Einführung in die Analysis
Joana Portmann
FS 2021

Übungsblatt 8

Das Newtonverfahren und die Taylorapproximation

Aufgabe 1.
Sei $f(x) = x^2 - 4$. Führen Sie jeweils vier Schritte des Newtonverfahrens zur Bestimmung einer Lösung von $f(x) = 0$ durch, ausgehend von den Startwerten 10 und -3.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens eine approximative Lösung der Gleichung $x^5 = 100$.

Aufgabe 3.
Schreiben Sie den Iterationsschritt des Newtonverfahrens für die Funktion

$$f(x) = x^2 - 2$$

auf. Damit erhalten Sie ein Iterationsverfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$.

Aufgabe 4.
Leiten Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens eine Rekursionsformel für die Berechnung der p-ten Wurzel von a, d. h. $\sqrt[p]{a}$, her.

Aufgabe 5.
Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens näherungsweise die Schnittpunkte des Schaubildes der Funktionen $f(x) = \tan(x)$ mit der Geraden $y = 2x$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die Näherungswerte sollen mit dem Newtonverfahren mit einer Genauigkeit von 8 Nachkommastellen berechnet werden.

Aufgabe 6.
Bestimmen Sie die Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = (1 + x)^n$.

Aufgabe 7.
Geben Sie für die folgenden Funktionen eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an. Untersuchen Sie auch den Konvergenzbereich der Reihen.

(a) $f(x) = \cos(x)$

(b) $f(x) = e^x$

Aufgabe 8.
Eine hilfreiche Anwendung von Taylorreihen ist es, Näherungsformeln für Funktionen herzuleiten. Aus Aufgabe 6 wissen wir zum Beispiel, dass wir die Funktion $(1+x)^n$ um den Nullpunkt herum annähern können durch

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

(Taylorapproximation 1. Ordnung, bzw. Mac Laurinsche Reihe 1. Ordnung).
Bestimmen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms Annäherungen 1. Ordnung für die Funktionen $f(x) = \sqrt{1+x}$ und $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ um den Nullpunkt herum.

Aufgabe 9.
Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}$ im Punkt $x = 0$.

Aufgabe 10.
Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \tfrac{1}{x^2} - \tfrac{2}{x},\ x > 0$$

in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Geben Sie den zugehörigen Konvergenzbereich an.

Aufgabe 11.
Aus der Statistik kennen Sie die Gausschen Normalverteilung. Die Wahrscheinlichkeit der Standard-Normalverteilung

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

soll für $z = 0.35$ mit einer Genauigkeit von mindestens $1 \cdot 10^{-6}$ bestimmt werden. Wie viele Glieder der Reihenentwicklung sind dabei zu berücksichtigen? Wie lautet der Näherungswert?

Aufgabe 12.
Bestimmen Sie durch Potenzreihenentwicklung die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{\ln(1+x^2)}$

Taylor-Reihen

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$	$\lvert x\rvert<1$
$(1\pm x)^{\frac{1}{2}}$	$1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2\pm\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\pm\ldots$	$\lvert x\rvert\le1$
$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}$	$1\mp\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2\mp\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\mp\ldots$	$\lvert x\rvert<1$
$(1\pm x)^{-1}$	$1\mp x+x^2\mp x^3+x^4\mp\ldots$	$\lvert x\rvert<1$
$(1\pm x)^{-2}$	$1\mp2x+3x^2\mp4x^3+5x^4\mp\ldots$	$\lvert x\rvert<1$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\tan x$	$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots$	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\ln x$	$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-+\ldots$	$0<x\le2$
$\arcsin x$	$x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\ldots$	$\lvert x\rvert<1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}-\left[x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\ldots\right]$	$\lvert x\rvert<1$
$\arctan x$	$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-+\ldots$	$\lvert x\rvert\le1$
$\sinh x$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cosh x$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\tanh x$	$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9-+\ldots$	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 13.
Überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen für die Regel von Bernoulli und de L'Hospitale erfüllt sind und bestimmen Sie dann die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

(b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5^x+3^x}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2x+1)}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(x)}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan(x)}{x}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x$

(i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$

(j) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2}$

(k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$

(l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2+2\cos(x)}{x^4}$