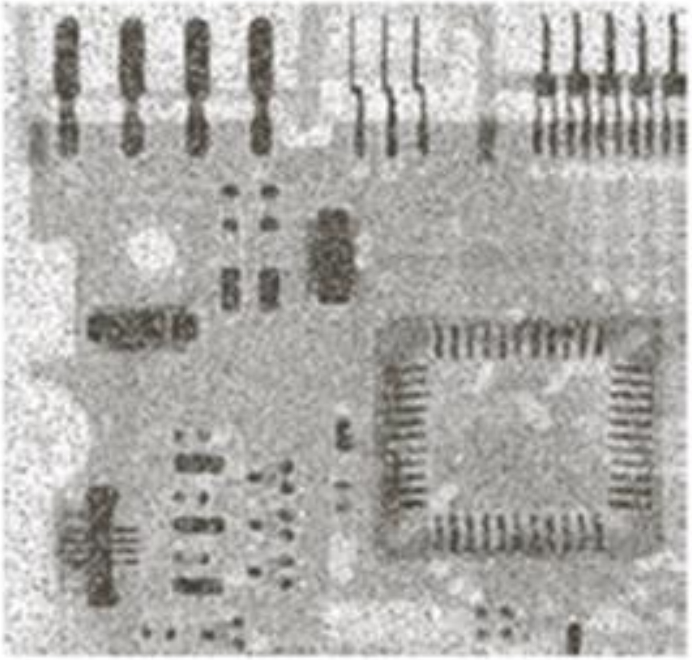
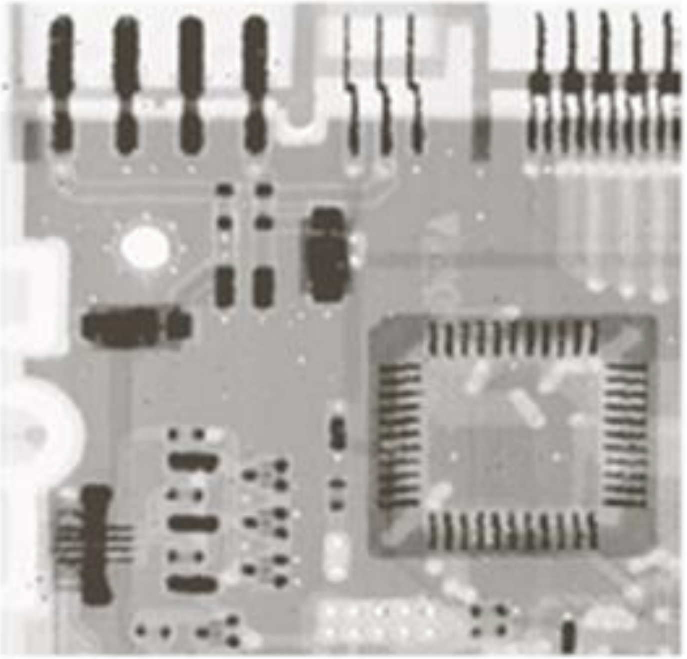
Filtragem espacial de imagem e convolução

Roteiro do curso

- Introdução
  - Objetos, definições, dispositivos de aquisição de imagens
  - Amostragem e Quantização
- Realce e restauração de imagens
  - Operadores ponto a ponto
  - Filtragem no domínio espacial
  - Filtragem no domínio da freqüência
- Segmentação
- Morfologia matemática
- Sistemas de cores para imagens
- Armazenagem, compressão e recuperação de imagens

Exemplo



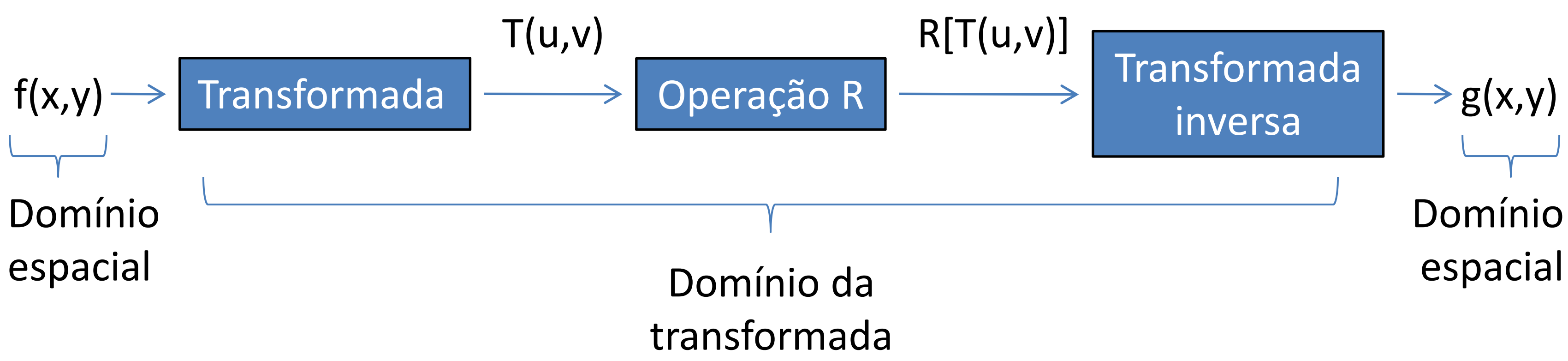


Roteiro da aula

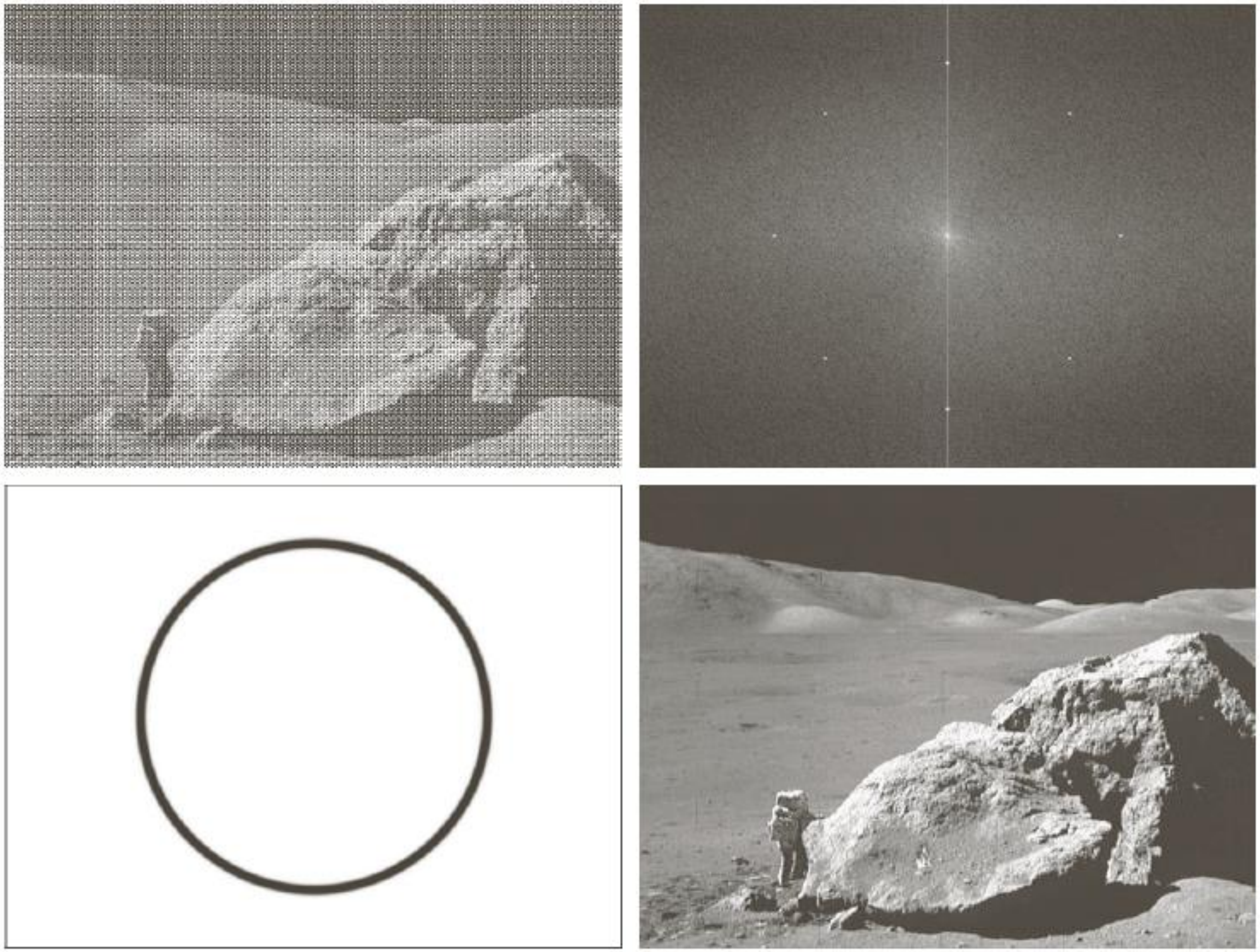
- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Domínio Espacial x Domínio da Transformada

- Refere-se ao plano da imagem
- Envolve a manipulação direta dos pixels da imagem



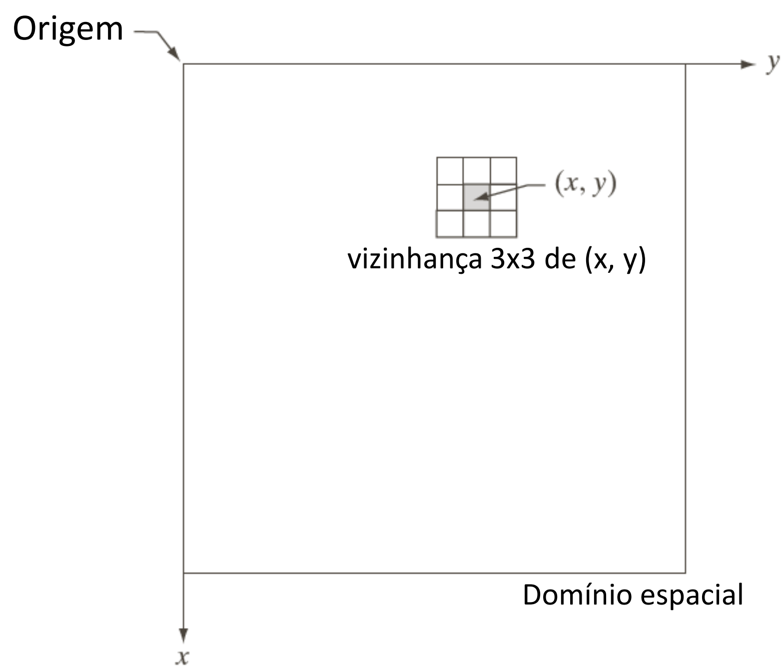
Domínio Espacial x Domínio da Transformada



Domínio da freqüência

Transformada de Fourier (próxima aula)

Domínio Espacial



f (x,y)

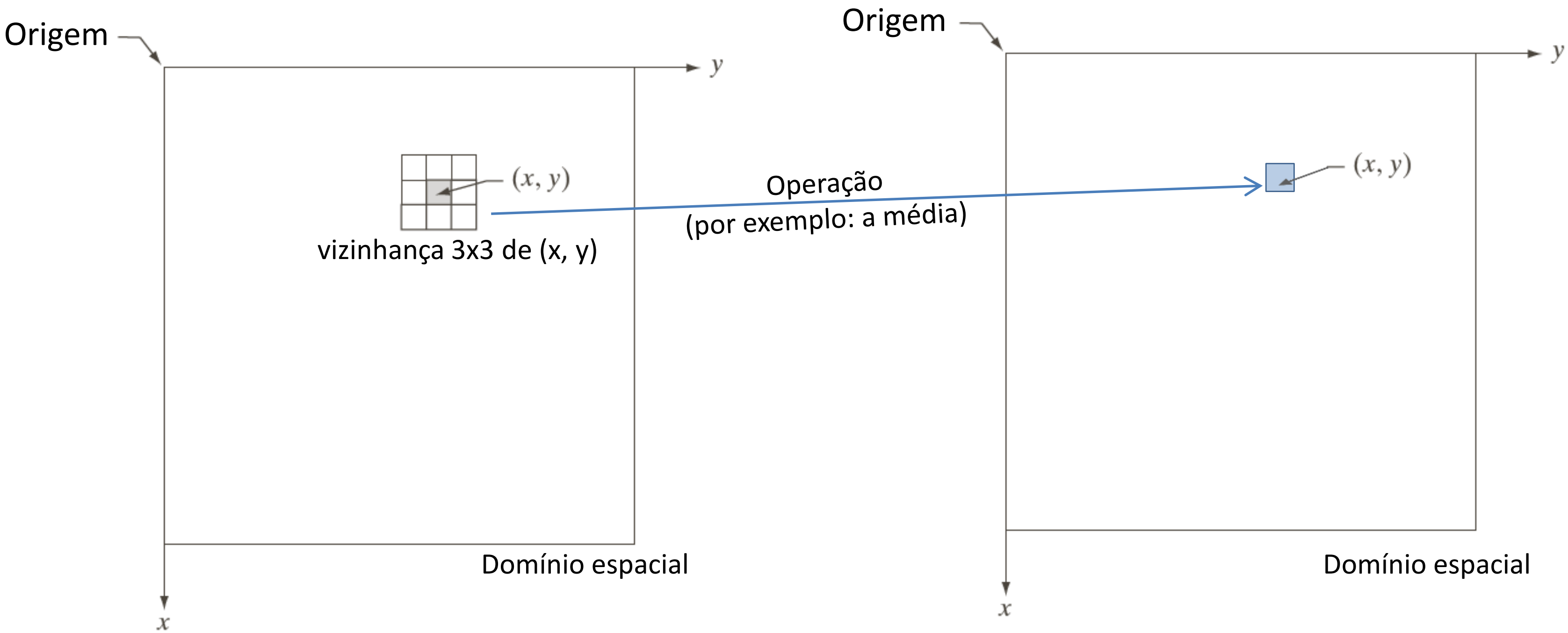
Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Filtragem Espacial

- Uma das principais ferramentas usadas em processamento de imagens, com diversas aplicações
  - Pré-processamento
  - Eliminação de ruídos
  - Suavização
  - Segmentação

Filtragem Espacial



f (x,y)

g (x,y)

$$g(x,y) = T[f(x,y)]$$

Filtragem Espacial

- Máscaras espaciais (*kernels, templates*, janelas)

3x3

$\frac{1}{9} \times$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

−1	0	1
−2	$\boxed{0}$	2
−1	0	1

- Valores das máscaras são chamados de coeficientes
- O processo de filtragem é similar a um operação matemática denominada **convolução**

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Correlação e Convolução

- Existem dois conceitos matemáticos importantes e que estão relacionados com a filtragem espacial linear: **correlação** e **convolução**
- Correlação
  - Desloca-se a máscara sobre a imagem e calcula-se a soma dos produtos em cada local
- Convolução
  - Mesmo processo que a correlação, exceto que a máscara é antes espelhada (rotacionada em 180º)

Exemplo 1D

Correlação

Origem f w

(a) 0 0 0 1 0 0 0 0   1 2 3 2 8

(b) 0 0 0 1 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Posição inicial de alinhamento

$= 1*0+2*0+3*0+2*0+8*0 = 0$

Complemento com zeros

(c) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8

(d) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Posição após um deslocamento

(e) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Posição após quatro deslocamentos

(f) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Posição final

Resultado completo da correlação

(g) 0 0 0 8 2 3 2 1 0 0 0 0

Resultado da correlação (tamanho original)

(h) 0 8 2 3 2 1 0 0

Convolução

Origem f w rotacionado 180°

0 0 0 1 0 0 0 0   8 2 3 2 1 (i)

0 0 0 1 0 0 0 0 (j)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (k)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (l)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (m)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (n)
8 2 3 2 1

Resultado completo da convolução

0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 0 (o)

Resultado da convolução (tamanho original)

0 1 2 3 2 8 0 0 (p)

0 0 0 1 8 0 0 0 f

~~2 3 2 8~~

~~1 2 3 2 8~~

1 2 3 2 8

1 2 3 2 8

conv 1 2 3 2 8

1 2 3 2 8

1 2 3 2 8 w

$8\cdot 5 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0$

$8\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$

g ~~0 0 8 2 3 2 1 0~~

0 8 2 3 2 1 0 0

f 5 8 0 1 8 0 0 0

8 2 3 2 1

8 2 3 2 1

conv 8 2 3 2 1

8 2 3 2 1

8 2 3 2 1

⋮

180° 8 2 3 2 1 g 0 1 2 3 2 8 0 0

Exemplo 2D

Origem $f(x, y)$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$w(x, y)$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(a)

f complementada com zeros

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b)

Posição inicial para w

1	2	3	0	0	0	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0	0	0
7	8	9	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(c)

Resultado completo da correlação

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	9	8	7	0	0	0
0	0	0	6	5	4	0	0	0
0	0	0	3	2	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(d)

Resultado da correlação (tamanho original)

0	0	0	0	0
0	9	8	7	0
0	6	5	4	0
0	3	2	1	0
0	0	0	0	0

(e)

w rotacionada

9	8	7	0	0	0	0	0	0
6	5	4	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(f)

Resultado completo da convolução

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	2	3	0	0	0
0	0	0	4	5	6	0	0	0
0	0	0	7	8	9	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

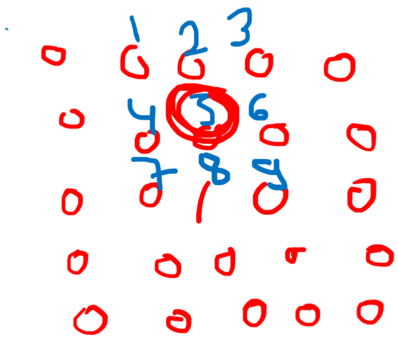
(g)

Resultado da convolução (tamanho original)

0	0	0	0	0
0	1	2	3	0
0	4	5	6	0
0	7	8	9	0
0	0	0	0	0

(h)

$$f = \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad w = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \qquad g = \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



$$1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 \ldots$$
$$+ 4\cdot 0 + 5\cdot 0 + 6\cdot 0$$
$$+ 7\cdot 0 + 8\cdot 0 + 9\cdot 0 = 0$$

$$1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0$$
$$+ 4\cdot 0 + 5\cdot 0 + 6\cdot 0$$
$$+ 7\cdot 0 + 8\cdot 0 + 9\cdot 1 = 9$$

$$\vdots$$

Correlação e Convolução

- Equações para máscaras de tamanho *m x n*
  - Correlação

$$g(x,y) = w(x,y) \circ f(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

  - Convolução

$$g(x,y) = w(x,y) * f(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x-s, y-t)$$

Espelhamento ou rotação, feito na imagem

$$a = (m-1)/2 \qquad b = (n-1)/2$$

Correlação e Convolução

- Observações
  - As equações devem ser avaliadas para todos os x e y
  - Se a máscara for simétrica, os resultados da convolução e da correlação são os mesmos
  - No geral, em aplicações de processamento de imagens, as máscaras são simétricas
  - “Convoluir uma máscara com uma imagem” corresponde as seguintes operações:

Desloca, Multiplica, Soma

Exercício

- Convoluir a função *f* com a máscara *w*, onde:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

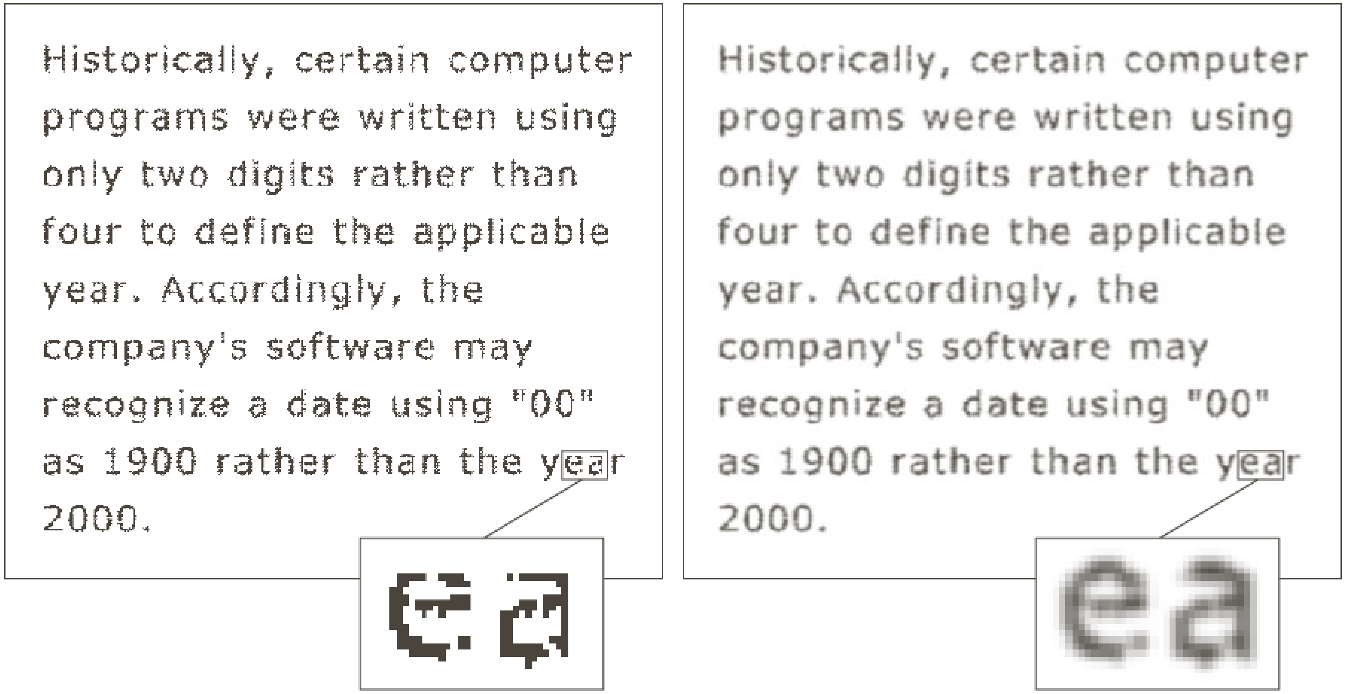
Filtros espaciais de suavização

- Filtros usados para o borramento e redução de ruídos
  - Borramento

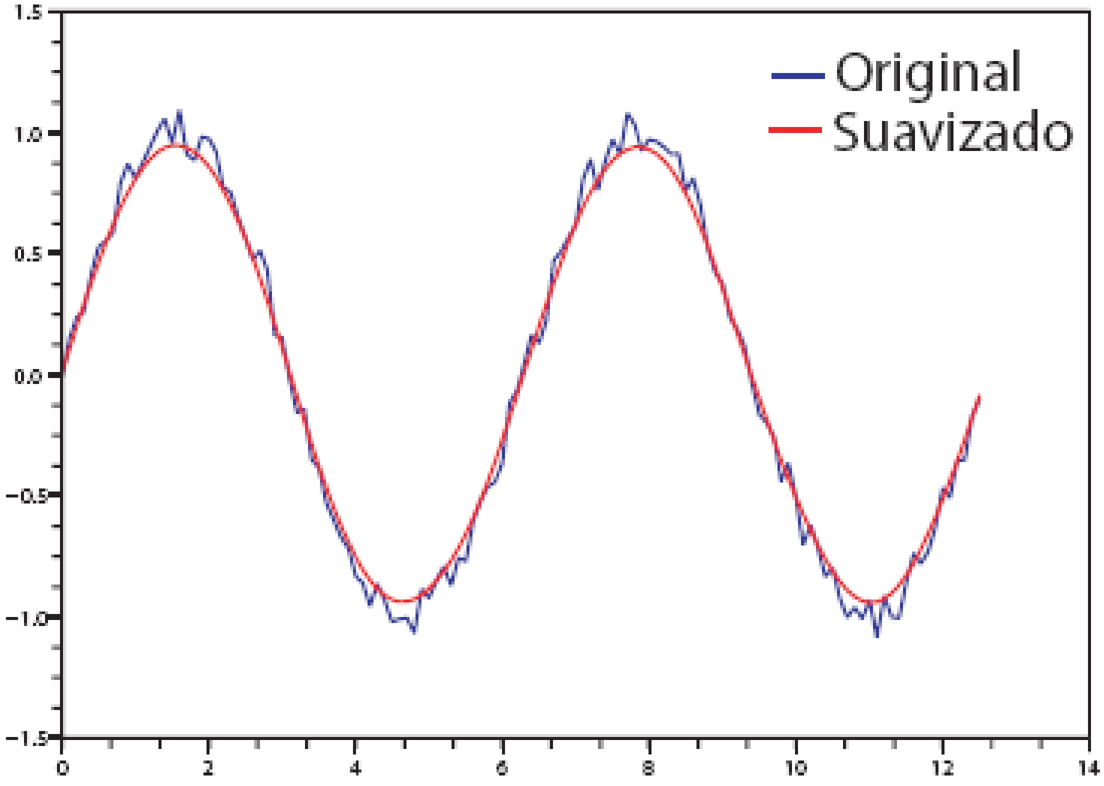
Filtros espaciais de suavização

- Redução de ruídos

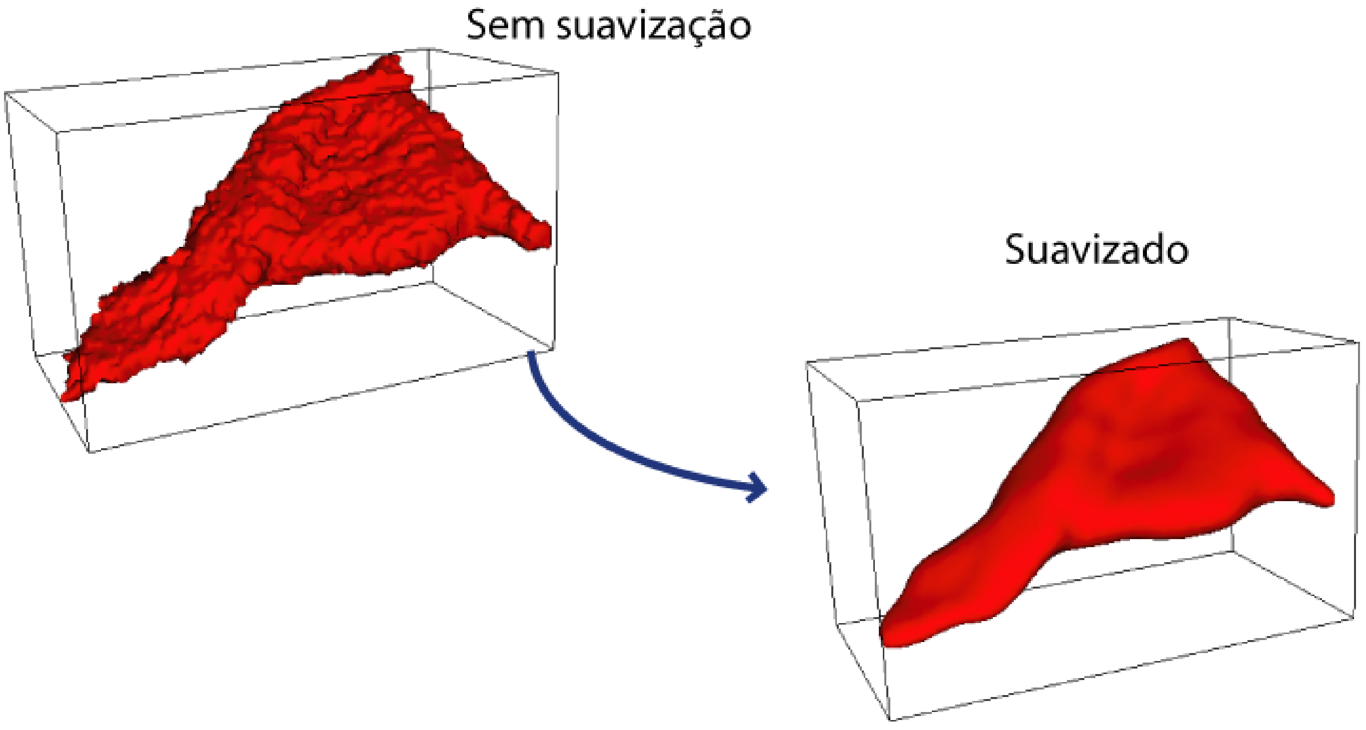
Exemplo: Suavização



Exemplo: Suavização



Exemplo: Suavização



Filtros espaciais de suavização

- Filtros
  - Filtro de média
  - Filtro Gaussiano
  - Filtro de mediana

Filtros espaciais de suavização

- Filtros de média
  - Máscaras de convolução
  - Exemplos:

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \frac{1}{16} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Exemplo: Suavização

Original

Suavizada
(filtro de média 5x5)

Limiar

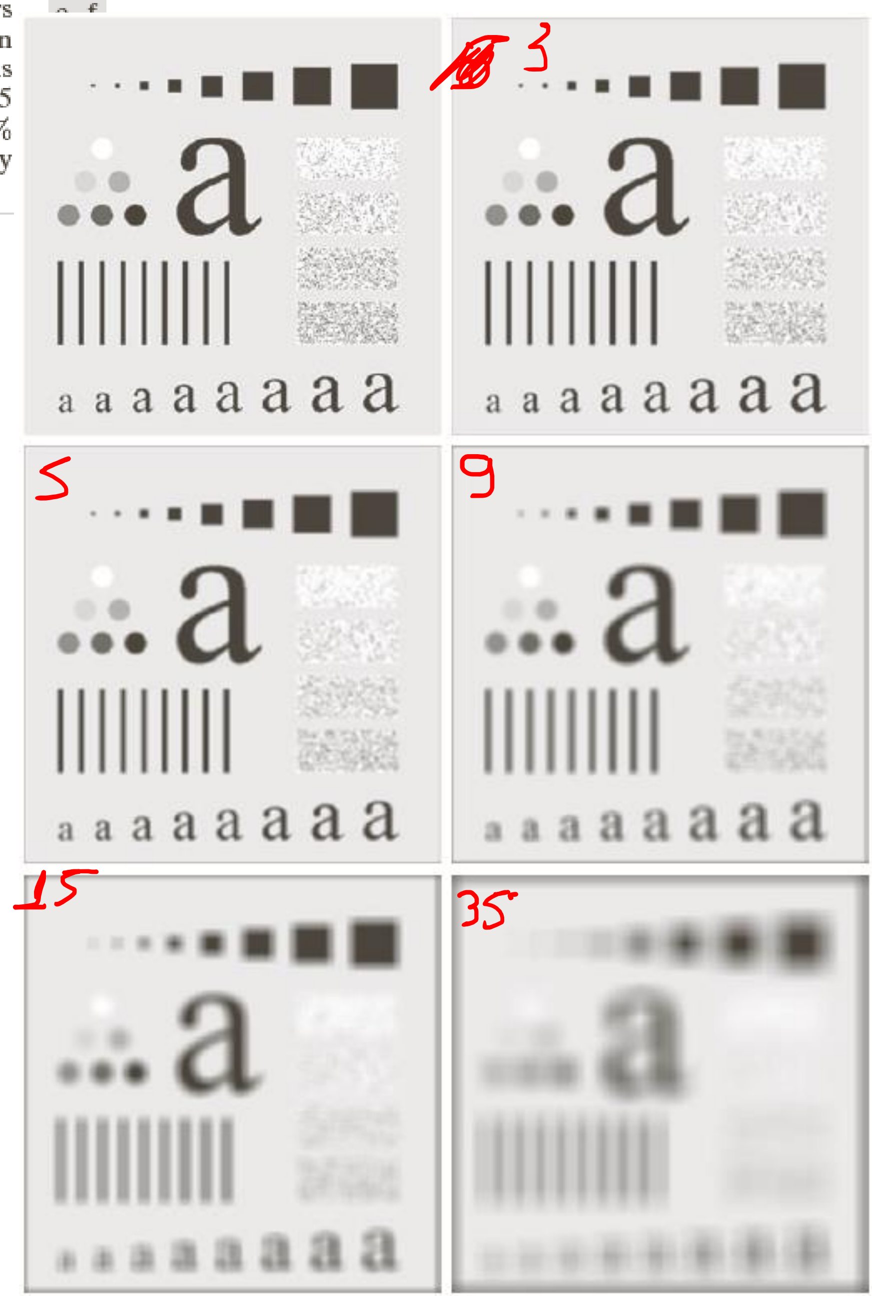
Filtros espaciais de suavização

- Filtros de média
  - Nota-se que neste caso não é o melhor filtro

Máscara usada: 5x5

FIGURE 3.33 (a) Original image, of size 500×500 pixels. (b)–(f) Results of smoothing with square averaging filter masks of sizes $m = 3, 5, 9, 15$, and 35, respectively. The black squares at the top are of sizes 3, 5, 9, 15, 25, 35, 45, and 55 pixels, respectively; their borders are 25 pixels apart. The letters at the bottom range in size from 10 to 24 points, in increments of 2 points; the large letter at the top is 60 points. The vertical bars are 5 pixels wide and 100 pixels high; their separation is 20 pixels. The diameter of the circles is 25 pixels, and their borders are 15 pixels apart; their intensity levels range from 0% to 100% black in increments of 20%. The background of the image is 10% black. The noisy rectangles are of size 50×120 pixels.

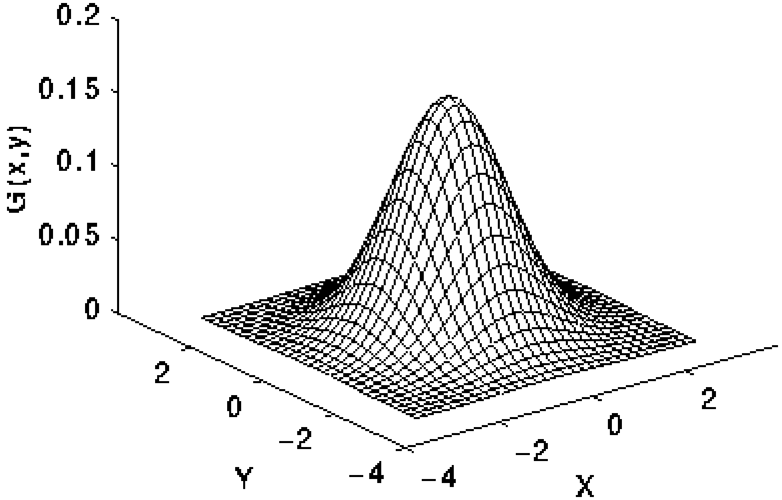
a b
c d
e f



Filtros espaciais de suavização

- Filtro Gaussiano
  - Função gaussiana

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



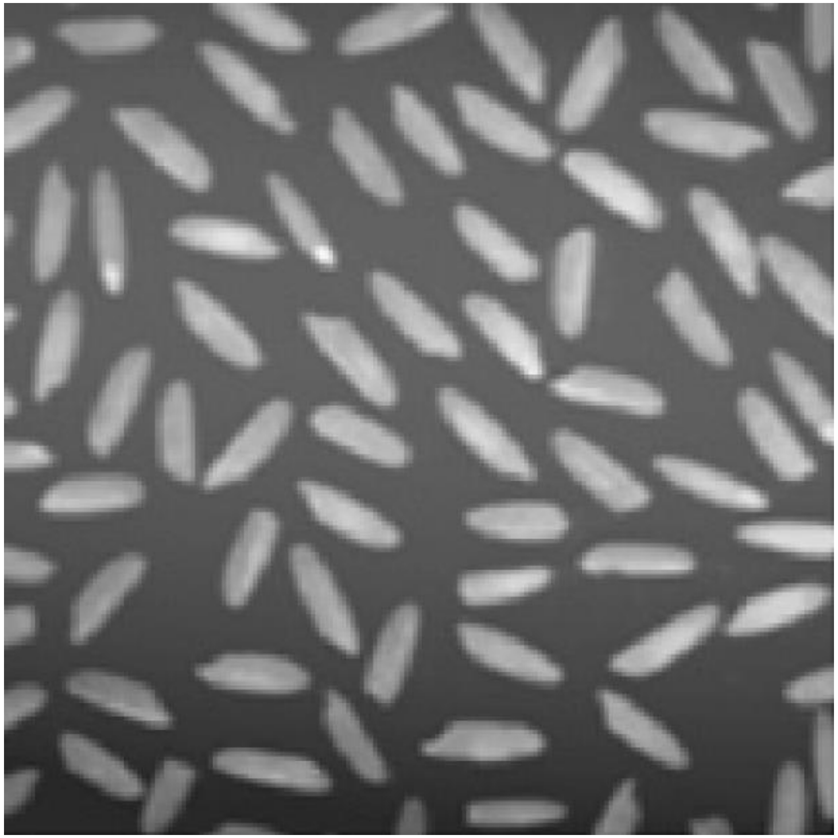
Máscara (sigma = 1)

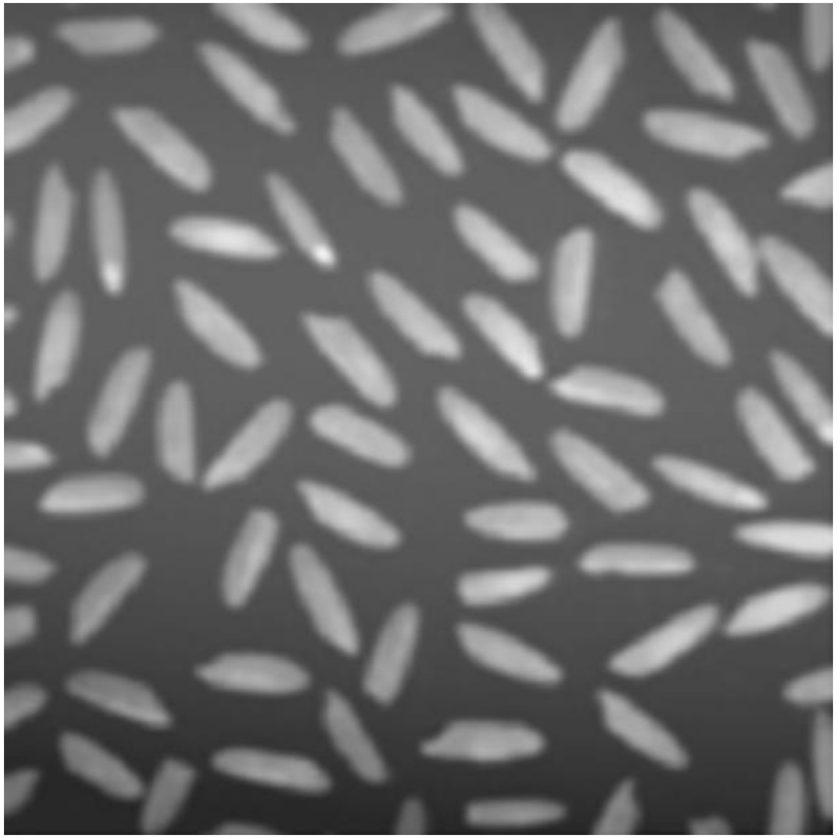
$\frac{1}{273}$

1	4	7	4	1
4	16	26	16	4
7	26	41	26	7
4	16	26	16	4
1	4	7	4	1

http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/gsmooth.htm

Exemplo





rice.png - Matlab

Gerando a máscara Gaussiana

```
% Função gaussiana 2D com média
% zero e desvio sigma
function g = GaussXY(x,y,sigma)

  fator = (1/sqrt(2*pi*(sigma^2)));

  g = fator*exp( -(x.^2 + y.^2) ...
              /(2*(sigma.^2)));

end
```

```
% Máscara 5x5
result = zeros(5,5);
a = 2; b = 2;

sigma = 1;

for x=-a:a
  for y=-b:b
    result(x+a+1,y+b+1) ...
      = GaussXY(x,y,sigma);
  end
end

%normalizando o resultado
result = result./sum(result(:));
```

result ~=

$10^{-3} *$

23	34	38	34	23
34	49	56	49	34
38	56	63	56	38
34	49	56	49	34
23	34	38	34	23

Filtros espaciais de suavização

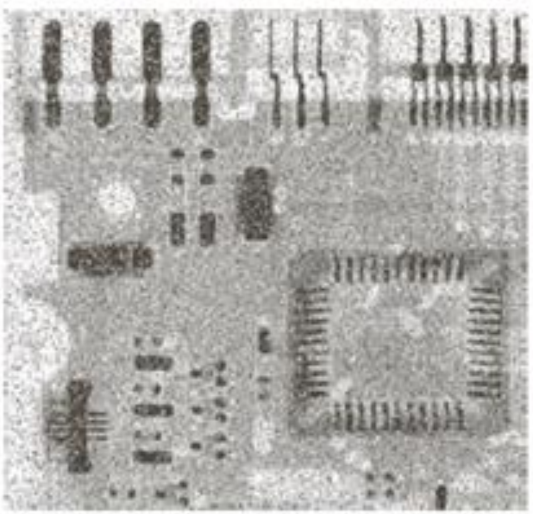
- Filtros de mediana
  - Filtro não linear (não é feita a convolução)
  - A intensidade de cada pixel é substituída pela mediana das intensidades na vizinhança daquele pixel.
    - Ex: o ponto de valor 51 é um ruído:

1	2	2	3	0
0	51	3	1	2
0	3	2	0	1
2	1	0	3	1
3	0	1	2	3

0 - 0 - 1 - 2 - 2 - 2 - 3 - 3 - 51

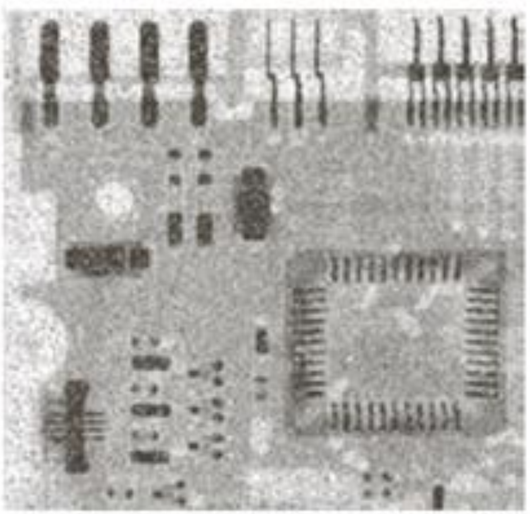
Filtros espaciais de suavização

- Filtros de mediana

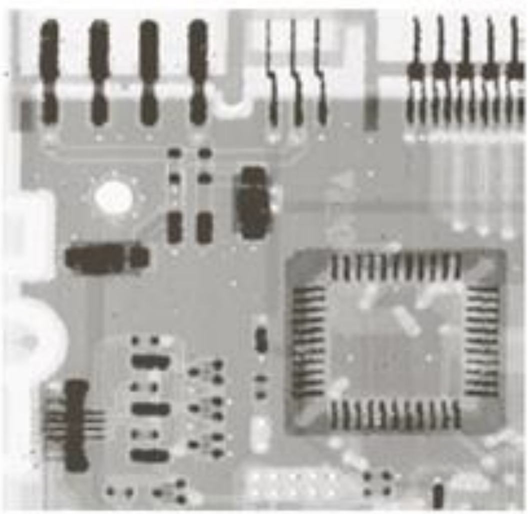


Original

com ruído



Filtro de média 3x3



Filtro de mediana 3x3

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Filtros espaciais de realce

- O realce (*sharpening*) tem como objetivo destacar as transições de intensidade na imagem

Filtros espaciais de realce

- Analogias
  - Filtro de média (suavização)⇔ Integração
  - Realce ⇔ Derivação
- Derivadas são proporcionais ao grau de descontinuidade na imagem
  - Enfatizam as regiões de bordas e os ruídos
  - Não enfatiza regiões constantes ou com variações de intensidade suaves

Derivadas

- As derivadas de uma função digital são definidas em termos de diferenças

Filtros espaciais de realce

- Filtros
  - Laplaciano
  - *Unsharp masking* e *highboost filtering*
  - Derivativos

Filtros espaciais de realce

- Filtro Laplaciano
  - Utiliza derivadas de segunda ordem

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

$$\nabla^2 f = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

0	−1	0
−1	4	−1
0	−1	0

−1	−1	−1
−1	8	−1
−1	−1	−1

Filtros espaciais de realce

- Filtro Laplaciano
  - Realce é feito somando-se o Laplaciano à imagem

$$g(x,y) = f(x,y) + c[\nabla^2 f(x,y)]$$

Filtros espaciais de realce

- *Unsharp masking e* filtragem *highboost*
  - Seja $\bar{f}(x,y)$ uma suavização de $f(x,y)$

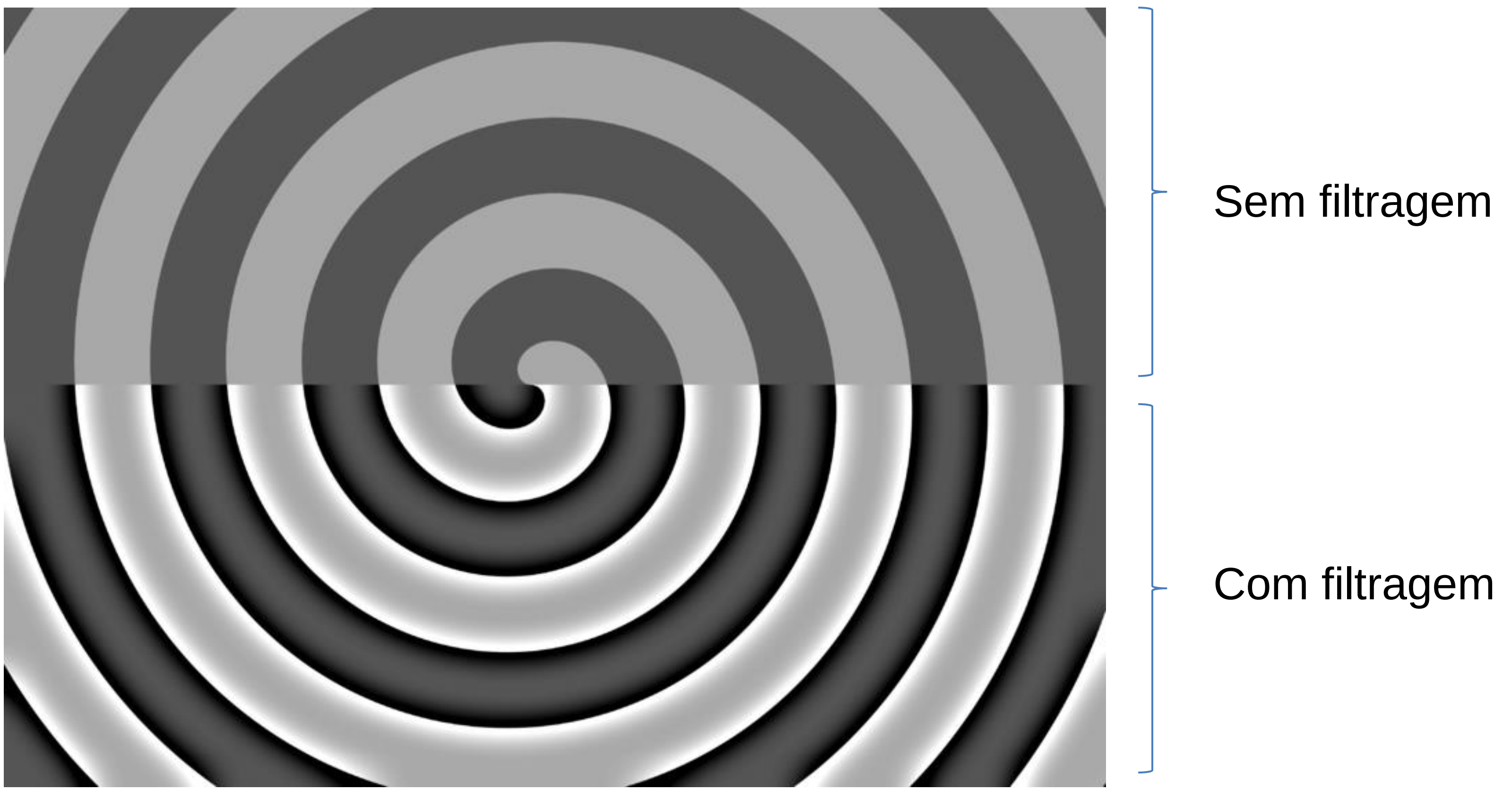
$$g_{mask}(x,y) = f(x,y) - \bar{f}(x,y)$$

$$g(x,y) = f(x,y) + k.g_{mask}(x,y)$$

- *k = 1* → *unsharp masking*
- *K > 1* → *highboost filtering*

Filtros espaciais de realce

- *Unsharp masking*



Fonte: wikipedia

Filtros espaciais de realce

- Filtragem *highboost*

Original

Suavizada (Gaussiana)

Unsharp mask (g_{mask})

Resultado usando *unsharp mask*

Resultado usando filtragem *highboost*

Filtros espaciais de realce

- Filtros derivativos
  - Derivadas de primeira ordem
  - Utilizam a magnitude do gradiente
    - Vetor que indica a direção de maior variação de uma função

$$\nabla f \equiv grad(f) = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

    - Magnitude

$$M(x,y) = mag(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \approx |g_x| + |g_y|$$

Filtros espaciais de realce

- Cálculo da derivada para funções discretas
  - Máscaras
    - Operador gradiente cruzado de Roberts
    - Operador de Prewitt
    - Operador de Sobel

Filtros espaciais de realce

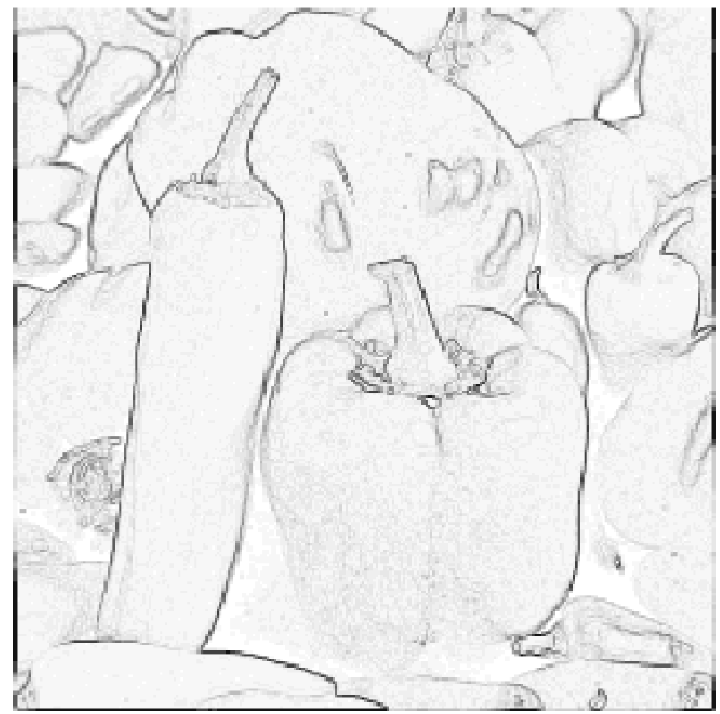
- Operador gradiente-cruzado de Roberts

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\nabla f(x,y)\right| \approx \sqrt{(f * h_1)^2 + (f * h_2)^2}$$

Filtros espaciais de realce

- Operador gradiente-cruzado de Roberts



Filtros espaciais de realce

- Operador de Prewitt

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad h_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\nabla f(x,y)\right| \approx \sqrt{(f * h_1)^2 + (f * h_2)^2}$$

Filtros espaciais de realce

- Operador de Prewitt

Filtros espaciais de realce

- Operador de Sobel

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad h_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\nabla f(x, y)\right| \approx \sqrt{(f * h_1)^2 + (f * h_2)^2}$$

Filtros espaciais de realce

- Operador de Sobel

Filtros espaciais de realce

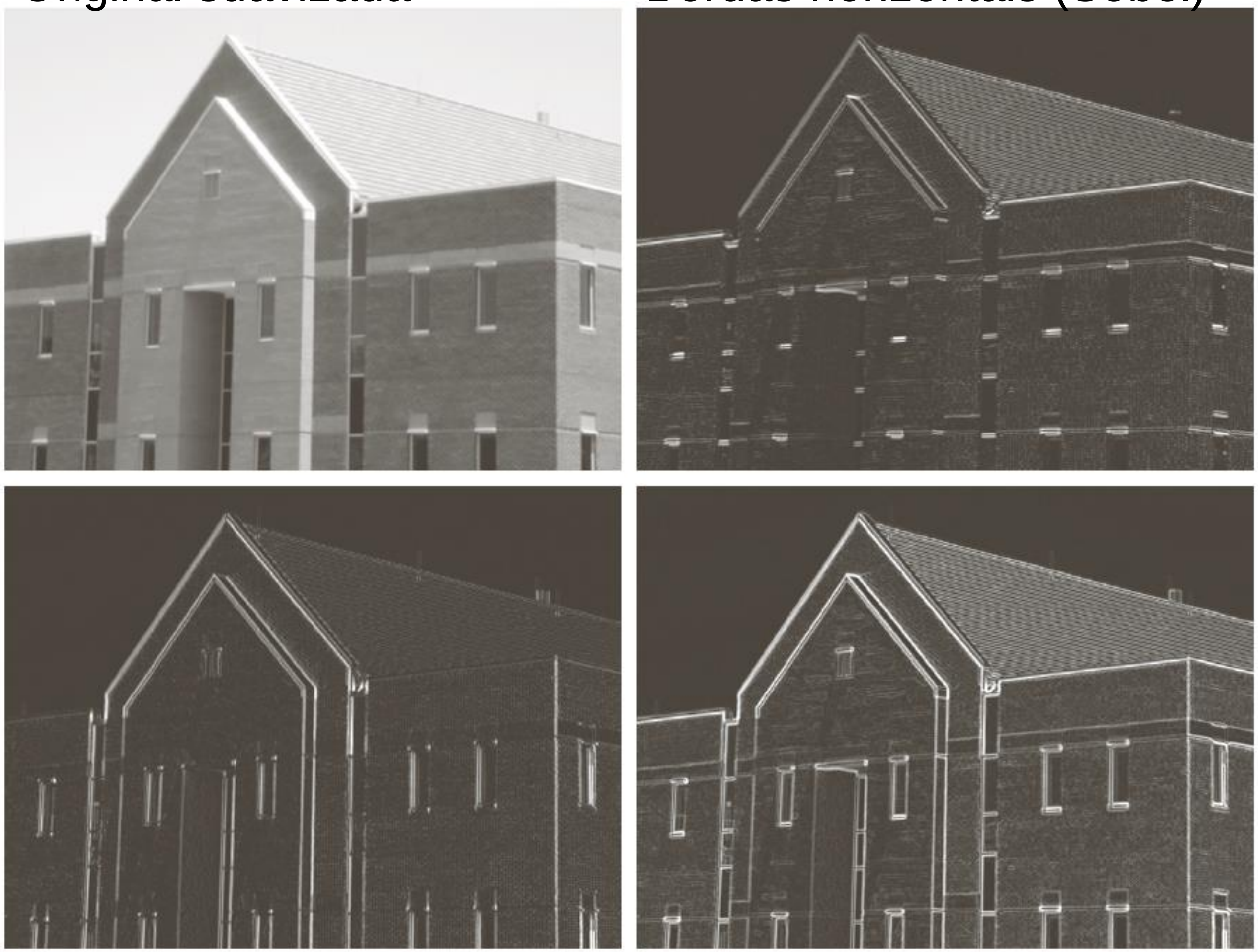
Original | Bordas horizontais (Sobel)

Bordas verticais (Sobel) | Imagem gradiente

Filtros espaciais de realce

Original suavizada

Bordas horizontais (Sobel)



Bordas verticais (Sobel)

Imagem gradiente

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Agora é a hora da prática!

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Próxima aula:
Filtragem no domínio da freqüência

Transformada de Fourier