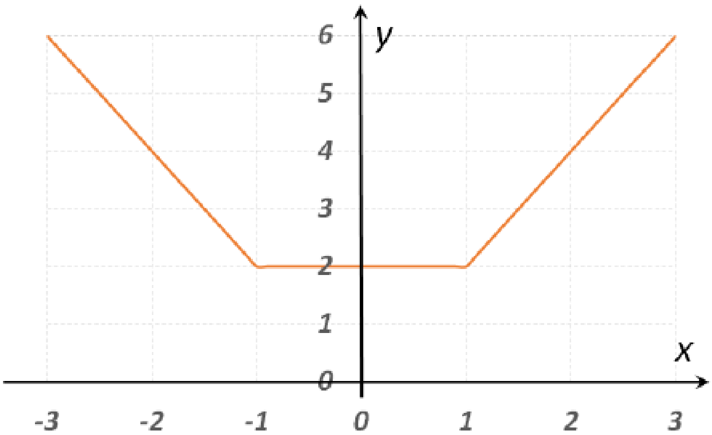
(a) Die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

$$f_1(x) = \frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} \frac{x-x}{2} = 0\,, & \text{für } x < 0 \\ \frac{x+x}{2} = x\,, & \text{für x} \geq 0 \end{cases}$$



(b) Die Funktion ist gerade.

$$f_2(x) = |x+1| + |x-1| = \begin{cases} -(x+1)-(x-1) & = & -2x\,, & \text{für } x < -1 \\ (x+1)-(x-1) & = & 2\,, & \text{für -1} \leq x < 1 \\ (x+1)+(x-1) & = & 2x\,, & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

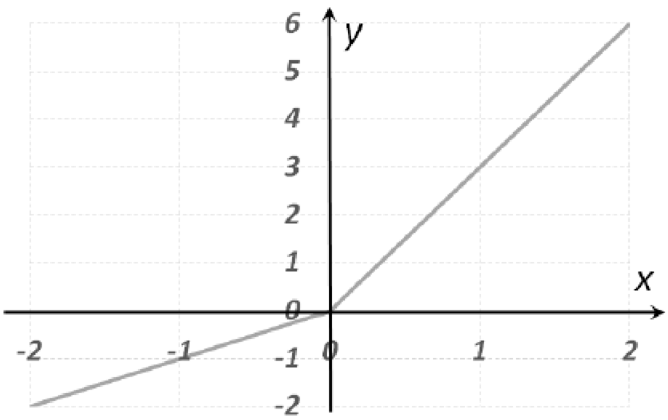


(c) Die Funktion ist ungerade.

$$f_3(x) = -|x+1| + |x-1| = \begin{cases} (x+1)-(x-1) & = & 2, & \text{für } x < -1 \\ -(x+1)-(x-1) & = & -2x, & \text{für } -1 \le x < 1 \\ -(x+1)+(x-1) & = & -2, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

(d) Die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

$$f_4(x) = 2x + |x| = \begin{cases} 2x - x = x, & \text{für } x < 0 \\ 2x + x = 3x, & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$



Lösung 3.

- $x = -4$ ist eine Polstelle 3. Ordnung mit Vorzeichenwechsel, weil $(x+4)^3$ ein Polynom ungeraden Grades ist.
- $x = 0$ ist eine Polstelle 2. Ordnung ohne Vorzeichenwechsel, weil x^2 ein Polynom geraden Grades ist.
- Es gibt keine hebbaren Definitionslücken in $f(x)$.

Lösung 4. (a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

Polstelle 1. Ordnung: $x = \mp 1$ mit Vorzeichenwechsel

Nullstellen: keine

Hebbare Definitionslücken: keine

(b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

Polstelle 1. Ordnung: $x = 2$ mit Vorzeichenwechsel

Nullstellen: $x = 1$

Hebbare Definitionslücken: keine

(c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$,

Polstelle 2. Ordnung: $x = 3$ ohne Vorzeichenwechsel

Nullstellen: $x = 2$

Hebbare Definitionslücken: $x = -1$

(d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\}$,

Polstelle: $-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

Hebbare Definitionslücken: keine

Lösung 5.

(a) Es existiert ein Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x} \right) = \dfrac{1^2 - 1}{1} = 0$

(b) Für $x > 1$ ist $\frac{|x-1|}{x-1} = 1$ und für $x < 1$ gilt $\frac{|x-1|}{x-1} = -1$.

Deshalb existiert an der Stelle 1 kein Funktionsgrenzwert.

(c) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$

(d) Für $x > 0$ ist $\frac{|x|}{x} = 1$ und für $x < 0$ gilt $\frac{|x|}{x} = -1$.

Deshalb existiert an der Stelle 0 kein Funktionsgrenzwert.

(e) Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} x^2 = 0$ und für den linksseitigen Grenzwert ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} x^3 = 0$. Weil diese beiden Werte gleich sind, ist der Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

(f) $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x}} = 2^0 = 1$

Lösung 6.

(a) `ans=1` (b) `ans=3` (c) `ans=NaN` (d) `ans=0` (e) `ans=Inf`

Lösung 7.

(a) Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x_0 = -1$ eine hebbare Definitionslücke:

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to-1}\left(\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\right) = \lim_{x\to-1}\left(\frac{x-1}{1}\right) = \lim_{x\to-1}(x-1) = -2$$

Die Funktion $f(x)$ hat also an der Stelle $x_0 = -1$ ein Loch, aber diese Unstetigkeit kann behoben werden:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq -1 \\ -2 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

(b) Die Funktion $g(x)$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, d. h. dass an dieser Stelle der Limes $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert. Die Funktion $g(x)$ ist dementsprechend an der Stelle x_0 unstetig.

Lösung 8.

Eine Funktion ist stetig, wenn sie keine Sprünge an den Übergängen hat. Es soll also an der Stelle $x = 1$ gelten, dass

$$2 = a \cdot 1^2 + b$$

und an der Stelle $x = 2$ gilt

$$a \cdot 2^2 + b = 2 \cdot 2 + 1\,.$$

Somit resultieren a und b aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 &= a + b\,, \\ 4a + b &= 5\,. \end{aligned}$$

Lösen wir die erste Gleichung nach a auf ($a = 2 - b$) und setzen diesen Term in die zweite Gleichung ein,

$$4 \cdot (2 - b) + b = 5\,,$$

können wir die zweite GLeichung nach $b = 1$ auflösen und somit durch die erste Gleichung $a = 1$ bestimmen.

Lösung 9.

(a) $\boldsymbol{x = -1}$**:** Für $x < 0$ gilt $|x| = -x$ und somit ist $f(x) = \frac{1-x}{1-|x|} = \frac{1-x}{1+x}$.

An der Stelle $x = -1$ ist somit eine Polstelle, d. h. der Grenzwert ist nicht existent und somit kann die Unstetigkeit nicht behoben werden.

$\boldsymbol{x = 1}$**:** Für $x \geq 0$ gilt $|x| = x$ und somit ist $f(x) = \frac{1-x}{1-|x|} = \frac{1-x}{1-x} = 1$.

Die Definitionslücke ist also hebbar und kann behoben werden, indem wir den Wert an der Stelle $x = 1$ auf 1 setzen, also $f(1) = 1$.

(b) Es gilt

$$g(x) = \frac{|x|}{2x} = \begin{cases} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} & \text{für } x > 0 \\ -\frac{x}{2x} = -\frac{1}{2} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Wegen dem Sprung bei $x = 0$ ist es nicht möglich, die Unstetigkeiten zu beheben.

(Es wäre nur möglich, wenn der Limes $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existieren würde.)