Histoire de l'analyse mathématique

M2 Madelhis, UE902, EC4

Sujet: Mini-mémoire sur l'articulation entre les travaux de Darboux et le développement de la recherche en analyse en France des années 1870 aux années 1900.

Dans ce mini-mémoire, nous nous proposons d'étudier d'une part l'influence de Darboux sur le domaine de l'analyse française à travers certains de ses travaux, de ses correspondances et de son implication dans la rédaction du *Bulletin des Sciences Mathématiques*, et d'autre part de donner un point de vue plus macrosocial sur le développement de l'analyse en France à partir des années 1870. Sous le second Empire, les mathématiques françaises connaissent un déclin prononcé à cause de l'isolement dans lequel elles s'enferment. Durant la première moitié du XIXème siècle, l'analyse française a été marquée par l'empreinte de Cauchy, qui a bouleversé les fondements de l'analyse. Après lui, les mathématiciens français se sont détournés des questions des fondements de l'analyse, et plus généralement des avancées mathématiques effectuées dans les pays voisins, pour se focaliser sur des problèmes dans lesquels ils excellaient, et notamment en géométrie. Cet isolement est renforcé par la domination de l'École Polytechnique sur l'enseignement supérieur français jusque dans les années 1870. D'autre part l'état médiocre dans lequel se trouvent les universités de province n'encourage pas l'émergence et la structuration d'un corps de mathématiciens tourné vers la recherche, a fortiori internationale. Ces deux raisons expliquent l'état d'isolement des mathématiques françaises au tournant des années 1870.

L'engagement de Darboux dans son travail de rédacteur au *Bulletin des Sciences Mathématiques* à partir de 1870 lui a permis de promouvoir l'analyse et plus largement la recherche internationale au sein des mathématiques françaises. Malgré une réception glaciale de ses travaux en analyse, nous montrerons grâce à une analyse macrosociale comment l'analyse a fini par prendre le pas sur la géométrie dans l'enseignement supérieur français à la fin du XIXème siècle. Étant donnée la densité du matériel à étudier, nous avons divisé notre travail en quatre parties d'égale longueur. La première section retrace la vie de Darboux et la création du Bulletin des Sciences Mathématiques, puis la seconde partie explique comment, en retour, le Bulletin a inspiré Darboux dans ses travaux. La troisième partie discute de l'état de l'enseignement supérieur en France à la fin du Second Empire, et la dernière partie compare l'évolution de la recherche en géométrie et en analyse, ainsi que leurs liens avec l'enseignement dans les dernières décennies du XIXème siècle.

En guise de sources, ous nous appuierons principalement sur la thèse de Barnabé Croizat soutenue en novembre 2016 intitulée *Gaston Darboux : naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur* retraçant le début de la trajectoire professionnelle de Darboux, ainsi que sur les études des journaux et des manuels d'analyse de la fin du XIXème siècle menées par Hélène Gispert depuis les années 1980. Nous produirons ainsi deux types d'histoires : une histoire très locale, et localisée autour de Darboux, mathématicien rédacteur du Bulletin des Sciences Mathématiques, et une histoire plus globale et macrosociale, s'appuyant sur une analyse originale du contenu des contributions mathématiques françaises dans les journaux nationaux et étrangers. Ce panorama nous permettra de rendre compte du contexte historique de manière plus précise, ainsi que des chaines de causalité multi-factorielles qui ont pu conduire à ce que l'analyse française passe de l'ombre à la lumière en l'espace d'une trentaine d'années, et devienne l'un des fers de lance des mathématiques françaises au tournant du XXème siècle avec des noms comme Baire, Borel et Lebesgue.

1. La création du *Bulletin des Sciences Mathématiques*

Gaston Darboux est né à Nîmes en 1842 et fit sa classe préparatoire au lycée impérial à Montpellier (aujourd'hui lycée Joffre). Admis premier à la fois à Polytechnique et à l'École Normale Supérieure (ENS), encouragé par Pasteur il choisit contre toute attente cette dernière et y étudie les mathématiques. Il soutient sa thèse en 1866 sur les surfaces orthogonales tout en travaillant en tant qu'agrégé-préparateur de mathématiques à l'École Normale Supérieure

– poste tout spécialement créé par Pasteur pour garder Darboux à l'ENS. En effet Pasteur, alors administrateur des études à l'ENS, avait pour intention de contribuer à créer une nouvelle élite scientifique en France, dont l'École devait servir de creuset [Croizat 2016]. Pour rattraper son retard sur Polytechnique, il avait ainsi oeuvré à créer une bibliothèque exclusivement scientifique, ainsi qu'un journal propre à l'École : les *Annales Scientifiques de l'École Normale*. Mais c'était aussi dû à l'insistance de Pasteur que Darboux avait choisi d'entrer à l'ENS plutôt qu'à Polytechnique, marquant une rupture dans la domination hégémonique de l'école militaire sur le paysage scientifique français [Gispert 1989, Renaud 2017]. Darboux et Pasteur partageaient le même point de vue sur le renouveau de l'élite scientifique française : il était important de conférer à l'École Normale Supérieure une réputation de scientificité et de rigueur intellectuelle qui contrebalance la main-mise de Polytechnique sur la formation des scientifiques français [Croizat 2016]. Et de fait, tandis que la plupart des mathématiciens ou des professeurs de mathématiques de la première moitié du XIXème siècle sortaient de Polytechnique, à partir des années 1880 ce fut l'École Normale Supérieure qui reprit le flambeau [Gispert 1991, Gispert 2008]. Le choix de Darboux d'être agrégé-préparateur, puis professeur à l'ENS à partir de 1872 après un cours passage à Louis-le-Grand, montre son engagement profond pour cette idéal de renouveau.

C'est à la même époque que Darboux participe avec Chasles à la création du *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Cela faisait longtemps que ce dernier avait le projet en tête. Conscient de l'état de délitement de la recherche française à cause de son isolement, Chasles souhaitait reproduire l'expérience menée un demi-siècle plus tôt avec le *Bulletin de Férussac*. C'était un journal mis en place par le naturaliste français André Étienne d'Audebert de Férussac de 1823 à 1831 qui documentait les nouveaux travaux scientifiques, ainsi que les observations ou découvertes récemment effectuées. Il avait pour but d'"augmenter, dans une progression indéfinie, l'impulsion donnée aux esprits occupés des sciences, régulariser la marche de leurs travaux, éviter une foule d'essais, de tâtonnements, d'écrits inutiles, fruits naturels de l'isolement où sont en général les savants" [Taton (1947) par Croizat 2016, p. 399]. Chasles, qui avait été grandement impressionné par ce journal, veut profiter de sa nomination à la position de directeur de la section mathématiques dans l'École Pratique des Hautes Études (EPHE) nouvellement créée (en 1868) pour lancer un journal qui aurait des prérogatives similaires. Le *Bulletin des Sciences Mathématiques* est ainsi créé en Novembre 1869, sous le patronage de l'EPHE et de Chasles. Les objectifs du bulletin sont les suivants : "tenir au courant les lecteurs des progrès mathématiques effectué en France et à l'étranger. [...] Le rôle de la publication doit donc être d'accélérer la diffusion des connaissances scientifiques." [Croizat 2016, p. 419] La périodicité devait être mensuelle et chaque numéro devait contenir une liste des articles et des mémoires publiés récemment dans les revues de mathématiques étrangères, ainsi que des recensions d'articles pour faire connaitre ces travaux en France. Aux yeux de Chasles, cela devait permettre aux mathématiques françaises de sortir de leur isolement et de rattraper leur retard.

Darboux, alors en poste en classe préparatoire au lycée Louis-le-Grand, est sollicité par Chasles – son ancien directeur de thèse – pour tenir le rôle de rédacteur du journal. Comme nous l'avons vu, Darboux partage l'idée que les mathématiques françaises sont dans un état d'isolement catastrophique. Il soutient donc l'initiative de Chasles d'éditer un journal à vocation internationaliste. Le deuxième rédacteur du journal est Jules Houël : alors mathématicien de l'Université de Bordeaux, il a entendu parler des tentatives de Chasles de monter le journal et s'est donc spontanément proposé comme rédacteur à Darboux. Houël est un mathématicien français originaire de Normandie et ayant obtenu sont doctorat en 1855. Il accepte quatre ans plus tard de reprendre la chaire de Mathématiques à la suite de Victor-Amédée Le Besgue à l'Université de Bordeaux et y restera jusqu'à sa retraite en 1884 [Henry Nabonnand 2017]. Bien que – ou peut être parce que – ne faisant pas partie du monde mathématique parisien à une époque où les universités de province étaient déconsidérées, Houël est très intégré dans la communauté mathématique internationale : il a collaboré avec plusieurs revues internationales et même traduits des ouvrages en Français dès le début des années 1860. Parmi ces traductions on peut noter des travaux de Kronecker, de Beltrami et à la fin des années 1860 les ouvrages de Bolyai et de Lobatchevsky sur la géométrie non-euclidienne, qui pourtant datent d'une trentaine d'années. Houël est polyglotte et parle couramment l'allemand, l'italien et même le russe, ce qui lui permet d'entretenir des correspondances diverses avec des mathématiciens européens [Croizat 2016]. Houël semble donc avoir le profil idéal pour le rôle de rédacteur du Bulletin.

Le journal commence à être publié en janvier 1870 mais les difficultés inhérentes au démarrage (difficultés à fixer une convention typographique, à trouver des sources fiables, etc.) et la guerre de 1870 puis la Commune forment un obstacle à sa publication régulière. Ainsi, la publication du Bulletin est interrompue pendant un an entre septembre 1870 et août 1871. Dès le début, Darboux et Houël comprennent l'importance de s'entourer d'un réseau de collaborateurs et de mathématiciens étrangers qui pourront leur communiquer les articles à recenser. Des noms comme Beltrami, Clebsch, Betti ou Klein seront donc les relais allemands et italiens du bulletin dans leur pays respectifs [Croizat 2016]. La volonté internationaliste de Darboux et Houël se répercute dans le contenu du journal : aucune priorité n'est donnée aux mathématiciens français. Il est aussi urgent de réconcilier la communauté scientifique dans le sillage de la guerre de 1870 et de montrer que l'avancée des mathématiques repose sur un partage intellectuel qui dépasse les clivages politiques nationaux. C'est très précisément cette image internationaliste qui incite des correspondants italiens et allemands à se rallier à cette initiative. Darboux s'inspire d'ailleurs fortement du journal allemand *Zeitschrift für Mathematik und Physik* créé en 1856 et qui recense régulièrement les mémoires et les livres publiés en langue allemande.

La main-mise de Chasles sur le Bulletin se fera ressentir durant toute la phase d'installation : l'idée de reproduire le journal de Férussac et les démarches menées envers les instances de l'EPHE et du ministère sont en effet portées par lui. Alors que Darboux et Houël souhaitaient un rythme bimensuel et traduire des ouvrages étrangers, Chasles s'y oppose. Par chance, très rapidement après le lancement du journal, Chasles se désengage et laisse Darboux et Houël le diriger de manière autonome, à leur grande satisfaction. La première traduction d'un ouvrage est annoncée dès le mois de mai 1870 mais avec le retard engrangé elle ne sera publiée qu'en 1873 : c'est un mémoire du mathématicien russe Imchenetsky traduit par Houël, sur les équations différentielles du second ordre [Imchenetsky 1868]. Ainsi, par le truchement de Houël, dont l'une des qualités est de traduire beaucoup de mathématiciens étrangers, Darboux va avoir accès à un nombre important de mémoires et d'ouvrages qui vont très logiquement impacter ses recherches personnelles. Cela se verra dans ses travaux sur les équations aux dérivées partielles par exemple, ou plus explicitement dans ses travaux qui portent sur l'analyse, qui n'auraient certainement jamais vu le jour si Darboux n'avait pas été rédacteur du Bulletin.

2. L'influence du Bulletin sur les travaux de Darboux

L'intérêt de Darboux pour l'analyse a été fortement suscité par le contenu des articles du Bulletin. En tant que rédacteurs, Houël et Darboux pouvaient être amenés à commander ou rédiger des notices sur un mathématicien ou certains travaux, et l'étude des fondements de l'analyse, alors embryonnaire en France, faisait partie des sujets susceptibles d'être mentionnés dans de telles notices. Par exemple, dès le premier numéro du bulletin, Houël en rédige une sur des travaux d'analyse du mathématicien allemand Hankel, concernant ici les fonctions oscillantes [Hankel 1870]. Ces travaux suscitent chez Darboux un fort intérêt pour les fonctions continues qui ont des propriétés étranges, plus particulièrement celles qui sont continues sans dérivées.

A cette époque, cela faisait quelques années que l'analyse en Allemagne connaissait un élan majeur sous l'égide de Weierstrass à Berlin. Dans son cours d'analyse dispensé à l'Université de Berlin à partir du début des années 1860 [Croizat 2016], Weierstrass aborde des notions fondamentales en analyse qui n'avaient jamais été traitées avant, ou bien qui l'avaient été mais qui n'avaient jamais été prises en compte – comme par exemple les travaux de Bolzano au début du XIXème siècle. Weierstrass refusait catégoriquement de publier son cours ce qui fait que les seules sources historiques à disposition sont les notes prises par certains élèves de Weierstrass, cela permet notamment de comparer les différentes versions du cours [Gispert 1983, Croizat 2016]. Dans les années 1870 cependant, ces notes ne sont pas en circulation et la seule manière qu'a eu Darboux d'approcher les mathématiques de Weierstrass passait par la réutilisation des méthodes de Weierstrass dans les travaux de certains de ses élèves ou de ses amis. Beaucoup d'entre eux ont été profondément influencés par son enseignement et ont prolongé ses travaux, à l'image de celui qui est certainement le plus connu : Cantor. Les questions portant sur les fondements de l'analyse s'articulent en effet avec le problème fondamental de la nature et de la construction des nombres réels, et donc de la réflexion autour de la théorie des ensembles et des cardinaux. En tant que rédacteur du bulletin, Darboux sera amené à être en contact avec ces nouvelles notions mathématique de manière assez régulière et cela stimulera sa curiosité.

Dès le début des années 1870, en recensant le contenu du journal allemand *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Darboux est confronté aux propriétés de continuité, de convergence des séries, et de convergence des fonctions continues d'une ou de plusieurs variables, dans les travaux de Schwarz et Cantor. Dans le numéro de septembre 1872, Darboux rend compte d'un article de Heine traitant des fondements de l'analyse [Heine 1872] : construction des nombres réels grâce aux suites de Cauchy, et définition des fonctions continues et discussion de leurs propriétés. Ce mémoire est important puisqu'on y trouve pour la première fois écrits certains théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle : le résultat qui porte son nom sur la continuité uniforme, mais aussi le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un segment atteint ses bornes (mais il est alors non totalement prouvé, et partiellement mal écrit). Dans son mémoire, Heine ne cache pas qu'il s'est inspiré des travaux de Weierstrass, et de ses élèves Schwarz et Cantor [Croizat 2016]. Les travaux de Heine vont pousser Darboux à se pencher plus profondément sur certains problèmes d'analyse. Un mois plus tard, il joint au numéro du Bulletin d'octobre 1872 un court article portant sur le théorème des bornes atteintes [Darboux 1872]. Ce théorème souffrait d'avoir été énoncé jusqu'ici de manière parcellaire, certainement mal compris et encore moins prouvé. Darboux est le premier à avoir isolé les différentes hypothèses du théorème, et à en prouver une version affaiblie (où on suppose que les bornes de la fonction existent).

Une petite parenthèse historiographique est nécessaire ici. Les premières recherches historiques sur ce théorème par Pierre Dugac ont attribué à Weierstrass l'énoncé du théorème des bornes atteintes dans son cours de 1861 [Dugac 1973], sans pour autant qu'une preuve satisfaisante y soit apportée. Or, le manuscrit du cours de 1861 a été perdu quelques temps après les études de l'historien des mathématiques français, et les historiens et historiennes de l'analyse française ont continué à attribuer ce théorème à Weierstrass en se basant sur cet article fondateur datant de 1973. Ce ne fut qu'en 2014 cependant que le libraire de l'Institut Mittag-Leffler à Djursholm en Suède retrouva le manuscrit typographié du cours de Weierstrass de 1861, et que le doctorant Barnabé Croizat pu alors mener un réexamen critique de l'histoire de ce théorème dans les travaux de Weierstrass [Croizat 2016]. Son analyse minutieuse montre que Weierstrass n'avait pas énoncé ni même compris en 1861 le résultat du théorème des bornes atteintes. Par exemple Weierstrass considère implicitement que les fonctions continues ont des bornes finies et qu'elles sont atteintes, et ne considère donc pas du tout comme important que ces deux faits soient prouvés. Pour Croizat – prenant en cela le contrepieds de Dugac – cela représente le noeud de l'étude historique de ce théorème : "L'accent ne doit pas être placé sur l'absence de preuve. Il doit en revanche être mis sur l'absence de l'énoncé, et surtout sur l'absence de prise de conscience de la nécessité de cet énoncé." [Croizat 2016, pp. 553-554].

Dans son article de 1872, inspiré par le mémoire de Heine de 1872, Darboux propose une formulation plus précise du théorème des bornes atteintes [Darboux 1872]. Tout d'abord il différencie finitude et bornitude, deux notions qui étaient jusque là entremêlées chez les mathématiciens, et dont il était difficile de les démêlées notamment à cause de l'absence du lexique attaché à la bornitude dans les mathématique françaises. Là où l'énoncé de Heine souffrait encore d'hypothèses peu explicites, l'énoncé de Darboux suppose rigoureusement que les fonctions sont bornées. Son théorème des bornes se limite donc à montrer que les fonctions continues bornées atteignent leurs bornes. Cependant il laisse échapper la subtilité inhérente à la question de la frontière du support de la fonction : il ne voit pas qu'il faut que celui-ci soit fermé (comme un segment), car la fonction peut diverger à la frontière. Malgré ce défaut, le rôle de Darboux a été de préciser le contenu du théorème des bornes atteintes en rendant explicite l'hypothèse de la bornitude des fonctions étudiées là où les allemands la pensaient comme naturelle. Ainsi, la question de l'existence des bornes reste toujours ouverte mais le théorème approche de sa consistance actuelle (il n'obtiendra sa forme définitive et connue aujourd'hui que sous la plume de Stoltz en 1885). Darboux ne prolongera pas plus avant sa réflexion sur l'existence des bornes d'une fonction car cette question repose sur le problème posé par la construction des nombres réels, et cette question très difficile ne va pas vraiment susciter son intérêt dans les années qui suivent.

Suite à cet article de 1872, Darboux va persévérer dans ses recherches sur les fondements de l'analyse. En 1875 il finit par publier aux *Annales Scientifiques de l'École Normale* un mémoire plus consistant portant sur l'étude de fonctions ayant des particularités remarquables et intitulé *Mémoire sur les fonctions discontinues* [Darboux 1875]. Ce mémoire, initialement prévu pour être publié dès 1874, est finalement publié avec un an de retard. Darboux y présente des résultats rigoureux sur la continuité, l'intégration, la convergence des séries, ainsi que l'intégration et la dérivation de séries de fonctions. Il définit rigoureusement toutes ces notions et propose quelques résultats de permutation somme-intégrale ou somme-dérivation grâce à la bonne notion de convergence uniforme.

La partie la plus intéressante de son mémoire concerne peut être le dernier tiers, qui propose différents exemples de fonctions aux propriétés étonnantes : fonctions continues nulle part dérivables, fonctions dérivables partout mais dont les fonctions dérivées ne sont nulle part continues. Pour Darboux, ces exemples présentent une importance indéniable pour la pratique mathématique puisqu'elles prennent le contre-pied de l'analyse de Cauchy et de ses prédécesseurs, qui se focalisaient sur les régularités des fonctions, en évinçant les cas pathologiques comme n'étant pas dignes d'intérêt. Au contraire, pour Darboux, c'est en exhibant ce type de contre exemple que l'on peut affiner les énoncés mathématiques souffrant jusque là d'imprécision [Gispert 1983]. En effet, en exhibant les points où ces énoncés sont mis en défaut, les mathématiciens peuvent travailler à mieux cibler quelles sont les hypothèses qui sont strictement nécessaires à l'établissement de la vérité des énoncés : "Le contre-exemple aboutit à l'explicitation d'une proposition cachée, et à la clarification ou à la formation de nouveaux concepts." [Gispert 1990, p. 200]

Or ses travaux suscitent un accueil glacial dans la communauté des mathématiciens français [Gispert 1990]. En effet, les fonctions exhibées semblent tellement artificielles qu'elles choquent l'entendement et les habitudes de travail de l'époque. Cela se voit en particulier dans la correspondance de Darboux et de Houël, à propos du manuel de calcul infinitésimal que ce dernier rédige dans les années 1870 [Gispert 1990, Henry Nabonnand 2017]. En tant que rédacteurs du Bulletin, tous deux correspondent régulièrement, et leurs discussions portent tout autant sur le journal que sur des questions mathématiques afférentes. En particulier, Houël s'applique à décrire des fonctions globalement "régulières" (c'est à dire continues, dérivables, définies sur un intervalle fermé), tandis que Darboux l'enjoint à regarder les exceptions pour mieux cibler quelles sont les définitions correctes à donner pour les notions telles que la continuité, la dérivabilité, etc. Comme ses contemporains, Houël refuse catégoriquement d'entendre le plaidoyer de Darboux envers cette nouvelle approche : "Ne cherchez pas à m'indiquer des fonctions mettant en défaut mes énoncés; mais plutôt montrez-moi à quelles conditions ils sont vrais (car ils sont certainement vrais pour tous les cas que je traite) et quelles restrictions j'y dois apporter. Jusqu'à quel point, en formulant suffisamment mes restrictions, puis-je conserver les énoncés et les démonstrations actuels, qui ne sont pas entièrement faux." [Houël par Gispert 1990, p. 197] Face à cette dissension irrésoluble, Darboux refusera finalement d'éditer le manuel de Houël, mais sans que cela n'entache leur collaboration.

Produire des contre-exemples devient donc un levier de découverte mathématique, même s'ils peuvent sembler pathologiques et peu dignes d'intérêt. Pour Darboux, très attaché à la rigueur mathématique, c'est un nouveau tournant dans la pratique mathématique [Gispert 1983]. Ainsi, on pourrait penser naïvement qu'il est contradictoire de regarder des contre-exemples pour aboutir à des énoncés plus généraux, mais cela marque en réalité une amélioration de la rigueur mathématique : "C'est une nouvelle révolution, un nouvel âge de la rigueur et des exigences rationnelles auquel Weierstrass a attaché son nom. La rigueur devient un levier de découverte mathématique. Cette nouvelle exigence de rigueur, source d'évolutions des concepts d'évidence, d'intuition et de vérité a des implications profondes que l'on retrouve dans les lettres de Darboux où se dessinent, face aux positions de Houël, de nouveaux critères pour juger de la justesse d'une démonstration." [Gispert 1990, p. 200].

Mais au final, l'opposition des mathématiciens français à la publication du mémoire de Darboux fut si forte qu'elle l'aurait semble-t-il découragé de mener plus loin ses recherches sur les fondements de l'analyse [Gispert 1990, Croizat 2016]. Continuer ce type de recherches, d'après ses dires mêmes, pourrait lui faire perdre l'estime de ses collègues mathématiciens et des sociétés savantes. Pour Hélène Gispert, c'est un effet de la raideur des mathématiques françaises qui à ce moment là n'étaient pas encore sorties de leur phase de repli identitaire, et qui montraient une grande méfiance envers ces nouveaux travaux en analyse, bien éloignés des sujets de recherche plus "appliqués" de l'époque : "La censure du milieu fonctionne, et cette incursion malencontreuse dans un champ totalement étranger aux préoccupations du milieu mathématique français d'alors est « effacée » du paysage" [Gispert 1996, p. 404] De manière ironique, à l'étranger, le mémoire de Darboux ne passe pas inaperçu : salué par Schwarz, il sera aussi d'une grand influence sur les travaux de Dini [Dini 1878] et de Tannery, qui ressuscitera l'analyse en France en 1886 [Tannery 1886] en se réclamant spécifiquement de l'héritage de Weierstrass et de Darboux [Croizat 2016]. Enfin, quelques années plus tard, la deuxième édition complètement révisée du manuel d'analyse de Jordan [Jordan 1893, Gispert 1983] marque l'acceptation totale des nouvelles mathématiques en France. Darboux de son côté, trop impacté par le mutisme de ses confrères, ne produisit plus d'articles sur le sujet, sauf un court texte en 1979 venu compléter son mémoire de 1875 [Darboux 1879]. Le rejet que subit les travaux sur les fondements de l'analyse de Darboux fut comme absorbé et accepté par lui, ce qui alla jusqu'à le rendre très méfiant des travaux de la nouvelle école d'analyse française, menée par Baire, Borel et Lebesgue au tournant du XXème siècle, alors que ceux-ci allaient révolutionner le domaine et participer aux fondations de l'analyse fonctionnelle, accompagnant ainsi le renouvellement de l'école française d'analyse.

3. L'enseignement supérieur français à la chute du Second Empire

Dans cette partie nous changerons de focale et prendrons du recul par rapport aux deux parties précédentes qui étaient ciblées sur les acteurs. Nous nous pencherons sur des dynamiques plus structurelles, comme par exemple la manière dont les institutions ou les sociétés savantes changent au cours des années pour mieux accepter l'analyse mathématique en leur sein. Nous nous appuieront largement sur les travaux d'Hélène Gispert qui a eu l'intuition originale de coupler l'études des sources écrites usuelles en histoire des mathématiques (mémoires, journaux,...) à une approche socio-historique plus large. Elle étudia ainsi autant les manuels d'analyse de la fin du XIXème siècle [Gispert 2008] que le contenu du Bulletin des Sciences Mathématiques et d'autres journaux étrangers [Gispert 1990, Gispert 1996], que l'évolution de la Société Mathématique de France pour évaluer comment l'analyse prit finalement pied en France à partir de la fin des années 1880 [Gispert 1991].

Les mathématiques françaises dans les années 1860 poursuivent essentiellement les travaux de la première moitié du XIXème siècle sans prendre en compte les avancées effectuées en géométrie et en analyse dans les pays limitrophes (en Allemagne notamment). En géométrie, on développe la géométrie projective et on étudie les invariants de certaines courbes algébriques (les coniques par exemple). En analyse, les travaux portent plus sur le calcul d'intégrales de fonctions particulières et l'étude d'équations aux dérivées partielles, mais sans trop s'avancer plus loin : les français ignorent totalement les travaux de Riemann en analyse complexe et en théorie de l'intégration [Gispert 1990]. L'influence de Cauchy sur l'analyse française reste en effet très prégnante. Alors que les fonctions étaient considérées de manière globale par Euler et ses contemporains, Cauchy mettait l'accent sur l'étude locale sur des intervalles [Gispert 1990]. Il a opéré un tournant dans la manière dont les fonctions devaient être considérées, en soulignant l'importance du domaine de définition, en formalisant les notions de convergence et de développement en série, mais le poids de son influence a peut être rendu l'analyse française plus résistante au changement et aux influences étrangères. Nous avons en effet vu que même durant les années 1870 les mathématiciens français supportaient mal qu'on s'intéresse à des fonctions pathologiques telles que celles définies par Darboux ou par les mathématiciens allemands. Alors pourtant que les travaux de Darboux montraient essentiellement qu'on ne pouvait se passer de l'étude des fonctions en chaque point, et remettaient en question certaines démonstrations de Cauchy.

Lorsqu'on compare la production *globale* des mathématiciens français des années 1860 à leur congénères italiens et allemands, on observe l'isolement et le déclin des mathématiques françaises. L'histoire des mathématiques qui ne s'intéresse qu'aux grands travaux et aux grandes avancées est longtemps passée à côté de ce fait car elle n'avait peut être pas la bonne focale et qu'elle laissait de côté la production de tous les acteurs impliqués dans la recherche et l'enseignement des mathématiques [Gispert 1989]. La situation critique dans laquelle se trouvaient les mathématiques françaises dans les années 1860 s'explique par le fait que la recherche mathématique française est victime de l'organisation de son enseignement supérieur. La domination de l'école Polytechnique sur celui-ci se fait ressentir à tous les niveaux : secondaire comme supérieur. Son influence se faisait par l'aval : la progression des programmes de mathématiques du lycée était largement calibrée sur le contenu du concours d'entrée à l'école Polytechnique [Gispert 1989, Renaud 2017]. L'enseignement au sein même l'école repose largement sur les mathématiques, mais le fait qu'elle ne soit pas tournée vers la recherche entraine une résistance à la nouveauté et donc au changement du contenu de ses enseignements : "Coupée de la recherche mathématique depuis les années 1830, l'École entretient en effet, dans les années 1860, une tradition mathématique hostile à tout développement théorique qui, au-delà des apparences, freine le développement des mathématiques elles-mêmes et est une des causes de ses « retards »." [Gispert 1989, pp. 52-53]. La domination de l'École sur les universités française se manifestait par le rôle quasi inexistant que ces institutions avaient dans le paysage intellectuel, scientifique et social français avant la Troisième République.

L'École Normale Supérieure et la Faculté des Sciences de Paris sont les institutions principales qui produisent des doctorats en mathématiques, mais l'importance est toutefois mise sur l'obtention de l'agrégation, montrant ainsi la place dévolue à l'enseignement secondaire et au classes préparatoires dans l'enseignement des mathématiques. Les universités de province ont de leur côté peu de chaires car peu d'étudiants, et sont plutôt sollicitées pour former les jurys du baccalauréat [Gispert 1989]. Elles sont même raillées dans les milieux intellectuels parisiens, car la rumeur voudrait qu'on n'y travaille pas : "Les universités, exception faite de la Sorbonne, n'ont aucun rôle majeur, celles de province ayant même été qualifiées dans les années 1860 de « maisons de retraite pour professeurs incapables de faire leurs cours »." [Gispert 2008, pp. 266-267]. La recherche dans les années 1860 n'est pas en très grande forme : il n'y a que 32 mathématiciens universitaires, une trentaine de thèses soutenues sur la décennie 1860, et une seule chaire de géométrie (celle de Chasles) [Gispert 1991].

C'est précisément dans ce contexte de délabrement universitaire que le ministère Duruy commande à différents scientifiques dans tous les domaines une série de rapports pour évaluer l'état de la science française. En mathématiques, ce furent Chasles et Joseph Bertrand qui étaient en charge de produire ces rapports sur l'état des mathématiques françaises. Dans son rapport produit en 1870, Chasles souligne la difficulté à créer de nouvelles chaires de mathématiques, et l'absence de société savante propre aux mathématiciens (la *Société Mathématique de France* sera justement créée en 1872 à son initiative). Très ironiquement, si Chasles déplore l'isolement des mathématiques françaises dans son rapport, il en est en partie responsable puisqu'il n'avait que très peu pris connaissance ou relayé les résultats importants en géométrie effectués vingt ans plus tôt par Riemann ou par ses contemporains [Gispert 1990, Croizat 2016]. La volonté de créer un bulletin des sciences mathématiques qui recense les nouvelles publications étrangères en mathématique faisait partie de cette démarche de décloisonnement des mathématiques françaises.

En Italie, c'est une autre situation qui prévaut : le Risorgimento et les tentatives d'unification de la nation italienne participent à la stimulation des milieux intellectuels et à l'établissement d'une recherche universitaire de qualité. Les mathématiques italiennes sont à cette époque ouvertes sur le monde extérieur et gourmandes de nouvelles avancées [Gispert 2008]. Parmi les grands mathématiciens italiens de la deuxième moitié du XIXème siècle, on peut retenir notamment le nom d'Ulysse Dini, analyste pisan, et qui se fait remarquer en publiant en 1878 le premier traité moderne sur la théorie des fonctions d'une variable réelle [Dini 1878]. Dini fut donc en quelque sorte le pendant italien de Darboux en analyse, à la différence près qu'il s'inscrivait dans un contexte historique et social plus favorable. Dini n'a donc pas connu l'accueil glacial qu'a du essuyer Darboux, et son influence sur les mathématiques italiennes s'en est très logiquement fait ressentir. Nous voyons donc comment le contexte national – et plus généralement social – peut impacter la réception de certains travaux, pourtant sensiblement similaires dans leur contenu [Gispert 2008].

En France cependant, l'état de repliement de la recherche mathématique va petit à petit évoluer, et l'influence de l'école Polytechnique s'ammenuir. Dans la première partie, nous avons vu en effet comment Pasteur avait oeuvré à donner à l'École Normale Supérieure une stature de plus en plus respectée en développant notamment ses programmes de recherche. Le fait que Darboux ait choisi l'ENS au lieu de Polytechnique alors qu'il était classé premier aux deux concours fut le fruit du travail de Pasteur à le convaincre, mais aussi un symbole très fort pour la réputation de l'ENS, ainsi qu'un signe annonciateur du déclin de Polytechnique dans la recherche fondamentale en France. Plus largement, la présence des polytechniciens dans les milieux mathématiques n'ira qu'en décroissant tout au long de la deuxième moitié du XIXème siècle. Cela s'explique à la fois par le développement des facultés des sciences dans un contexte historique où la troisième République favorise l'éducation nationale et les universités [Gispert 1990, Gispert 1991], mais aussi par le succès de plus en plus grand de l'ENS pour la formation à la recherche, qui va nourrir notamment tout un contingent d'analystes, qui renouvelleront – et pour certain révolutionnerons – l'analyse française.

4. Déclin de la géométrie et émergence de l'analyse après 1880

La chute du Second Empire marque une rupture avec la tradition universitaire française puisque la Troisième République encore jeune va lancer de vastes réformes éducatives touchant autant l'enseignement secondaire que l'enseignement supérieur. Ainsi les universités se développent et ont la possibilité d'offrir des diplômes plus variés à un plus grand nombre [Gispert 1990]. Le nombre de professeurs et de doctorants double entre les années 1860 et les années 1890 [Gispert 1991]. Le nombre d'élèves en licence bondit et l'enseignement devient une des prérogatives de l'université. Alors que jusqu'ici en France – au contraire de l'Italie – la recherche et l'enseignement supérieur étaient passablement déconnectés à cause de l'hégémonie de l'école Polytechnique, les universitaires sont désormais invités à considérer l'enseignement comme une composante importante de leur métier. Accompagnant l'apparition des sempiternelles "notes de cours", on observe à partir des années 1880 une recrudescence du nombre d'ouvrages de mathématiques à destination de l'enseignement dans le supérieur, marquant l'émergence d'une pensée plus synchrétique entre les missions de recherche et d'enseignement [Gispert 1991].

Ces ouvrages résultent pour partie de la volonté de chercheurs de rendre publics et accessibles les derniers résultats connus en mathématique, sans pour autant utiliser un langage abscons, seulement compris par les membres des sociétés savantes [Gispert 2008]. En 1893, la deuxième édition du cours d'analyse de Jordan est l'objet d'un remaniement en profondeur pour en actualiser le contenu [Gispert 1983], et l'année suivante, Appell et Goursat publient un manuel sur les fonctions algébriques qui est applaudi par le Bulletin des Sciences mathématiques [Gispert 2008]. Le traité de Jordan marque la volonté du monde mathématique de renouveler l'enseignement de l'analyse puisque cette seconde édition comprend les résultats de Riemann datant d'une quarantaine d'années. Le contexte national explique pourquoi ces résultats ne furent publiés dans un traité qu'à ce moment alors qu'ils étaient connus de longue date, puisqu'en Italie, ils apparaissaient dans les traités dès 1868 [Gispert 2008]. Jordan réhabilite avec son traité ce champ des mathématiques qu'on avait reproché à Darboux d'avoir défriché : les fondements de l'analyse. Globalement, l'augmentation de la publication de cours ou de manuels sur la période 1870-1900 est une marque de la plus grande intégration de l'enseignement dans les prérogatives de l'université française, telles que pensées par la Troisième République [Gispert 1990].

L'inflation de la littérature de concours et d'enseignement est particulièrement flagrante lorsqu'on observe les publications des membres de la *Société Mathématique de France* : la part de la recherche diminue fortement pour laisser la place à l'enseignement et à la didactique [Gispert 1991]. Cependant une démarcation nette se fait entre géométrie et analyse : la publication d'articles en géométrie se fait majoritairement dans les revues d'enseignement (françaises ou étrangères), tandis que l'analyse est plutôt cantonnée aux revues scientifiques spécialisées dans la recherche. Cette différence marque la prégnance encore vivace du contenu des concours de l'École Polytechnique puisque la géométrie règne longtemps sur l'enseignement en classes préparatoires [Renaud 2017], tandis que c'est l'analyse (mécanique rationnelle, équations différentielles) qui tient le haut du pavé en licence à l'université, en phagocytant même les enseignements habituellement dispensés en géométrie [Gispert 1991]. Cet état de fait induit que très peu de recherche novatrice est produite en géométrie, qui est petit à petit réduite à sa partie enseignée en classe préparatoire, ou à la géométrie infinitésimale "à la Darboux".

En effet, le successeur de Chasles à la Sorbonne en 1881, titulaire pendant plus de trente ans de l'unique chaire de géométrie en France, imprimera profondément sa marque sur les recherches françaises en géométrie. Le manque de postes dédiés à la géométrie en province comme à Paris conduit à un isolement rapide de la discipline vis à vis des avancées faites par les mathématiciens étrangers. L'étroitesse du cadre conceptuel établi par Darboux en géométrie va conduire à des recherches de plus en plus stériles, comme le montre la baisse continue du nombre de thèses défendues de la décennie 1880 à la décennie 1900 (de 9 à 3) [Gispert 1991]. Seule l'arrivée de Cartan au début du XXème siècle et la synthèse qu'il fera des travaux de Darboux avec la géométrie Riemannienne vont ressusciter un domaine moribond.

De l'autre côté l'analyse – qu'on entend ici au sens large, c'est à dire la mécanique, le calcul différentiel, les équations aux dérivées partielles, etc. – va connaître un développement rapide à partir des années 1880. Tout d'abord, les chaires d'analyse dans les universités de province vont être divisées en deux pour délivrer un poste en mécanique et un autre en calcul différentiel. La production en analyse se diversifie, sans pour autant toucher aux questions portant sur les fondations, qui avaient été écartées dans les années 1870 suite à la tentative avortée de Darboux de les introduire en France. Dès la fin des années 1870, une génération d'analystes formée par Hermite, et dans leur majorité anciens élèves de l'École Normale Supérieure, débutent leur carrière : Appell, Picard, Poincaré, puis Goursat, Painlevé et Hadamard au début des années 1890. Ce bouillonnement intellectuel se ressent dans la production d'articles de recherches, qui dépasse largement en taille la production des recherches en géométrie : entre 1879 et 1885, Appell, Picard et Poincaré publient à eux seuls plus de 120 notes d'analyse dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* [Gispert 1991]. Le nombre de thèses soutenues dans les dernières décennies du XIXème siècle suit ce dynamisme avec 19 thèses soutenues dans les années 1880, et 34 dans les années 1890. Autre chiffre éloquent illustrant les deux trajectoires opposées prises par l'analyse et la géométrie : le nombre d'analystes à la Société Mathématique de France quadruple entre 1874 et 1914, tandis que le nombre de géomètres est divisé par trois [Gispert 1991].

La sociologie des géomètres et des analystes est tout aussi intéressante et permet d'éclairer d'un nouveau jour cette production mathématique différenciée. En effet, la plupart des membres de la Société Mathématique de France engagés dans une production mathématique dédiée à l'enseignement sont majoritairement issus de l'École Polytechnique. Ils sont très peu actifs dans les domaines de la recherche, au contraire des normaliens qui, dès la fin des années 1880, "investissent promptement et massivement, si l'on peut dire vu l'effectif des élèves, le champ du savoir mathématique et des institutions qui s'y rattachent, délaissés progressivement depuis les années 1850 par les polytechniciens." [Gispert 1991, pp. 20-21] En outre, une ligne de partage se dessine entre ces deux populations : le domaine de prédilection des polytechniciens est la mécanique et la physique mathématique, tandis que les normaliens sont formés et portent beaucoup d'intérêt dans la nouvelle analyse, i.e. la théorie moderne des fonctions. Cela ne veut pas dire que l'École Polytechnique est imperméable, puisque l'analyse s'immisce cependant petit à petit à l'école et dans les classes préparatoires [Renaud 2017], comme l'illustre la décision de Jordan de revisiter de fond en comble son cours d'analyse [Jordan 1893]. Comme nous l'avons vu plus haut, la présence massive des normaliens dans la recherche est en partie

Tableaux 8.1 et 8.2 : nombre d'auteurs et auteurs de recherche dans la S.M.F. en fonction de leur école d'origine (Ecole polytechnique et Ecole normale)

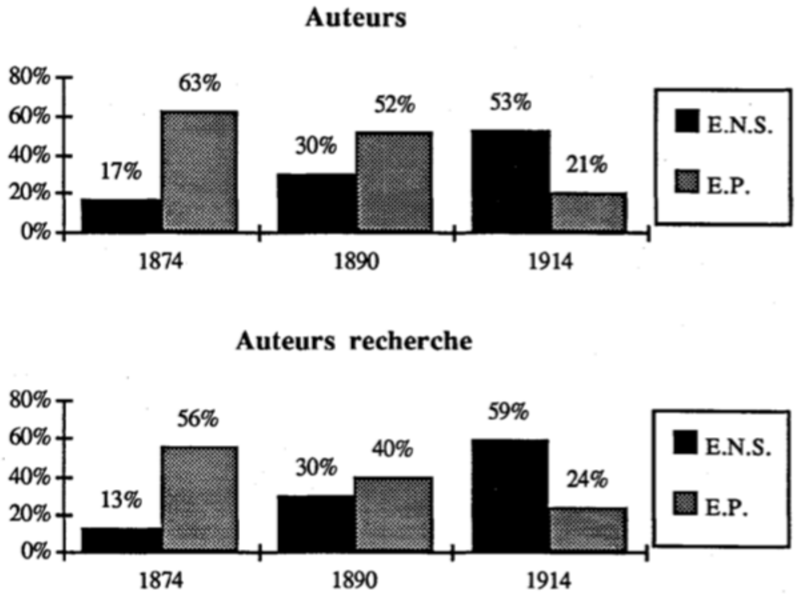

Figure 1: Source : Gispert 1991

le fruit de la volonté de Pasteur et des administrateurs de l'ENS de former dès les années 1860 une nouvelle élite intellectuelle tournée vers la recherche. La chute drastique du nombre de polytechniciens dans la Société Mathématique de France se fait aussi durement sentir durant les dernières décennies du XIXème siècle : de plus de 60%, il tombe à 20% à la veille de la guerre [Gispert 1991]. Ainsi, les polytechniciens, bien qu'ayant dominé le monde de l'enseignement supérieur durant les deux premiers tiers du XIXème siècle, finissent par perdre leur suprématie avec le développement du système universitaire Français après les années 1870. Et avec eux, la géométrie moribonde cède la place à l'analyse triomphante.

Ainsi, dans ce mini-mémoire nous avons établi comment Darboux s'inscrit dans un contexte socio-historique où la suprématie de l'École Polytechnique sur l'enseignement supérieur français est contestée par l'École Normale Supérieure. Le fait qu'il ait choisi d'intégrer cette dernière plutôt que la première peut être vu comme le signe avant-coureur du désengagement de Polytechnique dans la recherche française au profit de l'ENS. Le recrutement de Darboux par Chasles pour créer le *Bulletin des Sciences Mathématiques* fut un tournant radical dans sa vie : parce que cela lui permit de rencontrer Houël, polyglotte et traducteur prolifique, mais surtout parce qu'en tant que rédacteur du journal, Darboux fut très régulièrement en contact avec des mathématiciens européens et leurs travaux. Dans les premières années de publication du Bulletin, Darboux découvre les recherches des mathématiciens allemands sur les fondements de l'analyse, qui suscitent son intérêt. En 1872, puis en 1875, il publie des mémoires d'analyse importants et salués par les mathématiciens italiens et allemands, mais reçus très froidement par le milieu mathématique français, encore habité par le spectre de Cauchy.

Darboux, dans le mémoire de 1875, promouvait pourtant une nouvelle vision des mathématiques, qui se voulait plus rigoureuse et plus exhaustive. En s'appuyant sur des exemples de fonctions aux propriétés inhabituelles, Darboux entendait mettre l'accent sur les zones d'ombres des raisonnements mathématiques de ses contemporains (comme cela s'est vu avec Houël dans leur correspondance). Les contre-exemples "pathologiques" permettent en effet d'isoler les endroits où les énoncés mathématiques sont mis en défaut, et sont un signe qu'il est temps de les réviser pour les préciser. Malheureusement, le mépris que la communauté mathématique française réserva aux travaux de Darboux le découragea de continuer à explorer les fondements de l'analyse, qui ne furent revisités en profondeur qu'à la fin du siècle par la nouvelle école d'analyse française menée par Baire, Borel et Lebesgue.

En résistant aux nouvelles idées venant de l'étranger, les mathématiques françaises prennent le risque de s'enfermer par chauvinisme dans un isolement délétère : c'est ce qui arrive à la géométrie française, menée alors par Darboux seul, et n'ayant pas suffisamment de relais à l'étranger et dans les universités de province. Or, à partir des années 1870, les universités françaises connaissent une influence grandissante, puisqu'elles font partie intégrante du vaste programme de généralisation de l'accès à l'éducation promu par la Troisième République. Le nombre d'étudiants allant augmentant, les universités connaissent une phase d'expansion et une redéfinition de leur mission : la recherche et l'enseignement vont désormais de pair. Cela se manifeste notamment dans l'explosion du nombre de manuels publiés par des universitaires à partir des années 1880. C'est dans ce contexte que l'analyse prend le pas sur la géométrie dans les enseignements et la recherche à l'université, grâce à des facilitations structurelles telles que par exemple l'augmentation du nombre de chaires en analyse.

La différenciation entre l'analyse et la géométrie se reporte dans les pratiques de publication des mathématiciens. À partir des années 1880 fleurissent en effet de multiples revues mathématiques à Paris et en province, et on peut observer que la géométrie est essentiellement cantonnée à des journaux à visée pédagogique, tandis que l'analyse elle devient plutôt un objet de recherche. Cette différenciation peut s'expliquer en partie par le fait que le concours d'entrée à l'École Polytechnique sollicite plutôt la géométrie, et qu'une nouvelle génération brillante de normaliens analystes, formés dans les années 1870-1880, entre dans le monde de la recherche académique. Le nombre de thèses d'analyses dépasse de loin celui des thèses de géométrie, et la proportion d'analystes dans la *Société Mathématique de France* quadruple tandis que celle des géomètres est divisée par trois. Ce sont essentiellement des normaliens qui portent ce mouvement, montrant ainsi que le projet de Pasteur de transformer l'ENS en creuset pour former une élite intellectuelle dévouée à la recherche a plutôt bien réussi.

Ainsi, en guise de mot de fin, nous avons vu comment l'analyse française a ressuscité dans le dernier tiers du XIXème siècle, pour des raisons essentiellement structurelles. La tentative de Darboux d'introduire en France les questions sur les fondements de l'analyse dès le début des années 1870 s'est soldée par un échec, mais ses travaux ont influencé d'autres analystes par la suite (Tannery, Jordan), qui ont pour leur part participé activement à la résurgence de l'analyse en France. Sans parler de filiation directe entre Darboux et la nouvelle école d'analyse française menée par Baire, Borel et Lebesgue, il est certainement possible de trouver un fil rouge entre ces deux époques, passant certainement par Tannery qui se revendique explicitement de Darboux. Pour conclure ce mémoire sur une remarque méthodologique, nous avons montré dans ce mini-mémoire qu'il était tout à fait pertinent – voire conseillé – de changer de focale pour dresser un portrait riche et varié de l'état de la recherche en analyse en France à la fin du XIXème.

Bibliographie

[Croizat 2016] B. Croizat, *Gaston Darboux : naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur*, thèse de doctorat, Université de Lille 1, Novembre 2016.

[Darboux 1872] G. Darboux, "Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions", *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, vol. 3, 1872, pp. 307-313.

[Darboux 1875] G. Darboux, "Mémoire sur les fonctions discontinues", *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, série 2, vol. 4, 1875, pp. 57-112.

[Darboux 1879] G. Darboux, "Addition au mémoire sur les fonctions discontinues", *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, série 2, vol. 8, 1879, pp. 195-202.

[Dini 1878] U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reale*, Pisa, 1878.

[Dugac 1973] P. Dugac, "Elements d'analyse de Karl Weierstrass", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 10, 1973, pp. 41-176.

[Gispert 1983] H. Gispert, "Sur les fondements de l'analyse en France (à partir de lettres inédites de G. Darboux et de l'étude des différentes éditions du « Cours d'analyse » de C. Jordan).", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 28, no. 1, 1983, pp. 37–106.

[Gispert 1989] H. Gispert, "L'enseignement scientifique supérieur et ses enseignants, 1860-1900 : les mathématiques.", *Histoire de l'éducation*, n° 41, 1989. pp. 47-78.

[Gispert 1990] H. Gispert, "Principes de l'analyse chez Darboux et Houël (1870-1880) : textes et contextes.", *Revue d'histoire des sciences*, vol. 43, n°2-3., 1990, pp. 181-220.

[Gispert 1991] H. Gispert, "Le milieu mathématique français et ses journaux en France et en Europe (1870- 1914)", dans : E. Aussejo & M. Hormigon (éds.), *Messengers of Mathematics : European mathematical journals 1800-1946*, Madrid, Siglo XXI de Espana Editores, 1993, pp. 133-156. Prépublication du 1991 "Mathematical Journalism", Saragosse, Septembre 1991.

[Gispert 1996] H. Gispert, "Une comparaison des journaux français et italiens dans les années 1860-1875", dans : Goldstein C., Gray, J., Ritter J. (éds.), *L'Europe mathématique/Mathematical Europe*, Paris, Editions de la Maison des Sciences de l'Homme, 1996, pp. 391-408.

[Gispert 2008] H. Gispert, "Traités et manuels : influences croisées des sphères sociales, scolaires et académiques dans les sciences", dans : Laurence Viennot (éd.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences. Penser l'enseignement.*, Paris, Presses Universitaires de France, 2008, pp. 257-279.

[Hankel 1870] H. Hankel, *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen*, Tübingen, L.F. Fues, 1870.

[Heine 1872] E. Heine, "Die Elemente der Funktionenlehre", *Journal für Mathematik*, vol. 74, 1872, pp. 172-188.

[Henry Nabonnand 2017] P. Henry et P. Nabonnand (éds.), *Conversation avec Jules Hoüel, regards sur la géométrie non euclidienne et l'analyse infinitésimale vers 1875*, Bâle, Birkhäuser, 2017.

[Imchenetsky 1868] V. G. Imchenetsky, "Etudes sur les méthodes d'intégrations des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes", *Mémoires de l'Université de Kazan*, Tome 3, 1868, pp. 111-256.

[Jordan 1893] C. Jordan, *Cours d'analyse : deuxième édition entièrement refondue, tome 1*, Paris, Gauthiers-Villars, 1893.

[Renaud 2017] H. Renaud, *La fabrication d'un enseignement de l'analyse en France au XIXe siècle : acteurs, institutions, programmes et manuels*, thèse de doctorat, Université de Nantes, Novembre 2017.

[Tannery 1886] J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris, Hermann, 1886.