Serie 6

Aufgabe 1. Eine ausgewogene Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariablen X bzw. Y bezeichnen die Anzahl Köpfe in den ersten beiden bzw. letzten beiden Würfen. Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind. Finden Sie dazu zwei Werte x und y mit $P(X = x, Y = y) \neq P(X = x) \cdot P(Y = y)$.

Lösung. Es ist $P(X = 2, Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(X = 2) \cdot P(Y = 0)$

Aufgabe 2. Es seien drei Glühlampen gegeben. Die Lebensdauer sei jeweils exponentiell verteilt, mit Parameter $\lambda_1 = \frac{1}{10}$, $\lambda_2 = \frac{1}{20}$ und $\lambda_3 = \frac{1}{5}$ Zeiteinheiten für Glühlampe 1, 2 bzw. 3. Die Lebensdauern seien unabhängig voneinander. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

1. Glühlampe 1 mehr als 5 Zeiteinheiten brennt.
2. alle Glühlampen mindestens 5 Zeiteinheiten brennen.
3. mindestens eine Glühlampe 5 Zeiteinheiten brennt.
4. mindestens zwei Glühlampen 5 Zeiteinheiten brennen.

Lösung.

1. $0.6065 = 1 - expcdf(5, 10)$
2. $0.1738 = (1 - expcdf(5, 10) * (1 - expcdf(5, 20) * (1 - expcdf(5, 5))$
3. $0.9450 = 1 - expcdf(5, 10) * expcdf(5, 20) * expcdf(5, 5)$
4. $0.6345 = (1 - expcdf(5, 10)) * (1 - expcdf(5, 20)) * expcdf(5, 5) + (1 - expcdf(5, 10)) * expcdf(5, 20) * (1 - expcdf(5, 5)) + expcdf(5, 10) * (1 - expcdf(5, 20)) * (1 - expcdf(5, 5)) + (1 - expcdf(5, 10)) * (1 - expcdf(5, 20)) * (1 - expcdf(5, 5))$

Aufgabe 3. In einer Notrufzentrale gehen pro Stunde im Schnitt 3 Anrufe aus dem Festnetz und 10 Anrufe aus dem Mobilfunknetz ein. Die Annahme, dass diese Anrufe unabhängig voneinander sind, ist sinnvoll.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 Anrufe aus dem Festnetz und höchstens 4 Anrufe aus dem Mobilfunknetz in einer Stunde.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens 20 Anrufe in zwei Stunden.

Lösung.

1. $0.0234 = (1 - poisscdf(1, 3)) * poisscdf(4, 10)$
2. $0.9032 = 1 - poisscdf(19, 26)$

Aufgabe 4. Es sei $X \sim B(p)$ und $Y \sim B(p)$ und X und Y seien unabhängig. Rechnen Sie nach, dass $X + Y \sim Bin(2, p)$.

Lösung.

- $P(X + Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = (1 - p)^2 = \binom{2}{0} p^0 (1 - p)^{2-0} = binopdf(0, 2)$
- $P(X + Y = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1) \cdot P(Y = 0) + P(X = 0) \cdot P(Y = 1) = 2p(1 - p) = \binom{2}{1} p^1 (1 - p)^{2-1} = binopdf(1, 2)$

- $P(X+Y=2) = P(X=1, Y=1) = P(X=1) \cdot P(Y=1) = p^2 = \binom{2}{2} p^2(1-p)^{2-2} = \mathit{binopdf}(2,2)$

Aufgabe 5. Wir würfeln 10 mal mit einem fairen Würfel. Anschliessend werfen wir solange eine faire Münze, bis zum ersten Mal Kopf kommt. Pro gewürfelter 6 und pro Zahl beim Münzwurf erhalten wir jeweils einen Franken.

1. Wie hoch ist der erwartete Gewinn?

2. Wir hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von 4 Franken?

Lösung. 1. $\frac{10}{6} + \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1$ $(= E(X+Y-1)$ mit $X \sim Bin(10, \frac{1}{6})$ und $Y \sim Geo(\frac{1}{2}))$

2. 0.1275 etwa via:

```
t=0;
for i=0:4
   t=t+binopdf(i,10,1/6)*geopdf(4-i,1/2);
end
t
```

Aufgabe 6. Eine Maschine produziert Torten, deren Gewicht normalverteilt mit Paramtern $\mu_1 = 400g$ und $\sigma_1 = 10g$ ist. Eine zweite Maschine setzt, unabhängig von der ersten Maschine, jeweils 4 Sahnehauben auf die Torten. Das Gewicht einer Sahnehaube ist normalverteilt mit Parameter $\mu_2 = 30g$ und $\sigma_2 = 5g$.

1. Wie schwer ist eine Torte im Mittel?

2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Torte mehr als 530g wiegt?

3. Eine Torte, die weniger als 500g wiegt, kann nicht mehr verkauft werden.
   (a) Mit welchem Anteil an Torten, die nicht verkauft werden können, ist zu rechnen?
   (b) Wie viele Torten müssen mindestens produziert werden, damit mit Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% 100 Torten zum Verkauf geeignet sind?

4. Die schwersten 5% der Torten sind für eine bestimmte Ladenkette gedacht. Ab welchem Gewicht geht eine Torte dorthin?

Lösung. 1. $400g + 4 \cdot 30g = 520g$

2. $1 - \mathit{normcdf}(530, 520, sqrt(10^2 + 4 * 5^2))$

3. (a) $\mathit{normcdf}(500, 520, sqrt(10^2 + 4 * 5^2))$
   (b) $X \sim Bin(n, 1 - \mathit{normcdf}(500, 520, sqrt(10^2 + 4 * 5^2)))$, $P(X \geq 100) \geq 0.9$ Es ergibt sich $n = 113$.

4. $norminv(0.95, 520, sqrt(10^2 + 4 * 5^2))$

Aufgabe 7. Eine Zufallsvariable X habe den Erwartungswert 100 und die Standardabweichung 9.

1. Geben Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff eine Abschätzung für $P(80 \leq X \leq 120)$ an.

2. Berechnen Sie $P(80 \leq X \leq 120)$ für

(a) $X \sim \mathcal{N}(100, 9)$

(b) $X \sim Bin(1000, \frac{1}{10})$

Lösung. 1. $P(|X - 100| \leq 20) \geq$ 1-0.2025

2. (a) $0.9737 = \mathit{normcdf}(120, 100, 9) - \mathit{normcdf}(80, 100, 9)$

   (b) $0.9695 = \mathit{binocdf}(120, 1000, 0.1) - \mathit{binocdf}(79, 1000, 0.1)$

Aufgabe 8. Die Wahrscheinlichkeit für einen Spinnenbiss in einem bestimmten Gebiet betrage 20% , die für einen Schlangenbiss unabhängig davon 10% . Nach einem Biss erhält man ein passendes Gegengift, welches dann für den Rest des Urlaubs ausreicht. (Wenn man von einer Schlange und einer Spinne gebissen wird, erhält man also zwei Gegengifte.) Es verbringen 100 Leute einen Abenteuerurlaub in diesem Gebiet.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 20 Spinnengegengifte benötigt werden?

2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens 30 benötigte Gegengifte?

Lösung. 1. $0.4405 = 1 - \mathit{binocdf}(20, 100, 0.2)$

2. 0.5486 Etwa via:

```
t=0;
for i=0:30
  for j=0:i
    t=t+binopdf(j,100,0.2)*binopdf(i-j,100,0.1);
  end
end
t
```

   Alternativ:

```
t=0;
for i=0:30
  t=t+binopdf(i,100,0.2)*binocdf(30-i,100,0.1);
end
t
```

Aufgabe 9. Eine Firma plant, ihre Dienste auf einem neuen Server anzubieten. Die Firma erhält im Schnitt pro Minute 10 Anfragen. Der neue Server läuft zunächst in einem Probebetrieb: Nach 100 Anfragen werden die weiteren Anfragen wieder vom alten Server übernommen.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Testbetrieb länger als 10 Minuten dauert? Simulieren Sie hierzu 100 Anfragen, und schauen Sie, ob die Wartezeit mehr als 10 Minuten beträgt. Machen Sie diese Simulation sehr oft und schauen Sie, in wie viel Prozent aller Fälle das gesuchte Ereignis eintritt.

2. Wie hoch ist die erwartete Dauer des Testbetriebs? Simulieren Sie den Testbetrieb sehr oft und rechnen Sie die durchschnittliche Dauer aus.

Verwenden Sie als Wartezeit auf eine Anfrage eine Exponentialverteilung.

(Beide Probleme könnten (im Gegensatz zu vielen anderen Problemen) auch exakt ohne Simulation gelöst werden. Problem 1 über die Tatsache, dass die Faltung von n Exponentialverteilungen mit Parameter λ eine Gammaverteilung mit Parametern 100 und λ ergibt. Problem 2 über die Additivität des Erwartungswerts.)

Lösung.
```
N=100000;
dauer=0;
anzahl=0;
anzahl2=0;
for i=1:N
    t=0;
   for j=1:100
       t=t+expinv(rand,1/10);
   end
    if t>10
        anzahl=anzahl+1;
    end
    if t<12
        anzahl2=anzahl2+1;
    end
    dauer=dauer+t;
end
fprintf('Durchschnittliche Dauer (Simulation): %f\n', dauer/N)
fprintf('Durchschnittliche Dauer (exakt)): 10\n')
fprintf('WK für Dauer >10 (Simulation): %f\n', anzahl/N)
fprintf('WK für Dauer >10 (exakt): %f\n', 1-gamcdf(10,100,1/10))
fprintf('WK für Dauer >10 (Simulation): %f\n', anzahl2/N)
fprintf('WK für Dauer <12 (exakt): %f\n', gamcdf(12,100,1/10))
```