Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Fachhochschule Nordwestschweiz

Übungsblatt 12

Lösungen

Lösung 1.
$\log_{\frac{1}{32}}\left(\sqrt{2}\right)$ ist die Lösung x der Gleichung

$$\sqrt{2} = \left(\frac{1}{32}\right)^x .$$

Wir formen diese Gleichung um:

$$\sqrt{2} = \left(\frac{1}{32}\right)^x \iff 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{-5}\right)^x \iff 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{-5x}\right)$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2} = -5x \iff x = -\frac{1}{10}$$

und somit ist $\log_{\frac{1}{32}}\left(\sqrt{2}\right) = -\dfrac{1}{10}$.

Lösung 2.

(a) $\log_{10}(10\,000) = \log_{10}\left(10^4\right) = 4$

(b) $\log_2(16 \cdot 2048) = \log_2\left(2^4 \cdot 2^{11}\right) = \log_2\left(2^{15}\right) = 15$

(c) Zuerst berechnen wir mit der Formel für den Basiswechsel

$$\log_{\sqrt{10}}\left(\sqrt[4]{10}\right) = \frac{\log_{10}\left(\sqrt[4]{10}\right)}{\log_{10}\left(\sqrt{10}\right)} = \frac{\log_{10}\left(10^{\frac{1}{4}}\right)}{\log_{10}\left(10^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\log_{10}(10)}{\frac{1}{2}\cdot\log_{10}(10)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{1}{2} .$$

Daraus folgt

$$\sqrt[3]{10^{\log_{\sqrt{10}}\left(\sqrt[4]{10}\right)}} = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}}} = \left(10^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10} .$$

Lösung 3.

$$\log_2\left(\log_3(4)\right) = \log_2\left(\frac{\ln(4)}{\ln(3)}\right) = \frac{\ln\left(\frac{\ln(4)}{\ln(3)}\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln(\ln(4)) - \ln(\ln(3))}{\ln(2)}$$

Lösung 4.

Es muss

$$\log_2\left(\underbrace{\log_3\left(\log_4\left(\log_5(x)\right)\right)}_{>0}\right)$$

gelten, damit der äusserste Logarithmus definiert ist. Daraus folgt, dass

$$\log_4\left(\log_5(x)\right) > 1$$

sein muss, weil der Logartihmus $\log_4$ ab dem Argument 1 positiv ist. Das impliziert, dass $\log_5(x) > 4$ gelten muss, damit der Logarithmus $\log_4$ grösser als 1 ist. Wir lösen also die folgende Ungleichung nach x auf:

$$\log_5(x) > 4 \iff 5^{\log_5(x)} > 5^4 \iff x > 625\,.$$

Der Definitionsbereich umfasst also alle reellen Zahlen grösser als 625.

Lösung 5.

(a) $y = 2^{3x} \iff \log_2(y) = 3x \iff x = \frac{1}{3}\log_2(y) \implies f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{3\ln(2)}$

(b)

$$\begin{aligned} y = 2^{\sqrt{3x}} &\iff \log_2(y) = \sqrt{3x} \iff \left(\log_2(y)\right)^2 = 3x \\ &\iff x = \frac{\left(\log_2(y)\right)^2}{3} \implies f^{-1}(x) = \frac{\left(\log_2(x)\right)^2}{3} = \frac{\ln^2(x)}{3\ln^2(2)} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} y = 2^{3^x} &\iff \log_2(y) = 3^x \iff \log_3\left(\log_2(y)\right) = x \\ &\implies f^{-1}(x) = \log_3\left(\log_2(x)\right) = \frac{\ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)}{\ln 3} \end{aligned}$$

Lösung 6. (a) $2^3 = e^{\ln\left(2^3\right)} = e^{3\ln(2)}$

(b) $10^{5.1} = e^{\ln\left(10^{5.1}\right)} = e^{5.1\cdot\ln(10)}$

(c) $3^{\sqrt{2}} = e^{\ln\left(3^{\sqrt{2}}\right)} = e^{\sqrt{2}\cdot\ln(3)}$

Lösung 7.
Es gilt

$$\frac{e^{2a}-e^{2b}}{e^a-e^b} = \frac{(e^a)^2-\left(e^b\right)^2}{e^a-e^b} = \frac{\left(e^a+e^b\right)\left(e^a-e^b\right)}{e^a-e^b} = e^a+e^b\,.$$

Zuerst setzen wir $a = -\ln(1+2^x)$ in $b = a - \ln(2^x)$ ein:

$$b = a-\ln(2^x) = -\ln(1+2^x)-\ln(2^x) = -\left(\ln(1+2^x)+\ln(2^x)\right) = -\ln\left((1+2^x)\cdot 2^x\right)$$

Nun setzen wir $a = -\ln(1+2^x)$ und $b = -\ln\left((1+2^x)\cdot 2^x\right)$ in e^a+e^b ein:

$$\begin{aligned} e^a+e^b &= e^{-\ln(1+2^x)}+e^{-\ln((1+2^x)\cdot 2^x)} = \left(e^{\ln(1+2^x)}\right)^{-1}+\left(e^{\ln((1+2^x)\cdot 2^x)}\right)^{-1} \\ &= (1+2^x)^{-1}+((1+2^x)\cdot 2^x)^{-1} = \frac{1}{1+2^x}+\frac{1}{(1+2^x)\cdot 2^x} = \frac{2^x+1}{(1+2^x)\cdot 2^x} = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}\,. \end{aligned}$$

Somit gilt $\dfrac{e^{2a}-e^{2b}}{e^a-e^b} = 2^{-x}$.

Lösung 8.
Weil der Funktionsgraph von $f(x) = a\cdot\exp(-bx)+2 = a\cdot e^{-bx}+2$ durch den Punkt $A = (0,10)$ geht, folgt

$$f(0) = a\cdot e^0+2 = a+2 \overset{!}{=} 10 \iff a = 8\,.$$

Nun setzen wir den Punkt $B = (5,3)$ in die Gleichung $f(x) = 8\cdot e^{-bx}+2$ ein, um den Parameter b zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f(5) = 8\cdot e^{-5b}+2 \overset{!}{=} 3 \iff 8\cdot e^{-5b} = 1 \iff e^{-5b} = \frac{1}{8} \iff \ln\left(e^{-5b}\right) = \ln\left(\frac{1}{8}\right) \\ \iff -5b = \ln\left(8^{-1}\right) \iff -5b = -\ln(8) \iff b = \frac{\ln(8)}{5}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt $f(x) = 8\cdot e^{-\frac{ln(8)}{5}x}+2$.

Lösung 9.

(a) Die Gleichung

$$e^{x^2-2x} = 2 \iff \ln\left(e^{x^2-2x}\right) = \ln(2) \iff x^2-2x = \ln(2) \iff x^2-2x-\ln(2) = 0$$

führt mit der Mitternachtsformel zu

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{4+4\ln(2)}}{2} = 2.3012 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{2-\sqrt{4+4\ln(2)}}{2} = -0.3012\,.$$

(b) Wir formen zuerst die linke Seite der Gleichung $\ln\left(\sqrt{x}\right) + \dfrac{3}{2}\ln(x) = \ln(2x)$ um:

$$\ln\left(\sqrt{x}\right) + \frac{3}{2}\ln(x) = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(x^2\right) .$$

Somit ist die Gleichung $\ln\left(x^2\right) = \ln(2x)$ zu lösen:

$$\ln\left(x^2\right) = \ln(2x) \iff x^2 = 2x \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0$$
$$\implies x = 2 \text{ ist die einzige Lösung, weil } x = 0 \text{ nicht im Definitionsbereich liegt}\,.$$

(c) Es ist

$$\frac{\ln\left(x^2-1\right) - \ln(x+1)}{\ln(x-3)} = 2 \iff \frac{\ln\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)}{\ln(x-3)} = 2 \iff \ln\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = 2\ln(x-3)$$
$$\iff \ln\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = \ln\left((x-3)^2\right)$$
$$\iff 0 = \ln\left((x-3)^2\right) - \ln\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$$
$$\iff 0 = \ln\left(\frac{(x-3)^2}{\frac{x^2-1}{x+1}}\right) \iff 0 = \ln\left(\frac{(x-3)^2(x+1)}{(x^2-1)}\right)$$
$$\iff 0 = \ln\left(\frac{(x-3)^2(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right) \iff 0 = \ln\left(\frac{(x-3)^2}{(x-1)}\right) .$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $\ln(1) = 0$ ist, also für

$$\frac{(x-3)^2}{(x-1)} = 1 \iff (x-3)^2 = x-1 \iff x^2 - 6x + 9 = x - 1$$
$$\iff x^2 - 7x + 10 = 0 \iff (x-2)(x-5) = 0\,.$$

Daraus können wir ablesen, dass $x = 5$ die einzige Lösung ist, weil $x = 2$ wegen $\ln(x-3)$ nicht im Definitionsbereich liegt.

Lösung 10.

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)\ \cdot \left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right) \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(e^x - e^{-x} \cdot (-1)\right) \cdot \left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right) \cdot \left(e^x + e^{-x} \cdot (-1)\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right) \cdot \left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right) \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\left(e^x + e^{-x}\right) + \left(e^x - e^{-x}\right)\right)\left(\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{2 \cdot e^x \cdot 2e^{-x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{4 \cdot \frac{e^x}{e^x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\left(e^{2x} - 2e^{-2x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2x} - 2e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{2x} \cdot 2 - 2e^{-2x} \cdot (-2)\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2x} - 2e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2e^{2x} + 4e^{-2x}\right) = \frac{2e^{2x} + 4e^{-2x}}{2 \cdot \sqrt{e^{2x} - 2e^{-2x}}} = \frac{2\left(e^{2x} + 2e^{-2x}\right)}{2 \cdot \sqrt{e^{2x} - 2e^{-2x}}} \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x} - 2e^{-2x}}}
\end{aligned}
$$

(c) $f(x) = \left(\ln\left(x + e^x\right)\right) = \dfrac{1}{x + e^x} \cdot \left(1 + e^x\right) = \dfrac{1 + e^x}{x + e^x}$

(d) $f(x) = \left(\sqrt{3} \cdot e^x\right) = \sqrt{3} \cdot e^x$

(e) $f(x) = \left(2x^{\frac{1}{2}} + \ln(x)\right) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{x} = x^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$

(f) $f(x) = \left(xe^x\right) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x)$

(g) $f(x) = \left(x^2 \ln(x)\right) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x = x\left(2\ln(x) + 1\right)$

(h) $f(x) = \left(\ln(2 - 3x)\right) = \dfrac{1}{2 - 3x} \cdot (-3) = \dfrac{-3}{2 - 3x} = \dfrac{3}{3x - 2}$

(i) $f(x) = \left(x^2 \cdot e^{1-x}\right) = 2x \cdot e^{1-x} + x^2 \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = xe^{1-x}(2 - x)$

(j)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\left(x^2 - 5x\right) \cdot e^{4x^2 - 3x}\right) = (2x - 5) \cdot e^{4x^2 - 3x} + \left(x^2 - 5x\right) \cdot e^{4x^2 - 3x} \cdot (4 \cdot 2 \cdot x - 3) \\
&= e^{4x^2 - 3x} \cdot \left((2x - 5) + \left(x^2 - 5x\right)(8x - 3)\right) \\
&= e^{4x^2 - 3x} \cdot \left(2x - 5 + 8x^3 - 3x^2 - 40x^2 + 15x\right) = e^{4x^2 - 3x} \cdot \left(8x^3 - 43x^2 + 17x - 5\right)
\end{aligned}
$$

(k)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{x^5}{\sqrt{x}} \cdot \ln(x) - e^{\frac{1}{1-x}}\right) = \left(x^{\frac{9}{2}} \cdot \ln(x) - e^{\left((1-x)^{-1}\right)}\right) \\
&= \frac{9}{2} \cdot x^{\frac{7}{2}} \cdot \ln(x) + x^{\frac{9}{2}} \cdot \frac{1}{x} - e^{\left((1-x)^{-1}\right)} \cdot (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) \\
&= \frac{9x^{\frac{7}{2}} \ln(x)}{2} + x^{\frac{7}{2}} - \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

Lösung 11.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= \ln(1) = 0 \\
f(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} & f(0) &= 1 \\
f''(x) &= (-1) \cdot (1+x)^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2} & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= (-1) \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3} & f'''(0) &= 2 \\
f^{(4)}(x) &= 2 \cdot (-3) \cdot (1+x)^{-4} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) &= -6 \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{(1+x)^n} & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!
\end{aligned}
$$

und somit ist die Taylorreihe von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x = 0$ herum gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \pm \ldots
\end{aligned}
$$

Lösung 12.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x & f(0) &= e^0 = 1 \\
f(x) &= e^x & f(0) &= e^0 = 1 \\
f''(x) &= e^x & f''(0) &= e^0 = 1 \\
f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= e^0 = 1 \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= e^x & f^{(n)}(0) &= e^0 = 1
\end{aligned}
$$

und somit ist die Taylorreihe von $f(x) = e^x$ um $x = 0$ herum gegeben durch

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
&= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots
\end{aligned}$$

Lösung 13.

(a) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

(b)

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\ln(|x|) + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + x + \frac{1}{2}x^2 + C \\
&= \frac{2}{3}\ln(|x|) + 2\sqrt{x} + x + \frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= 1000\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 25\int x^{-2}\,\mathrm{d}x = 1000\ln(|x|) + 25 \cdot \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C \\
&= 1000\ln(|x|) - \frac{25}{x} + C
\end{aligned}$$

(d) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a}e^{ax} + C$ (Skalierungs- und Translationsregel)

(e) $\int f(x)\,\mathrm{d} = \int (x-5)^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln(|x-5|) + C$

(f) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = e^{-\frac{2}{3}x} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{2}{3}x} + C = -\frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{2}{3}x} + C$ (Skalierungs- und Translationsregel)

(g) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x-5)^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln(|2x-5|) + C = \frac{\ln(|2x-5|)}{2} + C$
(Skalierungs- und Translationsregel)

(h) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1+\ln(x))}\,\mathrm{d}x = \ln(|1+\ln(x)|) + C$ (Substitutionsregel)

(i) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln^3(x) + C$ (Substitutionsregel)