Einführung in die Analysis
10. Integralrechnung - das unbestimmte Integral

Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

Frühlingssemester 2021

Inhaltsverzeichnis

Das unbestimmte Integral: kahoot

kahoot.it

Quiz

Das unbestimmte Integral

Die Aufgabe der Differenzialrechnung bestand im Wesentlichen darin, von einer gegebenen (differenzierbaren) Funktion $y = f(x)$ die Ableitung $y' = f'(x)$ zu ermitteln. Die Aufgabe der Integralrechnung ist die Umgekehrte:

Zu einer gegebenen (stetigen) Ableitungsfunktion $f(x) = F'(x)$ soll die ursprüngliche **Stammfunktion** *$F(x)$, aus der die gegebene Funktion also durch Ableiten hervorgegangen ist, ermittelt werden.*

Einfache Stammfunktionen

Beispiel (einfache Stammfunktionen):

In den einfachsten Fällen kann man $F(x)$ direkt bestimmen, wenn $F'(x)$ gegeben ist:

$$\xrightarrow{\text{Integrieren}}$$

$$\xleftarrow[\text{Ableiten}]{}$$

$F'(x)$ gegeben	$F(x)$ gesucht
e^x	e^x
$2x$	x^2
$\sin x + \cos x$	$-\cos x + \sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
a	ax

Das unbestimmte Integral

Im allgemeinen wird die Bestimmung von Stammfunktionen nicht so einfach sein. Hat man $F(x)$ gefunden, so ist auch $F(x) + C$, worin C eine beliebige Konstante ist, eine Stammfunktion, denn beim Ableiten fällt diese ja wieder heraus.

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = F'(x)$$

Definition (Stammfunktion)

Jede differenzierbare Funktion $F(x)$, deren Ableitung $F'(x)$ gleich einer gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ ist, heißt eine **Stamm- oder Integralfunktion** von $f(x)$ und man schreibt

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Die Menge aller Integralfunktionen von $f(x)$ ist

$$\{F(x) + C | C \in \mathbb{R}\}$$

und heißt das **unbestimmte Integral** von $f(x)$. C wird **Integrationskonstante** genannt.

Das unbestimmte Integral

Anmerkungen:

- Das *Integralzeichen* $\int$ ist ein langezogenes, stilisiertes S und wird „Integral über $f(x)\mathrm{d}x$“ gelesen. $f(x)$ heißt auch der *Integrand*; die Rechenoperation wird *integrieren* genannt. Die Variable nach der integriert wird (dx), muss dabei stets angegeben werden.

- Differenzieren und Integrieren sind umgekehrte Aufgabenstellungen. Wird eine Funktion $f(x)$ zuerst integriert: $\int f(x)dx = F(x)$ und das Ergebnis, nämlich die Integralfunktion $F(x)$, anschließend wieder differenziert, so erhält man mit $F'(x) = f(x)$ wieder die ursprüngliche Form. Dies macht man sich als Probe beim Integrieren zunutze.

- Die Gesamtheit der Funktionen des unbestimmten Integrals $F(x) + C$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante. Es gibt also zu jeder stetigen Funktion unendlich viele Stammfunktionen.

Das unbestimmte Integral

Beispiel:

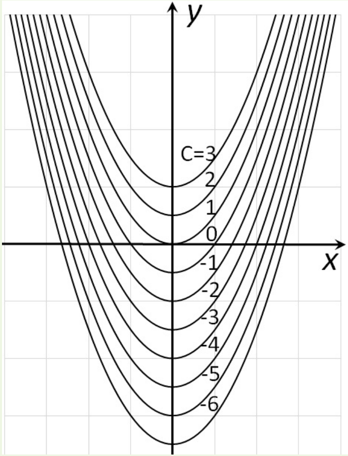
Gegeben sei die lineare Funktion

$$f(x) = 2x$$

Die quadratischen Funktionen

$$F(x) = \int 2x \mathrm{d}x = x^2 + C$$

bilden das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$. Es handelt sich um in $y-$Richtung um den Wert C verschobene Normalparabeln, die die gesamte Ebene lückenlos überdecken, ohne dass zwei Parabeln einander schneiden.



Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral

Beispiele:

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

1. $\displaystyle\int 5\mathrm{d}x =$
2. $\displaystyle\int -k\mathrm{d}x =$
3. $\displaystyle\int 4x^3\mathrm{d}x =$
4. $\displaystyle\int \sqrt{x}\mathrm{d}x =$
5. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x =$

Das unbestimmte Integral

Beispiele:

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

1. $\displaystyle\int 5\mathrm{d}x = 5x + C$
2. $\displaystyle\int -k\mathrm{d}x = -kx + C$
3. $\displaystyle\int 4x^3\mathrm{d}x = x^4 + C$
4. $\displaystyle\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
5. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}\right)\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} + C$

Rechenregeln für das unbestimmte Integral

Satz (Konstantenregel)

Für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int a \mathrm{d}x = ax + C$$

Beweis:

Ableiten der rechten Seite liefert: $(ax + C)' = (ax)' + C' = a$,

was dem Integranden auf der linken Seite entspricht. ∎

Beispiel:

Insbesondere gilt:

$$\int 0 \mathrm{d}x = C$$

Rechenregeln für das unbestimmte Integral

Satz (Summenregel)

Eine Summe von Funktionen kann man gliedweise integrieren, bzw. das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale

$$\int \left[f(x) + g(x)\right] \mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = F(x) + G(x) + C$$

Beweis: Setzt man

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x \\ G'(x) = g(x) \quad &\Rightarrow \quad G(x) = \int g(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

so ergibt sich mit der Summenregel der Ableitungsrechnung

$$\begin{aligned} F'(x) + G'(x) \quad &= \quad \left[F(x) + G(x)\right]' = f(x) + g(x) \\ \Rightarrow F(x) + G(x) \quad &= \quad \int \left[f(x) + g(x)\right] \mathrm{d}x \\ \Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x \quad &= \quad \int \left[f(x) + g(x)\right] \mathrm{d}x \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Rechenregeln für das unbestimmte Integral

Satz (Potenzregel)

Für ein $n \in \mathbb{R}$ mit $n \neq -1$ gilt:

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Beweis:

Ableiten der rechten Seite liefert:

$$\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\right)' = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)' + C' = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n$$

was dem Integranden auf der linken Seite entspricht. ∎

Beispiel:

$$\int \left(x^5 + \sqrt[4]{x} + \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{d}x = \int \left(x^5 + x^{\frac{1}{4}} + x^{-3}\right) \mathrm{d}x = \int x^5 \mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}x + \int x^{-3} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5+1} x^{5+1} + \frac{1}{\frac{1}{4}+1} x^{\frac{1}{4}+1} + \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} = \frac{1}{6} x^6 + \frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{1}{2x^2}$$

Rechenregeln für das unbestimmte Integral

Satz (Faktorregel)

Für ein $a \in \mathbb{R}$ und eine beliebige Funktion $f(x)$ gilt

$$\int a \cdot f(x)\mathrm{d}x = a \cdot \int f(x)\mathrm{d}x = a \cdot F(x) + C$$

Dieser und die vorangegangenen Sätze sind eine umittelbare Folge der entsprechenden Ableitungsregeln, also, im Grunde genommen, gar keine neuen Aussagen.

Beispiel:

$$\int -18x^5\mathrm{d}x = -18 \cdot \int x^5\mathrm{d}x = -18 \cdot \frac{1}{6}x^6 + C = -3x^6 + C$$

Rechenregeln für das unbestimmte Integral

Die Integration ist die Umkehrung der Ableitung. Im Kapitel Differenzialrechnung haben wir bereits Ableitungen für elementare Funktionen zusammengestellt. Aus dieser Aufstellung können wir deshalb nun auch die sogenannten **Grundintegrale** ablesen, auf die man beim formalen Integrieren zurückgeführt wird und die ohne schriftliche Rechnung durch Bilden der Ableitung bestätigt werden können.

Stammfunktionen von einigen der wichtigsten Funktionen

Funktion	Stammfunktion
$\int e^x \mathrm{d}x$	$e^x + C$
$\int x^a \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq 1$
$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\int \sin x \mathrm{d}x$	$-\cos x + C$
$\int \cos x \mathrm{d}x$	$\sin x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$	$\arctan x + C$

Zusatzübungen: Summen-, Faktor und Potenzregel

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int (3x-5)^2 \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+10}{4x^3} \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{10x^2-7x-12}{2x-3} \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \sin(x-b) \mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos^2 x-\sin^2 x} \mathrm{d}x$

Lösungen Zusatzübungen: Summen-, Faktor und Potenzregel

(a) $\int (9x^2 - 30x + 25) dx = 3x^3 - 15x^2 + 25x + C$

(b) $\int \frac{3x^2 - 5x + 10}{4x^3} dx = \int \left(\frac{3}{4} x^{-1} - \frac{5}{4} x^{-2} + \frac{5}{2} x^{-3} \right) dx = \frac{3}{4} \ln|x| + \frac{5}{4} x^{-1} - \frac{5}{4} x^{-2} + C$

$= \frac{3}{4} \ln|x| + \frac{5}{4x} - \frac{5}{4x^2} + C$

(c) $\int \frac{10x^2 - 7x - 12}{2x - 3} dx = \int \frac{(5x + 4) \cdot (2x - 3)}{(2x - 3)} dx = \int (5x + 4) dx = \frac{5}{2} x^2 + 4x + C$ für $x \neq 1.5$

(d) $\int \sin(x - b) dx = -\cos(x - b) + C$

(e) $\int \frac{1}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\underbrace{1 - \sin^2 x}_{= \cos^2 x} + \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + C$

Integration durch Substitution

Beim Differenzieren verketteter Funktionen ist eine innere Ableitung zu berücksichtigen. Entsprechend vorsichtig muss man deshalb bei der Integration von verketteten Funktionen $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$ vorgehen.

Beispiel:

Für die Stammfunktion von $\cos 8x$ gilt

$$\int \cos 8x \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \sin 8x + C,$$

wie man durch differenzieren der Stammfunktion verifizieren kann.

ACHTUNG: Die Funktion $\sin 8x$ ist keine Stammfunktion von $\cos 8x$, denn bei der Ableitung von $\sin 8x$ müssen wir die Kettenregel für die innere Funktion $h(x) = 8x$ berücksichtigen: $(\sin 8x)' = 8 \cos 8x$.

Mit dem konstanten Faktor $\frac{1}{8} = \frac{1}{h'(x)}$ können wir jedoch die innere Ableitung eliminieren.

Integration durch Substitution

Beispiel:

Für die Stammfunktion von $f(x) = 2xe^{x^2}$ gilt:

$$\int 2xe^{x^2} \mathrm{d}x = e^{x^2} + C$$

wie man durch Differenzieren der rechten Seite sehen kann.

Der Faktor $2x$ vor der $e-$Funktion entspricht der Ableitung der inneren Funktion $h(x) = x^2$ und ermöglicht uns eine einfache Berechnung des unbestimmten Integrals, denn es gilt:

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2} \quad \text{und somit} \quad \int 2xe^{x^2} \mathrm{d}x = e^{x^2} + C$$

Bei den vorangegangenen Beispielen spielt die innere Ableitung, die die Kettenregel beim Ableiten erzeugt, eine entscheidende Rolle.

Integration durch Substitution

Verkettete Funktionen

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$$

mit der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = h'(x)$$

lassen sich häufig mithilfe der sogenannten **Substitutionsregel** integrieren:

Satz (Substitutionsregel)

Gelingt es, den Integranden als ein Produkt aus einer verketteten Funktion $g \circ h$ und der inneren Ableitung h' darzustellen, dann kann man alternativ auch über die Funktion h integrieren:

$$\int g(h(x)) \cdot \underbrace{h'(x)\mathrm{d}x}_{dh} = \int g(h)\mathrm{d}h = G(h) + C$$

Integration durch Substitution

Bemerkungen:

Folgende Schritte werden bei der Substitution ausgeführt:

1. Berechne das Verhältnis der Differenziale $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = h'(x)$;
2. Ersetze im Integral die entsprechenden Ausdrücke durch die Funktion h;
3. Ersetze $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}h}{h'(x)}$ so, dass im neuen Integral nur noch h und h' vorkommen;
4. Führe die Integration mit der Variablen h durch (falls möglich);
5. Durch Rücksubstitution erhält man Stammfunktionen, die wieder von x abhängen.

Integration durch Substitution

Beispiel:

Berechnen Sie das unbestimmte Integral mithilfe der Substitution $h = 1 - \sin x$:

$$\int \cos x \sqrt{1 - \sin x} \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -\cos x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}h}{-\cos x} \\
(2)\text{und}(3) \quad &\Rightarrow \quad \int \cos x \sqrt{h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{-\cos x} = \int -\sqrt{h} \mathrm{d}h \\
(4) \quad &\Rightarrow \quad \int -\sqrt{h} \mathrm{d}h = \int -h^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}h = -\frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} + C \\
(5) \quad &\Rightarrow \quad \int \cos x \sqrt{1 - \sin x} \mathrm{d}x = -\frac{2}{3} (1 - \sin x)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

(a) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \tan x\,\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ (Substitution: $h = \ln x$)

(d) $\int \frac{e^x + xe^x}{xe^x}\,\mathrm{d}x$ (Substitution: $h = e^x$)

Lösungen Zusatzübungen: Substitutionsregel

(a) $\int \left(2x\sqrt{1+x^2}\right)dx$

Substitution: $h(x) = 1 + x^2$

$$\frac{dh}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dh}{2x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x}{2x}\sqrt{h}\,dh = \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} + C$$

Rücksubstitution

$$\Rightarrow \int \left(2x\sqrt{1+x^2}\right)dx = \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

(b) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

Substitution: $h(x) = \cos x$

$$\frac{dh}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{-dh}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \int -\frac{\sin x}{\sin x}\frac{1}{h}dh = -\ln h + C$$

Rücksubstitution

$$\int \tan x\,dx = -\ln\cos x + C$$

Lösungen Zusatzübungen: Substitutionsregel

(c) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

Substitution: $h = \ln x$

$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \cdot dh$

$\int \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{h} dh = \ln h + C$

Rücksubstitution

$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln x + C$

(d) $\int \frac{e^x + x \cdot e^x}{x \cdot e^x} dx$

Substitution: $h(x) = e^x$

$x = \ln h$

$\frac{dh}{dx} = e^x = h \Rightarrow dx = \frac{dh}{h}$

$\int \frac{h + \ln h \cdot h}{\ln h \cdot h} \cdot \frac{1}{h} dh = \int \frac{1 + \ln h}{\ln h \cdot h} dh$

$= \int \frac{1}{\ln h \cdot h} dh + \int \frac{1}{h} dh$

erstes Integral aus Aufgabe 6c bekannt

$= \ln \ln h + \ln h + C = \ln(h \ln h) + C$

*ln a+ln b=ln(a*b)*

Rücksubstitution

$\int \frac{e^x + x \cdot e^x}{x \cdot e^x} dx = \ln(e^x \cdot \ln e^x) + C = \ln(x \cdot e^x) + C$

Rechenregeln für das unbestimmte Integral

Einen einfachen Spezialfall der Substitutionsregel hatten wir im 1. Beispiel (Folie 19) vorliegen. Die innere Funktion $h(x)$ einer verketteten Funktion ist eine lineare Funktion der Form $h(x) = ax + b$:

Satz (Skalierungs- und Translationsregel)

Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und eine beliebige integrierbare Funktion $f(x)$ gilt:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C, a \neq 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\text{Setze } h(x) = ax+b \quad &\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = a \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}h}{a} \\
\text{Ersetze } ax+b \text{ und } \mathrm{d}x \quad &\Rightarrow \quad \int f(ax+b)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a} \cdot f(h)\mathrm{d}h \\
\text{Integration liefert:} \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{a} \cdot f(h)\mathrm{d}h = \frac{1}{a} \cdot F(h) + C \\
\text{Rücksubstitution:} \quad &\Rightarrow \quad \int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Rechenregeln für das unbestimmte Integral

Beispiele:

$$(a) \qquad \int \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x \overset{h=4x+1}{=} \int \frac{1}{4}\sqrt{h}\,\mathrm{d}h$$

$$= \int \frac{1}{4} h^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}h = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\overset{\text{Rücksubstitution}}{\Rightarrow} \int \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$(b) \qquad \int \frac{5}{(3x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{h=3x+1}{=} \int \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{h^2}\,\mathrm{d}h$$

$$= \int \frac{5}{3}h^{-2}\,\mathrm{d}h = -\frac{5}{3}\cdot h^{-1} + C$$

$$\overset{\text{Rücksubstitution}}{\Rightarrow} \int \frac{5}{(3x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{3\cdot(3x+1)} + C$$

Zusatzübungen: Skalierungs- und Translationsregel

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int (5x-7)^4 \,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x-5} \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-5)^2} \,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}} \,\mathrm{d}x$

Lösungen Zusatzübungen: Skalierungs- und Translationsregel

(a) $\int (5x-7)^4 \, dx$

Substitution: $h(x) = 5x - 7$

$$\frac{dh}{dx} = 5 \Rightarrow dx = \frac{dh}{5}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{5} h^4 \, dh = \frac{1}{25} h^5 + C$$

Rücksubstitution

$$\Rightarrow \int (5x-7)^4 \, dx = \frac{1}{25}(5x-7)^5 + C$$

(b) $\int \sqrt{x-5} \, dx$

Substitution: $h(x) = x - 5$

$$\frac{dh}{dx} = 1 \Rightarrow dx = dh$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{h} \, dh = \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} + C$$

Rücksubstitution

$$\Rightarrow \int \sqrt{x-5} \, dx = \frac{2}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C$$

Lösungen Zusatzübungen: Skalierungs- und Translationsregel

(c) $\int \frac{1}{(2x-5)^2}\,dx$

Substitution: $h = 2x-5$

$$\frac{dh}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{dh}{2}$$

$\int \frac{1}{2(h)^2}\,dh = -\frac{1}{2h} + C$

Rücksubstitution

$$\int \frac{1}{(2x-5)^2}\,dx = -\frac{1}{2(2x-5)} + C$$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}\,dx$

Substitution: $h = 1-2x$

$$\frac{dh}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{dh}{2}$$

$\int -\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{h}}\,dh = \int -\frac{h^{-\frac{1}{3}}}{2}\,dh = -\frac{3}{4}h^{\frac{2}{3}} + C$

Rücksubstitution

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}\,dx = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-2x)^2} + C$$

Rechenregeln für das unbestimmte Integral

Satz (Integration von Produkt aus Funktion und Ableitung)

Für Stammfunktionen, bei denen unter dem Integral das Produkt aus einer Funktion f und ihrer Ableitung f' steht, gilt:

$$\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x)^2 + C$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\text{Setze } h(x) = f(x) && \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = f'(x) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}h}{f'(x)} \\
&\text{Ersetze } f(x) \text{ und } \mathrm{d}x && \Rightarrow \quad \int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{f'(x)}{f'(x)} \cdot h\mathrm{d}h \\
&\text{Integration liefert:} && \Rightarrow \quad \int h\mathrm{d}h = \frac{1}{2} \cdot h^2 + C \\
&\text{Rücksubstitution:} && \Rightarrow \quad \int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot f(x)^2 + C \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel:

Das Integral

$$\int \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$$

soll berechnet werden. Bei geeigneter Betrachtung steht unter dem Integral ein Produkt aus Funktion und Ableitung:

$$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \mathrm{d}x$$

Mit der Substitution $h = \ln x$ erhält man:

$$\int \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

Zusatzübungen: Produkt aus Funktion und Ableitung

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int x^2(1+x^3)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \cos x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$

Lösungen Zusatzübungen: Produkt aus Funktion und Ableitung

(a) $$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \left(\underbrace{\ln x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f'(x)} \right) dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

Substitution: *h(x)=ln(x)*

(b) $$\int x^2\left(1+x^3\right)dx = \int \frac{1}{3}\underbrace{3x^2}_{=f'(x)}\underbrace{\left(1+x^3\right)}_{=f(x)}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(1+x^3\right)^2 + C$$

Substitution $h(x) = 1 + x^3$

(c) $$\int \underbrace{\sin x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{=f'(x)} dx = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C$$

Substitution *h(x)=sin x*