Einführung in die Analysis
3. Reihen

Joana Portmann — Fachhochschule Nordwestschweiz

Frühlingssemester 2021

3. Reihen

Inhaltsverzeichnis

Reihen: Einführendes Beispiel

Achilles und die Schildkröte

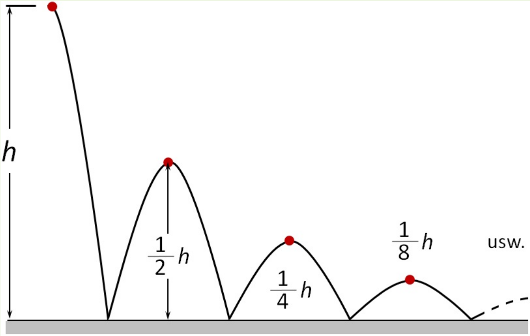
Der griechische Philosoph Zenon von Elea hat ca. 450 v. Chr. das berühmte Paradoxon von Achilles und der Schildkröte überliefert:

Achilles, ein griechischer Held, kann zehn Mal schneller laufen als eine Schildkröte. Trotzdem behauptet Zenon, dass Achilles die Schildkröte bei einem Wettrennen nie einholen wird, wenn er der Schildkröte einen Vorsprung gewährt. Das Argument ist einfach: Achilles muss zuerst den Standort der Schildkröte erreichen, an dem die Schildkröte gestartet ist. In der Zwischenzeit ist die Schildkröte aber schon weitergekrochen. Wenn Achilles wieder diesen Punkt erreicht, ist die Schildkröte wieder ein Stück voraus, usw.

Reihen

Einführendes Beispiel:

Ein Tischtennisball werde aus der Höhe $h > 0$ fallengelassen. Beim Aufprallen auf den Boden wird er senkrecht reflektiert, wobei seine Höhe bei jedem Aufprall um die Hälfte abnimmt.

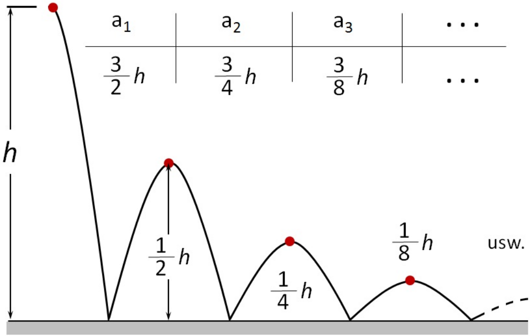


Gesucht ist die gesamte Wegstrecke, die der Ball während der Bewegung zurücklegt?

Reihen

Einführendes Beispiel Fortsetzung:

Wir teilen die Strecke in Teilstrecken ein:
Die Strecke vor dem ersten Aufprall bis zum höchsten Punkt nach dem ersten Aufprall: $a_1 = \frac{3}{2}h$
Die Strecke vor bzw. nach dem zweiten Aufprall: $a_2 = \frac{3}{4}h$, usw.



Reihen

Einführendes Beispiel Fortsetzung:

Für die gesamte Wegstrecke s des Balls müssen wir alle Teilstrecken a_n addieren, d.h. die Summe bilden:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 3h \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \right) = 3h \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Die oben angeschriebene Summe hat in der Mathematik einen eigenen Namen, man nennt sie **Reihe**.
Um die zurückgelegte Strecke des Balls zu bestimmen, müssen wir die Summe auswerten und hoffen, dass sie sich einem endlichen Wert annähert, man sagt, dass die Reihe **konvergiert**.

Kurztraining: Summenzeichen

Schreiben Sie die folgenden Summen aus und berechnen Sie diese von Hand. Korrigieren Sie Ihr Resultat z.B. mit Matlab oder wolframalpha

1. $\sum\limits_{i=0}^{5} 2^i$
2. $\sum\limits_{k=-2}^{2} (2k+1)^2$
3. $\sum\limits_{k=0}^{2} \frac{k+1}{k^2+2}$

Kahoot: Summenzeichen

kahoot.it
Quiz

Reihen

Definition (Unendliche Reihe)

Man nennt den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{R}$$

eine **unendliche Reihe**. Sie besitzt unendlich viele Glieder.

Bemerkung:

- Als Indexvariable werden häufig auch die Buchstaben i oder m verwendet.
- Ist das Folgenglied a_0 definiert, so kann die Summe (Reihe) auch bereits bei $k = 0$ starten.

Reihen

Definition (Reihe einer Folge)

Bei einer reellen Folge a_1, a_2, $a_3, \ldots$ wird die zugehörige Folge der Teilsummen s_n eine **Reihe der Folge** a_n genannt:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

s_n wird auch $n-$**te Teilsumme** der Folge a_n genannt.

Bemerkung:

Um nun herauszufinden, ob die Aufsummierung aller unendlich vielen Folgenglieder zu einem endlichen Wert führt, betrachtet man die Folge s_n der Teilsummen und betrachtet deren Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Reihen

Beispiel: Teilsummen

Das Bildungsgesetz der Folge der einzelnen Wegabschnitte für unseren hüpfenden Ball lautet:

$$a_k = 3h \cdot \frac{1}{2^k}$$

Betrachten wir die ersten Teilsummen der Folge:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 = 3h \cdot \frac{1}{2} \\
s_2 &= a_1 + a_2 = 3h \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 3h \cdot \frac{3}{4} \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 3h \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = 3h \cdot \frac{7}{8} \\
s_{10} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{10} = 3h \cdot \frac{1023}{1024}
\end{aligned}$$

Man kann bereits jetzt vermuten, dass die Folge der Teilsummen s_n für große n gegen den Wert $s = 3h$ strebt.

Reihen: Ausblick

Beispiel: Annäherung einer Funktion durch eine Reihenentwicklung

Die Exponential-Funktion (kurz $e-$Funktion) kann für $x-$Werte nahe Null durch die folgende Reihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

angenähert werden.
Es handelt sich dabei um die Reihe der Folge

$$a_k = \frac{x^k}{k!}$$

Bemerkung:
Man spricht hier auch von einer **Taylor-Reihenentwicklung** der Funktion.
($\rightsquigarrow$ siehe später in der Vorlesung)

Reihen

Ist die Reihenentwicklung einer Funktion kovergent, kann man Funktionen und Funktionswerte durch Polynome sehr gut annähern:

Beispiel: Taylorreihe der $e-$Funktion

Für den Wert $x = 1$ gilt: $e^1 = e = 2.718281828\ldots$.
Die Näherung liefert:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= 1 \\
s_1 &= 1 + \frac{1}{1!} = 2.0 \\
s_5 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.71\overline{66} \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} = 2.718279
\end{aligned}
$$

Die Folge der Teilsummen nähert sich dem Funktionswert an der Stelle $x = 1$ an.

Vorteil der Reihenentwicklung einer Funktion: Polynome sind i.d.R. einfacher Handzuhaben, insbesondere beim Ab- und Aufleiten.

Reihen

Definition (Grenzwert von Reihen)

Gegeben sei eine Reihe der Folge a_k. Wenn die Folge s_n der Teilsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

konvergiert, dann heißt die Reihe **konvergent**. Sie besitzt den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Eine nicht-konvergente Reihe heißt **divergent**.

Bemerkung: Damit eine Reihe überhaupt konvergent sein kann, müssen die Glieder der entsprechenden Folge „schnell“ gegen Null streben. Da die Reihe unendlich viele Glieder hat, darf bei jeder Teilsumme nur jeweils eine „unendlich kleine“ Zahl dazukommen.

Reihen

Satz (Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen)

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{ konvergent } \Longrightarrow a_k \text{ ist Nullfolge.}$$

Achtung: Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht

Bemerkung:

- Konvergieren die Folgeglieder a_k nicht gegen 0, dann kann man sofort auf die Divergenz der Reihe schließen.
- Aus $a_k \to 0$ folgt nicht die Konvergenz der zugehörigen Reihe.
  So ist $a_k = \frac{1}{k}$ zwar eine Nullfolge, aber die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Reihen

Satz (Rechenregeln für konvergente Reihen)

Sind

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen, so gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{für } c \in \mathbb{R} \\ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

Bemerkung:

Man darf **konvergente** Reihen gliedweise addieren, subtrahieren oder mit einer Konstanten multiplizieren.

Reihen

Die geschlossene Bestimmung von Grenzwerten einer Reihe gestaltet sich in der Regel schwierig. Für **geometrische Reihen** kann jedoch ein Grenzwert angegeben werden. Dafür müssen wir nochmals die geometrischen Folgen ins Gedächtnis rufen:

Definition (Geometrische Folge)

Folgen der Art

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} : \quad a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3, \dots$$

heißen **geometrische Folgen**.

- Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist eine Konstante, nämlich q.
- Jedes Glied ist das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Reihen

Beispiele:

- Geometrische Folge mit den Parametern $a_1 = 5$ und $q = 0.3$
  konvergent mit Grenzwert: 0

$$a_n = 5 \cdot (0.3)^{n-1}: \qquad 5,\ 1.5,\ 0.45,\ 0.135,\ 0.0405\ldots$$

- Geometrische Folge mit den Parametern $a_1 = -2$ und $q = 1$
  konvergent mit Grenzwert: -2

$$a_n = -2 \cdot (1)^{n-1}: \qquad -2,\ -2,\ -2,\ldots$$

- Geometrische Folge mit den Parametern $a_1 = 2$ und $q = 2$
  divergent, Grenzwert existiert nicht

$$a_n = 1 \cdot (2)^{n-1}: \qquad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ldots$$

- Geometrische Folge mit den Parametern $a_1 = 1$ und $q = -1$
  divergent, alternierende Folge

$$a_n = 1 \cdot (-1)^{n-1}: \qquad -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ldots$$

Aus den vorigen Beispielen können wir sehen, dass alleine der Wert des Parameters q über die Konvergenz von geometrischen Folgen entscheidet:

Satz (Konvergenzkriterien für geometrische Folgen)

Eine geometrische Folge $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

- mit $|q| > 1$ ist divergent,
- mit $|q| < 1$ ist konvergent mit Grenzwert 0,
- mit $q = 1$ ist eine konstante Folge a_1,
- mit $q = -1$ ist divergent, da alternierend.

Die Reihe einer geometrischen Folge heißt **geometrische Reihe**.

Reihen

Definition (Explizite Darstellung)

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\right), \quad q \in \mathbb{R},\ q \neq 0$$

heißt **geometrische Reihe** mit den Parametern a_1 und q. Sie entsteht aus den Teilsummen der geometrischen Folge $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Bemerkung: Der Summationsindex k muss nicht unbedingt bei 1 beginnen.

In einem nächsten Schritt möchten wir nun den Grenzwert einer geometrischen Reihe bestimmen. Dazu betrachten wir die $n-$te Teilsumme der geometrischen Reihe s_n:

$$s_n = a_1 \left(1 + q + q^2 \ldots + q^{n-1}\right)$$

und benutzen einen Trick...

Kahoot: Aufwärmen

kahoot.it
Quiz

Reihen

Wir bestimmen die Differenz der Terme s_n und $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned}
s_n - q \cdot s_n &= s_n(1-q) \\
&= a_1 \cdot \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) - a_1 \cdot \left(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n\right) \\
&= a_1 \cdot \left(1 + q - q + q^2 - q^2 + \ldots + q^{n-1} - q^{n-1} - q^n\right) \\
&= a_1 \cdot (1 - q^n)\,,
\end{aligned}$$

und erhalten einen Ausdruck für die $n-$te Teilsumme:

$$\begin{aligned}
s_n \cdot (1-q) &= a_1 \cdot (1-q^n) \\
\Rightarrow s_n &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}
\end{aligned}$$

Für den Grenzwert $n \to \infty$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot (1-\overset{\to 0}{q^n})}{1-q} & = \frac{a_1 \cdot (1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}, |q| < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot (1-\overset{\to \infty}{q^n})}{1-q} & = \frac{a_1 \cdot (1-\infty)}{1-q} = \pm\infty, |q| > 1 \end{cases}$$

Reihen

Satz (Konvergenz/Divergenz der geometrischen Reihe)

Für die Teilsummen der geometrischen Reihe mit den Parametern a_1 und q gilt:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1.$$

Die geometrische Reihe ist für alle $q \in \mathbb{R}$ und $|q| < 1$ konvergent mit dem Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Für $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Reihen

Beispiel:

Betrachten wir die geometrische Reihe mit den Parametern

$$(a_1 = 3, q = 0.7): \quad \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot (0.7)^{k-1}$$

und berechnen einige Teilsummen sowie den Grenzwert der Reihe:

$$\begin{aligned} s_3 = 3 \cdot (1 + 0.7 + 0.7^2) &= 6.57 \\ s_{10} = 3 \cdot (1 + 0.7 + 0.7^2 + \ldots + 0.7^9) &= 9.717524751 \\ s_{25} = 3 \cdot (1 + 0.7 + 0.7^2 + \ldots + 0.7^{24}) &= 9.998658931 \\ s_{60} = 3 \cdot (1 + 0.7 + 0.7^2 + \ldots + 0.7^{59}) &= 9.999999995 \end{aligned}$$

Die Teilfolgen scheinen für $n \to \infty$ gegen 10 zu konvergieren. Dies wollen wir mit unserem hergeleiteten Ausdruck überprüfen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1 - \frac{7}{10}} = \frac{3}{\frac{10}{10} - \frac{7}{10}} = \frac{3}{\frac{3}{10}} = \frac{30}{3} = 10.$$

Einführendes Beispiel Abschluss:

Nun wollen wir noch die Frage nach der zurückgelegten Wegstrecke unseres Tischtennisballes beantworten. Wir hatten bereits vermutet, dass die gesamte zurückgelegte Strecke des hüpfenden Balls insgesamt $3h$ beträgt und wir hatten als Ausdruck für die Wegstrecke folgenden Summenausdruck hergeleitet:

$$s = 3h \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = \frac{3h}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3h}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Es handelt sich also um eine geometrische Reihe mit den Parametern $(\frac{3h}{2}, 0.5)$.

Diese ist nach den Konvergenzkriterien konvergent mit dem Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3h}{2} \cdot (0.5)^{k-1} = \frac{\frac{3h}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3h.$$

Kahoot

kahoot.it
Quiz