Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Übungsblatt 11

Lösungen

Lösung 1.

(a) $30° = \dfrac{360°}{12} = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$

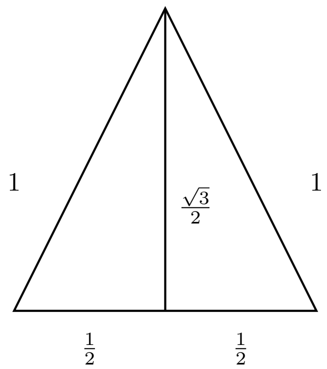
(b) $135° = \dfrac{3}{8} \cdot 360° = \dfrac{3}{8} \cdot 2\pi = \dfrac{6\pi}{8} = \dfrac{3\pi}{4}$

(c) $270° = \dfrac{3}{4} \cdot 360° = \dfrac{3}{4} \cdot 2\pi = \dfrac{3\pi}{2}$

(d) $390° = \dfrac{13}{12} \cdot 360° = \dfrac{13}{12} \cdot 2\pi = \dfrac{13\pi}{6}$

(e) $133° = \dfrac{133}{360} \cdot 360° = \dfrac{133}{360} \cdot 2\pi = \dfrac{133\pi}{180}$

Lösung 2.
Gleichseitiges Dreieck mit den Innenwinkeln von jeweils $\frac{\pi}{3}$:



Der obere Winkel wird durch die Höhe geteilt in zwei Winkel der Grösse von jeweils $\frac{\pi}{6}$.

(a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$

(b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ (Kann aus der Darstellung im Einheitskreis abgelesen werden.)

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ (Kann aus der Darstellung im Einheitskreis abgelesen werden.)

(d) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Lösung 3.

(a) **Nullstellen:**

$$\sin(2\pi x) = 0 \iff 2\pi x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{k\pi}{2\pi} = \frac{k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Wertemenge: Die Wertemenge ist beschränkt durch ein Minimum und ein Maximum der Funktion:

$$f(x) = \cos(2\pi x) \cdot 2\pi = 0 \iff \cos(2\pi x) = 0 \iff 2\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff x = \frac{\pi}{4\pi} + \frac{k\pi}{2\pi}, \iff x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Daraus folgt, dass für $k = 0$ bei $\sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ein Maximum liegt und für $k = 1$ bei $\sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ ein Minimum. Das heisst, die Wertemenge ist $[-1, 1]$.

(b) **Nullstellen:**

$$2\cos(2\pi x + \frac{\pi}{4}) = 0 \iff 2\pi x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{1}{8} + \frac{k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Wertemenge: Die Wertemenge ist beschränkt durch ein Minimum und ein Maximum der Funktion:

$$f(x) = -2\sin(2\pi x + \frac{\pi}{4}) \cdot 2\pi = 0 \iff \sin(2\pi x + \frac{\pi}{4}) = 0$$
$$\iff 2\pi x + \frac{\pi}{4} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff x = \frac{k\pi}{2\pi} - \frac{\pi}{8\pi} = \frac{k}{2} - \frac{1}{8},\ k \in \mathbb{Z}$$

Daraus folgt, dass für $k = 0$ bei $2\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos(0) = 2$ ein Maximum liegt und für $k = 1$ bei $2\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos(\pi) = -2$ ein Minimum. Das heisst, die Wertemenge ist $[-2, 2]$.

(c) **Nullstellen:**

$$\sin^2(x) = 0 \iff \sin(x) = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Wertemenge: Die Wertemenge ist beschränkt durch ein Minimum und ein Maximum der Funktion:

$$f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x) = 0 \iff x = k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Daraus folgt, dass für $k = 0$ bei $\sin^2(0) = 0$ ein Minimum liegt und für $k = 1$ bei $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$ ein Maximum. Das heisst, die Wertemenge ist $[0, 1]$.

Lösung 4.

(a) $f(x) = (3\sin(3x) - 2) \; = 3\cos(3x) \cdot 3 - 0 = 9\cos(3x)$

(b) $f(x) = \left(\sin^2(x) + \cos(2x)\right) \; = 2\sin(x) \cdot \cos(x) + (-\sin(2x) \cdot 2 = 2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(2x)$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\sin(x)\cos(2x)}{2}\right) \; = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cdot \cos(2x) + \sin(x) \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2) \\ &= \frac{\cos(x)\cos(2x)}{2} - \sin(x)\sin(2x) \end{aligned}$$

(d) $f(x) = \left(\dfrac{\sin^2(x)}{x^2}\right) \; = \dfrac{2\sin(x)\cos(x) \cdot x^2 - \sin^2(x) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)}{x^3}$

(e)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\cos^2(x) + \cos(x)}{x^2 + 1}\right) \\ &= \frac{(2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) - \sin(x)) \cdot (x^2 + 1) - \left(\cos^2(x) + \cos(x)\right) \cdot 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} \end{aligned}$$

(f) $f(x) = \left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \; = \left(\sin\left(x^{-1}\right)\right) \; = \cos\left(x^{-1}\right) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

Lösung 5.

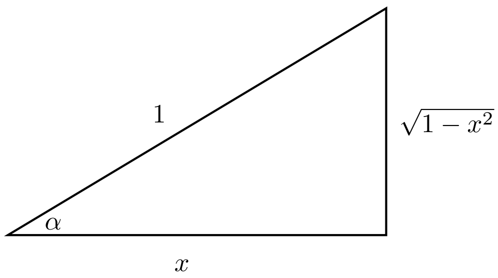
(a)

$$\begin{aligned} \cot(x) &= \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) \; = \frac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1 \cdot (\cos^2(x) + \sin^2(x))}{\sin^2(x)} \\ &= -\frac{1}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

(b) $\cot(x) = \dfrac{-1 \cdot (\cos^2(x) + \sin^2(x))}{\sin^2(x)} = -1 \cdot \left(\dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} + 1\right) = -1 \cdot \left(\cot^2(x) + 1\right) = -1 - \cot^2(x)$

Lösung 6.

(a) Wir betrachten das folgende Dreieck:



Wir setzen α aus

$$\frac{x}{1} = \cos(\alpha) \iff \alpha = \arccos(x)$$

in die folgende Gleichung ein

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sin(\alpha) = \sin(\arccos(x))$$

und erhalten so die Gleichung

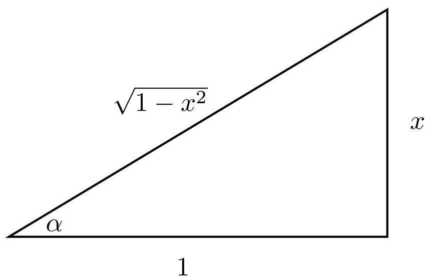
$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}\,. \tag{1}$$

Wir leiten beide Seiten der ersten Gleichung der Aufgabenstellung ab und lösen danach nach $\arccos\,(x)$ auf:

$$\begin{aligned}(\cos(\arccos(x)))\ = x \iff & -\sin(\arccos(x)) \cdot \arccos\,(x) = 1 \\ \iff & \arccos\,(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Gleichung (1) eingesetzt haben.

(b) Nun betrachten wir das folgende Dreieck:



Wir setzen α aus

$$\frac{x}{1} = \tan(\alpha) \iff \alpha = \arctan(x)$$

in die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos(\alpha) = \cos(\arctan(x))$$

ein und erhalten so

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,. \tag{2}$$

Wir leiten nun beide Seiten der zweiten Gleichung aus der Aufgabenstellung ab und lösen danach nach $\arctan(x)$ auf:

$$(\tan(\arctan(x))) = x \iff \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} \cdot \arctan(x) = 1$$
$$\iff \arctan(x) = \cos^2(\arctan(x)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

wobei wir im letzten Schritt den Term (2) eingesetzt haben.

Lösung 7.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \left(\sqrt{1-\sin^2(x)}\right) = \left(\left(1-\sin^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1-\sin^2(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = -\left(1-\sin^2(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\
&= -\left(\cos^2(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = -\frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{(\cos^2(x))^{\frac{1}{2}}} \\
&= -\frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{\cos(x)} = -\sin(x)
\end{aligned}$$

Lösung 8.
Wegen

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\sin(x) + \cos(x) \\
f''(x) &= -\cos(x) - \sin(x) \\
f'''(x) &= \sin(x) - \cos(x) \\
f^{(4)}(x) &= \cos(x) + \sin(x)
\end{aligned}$$

ist $n = 4$.

Lösung 9.
Wir beobachten, dass sich die Ableitungen von $\cos(x)$ jeweils nach 4 Ordnungen wiederholen:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= -\sin(x) \\
\cos''(x) &= -\cos(x) \\
\cos'''(x) &= \sin(x) \\
\cos^{(4)}(x) &= \cos(x) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\cos(0) &= 1 \\
\cos\,(0) &= 0 \\
\cos''(0) &= -1 \\
\cos'''(0) &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

und somit folgt für die Taylorreihe von Cosinus um den Nullpunkt $x = 0$ herum:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$$

Lösung 10.

(a) Nach zweifachem Verwenden der Kettenregel bekommen wir

$$f(x) = 2\cos\left(1 - x^2\right) \cdot \left(-\sin\left(1 - x^2\right)\right) \cdot (-2x) = 4x \cos\left(1 - x^2\right) \sin\left(1 - x^2\right) .$$

Die Extremalstellen liegen bei den Nullstellen der Ableitung $f(x)$:

- $x = 0$
- $\sin(1 - x^2) = 0 \iff 1 - x^2 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \pm\sqrt{1 - k\pi},\ k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$
- $\cos(1 - x^2) = 0 \iff 1 - x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \pm\sqrt{1 - \frac{\pi}{2} - k\pi},\ k \in \mathbb{Z}^-$

In den unteren beiden Umformungen schränken wir jeweils k auf $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ bzw. $\mathbb{Z}^-$ ein, weil sonst unter der Wurzel etwas Negatives stehen würde. Weil die Cosinusfunktion keine Sattelpunkte besitzt, sind alle diese Nullstellen Extremalstellen.

(b) Mit der Kettenregel (dreifach angewendet!) bekommen wir

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\cos\left((1 - x)^2\right) \cdot \left(-\sin\left((1 - x)^2\right)\right) \cdot 2(1 - x) \cdot (-1) \\
&= 4(1 - x) \cos\left((1 - x)^2\right) \sin\left((1 - x)^2\right) .
\end{aligned}$$

Die Nullstellen der Ableitung liegen bei:

- $x = 1$
- $\sin\left((1 - x)^2\right) = 0 \iff (1 - x)^2 = k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0 \iff x = 1 \pm \sqrt{k\pi},\ k \in \mathbb{N}_0$
- $\cos\left((1 - x)^2\right) = 0 \iff (1 - x)^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0 \iff x = 1 \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi},\ k \in \mathbb{N}$

In den unteren beiden Umformungen schränken wir wieder k auf $\mathbb{N}_0$ ein. Alle diese Nullstellen sind Extremalstellen.

Lösung 11.
Zuerst bestimmen wir für die linke Seite der Gleichung ein Taylorpolynom 2. Ordnung.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x)\cos(2x) \\
f(x) &= \cos(x)\cdot\cos(2x) + \sin(x)\cdot(-\sin(2x)\cdot 2) = \cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x) \\
f''(x) &= (-\sin(x))\cdot\cos(2x) + \cos(x)\cdot(-\sin(2x)\cdot 2) - 2\cos(x)\cdot\sin(2x) - 2\sin(x)\cdot\cos(2x)\cdot 2 \\
&= -\sin(x)\cos(2x) - 2\cos(x)\sin(2x) - 2\cos(x)\sin(2x) - 4\sin(x)\cos(2x) \\
&= -5\sin(x)\cos(2x) - 4\cos(x)\sin(2x)
\end{aligned}$$

Für den Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi) = -1 \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi) = 0 \\
f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi) - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi) = 5
\end{aligned}$$

und somit ist das Taylorpolynom gegeben durch

$$\sin(x)\cdot\cos(2x) \approx \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-\frac{\pi}{2})^k = -1 + \frac{5}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Nun können wir damit eine approximative Lösung der Gleichung $\sin(x)\cos(2x) = x - 2$ finden, indem wir den Term $\sin(x)\cos(2x)$ durch sein Taylorpolynom ersetzen:

$$\begin{aligned}
-1 + \frac{5}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = x - 2 &\iff -1 + \frac{5}{2}\left(x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}\right) = x - 2 \\
&\iff -1 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5\pi}{2}x + \frac{5\pi^2}{8} = x - 2 \\
&\iff \frac{5}{2}x^2 - \left(\frac{5\pi}{2} + 1\right)x + \left(1 + \frac{5\pi^2}{8}\right) = 0 \\
&\iff x_{1,2} = \frac{\left(\frac{5\pi}{2}+1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{5\pi}{2}+1\right)^2 - 10\left(1+\frac{5\pi^2}{8}\right)}}{5} \\
&\iff x_1 = 2.28879\ldots \text{ und } x_2 = 1.25280\ldots
\end{aligned}$$

Lösung 12.
Es ist

$$F = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -(\cos(\pi) - \cos(0)) = -(-1-1) = 2\,.$$

Lösung 13.
Wir leiten die rechte Seite der Gleichung ab und vergleichen sie mit dem Integranden:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C\right)' &= \frac{1}{2}(1 - \cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x)) + 0 \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}_{=1} - 2\sin^2(x)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sin^2(x) = \sin^2(x)
\end{aligned}$$

Lösung 14.
Die Sinus- und die Cosinuskurve schneiden sich zum ersten Mal bei $\frac{\pi}{4}$, weil dort die betreffenden Funktionswerte gleich sind. Weil $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ist, schneidet die Cosinusfunktion dort die x-Achse. Also gilt für die graue Fläche:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x &= [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - (-\cos(0)) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} = 0.58578\ldots
\end{aligned}$$