

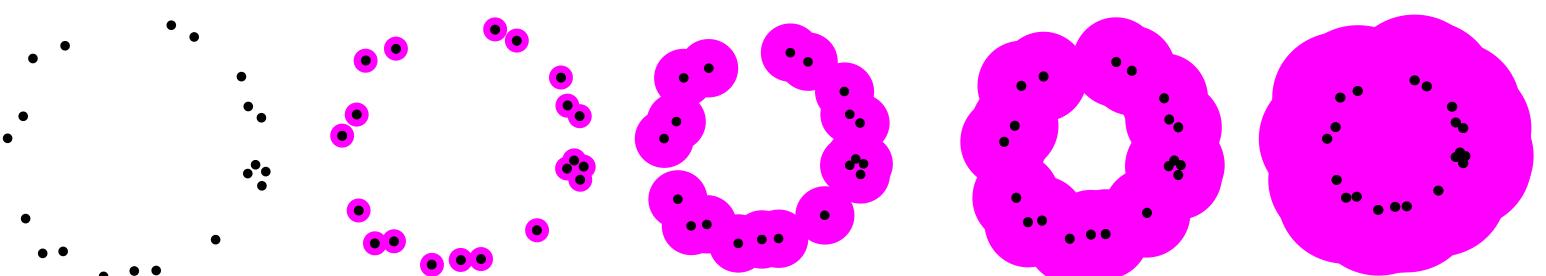
UNIVERSITÉ PARIS-SUD

DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

Mémoire de magistère

Raphaël TINARRAGE

Années 2013-2017



Ce document est une compilation des travaux que j'ai réalisé durant mes années d'études au magistère de mathématiques d'Orsay, de 2013 à 2017.

La première partie est une description chronologique de mon cursus. La deuxième partie est une présentation succincte du domaine de recherche dans lequel s'inscrit ma thèse : l'analyse topologique des données. Les parties suivantes sont des rapports de stage ou de travaux encadrés.

Mon projet de L3 est une introduction à la géométrie différentielle. Basée sur l'ouvrage de Milnor, nous présentons la théorie jusqu'à la notion de degré orienté, afin de retranscrire une preuve du théorème de la boule chevelue.

Mon stage de L3 portait sur l'analyse de données dans le contexte de la neurophysiologie. Nous étudions le comportement de familles de neurones cultivées *in vitro*, ainsi que leurs variations d'activité lorsqu'elles sont soumises à des solutions médicamenteuses.

Dans mon TER de M1, nous étudions un problème de géométrie plate. Il s'agit de quantifier les directions initiales de connexions de singularité sur le tore plat, lorsque ces connexions sont triées par leur longueur. Nous montrons leur équidistribution sur le cercle.

Mon projet de M2 a pour sujet une question de théorie de l'évolution - le problème de la sénescence -, formulée par Medawar en 1951. Pour l'étudier, nous proposons deux modèles de populations sénescentes : un stochastique et un déterministe. Par nos simulations, nous observons une corrélation négative entre la vitesse de décalage de la sénescence chez une population et son taux de mortalité extrinsèque.

Enfin, mon rapport de stage de M2 présente les fondements de la théorie de l'analyse topologique des données. Nous expliquons aussi comment réparer la théorie lorsque les observations sont bruitées.

Les pages de ce document sont doublement numérotées : en haut à droite pour suivre la progression globale de la compilation, et centrée en bas pour la numérotation individuelle des différentes parties.

Table des matières

1	Ma scolarité au magistère	3
2	Présentation d'un domaine de recherche : l'analyse topologique des données	6
3	Projet de L3 : Géométrie différentielle	18
4	Rapport de stage de L3 : Électrophysiologie	27
5	TER de M1 : Géométrie plate	66
6	Projet de M2 : Modélisation de la sénescence	89
7	Rapport de stage de M2 : Analyse topologique des données	125

Chapitre 1

Ma scolarité au magistère

Tout commença sûrement pendant l'été 2009, en marchant le long de l'Yvette, Jacques Brel dans les oreilles, pour me rendre à mon stage d'été de seconde. J'avais été accueilli pendant un mois au CSNSM (laboratoire d'étude de la désintégration des noyaux exotiques). Je me disais alors qu'une carrière de scientifique dans un laboratoire me plairait fortement. Quelques temps plus tard, je découvris que des mathématiciens se cachaient aussi dans le coin. S'en suivit un échange de courriels avisés avec Frédéric Paulin, et me voilà en prépa pour deux ans (au lycée Camille Pissarro à Pontoise) afin de préparer mon entrée au magistère. A cette époque je m'amusais à lire les ouvrages les plus enfouis dans la bibliothèque – je me persuadais notamment de comprendre quelque chose de la classification des groupes simples finis en apprenant la liste par cœur – espérant un jour voir ces notions exotiques m'être expliquées sur un tableau. Et puis...

1 Première année : L3 MFA

Je choisis au premier semestre l'option combinatoire algébrique dispensée par Olivier Fouquet. Après une excursion autour du principe de récurrence, nous avons appris comment s'en débarrasser grâce aux preuves bijectives. Je me rappelle m'être fait envouter par la preuve :

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b)(a+b)\dots(a+b) \\ &= \text{une somme de produits de la forme } a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \end{aligned}$$

qui m'a fait me questionner sur la notion de démonstration. Nous avons ensuite traité de graphes, et notamment comment faire intervenir des spectres de matrices dans leur étude : ce fut surprenant.

Avec Olivier Stietel, nous avons travaillé sur le théorème de la boule chevelue, dans le cadre de notre TER. Nous étions encadrés par Anne Vaugon. Nous avons étudié les premiers chapitres de Differential Topology de John Milnor, avec heureusement le soutien de notre encadrante.

Le cours de magistère portait sur des éléments de topologie générale - et il était très général. Il m'a été profitable d'étudier ces notions avec autant de recul.

En guise d'apprentissage hors mur, j'ai été accueilli en stage au Collège de France par Jérémie Sibille, chercheur en neurosciences. Il m'a présenté son milieu avec une attention admirable. J'ai eu l'occasion de développer un code (en Matlab) pour commencer un traitement systématique des données expérimentales qu'il accumulait, à savoir des signaux électrophysiologiques de cultures de neurones soumises à des solutions médicamenteuses. Notre collaboration s'est révélée fructueuse, et nous sommes depuis toujours investis dans ce projet. Ce stage m'a permis de me réconcilier avec un milieu duquel je m'étais éloigné : celui des sciences expérimentales.

2 Deuxième année : M1 MFA

Dans la suite de la licence, j'ai intégré le M1 mathématiques fondamentales et appliquées.

Au premier semestre, j'ai suivi le cours d'algèbre de Benoit Bost, avec notamment une introduction à la théorie des corps et la théorie de Galois. J'ai beaucoup apprécié manipuler ces notions lors du MAO calcul formel sur Sage. J'ai aussi suivi le cours de distribution de Thierry Ramon, et d'analyse réelle de Laurent Moonens,

Au second semestre, j'ai suivi le cours de statistiques d'Elisabeth Gassiat, qui m'a rapidement captivé. Il m'a fait envisager les probabilités et leurs outils sous un nouvel angle, avec lesquelles je me sens plus proche depuis. Le cours de géométrie d'Antoine Chambert-Loir fut difficile, mais me permit d'entrevoir ce qu'était la topologie algébrique. Enfin, le cours de logique de Frank Benoist, à propos de logique du premier ordre et de théorie des ensembles, m'a beaucoup apporté. Il m'a permis de comprendre et d'ouvrir de nombreuses questions à propos des fondements logiques des mathématiques.

En parallèle, dans le cadre de notre TER, nous avons avec Olivier Stietel étudié des questions de géométrie plate, sous la direction de Frédéric Paulin. Il s'agissait d'étudier le comportement des angles initiaux de connexions de singularités sur les surfaces plates. Nous avons restreint notre étude aux surfaces de genre 1. Ce travail a été une véritable expérience de recherche, tant par l'apprentissage de nouvelles notions que par l'exercice de mettre debout une démonstration ; d'ailleurs la demande de rigueur et clarté de notre encadrant a été très bénéfique pour ma rédaction mathématique. Mon intérêt pour la géométrie différentielle a aussi été attisé par ce sujet.

3 Année de césure : M2 FESUP

En 2015 je rentrais à l'ENS de Cachan, par la passerelle du second concours proposée aux étudiants de M1. J'y ai suivi (l'excellente) formation à l'agrégation. J'ai vécu cette année comme un retour fructueux sur les théories apprises en L3 et M1, me laissant aussi le temps de mûrir ma relation avec certaines notions. Je pense notamment au comportement singulier des fonctions holomorphes, à la représentation des groupes finis, et la géométrie des sous-groupes matriciels

4 Troisième année : M2 MSV

Toujours animé par mon stage de L3, et diverses questionnements de nature biologique, j'ai intégré le M2 recherche mathématiques pour les sciences du vivant, dirigé par Christophe Giraud.

Avant d'entrer dans le vif de l'année, nous avons suivi un stage de remise à niveau en biologie, a propos de physiologie, génétique et écologie.

Au premier semestre, j'ai pu y approfondir certains sujets qui m'étaient chers (processus stochastiques), découvrir avec enthousiasme certains (optimisation, statistiques en grande dimension), et renouer d'amitié avec d'autres plus hostiles (équations différentielles partielles).

Dans le cadre du projet de M2, nous avons traité avec François Lavallée le problème de la sénescence (vieillissement) chez les être vivants, et comment il rentre en conflit avec les théories de l'évolution. Notre étude a consisté déjà à se renseigner sur les choses actuelles de la génétique, écologie, gérontologie, et zoologie. Puis nous avons proposé deux modèles – un déterministe et un stochastique – pour simuler l'évolution en temps long d'une population avec un trait génétique sénescent. Cette expérience fut riche, notamment de par la démarche scientifique que nous avons du adopter.

Au second semestre, et en tant que cours supplémentaire de magistère, j'ai suivi l'UE estimation bayésienne non-paramétrique de Vincent Rivoirard, un sujet qui m'interpellait depuis longtemps. Cela fut une introduction très intéressante à ce monde moins connu des statistiques.

J'ai aussi découvert au second semestre de nouveaux aspects de la géométrie, grâce au cours d'espaces de formes d'Alain Trouvé, et d'analyse topologique des données de Frédéric Chazal. Ce dernier sujet, mêlant topologie algébrique et analyse concrète des données, m'a profondément plu, et est aujourd'hui le sujet de ma thèse.

Chapitre 2

Présentation d'un domaine de recherche : l'analyse topologique des données

PRÉSENTATION D'UN DOMAINE DE RECHERCHE

Analyse topologique des données

Raphaël TINARRAGE
M2 MSV, Orsay

DATASHAPE
INRIA Paris-Saclay

18 octobre 2017

Table des matières

1 Exemple introductif	1
2 Algèbre persistante	2
3 En présence de bruit	7
4 Perspectives	9
Références	10

1 Exemple introductif

Dans le domaine de l'analyse de données, nous avons souvent affaire à des ensembles de données discrètes, que l'on peut interpréter comme des nuages de points dans des espaces euclidiens de grande dimension. Pour les traiter, l'analyse topologique des données repose sur le principe qu'il existe des informations de nature topologique et géométrique à extraire de ces nuages. Par les contraintes mises en jeu, nous pouvons présumer que ces données se concentrent sur des sous-espaces de petite dimension. Ainsi, si le nuage est suffisamment dense, il est envisageable de les estimer.

Parmi les outils mathématiques à disposition pour l'étude des espaces topologiques, l'homologie se révèle ici être d'une pertinence particulière : elle donne des informations sur ces espaces, et prend des formes implémentables du point de vue algorithmique.

Le problème de l'échelle. Soit X un nuage de point, qui peut être un sous-ensemble d'un espace euclidien, un sous-ensemble d'une variété, ou un espace métrique discret. En tant qu'espace topologique, X n'apporte pas plus d'information que le nombre de points qui le compose. Pour étudier l'espace continu sur lequel X repose, il faut interpoler entre ces points.

Considérons par exemple que X soit un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 tiré proche du cercle \mathbb{S}^1 . On aimerait reconnaître le cercle à partir de X . Posons alors sur chacun des points de X une boule de rayon t . L'espace obtenu est $X^t := \bigcup_{x \in X} B(x, t)$, le voisinage tubulaire de X . Si le rayon est bien choisi, on voit que \mathbb{S}^1 est un rétract par déformation de X^t . Autrement dit, X^t est du même type d'homotopie que le cercle sous-jacent.



Pour chaque valeur de t , nous pouvons considérer l'homologie singulière de X^t . Les groupes d'homologie singulière à coefficients dans un corps k , notés $H_*(X^t)$, donnent des informations sur la topologie de cet ensemble. En pratique, le problème se pose lorsque nous ne savons pas choisir a priori le paramètre t . Dans notre exemple, s'il est trop petit, le voisinage tubulaire est composé de plusieurs parties connexes ; s'il est trop grand, il est homéomorphe à un disque. L'idée de la persistance est de calculer l'homologie de ces voisinages tubulaires X^t pour toutes les valeurs de $t \in \mathbb{R}^+$, et de suivre au fur et à mesure leur évolution :

t	0	0, 1	0, 3	0, 5	...	0, 8	1
X^t					...		
$H_0(X^t)$	k^{20}	k^{14}	k^2	k	...	k	k
$H_1(X^t)$	0	0	0	k	...	k	0

Nous avons ici affaire à une suite croissante de sous-espaces topologiques $\{X^t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, avec des inclusions :

$$\dots \subset X^r \subset X^s \subset X^t \subset \dots$$

En appliquant l'homologie singulière, on obtient par naturelité une suite d'espaces vectoriels :

$$\dots \rightarrow H_*(X^r) \rightarrow H_*(X^s) \rightarrow H_*(X^t) \rightarrow \dots,$$

où la commutativité du diagramme au niveau des inclusions se traduit en une commutativité au niveau homologique :

$$X^r \xhookrightarrow{\quad} X^s \xhookrightarrow{\quad} X^t \quad \text{donne} \quad H_*(X^r) \longrightarrow H_*(X^s) \longrightarrow H_*(X^t)$$

La structure algébrique que nous venons de construire s'appelle un module de persistance. Dans cette structure, nous sommes capables de suivre l'évolution des cycles de X^t , leur naissance et leur mort.

La quantité suivante apparaît déjà en 1992 dans les travaux de Frosini [1] :

$$r_s^t := \text{rang}(H_n(X^s) \rightarrow H_n(X^t)).$$

Elle s'interprète comme le nombre de n -cycles non-triviaux de X^s qui ont survécu jusqu'à dans X^t .

2 Algèbre persistante

Module de persistance. Les considérations précédentes se formulent en toute généralité dans la structure algébrique de module de persistance. La première définition apparaît dans l'article [2] de Zomorodian et Carlsson, publié en 2005. On considère pour le moment que les indices sont dans $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{R} .

Définition 2.0.1. Un module de persistance (indexé par T) est la donnée d'une famille de k -espaces vectoriels $\mathbb{V} = (V_t)_{t \in T}$ et d'applications linéaires $(v_s^t : V_s \rightarrow V_t)_{s \leq t \in T}$ tels que

- $\forall t \in T, v_t^t$ est la fonction identité sur V_t , et
- $\forall s \leq t \leq u \in T, v_t^u \circ v_s^t = v_s^u$.

La dernière condition se traduit par le diagramme commutatif suivant, pour tout $\forall s, t, u \in T$ tels que $s \leq t \leq u$:

$$\begin{array}{ccc} V_r & \xrightarrow{v_r^t} & V_t \\ & \searrow v_r^s & \nearrow v_s^t \\ & V_s & \end{array}$$

Si $T = \mathbb{N}$, les applications v_s^t sont entièrement déterminées par les $v_n^{n+1}, n \in T$.

Les modules de persistance forment une catégorie abélienne. On y définit les sommes de modules de persistance, et les morphismes.

Définition 2.0.2. La somme de deux modules de persistance est le module de persistance obtenu en sommant terme à terme les espaces vectoriels (somme directe) et en concaténant les applications linéaires.

Définition 2.0.3. Pour $\epsilon \geq 0$, un ϵ -morphisme entre des modules de persistance \mathbb{U} et \mathbb{V} est une suite d'applications linéaires $\Phi = (\phi_t : U_t \rightarrow V_{t+\epsilon})_{t \in T}$ telle que le diagramme suivant commute en tout $s, t \in T$ tels que $s \leq t$:

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{u_s^t} & U_t \\ \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_t \\ V_{s+\epsilon} & \xrightarrow{v_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & V_{t+\epsilon} \end{array}$$

Quand $\epsilon = 0$ et Φ est une famille d'isomorphismes, on dit que les modules sont isomorphes. En pratique, cette notion est trop rigide, et on a recours à la définition suivante :

Définition 2.0.4. Soient \mathbb{U} et \mathbb{V} deux modules de persistance, et $1_{2\epsilon}^{\mathbb{U}}, 1_{2\epsilon}^{\mathbb{V}}$ les 2ϵ -endomorphismes de modules de persistance donnés par la structure de module de persistance : $(1_{2\epsilon}^{\mathbb{U}})_t = u_t^{t+\epsilon}$ et $(1_{2\epsilon}^{\mathbb{V}})_t = v_t^{t+\epsilon}$.

On dit que \mathbb{U} et \mathbb{V} sont ϵ -entrelacés s'il existe deux morphismes de degré ϵ , $\Phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ et $\Psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$, tels que $\Psi \circ \Phi = 1_{2\epsilon}^{\mathbb{U}}$ et $\Phi \circ \Psi = 1_{2\epsilon}^{\mathbb{V}}$.

Si les modules de persistance en question sont issus de l'homologie d'espaces topologiques, on interprète la définition précédente ainsi : les temps de naissance et de mort des cycles non-triviaux de deux modules ϵ -entrelacés ne peuvent différer que de ϵ .

Enfin, étant donnés deux modules de persistance \mathbb{U} et \mathbb{V} , on définit la distance d'entrelacement :

$$d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \inf\{\epsilon \geq 0 \text{ tel que } \mathbb{U} \text{ et } \mathbb{V} \text{ soient } \epsilon\text{-entrelacés}\},$$

avec pour convention $\inf \emptyset = +\infty$.

La distance d'entrelacement est une pseudo-distance entre les modules de persistance. Elle nous permet de les comparer.

Exemples de modules de persistance. La première construction est celle des voisinages tubulaires d'un sous-ensemble de points $X \subset \mathbb{R}^n$. Les groupes d'homologie singulière $V_t = H_*(X^t)$, munis des applications linéaires induites par les inclusions, forment un module de persistance.

Plus généralement, si E un espace topologique et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, les sous-niveaux $f^t = f^{-1}(-\infty, t]$ de f forment une famille croissante de sous-espaces topologiques indexée par \mathbb{R} . Pour tout $r, s, t \in \mathbb{R}$ tels que $r \leq s \leq t$,

$$f^r \subset f^s \subset f^t.$$

Les groupes d'homologie singulière $V_t = H_*(f^t)$ donnent lieu à un module de persistance indexé par \mathbb{R} . On retrouve la première construction en prenant pour f la fonction distance au compact X .

Un autre exemple est donné par les filtrations de complexes simpliciaux. Si K est un complexe simplicial abstrait (éventuellement infini), on appelle filtration de K une suite croissante de sous-complexes

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K.$$

L'homologie simpliciale de ces complexes donne aussi lieu à une suite d'espaces vectoriels $V_i = H_*(K^i)$. Les inclusions entre les sous-complexes simpliciaux sont des applications simpliciales qui induisent des morphismes $v_i^j : V_i \rightarrow V_j$. On obtient une structure de module de persistance indexé par \mathbb{N} .

Décomposition des modules de persistance. Les modules-intervalles sont des modules de persistance particulièrement importants. Soit toujours k un corps. Si $I \subset T$ est un intervalle, le module intervalle $\mathbb{I}(I)$ est défini par :

- les espaces vectoriels, pour tout $t \in T$, $\begin{cases} V_t = k \text{ si } t \in I \\ \quad = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- les morphismes, pour $s \leq t \in T$, $\begin{cases} v_s^t = \text{id} \text{ si } s, t \in I \\ \quad = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

On dit qu'un module de persistance \mathbb{V} est décomposable en modules-intervalle s'il est isomorphe à une somme de modules intervalles :

$$\mathbb{V} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{I}(I_l).$$

Dans [2], les auteurs étudient la décomposabilité des modules de persistance indexés par $T = \mathbb{N}$. Dans ce cadre, ils établissent une correspondance avec les modules gradués sur l'anneau des polynômes $k[X]$. Ils obtiennent :

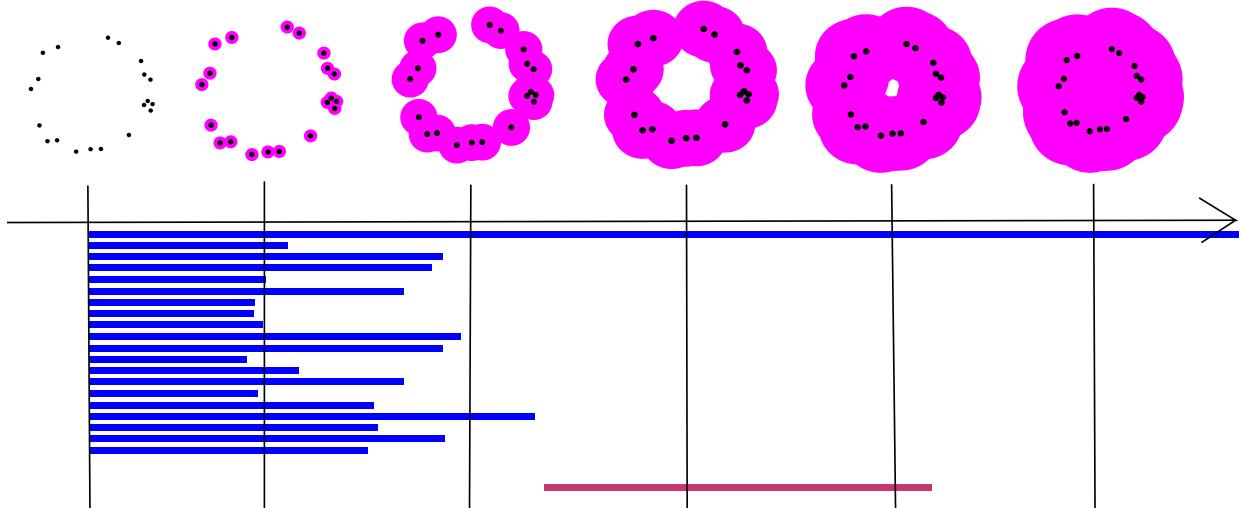
Théorème 2.0.5. Soit \mathbb{V} un module de persistance tel que chacun de ses espaces vectoriels V_i soit de dimension finie, et que les applications v_i^j soient des isomorphismes pour i assez grand. Alors \mathbb{V} est décomposable en modules-intervalle.

Lorsque $T = \mathbb{R}$, la tâche se complique. On peut obtenir la décomposabilité des modules lorsqu'ils n'ont qu'un nombre fini de valeurs critiques, c'est à dire de valeurs $t \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, l'application $v_{t-\epsilon}^{t+\epsilon}$ ne soit pas un isomorphisme.

En 2014, dans [3], Crawley-Boevey montre une condition de finitude suffisante :

Théorème 2.0.6. Soit \mathbb{V} un module de persistance sur \mathbb{R} tel que chaque espace V_t soit de dimension finie. Alors \mathbb{V} se décompose en somme (éventuellement infinie) de modules-intervalle.

La figure suivante reprend l'exemple introductif :



La décomposition du module de persistance $(H_0(X^t))_{t \geq 0}$ est représentée en bleu, et celle du module de persistance $(H_1(X^t))_{t \geq 0}$ en rouge. Chaque barre correspond à un module-intervalle dans la décomposition.

Diagramme de persistance. Edelsbrunner, Letscher et Zomorodian [4] introduisent en 2002 une façon commode de représenter la décomposition d'un module de persistance. Considérons un module décomposé :

$$\mathbb{V} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{I}(a_l^*, b_l^*),$$

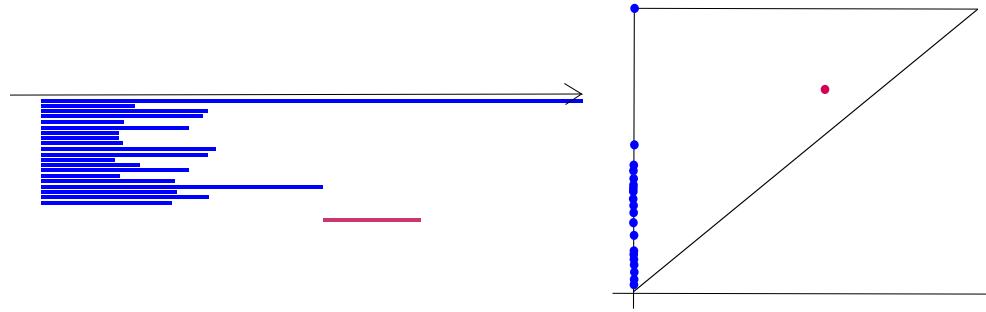
où l'étoile en exposant signifie que l'intervalle est ouvert ou fermé de ce côté de l'intervalle.

Définition 2.0.7. Le diagramme de persistance de \mathbb{V} est le multi-ensemble

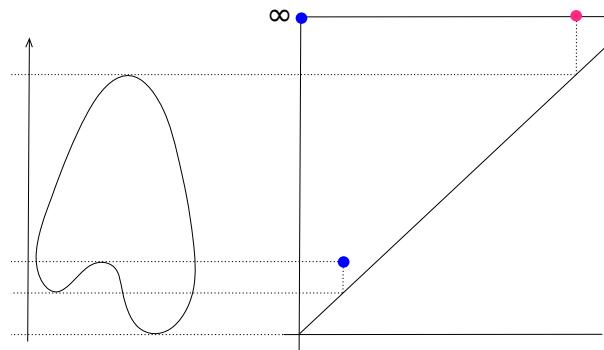
$$\text{dgm}(\mathbb{V}) := \{(a_l, b_l), l \in L\} \setminus \Delta \subset \bar{\mathbb{R}}^2,$$

où les points sont comptés avec multiplicité. On a retiré du diagramme les points (a_l, b_l) de la diagonale $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

La figure suivante représente le diagramme de persistance du module de persistance considéré dans l'exemple introductif. La point bleu de coordonnées $(0, +\infty)$ signifie la présence d'un module-intervalle $\mathbb{I}([0, +\infty])$ dans la décomposition en modules-intervalle de ce module de persistance.



L'exemple suivant est le diagramme de persistance d'une courbe de \mathbb{R}^2 filtrée par la projection sur l'axe vertical. Les sous-niveaux de cette fonction sont vides, ou sont des courbes à une ou deux composantes connexes. On pose $H_*(\emptyset) = 0$. On voit apparaître sur le diagramme de persistance une composante connexe qui persiste jusque l'infini (en bleu, de coordonnées $(0, +\infty)$), et une composante connexe qui persiste un temps fini (en bleu, près de la diagonale). Un cycle non-trivial n'apparait dans $H_1(X^t)$ que lorsque $f(]-\infty, t])$ contient la courbe en entière. Ce cycle persiste ensuite jusque l'infini.



Étant donné deux diagrammes de persistance, on dispose d'une autre distance : la distance bottleneck. Deux diagrammes sont proches en distance bottleneck si on peut appareiller leurs points sans trop les déplacer. On formalise cette idée ainsi :

- Un appareillage partiel entre deux multi-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}$ est un sous-multi-ensemble $M \subset A \times B$ tel que :

- pour tout $a \in A$, il y a au plus un $b \in B$ tel que $(a, b) \in M$,
- pour tout $b \in B$, il y a au plus un $a \in A$ tel que $(a, b) \in M$.

De tels points $a \in A$ et $b \in B$ tels que $(a, b) \in M$ sont dit appareillés. On dit que les autres points sont non-appareillés, ou de manière équivalente appareillés avec la diagonale Δ .

- Pour $\delta \geq 0$, on dit que l'appareillage M est un δ -appareillage si :

- si $(a, b) \in M$, alors $d_\infty(a, b) \leq \delta$,
- si $a \in A$ n'est pas appareillé, alors $d_\infty(a, \Delta) \leq \delta$,
- si $b \in B$ n'est pas appareillé, alors $d_\infty(b, \Delta) \leq \delta$.

(d_∞ représente la distance euclidienne)

Définition 2.0.8. La distance bottleneck entre \mathbb{U} et \mathbb{V} est définie comme la borne inférieure des valeurs $\delta \geq 0$ telles qu'il existe un δ -appariement entre $\text{dgm}(\mathbb{U})$ et $\text{dgm}(\mathbb{V})$. Elle est notée $d_b(\mathbb{U}, \mathbb{V})$.

On montre aussi que la distance bottleneck est une pseudo-distance entre les modules de persistance décomposables.

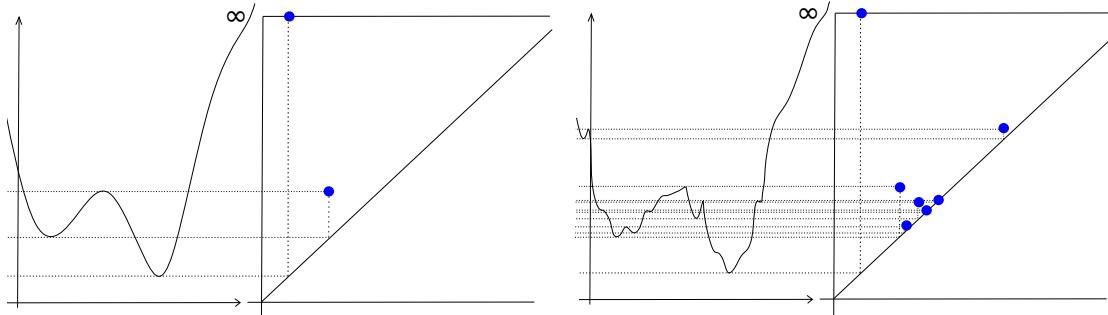
Théorème de stabilité. Les diagrammes de persistance sont intensément utilisés en analyse topologique des données. Leur stabilité est une notion capitale : si deux données initiales sont proches, qu'en est-il de leurs diagrammes ?

La première instance du théorème de stabilité a été montrée en 2007 par Cohen-Steiner, Edelsbrunner et Harer [5].

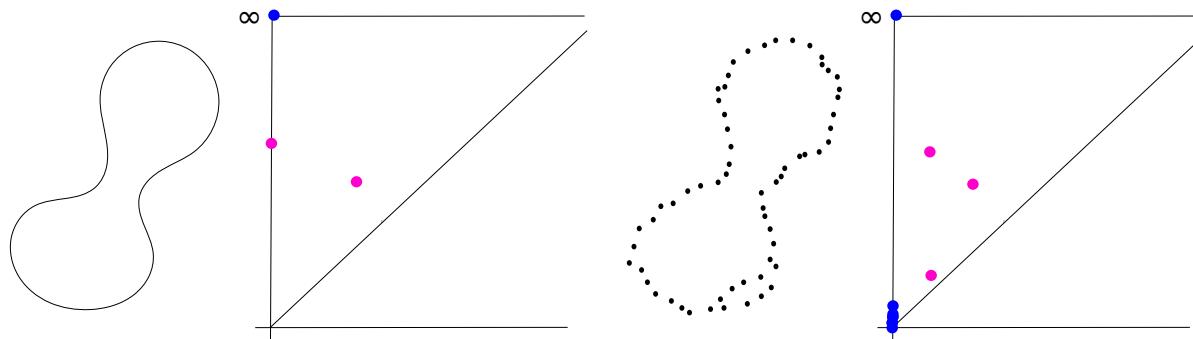
Théorème 2.0.9. Soit \mathbb{X} un espace topologique triangulable, et $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soient \mathbb{V}_f et \mathbb{V}_g les modules de persistance des sous-niveaux de ces fonctions. On suppose que ces modules de persistance ne possèdent qu'un nombre fini de valeurs critiques. Alors ces modules sont décomposables en modules-intervalle, et :

$$d_b(\mathbb{V}_f, \mathbb{V}_g) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Pour illustrer cette propriété, nous représentons le diagramme de persistance des sous-niveaux d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ainsi que son diagramme lorsqu'elle est soumise à de petites perturbations en norme infinie. On voit apparaître des points proches de la diagonale.



Soient $K, L \subset \mathbb{R}^d$ deux sous-ensembles finis. Si ces compacts sont proches en distance de Hausdorff, alors c'est aussi le cas pour les fonctions distances correspondantes en norme infinie. On obtient alors que les modules de persistance des voisinages tubulaires sont proches :



On observe l'apparition de points bleu et rose proches de la diagonale, et déplacement de deux points roses.

Remarquons que le résultat de stabilité précédent se démontre presque immédiatement si l'on remplace la distance bottleneck par la distance d'entrelacement : $d_i(\mathbb{V}_f, \mathbb{V}_g) \leq \|f - g\|_\infty$. En fait, le théorème de stabilité est un corollaire direct du théorème d'isométrie suivant, mis au propre en 2016 par Chazal, de Silva, Glisse et Oudot [6] :

Théorème 2.0.10. Soient \mathbb{U} et \mathbb{V} deux modules de persistance indexés par \mathbb{R} et décomposables en modules intervalles. Alors leurs distances bottleneck et d'entrelacement coïncident.

Représentations de carquois. Dans [7], publié en 2015, Oudot raconte le lien entre les modules de persistance et les représentations de carquois. Cela permet de généraliser les résultats précédents à d'autres notions de modules de persistance.

Pour commencer, si T est un ensemble partiellement ordonné, on peut considérer la catégorie associée, où les objets sont les éléments de T et où pour tout $a, b \in T$, une unique flèche $a \rightarrow b$ est présente lorsque $a \leq b$. Un module de persistance sur T est alors défini comme un foncteur de la catégorie associée à T vers la catégorie des espaces vectoriels. Si $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{R} , cette notion coïncide avec les modules de persistance précédemment définis. Si $T = \mathbb{R}^2$ pour l'ordre partiel

$$(a, b) < (c, d) \iff a < c \text{ et } b < d,$$

alors l'on parle de multipersistance. Les modules de persistance indexés par \mathbb{R}^2 ne jouissent pas de propriétés de décomposabilité comparables à ceux indexés par \mathbb{R} , et sont un sujet de recherche actuel.

Plus généralement, si Q est un carquois, on peut définir un module de persistance sur Q comme une représentation (linéaire) de Q (voir [7]). Un cas particulièrement étudié est celui du carquois A_n :

$$\bullet \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet,$$

où le sens des flèches est arbitraire. Ceci donne lieu à la notion de persistance zigzag (voir [8]).

3 En présence de bruit

Le problème des points aberrants. Lorsque les données présentent quelques points aberrants, la fonction distance à un nuage de point ne permet plus d'estimer le diagramme de persistance de l'espace sous-jacent.

En guise d'exemple, considérons un échantillon X de 200 points tirés sur deux cercles entrelacés dans \mathbb{R}^3 . Les voisinages tubulaires $(X^t)_{t \geq 0}$ de ce nuage de points définissent un module de persistance décomposable en modules-intervalle, dont on trace le diagramme de persistance :



Les points du diagramme du module de persistance $(H_0(X^t))_{t \geq 0}$ sont en rouge et ceux de $(H_1(X^t))_{t \geq 0}$ en vert. Nous ajoutons ensuite un échantillon de 20 points uniformément distribués dans le pavé :



Le diagramme de persistance est fortement perturbé. Pour remédier à ce problème, il faut remplacer la distance d_X par une fonction qui serait robuste au bruit. C'est le dessein de la distance à la mesure, une fonction qui tient compte de la densité de la distribution de points X . Elle a été introduite en 2011 par Chazal, Cohen-Steiner et Mérigot [9].

Distance à la mesure. On considère une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^d , et un paramètre $m \in [0, 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on définit la quantité :

$$\delta_{\mu,m}(x) = \inf\{r \geq 0, \mu(\overline{B}(x, r)) > m\}.$$

La distance à la mesure μ se définit ensuite comme une moyenne quadratique des fonctions $\delta_{\mu,m}$.

Définition 3.0.1. Soit $m_0 \in [0, 1[$. La distance à la mesure μ de paramètre de masse m_0 est la fonction :

$$\begin{aligned} d_{\mu,m_0} : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{1}{m_0} \int_0^{m_0} \delta_{\mu,m}^2(x) dm} \end{aligned}$$

La distance à la mesure admet une reformulation élégante. On dit qu'une mesure ν est une sous-mesure de μ si on a $\nu \leq \mu$ en tant que fonctions. L'ensemble des sous-mesures de μ est noté $\text{Sub}(\mu)$. Si $m_0 \in \mathbb{R}$, on note $\text{Sub}_{m_0}(\mu)$ l'ensemble des sous-mesures de μ de masse m_0 . Mérigot montre dans [10] en 2009 que la distance à la mesure s'écrit comme un problème de transport entre sous-mesures, à l'aide de la distance de Wasserstein (voir [11] page 105).

Théorème 3.0.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$d_{\mu,m_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \inf\{W_2(m_0 \delta_x, \nu), \nu \in \text{Sub}_{m_0}(\mu)\},$$

et cette borne inférieure est réalisée par une mesure $\nu \in \text{Sub}_{m_0}(\mu)$.

L'auteur y montre aussi deux propriétés de régularité fondamentales :

Proposition 3.0.3. La distance à la mesure $d_{\mu,m}$ est 1-lipschitzienne, et la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \|x\|^2 - d_{\mu,m}^2(x)$$

est convexe.

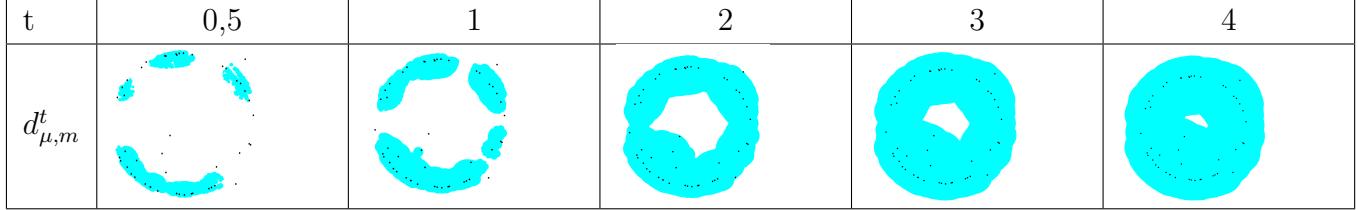
Enfin, la distance à la mesure est continue en la mesure :

Proposition 3.0.4. Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur \mathbb{R}^d . Alors pour tout $m \in [0, 1[,$

$$\|d_{\mu,m} - d_{\nu,m}\|_{\infty} \leq W_2(\mu, \nu).$$

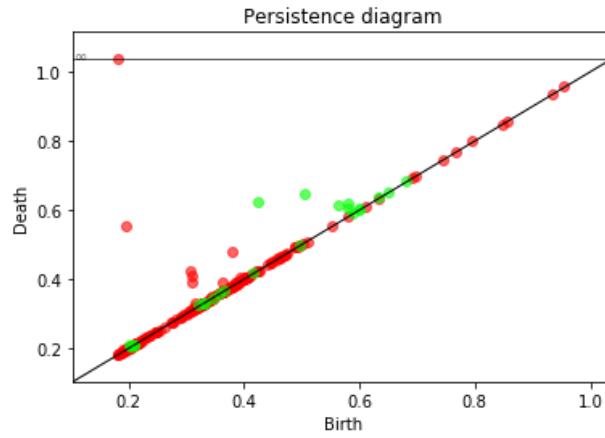
Estimation robuste. Si X est un nuage de points, on peut considérer la mesure empirique μ sur X . La dernière proposition montre que la distance à la mesure $d_{\mu,m}$ est une fonction stable de X au sens suivant : si l'on rajoute peu de points aberrants à X , alors la distance à la mesure varie peu.

Nous traçons quelques sous-niveaux de $d_{\mu,m}$ pour $m = 0.1$ et μ la mesure empirique d'un nuage de points bruité qui échantillonne le cercle :



Ces sous-niveaux sont proches de ceux du cercle lui-même.

En particulier, le module de persistance des sous-niveaux de la fonction $d_{\mu,m}$ est robuste aux points aberrants. La figure suivante représente le diagramme de persistance correspondant à l'exemple de deux cercles entrelacés et plongés dans du bruit, lorsque l'espace est filtré par la distance à la mesure ($m = 0.1$) :



Sur ce diagramme, on distingue deux points rouges et deux points verts éloignés de la diagonale : les propriétés topologiques de l'espace initial ont été retrouvées.

4 Perspectives

Le module de persistance des sous-niveaux de la fonction distance à la mesure empirique d'un nuage de points ouvre la voie à l'application des méthodes de la théorie de la persistance en présence de bruit.

Pendant ma thèse, je vais explorer de telles nouvelles constructions. Une première structure d'intérêt, \mathbb{F} , est un module de persistance construit sur un complexe simplicial filtré, qui ne s'écrit pas comme le nerf des sous-niveaux d'une fonction $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Structure \mathbb{F} . On considère une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ propre et 1-lipschitzienne (penser à la distance à la mesure), et $X \subset \mathbb{R}^d$ un nuage de points. Nous définissons un complexe simplicial filtré abstrait $S_{X,f} = (S_{X,f}^t)_{t \geq 0}$ d'ensemble de sommets X :

$\forall \omega = x_0, \dots, x_n \subset X$, le simplexe ω est présent dans $S_{X,f}^t$ si et seulement si

$$\max f(\text{conv}(\{x_0, \dots, x_n\})) \leq t,$$

où $\text{conv}(\{x_0, \dots, x_n\})$ signifie enveloppe convexe. Autrement dit, on ajoute un sous-ensemble de X au complexe simplicial si la fonction f est assez petite sur l'enveloppe convexe de ses sommets.

On définit ensuite $\mathbb{F}_{X,f}$ comme le module de persistance de l'homologie simpliciale de $(S_{X,f}^t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Ce module de persistance est stable en fonction de f :

Proposition 4.0.1. Soit g une fonction telle que $\|f - g\|_\infty = \epsilon$. Alors les modules de persistance $\mathbb{F}_{X,f}$ et $\mathbb{F}_{X,g}$ sont ϵ -entrelacés.

On montre aussi qu'il est stable en X :

Proposition 4.0.2. Soit $Y \subset \mathbb{R}^d$ tel que $d_H(X, Y) = \epsilon$ (distance de Hausdorff). Alors $\mathbb{F}_{X,f}$ et $\mathbb{F}_{Y,f}$ sont ϵ -entrelacés.

Pondération des complexes simpliciaux. Un autre cadre de travail consisterait à étudier des nerf de recouvrements dans les espaces métriques mesurés. En utilisant la mesure des ouverts, nous pourrions pondérer les simplexes d'un complexe simplicial, et étudier des filtrations robustes au bruit.

Références

- [1] P. Frosini. Discrete computation of size functions. *Journal of combinatorics, information and system sciences*, 1992.
- [2] A. Zomorodian and G. Carlsson. Computing persistent homology. *Discrete and Computational Geometry*, 2005.
- [3] W. Crawley-Boevey. Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules. *arXiv :1210.0819v3*, 2014.
- [4] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete Computational Geometry*, 2002.
- [5] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. Stability of persistence diagrams. *Discrete and Computational Geometry*, 2007.
- [6] F. Chazal, V. de Silva, M. Glisse, and S. Y. Oudot. *The Structure and Stability of Persistence Modules*. SpringerBriefs in Mathematics, 2016.
- [7] S. Y. Oudot. *Persistence Theory : From Quiver Representations to Data Analysis*. American Mathematical Society, 2015.
- [8] G. Carlsson and V. de Silva. Zigzag persistance. *Foundations of Computational Mathematics*, 2010.
- [9] F. Chazal, D. Cohen-Steiner, and Q. Mérigot. Geometric inference for probability measures. *Foundations of Computational Mathematics*, 2011.
- [10] Q. Mérigot. Détection de structure géométrique dans les nuages de points. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00443038v2>, 2010.
- [11] C. Villani. *Optimal transport, old and new*. Springer, 2008.

Chapitre 3

Projet de L3 : Géométrie différentielle

La boule chevelue sous l'angle de la géométrie
différentielle

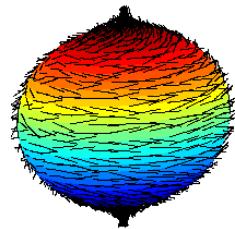
Olivier STIETEL et Raphaël TINARRAGE

Encadrante : Anne VAUGON

Mai 2013

Introduction

Le présent document s'inscrit dans le cadre de notre projet de L3 dirigé par Anne Vaugon. Il a pour but de démontrer le théorème de la boule chevelue, qui stipule qu'on ne peut pas coiffer une noix de coco. Pour coiffer, il faut des cheveux : imaginons-les courts, ainsi ils peuvent être modélisés par un champ de vecteurs jamais nul. Les coiffer se fera à la manière de Mireille Mathieu : les cheveux sont plaqués à la noix de coco, sans épi et sans raie. On obtient donc un champ de vecteurs continu. Comme on se place dans le cadre de la topologie différentielle, il sera même C^∞ .



En fait, le théorème de la boule chevelue stipule qu'il est impossible de coiffer une noix de coco, en passant par un résultat encore plus général et abstrait :

Théorème (de la boule chevelue). *Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n admet un champ de vecteur tangent lisse sans zéro si et seulement si n est impair.*

Afin de le démontrer, nous suivrons la démarche de John Milnor [1].

Table des matières

1 Le contexte de la géométrie différentielle	3
1.1 Les variétés lisses	3
1.2 Les variétés à bord	4
1.3 Le degré	4
1.4 Quelques résultats intéressants	4
2 Le théorème de la boule chevelue	6
2.1 Présentation du problème	6
2.2 Le degré orienté, invariant homologique	6
2.3 Preuve du théorème	7

1 Le contexte de la géométrie différentielle

1.1 Les variétés lisses

En accord avec le vocabulaire de J. Milnor, on appellera *application lisse* une application de classe C^∞ . Le premier outil dont nous avons besoin est le *difféomorphisme*, qui caractérise la « ressemblance » entre deux espaces. Plus généralement :

Définition. Soient $X \subset \mathbb{R}^i$ et $Y \subset \mathbb{R}^j$ deux sous-ensembles quelconques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite lisse si $\forall x \in U$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^i$ contenant x , et une application $F : U \rightarrow \mathbb{R}^j$ telle que f soit la restriction de F à X .

Définition. Soient $X \subset \mathbb{R}^i$ et $Y \subset \mathbb{R}^j$ deux sous-ensembles quelconques. Un difféomorphisme (lisse) est une application $f : X \rightarrow Y$ bijective, lisse, et de réciproque lisse.

Nous pouvons alors définir une *variété*, un objet assez général, qui est en fait la structure de base de la géométrie différentielle :

Définition. Une variété (lisse) M de dimension m est un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^i$ tel que $\forall x \in M$, il existe deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^i$ contenant x , $V \subset \mathbb{R}^m$, et un difféomorphisme $f : V \cap M \rightarrow U$. Un tel difféomorphisme est appelé une paramétrisation de la région. Réciproquement, l'inverse d'un tel difféomorphisme est appelé un système de coordonnées, ou une carte locale.

Autrement dit, une variété de dimension m est localement difféomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m .

Exemples. Le graphe d'une application lisse $f : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^j$ est une variété de dimension i . Ou encore $\forall n \in \mathbb{N}$, la sphère S^n est une variété de dimension n .

On veut maintenant étudier des applications entre deux variétés, et surtout pouvoir les différencier. A cet effet, le *plan tangent* en un point $x \in M$ joue le rôle d'espace vectoriel de départ pour la différentielle en x :

Définition. Soit $x \in M$, et $f : U \rightarrow V$ une paramétrisation de M autour de x . Le plan tangent à M en x est $Im(Df_x)$. Il est noté TM_x .

On vérifie que cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie. Ce plan tangent est « le plan le plus proche de M passant par x » (à une translation près).

Proposition 1.1 ([1]). En fait, TM_x est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^i de dimension m .

Soit maintenant deux variétés $M \subset \mathbb{R}^i$ et $N \subset \mathbb{R}^j$, de dimensions respectives m et n , et $\phi : M \rightarrow N$ une application lisse.

Définition. Soit $x \in M$, et $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^j$ une application lisse qui coïncide avec ϕ . Alors la différentielle de ϕ en x est la restriction de la différentielle $D\Phi_x$ à TM_x .

On vérifie que cette définition ne dépend pas d'un choix particulier de Φ . De plus, on montre que $D\phi_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$.

Proposition 1.2. Deux variétés difféomorphes sont de même dimension. Il suffit même qu'elles soient difféomorphes autour d'un point.

Démonstration. En effet, si $\phi : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, soit $\Phi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^j$ une application lisse qui coïncide avec ϕ . Alors $D\Phi_{1x} : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ est une application linéaire, et donc $\dim(TM_x) \geq \dim(TN_{f(x)})$. D'autre part, puisque $\phi^{-1} : N \rightarrow M$ est un difféomorphisme, on a $\Phi_2 : V \rightarrow \mathbb{R}^i$ une application lisse qui coïncide avec ϕ^{-1} , et donc $\dim(TN_{f(x)}) \geq \dim(TM_x)$. Par suite, $\dim(TM_x) = \dim(TN_{f(x)})$, et d'après la proposition 1.1, M et N sont de même dimension. \square

1.2 Les variétés à bord

Plus généralement, on peut définir des variétés qui admettent un bord :

Définition. Une variété (lisse) à bord M de dimension m est un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^i$ tel que $\forall x \in M$, il existe deux ouverts $U \in \mathbb{R}^i$ contenant x , $V \subset H^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^+$, et un difféomorphisme $f : V \cap M \rightarrow U$.

Le bord $\partial X \subset X$ est l'ensemble des points dont l'image par une carte locale est sur le bord $\partial H^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$.

Exemples. $\forall n \in \mathbb{N}$, la disque fermé D_n est une variété à bord de dimension n .

On définit alors semblablement les notions de *plan tangent*, et de *differentielle* d'une application entre deux variétés à bord.

Une variété à bord peut être vue comme la réunion de deux variétés sans bord :

Proposition 1.3. Si X est une variété à bord, alors le bord ∂X est une variété (sans bord) de dimension $m - 1$, et l'intérieur $X - \partial X$ est une variété (sans bord) de dimension m .

1.3 Le degré

On considère toujours $f : M \rightarrow N$ une application lisse, où M et N sont des variétés de dimensions respectives m et n .

Définition. Un point $x \in M$ est appelé point régulier si Df_x est surjective. Un point $y \in N$ est appelé valeur régulière si $f^{-1}(y)$ ne contient que des points réguliers. Réciproquement, si Df_x est non-surjective, x est appelé point critique, et $f(x)$ valeur critique.

En particulier, dans le cas $m = n$, un point $x \in M$ est régulier si Df_x est inversible, et critique sinon.

En fait, d'après le théorème d'inversion locale, si $x \in M$ est un point régulier, alors la restriction de f à un ouvert assez petit de M est un difféomorphisme.

On en déduit que pour toute valeur régulière $y \in N$, $f^{-1}(y)$ est un sous-ensemble discret de \mathbb{R}^i . En particulier, si M est compact, alors $f^{-1}(y)$ est fini. Dans ce cas, on note ce nombre $\#f^{-1}(y)$. Remarquons alors que :

Proposition 1.4 ([1]). Si M est compacte, l'application $y \mapsto \#f^{-1}(y)$, définie sur l'ensemble des valeurs régulières de N , est localement constante.

On voudrait appeler cet entier le degré de l'application f : c'est l'« enroulement» de M sur N par f . Malheureusement, cette définition ne tient pas compte de la façon dont f « enroule » M , c'est à dire si elle préserve ou non son orientation. Il faut avoir recours à d'autres définitions du degré, qui s'avéreront être des invariants homotopiques : le degré modulo 2, ou le degré orienté. C'est justement le degré orienté qui va nous permettre de démontrer le théorème de la boule chevelue.

1.4 Quelques résultats intéressants

Lemme 1.1 ([1]). Si $f : M \rightarrow N$ est une application lisse entre deux variétés de dimension $m \geq n$, alors pour toute valeur régulière $y \in N$, $f^{-1}(y)$ est une variété de dimension $m - n$.

Lemme 1.2 ([1]). Soit $f : X \rightarrow N$ est une application lisse entre X variété à bord de dimension m , et N variété sans bord de dimension n , telles que $m > n$. Si $y \in N$ est une valeur régulière, alors $f^{-1}(y)$ est une variété à bord de dimension $m - n$, et $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial X$.

Proposition 1.5 ([1]). Soit M une variété sans bord de dimension m , et $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse, telle que 0 soit une valeur régulière. Alors

$$M^+ = \{x \in M, g(x) \geq 0\}$$

est une variété à bord de dimension m , de bord

$$\partial M^+ = \{x \in M, g(x) = 0\}$$

Théorème 1.1 (Sard et Brown [1]). *Soit $U \subset \mathbb{R}^i$ un ouvert, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^j$ une application lisse. Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle dans \mathbb{R}^j .*

Autrement dit, si $f : M \rightarrow N$, l'ensemble des valeurs régulières de f est dense dans N .

2 Le théorème de la boule chevelue

2.1 Présentation du problème

On a vu que coiffer une boule signifie définir un champ de vecteur tangent sans zéro sur la sphère. Plus formellement :

Définition (Sphère unité). Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$$

Proposition 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, S^n$ est une variété de dimension n .

Démonstration. Considérons

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|^2 = \sum x_k^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Puisque ϕ est une application lisse (c'est un polynôme en les variables x_1, \dots, x_n), le lemme 1.1 nous assure que l'image réciproque de la variété $\{1\} \subset \mathbb{R}$ de dimension 1 est une variété de dimension $n - 1$. Autrement dit, $\phi^{-1}(1) = S^n$ est une variété de dimension n . \square

Définition. Soit M une variété lisse. Un champ de vecteurs tangent lisse sur M est une application lisse $v : M \mapsto \mathbb{R}^i$ telle que $\forall x \in M, v(x) \in TM_x$

Maintenant que ce cadre est posé, le théorème de la boule chevelue s'exprime naturellement en termes de géométrie différentielle :

Théorème 2.1 (de la boule chevelue). Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n admet un champ de vecteur tangent lisse sans zéro si et seulement si n est impair.

Afin de prouver ce théorème, nous avons besoin de la notion de degré. La définition dont nous allons avoir besoin ici est celle du degré orienté.

2.2 Le degré orienté, invariant homologique

Avant de définir le degré orienté d'une application, nous devons orienter nos variétés.

Rappelons que dans \mathbb{R}^i , une orientation est le choix d'une base modulo la relation d'équivalence suivante : deux bases $A = (a_1, \dots, a_i)$ et $B = (b_1, \dots, b_i)$ de \mathbb{R}^i sont en relation si et seulement si les matrices de passage de A à B sont de déterminant (strictement) positif. Tout espace vectoriel a ainsi précisément deux orientations distinctes. Dans le cas d'un sous-variété, il s'agit d'orienter chacun de ses plans tangents, de manière cohérente.

Définition (Orienter une variété). Soit $M \subset \mathbb{R}^i$ une variété de dimension m . Une orientation de M est un choix d'orientation pour chaque espace vectoriel TM_x , $x \in M$. De plus, Pour chaque point $x \in M$, il existe une carte locale sur un ouvert U contenant x qui préserve l'orientation, i.e. $\forall y \in U$, l'image d'une base de TM_y de l'orientation choisie par Dh_x est une base de \mathbb{R}^m d'orientation standard.

On peut alors définir le degré orienté d'une application :

Définition (Degré de Brouwer). Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse entre deux variétés, telles que M soit compacte et N connexe. On définit, pour $x \in M$, $sign(Df_x) = +1$ ou -1 , en fonction de ce que $Df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ préserve ou non l'orientation de TM_x . On définit ensuite, pour $y \in N$ valeur régulière,

$$deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign(Df_x)$$

Puisque M est compact, rappelons que la somme précédente est finie.

Comme annoncé, on peut montrer que sous certaines conditions (M compact et N connexe), le degré est constant et invariant. Considérons alors deux sous variétés M et N de même dimension n avec M compact et N connexe ; puis une application f de M dans N lisse. On veut montrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.2. *L'application $y \in N \mapsto \deg(f, y)$ restreinte aux valeurs régulières est constante.*

On peut donc définir $\deg(f)$ comme étant le degré de f pris en n'importe quelle valeur régulière de f .

Théorème 2.3. *Si g est homotope à f , alors $\deg(f) = \deg(g)$*

La preuve va s'appuyer sur une série de lemmes admis :

Lemme 2.1 ([1]). *L'action des difféomorphismes isotopes à l'identité est transitive sur une sous variété connexe, ie si $y, z \in N$ alors il existe un difféomorphisme h isotope à l'identité tel que $h(y) = z$.*

Lemme 2.2 ([1]). *L'application $\deg(f, \cdot)$ est localement constante sur les valeurs régulières.*

Lemme 2.3 ([1]). *Si M est le bord d'une sous variété X , ie $M = \partial X$ et si f peut être prolongé par F sur X ,*

Alors $0 = \deg(f, y)$, pour toute $y \in N$ valeurs régulières de f

Lemme 2.4 ([1]). *Si g est homotope à f , alors $\deg(f, y) = \deg(g, y)$, pour toute $y \in N$ valeurs régulières de f*

On remarque qu'avec le lemme 2.4, si on a le théorème 2.2, alors le théorème 2.3 est immédiat.

Il reste à montrer le théorème 2.2 à l'aide des lemmes :

Démonstration. Soit $y, z \in N$. Par le lemme 2.1, soit h un difféomorphisme isotope à l'identité tel que $h(y) = z$

On a alors $\deg(h \circ f, h(y)) = \sum_{x \in h \circ f^{-1}(h(y))} \text{signe}(D(h \circ f)_x) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(Df_x) = \deg(f, y)$, d'un coté et $\deg(h \circ f, h(y)) = \deg(h \circ f, z) = \deg(f, z)$, de l'autre, par le lemme 2.1 car $h \circ f$ est homotope à f . Ce qui permet de conclure la démonstration. \square

2.3 Preuve du théorème

La démonstration du théorème de la boule chevelue est une application directe de cette notion de degré orienté. Elle repose sur le résultat suivant :

Corollaire 2.1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ pair, l'identité sur S^n n'est pas homotope à l'application antipodale ($a : x \mapsto -x$).*

Démonstration. Soit $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. En notant, pour $k \in [1, n+1]$,

$$s_k : (x_1, \dots, x_k, \dots, x_i) \mapsto (x_1, \dots, -x_k, \dots, x_i)$$

la symétrie par rapport à $\text{Vect}((0, \dots, 1, \dots, 0))$, on a évidemment $a = s_1 \circ \dots \circ s_{n+1}$. Or une telle symétrie est de degré -1 . Donc le degré de a est $(-1)^{n+1}$

\square

Pour démontrer le théorème de la boule chevelue, nous raisonnons par l'absurde, en construisant, à partir d'un champ de vecteur tangent continu sans zéro sur la sphère, une homotopie entre l'identité et l'application antipodale.

Lemme 2.5. *Un champ de vecteur $v : S^n \mapsto \mathbb{R}^i$ est tangent à S^n si et seulement si*

$$\forall x \in S^n, (v(x)|x) = 0 \tag{2}$$

Démonstration. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ une paramétrisation de S^n en $x \in S^n$. Alors $\phi \circ f : x \mapsto 1$ est une application lisse, et $D(\phi \circ f)_{f^{-1}(x)} = D\phi_x \circ Df_{f^{-1}(x)} = 0$.

Donc $TM_x = \text{Im}(Df_{f^{-1}(x)}) \subset \text{Ker}(D\phi_x)$.

Or $D\phi_x : (h_1, \dots, h_n) \mapsto 2 \cdot (x_1 h_1 + \dots + x_n h_n) = 2 \cdot (x|h)$. Donc $\text{Ker}(D\phi_x) = \text{Vect}(x)^\perp$ (de dimension n , comme TM_x).

On en déduit alors $TM_x = \text{Im}(Df_{f^{-1}(x)}) = \text{Ker}(D\phi_x) = \text{Vect}(x)^\perp$, d'où le lemme. \square

Démonstration du théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$ pair, et $v : M \mapsto \mathbb{R}^i$ un champ de vecteur tangent continu qui ne s'annule pas sur $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Quitte à normaliser les vecteurs, on peut supposer que $\forall x \in M, \|x\| = 1$. Considérons alors

$$\begin{aligned} F : S^n \times [0, \pi] &\rightarrow S^n \\ (x, \theta) &\mapsto (x \cdot \cos(\theta), v(x) \cdot \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Remarquons que $F(\cdot, 0)$ est l'identité sur S^n , et que $F(x, \pi) = -x$ est l'application antipodale. Vérifions que F est bien une homotopie de S^n , i.e. que $\forall \theta \in [0, \pi], \forall x \in S^n, F(x, \theta) \in S^n$, i.e. que $(F(x, \theta)|F(x, \theta)) = 1$. Or

$$\begin{aligned} (F(x, \theta)|F(x, \theta)) &= (x \cdot \cos(\theta)|x \cdot \cos(\theta)) + (v(x) \cdot \sin(\theta)|v(x) \cdot \sin(\theta)) + 2 \cdot (x \cdot \cos(\theta)|v(x) \cdot \sin(\theta)) \\ &= \|x\| \cdot \cos(\theta)^2 + \|v(x)\| \cdot \sin(\theta)^2 + 0 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

car $(v(x)|x) = 0$ d'après le Lemme 2.5.

F est donc une homotopie entre l'identité et l'application antipodale de S^n . C'est absurde d'après le corollaire précédent. \square

Références

- [1] John Milnor. *Topology from the differential viewpoint*. The University Press of Virginia, 1997.

Chapitre 4

Rapport de stage de L3 : Électrophysiologie

Primary neuronal culture exhibits spontaneous network patterns
monitored by multi-electrodes array

Internship report from Raphaël Tinarrage

August 2014

" I don't think the brain came in the Darwinian manner. In fact, it is disprovable. Simple mechanism can't yield the brain. I think the basic elements of the universe are simple. Life force is a primitive element of the universe and it obeys certain laws of action. These laws are not simple, and they are not mechanical."

Kurt Gödel

Acknowledgment

In the context of UPSUD's MFA Magistère, I did an internship, during the month of August 2014. I worked under the direction of Jérémie Sibille, hosted in Nathalie Rouach's laboratory at the Collège de France, in Paris.

I'd like to address all my thanks to Jérémie Sibille, for introducing me his fabulous field of research, and for all the time he took to teach me.

Introduction

Primary neuronal cultures exhibit spontaneous rhythmic networks activity after two weeks *in vitro*. Recorded by Multi-Electrodes Array (MEA), this emergent rhythmic activity depends on the connections of precursor neuronal cells, and undergo from both excitatory and inhibitory neurons. We here aim to better decipher the nature, properties and characteristics of these stereotypic activities.

The aim of this internship was to build a Matlab code to extract, analyse and quantify this typical spontaneous neuronal networks rhythmic activity. I had the opportunity of discovering the exciting world of experimental neurobiological research, and even trying dissection.

Contents

1 Biological experimental background	3
1.1 Monitoring neuronal physiology	3
1.2 Primary neuronal culture preparation (material and methods)	3
1.3 Signals obtained from neuronal culture on Multi Electrodes Array	4
2 Data analysis : extraction and quantifications	7
2.1 Overview of the code's main functions	7
2.2 Extraction of Action Potentials	8
2.2.1 Filtering and thresholding the raw recordings	8
2.2.2 Results: extracted variables and events characteristics	9
2.3 Extraction of bursts	10
2.3.1 The valence of the burst: a qualitative quantification of network synchronicity	10
2.3.2 Results: extracted variables and bursts characteristics	10
2.3.3 Burst patterns : can we define burst identities ?	11
2.4 The Graphical User Interface (GUI)	12
3 Appendices	15
3.1 processing.m	15
3.2 cheby processing.m	16
3.3 high processing.m	16
3.4 burst processing.m	17
3.5 visual.m	18

Chapter 1

Biological experimental background

1.1 Monitoring neuronal physiology

In the last half century, neurons has been studied mainly by monitoring their membrane potentials (and all related pathways). **Electrophysiology** was firstly developp in the 50's by intra axonal recoding in the giant squid axons. This technic allowed to decipher the exact timing of an action potential. Today, single neuron activity and population of neurons can be recorded by different means, including magnetic resonnance Imaging, Positron Tomography, Electroencephalogram and electrodes inserted in the brain for living animals (*in vivo*). Moreover **electrophysiology** is extensively performed on acute slices (*ex vivo*), by several means such as dendritic patch, loose patch, whole cell or meanned field recordings. Those technics can also be used for *in vitro* studies.

We cultivated neurons above Multi-Electrodes Arrays (MEA), which record the mean field variations (see figure 1.1). This set-up allows us to observe both the the population activity and the single neuronal firing embedded in, basis of all known cognitive processes.

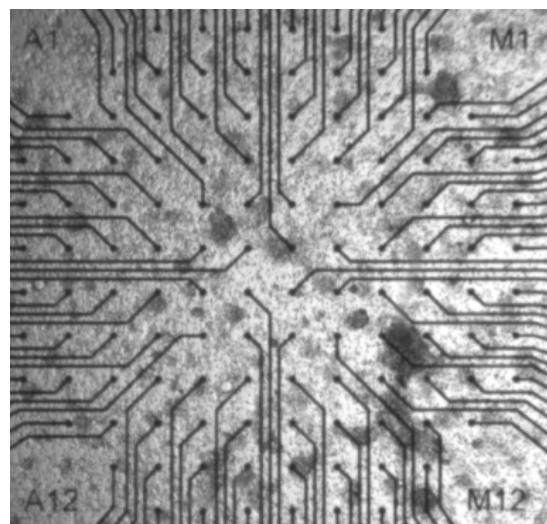


Figure 1.1: Photography of a primary neuronal culture on MEA at DIV 19 (*days in vitro*). Note the below confluence concentration and the presence of few point of higher neuronal concentration (blob)

1.2 Primary neuronal culture preparation (material and methods)

More precisely, primary neuronal cultures were prepared as previsouly published (Gullo et al. 2009, Berdondini et al. 2009) from hippocampus of E18 mice embryos (OF1 background). Once the hippocampi are extracted from embryos, they are cut with a blade and incubated in NeuroBasal medium solution* with 0,5% Trypsin for 25 minutes (Neurobasal* is a commercial Neurobasal solution complemented with B27, Glutamatax, Penicyline/Streptomyycin and Fongizone). Neurons are then bathed in Neurobasal* complemented with SVG serum for 5 min. The following dissociation is request for a good preservation of neuronal extracellular organells by gently pressuring Neurobasal* complemented with DNases ($50\mu\text{g/mL}$) in order to partially dossicated the melted hippocampal tissue. After few pressurisation the supernatant should contains a higher enough concentration of singled neurons in solution (up to $750\ 000\ \text{cell/mL}$) that is separated from the remaining tissue. This step is repeated as much as necessary. At last, 8

to 12mL of neurons suspended in Neurobasal* is obtained. This suspended solution is plated in precoated MEA. The coating of the MEA consists in 1mg/mL Poly-D-Lysin solution over night, dried, and then plated for 2h at 37°C with 20 µg/mL Laminin solution). The totality of the medium is changed two hours after plating and then one third of the medium is change every three to four days. All chemical are purchased in Gibco corp, MEA and MEA amplifier are purchased from Multichannels system (MEA 2100 amplifier for 120 channels) and recorded in a dry CO₂ incubator.

After a week, the neuronal precursor cells have already started their differentiation, in excitatory or inhibitory neurons (see figure 1.2). Two weeks after plating, the neuronal population starts to exhibit spontaneous neuronal network activities, repeating patterns in rhythm.

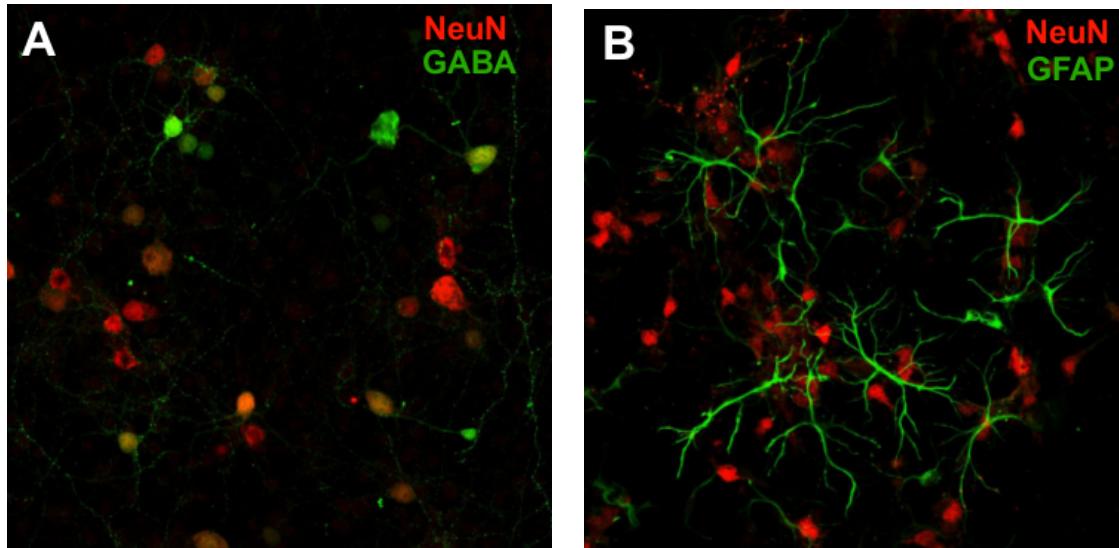


Figure 1.2: Immunofluorescence of obtained culture: positive neurons to both GABAR and NeuN are present. These culture were made from sister culture, plated on glass cover slips, and observed in a confocal microscope. In other words, the cells have been equipped with fluorescent markers depending on their proteic expression (characteristic of their cell type). **A** : Picture of the culture showing both excitatory and inhibitory neurons (antibodies NeuN and GABAR). **B** : Picture of the culture showing the presence of glial cells next to the neurons.

1.3 Signals obtained from neuronal culture on Multi Electrodes Array

A neuron, when getting activated, show depolarization of its membrane potential. If this depolarization reaches its threshold of firing, then it fires an action potential. We monitor these activities in our culture by recording the meaned field on each electrodes of the MEA. The MEA we used comes from the German company **multichannel systems**. Each MEA counts 120 channels, and our recordings were made at a sampling frequency of 25000 Hz (see figure 1.3).

The events we extracted from the mean field recording on each channels were **action potentials** (see figure 1.4).

The second type of studied activity were **bursts**, which are the trace of a strong synchronous networks activation, characterized by many synchronous action potentials recorded on a majority of the channels. Therefore we quantified these phenomenon by sliding a time window summing all the events (as illustrated in 1.5).

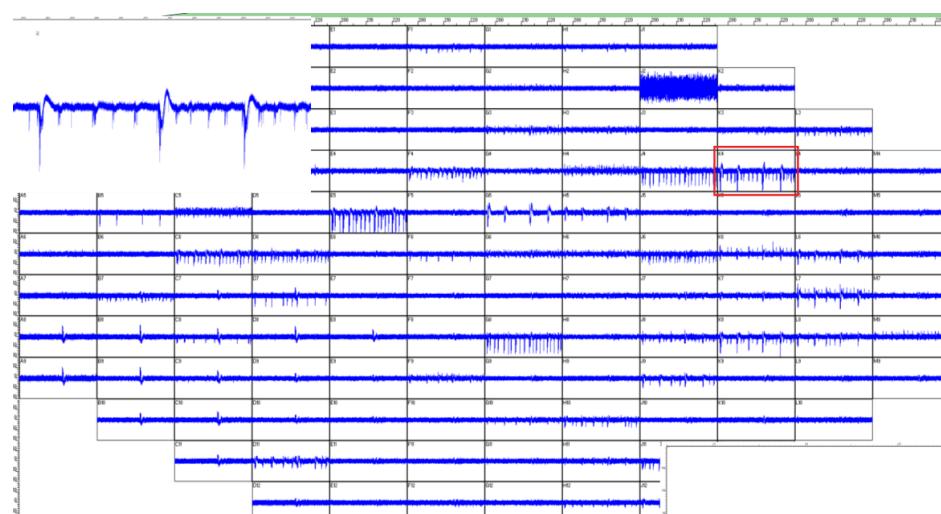


Figure 1.3: Illustration of a software captation: overview of mean field recordings of the 120 sites of the MEA for a 30 seconds period. Note the presence of bursts of different sizes and involving different sets of channels. **Inset above left** : recording from channel K4 (highlighted in red) illustrating the different type of burstig patterns occuring on a single channel.

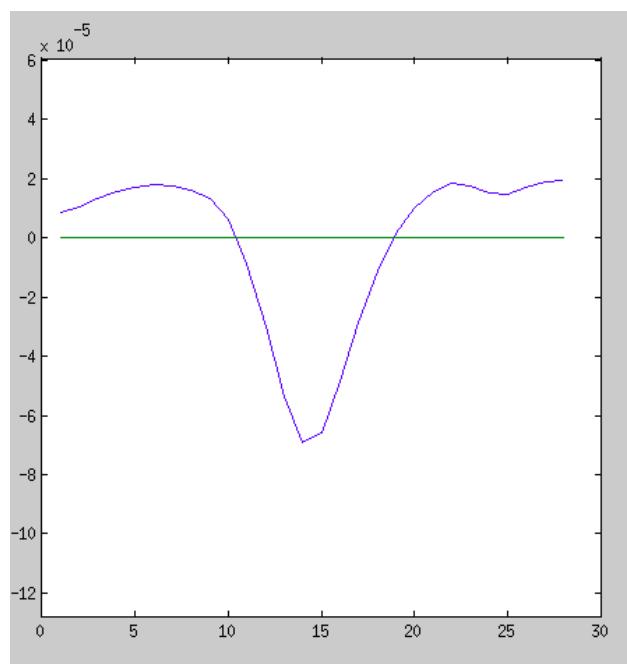


Figure 1.4: Local mean field recording obtained on a single recordings site during an action potential. Note the particular shape obtained during this recordings, which corresponds to the different steps of the membrane potential changes during an action potential.

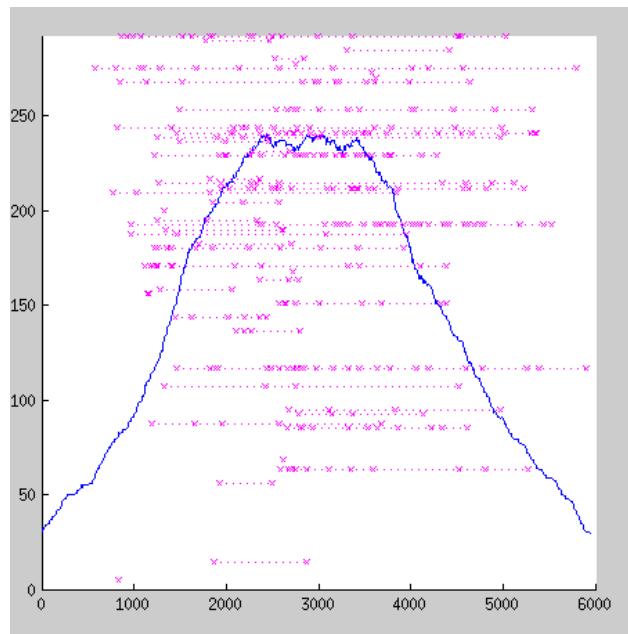


Figure 1.5: Shape of a burst. The valence (blue) represents the global behavior of the culture during the burst, and a raster plot (pink) illustrates the firing in each channels.

Chapter 2

Data analysis : extraction and quantifications

The main objective of this internship was to elaborate a Matlab code to extract, visualize and analyse the MEA recordings. We wanted this code to be a *naïve* toolbox to display and partially process the data.

2.1 Overview of the code's main functions

During this internship, I realized a GUI (Matlab graphical user interface), which permits to treat the raw data in different ways :

- The function PROCESS, which converts a MCD file into a workable Matlab file
- The function VISUAL, which displays chosen values and graphs from the processed files
- The function CAT, which permits to concatenate several recordings

This was done in order to ease the handling and treatment of several experiments coming from the biological lab I was working in. The task of this GUI is first to extract the raw signal from the .MCD database. Concatenation of several recordings can be done when necessary. Once converted into matlab workable files, the goal is first to extract action potentials features in order to describe the burst occurrence. Therefore the visual function contains two different options built for either Action potential visualization or Burst visualization. In addition, PROCESS also contains the function ROUTINE, which permits to treat all the MCD files contained in a folder and its subfolders, and put away the output files in a new folder which reproduces the original tree view.

The function PROCESS returns a structure, gathering all the features we extracted from the recordings. Here is the list of the output structure content:

- Recording name
- Count of channels
- Action potentials
 - Number of the action potentials
 - Start time
 - Length
 - Values of the recording
 - Min
 - Left peak
 - Right peak
 - Halfway length
 - Ratio of potentials before and after the event
- Bursts
 - Count of involved action potentials

- Start time
- Length
- Peak of the valence
- Values of the valence
- Rasterplot

2.2 Extraction of Action Potentials

Thanks to the library *Neuroshare*, given a MCD file, Matlab is able to access to the recorded signal of each channel. Therefore each channels will be treated independently. The main point of the processing is to extract the action potentials, and to avoid the noise.

2.2.1 Filtering and thresholding the raw recordings

The first step was to rid the signal of the low frequencies, which correspond to second-long depolarization of the local field's baseline. To do so, we use a high-pass *Chebyshev filter* (broadly used in electrophysiology).

Here is the expression of this filter :

$$H(i\omega) = \frac{0,8751 - 3,4916i\omega + 5,233(i\omega)^2 - 3,4916(i\omega)^3 + 0,8751(i\omega)^4}{1 - 3,7238i\omega + 5,2175(i\omega)^2 - 3,2594(i\omega)^3 + 0,7658(i\omega)^4}$$

The raw signal and spectrum are illustrated in the figures 2.2.1 and the result of the filter 2.2.1.

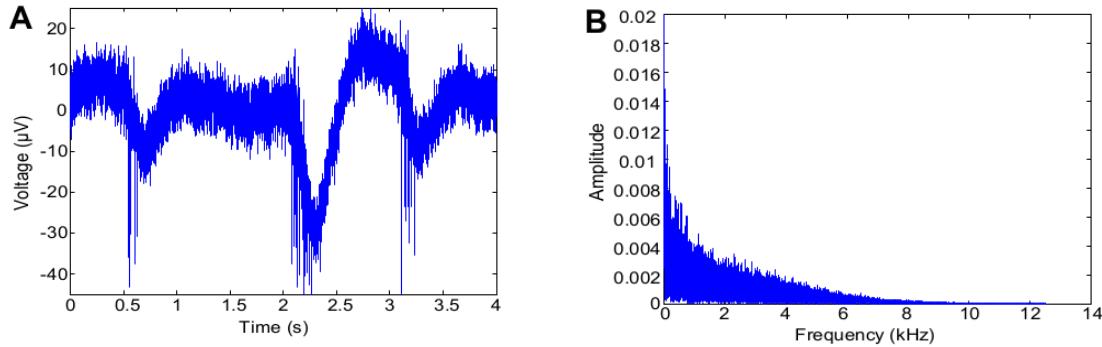


Figure 2.1: Values and spectrum of the raw signal: A: Raw signal obtained on a single recording site. Note the combination of slow wave oscillations with rapide events (Action potentials). B: Corresponding spectrum obtained by Fast Fourier Transform (FFT).1

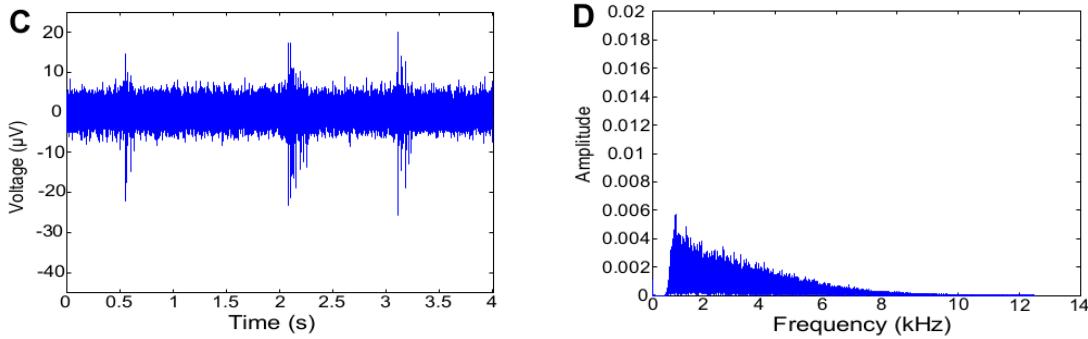


Figure 2.2: Values and spectrum of the filtered signal: C: Signal obtained after the Chebyshev type II filtering; note the stable baseline. D: Filtered signal spectrum by FFT. Slow frequency have been suppressed from the recording.

Then, to recognize an action potential, we first calculate the **standard deviation (std)** of the recording. Then, each point overtaken three times the standard deviation is considered as an event, accounted as an action potential (see figure 2.3). We discard the events smaller length than 240 μs .

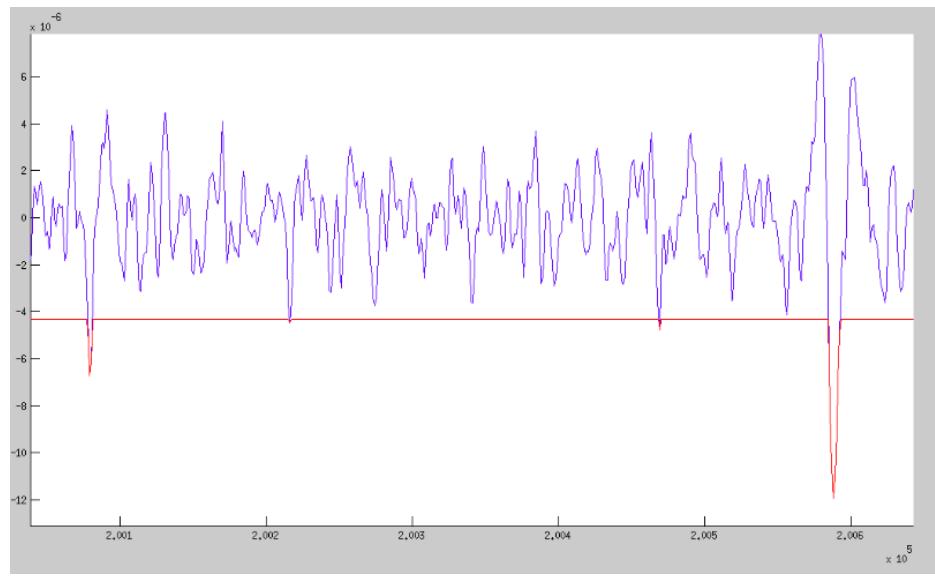


Figure 2.3: The signal (blue) and the threshold (red)

The figure 2.4 is an illustration of the extracted events, with a threshold at 2,5 times the standard deviation.

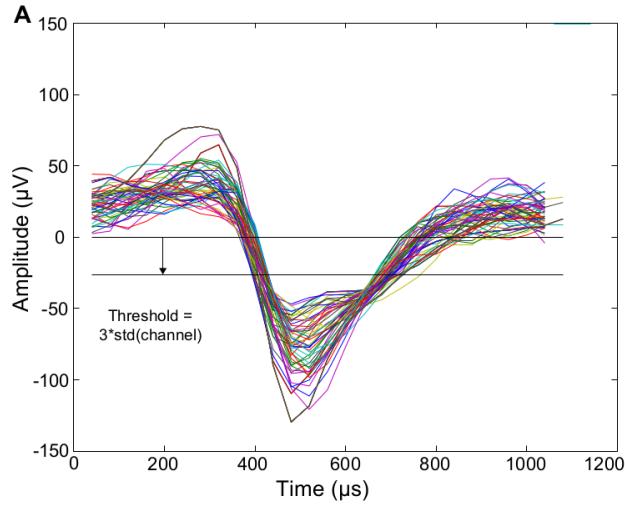


Figure 2.4: Some action potentials we extracted. The shape, kinetic and size of the events we obtained are similar to published results about a single neuron recorded by mean field, *in vivo* and *in vitro* (Berdondini 2009).

2.2.2 Results: extracted variables and events characteristics

See on the figure 2.5 the quantifications of the extracted events in a single culture. The list of all accessible features is not listed here, which could be the basis of a principal component analysis. This could be the subject of an other internship.

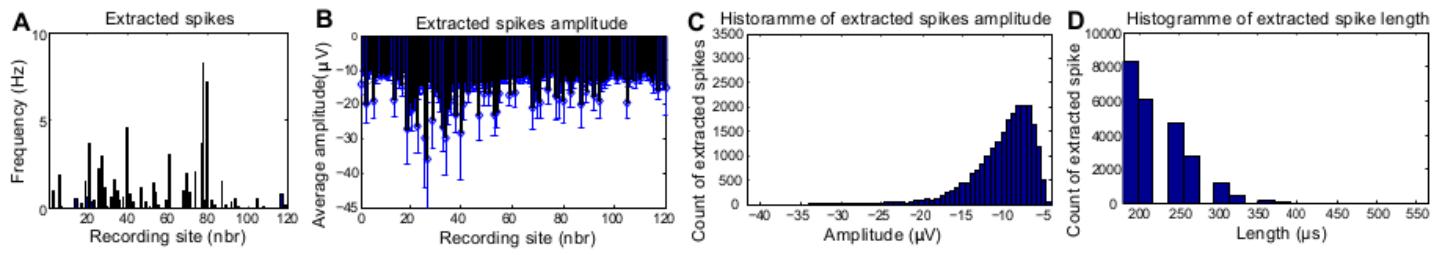


Figure 2.5: Some action potentials quantifications : **A** : Frequency of events occurrence in each channels. Note that most of the channels are active, but a few of them exhibits a firing frequency higher than the burst frequency. **B** : Amplitudes of the extracted events at each recording site. As previously shown, a few electrodes have a good sensibility (most probably due to the neuronal location above the electrode). **C** : Histogramm of extracted spike (action potentials) amplitudes, averaged from 6 minutes recording (2000 spikes), which indicate more than 55 spikes per seconds. **D** : Histogramm of the extracted event lengths, which confirms that 90% of the extracted events have a length below 1,2 ms (characteristic an of action potential measured by mean field recording).

2.3 Extraction of bursts

2.3.1 The valence of the burst: a qualitative quantification of network synchronicity

At last, we studied the synchronicity of the neuronal network (detection of the bursts) by sliding a time window through the recording, and counting at each steps how many action potentials was extracted. Let us call this function the *valence* of the burst. The length of the time window we used was 100 ms.

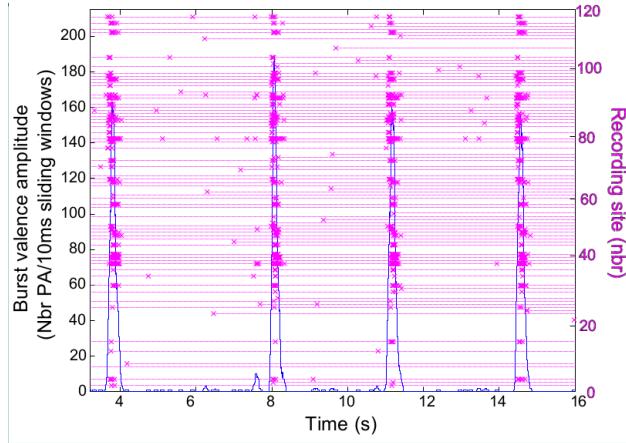


Figure 2.6: The burst valence during 16 seconds of the recording. Over, a raster plot is illustrated : a pink cross is drawn every time an action potential occurs, and each line represents a single recording site. This figures illustrates that a burst is composed of synchronical fast events of several channels.

2.3.2 Results: extracted variables and bursts characteristics

The figure 2.7 represents some quantifications we extracted from the bursts, during a 6 min recording.

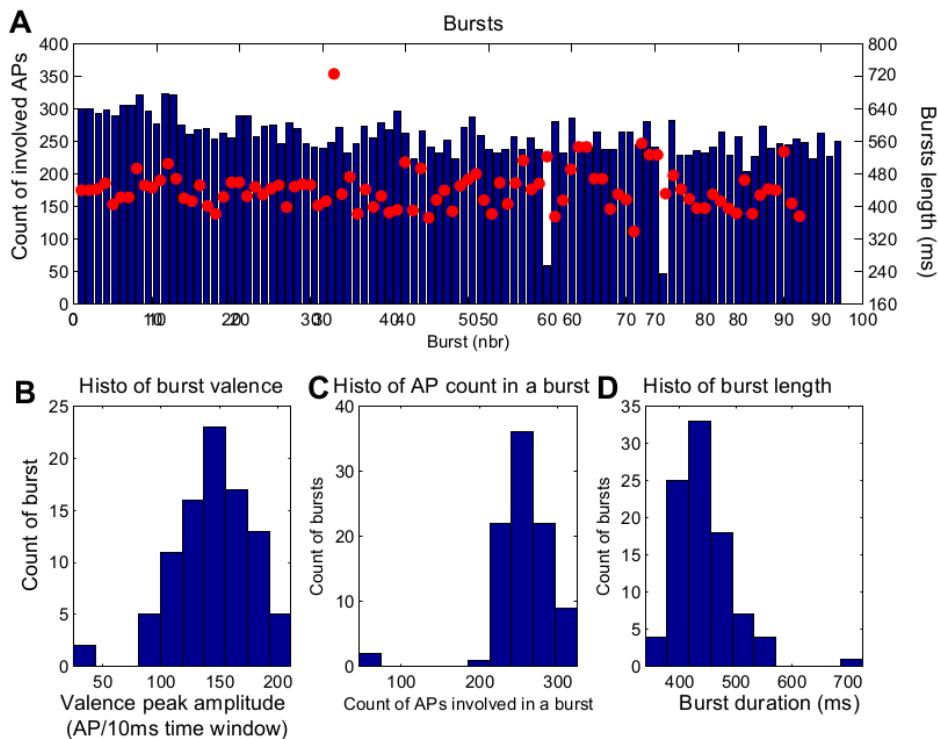


Figure 2.7: Some burst quantifications : **A** : Here is quantified (in blue) the total number of action potentials involved in a given burst. In red is illustrated the time length of each burst, which looks homogeneous. **B** : Histogramm of the burst valence amplitude. **C** : Histogramm of the recruited action potentials during a burst. **D** : Histogramm of the bursts duration

2.3.3 Burst patterns : can we define burst identities ?

In a culture, different bursts valences could be observed, as represented in the figure 2.8. The different shapes of burst valence with their associated rasterplots suggest two bursts fingerprints in pannels A vs. B, both exhibited by the same culture. To ensure the success of my internship, we avoid analysis of our big data set. Thus, next step of this study could be the use of strong mathematical methods of analysis, for example the Principal Component Analysis, as previously performed in similar studies (see Gullo et al. 2006, Wanke et al. 2009)

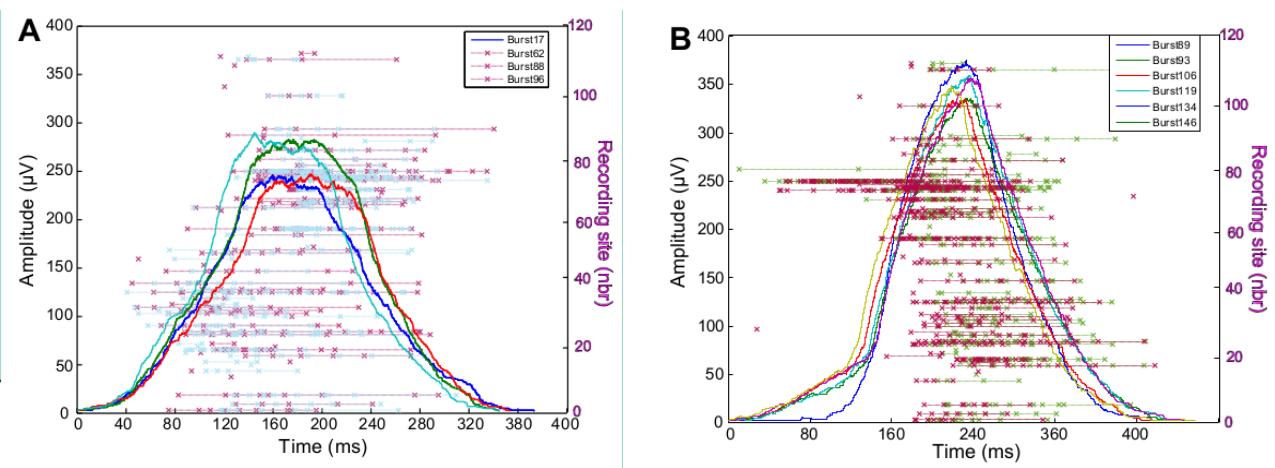


Figure 2.8: Two different burst patterns : **A** : Burst valence illustrated for four different bursts (red, green, blue and light blue). Interestingly those similarities suggests a shared «fingerprint». In addition, the raster plots of two of this bursts are overlapped in light blue and violet. It shows that the recruited channels are almost the same, while the firing pattern of each recording sites show slight differences. **B** : Same illustration for an other type of bursting pattern in the same recording. The burst valences are drawn in red, green, light blue, blue, yellow and purple, and the raster plots for two of these bursts are in yellow and red.

2.4 The Graphical User Interface (GUI)

Here are some pictures of the graphical user interface I coded.

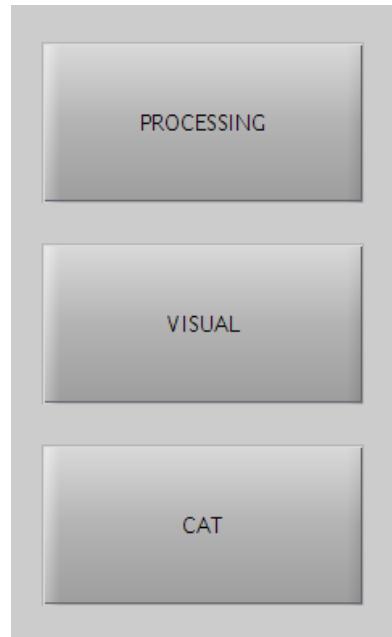


Figure 2.9: The opening window proposing the three different operations

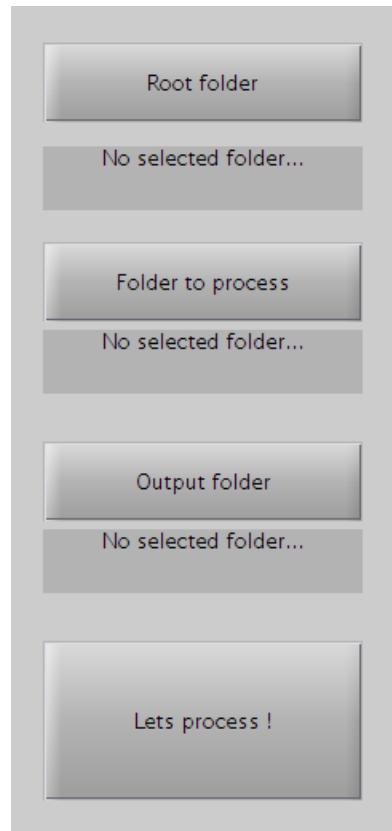


Figure 2.10: The processing window obtained by clicking on the "processing" button

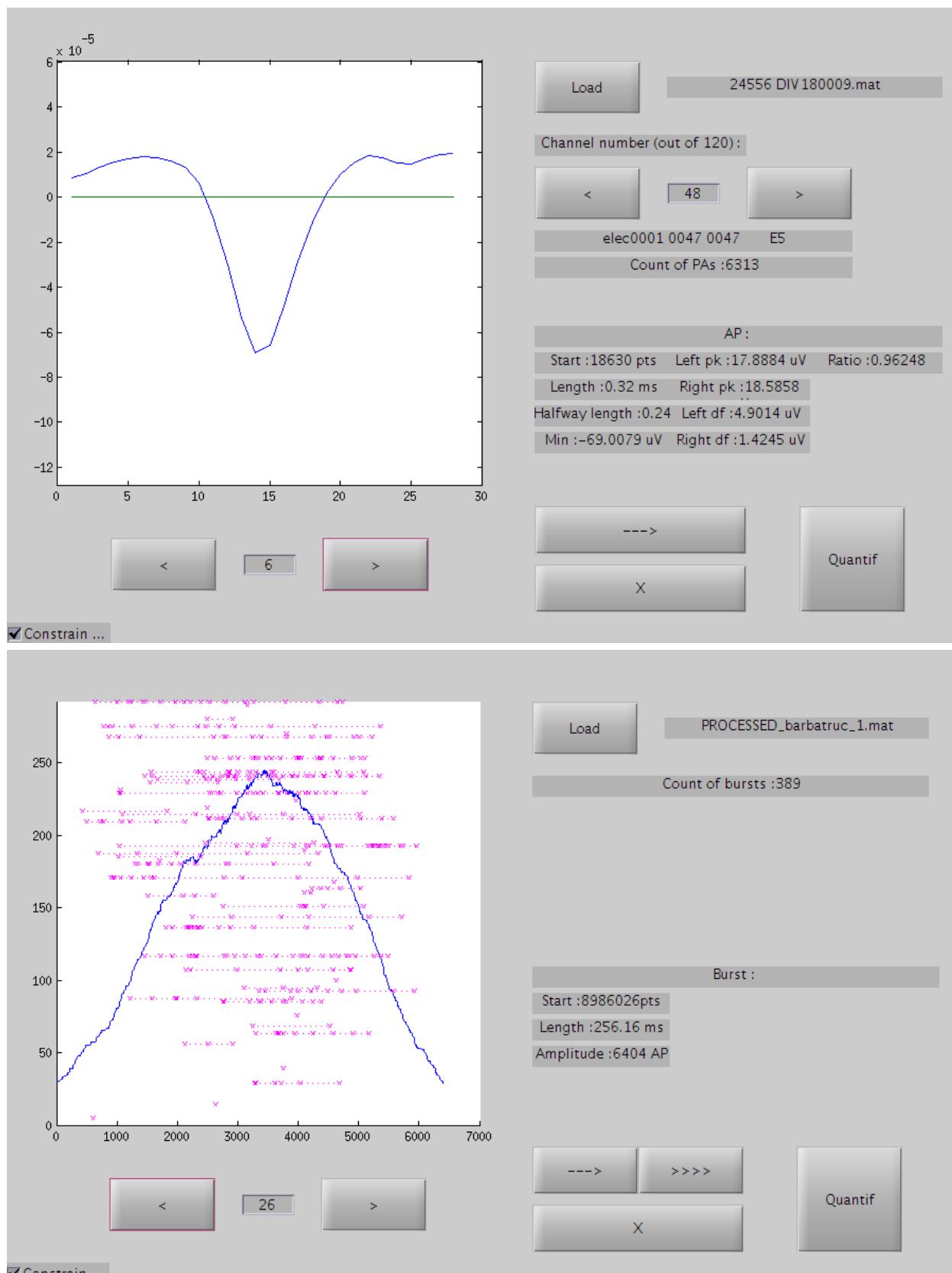


Figure 2.11: The action potentials and bursts display windows, both allowing to select a processed .mat file and to illustrate the extracted events/burst. Both windows allow singular illustration of event/burst, an overall quantification, with an possible extra window (by clicking on the arrow) to create a graphic containing choosen events

Conclusion

Primary neuronal cultures exhibit a strong spontaneous activity during the first two weeks *in vitro*. MEA is a suitable support to perform precise recordings of this spontaneous activity. Some extensive analysis can be done:

- single action potential isolation and quantification
- global characterization of the synchronous spontaneous activity, in the 120 channels

Therefore a more extensive study should be performed to decipher the identity of the burst types, occurring repetitively in the culture. So far, no analysis illustrates the quantity of available parameters and features that can be extracted from this neuronal network activity. Our future perspective is first to develop an automated detection and classification of these spontaneous networks rhythmic activity.

Personally, this first active experience in the research background was very interesting and intense. I was able to brush the issues, the climate, and the working conditions of this domain. I sure opened my mind to the beauty of the applied mathematics.

Chapter 3

Appendices

There follow the main part of the code written and debugged during this internship.

3.1 processing.m

```

1 % processing permits to extract the AP and the bursts from a .mcd file .
2 % processing requires the functions high_processing and burst_processing
3
4 function processing(filename , folderin , folderout)
5 %% Reproducing the folders tree view
6 ind = max(strfind(filename , '\')) ;
7 newdir = strcat(folderout , strrep(filename(1:ind) , folderin , ' ')) ;
8 newfilename = strrep(filename , folderin , folderout); newfilename = strcat(newfilename(1:(end-4)) , '.mat') ;
9
10 if exist(newfilename , 'file') == 0
11
12 t1 = clock;
13 fprintf('\nAnalysis of %s' , filename);
14
15 %% OPENING THE MCS RECORDING WITH NEUROSHARE
16 [~] = ns_SetLibrary('NEUROSHARE_DLL/nsMCDLibrary64.dll');
17 [~, hfile] = ns_OpenFile(filename);
18 [~, nsFileInfo] = ns_GetFileInfo(hfile);
19 channels_count = nsFileInfo.EntityCount;
20
21 %% EXTRACTING HIGH EVENTS
22 EVENTS_high = [];
23
24 fprintf('\nHigh_processing ... Channel: ');
25
26 for i=1:channels_count
27   fprintf('%i' , i);
28
29   % Opening a channel signal
30   [~, nsEntityInfo] = ns_GetEntityInfo(hfile , i);
31   [~, ~, DATA] = ns_GetAnalogData(hfile , i , 1 , nsEntityInfo.ItemCount);
32
33   % Filtering the opened signal
34   [~,DATA_high] = cheby_processing(DATA);
35
36   % Adding the channel events to the final structure
37   EVENTS_high = [EVENTS_high; high_processing(DATA_high , nsEntityInfo.EntityLabel)];
38 end
39
40 %% EXTRACTING BURST EVENTS

```

```

41 recording_length = nsEntityInfo.ItemCount;
42 EVENTS_burst = burst_processing(filename, EVENTS_high, recording_length);
43
44 %% SAVING THE STRUCTURE
45 if (isdir(newdir)==0)
46     mkdir(newdir)
47 end
48
49 save(newfilename, 'filename', 'channels_count', 'recording_length', 'EVENTS_high', ...
    'EVENTS_burst');
50
51 fprintf('\nFile saved in %s\n', newfilename);
52 fprintf('Le traitement a dure %i minutes\n', etime(clock, t1)/60);
53 clear all;
54
55 end
56
57 end

```

3.2 cheby processing.m

```

1 % cheby_processing permits to filters the rawdata, thanks to an order 4 type
2 % II Chebyshev filter
3 % The output "DATA_low" is not yet implemented
4
5 function [DATA_low, DATA_high] = cheby_processing(DATA)
6
7 DATA_low = [];
8 [b,a] = cheby2(4, 25, 20/625, 'high');
9 DATA_high=filtfilt(b,a,DATA);
10
11 end

```

3.3 high processing.m

```

1 % high_processing permits to extract AP from a recording
2 % There is an error of vocab : the field "MEA" of the output structure
3 % should be named "channel"
4
5 function EVENTS_high = high_processing(DATA_high, channel)
6 %% PARAMETERS
7 min_event = 6;
8 threshold = -3.5*std(DATA_high);
9
10 %% EXTRACTING EVENTS
11 DATA_events = min(DATA_high, threshold*ones(size(DATA_high)))-threshold;
12 DATA_nonzero_ind = find(DATA_events);
13 DATA_interevents_time = diff(DATA_nonzero_ind);
14 DATA_interevents_ind = find(DATA_interevents_time > 1);
15 DATA_events_time = diff(DATA_interevents_ind);
16 DATA_events_ind = find(DATA_events_time>=min_event);
17 number_events = length(DATA_events_ind);
18
19 %% Filling the structure
20 EVENTS_high = struct('MEA', channel, 'number_events', number_events, 'start',
    DATA_nonzero_ind(DATA_interevents_ind(DATA_events_ind(1:number_events))+1), 'length',
    DATA_events_time(DATA_events_ind(1:number_events)), 'values', {cell(1, number_events)}, ...

```

```

21 'min' , [] , 'peak_left' , [] , 'peak_right' , [] , 'diff_left' , [] , 'diff_right' , [] , 'halfway_length' , [] , 'ratio' , [] ) ;
22 for i = 1:number_events
23 % The event duration is 10 + length under threshold + 10 (points)
24 event_length = EVENTS_high.length(i);
25 event_ind = (EVENTS_high.start(i)-10):(EVENTS_high.start(i)+event_length+9);
26 event_values = DATA_high(event_ind);
27
28 % Saving the events values
29 EVENTS_high.values(i) = {event_values};
30
31 % Saving the event amplitude (minimal value under threshold)
32 event_min = min(event_values(11:(10+event_length)));
33 EVENTS_high.min(i) = event_min;
34
35 % Calculation of pre and post-threshold datas : left and right peaks, left and right
36 % diff, halfway length and ratio
36 [max_left, max_left_ind] = max(event_values(6:10));
37 max_left_ind = max_left_ind + 5;
38 [max_right, max_right_ind] = max(event_values((11+event_length):(15+event_length)));
39 max_right_ind = max_right_ind + 10 + event_length;
40
41 EVENTS_high.peak_left(i) = max_left;
42 EVENTS_high.peak_right(i) = max_right;
43
44 EVENTS_high.diff_left(i) = max_left - mean(event_values(1:5));
45 EVENTS_high.diff_right(i) = max_right - mean(event_values((16+event_length):(20+
46 event_length)));
47
47 EVENTS_high.halfway_length(i) = length(find(event_values(max_left_ind:max_right_ind)<=
48 event_min+min(max_left, max_right)/2));
48 EVENTS_high.ratio(i) = max_left/max_right;
49 end
50
51 end

```

3.4 burst processing.m

```

1 % burst_processing permits to extract the burst events from the structure EVENTS_high
2
3 function EVENTS_burst = burst_processing(filename, EVENTS_high, recording_length)
4
5 min_inter_events = 5000;
6 min_event_length = 10;
7 max_event_length = 10000;
8 threshold = 20; % sera modifie a la ligne 29
9 threshold_bas = 2;
10
11 M = 120;
12 N = recording_length;
13
14 pas_burst = floor(10*25000/100);
15
16 fprintf('\nBurst_processing ... Channel: ');
17
18 Cover = zeros(1, N);
19 for i = 1:M
20     fprintf(' %i ', i);

```

```

21
22 for j =1:EVENTS_high(i).number_events
23 Cover(max((EVENTS_high(i).start(j)-pas_burst/2),1):min((EVENTS_high(i).start(j)+
24 pas_burst/2), N)) = Cover(max((EVENTS_high(i).start(j)-pas_burst/2),1):min(((
25 EVENTS_high(i).start(j)+pas_burst/2), N))+1;
26 end
27 fprintf ('\n');
28 threshold = max(10, max(Cover)/5);
29
30 %% EXTRACTING EVENTS
31 DATA_events = max(Cover, threshold);
32
33 [pks, locs] = findpeaks(DATA_events, 'MINPEAKDISTANCE', min_inter_events);
34 events_count = length(pks);
35
36 final_i = 0;
37
38 EVENTS_burst = struct('fichier', filename, 'events_count', 0, 'start', [], 'length', [], 'peak', [], 'cover', [], 'values', []);
39
40 for i = 1:events_count
41 beginning = find(Cover(max(locs(i)-max_event_length,1):locs(i))<=threshold_bas, 1, 'last');
42 ending = find(Cover(locs(i):min(locs(i)+max_event_length, N))<=threshold_bas, 1, 'first');
43
44 if or isempty(beginning), isempty(ending))
45 elseif (locs(i) + ending - max(locs(i)-max_event_length,1) + beginning) >=
46 min_event_length %length of any burst must be >= min_event_length
47 final_i = final_i + 1;
48 EVENTS_burst(final_i).peak = pks(i);
49 EVENTS_burst(final_i).start = max(locs(i)-max_event_length,1) + beginning;
50 EVENTS_burst(final_i).length = locs(i) + ending - EVENTS_burst(final_i).start;
51 EVENTS_burst(final_i).cover = Cover(EVENTS_burst(final_i).start:(EVENTS_burst(
52 final_i).start+EVENTS_burst(final_i).length-1));
53 EVENTS_burst(final_i).values = cell(120, 1);
54 for j = 1:120
55 ind = find(and(EVENTS_high(j).start >= EVENTS_burst(final_i).start, EVENTS_high(
56 j).start <= (EVENTS_burst(final_i).start + EVENTS_burst(final_i).length)));
57 EVENTS_burst(final_i).values(j) = {EVENTS_high(j).start(ind)};
58 end
59 end
60
61 EVENTS_burst(1).events_count = final_i;
62 end
63

```

3.5 visual.m

```

1 % visual is a GUI which permits to process and display datas from .med
2 % be careful while closing a window, it could makes visual crash
3
4 function visual
5 %% CONTROL MENU

```

```

6 hfig_menu = figure('Visible', 'On', 'Position', [360 500 250 400]);
7
8 hbutton_menu_proc = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
9     'String', 'PROCESSING', 'Position', [25 275 200 100], ...
10    'Callback', {@hbutton_menu_proc_Callback}, ...
11    'Parent', hfig_menu);
12
13 hbutton_menu_visual = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
14     'String', 'VISUAL', 'Position', [25 150 200 100], ...
15    'Callback', {@hbutton_menu_visual_Callback}, ...
16    'Parent', hfig_menu);
17
18 hbutton_menu_cat = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
19     'String', 'CAT', 'Position', [25 25 200 100], ...
20    'Callback', {@hbutton_menu_cat_Callback}, ...
21    'Parent', hfig_menu);
22
23 hbutton_menu_proc_record = uicontrol('Style', 'pushbutton', 'Visible', 'Off', ...
24     'String', 'RECORD', 'Position', [25 275 85 100], ...
25    'Callback', {@hbutton_menu_proc_record_Callback}, ...
26    'Parent', hfig_menu);
27
28 hbutton_menu_proc_routine = uicontrol('Style', 'pushbutton', 'Visible', 'Off', ...
29     'String', 'ROUTINE', 'Position', [140 275 85 100], ...
30    'Callback', {@hbutton_menu_proc_routine_Callback}, ...
31    'Parent', hfig_menu);
32
33 hbutton_menu_visual_AP = uicontrol('Style', 'pushbutton', 'Visible', 'Off', ...
34     'String', 'AP', 'Position', [25 150 85 100], ...
35    'Callback', {@hbutton_menu_visual_AP_Callback}, ...
36    'Parent', hfig_menu);
37
38 hbutton_menu_visual_burst = uicontrol('Style', 'pushbutton', 'Visible', 'Off', ...
39     'String', 'BURST', 'Position', [140 150 85 100], ...
40    'Callback', {@hbutton_menu_visual_burst_Callback}, ...
41    'Parent', hfig_menu);
42
43 set(hfig_menu, 'Name', 'MENU');
44 movegui(hfig_menu, 'center');
45
46 %% CONTROL PROC RECORD
47
48 hfig_record = figure('Visible', 'Off', 'Position', [360 500 250 500]);
49
50 hbutton_record_files = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
51     'String', 'Files_to_process', 'Position', [25 425 200 50], ...
52    'Callback', {@hbutton_record_files_Callback}, ...
53    'Parent', hfig_record);
54
55 hbutton_record_folderout = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
56     'String', 'Output_folder', 'Position', [25 200 200 50], ...
57    'Callback', {@hbutton_record_folderout_Callback}, ...
58    'Parent', hfig_record);
59
60 hbutton_record_proc = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
61     'String', 'Lets_process!', 'Position', [25 25 200 100], ...
62    'Callback', {@hbutton_record_proc_Callback}, ...
63    'Parent', hfig_record);
64
65

```

```

66 htext_record_files = uicontrol('Style', 'text', ...
67     'String', 'No_selected_files...', ...
68     'Position', [25 280 200 140], ...
69     'Parent', hfig_record);
70
71 htext_record_folderout = uicontrol('Style', 'text', ...
72     'String', 'No_selected_folder...', ...
73     'Position', [25 155 200 40], ...
74     'Parent', hfig_record);
75
76 movegui(hfig_record, 'center');
77
78 %% CONTROL PROC_ROUTINE
79
80 hfig_routine = figure('Visible', 'Off', 'Position', [360 500 250 525]);
81
82 hbutton_routine_folderin = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
83     'String', 'Root_folder', 'Position', [25 450 200 50], ...
84     'Callback', {@hbutton_routine_folderin_Callback}, ...
85     'Parent', hfig_routine);
86
87 hbutton_routine_folder = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
88     'String', 'Folder_to_process', 'Position', [25 325 200 50], ...
89     'Callback', {@hbutton_routine_folder_Callback}, ...
90     'Parent', hfig_routine);
91
92 hbutton_routine_folderout = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
93     'String', 'Output_folder', 'Position', [25 200 200 50], ...
94     'Callback', {@hbutton_routine_folderout_Callback}, ...
95     'Parent', hfig_routine);
96
97 hbutton_routine_proc = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
98     'String', 'Lets_process!', 'Position', [25 25 200 100], ...
99     'Callback', {@hbutton_routine_proc_Callback}, ...
100    'Parent', hfig_routine);
101
102 htext_routine_folderin = uicontrol('Style', 'text', ...
103     'String', 'No_selected_folder...', ...
104     'Position', [25 395 200 40], ...
105     'Parent', hfig_routine);
106
107 htext_routine_folder = uicontrol('Style', 'text', ...
108     'String', 'No_selected_folder...', ...
109     'Position', [25 280 200 40], ...
110     'Parent', hfig_routine);
111
112 htext_routine_folderout = uicontrol('Style', 'text', ...
113     'String', 'No_selected_folder...', ...
114     'Position', [25 155 200 40], ...
115     'Parent', hfig_routine);
116
117 set(hfig_routine, 'Name', 'ROUTINE');
118 movegui(hfig_routine, 'center');
119
120 %% CONTROL VISUAL_AP
121
122 hfig_AP = figure('Visible', 'Off', 'Position', [360 500 900 600]);
123 ha_AP = axes('Units', 'pixels', 'Position', [50 150 400 400], 'Parent', hfig_AP);
124
125 hfig_AP_multi = figure('Visible', 'Off');

```

```

126 ha_AP_multi = axes('Parent', hfig_AP_multi);
127
128 hbutton_AP_go = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
129     'String', '--->', 'Position', [500 85 200 45], ...
130     'Callback', {@hbutton_AP_go_Callback}, ...
131     'Parent', hfig_AP);
132
133 hbutton_AP_remove = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
134     'String', 'X', 'Position', [500 30 200 45], ...
135     'Callback', {@hbutton_AP_remove_Callback}, ...
136     'Parent', hfig_AP);
137
138 hbutton_AP_left = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
139     'String', '<', 'Position', [100 50 100 50], ...
140     'Callback', {@hbutton_AP_left_Callback}, ...
141     'Parent', hfig_AP);
142
143 hbutton_AP_right = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
144     'String', '>', 'Position', [300 50 100 50], ...
145     'Callback', {@hbutton_AP_right_Callback}, ...
146     'Parent', hfig_AP);
147
148 hbutton_channel_left = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
149     'String', '<', 'Position', [500 400 100 50], ...
150     'Callback', {@hbutton_channel_left_Callback}, ...
151     'Parent', hfig_AP);
152
153 hbutton_channel_right = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
154     'String', '>', 'Position', [700 400 100 50], ...
155     'Callback', {@hbutton_channel_right_Callback}, ...
156     'Parent', hfig_AP);
157
158 hbutton_AP_quantif = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
159     'String', 'Quantif', 'Position', [750 85 100 45], ...
160     'Callback', {@hbutton_AP_quantif_Callback}, ...
161     'Parent', hfig_AP);
162 hbutton_AP_rasterplot = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
163     'String', 'Rasterplot', 'Position', [750 30 100 45], ...
164     'Callback', {@hbutton_AP_rasterplot_Callback}, ...
165     'Parent', hfig_AP);
166
167 hbutton_AP_load = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
168     'String', 'Load', 'Position', [500 500 100 50], ...
169     'Callback', {@hbutton_AP_load_Callback}, ...
170     'Parent', hfig_AP);
171
172 hedit_channel = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'edit', ...
173     'String', '0', ...
174     'Position', [625 415 50 20], ...
175     'Callback', {@hedit_channel_Callback}, ...
176     'Parent', hfig_AP);
177
178 hedit_AP = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'edit', ...
179     'String', '0', ...
180     'Position', [225 65 50 20], ...
181     'Callback', {@hedit_AP_Callback}, ...
182     'Parent', hfig_AP);
183
184 hcb_AP = uicontrol('Style', 'checkbox', 'Visible', 'Off', ...
185     'String', 'ConstrainAxe', ...

```

```

186 'Value', 1, 'Position', [0 0 100 20], ...
187 'Callback', {@hcb_AP_Callback}, ...
188 'Parent', hfig_AP);

189 htext_channel = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
190                           'String', 'Channel_number(out_of_120):', ...
191                           'Position', [500 460 200 20], ...
192                           'Parent', hfig_AP);

193 htext_channel_name = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
194                               'String', '', ...
195                               'Position', [500 370 300 20], ...
196                               'Parent', hfig_AP);

197 htext_channel_data = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
198                               'String', '', ...
199                               'Position', [500 345 300 20], ...
200                               'Parent', hfig_AP);

201 htext_AP_data = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
202                           'String', 'AP:', ...
203                           'Position', [500 280 385 20], ...
204                           'Parent', hfig_AP);

205 htext_AP_start = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
206                           'String', '', ...
207                           'Position', [500 255 130 20], ...
208                           'Parent', hfig_AP);

209 htext_AP_length = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
210                           'String', '', ...
211                           'Position', [500 230 130 20], ...
212                           'Parent', hfig_AP);

213 htext_AP_halfway_length = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
214                           'String', '', ...
215                           'Position', [500 205 130 20], ...
216                           'Parent', hfig_AP);

217 htext_AP_min = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
218                           'String', '', ...
219                           'Position', [500 180 130 20], ...
220                           'Parent', hfig_AP);

221 htext_AP_peak_left = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
222                           'String', '', ...
223                           'Position', [630 255 130 20], ...
224                           'Parent', hfig_AP);

225 htext_AP_peak_right = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
226                           'String', '', ...
227                           'Position', [630 230 130 20], ...
228                           'Parent', hfig_AP);

229 htext_AP_diff_left = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
230                           'String', '', ...
231                           'Position', [630 205 130 20], ...
232                           'Parent', hfig_AP);

233 htext_AP_diff_right = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
234                           'String', '', ...
235                           'Position', [630 180 130 20], ...
236                           'Parent', hfig_AP);

```

```

246
247
248
249 htext_AP_ratio = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
250     'String', '', ...
251     'Position', [630 180 130 20], ...
252     'Parent', hfig_AP);
253
254 htext_file = uicontrol('Style', 'text', 'String', 'No_loaded_file...', ...
255     'Position', [625 515 260 20], ...
256     'Parent', hfig_AP);
257
258 set(hfig_AP, 'Name', 'VISUAL_AP');
259 movegui(hfig_AP, 'center');
260 set(hfig_AP, 'toolbar', 'figure');
261
262 %% CONTROL VISUAL_BURST
263
264 hfig_burst = figure('Visible', 'Off', 'Position', [360 500 900 600]);
265 hfig_burst_multi = figure('Visible', 'Off');
266
267 ha_burst = axes('Units', 'pixels', 'Position', [50 150 400 400], 'Parent', hfig_burst);
268 ha_burst_multi = axes('Parent', hfig_burst_multi);
269
270 hold(ha_burst_multi, 'on');
271
272 hbutton_burst_go = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
273     'String', '--->', 'Position', [500 85 100 45], ...
274     'Callback', {@hbutton_burst_go_Callback}, ...
275     'Parent', hfig_burst);
276
277 hbutton_burst_go2 = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
278     'String', '>>>', 'Position', [600 85 100 45], ...
279     'Callback', {@hbutton_burst_go2_Callback}, ...
280     'Parent', hfig_burst);
281
282 hbutton_burst_remove = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
283     'String', 'X', 'Position', [500 30 200 45], ...
284     'Callback', {@hbutton_burst_remove_Callback}, ...
285     'Parent', hfig_burst);
286
287 hbutton_burst_left = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
288     'String', '<', 'Position', [100 50 100 50], ...
289     'Callback', {@hbutton_burst_left_Callback}, ...
290     'Parent', hfig_burst);
291
292 hbutton_burst_right = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
293     'String', '>', 'Position', [300 50 100 50], ...
294     'Callback', {@hbutton_burst_right_Callback}, ...
295     'Parent', hfig_burst);
296
297 hbutton_burst_load = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
298     'String', 'Load', 'Position', [500 500 100 50], ...
299     'Callback', {@hbutton_burst_load_Callback}, ...
300     'Parent', hfig_burst);
301
302 hbutton_burst_quantif = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'pushbutton', ...
303     'String', 'Quantif', 'Position', [750 30 100 100], ...
304     'Callback', {@hbutton_burst_quantif_Callback}, ...
305

```

```

306         'Parent', hfig_burst);
307
308 hcb_burst = uicontrol('Style', 'checkbox', 'Visible', 'Off',...
309     'String', 'Constrain_axes',...
310     'Value', 1, 'Position',[0 0 100 20], ...
311     'Callback', {@hcb_burst_Callback}, ...
312     'Parent', hfig_burst);
313
314 hedit_burst = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'edit', ...
315     'String', '0', ...
316     'Position', [225 65 50 20], ...
317     'Callback', {@hedit_burst_Callback}, ...
318     'Parent', hfig_burst);
319
320 htext_burst_file = uicontrol('Style', 'text', ...
321     'String', 'No_loaded_file...', ...
322     'Position', [625 515 250 20], ...
323     'Parent', hfig_burst);
324
325 htext_file_data = uicontrol('Style', 'text', 'Visible', 'Off',...
326     'String', '0', ...
327     'Position', [500 460 375 20], ...
328     'Parent', hfig_burst);
329
330 htext_burst_data = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
331     'String', 'Burst:', ...
332     'Position', [500 280 385 20], ...
333     'Parent', hfig_burst);
334
335 htext_burst_start = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
336     'String', '', ...
337     'Position', [500 255 130 20], ...
338     'Parent', hfig_burst);
339
340 htext_burst_length = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
341     'String', '', ...
342     'Position', [500 230 130 20], ...
343     'Parent', hfig_burst);
344
345 htext_burst_max = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
346     'String', '', ...
347     'Position', [500 205 130 20], ...
348     'Parent', hfig_burst);
349
350 htext_burst_AP_count = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
351     'String', '', ...
352     'Position', [500 180 130 20], ...
353     'Parent', hfig_burst);
354
355 set(hfig_burst, 'Name', 'VISUALBURST');
356 movegui(hfig_burst, 'center');
357 set(hfig_burst, 'toolbar', 'figure');
358
359 %% CONTROL CAT
360
361 hfig_cat = figure('Visible', 'Off', 'Position', [360 500 250 625]);
362
363 hfig_cat_proc = figure('Visible', 'Off', 'Position', [360 500 250 400]);
364
365

```

```

366 hbutton_cat_load = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
367     'String', 'Load', 'Position', [25 500 200 100], ...
368     'Callback', {@hbutton_cat_load_Callback}, ...
369     'Parent', hfig_cat);
370
371 hbutton_cat_cut = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
372     'String', 'Cut', 'Position', [150 0 100 100], ...
373     'Callback', {@hbutton_cat_cut_Callback}, ...
374     'Parent', hfig_cat_proc);
375
376 hbutton_cat_continue = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
377     'String', 'Dont_cut', 'Position', [150 110 100 100], ...
378     'Callback', {@hbutton_cat_continue_Callback}, ...
379     'Parent', hfig_cat_proc);
380
381 hbutton_cat_plot = uicontrol('Style', 'pushbutton', ...
382     'String', 'Rasterplot', 'Position', [25 250 200 75], ...
383     'Callback', {@hbutton_cat_plot_Callback}, ...
384     'Parent', hfig_cat_proc);
385
386 hedit_cat_left = uicontrol('Visible', 'On', 'Style', 'edit', ...
387     'String', '0', ...
388     'Position', [0 25 60 20], ...
389     'Parent', hfig_cat_proc);
390
391 hedit_cat_right = uicontrol('Visible', 'On', 'Style', 'edit', ...
392     'String', '0', ...
393     'Position', [80 25 60 20], ...
394     'Parent', hfig_cat_proc);
395
396 htext_cat_state = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
397     'String', '', ...
398     'Position', [0 240 250 20], ...
399     'Parent', hfig_cat);
400
401 htext_cat_load = uicontrol('Visible', 'On', 'Style', 'text', ...
402     'String', 'No_loaded_files', ...
403     'Position', [0 280 250 200], ...
404     'Parent', hfig_cat);
405
406 htext_cat_new = uicontrol('Visible', 'Off', 'Style', 'text', ...
407     'String', 'No_loaded_files', ...
408     'Position', [0 20 250 200], ...
409     'Parent', hfig_cat);
410
411 htext_cat_step = uicontrol('Visible', 'On', 'Style', 'text', ...
412     'String', '', ...
413     'Position', [0 375 250 20], ...
414     'Parent', hfig_cat_proc);
415
416 htext_cat_file = uicontrol('Visible', 'On', 'Style', 'text', ...
417     'String', '', ...
418     'Position', [0 350 250 20], ...
419     'Parent', hfig_cat_proc);
420
421 htext_cat_left = uicontrol('Visible', 'On', 'Style', 'text', ...
422     'String', 'Left_cut', ...
423     'Position', [0 55 60 20], ...
424     'Parent', hfig_cat_proc);
425

```

```

426 htext_cat_right = uicontrol('Visible', 'On', 'Style', 'text', ...
427     'String', 'Right_cut', ...
428     'Position', [80 55 60 20], ...
429     'Parent', hfig_cat_proc);
430
431 movegui(hfig_cat, 'center');
432 %% BODY
433
434 % MENU's variables
435 folderin = '';
436 folderout = '';
437 folder = '';
438
439 % RECORD's variables
440 record_filename = '';
441 record.pathname = '';
442 record_folderout = '';
443 record_files_count = '';
444
445 % AP's variables
446 i_AP = 1;
447 AP_filename = '';
448 AP.pathname = '';
449 AP_fullfilename = '';
450 AP_data_struct = [];
451 AP_data = [];
452 AP_multi_values = [];
453 AP_multi_legend = cell(0);
454 AP_ymin = 0;
455 AP_ymax = 0;
456 events_count = 1;
457 i_channel = 1;
458
459 % BURST's variables
460 i_burst = 1;
461 burst_filename = '';
462 burst.pathname = '';
463 burst_fullfilename = '';
464 bursts_count = 1;
465 burst_data_struct = [];
466 burst_data = [];
467 burst_ymax = 0;
468 burst_multi_values = [];
469 burst_multi_legend = cell(0);
470
471 % CAT's variables
472 files_count = 0;
473 i_cat = 1;
474 n_cat = 1;
475 M_cat = [];
476 files = [];
477 time = 0;
478 filenames = [];
479 cat.pathname = '';
480 newfilenames = [];
481
482 %% CALLBACKS MENU
483
484 function hbutton_menu_proc_Callback(~, ~)

```

```

486     set(hbutton_menu_proc, 'Visible', 'Off');
487     set(hbutton_menu_proc_record, 'Visible', 'On');
488     set(hbutton_menu_proc_routine, 'Visible', 'On');
489 end

490
491 function hbutton_menu_visual_Callback(~, ~)
492     set(hbutton_menu_visual, 'Visible', 'Off');
493     set(hbutton_menu_visual_AP, 'Visible', 'On');
494     set(hbutton_menu_visual_burst, 'Visible', 'On');
495 end

496
497 function hbutton_menu_cat_Callback(~, ~)
498     set(hfig_menu, 'Visible', 'Off');
499     set(hfig_cat, 'Visible', 'On');
500 end

501
502 function hbutton_menu_proc_record_Callback(~, ~)
503     set(hfig_menu, 'Visible', 'Off');
504     set(hfig_record, 'Visible', 'On');
505 end

506
507 function hbutton_menu_proc_routine_Callback(~, ~)
508     set(hfig_menu, 'Visible', 'Off');
509     set(hfig_routine, 'Visible', 'On');
510 end

511
512 function hbutton_menu_visual_AP_Callback(~, ~)
513     set(hfig_menu, 'Visible', 'Off');
514     set(hfig_AP, 'Visible', 'On');
515 end

516
517 function hbutton_menu_visual_burst_Callback(~, ~)
518     set(hfig_menu, 'Visible', 'Off');
519     set(hfig_burst, 'Visible', 'On');
520 end

521 %% CALLBACKS PROC_RECORD
522
523 function hbutton_record_files_Callback(~, ~)
524     set(htext_record_files, 'String', '');
525
526 [record_filename, record_pathname, filterindex] = uigetfile({ '*.mcd', 'MCD_Files (*.mcd)' }, ...
527                                         'Pick some mcd files', ...
528                                         'MultiSelect', 'On');

529
530 if filterindex
531     record_files_count = length(record_filename);
532     set(htext_record_files, 'String', record_filename);
533 end
534 end

535
536 function hbutton_record_folderout_Callback(~, ~)
537     record_folderout = uigetdir('C:\Users\raphael\Desktop');
538     set(htext_record_folderout, 'String', record_folderout);
539 end

540
541 function hbutton_record_proc_Callback(~, ~)
542     set(hbutton_record_proc, 'String', 'Processing... ');
543     if iscell(record_filename)

```

```

544     for i =1:record_files_count
545         processing(strcat(record_pathname, record_filename{i}), strcat(
546             record_pathname), strcat(record_folderout, '\'));
547     end
548     else
549         processing(strcat(record_pathname, record_filename), strcat(record_pathname)
550             , strcat(record_folderout, '\'));
551     end
552     set(hbutton_record_proc, 'String', 'Processed! Click to process again');
553 end

554 %% CALLBACKS PROC_ROUTINE
555
556 function hbutton_routine_folderin_Callback(~, ~)
557     folderin = uigetdir('C:\');
558     set(htext_routine_folderin, 'String', folderin);
559 end
560
561 function hbutton_routine_folder_Callback(~, ~)
562     if isempty(folderin)
563         folder = uigetdir('C:\');
564     else
565         folder = uigetdir(strcat(folderin, '\'));
566     end
567     set(htext_routine_folder, 'String', folder);
568 end
569
570 function hbutton_routine_folderout_Callback(~, ~)
571     folderout = uigetdir('C:\Users\raphael\Desktop');
572     set(htext_routine_folderout, 'String', folderout);
573 end
574
575 function hbutton_routine_proc_Callback(~, ~)
576     set(hbutton_routine_proc, 'String', 'Processing... ');
577     routine(strcat(folder, '\'), strcat(folderin, '\'), strcat(folderout, '\'));
578     set(hbutton_routine_proc, 'String', 'Processed! Click to process again');
579 end

580 %% CALLBACKS VISUAL_AP
581
582 function hbutton_AP_left_Callback(~, ~)
583     i_AP = max(1, i_AP-1);
584     set(hedit_AP, 'String', int2str(i_AP));
585     hedit_AP_Callback;
586 end
587
588 function hbutton_AP_right_Callback(~, ~)
589     i_AP=min(i_AP+1, events_count);
590     set(hedit_AP, 'String', int2str(i_AP));
591     hedit_AP_Callback;
592 end
593
594 function hbutton_channel_left_Callback(~, ~)
595     i_channel = i_channel -1;
596     set(hedit_channel, 'String', int2str(i_channel));
597     hedit_channel_Callback;
598 end
599
600 function hbutton_channel_right_Callback(~, ~)

```

```

602 i_channel = i_channel+1;
603 set(hedit_channel, 'String', int2str(i_channel));
604 hedit_channel_Callback;
605 end

606
607 function hbutton_AP_load_Callback(~, ~)
608 i_AP = 0;
609 i_channel = 0;
610 cla(ha_AP);
611 set(hedit_AP, 'String', '0');
612 set(hbutton_AP_left, 'Visible', 'Off');
613 set(hbutton_AP_right, 'Visible', 'Off');
614 set(hbutton_channel_left, 'Visible', 'Off');
615 set(hbutton_channel_right, 'Visible', 'Off');
616 set(hedit_AP, 'Visible', 'Off');
617 set(htext_channel_name, 'Visible', 'Off');
618 set(htext_channel_data, 'Visible', 'Off');
619 set(htext_channel, 'Visible', 'Off');
620 set(hedit_channel, 'Visible', 'Off');
621 set(hedit_channel, 'String', '0');
622 set(hbutton_AP_go, 'Visible', 'Off');
623 set(hbutton_AP_remove, 'Visible', 'Off');
624 set(htext_file_data, 'Visible', 'Off');
625 set(hbutton_AP_quantif, 'Visible', 'Off');
626 set(hbutton_AP_rasterplot, 'Visible', 'Off');
627 set(hcb_AP, 'Visible', 'Off');
628 set(htext_AP_data, 'Visible', 'Off');
629 set(htext_AP_start, 'Visible', 'Off');
630 set(htext_AP_length, 'Visible', 'Off');
631 set(htext_AP_halfway_length, 'Visible', 'Off');
632 set(htext_AP_min, 'Visible', 'Off');
633 set(htext_AP_peak_left, 'Visible', 'Off');
634 set(htext_AP_peak_right, 'Visible', 'Off');
635 set(htext_AP_diff_left, 'Visible', 'Off');
636 set(htext_AP_diff_right, 'Visible', 'Off');
637 set(htext_AP_ratio, 'Visible', 'Off');

638
639 [AP_filename, AP_pathname, filterindex] = uigetfile({ '*.m;*.mat', 'MATLAB Files (*.m
640 , *.mat)'}, ...
641                                         'Pick a file containing '
642                                         'EVENTS_high');

643 if filterindex
644     AP_fullfilename = strcat(AP_pathname, AP_filename);
645     AP_data_struct = load(AP_fullfilename);

646     set(htext_file, 'String', AP_filename);
647     set(hedit_channel, 'Visible', 'On');
648     set(htext_channel, 'Visible', 'On');
649     set(hbutton_channel_left, 'Visible', 'On');
650     set(hbutton_channel_right, 'Visible', 'On');
651     set(hbutton_AP_quantif, 'Visible', 'On');
652     set(hbutton_AP_rasterplot, 'Visible', 'On');
653     set(hcb_AP, 'Visible', 'On');

654     [mini, maxi] = cellfun(@AP_minmax, {AP_data_struct.EVENTS_high.values}, '
655     UniformOutput', 0);
656     AP_ymin = min(cell2mat(mini)); AP_ymax = max(cell2mat(maxi));

657     hedit_channel_Callback;
658

```

```

659
660     else
661         set(htext_file, 'String', 'No_loaded_file...');
662     end
663 end

664 function hedit_channel_Callback(~, ~)
665     i_AP = 0;
666     i_channel = min(max(str2num(get(hedit_channel, 'String'))), 1), 120);
667     AP_data = AP_data_struct.EVENTS_high(i_channel);
668     events_count = AP_data.number_events;

669 if events_count > 0
670     i_AP = 1;
671     set(htext_AP_data, 'Visible', 'On');
672     set(hbutton_AP_left, 'Visible', 'On');
673     set(hbutton_AP_right, 'Visible', 'On');
674     set(hbutton_AP_go, 'Visible', 'On');
675     set(hbutton_AP_remove, 'Visible', 'On');
676     set(hedit_AP, 'String', '1');
677     hedit_AP_Callback;
678 else
679     set(htext_AP_data, 'Visible', 'Off');
680     set(htext_AP_start, 'Visible', 'Off');
681     set(htext_AP_length, 'Visible', 'Off');
682     set(htext_AP_halfway_length, 'Visible', 'Off');
683     set(htext_AP_min, 'Visible', 'Off');
684     set(htext_AP_peak_left, 'Visible', 'Off');
685     set(htext_AP_peak_right, 'Visible', 'Off');
686     set(htext_AP_diff_left, 'Visible', 'Off');
687     set(htext_AP_diff_right, 'Visible', 'Off');
688     set(htext_AP_ratio, 'Visible', 'Off');

689     set(hbutton_AP_left, 'Visible', 'Off');
690     set(hbutton_AP_right, 'Visible', 'Off');
691     set(hbutton_AP_go, 'Visible', 'Off');
692     set(hbutton_AP_remove, 'Visible', 'Off');
693     cla(ha_AP);
694 end

695
696     set(htext_channel_name, 'String', AP_data.MEA, 'Visible', 'On');
697     txt = strcat('Count_of_PAs:', int2str(events_count));
698     set(htext_channel_data, 'String', txt, 'Visible', 'On');
699     set(hedit_channel, 'String', int2str(i_channel));
700     set(hedit_AP, 'Visible', 'On');
701 end

702
703 function hedit_AP_Callback(~, ~)
704     i_AP = min(max(str2num(get(hedit_AP, 'String'))), 1), events_count);

705     plot(ha_AP, [cell2mat(AP_data.values(i_AP)); zeros(size(cell2mat(AP_data.values(i_AP))))]);
706     if get(hcb_AP, 'Value')
707         set(ha_AP, 'YLim', [AP_ymin, AP_ymax]);
708     end

709     set(hedit_AP, 'String', int2str(i_AP));
710     set(htext_AP_start, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Start:', int2str(AP_data.start(i_AP)), ' pts'));
711     set(htext_AP_length, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Length:', num2str(AP_data.length(i_AP)/25000*1000), ' ms'));
712
713
714
715

```

```

716 set(htext_AP_halfway_length, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Halfway_length:', num2str(AP_data.halfway_length(i_AP)/25000*1000), 'ms'));
717 set(htext_AP_min, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Min:', num2str(AP_data.min(i_AP)*1000000), 'uV'));
718 set(htext_AP_peak_left, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Left_peak:', num2str(AP_data.peak_left(i_AP)*1000000), 'uV'));
719 set(htext_AP_peak_right, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Right_peak:', num2str(AP_data.peak_right(i_AP)*1000000), 'uV'));
720 set(htext_AP_diff_left, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Left_diff:', num2str(AP_data.diff_left(i_AP)*1000000), 'uV'));
721 set(htext_AP_diff_right, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Right_diff:', num2str(AP_data.diff_right(i_AP)*1000000), 'uV'));
722 set(htext_AP_ratio, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Ratio:', num2str(AP_data.ratio(i_AP)))); 
723 end
724
725 function hbutton_AP_go_Callback(~,~)
726 newAP = cell2mat(AP_data.values(i_AP));
727 [L1, 1] = size(AP_multi_values);
728 L2 = length(newAP);
729
730 if L1 > L2
731     newAP = [newAP; nan(L1-L2,1)];
732 elseif L1 <= L2
733     AP_multi_values = [AP_multi_values; nan(L2-L1, 1)];
734 end
735
736 AP_multi_values = [AP_multi_values, newAP];
737 AP_multi_legend = [AP_multi_legend; {strcat('Channel', int2str(i_channel), 'AP', int2str(i_AP))}];
738
739 plot(ha_AP_multi, AP_multi_values);
740 legend(ha_AP_multi, AP_multi_legend);
741 hold(ha_AP_multi, 'on');
742 plot(ha_AP_multi, zeros(size(AP_multi_values(:,1))), 'k');
743 hold(ha_AP_multi, 'off');
744 set(hfig_AP_multi, 'Visible', 'On');
745 end
746
747 function hbutton_AP_remove_Callback(~,~)
748 cla(ha_AP_multi);
749 if ~isempty(AP_multi_values)
750     [~, c] = size(AP_multi_values);
751     if c>1
752         AP_multi_values = AP_multi_values(:, 1:(end-1));
753         AP_multi_values = AP_multi_values(:, ~all(isnan(AP_multi_values), 1));
754         AP_multi_legend = AP_multi_legend(1:(end-1),:);
755
756 plot(ha_AP_multi, AP_multi_values);
757 legend(ha_AP_multi, AP_multi_legend);
758 hold(ha_AP_multi, 'on');
759 plot(ha_AP_multi, zeros(size(AP_multi_values(:,1))), 'k');
760 hold(ha_AP_multi, 'off');
761 else
762     AP_multi_values = [];
763     AP_multi_legend = [];
764     set(hfig_AP_multi, 'Visible', 'Off');
765 end
766 end
767 end

```

```

768
769 function hbutton_AP_quantif_Callback(~,~)
770     figures_AP(AP_data_struct);
771 end
772
773 function hbutton_AP_rasterplot_Callback(~,~)
774     figures_rasterplot(AP_data_struct);
775 end
776
777 function hcb_AP_Callback(~,~)
778     hedit_AP_Callback;
779 end
780
781 %% CALLBACKS VISUAL_BURST
782
783 function hbutton_burst_left_Callback(~, ~)
784     i_burst = max(1, i_burst-1);
785     set(hedit_burst, 'String', int2str(i_burst));
786     hedit_burst_Callback;
787 end
788
789 function hbutton_burst_right_Callback(~, ~)
790     i_burst = min(i_burst+1, bursts_count);
791     set(hedit_burst, 'String', int2str(i_burst));
792     hedit_burst_Callback;
793 end
794
795 function hbutton_burst_load_Callback(~, ~)
796     i_burst = 1;
797     cla(ha_burst);
798     set(hedit_burst, 'String', '1');
799     set(hbutton_burst_left, 'Visible', 'Off');
800     set(hbutton_burst_right, 'Visible', 'Off');
801     set(hedit_burst, 'Visible', 'Off');
802     set(hbutton_burst_go, 'Visible', 'Off');
803     set(hbutton_burst_go2, 'Visible', 'Off');
804     set(hbutton_burst_remove, 'Visible', 'Off');
805     set(hbutton_burst_quantif, 'Visible', 'Off');
806     set(hcb_burst, 'Visible', 'Off');
807     set(htext_file_data, 'Visible', 'Off');
808
809     set(htext_burst_data, 'Visible', 'Off');
810     set(htext_burst_start, 'Visible', 'Off');
811     set(htext_burst_length, 'Visible', 'Off');
812     set(htext_burst_max, 'Visible', 'Off');
813     set(htext_burst_AP_count, 'Visible', 'Off');
814
815 [burst_filename, burst.pathname, filterindex] = uigetfile({'*.*;*.mat', 'MATLAB_'
816     Files(*.*;*.mat)'}, ...
817                                         'Pick a file containing '
818                                         'EVENTS_burst');
819
820 if filterindex
821     burst_fullfilename = strcat(burst.pathname, burst_filename);
822     burst_data_struct = load(burst_fullfilename);
823     burst_data_struct = burst_data_struct.EVENTS_burst;
824
825     bursts_count = burst_data_struct.events_count;

```

```

826 set(htext_burst_file, 'String', burst_filename);
827 set(htext_file_data, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Count_of_bursts:', 
828     int2str(bursts_count)));
829
830 if bursts_count
831     set(htext_burst_file, 'String', burst_filename);
832     set(hbutton_burst_left, 'Visible', 'On');
833     set(hbutton_burst_right, 'Visible', 'On');
834     set(hedit_burst, 'Visible', 'On');
835     set(hbutton_burst_go, 'Visible', 'On');
836     set(hbutton_burst_go2, 'Visible', 'On');
837     set(hbutton_burst_remove, 'Visible', 'On');
838     set(hbutton_burst_quantif, 'Visible', 'On');
839     set(hcb_burst, 'Visible', 'On');
840     set(htext_file_data, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Count_of_bursts:', 
841         int2str(bursts_count)));
842
843     set(htext_burst_data, 'Visible', 'On');
844     set(htext_burst_start, 'Visible', 'On');
845     set(htext_burst_length, 'Visible', 'On');
846     set(htext_burst_max, 'Visible', 'On');
847     set(htext_burst_AP_count, 'Visible', 'On');
848
849     maximums = cellfun(@max, {burst_data_struct.cover}, 'UniformOutput', 0);
850     burst_ymax = max(cell2mat(maximums));
851
852     hedit_burst_Callback;
853 end
854 else
855     set(htext_burst_file, 'String', 'No_loaded_file...');
856 end
857
858 function hedit_burst_Callback(~, ~)
859     cla(ha_burst);
860
861     i_burst = min(max(str2num(get(hedit_burst, 'String'))), 1), bursts_count);
862     burst_data = burst_data_struct(i_burst);
863
864     hold(ha_burst, 'on');
865     plot(ha_burst, burst_data.cover, 'b');
866
867     if get(hcb_burst, 'Value')
868         ymax = burst_ymax;
869     else
870         ymax = max(burst_data.cover);
871     end
872     for i = 1:120
873         plot(ha_burst, cell2mat(burst_data.values(i)) - burst_data.start, (i*ymax/120)*
874             ones(size(cell2mat(burst_data.values(i)))), ':m');
875     end
876     set(ha_burst, 'Ylim', [0, ymax]);
877
878     set(hedit_burst, 'String', int2str(i_burst));
879
880     set(htext_burst_start, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Start:', int2str(
881         burst_data.start), 'pts'));
882     set(htext_burst_length, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Length:', num2str(
883         burst_data.length/25000*1000), 'ms'));

```

```

881     set(htext_burst_max, 'Visible', 'On', 'String', strcat('Amplitude: ', int2str(
882         burst_data.peak), '_AP'));
883     set(htext_burst_AP_count, 'Visible', 'On', 'String', strcat('AP_count: ', int2str(
884         sum(cellfun(@length, burst_data.values))), '_AP'));
885 end
886
887 function hbutton_burst_go_Callback(~, ~)
888     newburst = cell2mat({burst_data.cover});
889     [L1, l] = size(burst_multi_values);
890     L2 = length(newburst);
891
892     if L1 > L2
893         newburst = [newburst; nan(L1-L2, 1)];
894     elseif L1 <= L2
895         burst_multi_values = [burst_multi_values; nan(L2-L1, l)];
896     end
897
898     burst_multi_values = [burst_multi_values, newburst];
899     burst_multi_legend = [burst_multi_legend; {strcat('Burst', int2str(i_burst))}];
900
901     plot(ha_burst_multi, burst_multi_values);
902     legend(ha_burst_multi, burst_multi_legend);
903
904     set(hfig_burst_multi, 'Visible', 'On');
905 end
906
907 function hbutton_burst_go2_Callback(~, ~)
908     hbutton_burst_go_Callback;
909     randcolor = [rand rand rand];
910     for i = 1:L0
911         plot(ha_burst_multi, cell2mat(burst_data.values(i)) - burst_data.start, (i *
912             burst_ymax/120)*ones(size(cell2mat(burst_data.values(i)))), ':m', 'Color',
913             randcolor);
914     end
915
916 function hbutton_burst_remove_Callback(~, ~)
917     cla(ha_burst_multi);
918     if ~isempty(burst_multi_values)
919         [~, c] = size(burst_multi_values);
920         if c>1
921             burst_multi_values = burst_multi_values(:, 1:(end-1));
922             burst_multi_values = burst_multi_values(:, ~all(isnan(burst_multi_values), 1));
923             %ligne magique
924             burst_multi_legend = burst_multi_legend(1:(end-1), :);
925
926             plot(ha_burst_multi, burst_multi_values);
927             legend(ha_burst_multi, burst_multi_legend);
928         else
929             burst_multi_values = [];
930             burst_multi_legend = [];
931             set(hfig_burst_multi, 'Visible', 'Off');
932         end
933     end
934
935 function hbutton_burst_quantif_Callback(~, ~)
936     figures_burst(burst_data_struct);
937 end

```

```

936
937     function hcb_burst_Callback(~,~)
938         hedit_burst_Callback;
939     end
940
941 %% CALLBACKS CAT
942
943     function hbutton_cat_load_Callback(~,~)
944
945         [filenames, cat_pathname, filterindex] = uigetfile({'*.m;*.mat', 'MATLAB Files (*.m, *.mat)'}, ...
946                                         'Pick some files containing ...
947                                         EVENTS_high', 'MultiSelect', 'On
948                                         ');
949
950         set(htext_cat_new, 'Visible', 'Off');
951
952         n_cat = 1;
953         M_cat = [0; 1];
954         time = 0;
955
956         if filterindex
957             if iscell(filenames)
958                 files_count = length(filenames);
959                 i_cat = 1;
960                 set(htext_cat_state, 'String', 'Concatenating...', 'Visible', 'On');
961                 set(htext_cat_load, 'String', filenames);
962                 set(hfig_cat_proc, 'Visible', 'On');
963                 set(htext_cat_step, 'String', strcat('Step', num2str(i_cat), '_out_of_',
964                                         num2str(files_count)));
965                 set(htext_cat_file, 'String', filenames{i_cat});
966                 files = cell(files_count, 1);
967                 for j = 1:files_count
968                     files{j} = load(strcat(cat_pathname, filenames{j}));
969                 end
970             else
971                 set(htext_cat_load, 'String', 'Pick multiple files');
972             end
973         end
974
975         function hbutton_cat_cut_Callback(~,~)
976             n_cat = n_cat+1;
977             M_cat = [M_cat, [time + str2num(get(hedit_cat_left, 'String')); i_cat], [time +
978                                         str2num(get(hedit_cat_right, 'String')); i_cat]];
979             set(hedit_cat_left, 'String', '0');
980             set(hedit_cat_right, 'String', '0');
981             hbutton_cat_continue_Callback;
982         end
983
984         function hbutton_cat_continue_Callback(~,~)
985             time = time + files{i_cat}.recording_length;
986             if i_cat == files_count
987                 M_cat = [M_cat, [time; files_count]];
988                 cat_proc;
989             else
990                 i_cat = i_cat+1;
991                 set(htext_cat_file, 'String', filenames{i_cat});
992             end

```

```

991 set(htext_cat_step, 'String', strcat('Step', num2str(i_cat), '_out_of_', num2str(
992 files_count)));
993 end

994
995 function cat_proc
996     retard = [0, files{1}.recording_length];
997     newfilenames = cell(n_cat, 1);

998
999 for i = 2:files_count
1000     retard = [retard, retard(end)+files{i}.recording_length];
1001 end
1002 for j = 1:n_cat
1003     filename = '';
1004     channels_count = 120;

1005
1006 EVENTS_high = [];

1007 t1 = M_cat(1,2*j-1);
1008 t2 = M_cat(1,2*j);
1009 recording_length = t2-t1;

1010 slave = struct('MEA', [], 'number_events', [0], 'start', [], 'length', [], ...
1011                 'values', [], 'min', [], 'peak_left', [], 'peak_right', [], 'diff_left', [],
1012                 'diff_right', [], 'halfway_length', [], 'ratio', []);

1013
1014 for l = 1:120
1015     EVENTS_high = [EVENTS_high; slave];
1016 end

1017
1018 for k = M_cat(2,2*j-1):M_cat(2,2*j)

1019     filename = strcat(filename, ',', files{k}.filename);

1020     delta = retard(k);
1021     for i = 1:120
1022         ind = find(and(files{k}.EVENTS_high(i).start+delta > t1, files{k}.
1023                         EVENTS_high(i).start+delta < t2));
1024         EVENTS_high(i).MEA = strcat(EVENTS_high(i).MEA, ',', files{k}.EVENTS_high(i).
1025                         .MEA);
1026         EVENTS_high(i).number_events = EVENTS_high(i).number_events + length(ind);
1027         EVENTS_high(i).start = [EVENTS_high(i).start, files{k}.EVENTS_high(i).start(
1028                         ind) - (M_cat(1,2*j-1) - retard(M_cat(2,2*j-1))) + (retard(k) - retard(
1029                         M_cat(2,2*j-1)))]; % attention au retard
1030         EVENTS_high(i).length = [EVENTS_high(i).length, files{k}.EVENTS_high(i).
1031                         length(ind)];
1032         EVENTS_high(i).values = [EVENTS_high(i).values, files{k}.EVENTS_high(i).
1033                         values(ind)];
1034         EVENTS_high(i).min = [EVENTS_high(i).min, files{k}.EVENTS_high(i).min(ind)];
1035         EVENTS_high(i).peak_left = [EVENTS_high(i).peak_left, files{k}.EVENTS_high(i).
1036                         peak_left(ind)];
1037         EVENTS_high(i).peak_right = [EVENTS_high(i).peak_right, files{k}.EVENTS_high(i).
1038                         peak_right(ind)];
1039         EVENTS_high(i).diff_left = [EVENTS_high(i).diff_left, files{k}.EVENTS_high(i).
1040                         diff_left(ind)];
1041         EVENTS_high(i).diff_right = [EVENTS_high(i).diff_right, files{k}.EVENTS_high(i).
1042                         diff_right(ind)];
1043         EVENTS_high(i).halfway_length = [EVENTS_high(i).halfway_length, files{k}.
1044                         halfway_length(ind)];

```

```
036     EVENTS_high(i).ratio = [EVENTS_high(i).ratio, files{k}.EVENTS_high(i).ratio(037         ind)];038 end039040041 [newfilenames{j}, newpathname, filterindex] = uiputfile('*.mat', strcat('Save_042     the_file', num2str(j), '_as'), strcat(cat.pathname, 'PROCESSED_', filenames043     {1}(1:(end-4)), '_', num2str(j), '.mat'));044 if filterindex045     EVENTS_burst = burst_processing(filename, EVENTS_high, recording_length);046     save(strcat(newpathname, newfilenames{j}), 'filename', 'channels_count', '047     recording_length', 'EVENTS_high', 'EVENTS_burst');048 end049 set(htext_cat_state, 'String', 'Concatenated!_Load_to_concatenate_again');050 set(htext_cat_new, 'String', newfilenames, 'Visible', 'On');051 set(hfig_cat_proc, 'Visible', 'Off');052 function hbutton_cat_plot_Callback(~,~)053     figures_rasterplot(files{i_cat});054 end055056 end
```

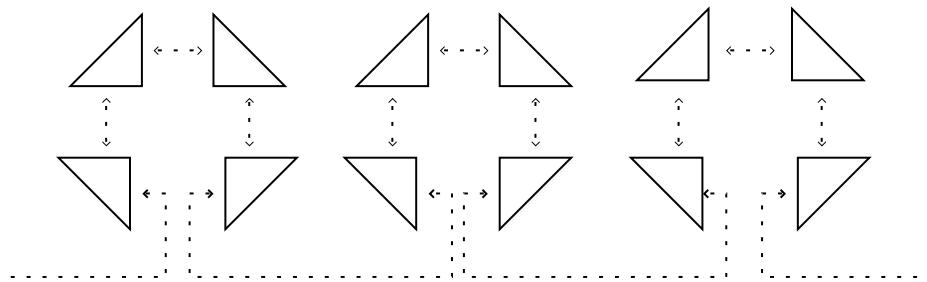
Chapitre 5

TER de M1 : Géométrie plate

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

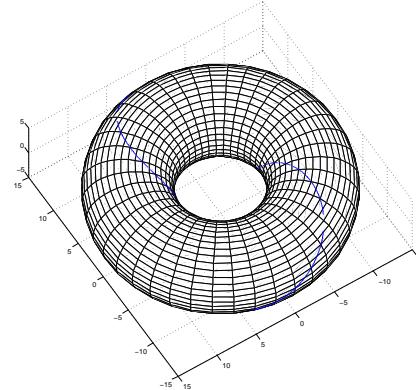
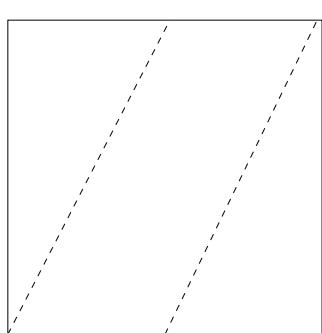
MÉMOIRE DE TER

Équidistribution des directions de connexions de singularités en une singularité d'une surface de translation

Raphaël TINARRAGE
OLivier STIELTEL*Encadrant* : Frédéric PAULIN

Introduction

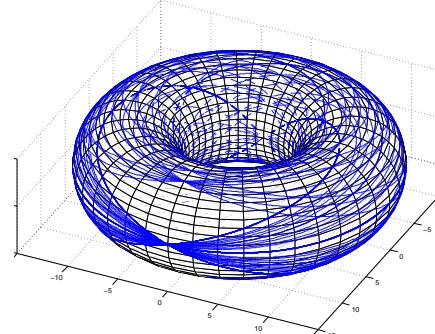
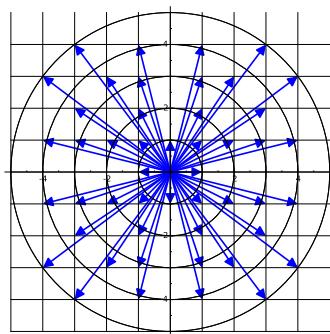
Nous allons étudier les possibilités de déplacement sur les objets plats.



Les figures précédentes représentent un chemin parcouru sur le carré, et ce même chemin parcouru sur sa représentation tridimensionnel imparfaite, le tore de révolution.

Le tore se réalise comme le collage d'un carré du plan euclidien. Bien qu'il se plonge naturellement dans l'espace \mathbb{R}^3 , nous le considérerons comme un recollement formel : il est ce qu'on appelle le tore plat. Ainsi, sa géométrie est de même nature que celle du carré : il est localement plat, sans courbure.

Étant fixé un point, on se demande comment se déplacer sur le tore plat afin de revenir à ce point initial. Plus l'on s'autorise à parcourir des chemins de longueur grande, plus les possibilités de partir dans de nouvelles directions augmentent. Notre but est de quantifier cette augmentation.



Nous allons montrer pour une certaine famille de surfaces, si la longueur autorisée augmente, alors il n'y a pas de direction privilégiée dans laquelle partir pour revenir à notre point de départ.

Table des matières

1 Les surfaces plates	3
1.1 Rappels généraux de topologie	3
1.2 Première définition	3
1.2.1 Les données de recollement	3
1.2.2 Découpage des données de recollement	5
1.3 Seconde définition	6
1.3.1 Les surfaces de translation	6
1.3.2 Isomorphisme de surfaces de translation	6
1.4 Équivalence des définitions	6
1.5 Compléments	9
1.5.1 Identifier le genre d'une surface plate à l'œil nu	9
1.5.2 Distance sur une surface plate	10
1.5.3 Classification des tores plats	11
2 Fractions de Farey	14
2.1 Un peu d'arithmétique	14
2.2 Équidistribution des fractions de Farey	16
2.2.1 Première démonstration	17
2.2.2 Seconde démonstration et Critère de Weyl	17
3 Connexion de singularités	19
Références	20

1 Les surfaces plates

1.1 Rappels généraux de topologie

Nous nous plaçons dans le cadre de la géométrie différentielle. Nous renvoyons par exemple à [2] pour les rappels généraux suivants.

On rappelle qu'une *variété topologique* \mathcal{M} est un espace topologique séparé, à base dénombrable, tel que tout point de \mathcal{M} admette un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace \mathbb{R}^n .

Une *variété différentielle* de classe C^k et de dimension n est une variété topologique munie d'un atlas maximal de cartes C^k à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Étant donné un espace topologique \mathcal{M} muni d'une relation d'équivalence \sim , l'*espace topologique quotient* $\mathcal{M}_{/\sim}$ est l'ensemble quotient $\mathcal{M}_{/\sim}$ muni de la topologie la moins fine rendant continue l'application projection $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{/\sim}$. On rappelle la propriété suivante :

Proposition 1.1 (Séparation de l'espace quotient). *Si \mathcal{M} est un espace topologique séparé, muni d'une relation d'équivalence \sim d'image fermée dans $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, alors l'espace quotient $\mathcal{M}_{/\sim}$ est séparé.*

La formule suivante donne une relation importante quant à la géométrie des objets que nous allons étudier :

Proposition 1.2 (Formule d'Euler pour les polyèdres). *Étant donné une surface polyédrale compacte, connexe et orientable, si on note s son nombre de sommets, a son nombre d'arêtes, f son nombre de faces et g son genre, on a la relation*

$$s - a + f = 2 - 2g.$$

1.2 Première définition

1.2.1 Les données de recollement

La première façon d'obtenir une surface de translation est de recoller par translation des polygones du plan le long de leurs côtés.

Définition (Donnée de recollement). Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille finie de polygones convexes deux à deux disjoints du plan euclidien \mathbb{R}^2 . Pour $i \in I$, on indice par J_i les côtés de P_i , et on note $(\partial P_i^j)_{j \in J_i}$ ces côtés. Soit \mathcal{R}_0 une partition de $\bigsqcup_{i \in I} J_i$ en paires, que nous appellerons *paires de cotés identifiés*, telle que :

- deux cotés identifiés $\partial P_{i_1}^{j_1}$ et $\partial P_{i_2}^{j_2}$ ne diffèrent que d'une translation,
- cette (unique) translation envoie une normale sortante du premier polygone P_{i_1} sur une normale rentrante du second P_{i_2} .

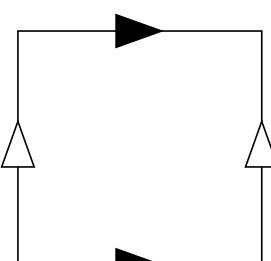
On dit alors que $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ est une *donnée de recollement*.

Soit \mathcal{R}_1 la relation sur $\bigsqcup_{i \in I} P_i$ héritée de \mathcal{R}_0 : c'est à dire telle que deux points $x, y \in \bigsqcup_{i \in I} P_i$ sont identifiés par \mathcal{R}_1 si et seulement s'ils appartiennent à des cotés identifiés par \mathcal{R}_0 , et si la translation correspondante envoie un point sur l'autre. Soit \sim la relation d'équivalence engendrée par la relation \mathcal{R}_1 . On appellera *surface de translation* définie par la donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ l'espace topologique quotient S de $\bigsqcup_{i \in I} P_i$ par \sim .

Exemple.

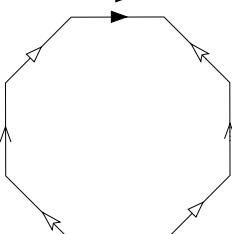
- Le tore plat standard, construit par un tel recollement, est un premier exemple de surface de translation. On se donne un carré de côté de longueur 1, et l'identification des côtés décrite ci-contre.

Dans la partie 1.5.2, nous munirons les surfaces de translation d'une distance. Ainsi, le tore plat obtenu, en tant que variété topologique, est homéomorphe au tore de révolution dans \mathbb{R}^3 , mais pas isométriquement homéomorphe !



- Le recollement de l'octogone : on choisit un octogone régulier, et on identifie comme précédemment les cotés opposés, en respectant leurs directions.

La surface de translation ainsi définie est de genre 2 (voir la partie 1.2.2).



Remarque. Sur une surface plate S , on distingue trois types de points :

Les points qui étaient initialement dans l'intérieur d'un polygone (figure 1). Ces points ne sont identifiés à aucun autre point des polygones initiaux. A leur voisinage, la surface plate se comporte exactement comme le plan euclidien.

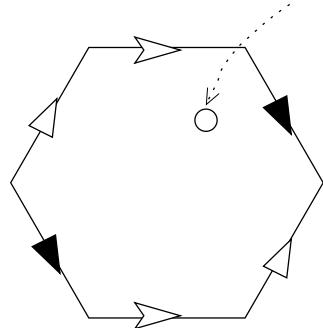


FIGURE 1 – Point intérieur

Les points qui étaient initialement dans l'intérieur d'un côté (figure 2). Ils sont identifiés à un unique point d'un unique autre côté. A leur voisinage, la surface plate se comporte exactement comme le recollement isométrique de deux demi-plans euclidiens, c'est à dire le plan euclidien lui-même.

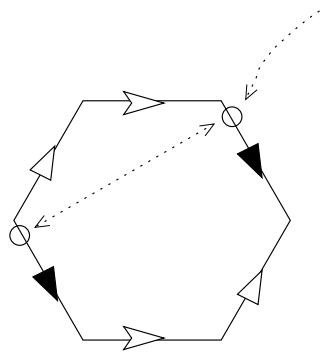


FIGURE 2 – Point sur le bord

Les points qui étaient initialement au sommet d'un polygone (figure 3). Ils sont identifiés avec un nombre fini d'autres sommets. Au voisinage d'un sommet, une singularité peut apparaître : puisque les côtés des polygones ont été recollés par translation, la somme des angles en ce sommet des polygones qui ont été recollés en ce sommet est une multiple entier de 2π .

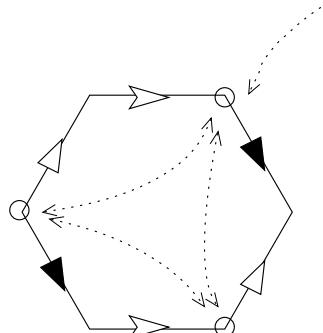


FIGURE 3 – Point sur un sommet

- Si c'est exactement 2π , ce point est une fausse singularité : son voisinage se comporte comme un recollement de sections angulaires du plan euclidien qui forment le plan euclidien lui-même.
- Si c'est $2k\pi$, pour $k > 1$, son voisinage est appelé une singularité conique d'ordre k . On dira qu'il est isomorphe au modèle de la singularité conique d'ordre k (voir ci-dessous).

Définition (Modèle de singularité conique). Pour $k \geq 1$, on définit le modèle de singularité conique d'ordre k comme étant le recollement de $4k$ triangles rectangles isocèles de longueur d'hypoténuse 1 privés de leur hypoténuse, selon le schéma 4.

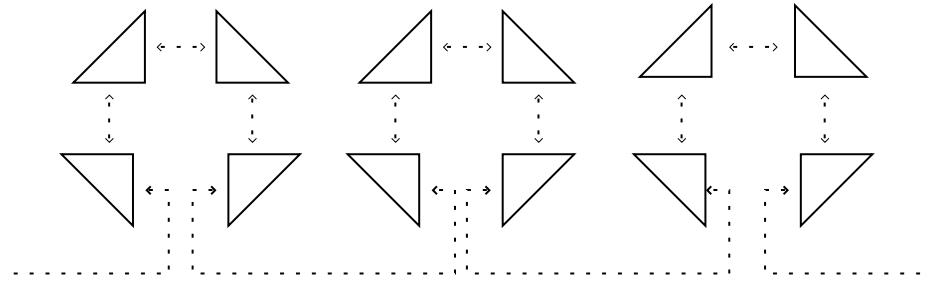


FIGURE 4 – Construction du modèle de singularité conique

A priori, le recollement des triangles du modèle de singularité conique semble se réaliser dans l'espace euclidien de dimension 3. Néanmoins, si l'on plie ces triangles en accordéon comme sur la figure 5, il apparaît que ce recollement est homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 .

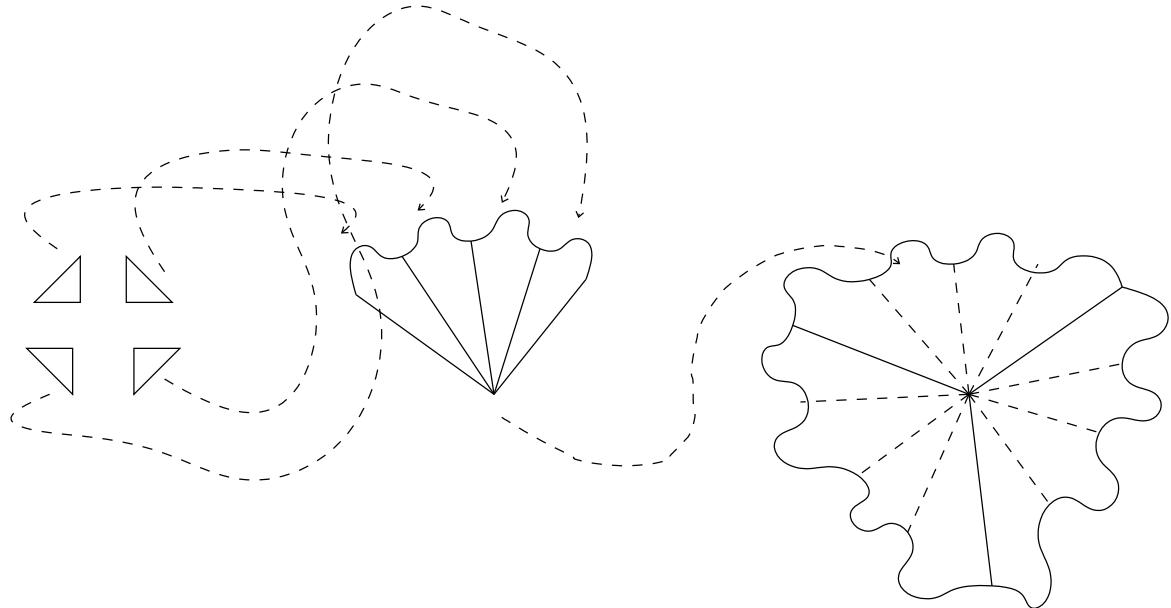


FIGURE 5 – Singularité conique pliée

1.2.2 Découpage des données de recollement

Cette section vise à définir un isomorphisme de données de recollement : étant donné $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ une surface plate, découper les P_i , $i \in I$ en sous-polygones, les translater dans le plan \mathbb{R}^2 et rajouter les recollements correspondants à \mathcal{R}_0 ne modifie pas la surface de translation obtenue. Deux données de recollements $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ et $((P'_i)_{i \in I'}, \mathcal{R}'_0)$ sont dites *isomorphes* si l'on peut passer de l'une à l'autre par un tel procédé.

Exemple. L'hexagone recollé est isomorphe à un parallélogramme recollé, comme l'illustre la figure 6.

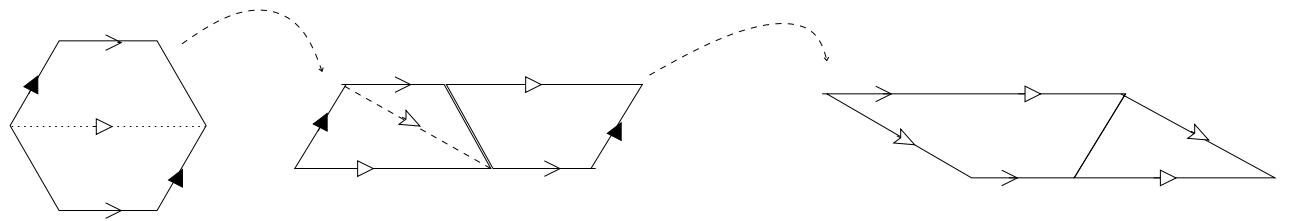


FIGURE 6 – Découpage de l'hexagone en parallélogramme

1.3 Seconde définition

1.3.1 Les surfaces de translation

On dispose aussi d'une définition ex-nihilo des surfaces de translation :

Définition (Surfaces de translation). Une *surface de translation* est un triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ composé de :

- \mathcal{S} une surface (i.e. une variété topologique de dimension 2) compacte, connexe et orientable,
- \mathcal{Z} une partie finie \mathcal{S} telle que tout point de \mathcal{Z} soit un singularité conique d'angle un multiple entier de 2π , c'est-à-dire que tout point $z \in \mathcal{Z}$ admette un voisinage épointé dans \mathcal{S} isomorphe (au sens défini ci-dessous) à un modèle épointé de singularité conique,
- \mathcal{A} un atlas maximal de cartes sur $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 , tel que les applications de changement de cartes soient des restrictions de translations.

Si (Σ, \mathcal{A}) et (Σ', \mathcal{A}') sont deux surfaces munies d'atlas maximaux à changements de cartes des translations, un *isomorphisme* de (Σ, \mathcal{A}) dans (Σ', \mathcal{A}') est un homéomorphisme $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ tel que pour toutes cartes (U, ϕ) de \mathcal{A} et (U', ϕ') de \mathcal{A}' , l'application $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}$ soit sur son domaine de définition la restriction d'une translation de \mathbb{R}^2 . Nous dirons que (Σ, \mathcal{A}) et (Σ', \mathcal{A}') sont *isomorphes* s'il existe un tel isomorphisme.

Remarque. L'atlas \mathcal{A} de la définition précédente est appelé *atlas de translation*. Il est inclus dans un unique atlas maximal C^1 , qui munit $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$ d'une structure de variété différentielle. Il est également possible de le prolonger en un atlas C^1 sur \mathcal{S} . Toutefois, si la surface de translation \mathcal{S} admet des singularités d'ordre $k > 1$, ce nouvel atlas perdra la propriété de translation (voir la proposition 1.3.1).

Proposition 1.3. *Il n'existe pas d'isométrie entre le modèle de singularité conique d'ordre $k > 1$ pour la métrique induite et un ouvert de \mathbb{R}^2 .*

Démonstration. Raisonnons par contradiction. Si une telle isométrie existait, il suffirait de dessiner un cercle de rayon r autour du centre du modèle de singularité conique. Il est de périmètre $2\pi kr$. L'image de ce cercle serait aussi un cercle dans \mathbb{R}^2 de rayon r et de périmètre $2\pi kr > 2\pi r$, ce qui est impossible. \square

1.3.2 Isomorphisme de surfaces de translation

On dit que deux surfaces plates $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ et $(\mathcal{S}', \mathcal{Z}', \mathcal{A}')$ sont *isomorphes* si $(\mathcal{S} - \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ et $(\mathcal{S}' - \mathcal{Z}', \mathcal{A}')$ sont isomorphes au sens défini précédemment.

Proposition 1.4. *Un isomorphisme de surfaces de translation peut être étendu en une bijection sur ces surfaces munies de leurs singularités, de manière à ce qu'il préserve l'ordre des singularités.*

D'après la classification des surfaces connexes, compactes et orientables, une surface de translation est homéomorphe à une des surfaces de genre g (voir [3]). Nous verrons dans la partie 1.5.1 comment identifier son genre. Nous verrons aussi que deux surfaces plates isomorphes sont de même genre.

1.4 Équivalence des définitions

Voici comment nous allons passer d'une surface plate au sens d'une définition à l'autre :

- Une donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, si on la quotient, est une variété topologique. Une paramétrisation locale judicieuse donne un atlas de translation de cette surface.
- Une surface de translation $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$, selon la seconde définition, est une variété différentielle. Par oubli de son atlas, c'est une variété topologique. Il faut vérifier que cette variété topologique s'écrive bien comme recollement de polygones du plan.

Nous allons établir qu'il existe une correspondance univoque entre ces deux définitions, à condition de réfléchir à isomorphisme près.

Lemme 1.5. *Une surface de translation au premier sens est naturellement munie d'une structure de surface de translation au second sens. Plus précisément, si l'on note \mathcal{S} la surface issue de la donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, on peut munir \mathcal{S} d'un atlas de translation en dehors des singularités, et tel que \mathcal{S} ne présente que des singularités coniques.*

Démonstration. Soit $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ une donnée de recollement. Soient \sim la relation d'équivalence héritée de \mathcal{R}_0 , \mathcal{S} le quotient topologique de $\bigsqcup_{i \in I} P_i$ par \sim . Soient aussi \mathcal{Z}' l'ensemble des sommets des polygones P_i , pour $i \in I$, et $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'_{/\sim} \subset \mathcal{S}$ l'ensemble de ces sommets après identification.

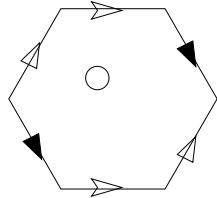
Déjà, \mathcal{S} est à base dénombrable, car $\bigsqcup_{i \in I} P_i$ l'est.

Ensuite, \mathcal{S} est séparé, en utilisant la proposition 1.1. En effet, l'image de \sim dans $\bigsqcup_{i \in I} P_i \times \bigsqcup_{i \in I} P_i$ est fermée, c'est-à-dire que son complémentaire est ouvert pour la topologie produit.

Pour montrer cela, considérons un point (x, y) de cet espace. S'il n'est pas dans l'image de \sim , c'est que les points x et y ne sont pas identifiés par \sim . Dans ce cas, il est toujours possible de trouver un voisinage ouvert de x et un voisinage ouvert de y qui ne se rencontrent pas (il suffit de distinguer les cas où ces points sont à l'intérieur ou au bord des polygones). Le produit de ces voisinages est alors un ouvert du produit $\bigsqcup_{i \in I} P_i \times \bigsqcup_{i \in I} P_i$ qui contient (x, y) .

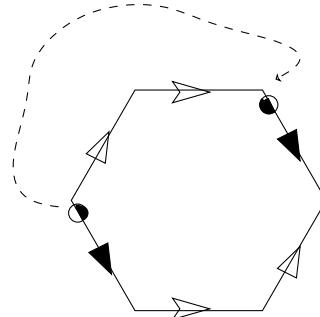
Maintenant, nous allons définir un atlas de translation $\mathcal{A}_0 = \{(U_y, \phi_y), y \in \mathcal{S} - \mathcal{Z}\}$ sur $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$. Soient $x \in \bigsqcup_{i \in I} P_i$ un point qui n'est pas un sommet, et $y = \pi(x) \in \mathcal{S} - \mathcal{Z}$.

- Si x appartient à l'intérieur d'un polygone P_i pour $i \in I$, on choisit un voisinage V de x contenu dans l'intérieur de P_i . Alors $\phi : V \rightarrow \pi(V)$ est une paramétrisation de \mathcal{S} autour de y . On pose $(U_y, \phi_y) = (\pi(V), \phi^{-1}) \in \mathcal{A}_0$.



- Si x appartient au côté d'un polygone P_i pour $i \in I$, mais n'est pas un sommet, il est aussi la projection d'un autre $x' \in P_j$, $j \in I$. On considère V_x un voisinage ouvert de x dans P_i qui ne rencontre ni les sommets, ni les autres côtés que celui où x appartient, puis $V_{x'}$ un voisinage de x' dans P_j qui ne rencontre ni les sommets, ni V_x , et tel que $V_x \cap \partial P_i$ et $V_{x'} \cap \partial P_j$ ne diffèrent que d'une translation, disons $\tau : V_x \cap \partial P_i \rightarrow V_{x'} \cap \partial P_j$, qui s'étend en $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Soient $V_y = \pi(V_x \cup V_{x'})$, et $U = V_x \cup \tau(V_{x'})$, qui est ouvert de \mathbb{R}^2 . On définit $\phi : V_y \rightarrow U$ par morceaux, valant π^{-1} sur $\pi(V_x)$, et $\tau \circ \pi^{-1}$ sur $\pi(V_{x'})$. Alors ϕ est une paramétrisation de \mathcal{S} autour de y . On pose $(U_y, \phi_y) = (\pi(U), \phi^{-1}) \in \mathcal{A}_0$.



L'atlas \mathcal{A}_0 ainsi construit est un atlas de translation. En effet, les cartes locales ont été choisies comme étant des recollement par translation d'ouverts dans les polygones. Pour s'en assurer, on peut distinguer trois cas. Soient $y = \pi(x)$ et $y' = \pi(x')$ deux points distincts de $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$, et $(U_y, \phi_y), (U_{y'}, \phi_{y'})$ leurs paramétrisations locales précédemment définies.

- Si x et x' sont dans l'intérieur de deux polygones, l'application $\phi_{y'} \circ \phi_y^{-1}$ définie sur $\phi_y(U_y \cap U_{y'})$ est l'identité.
- Si x est un point intérieur et x' sur un côté, l'ouvert $\pi^{-1}(U_y \cap U_{y'})$ est dans l'intérieur d'un polygone. Donc l'application $\phi_{y'} \circ \phi_y^{-1}$ définie sur $\phi_y(U_y \cap U_{y'})$ est la composition d'une translation et de l'identité.
- Si x et x' sont sur les côtés de deux polygones, l'application $\phi_{y'} \circ \phi_y^{-1}$ est définie par morceaux sur $\phi_y(U_y \cap U_{y'})$, et c'est une translation.

On prend alors \mathcal{A} un atlas de translation maximal sur $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$ contenant \mathcal{A}_0 .

Enfin, il faut montrer que chaque sommet $x \in \bigsqcup_{i \in I} P_i$, la singularité $y = \pi(x) \in \mathcal{Z}$ admet un voisinage épointé isomorphe à un modèle épointé du modèle de singularité conique.

Puisque x est le sommet d'un polygone P_i pour $i \in I$, il est aussi la projection de k autres points $x_{j_1} \in P_{j_1}, \dots, x_{j_k} \in P_{j_k}$, où $j_1, \dots, j_k \in I$. On note $j = j_0$ et $x = x_{j_0}$. Soit r la longueur de la plus petite arête des polygones P_i pour $i \in I$. Pour tout $0 \leq l \leq k$, soit V_{x_l} le voisinage ouvert de x_{j_l} dans P_{j_l} obtenu en intersectant P_{j_l} et le disque ouvert de rayon $r/2$ centré en x_{j_l} .

On choisit un côté de $P_{j_{\sigma(0)}} = P_{j_0}$ d'extrémité $x_{j_{\sigma(0)}} = x_{j_0}$. Soit τ_1 la translation qui envoie ce côté de P_{j_0} sur un autre côté de P_{j_1} . On définit par induction des translations τ_2, \dots, τ_k de la manière suivante : pour $2 \leq l \leq k$, τ_l est la translation qui envoie le côté de $P_{j_{\sigma(l-1)}}$ d'extrémité $x_{j_{\sigma(l-1)}}$ différent du côté précédemment défini sur un côté de $P_{j_{\sigma(l)}}$ d'extrémité $x_{j_{\sigma(l)}}$.

Alors σ est une permutation de $[0, k]$.

Soit $V_y = \bigcup_{l=1}^k \pi(V_{x_l})$ le voisinage ouvert de y dans S . Il s'agit de relever $U = \bigcup_{l=0}^k \tau_l \circ \tau_{k-1} \circ \dots \circ \tau_{l+1}(V_{x_{\sigma(l)}}) \subset \mathbb{R}^2$ dans un modèle de singularité conique. Il suffit pour cela de définir une application qui remonte une singularité conique morceaux par morceaux, comme il l'est illustré sur la figure 7.

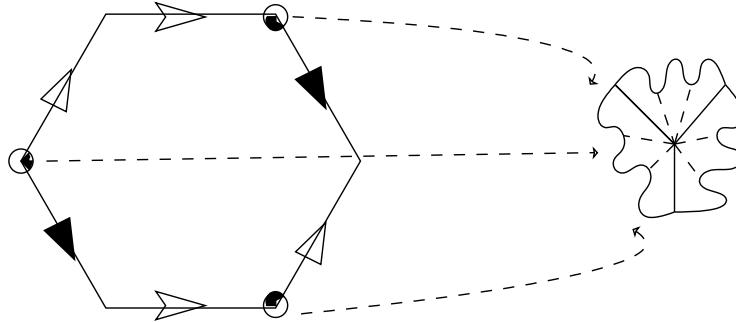


FIGURE 7 – Construction d'un isomorphisme vers un modèle de singularité conique

□

Réiproquement, on veut décrire une surface comme un recollement de polygones. Pour cela, il va falloir la découper. On rappelle qu'une surface est dite *triangulable* si elle est homéomorphe à l'espace topologique quotient de triangles du plan euclidien recollés par homéomorphismes le long de leur cotés.

Lemme 1.6. *Une surface de translation au second sens est triangulable, les triangles étant recollés par translation le long de leurs cotés, et la lecture de l'homéomorphisme dans les cartes étant des translations. Plus précisément, si $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ est une surface de translation, il existe une donnée de recollement $((T_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, où les T_i sont des triangles, et un isomorphisme $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow (\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}$, c'est-à-dire un homéomorphisme tel que pour toute carte locale (U, ϕ) de \mathcal{S} et (U', ϕ') de $((T_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, $\phi \circ \Phi \circ \phi^{-1}$ soit sur son domaine de définition la restriction d'une translation du plan.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ une surface plate au sens de la seconde définition. Pour chaque $y \in \mathcal{S} - \mathcal{Z}$, on choisit ϕ_y une carte locale sur \mathcal{S} d'un voisinage V_y de y . Il existe toujours dans l'image de ϕ_y un triangle fermé T_y de \mathbb{R}^2 qui contient $\phi_y(y)$ dans son intérieur.

Par compacité de \mathcal{S} , on extrait un recouvrement fini $(V_{y_i})_{1 \leq i \leq n}$ de \mathcal{S} par les V_y , de sorte que les $\phi_i^{-1}(T_{y_i})$ recouvrent \mathcal{S} privé d'un voisinage des singularités, et tel que ce voisinage soit contenu dans l'image des paramétrisations locales de ces singularités.

Pour les singularités $z \in \mathcal{Z}$, on sait qu'on a une carte ϕ_z d'image le modèle de singularité conique d'angle $2k\pi$. Donc un voisinage de z sur \mathcal{S} et recouvert par un l'image de $4k$ triangles fermés de \mathbb{R}^2 .

On a ainsi obtenu un recouvrement de \mathcal{S} par des images de triangles fermés de \mathbb{R}^2 .

Nous allons raffiner ce recouvrement, de sorte que les images de ces triangles ne se rencontrent qu'en leurs bords. Soient $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$ deux triangles du recouvrement qui ne se rencontrent pas \mathcal{Z} , et $\phi_1 : U_1 \rightarrow T_1$, $\phi_2 : U_2 \rightarrow T_2$ les cartes correspondantes. Comme \mathcal{S} est une surface de translation, on a une translation $\tau = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \subset T_1 \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2) \subset T_2$ entre les images de leur intersection. τ s'étend en une translation du plan. Comme T_1 et T_2 sont des triangles, $P = \phi_2(U_1 \cap U_2) = T_2 \cap \tau(T_1)$ est un polygone

fermé du plan, et alors on peut considérer trois polygones : P , $T_2 - P$ et $T_1 - \tau^{-1}(P)$. Ils sont respectivement les images des cartes $(U_1 \cap U_2, \phi_{2|_{U_1 \cap U_2}})$, $(U_2 - U_1, \phi_{2|_{U_2 - U_1}})$, et $(U_1 - U_2, \phi_{1|_{U_1 - U_2}})$. Ces trois polygones sont triangulables. On considérant les restrictions des cartes précédentes à une triangulation de ces polygones, on a obtenu une triangulation du fermé $U_1 \cap U_2$.

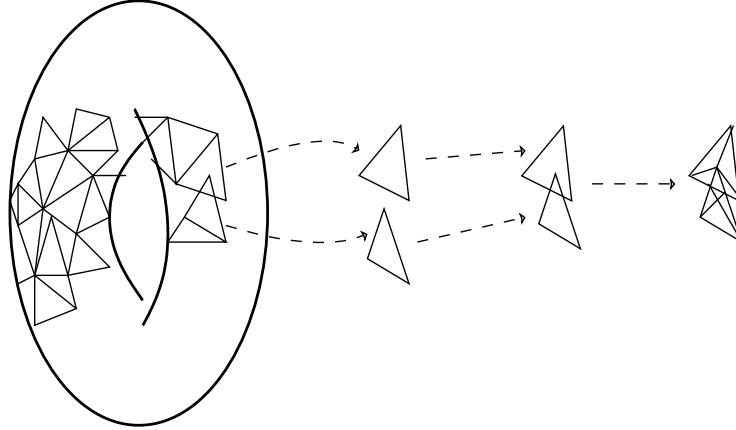


FIGURE 8 – Raffinement d'un recouvrement par triangles

En répétant ce processus, on obtient un recouvrement en fermés d'intérieurs disjoints de \mathcal{S} , et d'images triangulaires. C'est à dire qu'on a construit une triangulation de \mathcal{S} .

Par passage au quotient, on peut définir une bijection $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow (\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}$, qui est un isomorphisme par construction. \square

Remarque. Plus généralement, il est connu que toute surface compacte connexe orientable est triangulable.

Théorème 1.7. *Les deux définitions sont équivalentes. Plus précisément, l'application qui à toute donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, R_0)$ associe la surface de translation (S, Z, \mathcal{A}) induit une bijection*

$$\{\text{données de recollement}\}_{/\text{isom}} \longleftrightarrow \{\text{surfaces de translations}\}_{/\text{isom}}$$

Démonstration. Étant donné une donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, R_0)$, on a construit au lemme 1.5 une structure de surface de translation sur $S = (\bigsqcup_{i \in I} P_i)_{/\sim}$, et un homéomorphisme $\Psi : \bigsqcup_{i \in I} P_i \rightarrow S$ tel que pour toute carte (U, ϕ) de $S - Z$, et pour tout ouvert U_i d'un polygone P_i qui ne rencontre pas les sommets et tel que $\Psi(U_i) \subset U$, $\psi \circ \Psi : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit une translation.

Réciproquement, une surface de translation (S, Z, \mathcal{A}) peut, d'après le lemme 1.6, être triangulée, c'est à dire qu'elle est homéomorphe par Φ à un recollement $(\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}$, où les T_i sont des triangles du plan, et tel que pour toute carte (U, ϕ) de $S - Z$, $\Phi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit une translation.

Enfin, si $(\mathcal{S}, Z, \mathcal{A})$ est une surface de translation, $((T_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ la donnée de recollement correspondante par le lemme 1.5, et $(\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}, \mathcal{Z}', \mathcal{A}'$ la surface de translation correspondante par le lemme 1.6, on dispose bien d'un isomorphisme $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow (\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}$. \square

1.5 Compléments

1.5.1 Identifier le genre d'une surface plate à l'œil nu

Nous allons dériver de la relation d'Euler une relation simple entre une donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, R_0)$ et son genre g . On note $N = |I|$ le nombre de polygones.

Soit $i \in I$, n_i son nombre de sommets de P_i , $x_i^1, \dots, x_i^{n_i}$ ses sommets, et $(\alpha_i^j)_{1 \leq j \leq n_i}$ les angles intérieurs correspondants. Puisqu'il est convexe, on sait que $\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^j = (n_i - 2)\pi$.

Soit s le nombre de sommets de S après recollement, et y_1, \dots, y_s des représentants. Notons k_l le degré de la singularité y_l . On a alors, par définition, $k_l = \frac{1}{2\pi} \sum_{x_i^j \sim y_l} \alpha_i^j$. Soit aussi a le

nombre d'arêtes de S après recollement. On a $a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N n_i$.

On calcule :

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^s (k_l - 1) &= \left(\sum_{l=1}^N k_l \right) - s = \left(\sum_{l=1}^s \frac{1}{2\pi} \sum_{x_i^j \sim y_l} \alpha_i^j \right) - s \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{x_i^j \text{ sommet}} \alpha_i^j \right) - s = \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{x_i^j \in P_i} \alpha_i^j \right) - s \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N (n_i - 2)\pi \right) - s = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N n_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N 1 \right) - s \\
 &= a - N - s = 2g - 2
 \end{aligned}$$

La dernière égalité étant la formule d'Euler (voir la proposition 1.2). Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

Proposition 1.8. *Soit S une surface de translation admettant s singularités, d'ordres respectifs k_1, \dots, k_s . Soit g son genre. Alors ;*

$$\sum_{l=1}^s (k_l - 1) = 2g - 2$$

Grâce à cette formule, on retrouve aisément le genre du tore plat, de l'hexagone recollé, ou de l'octogone recollé.

On obtient aussi un moyen de construction de surfaces plates de genre arbitraire :

Proposition 1.9. *Soit $g \geq 1$, et S la surface plate construite comme le recollement des cotés opposés du $4g'$ -gone régulier. Alors S est de genre g .*

Démonstration. Il suffit de voir que le $4g'$ -gone P recollé ne présente qu'une seule singularité, c'est-à-dire que l'orbite d'un sommet du $4g$ -gone pour le recollement parcourt l'ensemble des sommets. On note les sommets $1, 2, \dots, 4g'$ dans le sens direct. Soit $\delta P_{1,2}$ le côté de P auquel appartient le sommet 1, et tel que l'autre extrémité soit le sommet 2. Par symétrie de P , $\delta P_{1,2}$ est recollé à $\delta P_{1+2g',2+2,g'}$, et le sommet 1 est recollé au sommet $1 + 2g'$. Par induction, l'orbite du sommet 1 est donc l'ensemble des sommets $1 + 2g'\mathbb{Z}$ modulo $4g'$, c'est à dire l'ensemble de tous les sommets.

Cette unique singularité est d'ordre $k = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{4g'} \alpha_j^j = \frac{(4g'-2)\pi}{2\pi} = (2g'-1)$.

Ainsi, la proposition précédente donne que le genre de S vaut $\frac{2+2g'-1}{2} = \frac{1+(2g'-1)}{2} = g'$. \square

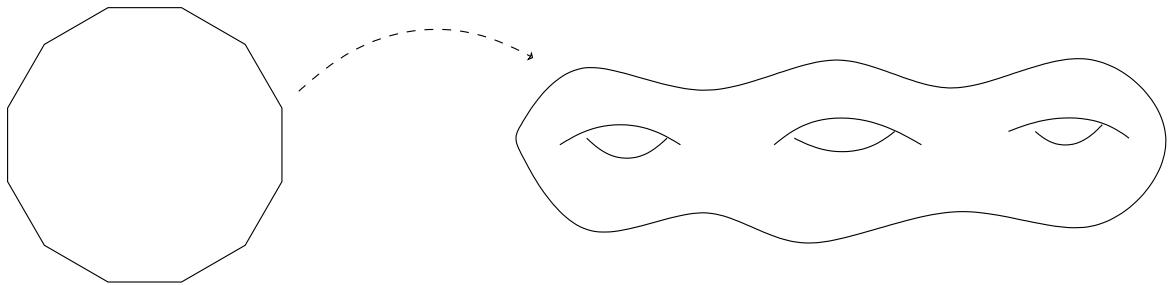


FIGURE 9 – Le dodécagone recollé est de genre 3

1.5.2 Distance sur une surface plate

Sur une surface de translation, les cartes locales permettent de transporter la topologie de \mathbb{R}^2 , mais aussi sa distance. Ceci permet de définir, sur une surface, un plus court chemin d'un point à un autre, et une ainsi une distance.

Définition (Géodésique (locale)). Soient $(S, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ une surface, et deux points $x, y \in S$. On dit qu'un chemin $C^1 \gamma : [a, b] \rightarrow S$ de x à y est une géodésique si il est localement de longueur minimale, c'est à dire que pour tout $t_0 \in [a, b]$ tel que $\gamma(t_0) \notin \mathcal{Z}$, il existe un voisinage I de t_0 dans $[a, b]$ et une carte (U, ϕ) de \mathcal{A} en telle que $\gamma(I) \subset U$, et telle que

pour tout $s, s' \in I$, $\gamma|_{[s,s']}$ minimise la longueur $\int_s^{s'} |(\phi \circ \alpha)'|$ des courbes α de $\gamma(s)$ à $\gamma(s')$ contenues dans U et telles que $\phi \circ \alpha$ soit C^1 . Lorsque $\gamma(t_0) \in \mathcal{Z}$, il faut que ce soit le cas sur le modèle de singularité conique correspondant, pour la métrique induite.

Dans le cas d'une surface de translation, pour décider si un chemin est géodésique, il suffit de le vérifier sur un recouvrement ouvert du chemin, car les applications de changement de cartes sont isométriques. Cette remarque permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.10. *Sur une surface plate, un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ de x à y est géodésique si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ de $\text{Im}(\gamma)$ et des cartes ϕ_i de V_i , $i \in I$, telle que γ y minimise la longueur de courbe.*

Remarque. En fait, cette proposition reste vraie dans le cas général d'une surface S munie d'un atlas à changements de cartes isométriques.

Dans le cas des surfaces plates, on dispose d'une caractérisation encore plus simple des géodésiques.

Proposition 1.11. *Sur une surface plate S obtenue par recollement de $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ de x à y est géodésique si et seulement si :*

- lorsque γ est à l'intérieur d'un polygone, il se dirige en ligne droite,
- lorsque γ atteint une singularité, il forme un angle supérieur à π lorsqu'il quitte la singularité.

Démonstration. Le premier point résulte de la structure euclidienne locale d'une surface plate, car une géodésique de \mathbb{R}^2 est un segment. Le deuxième point résulte de la forme du modèle de singularité conique, auquel S est localement isomorphe en les singularités. En effet, si γ forme un angle inférieur à π en $z \in \mathcal{Z}$, il est possible de contourner la singularité pour effectuer un chemin plus court. \square

On peut vérifier que l'on définit bien une distance d :

$$\begin{aligned} d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x, y &\longmapsto \inf_{\gamma : x \rightsquigarrow y} \text{longueur}(\gamma) \end{aligned}$$

Cette distance munie les surfaces de translation d'une nature métrique. Cette notion est essentielle, et se transmet par isomorphisme. Par exemple, on peut définir un invariant de surface de translation : la systole.

Définition (Systole). Soit $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ une surface plate. On appelle systole la longueur de la géodésique fermée non-constante la plus courte de \mathcal{S} .

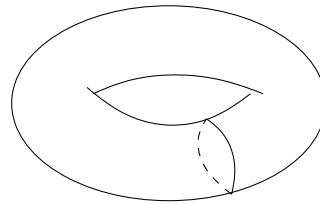


FIGURE 10 – Systole d'un tore

1.5.3 Classification des tores plats

Pour conclure cette partie, nous voulons comprendre la structure des surfaces de translation de genre 1.

Remarquons déjà, d'après la formule 1.8, que les surfaces de translation de genre 1 sont en fait les surfaces de translation sans singularité.

Définition (Tore plat). On appelle tore plat toute surface de translation isomorphe à (P, \mathcal{R}_0) , où P est un parallélogramme, et \mathcal{R}_0 l'identification des cotés opposés.

De manière générale, nous avons une description simple des surfaces de translation sans singularité :

Proposition 1.12. *Une surface de translation sans singularité est isomorphe à un parallélogramme recollé.*

Démonstration. ——Démonstration en chantier———

Soit $((P_i)_{i \in I}, R_0)$ une donnée de recollement, et \mathcal{S} la surface de translation correspondante. On demande à ce que la donnée ne présente pas de singularité. Ainsi, on peut considérer P un polygone constitué d'un recollement des $(P_i)_{i \in I}$ par R_0 . Soit s la systole de \mathcal{S} , et $\gamma : [0, 1] \rightarrow P \subset \mathbb{R}^2$ un chemin qui la réalise. D'après la proposition, γ est définie par un vecteur directeur, que l'on note v . Soit \mathcal{D} une droite verticale ou horizontale de \mathbb{R}^2 , qui passe par $\gamma(0)$ et qui n'est pas parallèle à v . Soit s' la longueur de la géodésique de \mathcal{S} passant par $\gamma(0)$ et parallèle à \mathcal{D} .

On peut considérer l'application

$$\begin{aligned}\Psi : [0, s] \times [0, s'] &\longrightarrow \mathcal{S} \\ t, t' &\longmapsto \Phi_{t'}(\gamma(t))\end{aligned}$$

où $\Phi_t(u)$ est le flot du champ de vecteur constant égal à v sur \mathcal{S} .

Le rectangle $[0, s] \times [0, s']$, muni du recollement défini par le flot, est isomorphe à un parallélogramme recollé. \square

Nous allons maintenant plonger naturellement l'ensemble des tores plats dans un espace matriciel. Avant cela, remarquons que, puisque l'aire d'une surface de translation est un invariant, deux surfaces de translation d'aires différentes ne sont jamais isomorphes. Nous pouvons donc réduire notre étude à celle des tores plats d'aire 1.

Un tore plat d'aire 1 est défini par un parallélogramme, c'est-à-dire par deux vecteurs non-colinéaires de déterminant 1. On a donc une surjection

$$\{\text{tores plats unitaires}\} \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})$$

qui à un parallélogramme $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ associe la matrice (u, v) .

Si l'on a $(u, v) \in SL_2(\mathbb{R})$, notons $\Lambda(u, v) = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subset \mathbb{R}^2$ le réseau de points correspondant.

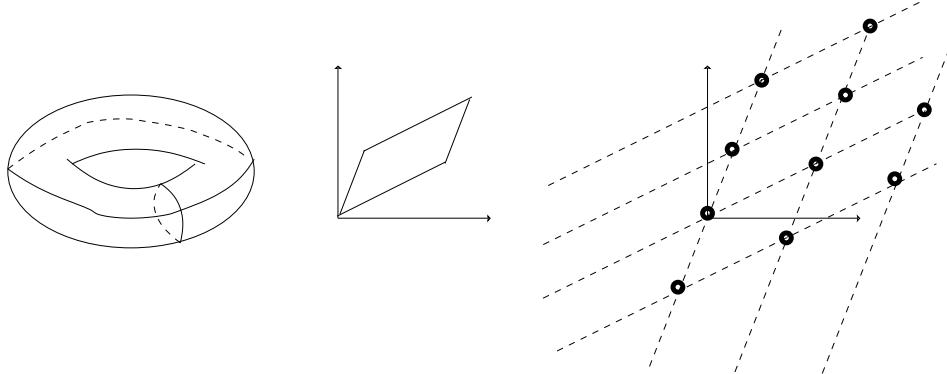


FIGURE 11 – Un tore plat, le parallélogramme qui le définit, et le réseau correspondant

Proposition 1.13. *Deux tores plats (u, v) et (u', v') sont isomorphes en tant que surfaces de translation si et seulement si leurs réseaux de points correspondants coïncident, c'est-à-dire si $\Lambda(u, v) = \Lambda(u', v')$.*

Démonstration. En effet, la surface de translation \mathcal{S} définie par un parallélogramme (u, v) est isomorphe à la surface $\mathbb{R}^2 / \Lambda(u, v)$ munie de l'atlas de translation composé d'inverses locales de la projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \Lambda(u, v)$. \square

Étant donné $A = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, et $B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ deux matrices de $SL_2(\mathbb{R})$ on cherche une condition pour que $\Lambda(A) = \Lambda(B)$. On va déjà chercher une relation entre $\Lambda(A)$ et $\Lambda(AB)$.

Le réseau de A s'écrit

$$\mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

et celui de $AB = \begin{pmatrix} au + bw & av + bx \\ cu + dw & cv + dx \end{pmatrix}$ s'écrit

$$\mathbb{Z} \begin{pmatrix} au + bw \\ cu + dw \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} av + bx \\ cv + dx \end{pmatrix} = \{(nu + mv) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + (nw + mx) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Il apparaît alors que ces deux ensembles sont égaux si et seulement si les ensembles $\{nu + mv\}$ et $\{nw + mx\}$ sont égaux à \mathbb{Z} , c'est à dire si u et v sont des entiers premiers entre eux, et si w et x sont aussi des entiers premiers entre eux. Autrement dit, ces deux ensembles sont égaux si $B = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. On vient ainsi de montrer le résultat suivant.

Proposition 1.14. *Pour toutes matrices $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$, $\Lambda(A) = \Lambda(AB)$ si et seulement si $B \in SL_2(\mathbb{Z})$.*

Maintenant, remarquons que pour toutes matrices $A, A' \in SL_2(\mathbb{R})$, il existe $B \in SL_2(\mathbb{R})$ tel que $A' = AB$. D'après la proposition précédente, B doit alors être à coefficients entiers si $\Lambda(A)$ et $\Lambda(A')$ sont identiques. Ceci permet d'énoncer la propriété suivante :

Proposition 1.15. *Pour toutes matrices $A, A' \in SL_2(\mathbb{R})$, $\Lambda(A) = \Lambda(A')$ si et seulement si il existe $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $A' = AB$.*

Autrement dit, deux tores plats sont isomorphes si et seulement si leurs représentants dans $SL_2(\mathbb{R})$ ne diffèrent que d'une matrice spéciale linéaire à coefficients entiers. En conclusion, l'ensemble des tores plats à isomorphisme près se réalise comme l'ensemble $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$. On a une bijection :

$$\{\text{tores plats unitaires}\}_{/\text{isom}} \longleftrightarrow SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$$

2 Fractions de Farey

2.1 Un peu d'arithmétique

Afin de poursuivre, nous avons besoin d'un brin d'arithmétique afin de faciliter les démonstrations futures. Tous ces résultats ainsi que leurs démonstrations se trouvent dans [4].

Nous appelons *fonction arithmétique* toute fonction définie sur \mathbb{N}^* et à valeurs dans \mathbb{C} . Deux exemples courants sont la fonction indicatrice d'Euler φ et la fonction de Möbius μ . Pour tout entier n non nul, nous définissons $\varphi(n)$ comme étant le cardinal de $\{k \in \mathbb{N} | 1 \leq k \leq n \text{ et } \text{pgcd}(k, n) = 1\}$ et $\mu(n)$ par 0 si n possède un facteur carré et -1 à la puissance le nombre de facteur premier de n sinon.

Nous définissons l'opération de *convolution* de deux fonctions arithmétiques, qui à f et g donne la fonction arithmétique notée $f * g$ définie par $f * g(n) = \sum_{k|n} f(k)g(n/k)$.

Proposition 2.1. *L'ensemble des fonctions arithmétiques non nulles en 1 forme un groupe abélien pour le produit de convolution.*

Démonstration. Nous pouvons vérifier facilement que l'opération de convolution est commutative, associative et de neutre l'indicatrice de $\{1\}$ (notée δ_1). De plus si f est une fonction arithmétique non nulle en 1, alors nous pouvons définir g par récurrence en posant $g(1) = \frac{1}{f(1)}$ et $g(n+1) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{k|n+1} f(k)g(\frac{n+1}{k})$. Nous pouvons vérifier que g est l'inverse de f . \square

Nous dirons qu'une fonction arithmétique f est *multiplicative* si $f(1) = 1$ et f commute avec la multiplication sur des entiers premiers entre eux, c'est à dire si $\forall m, n \in \mathbb{N}, \text{pgcd}(m, n) = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n)$. φ est multiplicative par le théorème des restes chinois et μ est trivialement multiplicative. Remarquons qu'une fonction multiplicative est uniquement déterminée par ses valeurs prises sur les puissances de nombres premiers.

Proposition 2.2. *L'ensemble des fonctions multiplicatives est stable par multiplication et forme un sous groupe pour la convolution.*

Démonstration. La stabilité par multiplication est trivial. Pour la stabilité par convolution, soient f, g deux fonctions multiplicatives et m, n deux entiers premiers entre eux. (Chaque étape du calcul se justifie car m et n sont premiers entre eux.)

$$\begin{aligned} (f * g)(mn) &= \sum_{k|mn} f(k)g\left(\frac{mn}{k}\right) \\ &= \sum_{k_1|m, k_2|n} f(k_1k_2)g\left(\frac{mn}{k_1k_2}\right) \end{aligned}$$

si $a|m$ et $b|n$ alors $\text{pgcd}(a, b) = 1$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k_1|m} \sum_{k_2|n} f(k_1)f(k_2)g\left(\frac{m}{k_1}\right)g\left(\frac{n}{k_2}\right) \\ &= (f * g)(m)(f * g)(n) \end{aligned}$$

Pour la stabilité à l'inverse, soit f une fonction multiplicative. Comme $f(1) = 1 \neq 0$, notons g un inverse pour la convolution. Puis notons g^* la fonction multiplicative coïncidant avec g sur les puissances de nombres premiers. Alors $f * g^*$ est aussi multiplicative et coïncide avec δ_1 sur les puissances de nombres premiers. Or δ_1 est aussi multiplicative. Donc $f * g^* = \delta_1$. Donc g^* est un inverse multiplicatif de f . \square

Proposition 2.3. μ est l'inverse de la fonction constante $\mathbb{1}$

Démonstration. On veut montrer que $\mu * \mathbb{1} = \delta_1$. On a bien $(\mu * \mathbb{1})(1) = \mu(1)\mathbb{1}(1) = 1 = \delta_1(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ un entier naturel au moins égal à 2. Puis soit $p_1^{a_1} \cdots p_d^{a_d}$ l'unique décomposition de n en produit de facteurs premiers. Alors

$$\begin{aligned} (\mu * \mathbb{1})(n) &= \sum_{k|n} \mu(k) \\ &= \sum_{I \subset [\![1, d]\!]} (-1)^{|I|} \\ &= \sum_{i=0}^d (-1)^i \binom{d}{i} \\ &= (1 - 1)^d \\ &= 0 = \delta_1(n) \end{aligned}$$

□

Le travail fournit nous permet de démontrer élégamment le résultat suivant :

Proposition 2.4 (Première formule d'inversion de Möbius). *Si f et g sont deux fonctions arithmétiques quelconques tel que*

$$g(n) = \sum_{k|n} f(k), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$f(n) = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) g(k), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. L'identité vérifiée par f et g se résume en $g = 1 * f$. On convole l'égalité par μ , puis on utilise la proposition 2.3 pour simplifier le membre de droite, et l'on obtient que $\mu * g = f$. Ce qui est une forme résumée du résultat voulu. □

Proposition 2.5 (Seconde formule d'inversion de Möbius). *Si F et G sont deux fonctions de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans \mathbb{C} telles que F soit nulle sur un voisinage de 0 et que*

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

alors

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Il faut remarquer que grâce à l'hypothèse faite sur F , toutes les sommes portent en réalité sur un nombre fini de termes.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n \geq 1} \mu(n) \sum_{i \geq 1} F\left(\frac{x}{ni}\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mu(n) \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{j=n} \mathbf{1}_{i=j} F\left(\frac{x}{j}\right) \\ &= \sum_{j \geq 1} F\left(\frac{x}{j}\right) \sum_{n \geq 1} \mu(n) \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{i=\frac{j}{n}} \\ &= \sum_{j \geq 1} F\left(\frac{x}{j}\right) \sum_{n|j} \mu(n) \\ &= F\left(\frac{x}{1}\right) \end{aligned}$$

□

Pour clore cette partie, une dernière proposition sur le comportement à l'infini des fonctions multiplicatives :

Proposition 2.6. *Si f est une fonction multiplicative tendant vers 0 sur les puissances de nombres premiers, alors f tend vers 0 en l'infini.*

Démonstration. Construisons un module de convergence nommé $m(\cdot)$ pour f à partir du module $n(\cdot)$, où $n : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que si $\varepsilon > 0$ soit fixé, alors pour tout $p^\alpha \geq n(\varepsilon)$, $|f(p^\alpha)| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$\begin{aligned} M &= \max \left(\max_{1 \leq k \leq n(1)} |f(k)|, 1 \right) \\ m(\varepsilon) &= n \left(\frac{\varepsilon}{M^{n(1)}} \right)! + 1 \end{aligned}$$

Soit $n \geq m(\varepsilon)$. Écrivons $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ l'unique décomposition en nombres premiers de n . On a $f(n) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r})$. Examinons les $|f(p_i^{a_i})|$ en fonction des $p_i^{a_i}$:

- Ou bien $p_i^{a_i} < n(1)$. Alors $|f(p_i^{a_i})| \leq M$ et ces contributions sont au nombre maximale de $n(1)$.

- Ou bien $p_i^{a_i} \geq n(1)$. Alors $|f(p_i^{a_i})| \leq 1$, on peut oublier ces contributions.

De plus, au moins un des $p_i^{a_i}$ est plus grand que $n\left(\frac{\varepsilon}{M^{n(1)}}\right)$, sinon on aurait $n < m(\varepsilon)$. Et donc $|f(p_i^{a_i})| \leq \frac{\varepsilon}{M^{n(1)}}$.

Ainsi, on a

$$|f(n)| \leq M^{n(1)} \frac{\varepsilon}{M^{n(1)}} = \varepsilon.$$

□

2.2 Équidistribution des fractions de Farey

Cette partie introduira la notion d'équidistribution puis étudiera la répartition des rationnels parmi les réels.

Lorsque nous disposons d'un espace topologique localement compact X muni d'une mesure de probabilité borélienne μ , d'une suite de parties finies de X $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Puis en notant δ_x la mesure de Dirac en x , pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mu_{A_n} := \frac{1}{|A_n|} \sum_{x \in A_n} \delta_x$. nous dirons que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers μ si la suite $(\mu_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ pour la topologie faible-étoile.

La notion d'équidistribution permet de qualifier de manière plus fine la propriété de densité : si le poids de tout ouvert par μ est strictement positif (c'est le cas des exemples que nous allons étudier), alors l'ensemble $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est dense dans X . De plus, l'équidistribution introduit une dimension temporelle, invisible pour la notion de densité : si nous découpons les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et que nous réarrangeons les termes, on ne peut rien dire de l'équidistribution de la suite obtenue. Par contre, nous sommes garantis de garder la densité.

Remarque. Dans la suite, X sera ou bien $[0,1]$ ou bien $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ munis de leur topologie usuelle et μ sera la mesure de probabilité uniforme. Par une conséquence du théorème du porte manteau ([1], p.16), il suffira de montrer que :

$$\forall \alpha \in [0, 1] \text{ (resp } [0, 2\pi]), \mu_n([0, \alpha]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha \text{ (resp } \frac{\alpha}{2\pi}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n := \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid 0 \leq p \leq q \leq n, \text{ pgcd}(p, q) = 1\}$ et $\Delta F_n := F_n - F_{n-1}$. Puis on note $\text{pr} : \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid x \leq y\} & \rightarrow [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto \frac{x}{y} \end{cases}$. $\text{pr}(F_n)$ est nommé l'ensemble des fractions de Farey d'ordre au plus n et $\text{pr}(\Delta F_n)$ celui des fraction de Farey d'ordre exactement n . Enfin, si on a $\alpha \in [0, 1]$, et si A représente F_n ou ΔF_n , on notera $A(\alpha)$ pour $A \cap \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < \alpha y\}$.

Remarque. Si on note Φ les sommes partielles de la fonction φ indicatrice d'Euler, on a par définition $|\Delta F_n| = \varphi(n)$ et $|F_n| = \Phi(n)$. Et l'on sait par application de la proposition 2.6 que φ et Φ tendent vers l'infini en l'infini.

En notant λ la mesure de Lebesgue sur le segment $[0, 1]$.

Théorème 2.7. La suite $(\text{pr}(F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers λ .

Théorème 2.8. La suite $(\text{pr}(\Delta F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers λ .

Le théorème 2.7 se déduit du théorème 2.8. C'est donc le second que nous allons démontrer et ce de deux manières différentes. La première démonstration étant plutôt directe, et la seconde s'appuyant sur le critère de Weyl.

Pour l'instant nous allons seulement voir que le théorème 2.8 est effectivement plus puissant, la démonstration étant juste une généralisation pondérée du lemme de Cesàro.

Démonstration du théorème 2.7 à partir du théorème 2.8. Soit $\alpha \in [0, 1]$. Sachant que $\mu_{\text{pr}(\Delta F_n)}([0, \alpha]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$, montrons que $\mu_{\text{pr}(F_n)}([0, \alpha]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $|\mu_{\text{pr}(\Delta F_n)}([0, \alpha]) - \alpha| \leq \varepsilon$. Ainsi pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq |\mu_{\text{pr}(F_n)}([0, \alpha]) - \lambda([0, \alpha])| &= \left| \frac{|F_n(\alpha)|}{\Phi(n)} - \alpha \right| \\ &= \left| \frac{|\Delta F_1(\alpha)| + \dots + |\Delta F_n(\alpha)|}{\Phi(n)} - \frac{\varphi(1) + \dots + \varphi(n)}{\Phi(n)} \alpha \right| \\ &= \left| \frac{|\Delta F_1(\alpha)| - \varphi(1)\alpha + \dots + |\Delta F_n(\alpha)| - \varphi(n)\alpha}{\Phi(n)} \right| \\ &\leq \frac{\Phi(n_0 - 1)}{\Phi(n)} |\mu_{\text{pr}(F_{n_0-1})}([0, \alpha]) - \alpha| \\ &\quad + \frac{1}{\Phi(n)} \sum_{k=n_0}^n \varphi(k) |\mu_{\text{pr}(\Delta F_k)}([0, \alpha]) - \alpha| \\ &\leq \frac{\Phi(n_0 - 1)}{\Phi(n)} |\mu_{\text{pr}(F_{n_0-1})}([0, \alpha]) - \alpha| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mu_{\text{pr}(F_n)}([0, \alpha]) - \lambda([0, \alpha])| \leq \varepsilon.$$

Et ce pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{\text{pr}(F_n)}([0, \alpha]) - \lambda([0, \alpha])| = 0.$$

□

2.2.1 Première démonstration

Démonstration du théorème 2.8. Soit $\alpha \in [0, 1]$. Notre but est de montrer que

$$\mu_{\text{pr}(\Delta F_n)}([0, \alpha]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda([0, \alpha])$$

i.e.

$$\frac{|\Delta F_n(\alpha)|}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha.$$

Posons

$$D_n := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid 0 \leq x \leq y = n\}.$$

On observe que

$$|D_n(\alpha)| = \lfloor n\alpha \rfloor.$$

On a par unicité du pgcd,

$$D_n(\alpha) = \coprod_{d|n} \frac{n}{d} \cdot \Delta F_d(\alpha).$$

Donc en passant au cardinaux

$$\lfloor n\alpha \rfloor = |D_n(\alpha)| = \sum_{d|n} |\Delta F_d(\alpha)|.$$

Ainsi par la première formule d'inversion de Möbius (prop 2.4)

$$\begin{aligned} |\Delta F_n(\alpha)| &= \sum_{d|n} \mu(d) \lfloor \frac{n}{d} \alpha \rfloor \\ &= \alpha \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} + \sum_{d|n} \mu(d) \{ \frac{n}{d} \alpha \} \\ &= \alpha \varphi(n) + \sum_{d|n} \mu(d) \{ \frac{n}{d} \alpha \}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \frac{|\Delta F_n(\alpha)|}{\varphi(n)} - \alpha \right| &\leq \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{d|n} |\mu(d)| \{ \frac{n}{d} \alpha \} \\ &\leq \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{d|n} |\mu(d)|. \end{aligned}$$

En notant f la fonction qui à tout entier naturel non nul n associe $\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{d|n} |\mu(d)|$, il reste à montrer que f tend vers 0 en l'infini.

On remarque tout d'abord que f tend vers 0 sur les puissances de nombres premiers, i.e. lorsque p est un nombre premier et a un entier,

$$f(p^a) = \frac{1}{p^a - p^{a-1}} (1 + 1 + 0 + \dots + 0) = \frac{2}{p^{a-1}(p-1)} \xrightarrow{p^a \rightarrow \infty} 0.$$

Puis l'on remarque que f est multiplicative, en tant que produit d'une fonction multiplicative et d'une convolution de deux fonctions multiplicatives.

Ces deux remarques permettent de conclure par application de la proposition 2.6 et termine la démonstration. \square

2.2.2 Seconde démonstration et Critère de Weyl

Théorème 2.9 (Critère de Weyl). *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties finies de $[0, 1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons e_k la fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{C}_* la fonction qui à t associe $\exp(2i\pi kt)$.*

Alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers λ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^$, $\frac{1}{|A_n|} \sum_{x \in A_n} e_k(x)$ tend vers 0 lorsque n vers l'infini.*

Démonstration du critère de Weyl. On commence par observer que si $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\frac{1}{A_n} \sum_{x \in A_n} e_k(x) = \int_{[0,1]} e_k d\mu_{A_n}$ et $\int_{[0,1]} e_k d\lambda = 0$.

Le sens direct est une occurrence particulière de l'hypothèse de convergence faible-étoile pour la fonction e_k .

Pour la réciproque, soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} et $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, il existe un polynôme trigonométrique $P = a_0 + a_1 e_1 + \dots + a_d e_d$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$. On remarque que $\int_{[0,1]} P d\lambda = a_0$.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[0,1]} f(d\mu_{A_n} - d\lambda) \right| \\ & \leq \left| \int_{[0,1]} (f - P) d\mu_{A_n} \right| + \left| \int_{[0,1]} P(d\mu_{A_n} - d\lambda) \right| + \left| \int_{[0,1]} (P - f) d\lambda \right| \\ & \leq \varepsilon + |a_1| \left| \int_{[0,1]} e_1 d\mu_{A_n} \right| + \dots + |a_d| \left| \int_{[0,1]} e_d d\mu_{A_n} \right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{[0,1]} f(d\mu_{A_n} - d\lambda) \right| \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{[0,1]} f(d\mu_{A_n} - d\lambda) \right| = 0,$$

et ce pour toute fonction f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} , c'est à dire que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers λ . \square

Démonstration du théorème 2.8. En vue d'appliquer le critère de Weyl, soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que

$$\frac{1}{|\Delta F_n|} \sum_{x \in \text{pr}(\Delta F_n)} e_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

i.e.

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\substack{0 \leq r < n \\ r \wedge n = 1}} e_1 \left(\frac{kr}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Notons, pour tout entier naturel n non nul,

$$f_k(n) = \sum_{\substack{0 \leq r < n \\ r \wedge n = 1}} e_1 \left(\frac{kr}{n} \right), \text{ et } g_k(n) = \sum_{0 \leq r < n} e_1 \left(\frac{kr}{n} \right).$$

On a

$$g_k(n) = \sum_{d|n} f_k(d).$$

Donc par la première formule d'inversion de Möbius (prop 2.4)

$$f_k(n) = \sum_{d|n} \mu \left(\frac{n}{d} \right) g_k(d), \text{ puis } |f_k(n)| \leq \sum_{d|n} |g_k(d)|$$

Or comme nous allons le voir, $g_k(n) = 0$ lorsque $n > k$,

$$|f_k(n)| \leq |g_k(0)| + \dots + |g_k(k)|.$$

Ainsi notre fonction f_k est bornée, or comme φ tends vers l'infini, on a bien $\frac{f_k(n)}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Il reste à montrer que g_k est nulle à partir du rang $k+1$. En notant m le pgcd de n et k ,

$$\begin{aligned} g_k(n) &= m g_{\frac{k}{m}} \left(\frac{n}{m} \right) \\ &= \begin{cases} m & \text{si } \frac{n}{m} = 1 \text{ i.e. } n|k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Or lorsque $n > k$, on n'a jamais $n|k$, donc $g_k(n) = 0$ dès lors que $n > k$. \square

3 Connexion de singularités

Lorsque nous nous donnons une surface de translation $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$, nous appellerons une *connexion de singularité* toute géodésique définie sur un segment, commençant et terminant sur une singularité et dont l'intérieur ne contient pas de singularité. On se fixe x_0 une singularité. Notre but est de regarder la répartition des directions de connexions de singularités de départ x_0 lorsque l'on fait croître la longueur des connexions que l'on s'autorise à prendre.

Le résultat auquel nous sommes parvenus concerne les surfaces de translation de genre 1 – c'est à dire les surfaces sans singularité par la formule d'Euler (prop 1.8). Nous avons donc adjoint une fausse singularité puis observé l'équidistribution des directions des vraies connexions de la fausse singularité à elle-même. En notant σ la mesure de probabilité invariante par rotation sur le cercle,

Théorème 3.1. *Les directions des connexions triées par longueur d'une fausse singularité du tore plat à elle-même s'équidistribue vers σ .*

Afin de traiter ce problème, nous devons en effectuer une traduction dans le monde de l'arithmétique. On rappelle qu'un réseau du plan est un sous groupe additif Λ fermé, discret de \mathbb{R}^2 tel que le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par Λ soit le plan tout entier. Grâce à la proposition 1.12, nous savons que la donnée d'une surface de translation de genre 1 est équivalente à la donnée d'un réseau du plan. Lorsque nous nous fixons un réseau Λ , nous noterons Λ_1 l'ensemble $\{(x, y) \in \Lambda \mid \forall k \in \mathbb{N}^*, (x, y) \in k \cdot \Lambda \Rightarrow k = 1\}$. On remarque que lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, alors $(\mathbb{Z}^2)_1$ correspond aux couples d'entiers premiers entre eux.

La raison d'être de Λ_1 est de représenter les connexions de la fausse singularité sur elle-même. En effet, lorsque l'on trace une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ sur le tore démarrant et terminant à x_0 , on peut toujours la relever en $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dans son revêtement universel qu'est le plan tel que $\tilde{\gamma}(0) = (0, 0)$. Puis par la proposition 1.11, nous savons que la courbe relevée est une géodésique si et seulement si c'est un segment dans le plan. Le fait que $\gamma(1) = x_0$ est équivalent à ce que $\tilde{\gamma}(1) \in \Lambda$. Pour terminer, le fait que γ ne rencontre x_0 qu'en 0 et en 1 correspond au fait que $\tilde{\gamma}(1) \in \Lambda_1$.

Ainsi, si pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$ nous notons C_α l'ensemble des points du plan de norme euclidienne au plus 1 et d'argument entre 0 et α , alors le théorème 3.1 devient une conséquence du théorème suivant.

Théorème 3.2. *Pour tout réseau du plan Λ , pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$:*

$$\frac{|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1|}{|r \cdot C_{2\pi} \cap \Lambda_1|} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \frac{\alpha}{2\pi} = \sigma([0, \alpha]).$$

Démonstration du théorème 3.2. Soit Λ un réseau du plan généré par u et v puis fixons $\alpha \in [0, 2\pi]$. Notons $\mathcal{A}(\Lambda)$ l'aire d'un domaine fondamental de Λ et $\mathcal{A}(C_\alpha)$ l'aire de C_α . Commençons par observer que

$$|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda| = r^2 \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) + f(r)$$

où f est telle qu'il existe un $A > 0$ vérifiant $|f(r)| \leq A r$. Cette observation se démontre de manière géométrique en remarquant que $|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda|$ est encadré par l'air de $r \cdot C_\alpha$ respectivement rogné et étendu par le parallélogramme de côté $2u, 2v$, ce qui nous donne une erreur au plus linéaire de l'estimation. Puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons Λ_n l'ensemble $\{(x, y) \in \Lambda \mid \max\{i \in \mathbb{N}^* \mid (x, y) \in i \cdot \Lambda\} = n\}$. (Lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, Λ_n est l'ensemble des couples dont le pgcd vaut n).

Nous avons

$$r \cdot C_\alpha \cap \Lambda = \coprod_{n=1}^{\infty} r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_n.$$

Puis en passant aux cardinaux, et en remarquant que l'application qui à (x, y) associe $(x/n, y/n)$ fournit une bijection de $r \cdot C_\alpha$ sur $\frac{r}{n} \cdot C_\alpha$ et de Λ_n sur Λ_1 ,

$$|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{r}{n} \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1 \right|$$

Or si l'on note $sys(\Lambda)$ la systole de la surface associée à Λ , $|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1|$ est nul lorsque $r < sys(\Lambda)$. Nous pouvons donc appliquer la seconde formule d'inversion de Möbius (prop

2.5) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 |r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1| &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left| \frac{r}{n} \cdot C_\alpha \cap \Lambda \right| \\
 &= \sum_{n=1}^{r \operatorname{sys}(\Lambda)} \mu(n) \left| \frac{r}{n} \cdot C_\alpha \cap \Lambda \right| \\
 &= \sum_{n=1}^{r \operatorname{sys}(\Lambda)} \mu(n) \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) \frac{r^2}{n^2} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{r \operatorname{sys}(\Lambda)} f\left(\frac{r}{n}\right)
 \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1|}{r^2} - \frac{\mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha)}{\zeta(2)} \right| &\leq \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) \left| \sum_{n=r \operatorname{sys}(\Lambda)}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \right| \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} \left| \sum_{n=1}^{r \operatorname{sys}(\Lambda)} f\left(\frac{r}{n}\right) \right| \\
 &\leq \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) \sum_{n=r \operatorname{sys}(\Lambda)}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &\quad + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{r \operatorname{sys}(\Lambda)} A \frac{1}{n} \\
 &= O\left(\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{\ln(r)}{r}\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1| \sim \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) r^2.$$

On conclut en remarquant que $2\pi \mathcal{A}(C_\alpha) = \alpha \mathcal{A}(C_2 \pi)$.

□

Références

- [1] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*.
- [2] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, 1966.
- [3] André Gramain. *Topologie des surfaces*. PUF, 1971.
- [4] E. M. Wright G.H. Hardy. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 1938.

Chapitre 6

Projet de M2 : Modélisation de la sénescence

PROJET M2 MSV

Modèles de populations sénescentes

François LAVALLÉE et
Raphaël TINARRAGE

Encadrant :
Gaël RAOUL

30 mars 2017

Table des matières

Introduction	2
1 La place du vieillissement dans la théorie de l'évolution	3
1.1 En biologie	3
1.1.1 <i>An unsolved problem of biology</i>	3
1.1.2 Accumulation de mutations	5
1.1.3 Pléiotropie antagoniste	7
1.1.4 Dans la littérature moderne	8
1.2 Quantifications mathématiques	10
1.2.1 Fertilité et mortalité	10
1.2.2 La paramètre malthusien	12
2 La place du vieillissement dans la nature	14
2.1 Chez les oiseaux	15
2.2 Chez les mammifères	17
2.3 Chez les plantes	19
3 Modèles de population sénescante	20
3.1 Familles de paramètres	20
3.2 Modèle d'évolution déterministe	21
3.2.1 Dynamique d'une seule population	21
3.2.2 Compétition entre deux populations	21
3.2.3 Population avec mutations	22
3.3 Modèle d'évolution probabiliste	23
3.3.1 Description	23
3.3.2 Simulations	24
4 Mise en compétition	26
4.1 Comparaison des fitness	27
4.2 Accumulation des mutations	30
4.3 Gènes antagonistes pléiotropes	32
Conclusion	33

Introduction

La sénescence est le processus biologique d'altération de la vitalité d'un individu au cours de sa vie. C'est un phénomène presque universel chez les organismes multicellulaires. A première vue, la sénescence apparaît comme une grande farce faite à Darwin. Comment un phénomène aussi grossier que la sénescence peut résulter de la sélection naturelle ?

Avant la seconde moitié du vingtième siècle, beaucoup de biologistes ont pris le parti d'expliquer la sénescence comme une accumulation naturelle et inévitable de dommages physiologiques. Mais nous verrons que la justification se trouve surtout au niveau génétique. Nous étudierons en particulier la théorie de l'accumulation des mutations (formulée par Medawar en 1951), et théorie des gènes antagonistes pléiotropes (raffinement de la précédente, proposée par Williams en 1957).

L'idée principale des théories évolutionnistes de la sénescence est la décroissance de la pression de sélection avec l'âge. Autrement dit, étant donné un gérontogène, c'est à dire une mutation génétique engendrant un trait nocif et s'exprimant à un âge fixé, la sélection naturelle discriminera d'autant moins ce gène qu'il s'exprimera tardivement chez l'individu.

Ainsi, dans l'histoire évolutive d'une espèce, la théorie de l'accumulation des mutations propose que les mutations défavorables voient leur âge d'expression retardée (postponing), jusqu'à des âges si élevés pour l'espèce que ce trait devienne invisible aux yeux de la sélection naturelle.

La théorie de la pléiotropie antagoniste rajoute l'hypothèse que ces gérontogènes à expression tardive, et provocateurs de sénescence, soient en fait compensés par des effets bénéfiques en jeune âge. Souvent, ils améliorent la reproduction.

En corollaire, ces théories prévoient que le décalage d'un trait sénescents soit modulé par la pression de sélection environnementale : plus le taux de mortalité d'une espèce est fort, moins il y a d'importance à retarder ce trait, et moins l'évolution de la sénescence est rapide.

Nous voulons répondre à ces deux questions :

1. La pression de sélection naturelle est-elle bien une fonction décroissante de l'âge ?
2. Cette décroissance est-elle bien modulée par le taux de mortalité extrinsèque ?

D'un point de vue biologique, on pourrait répondre à la première en suivant l'histoire évolutive d'une espèce au cours de l'évolution, c'est à dire la dynamique de modification de son génome. Pour la seconde, il faudrait l'observer sous des pressions de sélection différentes.

Mathématiquement, pour comparer des individus, il existe des quantifications usuelles de fitness, fonctions des taux de survie et de fécondité. Toutefois, pour simuler des histoires évolutives, nous avons besoin d'un modèle d'évolution. Nous en proposons deux : un déterministe et un stochastique.

Dans le cadre de nos simulations, ces questions se reformulent ainsi :

1. Étant donnée une condition initiale de sénescence, observe-t-on bien une variation de la vitesse de décalage de ce gène en fonction de son âge d'expression ?
2. Cette vitesse de décalage est-elle bien inversement proportionnelle au taux de mortalité extrinsèque ?

1 La place du vieillissement dans la théorie de l'évolution

1.1 En biologie

1.1.1 *An unsolved problem of biology*

Nous présentons ici un bref historique de la genèse des théories de la sénescence.

Charles Darwin. Dans l'ouvrage Sur l'origine des Espèces au moyen de la Sélection Naturelle, ou la Préservation des Races les meilleures dans la Lutte pour la Vie (1859), Darwin explique les idées importantes de sa théorie dans l'introduction : « Comme il naît beaucoup plus d'individus de chaque espèce qu'il n'en peut survivre, et que, par conséquent, il se produit souvent une lutte pour la vie, il s'ensuit que tout être, s'il varie, même légèrement, d'une manière qui lui est profitable, dans les conditions complexes et quelquefois variables de la vie, aura une meilleure chance pour survivre et ainsi se retrouvera choisi d'une façon naturelle. En raison du principe dominant de l'hérédité, toute variété ainsi choisie aura tendance à se multiplier sous sa forme nouvelle et modifiée ».

Selon Darwin, l'évolution sélectionne ainsi les individus avec des taux de survie les plus élevés. Ces individus transmettent ces traits à leur descendance. Ce sont donc ces traits qui doivent se répandre au sein de la population, et donc la sélection va dans le sens de l'augmentation du fitness de la population.

Comment donc expliquer que de nombreux organismes ont des taux de reproduction et de survie qui décroissent à l'âge adulte ? On ne peut pas se contenter de l'explication que l'évolution par la sélection naturelle n'est pas parfaite, et que le vieillissement serait le reflet de cette limite. En effet, certains organismes comme les hydres ne semblent pas vieillir.

Alfred Wallace. L'explication de Wallace, contemporain de Darwin, est que la sélection naturelle agit de telle sorte que, lorsqu'un individu a produit suffisamment de descendants, il est éliminé. Son argument est que cet individu cause du tort à ses descendants en consommant leurs ressources. Il imagine l'existence d'un individu avec une durée de vie infinie, mais qui ne pourrait pas se reproduire. La mort d'un tel individu due à un aléa de l'environnement causerait l'extinction de la population. Ainsi il arrive à la conclusion que la sélection favorise la reproduction. Il ajoute que l'existence d'individu immortel ayant la capacité de se reproduire conduirait à un manque de ressource.

Rose, dans [1], souligne que cet argument ne tient pas compte d'une croissance de population limitée par un prédateur. Il reconnaît cependant l'importance de l'idée selon laquelle l'immortalité est sacrifiée pour améliorer la reproduction au niveau individuel.

August Weismann. Dans The Duration of Life (1889), Weismann marque une rupture avec la vision physiologique du vieillissement (usure du corps). Il considère que la durée de vie d'un individu dépend grandement de son adaptation au milieu environnant, et pas seulement de considérations physiologiques.

Il propose un effet de sélection de groupe (et non centrée sur l'individu) pour justifier le vieillissement. Il explique que l'avantage de la régulation de la durée de vie revient à l'espèce, car l'individu seul ne compte pas. Il abandonnera cette vision dans ses derniers travaux, et défendra le fait que l'allongement de la durée de vie est corrélée à un allongement de la période de reproduction. Il défendra même l'idée qu'il n'y a pas de raison à ce que la vie se prolonge après la période de reproduction.

Ronald Fisher. Les premières études mathématiques sont apparues avec l'étude de la génétique des populations. Fisher, en 1930, dans The Genetical Theory of Natural Selection, choisit comme fitness le paramètre malthusien. Ce paramètre est défini comme solution

de l'équation implicite en r : $\int_0^\infty l(x)f(x)e^{-rx}dx = 1$, où $l(x)$ est la fonction de survie, et $f(x)$ la fécondité d'un individu d'âge x . Nous reviendrons sur le paramètre malthusien dans la section qui y est dédiée.

Fisher s'est entre autre intéressé à l'impact que les individus de différents âges ont sur la croissance totale de la population.

Peter Medawar. Cependant, Fisher n'a pas directement traité du problème du vieillissement. C'est Medawar, en 1951, qui joint les deux thématiques de la génomique et du vieillissement. Dans la lignée de Fisher, il soulève que la contribution qu'un individu fait à l'espèce décroît avec son âge. De déductions élémentaires, Medawar développe des hypothèses sur les mécanismes génétiques du vieillissement. En somme, sa théorie repose sur l'idée que l'intensité de la force de la sélection naturelle décroît avec l'âge.

William Hamilton et Brian Charlesworth. Enfin, deux théoriciens de la génétique entrent dans l'histoire. De 1966 aux années 80, Hamilton et Charlesworth développent un cadre mathématique pour la théorie évolutionniste du vieillissement.

Hamilton étudie les effets des variations de variables démographiques sur le fitness (représenté par le paramètre malthusien). Il établit dans ce cadre que, comme l'avait proposé Medawar, la force de la sélection naturelle décroît avec l'âge.

Charlesworth quant à lui développe des modèles de génétique de population structurée en âge. Ses résultats concernent les effets de la sélection et les états d'équilibre.

Conclusion : Depuis que Weismann a abandonnée l'idée de la sélection de groupe, les théoriciens de l'évolution se sont mis d'accord sur le fait que la cause principale de l'apparition de la sénescence est la décroissance avec l'âge de la force de sélection naturelle.

1.1.2 Accumulation de mutations

Dans cette partie, nous proposons une synthèse de l'article de 1951 de Medawar ([2]).

La sénescence selon Medewar. Medewar distingue la terminologie de vieillissement et de sénescence. Le vieillissement, c'est accumuler des années de vie. La sénescence, c'est la perte de vitalité qui lui est caractéristique.

La sénescence se mesure à l'échelle individuelle (capacité de cicatrisation, acuité des sens, endurance), mais aussi statistiquement (à travers les tables de mortalité). La figure 1 représente, pour une population initiale de 100'000 êtres humains, le nombre de survivants à chaque âge.

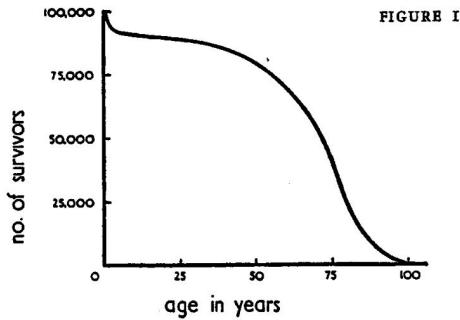
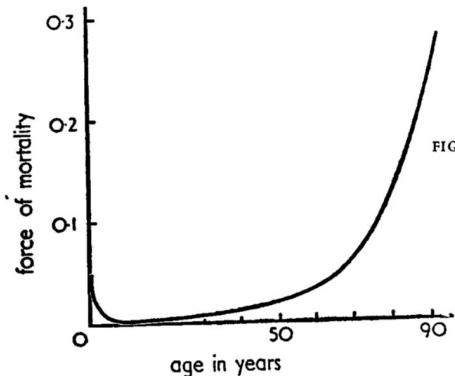


FIGURE 1 – Courbe de survie



A partir de la courbe de survie, on peut calculer la force de mortalité (figure 2). C'est la dérivée de la courbe de survie divisée par elle-même. C'est une mesure du nombre d'occurrences de morts à un âge donné. L'augmentation notable de cette dernière courbe, à partir de 50 ans, est la sénescence.

FIGURE 2 – Force de mortalité

Medawar voit deux explications à de la sénescence :

- la première est une usure physiologique, mécanique du corps (dégénérescence des cellules, infections) ;
- la seconde est une sénescence innée, c'est à dire de nature génétique.

Il définit la sénescence en ces termes : « *that change of the body faculties and sensibilities and energies which accompanies aging, and which renders the individual progressively more likely to die from accidental causes of random incidences* ».

Où Weismann a eu tort. August Weismann, en 1981, propose l'explication suivante à l'explication de la sénescence : les individus abîmés par le temps sont inutiles à l'espèce, et même nuisibles, car prenant la place des autres.

Medawar rejette ce point de vue pour deux raisons. Déjà, la détérioration des individus par le temps (et notamment l'existence d'un stade post-reproductif) est l'effet-même de la sénescence. Il n'est pas question de justifier la sénescence par elle-même. Deuxièmement, il soutient que la proportion de vieux individus dans une population est en fait très faible, et même négligeable.

La force de sélection est fonction de l'âge. A travers l'expérience de pensée des tubes à essai, l'auteur montre que, même dans une population immortelle, la force de sélection naturelle décroît avec l'âge. En effet, la distribution des âges d'une population soumise à un taux de mortalité constant est, en temps long, une courbe exponentielle. Supposons qu'un trait génétique apparaisse dans la population, et que ce gène s'active à un âge particulier, provoquant la mort immédiate de l'individu. Si cet âge d'expression est précoce, relativement

à la distribution stationnaire des âges, alors les individus le portant seront vite amenés à disparaître. Si au contraire cet âge d'expression est plus grand que l'espérance de vie habituelle, les individus mutés auront le temps de se reproduire, et le gène s'intégrera à la population.

Ainsi, dans le cadre de la sélection naturelle, l'avantage ou désavantage sélectif d'un trait est pondéré par l'âge à partir duquel il est actif.

Postponing. Allons plus loin. Considérons une population possédant un tel gène nocif qui s'exprime à un âge particulier. Si une mutation génétique provoquait le décalage de cet âge d'expression vers des périodes de la vie plus avancées, les individus mutés seraient plus aptes à vivre longtemps. Si ce décalage (on dira aussi retard ou postponing) est très grand, le gène ne s'exprimera plus que très rarement, et ce décalage sera en fait équivalent à son élimination.

Cette idée, selon laquelle la sélection naturelle a provoqué le décalage des traits nocifs vers des âges élevés, est la théorie de l'accumulation des mutations.

Conclusion. Finalement, trois agents interviennent dans l'évolution de la sénescence

- la négligeabilité de la sélection naturelle pour les traits tardifs
- le retard d'un trait est équivalent à son élimination
- la sélection naturelle tend à provoquer ce retard

Notons aussi un corollaire important de ces idées : le décalage d'un trait (ou plutôt la vitesse de ce décalage) est influencé par le taux de mortalité extrinsèque subit par l'espèce. Plus ce taux de mortalité est faible, plus ce décalage doit être fort.

1.1.3 Pléiotropie antagoniste

Dans son article, Medawar fait remarquer : « A relatively small advantage conferred early in the life of an individual may outweigh a catastrophic disadvantage withheld until later ».

La théorie de la pléiotropie antagoniste a pour prérequis celle de l'accumulation des mutations. Williams, un de ses premiers défenseurs, affirme que les gènes qui causent le vieillissement ne sont pas éliminés par l'évolution non seulement parce que leurs effets néfastes ne se manifestent qu'après la période de reproduction, mais aussi parce ces derniers ont un effet positif avant la période reproduction.

La pléiotropie réside donc dans le fait d'induire un bénéfice précoce et un effet délétère à plus long terme. Par exemple, selon Steven Austad ([3]), le risque de cancer du sein chez la femme augmente avec la durée d'exposition à l'oestrogène, qui est pourtant nécessaire à la fertilité.

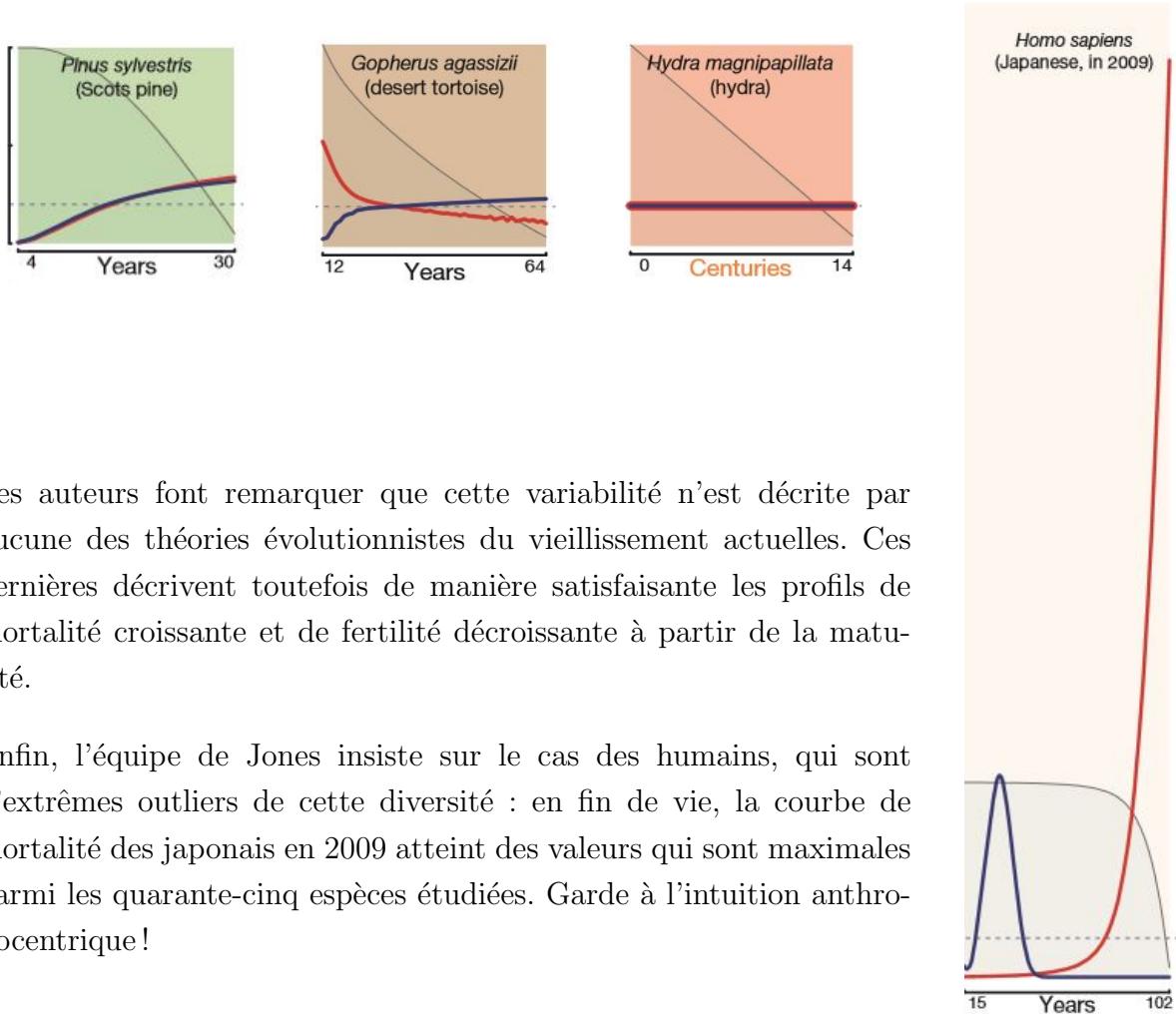
Thomas E. Johnson, en provoquant des mutations aléatoires, a réussi à créer des vers de terre ayant une durée de vie plus importante. En 1998, son équipe a montré que la mutation du gène *age1* peut allonger la durée de vie d'environ 70 % par rapport à la population initiale. Les vers mutants produisent plus d'enzymes empêchant l'oxydation. La mutation du gène *age1* semble inactiver ce gène, ce qui signifie que la protéine encodée n'est plus fabriquée par l'organisme. Si la mutation du gène implique une augmentation du nombre d'antioxydant, il est possible que la protéine codée par ce gène inhibe la fabrication de ces antioxydants. On peut se demander pourquoi l'organisme inhibe la synthèse d'un tel composant. Johnson pense que cette inhibition est le résultat de l'expression d'une autre fonction vitale, autrement dit il pense qu'il s'agit d'un cas de pléiotropie antagoniste.

Cette théorie est aussi une piste pour expliquer la limite dans la prolifération des cellules. En 1961, Leonard Hayflick et Paul Moorhead ont mis en évidence qu'après environ 50 générations, une population de cellules fibroblastes ne double plus. De plus, des expériences montrent que les cellules perdent progressivement leur capacité de prolifération en vieillissant. On observe que les télomères situés à l'extrémité des chromosomes se raccourcissent avec l'âge. Ce phénomène se produit probablement lors de la division cellulaire et peut être lié à la perte de la capacité de prolifération. Smith pense que la limitation de la capacité de prolifération est apparue comme défense contre les cancers.

1.1.4 Dans la littérature moderne

Une diversité encore loin d'être saisie. En 2013, quatorze auteurs se rassemblent pour présenter une compilation de données issues de la biologie expérimentale ([4]). Ils y dessinent les courbes de mortalité et de fécondité de onze mammifères, douze autres vertébrés, dix invertébrés et douze plantes. Le constat est désarmant : outre les homo sapiens et leurs courbes bien connues - mortalité croissante, fertilité croissante à partir de la puberté puis décroissante jusqu'à la ménopause - on observe chez les autres espèces une grande diversité de profils : mortalité et fertilité au choix croissante, constante, ou décroissante.

Quelques exemples sont données dans les quatre figures suivantes. La mortalité est en rouge, la fertilité en bleu.



Les auteurs font remarquer que cette variabilité n'est décrite par aucune des théories évolutionnistes du vieillissement actuelles. Ces dernières décrivent toutefois de manière satisfaisante les profils de mortalité croissante et de fertilité décroissante à partir de la maturité.

Enfin, l'équipe de Jones insiste sur le cas des humains, qui sont d'extrêmes outliers de cette diversité : en fin de vie, la courbe de mortalité des japonais en 2009 atteint des valeurs qui sont maximales parmi les quarante-cinq espèces étudiées. Garde à l'intuition anthropocentrique !

Medawar avait tort ? Pour terminer ce panorama des théories biologiques du vieillissement, citons l'article [5] de 2017. Rappelons que, selon Medawar, l'évolution de la sénescence est permise par le fait que peu d'individus vivent vieux, et qu'ainsi ce qui leur arrive quand c'est le cas est évolutionnairement peu important. En conséquence, une augmentation du taux de mortalité extrinsèque, comme il réduit la probabilité de vivre vieux, favorise l'évolution de la sénescence.

Rose précise cette idée dans [1] : « The [evolutionary] hypothesis requires that it should be possible to prolong the life span of a species by breeding it in an environment where the hazard factor is lower than normal. Such an experiment would be difficult to carry out, because genetically controlled senescence, already present in a population, would limit the extent to which environmental improvement could immediately extend specific longevity. A quicker answer might be obtained by the reverse procedure—in which the experimenter would impose an additional severe hazard by decreasing the normal life span for several generations. Then, according to the hypothesis, the subsequent life span of the experimental population should be shorter than that of a control population when both are tested in the environment of the control population. »

Toutefois, dans cet article, les auteurs affirment que ce corollaire est faux : « extrinsically imposed mortality, because it reduces the chance of surviving to be old, favors the evolution of senescence. We show that these ideas, although widespread, are incorrect. »

Ils démontrent, en manipulant les équations des gradients de sélection (des valeurs issues du paramètre malthusien), que modifier la courbe de survie en ajoutant un terme de décroissance exponentielle n'a pas d'effet. Toutefois, ils confirment que le gradient de sélection décline avec l'âge.

1.2 Quantifications mathématiques

1.2.1 Fertilité et mortalité

Pour quantifier une population structurée en âge, nous avons besoin de deux fonctions : la survie et la fertilité. Pour la suite, nous nous donnons une espèce animale dans un environnement.

Survie. La courbe de survie $l : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ représente, pour chaque $a \in \mathbb{R}^+$, la probabilité qu'un individu atteigne l'âge a .

On l'estime sur une population naturelle en traçant les fréquences cumulées décroissantes de l'âge de mort des individus observés (par exemple, les figures 3 et 4 tirées de [6]).

Age (years)	Age class x	Age frequency n_x
0	1	(2,096)
1	2	
2	3	
3	4	(646)
4	5	(572)
5	6	(530)
6	7	(505)
7	8	(486)
8	9	478
9	10	447
10	11	434
11	12	429
12	13	387
13	14	362
14	15	336
15	16	293
16	17	233
17	18	142
18	19	97
19	20	59
20	21	

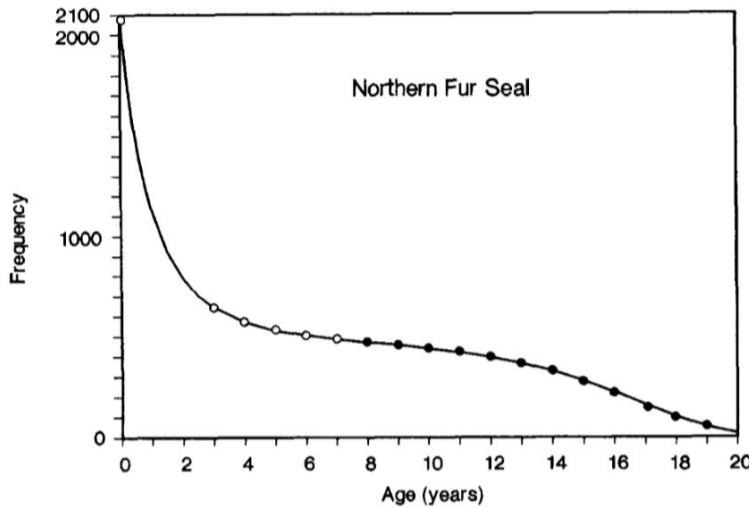


FIGURE 3 – Âge des phoques retrouvés morts entre 1958 et 1961

FIGURE 4 – Courbe de survie estimée

Il est classique ([7]) de distinguer trois allures de courbes de survie (ou plutôt de leur logarithme) :

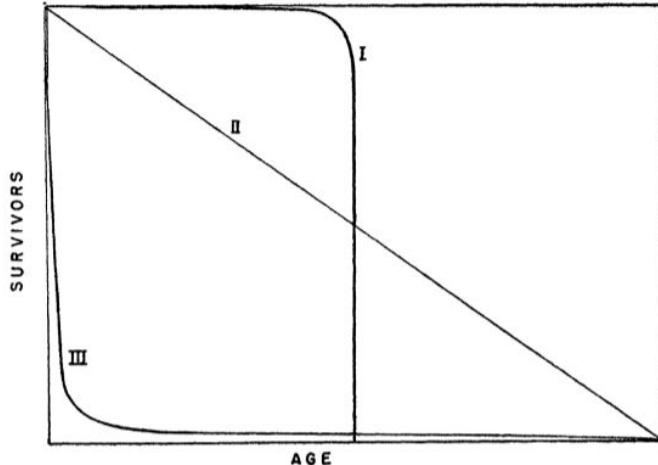


FIGURE 5 – Courbe de survie (échelle log)

Dans le cas d'une population sans sénescence, la courbe de survie est une simple exponentielle décroissante (à un taux $\tau > 0$ le taux de mortalité extrinsèque). En échelle logarithmique, elle correspond donc à la courbe de type II.

Mortalité. Le taux de mortalité $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ représente, à chaque âge a , le taux de décroissance exponentielle infinitésimal d'une population d'individus d'âge a .

Type I : faible mortalité en début de vie, fort déclin à la fin (typiquement les mammifères)

Type II : mortalité constante au cours de la vie (présumés les oiseaux)

Type III : forte mortalité en début de vie, plus faible par la suite (comme les grenouilles)

Autrement dit, si l est la fonction de survie,

$$l(a) = e^{-\int_0^a m(t)dt}$$

$$m(a) = -\frac{l'(a)}{l(a)}$$

par exemple, les figures 6 et 7, tirées de [8], utilisent cette relation (étude des dauphins en Floride).

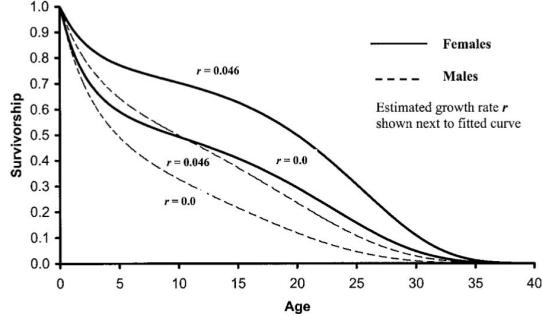


FIGURE 6 – Courbes de survie estimées de dauphins

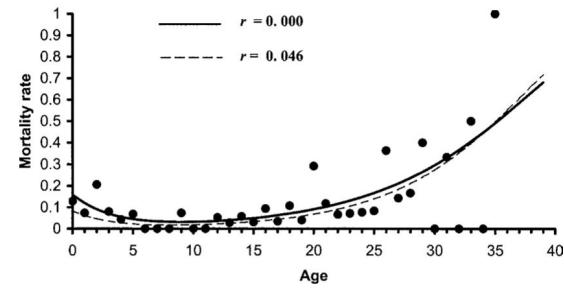


FIGURE 7 – Courbes de mortalité correspondantes pour les femelles

Lorsque l'on dispose d'un jeu de données discret aux âges a_1, \dots, a_N , on estime le taux de mortalité $m(a_i)$ par l'approximation du premier ordre

$$m(a) = -\frac{l'(a_i)}{l(a_i)} \simeq -\frac{l(a_{i+1}) - l(a_i)}{(a_{i+1} - a_i)l(a_i)} = \left(1 - \frac{l(a_{i+1})}{l(a_i)}\right) \frac{1}{a_{i+1} - a_i}.$$

Fertilité. La courbe de fertilité $\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ représente, pour chaque âge a , le cardinal moyen de la progéniture d'un individu autour de l'âge a . On peut voir β comme le paramètre d'un processus de Poisson non-homogène qui décrirait l'apparition des nouveaux-nés d'un individu.

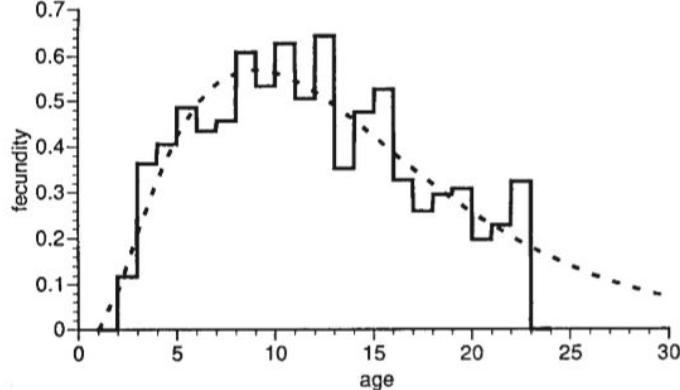


FIGURE 8 – Courbe de fertilité du cheval dans [9]

1.2.2 La paramètre malthusien

Étant données l et f les courbes de survie et de mortalité d'un population, Fisher définit le paramètre malthusien de fitness r comme étant l'unique solution réelle de $\int_0^\infty l(x)f(x)e^{-rx}dx = 1$. Il est censé donner une idée de l'adaptation de l'espèce dans son milieu.

Afin de justifier cela, nous allons étudier une équation représentant la démographie de l'espèce ainsi décrite, et faire apparaître ce paramètre comme caractéristique des solutions stables. Les résultats sont issus du cours de Lucilla Corrias « Modèles mathématiques aux dérivées partielles en sciences du vivant ».

L'équation 1 rend compte de l'évolution de la densité d'une population structurée en âge. La population n'est soumise ni à l'émigration ni à l'immigration, mais prend en compte la mortalité.

On considère que la population décroît exponentiellement au taux $M(a)$, que l'on suppose indépendant du temps. La loi de conservation de la population assure que, pendant une durée infinitésimale δt , le nombre d'individu qui meurent est $M(a)\rho(t, a)\delta t$. Dans l'équation 2, $b(a)$ est le taux de naissance des individus (supposé aussi indépendant du temps). L'équation 3 donne la distribution en âge de la population initiale.

$$\frac{\partial \rho(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, a)}{\partial a} + M(a)\rho(t, a) = 0 \quad a \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

$$\rho(t, 0) = \int_0^\infty f(s)\rho(t, s)ds \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2)$$

$$\rho(0, a) = \rho_0(a) \quad a \in \mathbb{R}_+ \quad (3)$$

Théorème 1.1 Soit $b \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $d \in L_{Loc}^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Alors pour tout $T > 0$, il existe une unique fonction $u \in L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}_+))$ satisfaisant 1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}_+$.

Afin d'étudier le comportement en temps long de la population, on va s'intéresser à une solution $\bar{\rho}$ stationnaire en a et exponentielle en t : $\bar{\rho}(t, a) = \phi(a)e^{\lambda t}$.

Dans ce cas, $\bar{\rho}$ est solution de 1 si et seulement si ϕ est solution de

$$\phi'(a) + d(a)\phi(a) + \lambda\phi(a) = 0, \quad a > 0,$$

c'est à dire que $\phi(a) = \phi(0)e^{-D(a)-\lambda a}$, où $D(a) := \int_0^a d(y) dy$, $\forall a > 0$

De plus, la condition au bord (équation 2) impose :

$$\phi(0) = \int_0^\infty b(a)\phi(0)e^{-D(a)-\lambda a} da$$

Autrement dit,

$$1 = \int_0^\infty b(a)e^{-D(a)-\lambda a} da.$$

Maintenant, posons $F(\lambda) = \int_0^\infty b(a)e^{-D(a)-\lambda a} da$. F est une fonction positive strictement croissante, telle que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = 0$ et $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = \infty$. Ainsi, il existe une unique valeur λ_0 telle que $f(\lambda_0) = 1$.

Cette valeur λ_0 est le paramètre malthusien précédemment défini $\int_0^\infty b(a)e^{-D(a)-\lambda_0 a} da = 1$.

On dispose du théorème suivant :

Théorème 1.2 Soit b et d positif, alors soit $D(a) := \int_0^a d(y) dy$, $\forall a > 0$ Supposons que $S := \int_0^\infty b(a)e^{-D(a)} da < \infty$ et $S \neq 1$.

Alors il existe une unique constante réelle $\lambda_0 \in \mathbb{R}_*$ et une unique fonction positive $\phi = \phi(a)$ tel que $\bar{\rho}(t, a) = \phi(a)e^{\lambda_0 t}$ soit solution des équations 1 et 2. De plus, ϕ est solution du problème renormalisé :

$$\phi'(a) + d(a)\phi(a) + \lambda_0\phi(a) = 0 \quad a > 0 \quad (4)$$

$$\phi(0) = \int_0^\infty b(a)\phi(a) da \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \phi(a) da = 1. \quad (6)$$

De plus, $\lambda_0 > 0$ si $S > 1$, et $\lambda_0 < 0$ si $S < 1$.

Remarque 1.3 $\bar{\rho}$ est exponentiellement croissante si $S > 1$, et exponentiellement décroissante si $S < 1$.

On peut montrer que cette solution donne le profil asymptotique de la solution ρ . A cette fin, nous définissons ψ solution du problème dual :

$$-\psi'(a) + d(a)\psi(a) + \lambda_0\psi(a) = \psi(0)b(a).$$

Pour choisir $\psi(0)$, on fixe $\int_0^\infty \psi(\alpha)\phi(\alpha) d\alpha = 1$. Il existe une unique solution ψ satisfaisant les deux équations précédentes. Posons $N = \int_0^\infty \rho_0(a)\psi(a) da$.

Théorème 1.4 Sous les hypothèses des deux théorèmes précédents, et si il existe $\mu > 0$ tel que $b(a) > \mu\phi^{-1}(a) \int_0^\infty b(\alpha)\phi(\alpha) d\alpha$, $\forall a \geq 0$. Alors, $\int_0^\infty |e^{-\lambda_0 t}\rho(t, a) - N\phi(a)|\psi(a) da \leq e^{-\mu t} \int_0^\infty |\rho_0(a) - N\phi(a)|\psi(a) da$.

2 La place du vieillissement dans la nature

Dans cette section, nous allons confronter les idées évolutionnistes du vieillissement à des données issues de la nature. L'estimation des paramètres biologiques tels que la mortalité est une tâche difficile. Toutefois de nombreux zoologistes et botanistes se prêtent à la tâche. Rappelons que les comportements observables sont très variés, comme le montre la figure 9, tirée de [4].

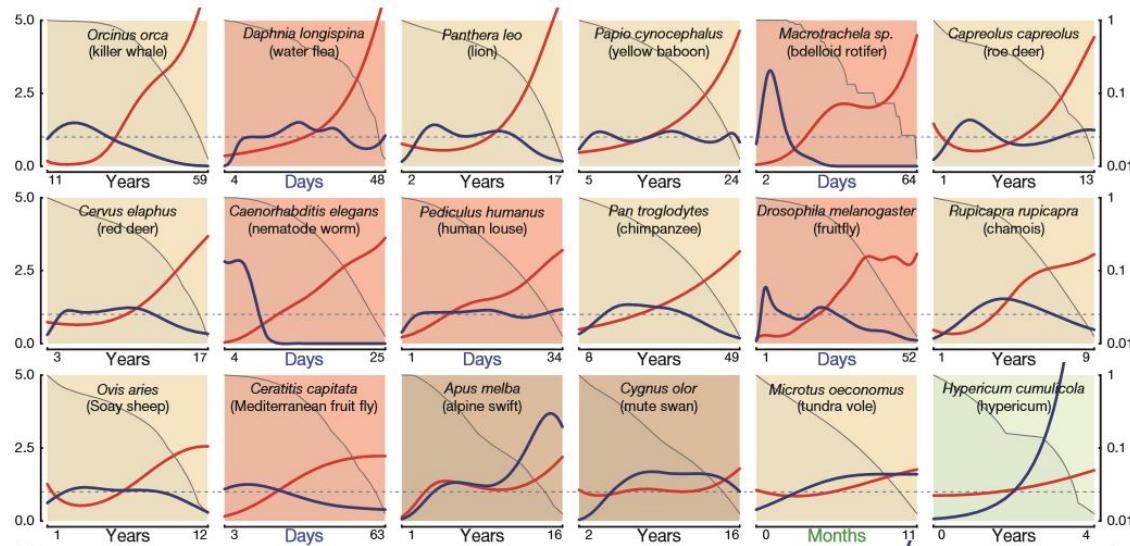


FIGURE 9 – Mortalité (rouge), fécondité (bleu) et survie (gris, échelle-log) de quelques espèces.

Sans exhaustivité, nous commencerons par le cas des oiseaux, chez lesquels les données sont abondantes, grâce notamment à la méthode du baguage. Le baguage consiste à accrocher une bague numérotée à une patte de l'animal, afin de le reconnaître, le plus souvent en retrouvant sa dépouille. Conjointement à une estimation de son âge, cela permet une approximation directe de la fonction de survie de l'espèce.

Ensuite, les mammifères, qui sont aussi des espèces activement observées.

Enfin, les observations du vieillissement des plantes sont plus rares, mais présentent des résultats très intéressants et complètement opposés à ceux des animaux.

Nous ne discuterons pas des insectes. Néanmoins, ils sont un modèle fréquent de recherche, notamment la drosophile. Leur reproduction si rapide permet de simuler des pressions de sélections artificielles, ce qui permet différents protocoles de validation expérimentale des théories du vieillissement.

2.1 Chez les oiseaux

Les oiseaux, comparés aux mammifères non-volants de même taille, vivent considérablement plus longtemps (sûrement grâce au vol qui leur permet d'échapper aux prédateurs).

Taux de mortalité. Il a longtemps été accepté que les oiseaux subissent un taux de mortalité constant au cours de leur vie (voir les tables de mortalité dans [7]). Dans [10], les auteurs rejettent cette hypothèse commune, et observent au contraire un déclin de la vitalité en fin de vie.

Mortalité extrinsèque et intrinsèque. Il est séduisant de vouloir définir un taux de mortalité extrinsèque (dû à la prédation, maladies contagieuses, sous-alimentation, conditions climatiques), opposé à un taux intrinsèque (maladies vasculaires, cancers, maladies auto-immunes, anomalies génétiques acquises). Dans [11], les auteurs montrent que, comme le prévoit la théorie évolutionniste de la sénescence, les taux de sénescence chez les oiseaux sont en corrélation positive avec le taux de mortalité extrinsèque estimé.

Ils étudient différents attributs qui augmentent la durée de vie. Avec la nutrition et comportement social, ils retiennent surtout la masse corporelle, qui a le plus grand effet sur la longévité maximale des oiseaux. Une masse corporelle élevée peut être considérée comme un investissement à long terme. Afin d'atteindre leur taille adulte, ces oiseaux délayent la sénescence.



Moineau domestique.
Espérance de vie : 3 ans.
5/6 œufs par portée.



Balbuzard pêcheur. Espérance de vie : 18 ans.
2/3 œufs par portée.



Albatros royal. Espérance de vie : 50 ans.
1 œuf par portée.

En captivité. Dans [12], les auteurs mettent à l'épreuve la sénescence de cinquante-trois espèces d'oiseaux et mammifères en comparant leurs taux de mortalités dans la nature et en captivité. Il estiment, dans les deux cas, les paramètres d'un modèle de Weibull $m(x) = m_0 + \alpha x^\beta$. Dans ce modèle, on aimerait identifier m_0 au taux de mortalité extrinsèque, et α et β à des causes intrinsèques. Ainsi le taux de mortalité extrinsèque serait indépendant de l'âge, et le taux de mortalité intrinsèque un reflet direct de la sénescence. Encore faut-il justifier que le taux de mortalité extrinsèque est indépendant de l'âge. Ce n'est pas clair, au contraire, il pourrait être modulé par une vulnérabilité due à l'âge. Notons aussi que ce taux de mortalité extrinsèque pourrait apparaître constant, car contrebalancé par l'expérience acquise avec l'âge.

Si, en comparant une espèce dans la nature et en captivité, seul le paramètre m_0 est modifié, alors il est raisonnable de supposer qu'il représente effectivement un taux de mortalité extrinsèque constant (voir figure 10). C'est ce que montre Ricklefs ([13]) en étudiant vingt-trois espèces d'oiseaux élevés en zoos. Il calcule que m_0 est 30% plus faible en captivité, tandis que α et β ne diffèrent pas significativement (en fait, à cause de la sensibilité de ces paramètres, les tests sont réalisés sur la valeur dérivé $\omega = \alpha^{\frac{1}{\beta+1}}$).

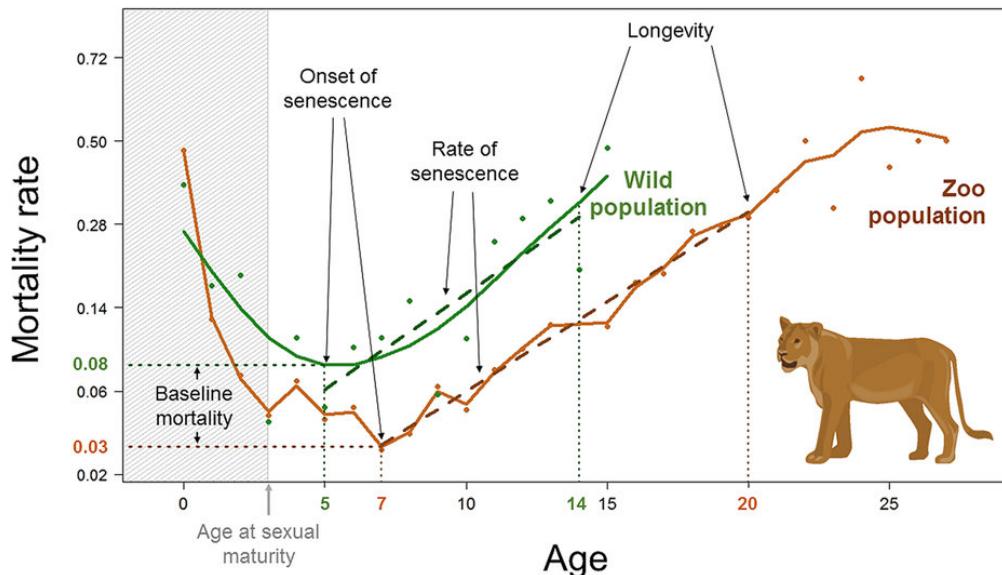


FIGURE 10 – Mortalité de la lionne sauvage et en captivité.

Un corollaire de cette observation est que les oiseaux conservent un haut niveau de fitness même en vieillissant, et que les morts dues aux facteurs intrinsèques sont des « morts catastrophiques », c'est à dire relativement rapides, et sans période invalidante prolongée (*terminate illness*). Notons que ceci contredit l'idée que les individus ne vivent pas suffisamment longtemps pour subir les dégâts de la sénescence, comme le soutenait Medawar.

Toutefois, Ricklefs et Scheuerlin observent que le taux de sénescence ω décroît significativement chez certaines espèces de mammifères en captivité. Cela signifie que le taux de mortalité extrinsèque est une fonction de l'âge. C'est notamment le cas pour les prédateurs rapides ou les proies vivant dans la savane ou les prairies (lions, grands ongulés). Toutefois, cela n'a pas été observé sur les éléphants, phoques, hippopotames et chimpanzés. On peut y voir ici la décroissance de la vitalité de certaines espèces en milieu hostile.

Enfin, citons que les auteurs observent que le taux de sénescence est directement relié au taux de mortalité extrinsèque chez les jeunes adultes, ce qui corrobore la théorie de Medawar. Toutefois, la proportion de décès dûs à la sénescence est plus forte chez les espèces à faible taux de sénescence et plus grande espérance de vie. Cela rentre en conflit avec le postponing de Medawar, qui énonce au contraire que les espèces à longue espérance de vie doivent moins subir les effets de la sénescence. Cela suggère que l'histoire évolutive du taux de sénescence n'a pas totalement compensé la propension à vivre vieux chez les espèces à faible mortalité extrinsèque. Bien que les auteurs le rejettent, la théorie des gènes antagonistes pléiotropes permet d'expliquer ce comportement.

Maladie catastrophique. Dans [14], l'équipe de Catry rejette l'hypothèse de la *terminate illness*, qui prescrit que les oiseaux vivent sous de bonnes conditions de santé, et ne ressentent l'effet de la sénescence qu'à l'extrême fin de leur vie, où ils sont touchés par une maladie létale rapide. Ils observent que un à deux ans avant leur mort, les vieux albatros ont des gains de masse journaliers plus faibles, et des capacités de fourrageage réduites (temps de recherche de la nourriture plus long).

Estimation de la mortalité. Coulson et White, dans [15], expliquent comment estimer le taux de mortalité des cormorans grâce au baguage. Il accumulent pour cela l'âge des oiseaux bagués retrouvés morts, et la raison (chassés, piégés dans un filet, trouvé mort).

2.2 Chez les mammifères

Taille, poids et durée de vie. Dans [16], les auteurs étudient les tables de mortalité de vingt-neuf mammifères euthériens (table 11). Ils concluent que les mammifères les plus grands ont une durée de vie plus grande, un âge de maturité plus élevé, une valeur reproductive plus faible, et des portées plus petites.

Species	Source	Approximate mass (kg)	Litter size	Age of maturity (yr)*	$e_0†$
<i>Castor canadensis</i>	Larson (1967)	18	6.6	2	1.52
<i>Clethrionomys glareolus‡</i>	Pucek et al. (1971)	0.025	5	0.11	0.16
<i>Peromyscus leucopus‡</i>	Snyder (1956)	0.02	5	0.15	0.21
<i>P. maniculatus‡</i>	Howard (1949)	0.02	3.6	0.15	0.23
<i>Sciurus carolinensis</i>	A. R. Bisset (personal communication)§, Mosby (1969), Barkalow et al. (1970)	0.6	2.9	1	1.37
<i>Spermophilus armatus</i>	Slade and Balph (1974)	0.35	5.3	1	1.38
<i>S. beldingi</i>	Costain and Verts (in press), Morton and Sherman (1978)	0.25	7.4	1	1.30
<i>S. lateralis</i>	Bronson (1977, 1979)	0.155	5.2	1.3	1.47
<i>S. parvii</i>	Kiell (1977)	0.7	7.3	1	1.28
<i>Tamias striatus‡</i>	Tryon and Snyder (1973), Smith and Smith (1972)	0.1	4.2	1	1.24
<i>Tamiasciurus hudsonicus</i>	Kemp and Keith (1970)	0.189	4	1	1.50
<i>Ochotona princeps</i>	Millar and Zwickel (1972), Smith (1974)	0.13	2.8	1	1.37
<i>Sylvilagus floridanus</i>	Rose (1977)	1.25	5	1	1.48
<i>Lutra canadensis</i>	Stephenson (1977)	7.2	2	3	2.88
<i>Lynx rufus</i>	Crowe (1975)	7.5	2.8	1	1.72
<i>Mephitis mephitis</i>	Casey and Webster (1975), Verts (1967)	2.25	6	1	1.33
<i>Taxidea taxus</i>	Messick and Hornocker (1981)	7.15	2	1	1.45
<i>Equus burchelli</i>	Klingel (1969), Spingere (1972)	270	1	4	3.84
<i>Aepyceros melampus</i>	Kayanja (1969), Spingere (1972)	44	1	2	3.44
<i>Cervus elaphus</i>	Lowe (1969)	175	1	4	4.90
<i>Connochaetes taurinus</i>	Watson (1970)	165	1	3	3.84
<i>Hemitragus jemlahicus</i>	Caughley (1966)	100	1	3	3.97
<i>Hippopotamus amphibius</i>	Laws (1968), Laws and Clough (1965)	2390	1	10	7.62
<i>Kobus defassa</i>	Spingere (1970)	200	1	2	3.35
<i>Ovis canadensis</i>	Deevey (1947), Geist (1968)	55	1	4	3.81
<i>Phacochoerus aethiopicus</i>	Clough (1969), Spingere (1972)	87	4.8	2	1.60
<i>Sus scrofa</i>	Jezierski (1977)	85	5	2	1.79
<i>Synerus caffer</i>	Pienaar (1969), Spingere (1972)	490	1	4	4.47
<i>Loxodonta africana</i>	Laws (1966)	4000	1	15	17.90

FIGURE 11 – Quantifications à propos des mammifères (e_0 l'espérance de vie).

Comment miser sur sa progéniture. [17] étudient la mortalité juvénile chez les mammifères, et met en valeur le trade-off entre portées nombreuses et poids de la progéniture. Ils l'expliquent ainsi : le coût métabolique de la gestation peut bien être identique entre une petite portée de grands individus et une grande portée de petits individus, le temps nécessaire à la première est considérablement plus grand que pour la seconde. Ainsi, si les chances de survie sont hautes, une mère peut s'offrir des enfants avec de grandes capacités. Si au contraire les chances sont faibles, une grande portée de petits nouveaux-nés semble plus optimale.

Un modèle de mortalité juvénile. Dans [8], Stolen et Barlow étudient les grands dauphins dans l'Indian River Lagoon, dans l'état de Floride. Ils estiment l'âge des carcasses à partir de leurs dents, et construisent la table de mortalité des espèces.

- Ils proposent un modèle de courbe de survie $l(x) = l_c(x)l_j(x)l_s(x)$, où
- $l_c(x) = e^{-\gamma x}$ correspond à un risque de décès indépendant de l'âge
 - $l_j(x) = e^{-\alpha(1-e^{-\beta x})}$ est un risque de mortalité juvénile
 - $l_s(x) = e^{\mu(1-e^{\nu x})}$ est un risque dû à la sénescence

En estimant les paramètres de ce modèle, ils montrent l'importance de la mortalité juvénile chez cette espèce, plus forte qu'au milieu de la vie (figure 12).

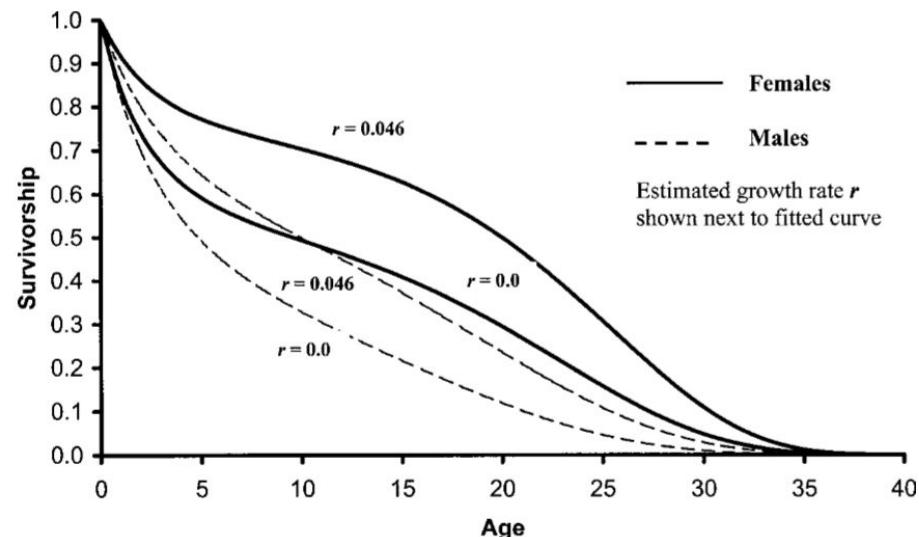


Figure 5. Age-specific survivorships (L_x) for female and male bottlenose dolphins based on maximum likelihood fits of the Siler model (Table 4). Upper curves represent survivorship with the estimated growth rate of 0.046; lower curves represent survivorship with an assumed growth rate of 0.0.

FIGURE 12 – Survie chez les dauphins de Floride.

2.3 Chez les plantes

Selon Hal Caswell, les plantes ont longtemps été considérées comme échappant à la sénescence (sûrement à cause de leurs modularité, c'est à dire leur structure en répétition d'unités). Dans [18], l'auteur affirme que les plantes à croissance clonale ne présentent pas de sénescence apparente.

Il a même déjà été observé chez certaines herbes vivaces une augmentation de la fertilité et une baisse de la mortalité en fonction de l'âge ([19]).

(Contre-)sénescence stade-dépendante. Dans [20], les auteurs proposent de montrer l'opération de la sénescence par un modèle de force de sélection stade-dépendant (graine, jeune pousse, plante juvénile, plante adulte). Ils montrent que jusqu'à un âge critique, dans chaque stade, les plantes suivent une évolution contre-sénescente : leurs taux de mortalité sont décroissants.

Une dynamique spatiale et saisonnière. [21] observe, pendant deux ans, la croissance de *Poa annua* (le pâturin, une plante herbacée annuelle). Il calcule la mortalité des chaque individu en segmentant précisément le terrain, et estime la fertilité en comptant leurs inflorescences.

La distribution en âge de la population montre un motif cyclique, caractéristique des saisons (périodes de fertilité au printemps et en automne). Il attire l'attention sur l'importance de la dimension spatiale et temporelle sur le développement.

3 Modèles de population sénescente

Dans cette section, nous décrivons deux modèles d'évolution dynamiques de population. Avant tout, nous introduisons deux familles de mortalité et de fertilité qui nous serviront comme paramètres de ces modèles.

3.1 Familles de paramètres

Fertilité. Définissons les courbes de fécondité suivantes, dépendantes de deux paramètres β et $\lambda \geq 0$:

$$f_{\beta,\lambda}(a) = \lambda 1_{a \geq \beta}.$$

Ici, β représente le premier âge de reproduction, et λ le nombre moyen de naissances par unité de temps.

En simulant l'histoire évolutive d'une population, on supposera que l'âge β est une constante. Ensuite on sera amené à faire varier λ au cours des mutations, dans le cadre de la théorie des gènes antagonistes pléiotropes.

Mortalité. Nous utiliserons aussi les courbes de mortalité suivantes, dépendantes de trois paramètres τ , μ et $\alpha \geq 0$:

$$m_{\tau,\mu,\alpha}(a) = \tau + \mu 1_{a \geq \alpha}.$$

Le premier paramètre, τ , représente un taux de mortalité extrinsèque, constant en toute période de la vie. Le taux μ quant à lui ne s'exprime qu'à partir de l'âge α , et représente un trait sénescent.

La fonction de survie correspondante est :

$$l(a) = \exp(-\tau a - \mu(a - \alpha)^+)$$

Si on suppose de plus que la population suit la courbe de fertilité précédente, le paramètre malthusien r vérifie la relation suivante :

$$1 = \lambda e^{\alpha \mu} \frac{e^{-\beta(r+\tau+\mu)}}{r + \tau + \mu} \text{ si } \alpha \leq \beta$$

$$\frac{e^{-\beta(r+\tau)} - e^{-\alpha(r+\tau)}}{r + \tau} + \frac{e^{-\alpha(r+\tau)}}{r + \tau + \mu} \text{ si } \alpha \geq \beta$$

3.2 Modèle d'évolution déterministe

Dans ce modèle, on représente par $\rho(t, a)$ la densité d'individus d'âge a au temps t . Dans la troisième variante, on autorise la population à se propager selon le paramètre α , et on note alors sa densité $\rho(t, a, \alpha)$.

Supposer la population à taille constante $\int \rho = 1$ repose sur une hypothèse importante : la population est à l'équilibre démographique. Autrement dit, dès qu'un individu meurt, il est immédiatement remplacé par un nouveau-né. Dans la première variante du modèle - dynamique d'une seule population - la courbe de fertilité disparaît alors des équations. Toutefois, dans le cas de dynamiques plus complexes, comme la compétition entre populations, la courbe de fertilité joue un rôle primordial. Elle est reliée à l'attribution des ressources entre ces populations.

3.2.1 Dynamique d'une seule population

$$\frac{\partial \rho(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, a)}{\partial a} + M(a)\rho(t, a) = 0 \quad a \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}_+ \quad (7)$$

$$\rho(t, 0) = R(t) \int_0^\infty f(s)\rho(t, s)ds \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (8)$$

$$\rho(0, a) = \rho_0(a) \quad a \in \mathbb{R}_+ \quad (9)$$

Dans l'équation 8, on choisit $R(t)$ de façon à ce que la taille de population soit constante, ie $\partial_t \int \rho da = 0$. Avec les équations 7 et 9 on obtient :

$$R(t) = \frac{\int M(a)\rho(t, a) da}{\int f(a)\rho(t, a) da}.$$

3.2.2 Compétition entre deux populations

L'équation suivante régit la dynamique entre deux populations ρ^0 et ρ^1 , en compétition pour les mêmes ressources :

$$\frac{\partial \rho^0(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial \rho^0(t, a)}{\partial a} + M^0(a)\rho^0(t, a) = 0 \quad a \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}_+ \quad (10)$$

$$\rho^0(t, 0) = R(t) \int_0^\infty f^0(s)\rho^0(t, s)ds = 0 \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (11)$$

$$\rho^0(0, a) = \rho_0^0(a) \quad a \in \mathbb{R}_+ \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho^1(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial \rho^1(t, a)}{\partial a} + M^1(a)\rho^1(t, a) = 0 \quad a \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}_+ \quad (13)$$

$$\rho^1(t, 0) = R(t) \int_0^\infty f^1(s)\rho^1(t, s)ds = 0 \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (14)$$

$$\rho^1(0, a) = \rho_0^1(a) \quad a \in \mathbb{R}_+ \quad (15)$$

où $R(t)$ est toujours choisi de telle sorte que la taille de la population totale $\int \rho^0(t, a) + \rho^1(t, a)da$ soit constante au cours du temps : $\partial_t (\int \rho^0(t, a) + \rho^1(t, a)da) = 0$.

Si on suppose que $\forall t, \rho^0(t, +\infty) = 0$ et $\rho^0(t, +\infty) = 0$, en intégrant par partie, la condition devient :

$$-(\rho^0(t, 0) + \rho^1(t, 0)) + \int (M^0(a)\rho^0(t, a) + M^1(a)\rho^1(t, a))da = 0.$$

Donc finalement, en utilisant les équations 11 et 14 :

$$R(t) = \frac{\int (M^0(a)\rho^0(t, a) + M^1(a)\rho^1(t, a))da}{\int (f^0(a)\rho^0(t, a) + f^1(a)\rho^1(t, a))da}.$$

Schéma numérique. On discrétise le temps et l'espace selon un même pas $\Delta t = \Delta a$. Pour $a \in [0; A]$ et $t \in [0, T]$, on pose : $t_n = n\Delta t$, $n \in [0, N]$ où $N = \lfloor \frac{A}{\Delta t} \rfloor$ et $a_j = j\Delta t$, pour $j \in [0, K]$ où $K = \lfloor \frac{T}{\Delta t} \rfloor$.

On pose $\rho_j^n = \rho(t_n, a_j)$

On applique le schéma aux différences finies décentrées en amont aux équations 10 et 13 :

$$\frac{\rho_j^{0,n+1} - \rho_j^{0,n}}{\Delta t} = -\frac{\rho_j^{0,n} - \rho_{j-1}^{0,n}}{\Delta t} - M^0(a_{j-1})\rho_{j-1}^{0,n},$$

c'est à dire

$$\rho_j^{0,n+1} = \rho_{j-1}^{0,n} - M^0(a_{j-1})\rho_{j-1}^{0,n}.$$

Quant à ρ^1 , on obtient

$$\rho_j^{1,n+1} = \rho_{j-1}^{1,n} - M^1(a_{j-1})\rho_{j-1}^{1,n}.$$

Les équations 11 et 14 deviennent alors :

$$\rho_0^{0,n+1} = \frac{\sum_{j=0}^N f^0(a_j)(\rho_j^{0,n} + f^1(a_j)\rho_j^{1,n})\Delta a}{\sum_{j=0}^N M^0(a_j)(\rho_j^{0,n} + M^1(a_j)\rho_j^{1,n})\Delta a} \sum_{j=0}^N \rho_j^{0,n} f^0(a_j) \Delta a$$

$$\rho_0^{1,n+1} = \frac{\sum_{j=0}^N (f^0(a_j)\rho_j^{0,n} + f^1(a_j)\rho_j^{1,n})\Delta a}{\sum_{j=0}^N (M^0(a_j)\rho_j^{0,n} + M^1(a_j)\rho_j^{1,n})\Delta a} \sum_{j=0}^N \rho_j^{1,n} f^1(a_j) \Delta a$$

3.2.3 Population avec mutations

On s'intéresse maintenant à l'évolution du trait dans la population. Ce trait intervient sur la taux de mortalité de la population. Lors de sa reproduction, un individu de trait α transmet à sa descendance un trait donné par le noyau de mutation K . Dans le cas des familles de mortalités présentées précédemment, l'augmentation de α correspond à une arrivée plus tardive des effets de la sénescence.

$$\partial_t \rho(t, a, \alpha) + \partial_a \rho(t, a, \alpha) + M(a, \alpha) \rho(t, a, \alpha) = 0 \quad a \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+, \alpha \leq \alpha_{\max} \quad (16)$$

$$\rho(t, 0, \alpha) = R(t) \int_0^\infty K(\alpha', \alpha) \int_0^\infty f(s) \rho(t, s, \alpha') d\alpha' ds \quad t \in \mathbb{R}^+, \alpha \leq \alpha_{\max} \quad (17)$$

$$\rho(0, a, \alpha) = \rho_0(a, \alpha) \quad a \in \mathbb{R}^+, \alpha \leq \alpha_{\max} \quad (18)$$

où :

$$K(\alpha, \alpha') \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(-\alpha-\alpha')}{2\sigma^2}},$$

et $R(t)$ tel que $\int_\alpha \int_a \rho(t, a, \alpha) d\alpha da = 1$.

Schéma numérique. On écrit les équations données par la méthode des différences finies, avec une discrétisation : $\Delta t = \Delta a$. L'équation 16 devient :

$$\frac{\rho(t_{n+1}, a_i, \alpha_j) - \rho(t_n, a_i, \alpha_j)}{\Delta t} + \frac{\rho(t_n, a_i, \alpha_j) - \rho(t_n, a_{i-1}, \alpha_j)}{\Delta a} + M(a_{i-1}, \alpha) \rho(t_n, a_{i-1}, \alpha_j) = 0$$

donc

$$\rho(t_{n+1}, a_i, \alpha_j) = \rho(t_n, a_{i-1}, \alpha_j) - M(a_{i-1}, \alpha) \rho(t_n, a_{i-1}, \alpha_j) \Delta t$$

Et l'équation 17 devient :

$$\rho(t_{n+1}, 0, \alpha_j) = R(t) \sum_i K(\alpha_i, \alpha_j) \Delta \alpha \sum_k \rho(t_n, a_k, \alpha_i) F(a_k, \alpha_i) \Delta a$$

3.3 Modèle d'évolution probabiliste

3.3.1 Description

Nous allons simuler une dynamique stochastique de population à ressources limitées, avec naissances et morts. N_0 représente la taille maximale de la population : si un individu doit naître alors que la population est déjà saturée, alors le nouveau-né meurt instantanément.

Chaque individu est tiré selon un processus hiérarchique

$$\begin{aligned} M &\sim \mathcal{L}_M \text{ où } F_M^{\text{survie}}(t) = \int_0^\infty m(s)ds \\ F_t|M &\sim \mathcal{PP}(\lambda(t)), t \in [0, M] \end{aligned}$$

Autrement dit, on crée un individu en tirant déjà son temps de vie M , puis en générant un processus de Poisson F qui représente ses enfants. Notons que F_M représente le nombre d'enfants que l'individu a générés au cours de sa vie. On a que

$$\mathbb{E}[F_M|M] = \int_0^M \lambda(s)ds$$

Dans le cas de la courbe de mortalité simple avec $\mu = 0$, $M \sim \mathcal{E}(\tau)$. C'est le cas d'une population qui ne vieillit pas : sa loi de mortalité est sans mémoire. On a aussi que $\mathbb{E}[F_M|M] = \lambda(M - \alpha)^+$.

Terminons la description du modèle par le calcul suivant :

Proposition : Pour les courbes $f_{\beta,\lambda}$ et $m_{\tau,\mu,\alpha}$, si $\alpha \geq \beta$, on a :

$$\mathbb{E}[F_M] = \frac{\lambda}{\tau + \mu} e^{-\alpha\tau} + \frac{\lambda}{\mu} (e^{-\beta\tau} - e^{-\alpha\tau})$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_M] &= \int \mathbb{E}[F_M|M]dM = \int \lambda(t - \alpha)^+ dM(t) \\ &= \int_\Omega \lambda \int_0^t 1_{s \geq \beta} ds dM(t) = \int_\Omega \lambda \int_0^\infty 1_{t \geq s} 1_{s \geq \beta} ds dM(t) \\ &= \lambda \int_0^\infty 1_{s \geq \beta} \int_\Omega 1_{t \geq s} dM(t) ds \\ &= \lambda \int_\beta^\infty F_M^{\text{survie}}(s) ds \\ &= \lambda \int_\beta^\infty \exp(-\tau s - \mu(s - \alpha)^+) ds. \end{aligned}$$

L'espérance de F nous donne déjà une idée du comportement de la population. Si $\mathbb{E}[F] < 1$, on peut s'attendre à ce que la population ne survive pas en temps long.

3.3.2 Simulations

Populations non-sénescentes. Pour représenter une simulation de ce processus, nous utilisons un arbre phylogénétique.

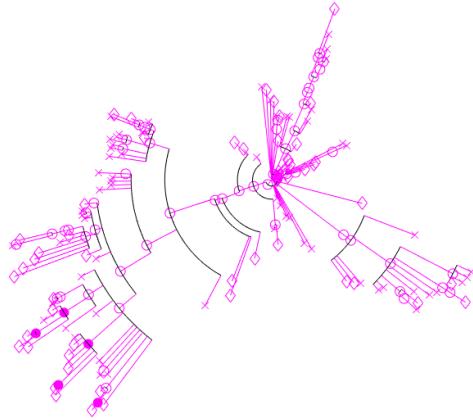


FIGURE 13 – Population peu fertile

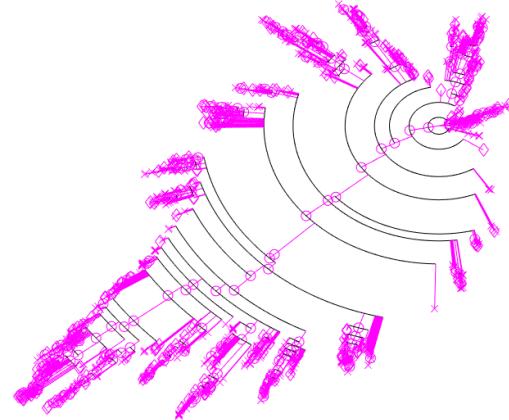


FIGURE 14 – Population très fertile

Les symboles représentent les individus, et les arêtes les liens de parenté. La chronologie est proportionnelle à la distance au centre. Un diamant représente un individu sans progéniture, un rond un individu qui a mis bas à toute sa progéniture, un rond rempli un individu qui n'a pas encore mis bas à toute sa progéniture (et donc encore présent en fin de simulation), et une croix un individu qui n'a pas pu naître (population limitée).

La figure 13 représente les premières générations d'une simulation pour les paramètres $(\tau, \mu, \alpha, \beta, \lambda) = (.25, 0, 0, .5, .5)$. C'est une population non sénescente, qui vit vieux mais avec peu d'enfants.

La figure 14 est quant à elle simulée à partir de $(\tau, \mu, \alpha, \beta, \lambda) = (1, 0, 0, .5, 4)$. C'est toujours une population non sénescente, mais qui mise sur un plus grand nombre d'enfants.

Pour les deux simulations précédentes, nous avons limité la population à $N_0 = 10$ individus.

Populations qui mutent. La figure 15 représente une population qui peut muter : à chaque naissance, le nouveau-né a une probabilité p de subir une mutation affectant son paramètre α . On choisit que cette mutation suive une loi normale centrée de faible variance.

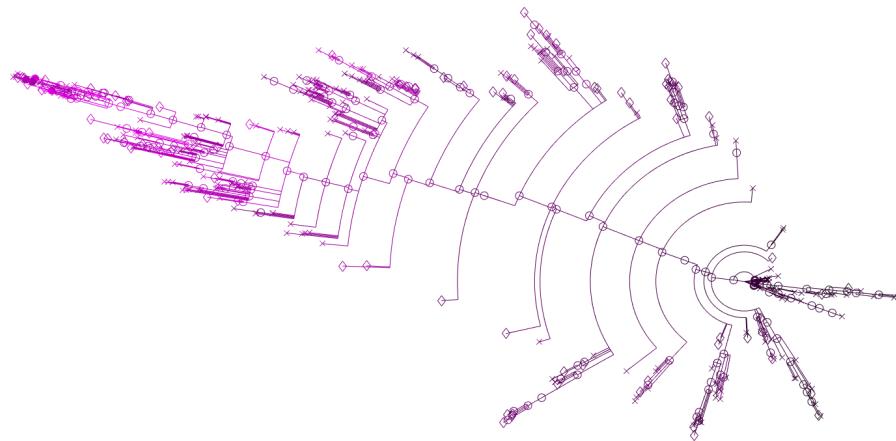


FIGURE 15 – Evolution de la sénescence d'une population

Sur la figure 15, une couleur claire indique un individu de paramètre α élevé. La popu-

lation initiale suivait $(\tau, \mu, \alpha, \beta, \lambda) = (.25, 1, 2, .5, 1)$. On y observe que, au fur et à mesure des générations, les individus aux paramètres les plus élevés ont été sélectionnés. Autrement dit, on observe un phénomène de décalage de la sénescence.

4 Mise en compétition

Nous allons maintenant faire jouer nos modèles, afin d'observer les effets théoriques de l'évolution sénescence.

En premier lieu nous mettons en compétition des populations, déjà de fitness différents - afin d'observer la qualité de la prédiction du paramètre malthusien - ; puis des populations de même fitness mais à paramètres de sénescence différents.

Ensuite, nous emploierons les modèles avec noyau de mutation, à partir d'une population possédant un trait sénescent. Nous devrions observer le postponing de ce trait. Nous reproduirons alors ces simulations pour des paramètres de mortalité extrinsèque τ différents.

Enfin, nous reprendrons ces simulations, mais dans ce cadre cette fois-ci de la théorie des gènes antagonistes pléiotropes. Autrement dit, une mutation de décalage sur α sera compensée par une mutation d'abaissement sur λ , et réciproquement, afin de conserver des individus de fitness constant. Nous devrions observer un trade-off, dépendant aussi du paramètre extrinsèque.

4.1 Comparaison des fitness

Dans cette section, inspirés par les paramètres de la grive musicienne, nous utiliserons une population P_0 telle que :

$$(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0) = \left(\frac{1}{1.44}, 1, 3, 0.15, 3 \right)$$

Le paramètre malthusien de cette population est donné par le calcul : $r_0 \simeq 1,4718$.

La figure 16 représente le fitness d'une telle population lorsque l'on fait varier les paramètres α et λ . La courbe noire représente les populations de même fitness r_0 .

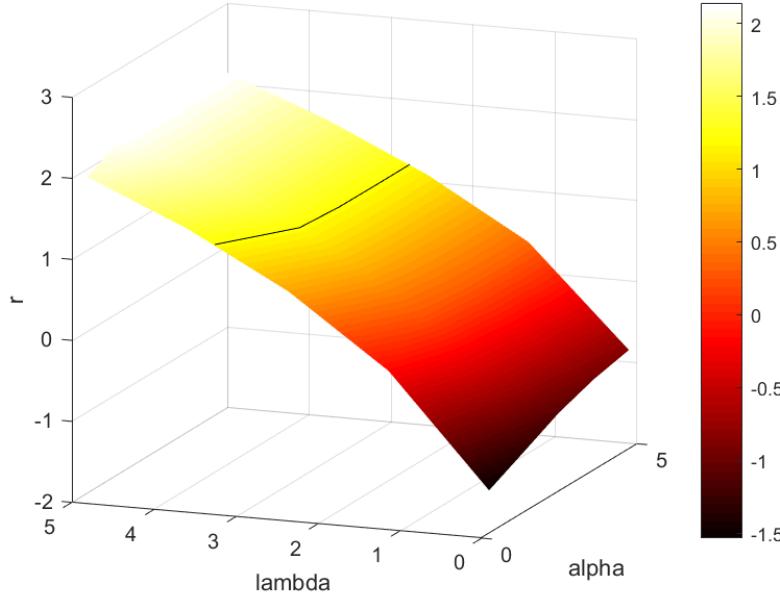


FIGURE 16 – Fitness des populations

Modèle stochastique. Nous allons maintenant faire rentrer en compétition P_0 et les autres populations $P_{\alpha,\lambda}$ de cette surface. Pour cela, nous lançons le modèle stochastique avec une population initiale composée pour moitié de l'une et moitié de l'autre.

Sur la figure 17, un point noir signifie que la population P_0 est la seule survivante à la fin de la simulation, et un point rouge signifie au contraire que l'autre population a gagné. Le point vert représente P_0 .

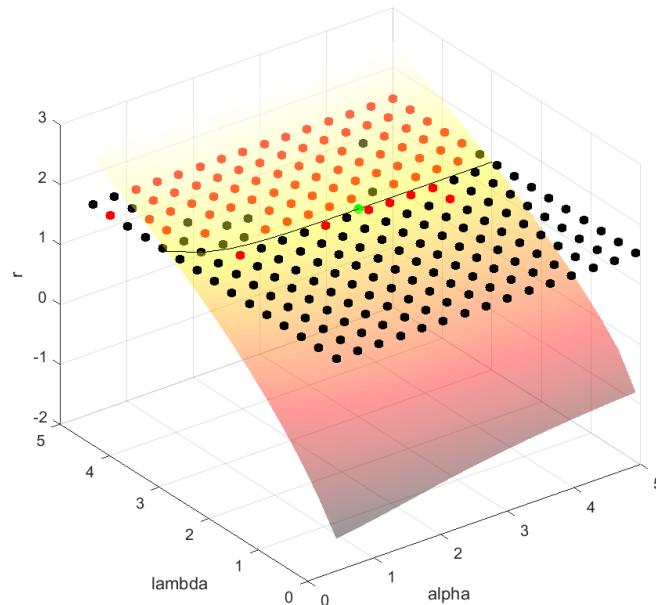


FIGURE 17 – Résultat des compétitions

On voit que la courbe de niveau est une frontière claire entre le domaine où P_0 gagne la compétition, et celui où elle la perd. Autrement dit : le paramètre malthusien apparaît comme un bon indicateur du fitness d'une population.

Que se passe-t-il si l'on considère des populations concurrentes de même fitness ? La figure 18 simule une réponse à cette question. On calcule à chaque fois le paramètre λ_α qui rend la population $P_{\alpha,\lambda}$ de même fitness que P_0 :

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{e^{-(\beta_0(r_0+\tau_0))} - e^{-\alpha(r_0+\tau_0)}}{r_0 + \tau_0} + \frac{e^{-\alpha(r_0+\tau_0)}}{r_0 + \mu_0 + \tau_0} \right) \mathbf{1}_{(\alpha > \beta_0)} \\ + \mathbf{1}_{(\alpha \leq \beta_0)} \frac{e^{(\alpha\mu_0)} e^{-\beta_0(r_0+\tau_0+\mu_0)}}{r_0 + \mu_0 + \tau_0}$$

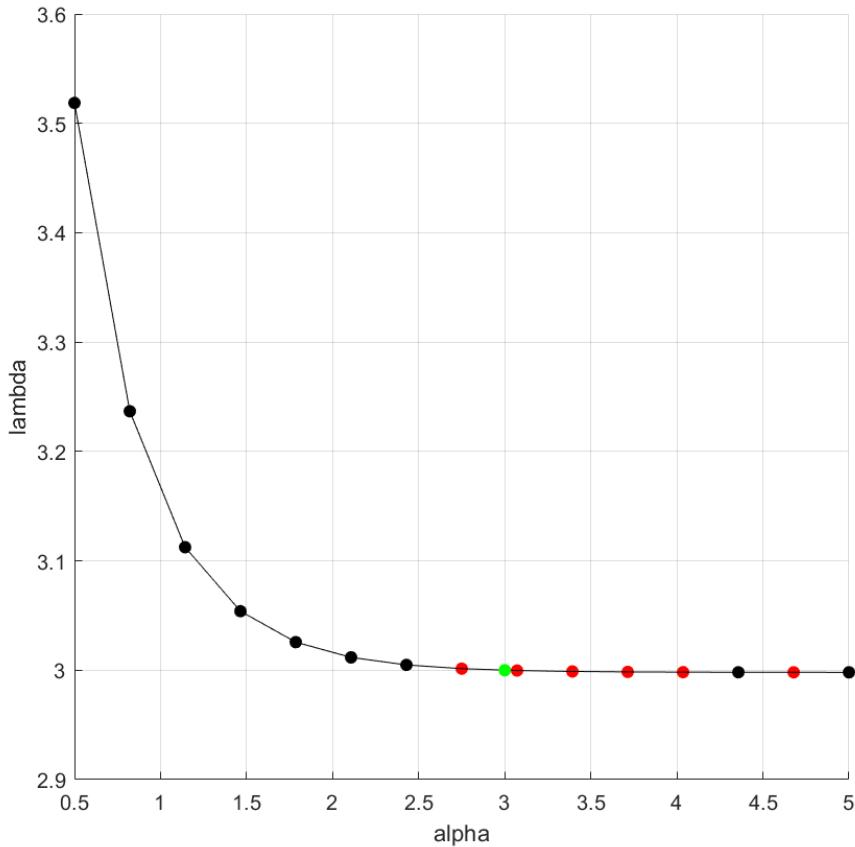


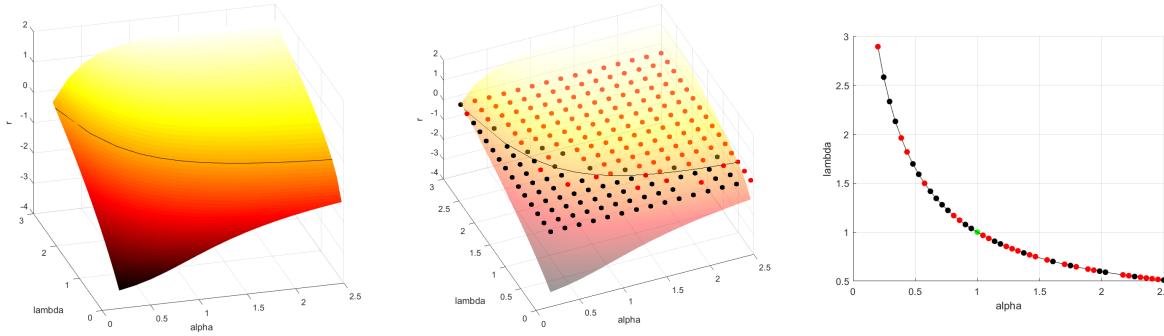
FIGURE 18 – Compétition entre populations de même fitness

Apparemment, les populations $P_{\alpha,\lambda}$ de fitness r_0 sont avantagées face à P_0 lorsqu'elles préfèrent un paramètre α plus grand. Cela peut s'expliquer ainsi : une petite modification de α , lorsqu'il est plus grand que trois, a un effet négligeable sur le fitness (λ reste presque constant).

Les figures suivantes reprennent cette même expérience pour un trait initial plus aggressif : $(\alpha_0, \mu_0) = (1, 3)$. On utilise

$$(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0) = \left(\frac{1}{1.44}, 3, 1, 0.15, 1 \right)$$

. Le paramètre malthusien dans ce cas est $r_0 \simeq -0.4754$.



Modèle déterministe. Comme précédemment, nous allons mettre en compétition deux populations dans le modèle déterministe. Pour cela, nous utilisons les équations écrites dans la section précédente.

La population ρ_0 est telle que

$$(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0) = (4.5, 1, 2, 1, 3).$$

Nous allons confronter P_0 à des populations $P_{\alpha,\lambda}$, pour α entre 0 et 2,5 et λ entre 0 et 3.

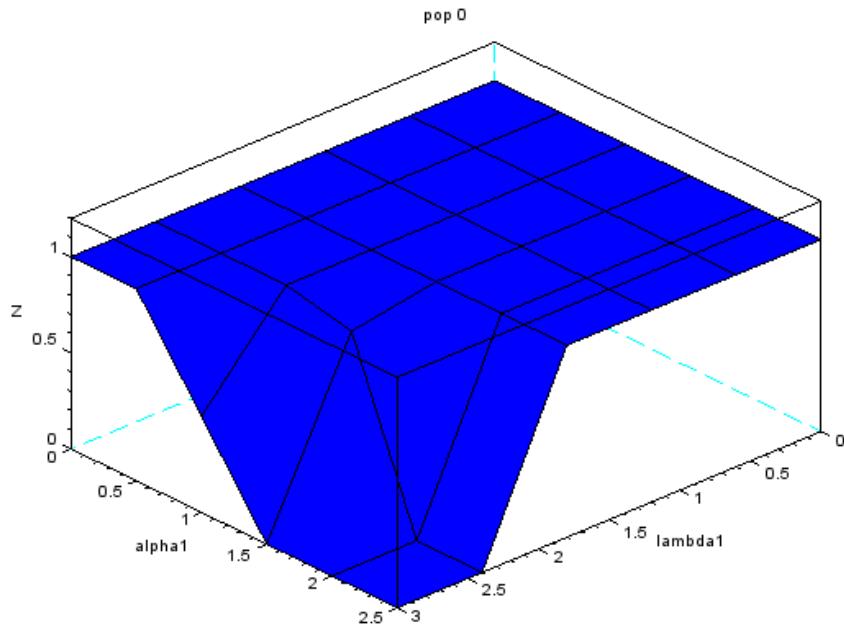


FIGURE 19 – Compétition dans le modèle déterministe

Sur la figure 19, les deux premières cordonnées représentent les paramètres de la population $P_{\alpha,\lambda}$. La surface vaut 0 si la population P_0 est absente à la fin de la simulation, et vaut 1 si c'est l'autre qui a disparu.

On observe le même comportement que dans le modèle stochastique : les fitness des populations en compétition sont caractérisés par le paramètre matlhusien.

4.2 Accumulation des mutations

Nous simulons ici l'évolution du paramètre de sénescence α à partir d'une population P_0 telle que :

$$(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0) = (1, 1, 1, 1, 1).$$

Nous utilisons le modèle déterministe à noyau gaussien ($\sigma = 0,1$). Les populations en compétition les P_α , où seul α diffère de P_0 .

Sur les figures 20 et 21, on observe bien un décalage du trait au cours du temps.

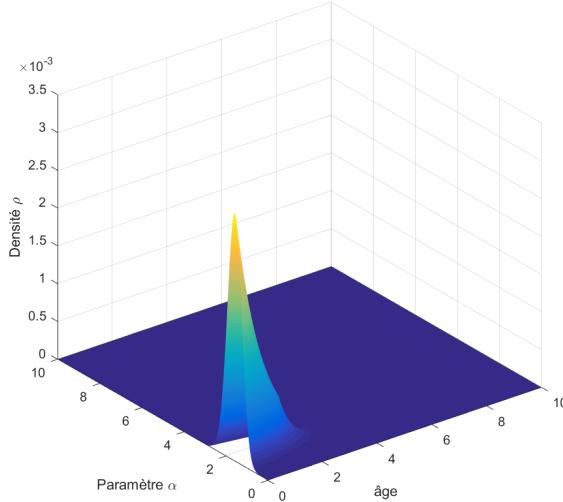


FIGURE 20 – ρ à $t = 5$

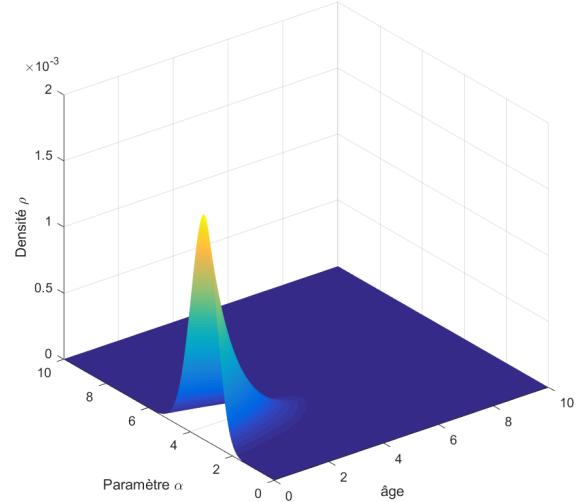


FIGURE 21 – ρ à $t = 150$

Quelle est l'influence du paramètre τ sur cette dynamique ? Toutes choses égales par ailleurs, la figure 22 représente l'évolution du paramètre α pour différentes valeurs de τ . À chaque instant, la courbe vaut le α pour lequel la population P_α est la plus présente.

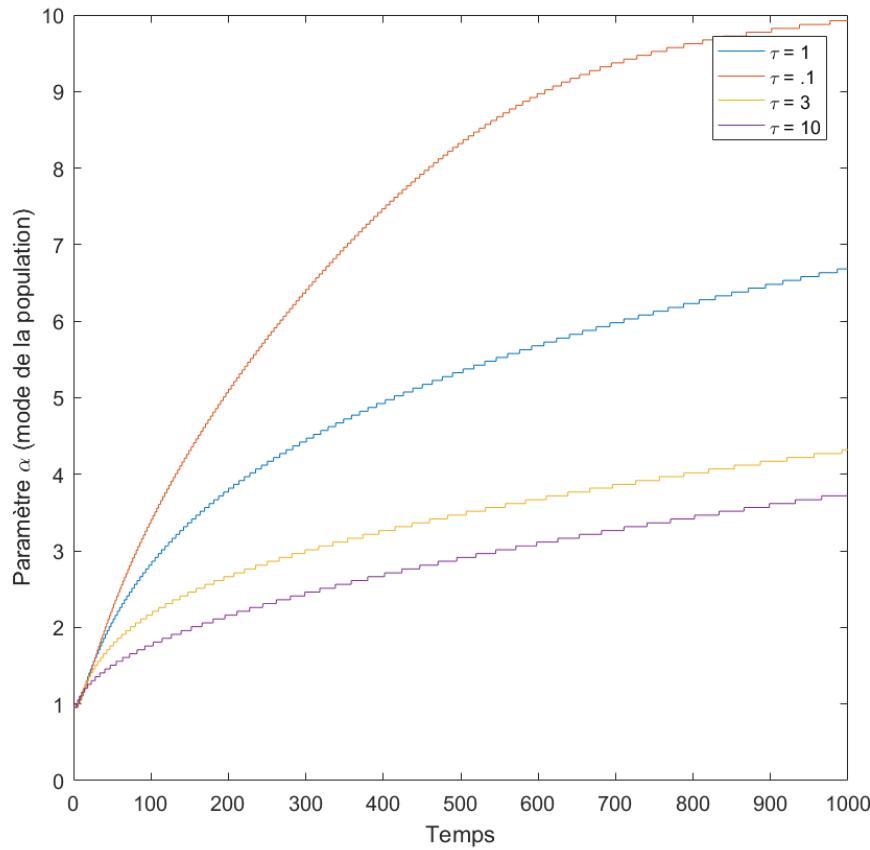


FIGURE 22 – Evolution de la sénescence

On observe clairement que la vitesse de décalage du trait est inversement proportionnelle au taux de mortalité extrinsèque. Cette observation corrobore les idées de Medawar, et rentre en conflit avec l'article [5].

4.3 Gènes antagonistes pléiotropes

Finalement, nous reprenons les simulations d'évolution du trait α , mais où les populations P_α bénéficient d'un paramètre λ_α de telle sorte que leur paramètre malthusien soit le même que P_0 .

Rappelons que relation entre α et λ_α est, dans le cadre des courbes simples :

$$\frac{1}{\lambda} = e^{\alpha\mu} \frac{e^{-\beta(r+\tau+\mu)}}{r + \tau + \mu} \text{ si } \alpha \leq \beta$$

$$\frac{e^{-\beta(r+\tau)} - e^{-\alpha(r+\tau)}}{r + \tau} + \frac{e^{-\alpha(r+\tau)}}{r + \tau + \mu} \text{ si } \alpha \geq \beta$$

Les résultats sont rassemblés sur la figure 23 :

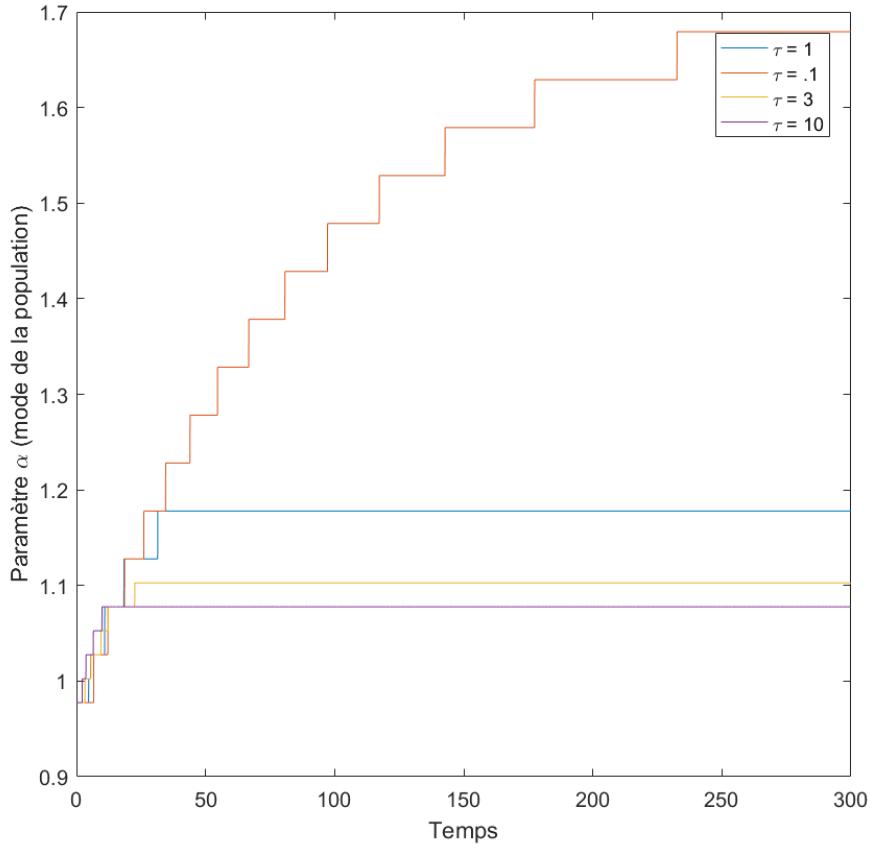


FIGURE 23 – Evolution de la sénescence

L'évolution est maintenant différente : les courbes semblent converger.

Remarquons que, bien que l'on ai ici imposé un trade-off entre α et λ , ce comportement convergent n'était pas évident à prédire. En effet, nous avons vu dans la première partie de cette section que, à même paramètre malthusien, les populations les plus avantageées sont celles qui ont le paramètre α le plus haut. Lorsque α tend vers l'infini, on obtient la limite

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{e^{-\beta(r+\tau)}}{r + \tau}.$$

Ainsi, il résulte des simulations que, dans le cas pléiotropique, il est plus intéressant pour une population de ne pas repousser α vers l'infini ; la perte sur λ , bien que minime, serait en fait significative.

Conclusion

Dans nos simulations, nous avons observé une réponse affirmative aux deux questions posées dans l'introduction : le décalage d'un gérontogène s'affaiblit au fur et à mesure de l'évolution, et cet affaiblissement est directement corrélé à la pression environnementale exercée sur la population. Bien sûr, les familles de courbes que nous avons choisi sont propices à ce résultat. Toutefois, le phénomène n'est pas évident à justifier ; même dans la littérature moderne, ce second point n'est pas mathématiquement expliqué.

Les idées de Medawar ont eu un retentissement fondamental dans la compréhension de l'évolution de la sénescence. Soulignons tout de même que son explication ne permet pas d'unifier tous les comportements du vivant. Il nous semble que, pour répondre à ce problème, la zoologie et la botanique jouent un rôle fondamental. La théorie du vieillissement évolue conjointement aux découvertes concrètes des phénomènes naturels. Les modèles mathématiques, en réponse, s'adaptent. Aussi, le progrès de la biologie cellulaire, qui permet la description moléculaire des phénomènes sénescents, ouvre la porte de la compréhension microscopique. Ces résultats sont bien entendu d'une importance première dans les domaines de la gérontologie et de la gériatrie.

Les chercheurs n'hésitent pas à s'opposer les uns aux autres ; toutefois, il apparaît que les théories évolutionnistes de la sénescence leurs sont chères, et que les idées pionnières de Medawar sont un terreau fertile.

Références

- [1] Michael R. Rose. *Evolutionary Biology of Aging*. Oxford University Press, 1991.
- [2] P.B. Medawar. Un unsolved problem of biology. *University College London*, 1951.
- [3] Ricki L. Rusting. Why do we age? *Scientific American*, 1992.
- [4] O. Jones et al. Diversity of ageing across the tree of life. *Nature*, 2013.
- [5] H. Caswell M. Wensink and A. Baudisch. The rarity of survival to old age does not drive the evolution of senescence. *Evolutionary Biology*, 2017.
- [6] J. Barlow and P. Boveng. Modeling age-specific mortality for marine mammal populations. *Marine Mammal Science*, 1991.
- [7] E. S. Deevey. Life tables for natural populations of animals. *The Quarterly Review of Biology*, 1947.
- [8] M. K. Stolen and J. Barlow. A model life table for bottlenose dolphin (*tursiops truncatus*) from the india river lagoon system, florida, u.s.a. *Marine mammal science*, 2003.
- [9] Timothy B. Gage. Age-specific fecundity of mammalian populations : A test of three mathematical models. *Zoo Biology*, 2001.
- [10] D. Botkin and R. Miller. Mortality rates and survival of bird. *The American Naturalist*, 1974.
- [11] D. Wasser and P. Sherman. Avian longevities and their interpretation under evolutionary theories of senescence. *Journal of Zoology*, 2009.
- [12] R. Ricklefs and A. Scheuerlin. Comparison of aging-related mortality among birds and mammals. *Experimental Gerontology*, 2001.
- [13] Robert E. Ricklefs. Intrinsic aging-related mortality in birds. *Journal of Avian Biology*, 2000.
- [14] B. Phalan P. Catry, R. A. Phillips and J. P. Croxall. Senescence effects in an extremely long-lived bird : the grey-headed albatross *thalassarche chrysostoma*. *Proceedings of the Royal Society*, 2006.
- [15] J. Coulson and E. White. Mortality rates of the shag estimated by two independent methods. *Bird Study*, 1957.
- [16] J. Millar and R. Zammuto. Life histories of mammals : an analysis of life tables. *Ecology*, 1983.
- [17] D. Promislow and P. Harvey. Living fast and dying young : A comparative analysis of life-history variation among mammals. *Journal of Zoology*, 1990.
- [18] John L. Harper. *Population biology of plants*. Academic Press, 1977.
- [19] J. Dahlgren M. Garcia and J. Ehrlen. No evidence of senescence in a 300-year-old mountain herb. *Journal of Ecology*, 2011.
- [20] H. Caswell and R. Salguero-Gomez. Age, stage and senescence in plants. *Journal of Ecology*, 2013.
- [21] R. Law. The dynamics of a colonizing population of *poa annua*. *Ecology*, 1981.

Chapitre 7

Rapport de stage de M2 : Analyse topologique des données

RAPPORT DE STAGE

Analyse topologique des données

Raphaël TINARRAGE
M2 MSV, Orsay

DATASHAPE
INRIA Paris-Saclay

16 octobre 2017

Table des matières

Introduction	3
1 Algèbre persistante	4
1.1 Exemple introductif	4
1.2 Modules de persistance	6
1.3 Entrelacements	8
1.4 Décomposition des modules de persistance	10
1.4.1 Définitions	10
1.4.2 Décomposition des modules de type fini sur \mathbb{N}	11
1.4.3 Décomposition des modules modérés sur \mathbb{R}^+	14
1.4.4 Décomposition des modules finis partout sur \mathbb{R}	15
1.5 Diagrammes de persistance	16
1.5.1 Définition	16
1.5.2 Stabilité	17
1.6 Le théorème d'isométrie	18
1.6.1 Cas des modules modérés	18
1.6.2 Généralisation aux modules q-modérés	18
2 Espaces topologiques filtrés	20
2.1 Filtrations	20
2.2 Fonctions de Morse	21
2.3 Fonctions distance	22
2.3.1 Axe médian	22
2.3.2 Cellules de Voronoï	23
2.3.3 Gradient généralisé	23
2.4 Fonctions presque-distance	25
2.5 Stabilité des modules	26
2.5.1 Régularité	26
2.5.2 Stabilité	26
3 Complexes simpliciaux filtrés	28
3.1 Filtrations	28
3.2 Algorithme de persistance	29
3.2.1 Calcul des nombres de Betti	29
3.2.2 Nombres de Betti persistants	30
3.3 Complexe de Čech	33
3.3.1 Théorème du nerf persistant	33
3.3.2 Complexe de Vietoris-Rips	34
3.4 Stabilité	36
3.4.1 Applications ϵ -simpliciales	36
3.4.2 Correspondances	37
3.4.3 Stabilité en Gromov-Hausdorff	37
4 Distance à la mesure	38
4.1 Introduction	38
4.2 Définition	39
4.3 Régularité et stabilité	40
4.3.1 Lien avec les distances de Wasserstein	40
4.3.2 La DTM est une presque-distance	40

4.3.3	Stabilité	41
4.4	Calcul et approximation	42
4.4.1	Décomposition barycentrique	42
4.4.2	Complexe de Čech pondéré	43
4.5	Simulation	45
5	D'autres structures pour l'inférence topologique	46
5.1	Le problème de la stabilité	46
5.2	Structure \mathbb{W}	47
5.2.1	Définition	47
5.2.2	Contraction d'arêtes	47
5.2.3	Approximation et stabilité	48
5.3	Structure \mathbb{F}	50
5.3.1	Définition	50
5.3.2	Approximation et stabilité	50
5.3.3	Complexe de clique de \mathbb{F}	51
5.4	Simulations	52
A	Formulaire d'homologie dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	53
A.1	Groupes d'homologie	53
A.2	Homologie singulière	53
A.3	Homologie simpliciale	54
Références		56

Introduction

Dans le domaine de l'analyse de données, nous avons souvent affaire à des ensembles de données discrètes, que l'on peut interpréter comme des nuages de points dans des espaces euclidiens de grande dimension. Pour les traiter, l'analyse topologique des données repose sur le principe qu'il existe des informations de nature topologique et géométrique à extraire de ces nuages. De par les contraintes mises en jeu, nous pouvons présumer que ces données se concentrent sur des sous-espaces de petite dimension. Ainsi, si le nuage est suffisamment dense, il est envisageable de les estimer.

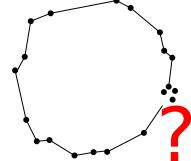
Parmi les outils mathématiques à disposition pour l'étude des espaces topologiques, l'homologie se révèle ici être d'une pertinence particulière : elle permet de caractériser ces espaces, et prend des formes implémentables du point de vue algorithmique.

L'objet de ce rapport de stage est de présenter la théorie de la persistance, ou comment extraire d'un échantillon de points l'homologie de l'espace sous-jacent. Nous introduirons ensuite la distance à la mesure, qui permet de traiter un nuage de points comme une mesure de probabilité.

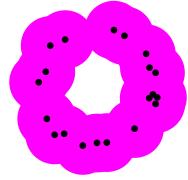
1 Algèbre persistante

1.1 Exemple introductif

Soit X un nuage fini de points, par exemple tirés sur le cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Disons même que les observations soient bruitées, si bien que $X \not\subseteq \mathbb{S}^1$. En analyse topologique des données, on cherche l'homologie de l'espace sous-jacent (\mathbb{S}^1) à partir des observations (X). Dans ce mémoire, nous ne nous intéresserons qu'à l'homologie dans le corps $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous renvoyons à l'annexe A pour les définitions et conventions utilisées.

 Une première idée consiste à construire sur X un complexe simplicial qui serait homéomorphe à \mathbb{S}^1 . Toutefois, la reconstruction de variété est une tâche difficile. La présence de bruit complique encore plus le problème. En fait, puisque l'on s'intéresse seulement à son homologie, nous n'avons pas besoin de retrouver l'espace sous-jacent à homéomorphisme près, mais seulement à type d'homotopie près. Par exemple, un petit grossissement du cercle est dans sa classe d'homotopie.

Posons alors sur chacun des points de X une boule de rayon t . L'espace obtenu est $X^t := \bigcup_{x \in X} B(x, t)$, le voisinage tubulaire de X . Si le rayon est bien choisi, on voit sur la figure que \mathbb{S}^1 est un rétract par déformation de X^t , et ces deux espaces sont bien du même type d'homotopie. Ainsi, si nous sommes capables de calculer l'homologie de X^t , nous obtenons aussi celle de \mathbb{S}^1 , et le problème est résolu.



En pratique, le problème se pose lorsque nous ne savons pas choisir a priori le paramètre t . Dans notre exemple, s'il est trop petit, le voisinage tubulaire est composé de plusieurs parties connexes ; s'il est trop grand, il est homéomorphe à un disque. L'idée de la persistance est de calculer l'homologie de ces voisinages tubulaires X^t pour toutes les valeurs de $t \in \mathbb{R}^+$, et de suivre au fur et à mesure leur évolution.

t	0	0, 1	0, 3	0, 5	...	0, 8	1
X^t					...		
$H_0(X^t)$	k^{20}	k^{14}	k^2	k	...	k	k
$H_1(X^t)$	0	0	0	k	...	k	0

Nous avons ici affaire à une suite croissante de sous-espaces topologiques $\{X^t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, avec des inclusions :

$$\dots \subset X^r \subset X^s \subset X^t \subset \dots$$

L'homologie (singulière) de ces espaces est une suite de groupes $H_n(X^t)$, $n \in \mathbb{N}$. Les inclusions précédentes induisent des morphismes entre ces groupes :

$$\dots \rightarrow H_*(X^r) \rightarrow H_*(X^s) \rightarrow H_*(X^t) \rightarrow \dots$$

(où l'étoile signifie que l'on observe un groupe d'homologie quelconque).

Mieux encore, par fonctorialité de l'homologie, la commutativité du diagramme au niveau des inclusions se traduit en une commutativité au niveau homologique :

$$X^r \xhookrightarrow{\quad} X^s \xhookrightarrow{\quad} X^t \quad \text{donne} \quad H_*(X^r) \xrightarrow{\quad} H_*(X^s) \xrightarrow{\quad} H_*(X^t)$$

La structure algébrique que nous venons de construire s'appelle un module de persistance. Dans cette structure, nous sommes capables de suivre l'évolution des cycles de X^t , leur naissance et leur mort. En effet, les applications $H_*(X^s) \rightarrow H_*(X^t)$ indiquent si un cycle de $H_*(X^s)$ est encore présent dans $H_*(X^t)$. Il se trouve que tout ce problème se traite de manière purement algébrique, et c'est pourquoi nous ne reparlerons presque plus de topologie dans ce chapitre.

1.2 Modules de persistance

Les définitions et résultats présentés dans les parties suivantes proviennent de [1].

Dans ce mémoire, nous n'aurons besoin de définir les modules de persistance que sur $T = \mathbb{N}, \mathbb{R}^+$ ou \mathbb{R} .

Définition 1.2.1. Un module de persistance (indexé par T) est la donnée d'une famille de k -espaces vectoriels $\mathbb{V} = (V_t)_{t \in T}$ et d'applications linéaires $(v_s^t : V_s \rightarrow V_t)_{s \leq t \in T}$ tels que

- $\forall t \in T, v_t^t$ est la fonction identité sur V_t , et
- $\forall s \leq t \leq u \in T, v_t^u \circ v_s^t = v_s^u$.

La dernière condition se traduit par le diagramme commutatif suivant, pour tout $\forall s \leq t \leq u \in T$:

$$\begin{array}{ccc} V_r & \xrightarrow{v_r^t} & V_t \\ & \searrow v_r^s & \swarrow v_s^t \\ & V_s & \end{array}$$

Si $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , les applications v_s^t sont entièrement déterminées par les $v_n^{n+1}, n \in T$.

Remarque 1.2.2. Dans le langage des catégories, un module de persistance est un foncteur de l'ensemble totalement ordonné T vers la catégorie des espaces vectoriels.

Exemple 1.2.3. Soit $(K^t)_{t \in \mathbb{R}}$ une famille croissante de sous-ensembles d'un même espace topologique. Comme nous l'avons vu dans la partie 1.1, les inclusions induisent des diagrammes commutatifs entre les groupes d'homologie, qui font de $H_*(K^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un module de persistance.

Définition 1.2.4. Soit $\epsilon \in T^+$. Si \mathbb{U} et \mathbb{V} sont deux modules de persistance, on appelle morphisme de degré ϵ entre \mathbb{U} et \mathbb{V} une famille de morphismes $\Phi = (\phi_t : U_t \rightarrow V_{t+\epsilon})_{t \in T}$ telle que le diagramme suivant commute en tout $s \leq t \in T$:

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{u_s^t} & U_t \\ \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_t \\ V_{s+\epsilon} & \xrightarrow{v_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & V_{t+\epsilon} \end{array}$$

Si $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, Φ est appelé un endomorphisme. L'ensemble des endomorphismes de degré 0 de \mathbb{U} est une k -algèbre (pour la somme et la composition des applications linéaires).

Exemple 1.2.5. Soient $(K^t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $(L^t)_{t \in \mathbb{R}}$ deux familles croissantes de sous-ensembles d'un même espace topologique. On suppose qu'il existe $\epsilon \geq 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait des inclusions $K^t \subset L^{t+\epsilon} \subset K^{t+2\epsilon}$. Les inclusions induisent un diagramme commutatif entre les groupes d'homologie :

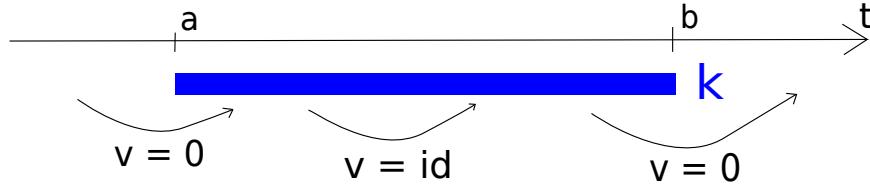
$$\begin{array}{ccc} K^s & \hookrightarrow & K^t \\ \downarrow & & \downarrow \\ L^{s+\epsilon} & \hookrightarrow & L^{t+\epsilon} \end{array} \quad \text{donne} \quad \begin{array}{ccc} H_*(K^s) & \longrightarrow & H_*(K^t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(L^{s+\epsilon}) & \longrightarrow & H_*(L^{t+\epsilon}) \end{array}$$

Autrement dit, si l'on appelle \mathbb{U} et \mathbb{V} les modules de persistance induits par l'homologie singulière des familles croissantes (K_t) et (L_t) , alors les inclusions $(\phi_t : K^t \hookrightarrow K^{t+\epsilon})_{t \in \mathbb{R}}$ induisent un ϵ -morphisme entre \mathbb{U} et \mathbb{V} .

Modules-intervalle. Comme nous le verrons à la section 1.4, les modules-intervalle sont les briques élémentaires des modules de persistance. Pour les construire, on se donne un intervalle $I \subset T$, et on définit le module de persistance $\mathbb{I}(I)$ par :

- Les espaces vectoriels, pour tout $t \in T$, $\begin{cases} V_t = k \text{ si } t \in I \\ = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- Les morphismes, pour $s \leq t \in T$, $\begin{cases} v_s^t = \text{id} \text{ si } s, t \in I \\ = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

On peut dessiner ce module sous forme de code-barre. La figure suivante représente le module intervalle $\mathbb{I}([a, b])$ sur \mathbb{R} .



Entre deux modules intervalles $\mathbb{I}(I)$ et $\mathbb{I}(J)$ sur \mathbb{R} , on peut toujours définir, pour tout $\epsilon \geq 0$, un morphisme $\Phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ de degré ϵ par $\begin{cases} \phi_t \text{ est l'identité si } t \in I \text{ et } t + \epsilon \in J \\ \phi_t = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

La propriété de commutativité de Φ s'illustre par la figure suivante :



Proposition 1.2.6. Si $I \neq \emptyset$, le groupe des endomorphismes d'un module intervalle $\mathbb{I}(I)$ est isomorphe à k (en tant que k -algèbre).

Démonstration. Soit Φ un endomorphisme de $\mathbb{I}(I)$. En chaque $t \in I$, $\phi_t : V_t \rightarrow V_t$ est un morphisme du k -espace vectoriel $V_t = k$, et s'écrit donc $x \mapsto \lambda x$, avec $\lambda \in k$. Or la propriété de commutativité d'un morphisme de modules de persistance nous donne que la constante λ ne dépend pas de $t \in T$. On peut ainsi identifier Φ et λ . \square

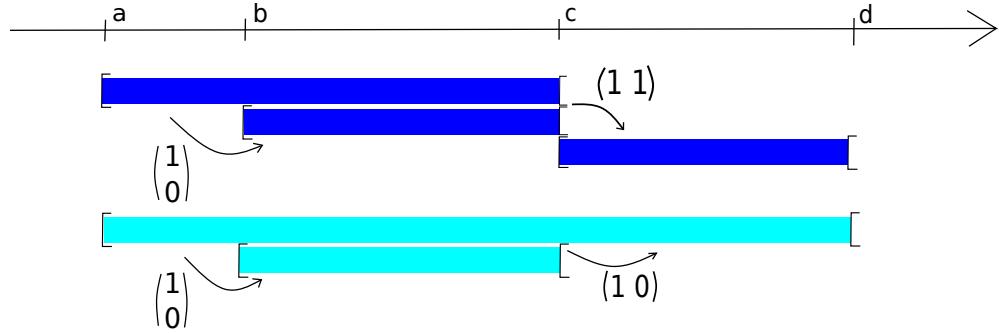
1.3 Entrelacements

Nous considérons dans cette partie des modules sur $T = \mathbb{R}$.

Définition 1.3.1. On dit que deux modules de persistance \mathbb{U} et \mathbb{V} sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\Phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ de degré 0, c'est à dire une famille d'isomorphismes $(\phi_t : U_t \rightarrow V_t)_{t \in T}$ telle qu'on ait des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{u_s^t} & U_t \\ \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_t \\ V_s & \xrightarrow{v_s^t} & V_t \end{array}$$

Exemple 1.3.2. Considérons les deux modules de persistance suivants :



où les matrices représentent des applications linéaires.

Soit la famille d'isomorphismes Φ telle que :

- Pour $a \leq t < b$, $\phi_1 = \text{id} : k \rightarrow k$,
- pour $b \leq t < c$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : k^2 \rightarrow k^2$,
- pour $c \leq t \geq d$, $\phi_3 = \text{id} : k \rightarrow k$,
- et $\phi_t = 0$ sinon.

On vérifie directement que Φ est un isomorphisme de modules de persistance.

Étant donné un module de persistance \mathbb{V} , on peut définir, pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, l'endomorphisme de \mathbb{V} , $1_{\mathbb{V}}^\epsilon$, donné par la structure de module de persistance :

$$1_{\mathbb{V}}^\epsilon = (v_t^{t+\epsilon} : V_t \rightarrow V_{t+\epsilon})_{t \in R}.$$

C'est un endomorphisme de degré ϵ , que l'on appelle morphisme de décalage.

Définition 1.3.3. On dit que deux modules de persistance \mathbb{U} et \mathbb{V} sont ϵ -entrelacés s'il existe deux morphismes de degré ϵ , $\Phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ et $\Psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$, tels que $\Psi \circ \Phi = 1_{2\epsilon}^{\mathbb{U}}$ et $\Phi \circ \Psi = 1_{2\epsilon}^{\mathbb{V}}$.

Cette propriété se traduit par les deux diagrammes commutatifs suivants, en tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} U_t & \xrightarrow{u_t^{t+\epsilon}} & U_{t+2\epsilon} \\ \phi_t \searrow & \nearrow \psi_{t+\epsilon} & \\ V_{t+\epsilon} & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & U_{t+\epsilon} & \\ \psi_t \nearrow & & \searrow \phi_{t+\epsilon} \\ V_t & \xrightarrow{v_t^{t+\epsilon}} & V_{t+2\epsilon} \end{array},$$

sans oublier la propriété de morphisme de Φ et Ψ :

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{u_s^t} & U_t \\ \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_t \\ V_{s+\epsilon} & \xrightarrow{v_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & V_{t+\epsilon} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} U_{s+\epsilon} & \xrightarrow{u_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & U_{t+\epsilon} \\ \uparrow \psi_s & & \uparrow \psi_t'' \\ V_s & \xrightarrow{v_s^t} & V_t \end{array}$$

Exemple 1.3.4. Deux modules intervalles $\mathbb{I}([a, b])$ et $\mathbb{I}([c, d])$ sont ϵ -entrelacés si

$$\left\{ \begin{array}{l} [a + \epsilon, b - \epsilon] \subset [c, d] \\ \text{et } [c + \epsilon, d - \epsilon] \subset [a, b]. \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10cm}} \\ \text{[blue bar]} \curvearrowright \\ \text{[cyan bar]} \searrow \end{array}$$

En particulier, un module intervalle est ϵ -entrelacé avec le module trivial si son diamètre est inférieur à ϵ .

Exemple 1.3.5. Reprenons l'exemple 1.2.5 : $(K_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $(L_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sont deux familles croissantes de sous-ensembles d'un même espace topologique telles qu'il existe $\epsilon \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$,

$$K_t \subset L_{t+\epsilon} \subset K_{t+2\epsilon}.$$

Ces inclusions induisent les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} H_*(K_t) & \longrightarrow & H_*(K_{t+2\epsilon}) \\ \searrow & & \nearrow \\ & H_*(L_{t+\epsilon}) & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H_*(L_t) & \longrightarrow & H_*(L_{t+2\epsilon}) \\ \searrow & & \nearrow \\ & H_*(K_{t+\epsilon}) & \end{array}$$

Nous avions déjà vu que ces applications définissent bien un ϵ -morphisme entre \mathbb{U} et \mathbb{V} . Nous venons de montrer que c'est même un ϵ -entrelacement.

Définition 1.3.6. Étant donnés deux modules de persistance \mathbb{U} et \mathbb{V} , on définit la distance d'entrelacement (pour l'anglais *interleaving*) :

$$d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \inf\{\epsilon \geq 0 \text{ tel que } \mathbb{U} \text{ et } \mathbb{V} \text{ soient } \epsilon\text{-entrelacés}\},$$

avec pour convention $\inf \emptyset = +\infty$.

On montre que la distance d'entrelacement est une pseudo-distance (à valeur dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$) :

Lemme 1.3.7. Soient \mathbb{U} , \mathbb{V} et \mathbb{W} trois modules de persistance, (Φ_1, Ψ_1) un ϵ_1 -entrelacement entre \mathbb{U} et \mathbb{V} , et (Φ_2, Ψ_2) un ϵ_2 -entrelacement entre \mathbb{V} et \mathbb{W} . Alors $(\Phi_2\Phi_1, \Psi_1\Psi_2)$ est un $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ -entrelacement entre \mathbb{U} et \mathbb{W} .

Démonstration. Déjà, on vérifie directement que $\Phi_2\Phi_1$ et $\Psi_1\Psi_2$ sont bien des morphismes de modules de persistance. Ensuite, on calcule :

$$\Psi_1\Psi_2\Phi_2\Phi_1 = \Psi_11_{2\epsilon_2}^{\mathbb{V}}\Phi_1.$$

Or, puisque Φ_1 est un ϵ -morphisme, la propriété de commutativité donne $1_{2\epsilon_2}^{\mathbb{V}}\Phi_1 = \Phi_11_{2\epsilon_2}^{\mathbb{U}}$. On obtient donc $\Psi_1\Psi_2\Phi_2\Phi_1 = \Psi_1\Phi_11_{2\epsilon_2}^{\mathbb{U}} = 1_{2\epsilon_1}^{\mathbb{U}}1_{2\epsilon_2}^{\mathbb{U}} = 1_{2\epsilon_1+2\epsilon_2}^{\mathbb{U}}$.

On montre de même que $\Phi_2\Phi_1\Psi_1\Psi_2 = 1_{2\epsilon_1+2\epsilon_2}^{\mathbb{W}}$. □

Corollaire 1.3.8. La distance d'entrelacement vérifie l'inégalité triangulaire.

Remarquons toutefois que deux modules peuvent être 0-entrelacés sans pour autant être isomorphes. C'est le cas par exemple de $\mathbb{I}([a, b])$ et $\mathbb{I}([a, b])$.

1.4 Décomposition des modules de persistance

1.4.1 Définitions

Nous reprenons maintenant $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{R} .

Définition 1.4.1. La somme de deux modules de persistance \mathbb{U} et \mathbb{V} est le module de persistance $\mathbb{W} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$ où

- W_t est la somme directe d'espaces vectoriels $U_t \oplus V_t$
 - w_s^t est aussi la somme directe $u_s^t \oplus v_s^t$.

On dit qu'un module de persistance \mathbb{W} est indécomposable si les seules décompositions $\mathbb{W} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$ sont les décompositions triviales $\mathbb{W} \oplus 0$ et $0 \oplus \mathbb{W}$.

Les modules intervalles jouent un rôle particulier dans la décomposition des modules de persistance :

Proposition 1.4.2. Les modules intervalles sont indécomposables.

Démonstration. On écrit $\mathbb{I} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$ avec \mathbb{I} un module intervalle. On vérifie immédiatement que l'application de projection $\mathbb{U} \oplus \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$ définit un 0-endomorphisme du module \mathbb{U} . Or les endomorphismes de \mathbb{I} forment une k -algèbre isomorphe à k (proposition 1.2.6). La projection est idempotente, et les seuls idempotents de k sont 0 ou 1. On déduit que $\mathbb{U} = 0$ ou $\mathbb{V} = 0$. \square

On dit qu'un module de persistance \mathbb{V} se décompose en modules-intervalles si l'on a un isomorphisme entre \mathbb{V} et une somme de modules-intervalles :

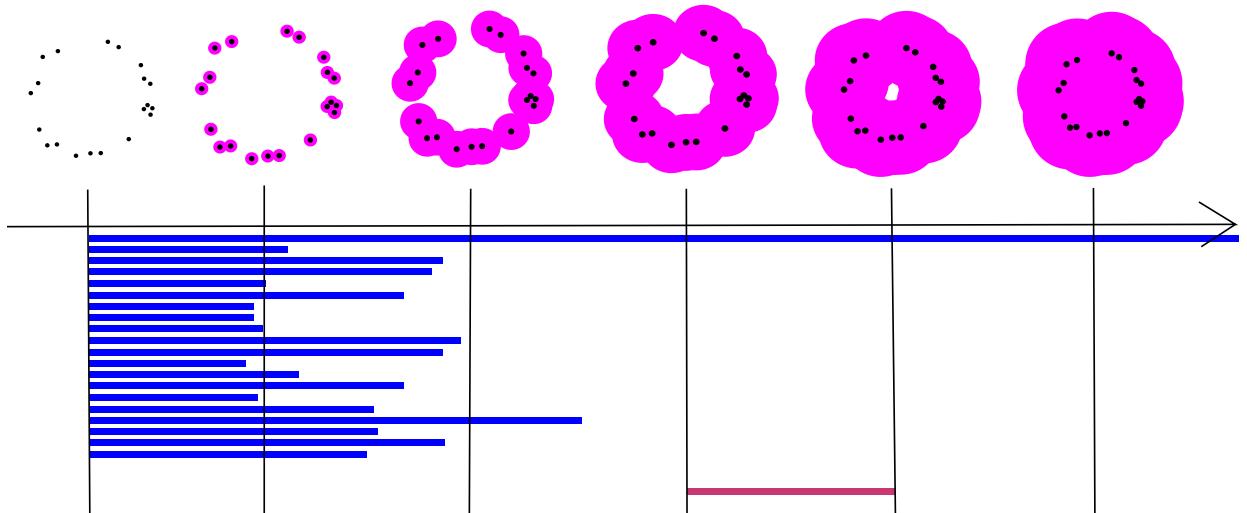
$$\mathbb{V} \simeq \bigoplus_{l \in L} \mathbb{I}(a_l^*, b_l^*),$$

où la notation c^* signifie c^+ ou c^- en fonction de l'appartenance de c à l'intervalle.

On peut trouver dans [1] la preuve du résultat suivant, qui est une conséquence du théorème de Krull–Remak–Schmidt–Azumaya :

Théorème 1.4.3. Une décomposition (éventuellement infinie) en modules-intervalles est unique.

Topologiquement parlant, si le module de persistance \mathbb{V} représente l'évolution des l'homologie d'un espace (comme dans l'exemple introductif), alors on interprète les commandes de la décomposition $\mathbb{V} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{I}(a_l^*, b_l^*)$ comme des caractéristiques topologiques présentes dans les intervalles $[a_l^*, b_l^*]$.



La décomposition de $H_0(X^t)$ est représentée en bleu, et celle de $H_1(X^t)$ en rouge.

Si l'on connaît la décomposition de \mathbb{V} en modules-intervalle, on peut ainsi résumer son homologie persistante par une famille d'intervalles.

Nous terminons cette partie par le résultat suivant :

Lemme 1.4.4. Soient $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ des modules de persistance. On a :

$$d_i(\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2, \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2) \leq \max(d_i(\mathbb{U}_1, \mathbb{V}_1), d_i(\mathbb{U}_2, \mathbb{V}_2)).$$

Démonstration. Donnons-nous

- $\epsilon_1 \geq d_i(\mathbb{U}_1, \mathbb{V}_1)$ et (Φ_1, Ψ_1) un ϵ_1 -entrelacement entre \mathbb{U}_1 et \mathbb{V}_1 ,
- $\epsilon_2 \geq d_i(\mathbb{U}_2, \mathbb{V}_2)$ et (Φ_2, Ψ_2) un ϵ_2 -entrelacement entre \mathbb{U}_2 et \mathbb{V}_2 .

Il suffit de montrer que la somme $(\Phi_1 \oplus \Phi_2, \Psi_1 \oplus \Psi_2)$ est un $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ -entrelacement entre $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$ et $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$. Or ceci est clair puisque la somme d'applications linéaires est définie coordonnées par coordonnées. \square

Dans les trois parties suivantes, nous présentons des cas dans lesquels l'existence d'une telle décomposition est connue.

1.4.2 Décomposition des modules de type fini sur \mathbb{N}

Cette partie suit l'exposition de [2].

On suppose que $T = \mathbb{N}$. Dans ce contexte, les intervalles sont $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ et $[a, b[= \{a, a+1, \dots, b-1\}$.

Nous allons obtenir la décomposition d'un module de persistance \mathbb{V} sur \mathbb{N} en le regardant comme un module sur un anneau principal. Pour obtenir une bonne correspondance entre ces deux structures, il sera même plus commode de le voir comme un module gradué.

Notons $k[X]$ l'anneau des polynômes sur le corps k . En tant que groupe additif, il s'écrit comme la somme directe $k[X] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} k[X]_i$, avec $k[X]_i$ l'ensemble des monomes de degré i . Puisque la multiplication vérifie

$$k[X]_i \cdot k[X]_j \subset k[X]_{i+j},$$

on dit que l'on a une graduation de $k[X]$.

Soit $\mathbb{V} = \{V_i, v_i^j\}$ un module de persistance. Nous définissons l'espace vectoriel :

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i.$$

Nous allons construire une structure de $k[X]$ -module gradué sur M . Pour tout $i, n \in \mathbb{N}$, identifions l'application linéaire $\begin{array}{ccc} V_n & \rightarrow & V_{n+i} \\ x & \mapsto & v_n^{n+i}(x) \end{array}$ par la multiplication extérieure par X^i . Coordonnées par coordonnées, on obtient une application :

$$\begin{aligned} k[X] \times M &\longrightarrow M \\ \sum \lambda_i X^i, x &\longrightarrow \sum \lambda_i X^i \cdot x \end{aligned}$$

Plus explicitement, le produit de X^i par un élément $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M$ est $(v_{n-i}^n(x_{n-i}))_{n \in \mathbb{N}}$, où les i premiers termes sont des zéros.

On a ainsi muni M d'une structure de module sur $k[X]$. De plus, la décomposition $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$ vérifie :

$$k[X]_i \cdot V_j \subset V_{i+j}.$$

On dit que M est muni d'une structure de module gradué.

Supposons maintenant que M soit un module finiment engendré. Pour comprendre où intervient la structure de module gradué dans notre problème, commençons par utiliser le théorème de décomposition d'un module de type fini sur un anneau principal : il existe un entier l et une suite de polynômes $(P_i)_{i \leq m}$, avec $P_i | P_{i+1}$, tels que M soit isomorphe (en tant que module) à

$$M = k[X]^l \bigoplus_{i \leq m} k[X]/P_i$$

Nous aimerais identifier les composantes $k[X]/P_i$ de la décomposition de M avec des modules-intervalle \mathbb{I} de la décomposition de \mathbb{V} . Déjà, un intervalle associé à $k[X]/P_i$ devrait contenir $\dim k[X]/P_i = \deg(P_i)$ éléments. Il nous manque encore une information pour identifier l'intervalle en question. Pour cela, nous allons utiliser la structure graduée.

Définition 1.4.5. Un isomorphisme de modules gradués entre deux modules gradués $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$ et $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i$ est un isomorphisme de modules $\Phi : M \rightarrow N$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\Phi(V_i) = W_i$.

Si L est un sous-ensemble de M , on note $\Sigma^i L = X^i \cdot L$, l'opérateur de décalage dans la graduation. On a alors un théorème de classification plus précis : il existe un entier l , des entiers L_1, \dots, L_l , une suite d'entiers $(d_i)_{i \leq m}$, et des entiers D_1, \dots, D_d tels que M soit isomorphe (en tant que module gradué) à

$$M = \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \Sigma^{L_i} k[X] \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \Sigma^{D_i} (k[X]/X^{d_i}),$$

où la graduation de $\Sigma^{D_i} (k[X]/X^{d_i})$ est celle héritée de $\Sigma^{D_i} (k[X])$.

On voit ici apparaître les modules-intervalles de la décomposition de \mathbb{V} :

- une composante $\Sigma^{D_i} (k[X]/X^{d_i})$ correspond à $\mathbb{I}([D_i, D_i + d_i])$,
- et $\Sigma^{L_i} k[X]$ correspond à $\mathbb{I}([L_i, +\infty])$.

Les trois résultats suivants permettent de justifier cela.

Lemme 1.4.6. Soient \mathbb{U} et \mathbb{V} deux modules de persistance, $M_{\mathbb{U}}$ et $M_{\mathbb{V}}$ leurs modules gradués associés. Si $M_{\mathbb{U}}$ et $M_{\mathbb{V}}$ sont isomorphes, alors \mathbb{U} et \mathbb{V} sont isomorphes.

Démonstration. On note $\mathbb{U} = (U_i, u_i^j)$, $\mathbb{V} = (V_i, v_i^j)$, $M_{\mathbb{U}} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} U_i$ et $M_{\mathbb{V}} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$. Soit $\Phi : M_{\mathbb{U}} \rightarrow M_{\mathbb{V}}$ l'isomorphisme de modules gradués en question. Puisque Φ respecte les graduations, il induit des isomorphismes $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$. On veut montrer que cette famille forme un isomorphisme de modules de persistance. Autrement dit, on veut que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{v_i^j} & V_j \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_j \\ W_i & \xrightarrow{w_i^j} & W_j \end{array}$$

Soient $\mu_i : U_i \rightarrow U_i \subset M_{\mathbb{U}}$ les applications qui envoient chaque élément sur la i -ème coordonnée. Si $x \in U_i \subset M_{\mathbb{U}}$, alors $\mu_i^{-1}(x)$ est bien défini. De même, on définit $\nu_i : V_i \rightarrow V_i \subset M_{\mathbb{V}}$ et ν_i^{-1} .

D'autre part, puisque Φ est un morphisme de modules, on a, pour tout polynôme $P \in k[X]$, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathbb{U}} & \xrightarrow{P \times} & M_{\mathbb{U}} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ M_{\mathbb{V}} & \xrightarrow{P \times} & M_{\mathbb{V}} \end{array}$$

où l'on note $P \times$ la multiplication extérieure par P . Il suffit de transposer ce diagramme aux modules de persistance.

Considérons pour cela le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 M_{\mathbb{U}} & \xrightarrow{X^{j-i} \times} & M_{\mathbb{U}} \\
 \downarrow \Phi & \swarrow \mu_i & \downarrow \Phi \\
 U_i & \xrightarrow{u_i^j} & U_j \\
 \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_j \\
 V_i & \xrightarrow{v_i^j} & V_j \\
 \downarrow \nu_i & & \downarrow \nu_j^{-1} \\
 M_{\mathbb{V}} & \xrightarrow{X^{j-i} \times} & M_{\mathbb{V}}
 \end{array}$$

Les trapèzes supérieurs et inférieurs commutent par définition du module gradué induit par un module de persistance. Les trapèzes à gauche et à droite commutent par définition des ϕ_i . Enfin, le carré extérieur commute par isomorphisme.

On en conclut que le carré intérieur commute. Nous avons donc bien construit un isomorphisme de modules de persistance. \square

Lemme 1.4.7. Soient $a < b \in \mathbb{N}$, et $\mathbb{I}([a, b])$ le module-intervalle.

- Le module gradué M précédemment construit se décompose (en tant que module gradué) en $M = \Sigma^a k[X]/X^{b-a}$.
- Réciproquement, si \mathbb{V} est un module de persistance, et que le module gradué associé se décompose en $M = \Sigma^a k[X]/X^{b-a}$, alors \mathbb{V} est isomorphe au module intervalle $\mathbb{I}([a, b])$.

Démonstration. Premier point : pour commencer, nous étudions la graduation de $k[X]/X^{b-a}$.

La classe d'équivalence de $x \in k[X]$ dans le quotient $k[X]/X^{b-a}$ s'écrit $x + X^{b-a} \cdot k[X]$. De même, l'ensemble des monômes de degré i est représenté dans $k[X]/X^{b-a}$ par $k[X]_n + X^{b-a} \cdot k[X]$. On obtient ainsi une graduation de $k[X]/X^{b-a}$ à partir de la graduation de $k[X]$:

$$k[X]/X^{b-a} = \bigoplus_{0 \leq i < b-a} (k[X]_i + X^{b-a} \cdot k[X]).$$

De même, on obtient une graduation de $\Sigma^a k[X]/X^{b-a}$:

$$\Sigma^a k[X]/X^{b-a} = \bigoplus_{a \leq i < b} (k[X]_i + X^{b-a} \cdot k[X]).$$

Soit I le groupe additif défini par $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i$, où $W_i = k$ si $a \leq i < b$, et $W_i = 0$ sinon. $\Sigma^a k[X]/X^{b-a}$ et I sont isomorphes en tant que groupe. Par transfert de structure, on obtient un isomorphisme de modules gradués entre $\Sigma^a k[X]/X^{b-a}$ et $I = \bigoplus_{a \leq i < b} k$.

Maintenant, remarquons que M est défini par $M = \bigoplus_{a \leq i < b} k$. Par définition de la structure de module gradué de M , on vérifie directement que M et I sont isomorphes.

Deuxième point : on suppose maintenant que M est isomorphe à $k[X]/X^{b-a}$. D'après le premier point, $k[X]/X^{b-a}$ est isomorphe au module gradué induit par le module-intervalle $\mathbb{I}([a, b])$. Par le lemme 1.4.6, on obtient que M et $\mathbb{I}([a, b])$ sont isomorphes. \square

On obtient alors la correspondance suivante :

Proposition 1.4.8. Soit \mathbb{V} un module de persistance.

- Si $\mathbb{V} = \bigoplus_{1 \leq l \leq L} \mathbb{I}([a_l, b_l])$ se décompose en modules intervalles, alors son module gradué associé se décompose en

$$M = \bigoplus_{1 \leq l \leq L} \Sigma^{a_l} k[X]/X^{b_l - a_l},$$

avec pour convention $\Sigma^{a_l} k[X]/X^{+\infty - a_l} = \Sigma^{a_l} k[X]$.

- Si le module gradué associé à \mathbb{V} se décompose en $M = \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \Sigma^{L_i} k[X] \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \Sigma^{D_i} k[X]/X^{d_i}$, alors on a la décomposition

$$\mathbb{V} = \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \mathbb{I}([L_i, +\infty]) \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \mathbb{I}([D_i, D_i + d_i])$$

Démonstration. Premier point : Remarquons que si \mathbb{U} et \mathbb{V} sont deux modules de persistance de modules gradués associés $M = \bigoplus U_i$ et $N = \bigoplus V_i$, alors le module associé à $\mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$ est $\bigoplus U_i \oplus V_i$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.4.7.

Deuxième point : c'est une conséquence du lemme 1.4.6 et du point précédent. \square

Remarque 1.4.9. Si le module gradué associé à un module de persistance est finiment engendré, on vient de montrer que ce dernier se décompose comme somme de modules-intervalle. On verra que c'est le cas par exemple des modules construits sur les voisinages tubulaires d'ensembles finis de points, comme dans la partie 1.1.

Pour terminer cette partie, nous citons un résultat qui permet en particulier de retrouver le fait que la décomposition d'un module de persistance est unique. On note r_a^b le rang de l'application $v_a^b : V_a \rightarrow V_b$.

Proposition 1.4.10. Si $\mathbb{V} = \bigoplus_{1 \leq l \leq L} \mathbb{I}([a_l, b_l])$ est un module de persistance sur \mathbb{N} décomposé en modules-intervalle, alors :

- pour $a < b \in N$, le nombre d'intervalles $[a, b[$ dans sa décomposition est

$$r_a^{b-1} - r_a^b + r_{a-1}^b - r_{a-1}^{b-1}$$

- pour $a \in N$, le nombre d'intervalles $[a, +\infty[$ dans sa décomposition est

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} r_a^b - \lim_{b \rightarrow +\infty} r_{a-1}^b$$

1.4.3 Décomposition des modules modérés sur \mathbb{R}^+

Nous nous intéressons maintenant aux modules de persistance \mathbb{V} sur \mathbb{R}^+ . En suivant [3], on définit ses valeurs critiques comme les réels $t \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, l'application $v_{t-\epsilon}^{t+\epsilon}$ n'est pas un isomorphisme.

Définition 1.4.11. Le module de persistance \mathbb{V} est dit modéré (de l'anglais *tame*) s'il n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques, et que chaque $V_t, t \in \mathbb{R}^+$ est de dimension finie.

Proposition 1.4.12. Si \mathbb{V} ne contient pas de valeur critique dans l'intervalle $[a, b]$, alors toutes les applications v_s^t , avec $a \leq s < t \leq b$, sont des isomorphismes.

Démonstration. Par l'absurde, on suppose qu'une telle application v_s^t ne soit pas un isomorphisme. Si on note $u = \frac{s+t}{2}$, alors au moins l'une des applications v_s^u et v_u^t n'est pas un isomorphisme (car $v_u^t \circ v_s^u = v_s^t$). En répétant cette opération, on converge vers une valeur critique de \mathbb{V} dans $[a, b]$. \square

Nous allons maintenant établir une correspondance entre les modules de persistance modérés sur \mathbb{R}^+ et les modules de persistance sur \mathbb{N} . Pour cela, définissons les fonctions grille comme les fonctions $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes et sans points d'accumulation.

Soit maintenant \mathbb{V} un module de persistance modéré et $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ l'ensemble de ses valeurs critiques. Soit $D = \{d_0, \dots, d_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^+$ une suite de réels entrelacée avec C :

$$d_0 < c_1 < d_1 < \dots < c_n < d_{n+1}.$$

On choisit T une fonction grille qui contient C et D dans son image. On définit alors le **module de persistance discréétisé** \mathbb{U} sur \mathbb{N} par les espaces $U_i = V_{T(i)}$, et les applications entre ces espaces données par la structure de module de persistance de \mathbb{V} .

La proposition précédente montre que \mathbb{V} est entièrement déterminé par le module \mathbb{U} , à isomorphisme près. De plus, on peut montrer que la décomposition en module gradué de $M_{\mathbb{U}}$ se transpose en une décomposition en modules-intervalles de \mathbb{V} .

1.4.4 Décomposition des modules finis partout sur \mathbb{R}

Dans [4], l'auteur généralise les résultats précédents :

Théorème 1.4.13. Soit \mathbb{V} un module de persistance sur \mathbb{R} tel que chaque espace V_t soit de dimension finie. Alors \mathbb{V} se décompose en somme (éventuellement infinie) de modules-intervalles.

Il s'appuie pour cela sur la notion suivante :

Définition 1.4.14. Le module \mathbb{V} satisfait la condition de chaîne descendante sur les images et les noyaux si :

- pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ et toute suite décroissante $t \geq s_1 > s_2 > \dots$, la suite

$$V_t \supset v_{s_1}^t \supset v_{s_2}^t \supset \dots$$

est stationnaire, et

- pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ et toute suite décroissante $r_1 > r_2 > \dots \geq t$, la suite

$$V_t \supset v_t^{r_1} \supset v_t^{r_2} \supset \dots$$

est stationnaire.

Théorème 1.4.15. Tout module de persistance sur \mathbb{R} vérifiant la condition de chaîne descendante sur les images et les noyaux se décompose en somme de modules-intervalle.

1.5 Diagrammes de persistance

1.5.1 Définition

Le diagramme de persistance est l'objet phare de l'analyse topologique des données. C'est une façon de représenter la décomposition en modules-intervalle d'un module de persistance.

Considérons un module décomposé :

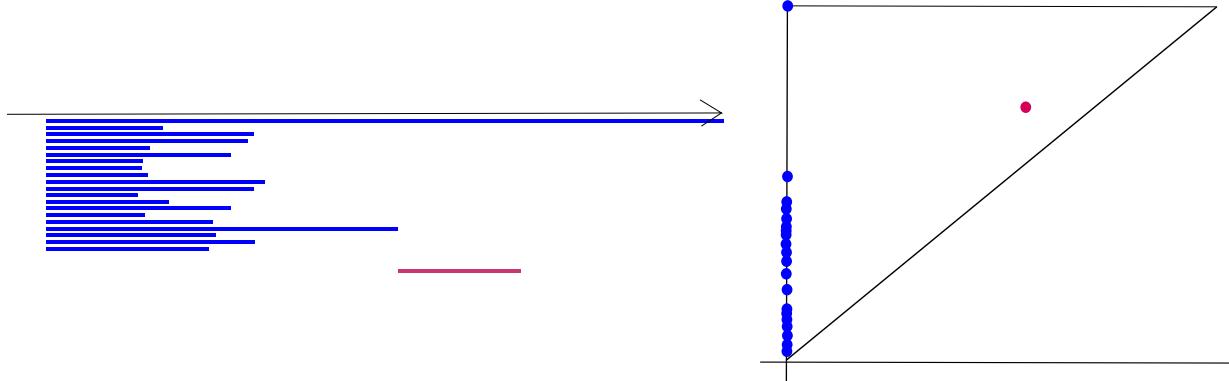
$$\mathbb{V} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{I}(a_l^*, b_l^*),$$

où l'étoile en indice signifie que l'intervalle est ouvert ou fermé de ce côté l'intervalle.

Définition 1.5.1. Le diagramme de persistance de \mathbb{V} est le multi-ensemble

$$\text{dgm}(\mathbb{V}) := \{(a_l, b_l), l \in L\} \setminus \Delta \subset \bar{\mathbb{R}}^2,$$

où les points sont comptés avec multiplicité. On a retiré du diagramme les points (a_l, b_l) de la diagonale $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.



Le théorème 1.4.3 assure que $\text{dgm}(\mathbb{V})$ ne dépend pas de la décomposition de \mathbb{V} .

La distance bottleneck. Étant donnés deux modules décomposables \mathbb{U} et \mathbb{V} , on veut pouvoir les comparer à travers leurs diagrammes $\text{dgm}(\mathbb{U})$, $\text{dgm}(\mathbb{V})$. Deux diagrammes sont proches si on peut appareiller leurs points sans trop les déplacer. On formalise cette idée ainsi :

- Un appariement partiel entre deux multi-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}$ est un sous-multi-ensemble $M \subset A \times B$ tel que :

- pour tout $a \in A$, il y a au plus un $b \in B$ tel que $(a, b) \in M$,
- pour tout $b \in B$, il y a au plus un $a \in A$ tel que $(a, b) \in M$.

De tels points sont dit appareillés. On considère que les autres points sont appareillés avec la diagonale Δ .

- Pour $\delta \leq 0$, on dit que l'appariement M est un δ -appariement si :

- si $(a, b) \in M$, alors $d_\infty(a, b) \leq \delta$,
- si $a \in A$ n'est pas appareillé, alors $d_\infty(a, \Delta) \leq \delta$,
- si $b \in B$ n'est pas appareillé, alors $d_\infty(b, \Delta) \leq \delta$.

Définition 1.5.2. La distance bottleneck entre \mathbb{U} et \mathbb{V} est définie par :

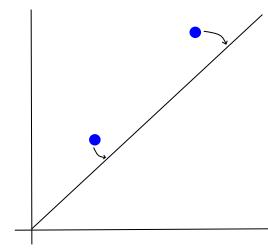
$$d_b(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \inf\{\delta \geq 0 \text{ tel qu'il existe un } \delta\text{-appariement entre } \text{dgm}(\mathbb{U}) \text{ et } \text{dgm}(\mathbb{V})\}$$

Proposition 1.5.3. Si $U = \mathbb{I}(a^*, b^*)$ et $V = \mathbb{I}(c^*, d^*)$ sont deux modules-intervalle, alors

$$d_b(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \leq d_\infty((a, b), (c, d)).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'appariement $M = ((a, b), (c, d))$. □

La figure à droite montre que l'inégalité précédente n'est pas toujours une égalité. Il s'agit de deux points, pour lesquels il est moins coûteux de les appareiller avec la diagonale plutôt qu'entre eux.



On peut trouver les résultats suivants dans [1] :

Proposition 1.5.4. Si A , B et C sont trois multi-ensembles, alors

$$d_b(A, C) \leq d_b(A, B) + d_b(B, C).$$

Proposition 1.5.5. Soient A et B sont deux multi-ensembles. Si $d_b(A, B) = \delta$, alors il existe un δ -entrelacement entre eux.

1.5.2 Stabilité

Considérons deux modules de persistance \mathbb{U} et \mathbb{V} décomposables en modules-intervalle. Nous avons défini jusqu'à présent deux notions de distance entre ces modules :

- la distance d'entrelacement d_i , qui compare leurs structures de modules,
- et la distance bottleneck, d_b , qui compare leurs diagrammes de persistance.

Ces deux distances présentent des qualités propres : la première s'exprime au niveau algébrique, et la deuxième se manipule algorithmiquement. En fait, il se trouve que ces deux notions coïncident, comme nous le verrons dans la partie 1.6 : $d_i = d_b$.

Avec peu d'efforts, nous pouvons déjà démontrer la moitié de ce résultat. C'est ce que l'on appelle le théorème d'isométrie :

Théorème 1.5.6. Si \mathbb{U} et \mathbb{V} sont deux modules de persistance (sur \mathbb{R}) décomposables en modules-intervalle, alors

$$d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \leq d_b(\mathbb{U}, \mathbb{V}).$$

Démonstration. Notons $\mathbb{U} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{I}(a_l^*, b_l^*)$ et $\mathbb{V} = \bigoplus_{k \in K} \mathbb{I}(c_k^*, d_k^*)$.

Soit $\delta \geq d_b(\mathbb{U}, \mathbb{V})$. Nous allons montrer que $d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \leq \delta$. Soit $M \subset \text{dgm}(\mathbb{U}) \times \text{dgm}(\mathbb{V})$ un δ -appariement. M définit :

- Des points appareillés $((a_l, b_l), (c_k, d_k))$ tels que $d_\infty((a_l, b_l), (c_k, d_k)) \leq \delta$. La proposition 1.5.3 nous assure alors que $d_b(\mathbb{I}(a_l^*, b_l^*), \mathbb{I}(c_k^*, d_k^*)) \leq \delta$.
- Des points non-appareillés (a_l, b_l) ou (c_k, d_k) qui sont δ -proches de la diagonale. De la même façon, ces modules-intervalle sont δ -entrelacés avec le module trivial.

Maintenant, il suffit de sommer tous ces modules intervalles et d'appliquer le lemme 1.4.4 pour obtenir :

$$d_i\left(\bigoplus_{l \in L} \mathbb{I}(a_l^*, b_l^*), \bigoplus_{k \in K} \mathbb{I}(c_k^*, d_k^*)\right) \leq \delta.$$

□

1.6 Le théorème d'isométrie

1.6.1 Cas des modules modérés

L'objet de cette partie est de présenter le théorème d'isométrie :

Théorème 1.6.1. Si \mathbb{U} et \mathbb{V} sont deux modules de persistance (sur \mathbb{R}) modérés, alors

$$d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = d_b(\mathbb{U}, \mathbb{V}).$$

Nous avons déjà démontré l'inégalité $d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \leq d_b(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ au théorème 1.5.6. Expliquons maintenant pourquoi l'inégalité inverse demande plus de travail. Si l'on dispose d'un ϵ -entrelacement (Φ, Ψ) entre \mathbb{U} et \mathbb{V} , il se peut que ces applications mélagent les modules intervalles. Autrement dit, les isomorphismes peuvent ne pas être diagonaux dans les bases données par la décomposition en modules-intervalles.

Or un appariement entre les diagrammes $\text{dgm}(\mathbb{U})$ et $\text{dgm}(\mathbb{V})$ demande de définir des morphismes qui envoient un unique intervalle sur un autre. Le problème est donc de construire un entrelacement qui respecterait cette décomposition. Pour ce faire, nous pouvons utiliser le lemme d'interpolation :

Lemme 1.6.2. Si les modules \mathbb{U} et \mathbb{V} sont ϵ -entrelacés, alors il existe une famille de modules de persistance, $\{\mathbb{U}_x, x \in [0, \epsilon]\}$, tels que $\mathbb{U}_0 = \mathbb{U}$, $\mathbb{U}_\epsilon = \mathbb{V}$, et

$$\forall x, y \in [0, \epsilon], d_i(\mathbb{U}_x, \mathbb{U}_y) \leq |x - y|.$$

On pourra par exemple trouver une preuve de ces résultats dans [5].

1.6.2 Généralisation aux modules q-modérés

Dans cette dernière partie, nous évoquons les résultats de [1], qui généralisent ce que nous avons vu jusque maintenant.

Mesure persistante. La définition que l'on a donné en 1.5.1 des diagrammes de persistance demande au préalable la décomposabilité en modules-intervalle. On peut se débarrasser de cette condition grâce à la notion de mesure persistante. Par la suite, nous noterons r_s^t le rang de l'application $v_s^t : V_s \rightarrow V_t$.

Définition 1.6.3. Soit \mathbb{V} un module de persistance. Sa mesure persistante est la fonction

$$\mu_{\mathbb{V}} : R \longmapsto r_a^b - r_a^c + r_a^d - r_b^d,$$

définie sur les rectangles $R = [a, b] \times [c, d]$ tels que $a < b \leq c < d$.

Intuitivement, cette fonction permet de localiser les points sur le diagramme de persistance de \mathbb{V} . Par exemple, la mesure persistante d'un module intervalle $\mathbb{I}(I)$ est

$$\mu_{\mathbb{I}}(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } [b, c] \subset I \subset [a, d], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement :

Proposition 1.6.4. Soit $\mathbb{V} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{I}(x_l^*, y_l^*)$ décomposé en modules-intervalle, et $R = [a, b] \times [c, d]$. Alors $\mu_{\mathbb{V}}(R)$ est le nombre de points (x_l^*, y_l^*) tels que $[b, c] \subset (x_l^*, y_l^*) \subset [a, d]$.

Définition 1.6.5. Un module de persistance \mathbb{V} est dit *q-modéré* (de l'anglais *q-tame*) si sa mesure persistante prend des valeurs finies sur tout les rectangles R qui n'intersectent pas la diagonale.

De manière équivalente, \mathbb{V} est *q-modéré* si tous les morphismes $v_s^t, s < t$, sont de rang fini. Nous verrons par la suite que cette hypothèse est suffisamment faible pour contenir tous les cas que nous étudierons.

Diagramme d'une mesure persistante. Soit A un multi-ensemble de \mathbb{R}^2 . Comme pour une mesure de persistance, on peut définir une fonction sur les rectangles :

$$R \longmapsto \text{card}(A \cap R).$$

La proposition suivante permet de définir le diagramme d'une mesure persistante :

Proposition 1.6.6. Soit $\mu_{\mathbb{U}}$ la mesure persistante d'un module de persistance q -modéré. Alors il existe un unique multi-ensemble localement fini $\text{Dgm}(\mu_{\mathbb{V}}) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\}$ tel que pour tout rectangle R qui n'intersecte pas la diagonale,

$$\mu_{\mathbb{V}}(R) = \text{card}(\text{Dgm}(\mu_{\mathbb{V}}) \cap R).$$

Ainsi on peut définir, pour deux diagrammes de persistance q -modérés \mathbb{U} et \mathbb{V} leur distance bottleneck

$$d_b(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = d_b(\text{Dgm}(\mu_{\mathbb{U}}), \text{Dgm}(\mu_{\mathbb{V}})).$$

Dans ce cadre, on peut énoncer le théorème d'isométrie pour les modules q -modérés :

Théorème 1.6.7. Si \mathbb{U} et \mathbb{V} sont deux modules de persistance q -modérés, alors

$$d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = d_b(\mathbb{U}, \mathbb{V}).$$

2 Espaces topologiques filtrés

En pratique, on obtient un module de persistance de deux façon : en filtrant un espace topologique, ou en filtrant un complexe simplicial. On s'occupe ici du premier cas.

2.1 Filtrations

Soit E un espace topologique et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Les sous-niveaux $f^t = f^{-1}(-\infty, t])$ de f forment une famille croissante de sous-espaces topologiques indexée par \mathbb{R} . Pour tout $r \leq s \leq t \in \mathbb{R}$,

$$f^r \subset f^s \subset f^t.$$

Si l'on définit par $V_t = H_*(f^t)$ les groupes d'homologie singulière, et $v_s^t : V_t = H_*(f^t) \rightarrow H_*(f^s)$ les morphismes induits par les inclusions, on obtient un module de persistance

$$\mathbb{V}_f = ((V_t)_{t \in \mathbb{R}}, (V_s^t)_{s \leq t \in \mathbb{R}}).$$

Définition 2.1.1. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable (avec X un espace euclidien ou une variété différentielle), on appelle point critique de f un point $x \in X$ tel que $\nabla f(x) = 0$. Une valeur critique de f est un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{c\})$ contienne au moins un point critique. Sinon, elle est dite régulière.

Dans ce cas, nous allons voir que la l'évolution de la topologie des sous-niveaux f^t dépend des points critiques de la fonction f .

2.2 Fonctions de Morse

Soit X une variété différentielle, et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On dit que f est une fonction de Morse si ses points critiques sont non-dégénérés (c'est à dire que la hessienne $d^2f(x)$ est une forme quadratique non dégénérée).

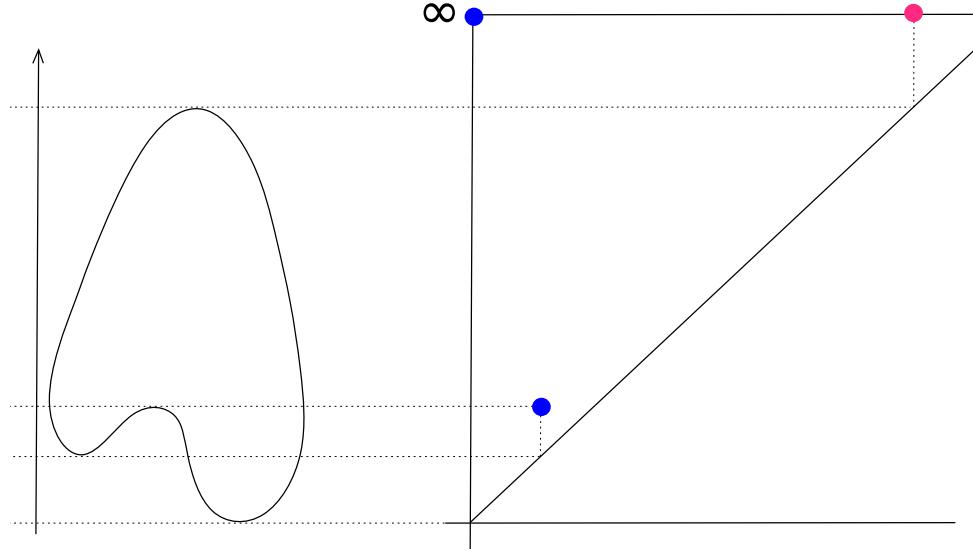
On sait que les points critiques d'une telle fonction sont isolés. Ce sont les points où la topologie des sous-niveaux change.

En dehors de ces points critiques, on peut définir des champs de vecteurs qui rétractent les sous-niveaux de f . De cette façon, on montre dans [6] que :

Théorème 2.2.1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que f n'admette pas de valeur critique dans l'intervalle $[a, b]$. Supposons que $f^{-1}([a, b])$ soit compact. Alors f^b se rétracte par déformation sur f^a .

Soit \mathbb{V}_f le module de persistance engendré par f . Pour tout réel t , on sait que le sous-niveau f^t est une variété topologique à bord, et que son groupe d'homologie singulière est de dimension finie. Si de plus le nombre de points critiques de f est fini (par exemple si X est compacte), on est dans le cadre de la partie 1.4.3 : \mathbb{V}_f est un module modéré, et il se décompose en somme finie de modules-intervalle.

L'exemple suivant est le diagramme de persistance d'un courbe de \mathbb{R}^2 filtrée par la projection sur l'axe vertical.



Si la variété X en question est compacte, alors les sous-niveaux sont constants à partir d'une certaine valeur de t . A ce moment, les groupes d'homologie de f^t valent ceux de X , et les applications v_s^t sont l'identité. En particulier, les points du diagramme qui persistent jusqu'à l'infini sont en correspondance avec les nombres de Betti de X .

2.3 Fonctions distance

Les fonction distance sont des filtrations naturelles lorsque l'on s'intéresse à un compact. Nous pouvons retrouver des propriétés analogues aux fonctions de Morse.

2.3.1 Axe médian

Soit K un compact de l'espace euclidien \mathbb{R}^d . Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'infimum $\inf_{k \in K} \|x - k\|$ est atteint, et définit la fonction distance à K :

$$d_K : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \inf_{k \in K} \|x - k\|.$$

On appelle ensemble des projections de x sur K l'ensemble :

$$\Gamma(x) = \operatorname{argmin}_{k \in K} \|x - k\|.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$, et $k_x \in \Gamma(x)$ une projection de x sur K . On a :

$$d_K(y) - d_K(x) \leq \|y - k_x\| - \|x - k_x\| \leq \|x - y\|.$$

Par symétrie, on obtient que la fonction d_K est 1-lipschitzienne.

Les sous-niveaux de d_K sont les voisinages tubulaires K^t . Comme pour les fonctions régulières, on voudrait étudier l'évolution des sous-niveaux de d_K grâce à ses valeurs critiques. Malheureusement, cette fonction n'est pas différentiable partout.

Par exemple, la figure à droite représente la fonction distance à une ellipse. On y observe sa non-différentiabilité au centre du domaine.

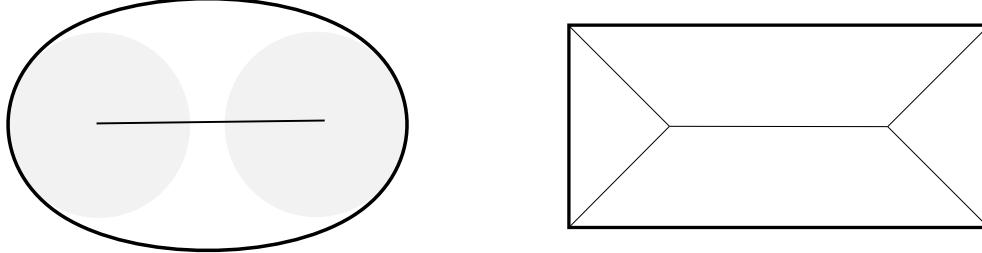


On peut toutefois caractériser l'ensemble de non-différentiabilité de d_K . En suivant [7], on définit :

Définition 2.3.1. L'axe médian d'un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ est l'ensemble

$$\operatorname{Med}(K) = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } x \text{ admette au moins deux projections sur } K\}.$$

Par exemple, l'axe médian d'une ellipse et d'un rectangle sont :



On peut définir une fonction continue $\operatorname{proj}_K : \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Med}(K) \rightarrow K$.

Lemme 2.3.2. Soit k une projection sur K d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}^d$,

$$d_K^2(x + h) \leq d_K^2(x) + 2\langle x - k, h \rangle + \|h\|^2.$$

En particulier, si d_K^2 est différentiable en x , alors $\nabla d_K^2(x) = 2(x - k)$.

Démonstration. Puisque $d_K(x + h) \leq \|x + h - k\|$, on a :

$$\begin{aligned} d_K(x + h)^2 &\leq \|x - k\|^2 + 2\langle x - k, h \rangle + \|h\|^2 \\ &= d_K^2(x) + 2\langle x - k, h \rangle + \|h\|^2. \end{aligned}$$

Maintenant, si d_K^2 est différentiable en x , on a que $d_K^2(x + h) = d_K^2(x) + \langle \nabla d_K^2(x), h \rangle + o(\|h\|)$. Combinée avec l'inégalité précédente, on obtient :

$$d_K^2(x) + \langle \nabla d_K^2(x), h \rangle + o(\|h\|) \leq d_K^2(x) + 2\langle x - k, h \rangle + \|h\|^2.$$

Cette inégalité n'est vérifiée pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ que si $\nabla d_K^2(x) = 2(x - k)$. □

Proposition 2.3.3. L'ensemble des points de non-différentiabilité de d_K sur $\mathbb{R}^d \setminus K$ est exactement $\text{Med}(K)$.

Démonstration. Si x est un point de différentiabilité de d_K , c'est aussi le cas pour d_K^2 . Le lemme précédent montre alors que l'on a $\nabla d_K^2(x) = 2(x - k)$ pour toute projection k de x sur K . Le point k est donc en fait unique. On a donc montré que $x \notin \text{Med}(K)$.

Nous renvoyons à [7] pour le sens réciproque. □

2.3.2 Cellules de Voronoï

Soit X un nuage fini de points de \mathbb{R}^d . L'axe médian de X admet une structure particulière. Pour $x \in X$, on définit la cellule de Voronoï de x comme l'ensemble

$$\text{Vor}(x) = \{y \in \mathbb{R}^d, \forall x' \in X, \|y - x\| \leq \|y - x'\|\}.$$

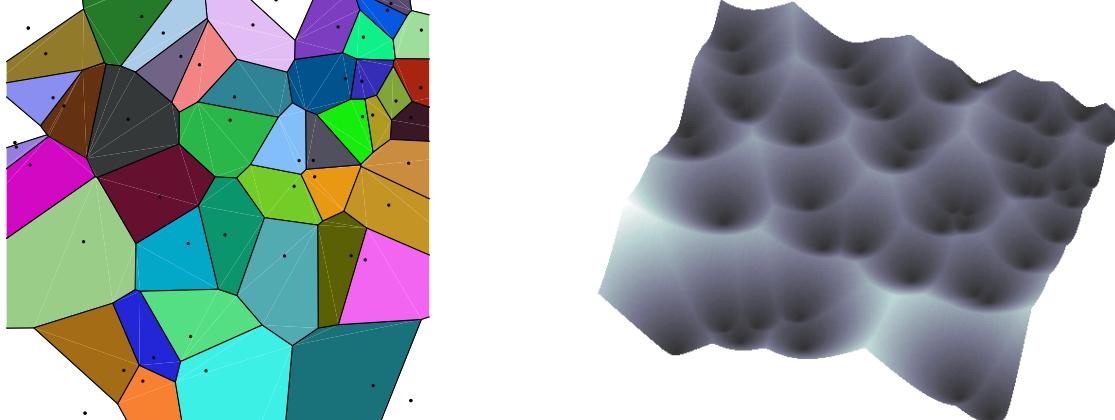
Chacune de ces cellules est un polyèdre, car elles sont l'intersection des demi-espaces définis par les applications affines

$$y \mapsto \|x - y\|^2 - \|x' - y\|^2 = \|x\|^2 - \|x'\|^2 - 2\langle x - x', y \rangle.$$

Leur union vaut l'espace en entier.

Par définition, on voit que les faces des cellules de Voronoï est exactement l'ensemble des points qui admettent au moins deux projections sur X , c'est à dire l'ensemble $\text{Med}(X)$.

Cela s'observe sur les figures suivantes : le diagramme de Voronoï d'un nuage de point de \mathbb{R}^2 , ainsi que la fonction distance associée.



2.3.3 Gradient généralisé

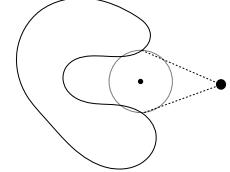
Le gradient ∇d_K n'est défini que sur $\mathbb{R}^d \setminus \text{Med}(K)$. Toutefois, on peut définir un champ de vecteur ∇_K , de norme semi-continue inférieurement, qui coïncide avec ∇d_K là où il est défini.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, et $\Gamma(x)$ l'ensemble de ses projections. On appelle boule englobante de $\Gamma(x)$ une boule de l'espace euclidien qui le contient. Puisque $\Gamma(x)$ est borné, l'ensemble des rayons des boules englobantes est non-vide :

$$\{r \leq 0, \exists y \in \mathbb{R}^d, \Gamma(x) \subset B(y, r)\} \neq \emptyset.$$

Si $B(y_1, r_1)$ et $B(y_2, r_2)$ sont deux telles boules, il existe une autre boule englobante de rayon plus petit que r_1 et r_2 (par exemple une boule dont le diamètre est celui de $B(y_1, r_1) \cap B(y_2, r_2)$). L'ensemble précédent est donc compact.

Ainsi, on peut définir une boule englobante de rayon minimal. On notera $\Theta(x)$ son centre et $R(x)$ son rayon. En particulier, si $x \notin \text{Med}(K)$, on a que $\Gamma(x) = \{\Theta(x)\}$ et $R(x) = 0$.



Définition 2.3.4. Le gradient généralisé de d_K est le champ de vecteurs

$$\nabla_K(x) = \begin{cases} \frac{x - \Theta(x)}{d_K(x)} & \text{si } x \notin K, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.3.5. Le gradient généralisé de d_K coïncide avec son gradient là où il est défini.

Démonstration. Si $x \in K$ est un point de différentiabilité de f , alors $\nabla d_K(x) = 0$ car x est un minimum local.

Si $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$ est un point de différentiabilité de f , alors $x \notin \text{Med}(K)$, et on a

$$\nabla d_K^2(x) = 2d_K(x)\nabla d_K(x).$$

On déduit du lemme 2.3.2 que $\nabla d_K(x) = \frac{x - \text{proj}_K(x)}{d_K(x)}$. Par définition, on a donc $\nabla_K(x) = \nabla d_K(x)$. On a bien étendu le gradient de d_K . \square

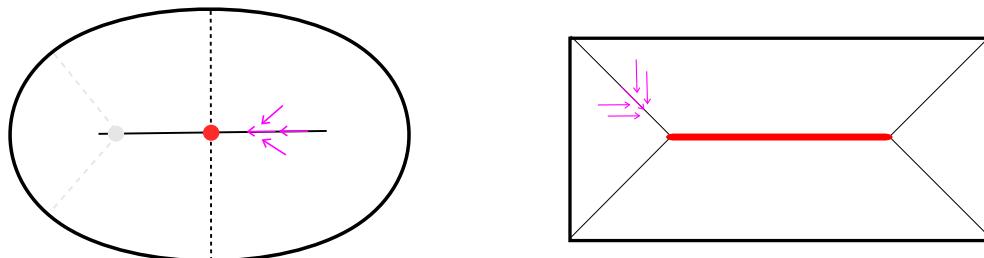
Le résultat suivant est tiré de [8].

Proposition 2.3.6. Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$. Alors $\|\nabla_K(x)\|^2 = 1 - \frac{R(x)^2}{d_K(x)^2}$. En particulier, $\forall x \in R^d$,

$$\begin{cases} \|\nabla_K(x)\| = 0 & \text{si } x \in K, \\ 0 \leq \|\nabla_K(x)\| < 1 & \text{si } x \in \text{Med}(K), \\ \|\nabla_K(x)\| = 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appellera points critiques de d_K les points d'annulation du gradient généralisé ∇_K . Par définition, ce sont les points $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $\Theta(x) = x$. Autrement dit, ce sont les points qui appartiennent à l'enveloppe convexe de leurs projections. On dira aussi qu'une valeur $c \in \mathbb{R}$ est régulière si $d_K^{-1}(\{c\})$ ne comporte pas de points critiques.

Sur la figure suivante, nous indiquons en rouge les points critiques de la fonction distance à l'ellipse et au carré, ainsi que quelques valeurs du gradient généralisé en rose.



Bien que ∇_K ne soit pas continu, on peut définir un flot $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la courbe $\gamma : t \mapsto \Phi^t(x)$ soit une fonction différentiable à droite et vérifiant $\gamma'(t) = \nabla_K(\gamma(t))$. Tout comme pour les fonctions de Morse, cette déformation permet d'étudier le comportement des sous-niveaux de d_K .

Théorème 2.3.7. Si $c \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière, alors $d_K^{-1}(\{c\})$ est une sous-variété \mathcal{C}^0 de \mathbb{R}^d .

Théorème 2.3.8. (Lemme d'isotopie) Soit $c < d \in \mathbb{R}$. Si l'intervalle $[c, d]$ ne contient pas de valeurs critiques, alors les sous-niveaux $K^t, t \in [c, d]$, se rétractent les uns sur les autres.

Autrement dit, le module de persistance \mathbb{V}_{d_K} n'a pour valeurs critiques que les valeurs critiques de d_K . Supposons que les valeurs critiques soient en nombre fini. Alors, comme ce que l'on a dit pour les fonctions de Morse, on a que \mathbb{V}_{d_K} est modéré.

Pour finir, nous définissons :

Définition 2.3.9. Le wfs (pour l'anglais *weak feature size*) du compact K est le réel

$$\text{wfs}(K) = \inf\{c > 0 \text{ tel que } c \text{ soit une valeur critique}\}.$$

Les résultats précédents montrent que les sous-niveaux de d_K conservent le type d'homotopie de K dans l'intervalle $[0, \text{wfs}(K)]$.

2.4 Fonctions presque-distance

Dans cette partie, nous présentons brièvement comment les résultats pour les fonctions distance se transposent à l'identique pour une classe plus générale de fonctions filtrantes.

Définition 2.4.1. On dit que la fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une presque-distance (de l'anglais *distance-like*) si :

- f est 1-lipschitzienne,
- f est propre,
- et f^2 est 1-semiconcave, c'est à dire que $x \mapsto \|x\|^2 - f^2(x)$ est convexe.

Sans plus de détails, nous affirmons que la semiconcavité de f^2 permet de définir un gradient généralisé de f . Comme pour les fonctions distance, on peut ensuite montrer l'existence d'un flot contre ce champ de vecteurs. On obtient finalement :

Théorème 2.4.2. (Lemme d'isotopie) Soit f une fonction presque-distance et $c < d \in \mathbb{R}$. Si l'intervalle $[c, d]$ ne contient pas de valeurs critiques de son gradient généralisé, alors les ensembles de niveaux $f^t, t \in [c, d]$ sont isotopes.

2.5 Stabilité des modules

2.5.1 Régularité

Proposition 2.5.1. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact et $d_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction distance à K . Alors le module de persistance \mathbb{V}_{d_K} est q -modéré.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Puisque le sous-niveau K^t est compact, définissons $P \subset K^t$ un sous-ensemble fini ϵ -dense. On a les inclusions :

$$K^t \subset P^\epsilon \subset K^{t+\epsilon},$$

qui se traduisent au niveau homologique par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H_*(K^t) & \longrightarrow & H_*(P^\epsilon) & \longrightarrow & H_*(K^{t+\epsilon}) \\ & & \searrow v_t^{t+\epsilon} & & \end{array}$$

On verra (théorème 3.3.3) que l'espace vectoriel $H_*(P^{t+\epsilon})$ est de dimension finie. Par conséquent, l'application $v_t^{t+\epsilon}$ est de rang fini.

Ceci étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, on conclut que le module en question est q -modéré. \square

En fait ce résultat se généralise directement :

Proposition 2.5.2. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre et minorée. Alors le module de persistance \mathbb{V}_f est q -modéré.

Démonstration. Soit $s < t \in \mathbb{R}$. Puisque f est propre, les ensembles de niveaux $f^{-1}(\{s\})$ et $f^{-1}(\{t\})$ sont compacts. De plus, par continuité de f , la valeur

$$\delta = \inf\{\|x - y\|, x \in f^{-1}(\{s\}), y \in f^{-1}(\{t\})\}$$

est strictement positive.

Soit $T \subset \mathbb{R}^d$ un d -simplexe régulier qui contient f^t . Nous pouvons effectuer des subdivisions barycentriques successives de T , jusqu'à obtenir une triangulation (finie) de T par des simplexes $\{T_i\}_{i \in I}$ de diamètres strictement plus petits que δ .

Par définition de δ , ces simplexes vérifient la propriété de ne pas intersecer à la fois $f^{-1}(\{s\})$ et $f^{-1}(\{t\})$.

Soit alors $\{T_j\}_{j \in J}$ l'ensemble des simplexes qui intersectent f^s , et $K = \bigcup_{j \in J} T_j$ leur union. On a les inclusions :

$$f^s \subset K \subset f^t,$$

qui se transportent par fonctorialité :

$$\begin{array}{ccccc} H_*(f^s) & \longrightarrow & H_*(K) & \longrightarrow & H_*(f^t) \\ & & \searrow v_s^t & & \end{array}$$

Or l'espace vectoriel $H_*(K)$ est de dimension finie car c'est un espace triangulé (son homologie singulière coïncide donc avec son homologie simpliciale en tant que complexe simplicial). L'application v_s^t est par conséquent de rang fini. \square

2.5.2 Stabilité

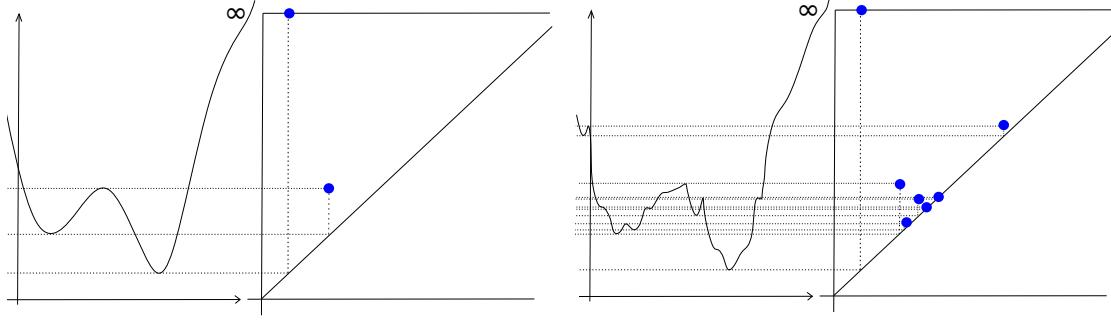
Proposition 2.5.3. Soient $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur un espace topologique, et $\epsilon = \|f - g\|_\infty$. Alors les modules de persistance \mathbb{V}_f et \mathbb{V}_g sont ϵ -entrelacés.

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a les inclusions $f^t \subset g^{t+\epsilon} \subset f^{t+2\epsilon}$. On obtient bien les diagrammes voulus entre les groupes d'homologie. \square

Si les diagrammes de persistance de ces modules sont bien définis, alors le théorème d'isométrie permet de majorer leur distance bottleneck :

$$d_b(\mathbb{V}_f, \mathbb{V}_g) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Pour illustrer cette propriété, nous représentons le diagramme de persistance des sous-niveaux d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , ainsi que son diagramme lorsqu'elle est soumise à de petites perturbations en distance de Hausdorff. On voit apparaître des points proches de la diagonale.



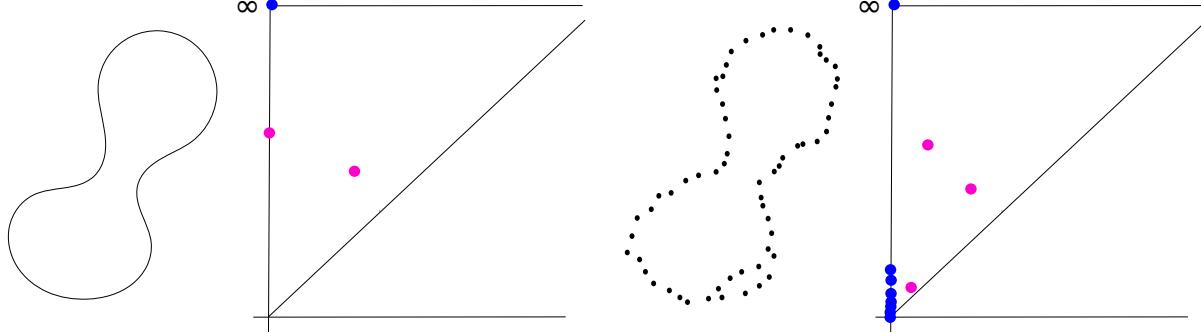
Soient maintenant $K, L \subset \mathbb{R}^d$ deux compacts. Leur distance de Hausdorff peut être définie comme la valeur

$$d_H(K, L) = \|d_L - d_K\|_\infty.$$

Par la proposition 2.5.1, on sait que les diagrammes de persistance des modules \mathbb{V}_{d_K} et \mathbb{V}_{d_L} sont bien définis. On a donc :

$$d_b(\mathbb{V}_{d_K}, \mathbb{V}_{d_L}) \leq d_H(K, L).$$

Ce résultat permet de justifier la proximité des diagrammes d'une sous-variété et d'un nuage de points qui l'échantillonne :



3 Complexes simpliciaux filtrés

3.1 Filtrations

Filtration d'un complexe simplicial. Soit k un complexe simplicial abstrait (éventuellement infini), et V son ensemble de sommets. On appelle filtration de K , et on note \mathbb{K} , une suite de sous-complexes

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K.$$

L'homologie simpliciale de ces complexes donne lieu à une suite croissante d'espaces vectoriels $V_i = H_*(K^i)$. Les inclusions entre les sous-complexes simpliciaux induisent des morphismes $v_i^j : V_i \rightarrow V_j$ qui forment une structure de module de persistance. On notera dans la suite $\mathbb{V} = ((V_i)_{i \in \mathbb{N}}, (v_i^j)_{i \leq j \in \mathbb{N}})$ ce module.

Si la famille est finie, on note :

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^n = K.$$

Nombres de Betti persistants. Considérons le module de persistance issu des k -èmes groupes d'homologie du complexe simplicial filtré fini \mathbb{K} . Dans ce contexte, les rangs de $v_i^j : H_k(K^i) \rightarrow H_k(K^j)$ sont appelés les nombres de Betti persistants, notés $\beta_k^{i,j}$. Rappelons que dans ce cas, ces nombres suffisent à caractériser le module de persistance à isomorphisme près (proposition 1.4.10).

Le nombre $\beta_k^{i,j}$ représente le nombre de classes d'homologie de K^i qui ne sont toujours pas des bords dans K^j . Plus précisément, on écrit

$$v_i^j : Z_k(K^i) / B_k(K^i) \rightarrow Z_k(K^j) / B_k(K^j).$$

Le noyau de cette application est formé par les cycles de $Z_k(K^i)$ qui sont des bords dans K^j . Autrement dit, $\ker v_i^j = Z_k(K^i) \cap B_k(K^j)$. Par le théorème d'isomorphisme, on obtient :

$$\text{Im}(v_i^j) \simeq Z_k(K^i) / Z_k(K^i) \cap B_k(K^j),$$

et le nombre de Betti persistant se réécrit alors

$$\beta_k^{i,j} = \dim Z_k(K^i) / Z_k(K^i) \cap B_k(K^j).$$

3.2 Algorithme de persistance

Les résultats de cette partie proviennent de [9].

3.2.1 Calcul des nombres de Betti

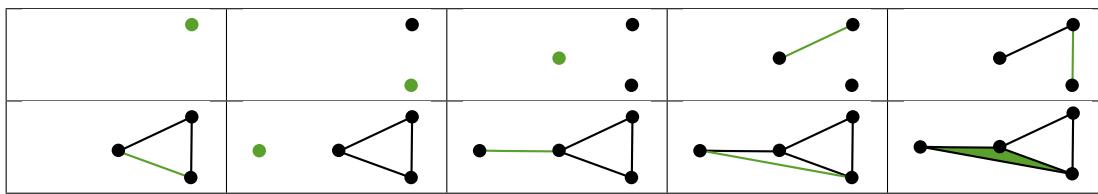
On considère toujours le complexe simplicial filtré fini

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^n = K.$$

On suppose de plus que les simplexes sont ajoutés un par un : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$K^i = K^{i-1} \cup \{\sigma^i\}.$$

La figure suivante est un exemple d'une telle filtration :



On dira qu'un simplexe $\sigma \in K^i$ est contenu dans une chaîne $c = \sum_{\nu \in K^i} \epsilon_\nu \nu$ de K^i si $\epsilon_\sigma = 1$.

On dira aussi que deux chaînes c, c' de K^i sont homologues dans K^i si leur différence est un bord de K^i .

Soit d la dimension de K . Nous allons décrire un algorithme qui permet de calculer les nombres de Betti β_0, \dots, β_d de K .

Définition 3.2.1. Soit $\sigma^i \in K^i \setminus K^{i-1}$ et k sa dimension. On dira que σ^i est :

- positif s'il est contenu dans un k -cycle de K^i ,
- négatif sinon.

Le lemme suivant montre qu'un simplexe positif créé une nouvelle classe de $H_k(K^i)$ (linéairement indépendante l'image de $H_k(K^{i-1}) \hookrightarrow H_k(K^i)$).

Lemme 3.2.2. Supposons que σ^i soit positif, contenu dans le k -cycle c de K^i . Alors c n'est pas homologue (dans K^i) à un k -cycle de K^{i-1} .

Démonstration. Puisque $(K_j)_j$ est une filtration, on sait déjà que σ^i n'est pas la face d'un simplexe de K^i (on vient de l'ajouter). En particulier, σ^i n'est contenu dans aucun bord de K^i . Maintenant, supposons par l'absurde qu'il existe un k -cycle c' de K^{i-1} qui soit homologue à c . Alors $c + c'$ est un bord. Mais puisque σ^i est contenu dans $c + c'$, on est en contradiction avec la remarque précédente. \square

Le lemme suivant montre qu'un simplexe négatif détruit une classe de $H_k(K^{i-1})$.

Lemme 3.2.3. Supposons que σ^i soit négatif. Alors le cycle $\partial\sigma^i$ n'est pas un bord de K^{i-1}

Démonstration. Puisque $(K_j)_j$ est une filtration, $\partial\sigma^i$ est bien inclus dans K^{i-1} . Supposons par l'absurde que $\partial\sigma^i$ soit un bord de K^{i-1} , c'est à dire qu'il existe une k -chaîne c de K^{i-1} telle que $\partial\sigma^i = \partial c$. On obtient $\partial(c + \sigma^i) = 0$, et donc un cycle $c + \sigma^i$ qui contient σ^i . Cela contredit la négativité de σ^i . \square

On est maintenant capable de suivre l'évolution de l'homologie de K au cours de la filtration :

Proposition 3.2.4. On considère le simplexe $\sigma^i \in K^i \setminus K^{i-1}$ et k sa dimension.

- si σ^i est positif, alors $\beta_k(K^i) = \beta_k(K^{i-1}) + 1$,

— sinon, $\beta_{k-1}(K^i) = \beta_{k-1}(K^{i-1}) - 1$.

Démonstration. Si σ^i est positif : nous venons de voir que dans ce cas, $\beta_k(K^i) \geq \beta_k(K^{i-1}) + 1$. Pour montrer l'égalité, choisissons deux k -cycles c et c' de K^i qui contiennent σ^i . Le cycle $c + c'$ ne contient pas σ^i , c'est donc un cycle de K^{i-1} . La famille (c, c') n'est donc pas linéairement indépendante à une base de $H_k(K^{i-1})$. On a donc $\dim H_k(K^i) \leq H_k(K^{i-1}) + 1$. Si σ^i est négatif : nous avons aussi vu que $\beta_{k-1}(K^i) \leq \beta_{k-1}(K^{i-1}) - 1$. Pour montrer l'égalité, il suffit de remarquer que deux cycles homologues à $\partial\sigma^i$ dans K^i sont aussi homologues entre eux. On a donc $\dim H_k(K^i) \geq H_k(K^{i-1}) - 1$, ce qui conclut. \square

Ainsi, si l'on est en mesure de tester la positivité ou négativité d'un simplexe (voir remarque 3.2.9), alors l'algorithme suivant permet de calculer les nombres de Betti désirés.

Data: Un complexe simplicial filtré K de dimension d composé de n simplexes.

Réultat: Ses nombres de Betti β_0, \dots, β_d .

$\beta_0 \leftarrow 0, \dots, \beta_d \leftarrow 0$;

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$k = \dim(\sigma^i)$;

if σ^i est positif **then**

$\beta_k(K^i) \leftarrow \beta_k(K^i) + 1$;

else

$\beta_{k-1}(K^i) \leftarrow \beta_{k-1}(K^{i-1}) - 1$;

end

end

3.2.2 Nombres de Betti persistants

Pour calculer les nombres de Betti persistants de la filtration \mathbb{K} , nous allons adapter l'algorithme précédent, pour qu'il prenne en compte les temps de naissance et de mort des cycles. Pour cela, nous allons construire, pour tout $i \leq n$ et $k \leq d$, un ensemble de cycles

$$\mathcal{B}_k^i = \{c_1, \dots, c_{n_i}\},$$

qui forment une base de $H_k(K^i)$, et tels que tout changement de base \mathcal{B}_k^i à \mathcal{B}_k^{i+1} se fasse par ajout ou suppression d'un cycle (en fonction de la positivité ou négativité du simplexe ajouté).

Le lemme suivant, de [9], donne un choix judicieux pour ces cycles :

Lemme 3.2.5. Soit $\sigma^i \in K^i \setminus K^{i-1}$ un k simplexe positif. Alors il existe un unique k -cycle c de K^i tel que :

- c ne soit pas un bord dans K^i ,
- c contienne σ^i , et
- c ne contienne pas d'autre simplexe positif.

Pour un simplexe positif σ^i , on notera alors c_i cet unique cycle associé.

Décrivons maintenant l'algorithme. Soit $i \leq 0$, et supposons que les bases \mathcal{B}_l^{i-1} de $H_l(K^{i-1})$ aient été construites ($l = 1, \dots, d$). On a affaire au nouveau simplexe $\sigma^i \in K^i \setminus K^{i-1}$. Soit k sa dimension.

Si σ^i est positif, alors il correspond à un unique cycle c défini par la proposition 3.2.5, que l'on ajoute à la base \mathcal{B}_k^{i-1} :

$$\mathcal{B}_k^i = \mathcal{B}_k^{i-1} \cup \{c_i\}$$

Les résultats de la partie 3.2.1 montrent que \mathcal{B}_k^i est bien une base de $H_k(K^i)$.

Si σ^i est négatif, nous allons retirer un simplexe de la base \mathcal{B}_{k-1}^{i-1} . Notons $\mathcal{B}_{k-1}^{i-1} = \{\nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_J}\}$. D'après le lemme 3.2.3, $\partial\sigma^i$ n'est pas un bord de K^{i-1} . On peut donc l'écrire :

$$\partial\sigma^i = \sum_{j=i_1, \dots, i_J} \epsilon_j \nu_j + b,$$

où les ϵ_j sont uniques et non tous nuls, et b est un bord de K^{i-1} . Soit $l(i)$ le plus grand indice tel que $\epsilon_{l(i)}$ soit non nul. Alors $\sigma^{l(i)}$ est un simplexe positif, et on choisit de retirer son cycle correspondant de \mathcal{B}_{k-1}^{i-1} :

$$\mathcal{B}_{k-1}^i = \mathcal{B}_{k-1}^{i-1} \setminus \{c_{l(i)}\}.$$

De même, \mathcal{B}_{k-1}^i est bien une base de $H_{k-1}(K^i)$

Remarque 3.2.6. L'indice $l(i)$ ainsi défini répond au principe suivant : si un simplexe doit effacer un cycle qui s'écrit comme somme de plusieurs éléments de la base \mathcal{B}_{k-1}^{i-1} , alors on choisi de supprimer l'élément qui est arrivé le plus tard.

Voici l'algorithme écrit en pseudo-code :

Data: Un complexe simplicial filtré K de dimension d composé de n simplexes.

Résultat: Les ensembles de paires persistantes L_1, \dots, L_d .

$L_1 \leftarrow \emptyset, \dots, L_d \leftarrow \emptyset;$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$k = \dim(\sigma^i);$
if σ^i est négatif **then**
 $| L_k \leftarrow L_k \cup \{(\sigma^{l(j)}, \sigma^j)\};$
end

end

Définition 3.2.7. Les couples $(\sigma^{l(j)}, \sigma^j)$ ainsi définis sont appelés paires persistantes.

Réciproquement, pour tout indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que σ^i soit un simplexe positif, on note $c(i)$ l'indice du simplexe $\sigma^{c(i)}$ tel que $(\sigma^i, \sigma^{c(i)})$ soit une paire persistante. Si un tel indice n'existe pas, on pose $c(i) = +\infty$.

Par construction de l'algorithme, on obtient donc les nombres de Betti persistants par

$$\beta_k^{i,j} = \{i \leq a \text{ tel que } \sigma^i \text{ soit un } k\text{-simplexe positif et } c(i) > b\}.$$

On en déduit :

Proposition 3.2.8. Le module de persistance \mathbb{V} du k -ème groupe d'homologie se décompose en

$$\mathbb{V} = \bigoplus \mathbb{I}([i, c(i)]),$$

où la somme porte sur les indices i tels que σ^i soit un k -simplexe positif.

Démonstration. On sait que le module \mathbb{V} se décompose en une somme finie $\mathbb{V} = \bigoplus \mathbb{I}(a_i, b_i)$ sur \mathbb{N} . D'après la proposition 1.4.10, le nombre d'intervalles $([a, b])$ dans cette décomposition est :

$$\beta_k^{a,b-1} - \beta_k^{a,b} + \beta_k^{a-1,b} - \beta_k^{a-1,b-1}.$$

Or

$$\beta_k^{a,b-1} - \beta_k^{a,b} = \{i \leq a \text{ tel que } \sigma^i \text{ soit un } k\text{-simplexe positif et } c(i) = b\},$$

$$\beta_k^{a-1,b} - \beta_k^{a-1,b-1} = \{i \leq a-1 \text{ tel que } \sigma^i \text{ soit un } k\text{-simplexe positif et } c(i) = b\}.$$

On déduit $\beta_k^{a,b-1} - \beta_k^{a,b} + \beta_k^{a-1,b} - \beta_k^{a-1,b-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^a \text{ est un } k\text{-simplexe positif tel que } c(i) = b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

□

Remarque 3.2.9. Tel quel, l'algorithme n'est pas utilisable puisqu'il faut encore savoir tester la positivité d'un simplexe et trouver l'indice $l(i)$ en question. En fait, une des versions actuellement utilisées de cet algorithme consiste à transformer le problème en la réduction d'une matrice de bord.

Nous présentons maintenant une réalisation de cette algorithme. Le dernier simplexe ajouté est représenté en vert.

i	K^i	Positivité	β_0	\mathcal{B}_0^i	β_1	\mathcal{B}_1^i
1		+	1	σ_1	0	
2		+	2	σ_1, σ_2	0	
3		+	3	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	0	
4		-	2	σ_1, σ_3	0	
5		-	1	σ_1	0	
6		+	1	σ_1	1	$\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$
7		+	2	σ_1, σ_7	1	$\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$
8		-	1	σ_1	1	$\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$
9		+	1	σ_1	2	$\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6,$ $\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_8 + \sigma_9$
10		-	1	σ_1	1	$\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$

3.3 Complexe de Čech

3.3.1 Théorème du nerf persistant

Souvent, la construction d'un complexe simplicial est un intermédiaire permettant de calculer l'homologie persistante d'un espace topologique sous-jacent. Dans cette partie, nous discuterons du théorème du nerf, qui permet d'établir un pont entre ces deux espaces.

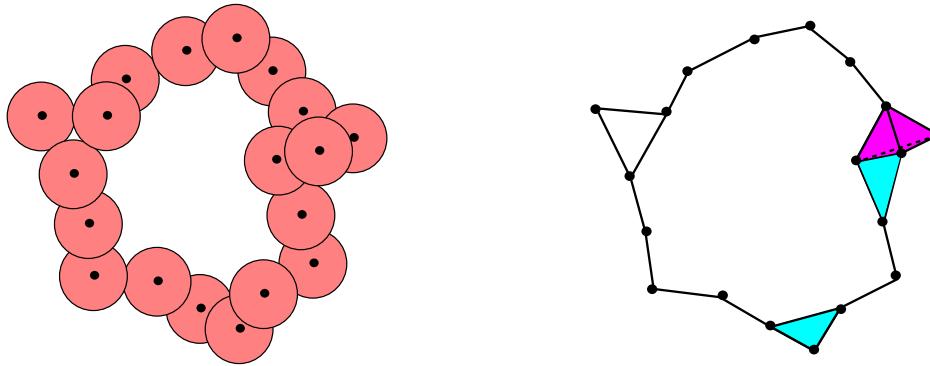
Considérons un espace topologique E , et $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert (éventuellement infini).

Définition 3.3.1. On dit que le recouvrement \mathcal{U} est un bon recouvrement si chaque intersection finie $\bigcap_{j \in J \subset I} U_j$ est soit vide soit contractiles.

En particulier, si E est un espace métrique et les U_i des convexes, alors \mathcal{U} est un bon recouvrement.

Définition 3.3.2. Le nerf du recouvrement \mathcal{U} , noté $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, est un complexe simplicial abstrait, construit sur l'ensemble de sommets I , et tel qu'un sous-ensemble $J \subset I$ soit un simplexe de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ si et seulement $\bigcap_{j \in J \subset I} U_j \neq \emptyset$

La figure suivante représente le nerf d'un recouvrement par des boules. On voit apparaître dans le complexe simplicial six simplexes de dimension 2 et un de dimension 3.



Énonçons tout de suite le théorème du nerf dans sa version classique (par exemple dans [10]) :

Théorème 3.3.3. Si E est paracompact et \mathcal{U} est un bon recouvrement, alors $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ est du même type d'homotopie que E .

Autrement dit, si l'on a calculé les groupes d'homologie simpliciale du nerf d'un de ses bon recouvrements \mathcal{U} , alors on connaît aussi les groupes d'homologie singulière de l'espace E .

L'application classique de ce théorème est la suivante : soit X^t le voisinage tubulaire d'un ensemble fini de points $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$. Alors X^t est recouvert par $\mathcal{U} = \{B(x_i, t)\}_{i \leq n}$. Dans ce cadre, le nerf de \mathcal{U} est appelé complexe de Čech de X et paramètre t . On le note

$$\check{\text{C}}\text{ech}^t(X) := \mathcal{N}(\mathcal{U}).$$

Le théorème du nerf fournit une équivalence d'homotopie, c'est à dire deux applications applications continues $X^t \xrightarrow{\phi} \check{\text{C}}\text{ech}^t(X)$ et $\check{\text{C}}\text{ech}^t(X) \xrightarrow{\psi} X^t$, telles que l'on obtienne les diagrammes suivants au niveau homologique :

$$\begin{array}{ccc} H_*(X^t) & \xrightarrow{\Phi} & H_*(\check{\text{C}}\text{ech}^t(X)) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \Psi \\ & & H_*(X^t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H_*(\check{\text{C}}\text{ech}^t(X)) & \xrightarrow{\Psi} & H_*(X^t) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \Phi \\ & & H_*(\check{\text{C}}\text{ech}^t(X)) \end{array}$$

Maintenant, nous voulons comparer les structures de modules de persistance $(H_*(X^t))_{t \geq 0}$ et $H_*(\check{\text{Cech}}^t(X))_{t \geq 0}$. Faisons varier le paramètre t . Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, le théorème donne aussi des applications ϕ_s et ψ_s comme précédemment. Pour montrer un isomorphisme entre ces deux modules, il suffirait d'avoir des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X^s & \xhookrightarrow{\quad} & X^t \\ \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_t \\ \check{\text{Cech}}^s(X) & \xhookrightarrow{\quad} & \check{\text{Cech}}^t(X) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X^s & \xhookrightarrow{\quad} & X^t \\ \psi_s \uparrow & & \psi_t \uparrow \\ \check{\text{Cech}}^s(X) & \xhookrightarrow{\quad} & \check{\text{Cech}}^t(X) \end{array}$$

ce qui n'est pas donné a priori.

Le lemme suivant, de [11], indique comment choisir de bonnes homotopies :

Lemme 3.3.4. Soient $E \subset E'$ deux espaces paracompacts, et $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{U}' = \{U'_i\}_{i \in I}$ deux bon recouvrements ouverts tels que $\forall i \in I, U_i \subset U'_i$. Alors il existe deux équivalences d'homotopie $E \xrightarrow[\psi]{\phi} \mathcal{N}(\mathcal{U})$ et $E' \xrightarrow[\psi']{\phi'} \mathcal{N}(\mathcal{U}')$ telles que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{\quad} & E' \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ \mathcal{N}(\mathcal{U}) & \xhookrightarrow{\quad} & \mathcal{N}(\mathcal{U}') \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{\quad} & E' \\ \psi \uparrow & & \psi' \uparrow \\ \mathcal{N}(\mathcal{U}) & \xhookrightarrow{\quad} & \mathcal{N}(\mathcal{U}') \end{array}$$

En fait, la démonstration de ce lemme donne même un résultat plus précis :

Théorème 3.3.5. Les modules de persistance $(H_*(X^t))_{t \geq 0}$ et $H_*(\check{\text{Cech}}^t(X))_{t \geq 0}$ sont isomorphes.

3.3.2 Complexe de Vietoris-Rips

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$. On vient de voir que le calcul de la persistance de ce nuage de points se réduit à celui de son complexe de Čech. Toutefois, en pratique, la construction de ce complexe requiert le prédictat géométrique :

Est-ce que les n boules $B(x_1, t), \dots, B(x_n, t)$ s'intersectent ?

Ceci n'est pas aisément implémentable, et on préfère parfois une version approchée du complexe de Čech : le complexe de Vietoris-Rips, $\text{Rips}^t(X)$.

Définition 3.3.6. Le complexe de Rips $\text{Rips}^t(X)$ est le complexe simplicial d'ensemble de sommets X et tel que pour tout $I \subset X$, $I \in \text{Rips}^t(X)$ si et seulement si pour tout $\{a, b\} \subset I$, $\|b - a\| \leq t$.

En fait, $\text{Rips}^t(X)$ est le complexe de clique du 1-squelette du complexe de $\check{\text{Cech}}^{\frac{t}{2}}(X)$:

Définition 3.3.7. Soit G un graphe d'ensemble de sommets V . Le complexe de clique de G est le complexe simplicial $X(G)$ construit sur V tel que pour tout sous-ensemble $I \subset V$, $I \in X(G)$ si et seulement si toutes les paires $\{a, b\} \subset I$ sont des arêtes de G .

On peut observer à gauche un complexe simplicial, et à droite le complexe de Rips correspondant :



On peut comparer ces deux complexes de la façon suivante :

Proposition 3.3.8. Pour tout $t \geq 0$, on a les inclusions suivantes entre complexes simpliciaux :

$$\check{\text{Cech}}^{\frac{t}{2}}(X) \subset \text{Rips}^t(X) \subset \check{\text{Cech}}^t(X)$$

Démonstration. La première inclusion vient de la remarque précédente : si un simplexe $I \subset X$ appartient à $\check{\text{Cech}}^{\frac{t}{2}}(X)$, alors en particulier ses points sont à distance plus petite que $\frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t$. I est donc aussi un simplexe de $\text{Rips}^t(X)$.

Pour la seconde, soit I un simplexe de $\text{Rips}^t(X)$, et $x \in I$ un point quelconque. Par définition, tout autre point $y \in I$ vérifie $\|x - y\| \leq t$. Autrement dit, chaque boule $B(y, t)$ contient x . I est donc aussi un simplexe de $\check{\text{Cech}}^t(X)$. \square

On obtient ainsi des morphismes entre les groupes d'homologie :

$$\begin{array}{ccc} H_*(\check{\text{Cech}}^t(X)) & \longrightarrow & H_*(\check{\text{Cech}}^{2t}(X)) \\ \downarrow & \nearrow & \\ H_*(\text{Rips}^{2t}(X)) & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H_*(\text{Rips}^t(X)) & \longrightarrow & H_*(\text{Rips}^{2t}(X)) \\ \downarrow & \nearrow & \\ H_*(\check{\text{Cech}}^t(X)) & & \end{array}$$

Selon notre définition, ceci n'est pas un entrelacement entre les modules $H_*(\check{\text{Cech}}^t(X))_{t \geq 0}$ et $H_*(\text{Rips}^t(X))_{t \geq 0}$. On pourrait toutefois considérer que c'est un entrelacement en échelle logarithmique :

Définition 3.3.9. Soit $\mathbb{U} = (U_t, u_s^t)_{s \leq t \in \mathbb{R}^+}$ et $\mathbb{V} = (V_t, v_s^t)_{s \leq t \in \mathbb{R}^+}$ deux modules de persistance. On appelle ϵ -entrelacement en échelle logarithmique entre \mathbb{U} et \mathbb{V} tout ϵ -entrelacement entre les modules de persistance $\mathbb{U}^{\log} = (U_{e^t})_{t \in \mathbb{R}}$ et $\mathbb{V}^{\log} = (V_{e^t})_{t \in \mathbb{R}}$.

La distance d'entrelacement en échelle logarithmique est notée $d_i^{\log}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$. On peut vérifier qu'elle correspond à la distance bottleneck entre les images des diagrammes de persistance de \mathbb{U} et \mathbb{V} par l'application $(a, b) \mapsto (\log(a), \log(b))$.

Dans notre cas, les diagrammes commutatifs précédents se transforment, par le changement de variable $t \mapsto e^t$, en :

$$\begin{array}{ccc} H_*(\check{\text{Cech}}(X))_t^{\log} & \longrightarrow & H_*(\check{\text{Cech}}(X))_{\log(2)+t}^{\log} \\ \downarrow & \nearrow & \\ H_*(\text{Rips}(X))_{\log(2)+t}^{\log} & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H_*(\text{Rips}(X))_t^{\log} & \longrightarrow & H_*(\text{Rips}(X))_{\log(2)+t}^{\log} \\ \downarrow & \nearrow & \\ H_*(\check{\text{Cech}}(X))_t^{\log} & & \end{array}$$

Autrement dit, $H_*(\check{\text{Cech}}(X))_t^{\log}$ et $H_*(\text{Rips}(X))_t^{\log}$ sont $\log(2)$ -entrelacés. Par définition, on dit donc que $H_*(\check{\text{Cech}}^t(X))$ et $H_*(\text{Rips}^t(X))$ sont $\log(2)$ -entrelacés en échelle logarithmique.

3.4 Stabilité

Nous allons développer dans cette partie quelques outils permettant de comparer les complexes de Čech et Rips lorsqu'on les perturbe.

3.4.1 Applications ϵ -simpliciales

Les résultats suivants sont tirés de [12]. On considère deux complexes simpliciaux K et L , X et Y leurs ensemble de sommets.

Définition 3.4.1. Une application simpliciale entre K et L est une application $f : X \rightarrow Y$ telle que l'image de tout simplexe de K soit un simplexe de L .

Soient maintenant $\mathbb{K} = (K^t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $\mathbb{L} = (L^t)_{t \in \mathbb{R}}$ des filtrations de K et L .

Définition 3.4.2. Pour $\epsilon \geq 0$, une application ϵ -simpliciale entre \mathbb{K} et \mathbb{L} est une application $f : X \rightarrow Y$ telle pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application induite $f : K^t \rightarrow L^{t+\epsilon}$ soit simpliciale.

Notons dès à présent qu'une telle application induit un ϵ -morphisme entre les modules de persistance $H_*(\mathbb{K})$ et $H_*(\mathbb{L})$.

Dans suite nous allons travailler avec des applications multivaluées. Une application multivaluée entre X et Y , notée $C : X \rightrightarrows Y$, est un sous-ensemble $C \subset X \times Y$ telle que $\pi_X(C) = X$, où $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ est la projection. Si $\sigma \subset X$, son image par C est l'ensemble

$$C(\sigma) = \{y \text{ tel que } (x, y) \in C \text{ et } x \in \sigma\}.$$

On dira qu'un application (univoque) $f : X \rightarrow Y$ est subordonnée à C si pour tout $x \in X$, $(x, f(x)) \in C$. Dans ce cas, on note $f : X \xrightarrow{C} Y$.

Définition 3.4.3. Un application multivaluée ϵ -simpliciale entre \mathbb{K} et \mathbb{L} est une application multivaluée $C : X \rightrightarrows Y$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout simplexe $\sigma \in K^t$, tout sous-ensemble fini de $C(\sigma)$ soit un simplexe de $L^{t+\epsilon}$.

Proposition 3.4.4. A toute application multivaluée ϵ -simpliciale $C : X \rightrightarrows Y$ correspond un ϵ -morphisme canonique entre les modules de persistance, noté $H(C)$: pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$H(C)_t : H_*(\mathbb{K}^t) \rightarrow H_*(\mathbb{L}^{t+\epsilon}).$$

Celui-ci est induit par toute application subordonnée $f : X \xrightarrow{C} Y$.

Démonstration. Soient $f_1, f_2 : X \xrightarrow{C} Y$. Il suffit de montrer qu'elles induisent les mêmes morphismes $H_*(K^t) \rightarrow H_*(\mathbb{L}^{t+\epsilon})$ entre les groupes d'homologie. Il suffit pour cela de montrer que f_1 et f_2 sont contigües, c'est à dire que pour tout simplexe $\sigma \in K^t$, $f_1(\sigma) \cup f_2(\sigma)$ est un simplexe de $L^{t+\epsilon}$ (proposition A.3.3). Or ceci est donné par la définition précédente. \square

Étant données deux application multivaluées $C : X \rightrightarrows Y$ et $D : Y \rightrightarrows Z$, on définit la composition $D \circ C$ par

$$D \circ C = \{(x, z) \in X \times Z, \exists y \in Y, (x, y) \in C \text{ et } (y, z) \in D\}.$$

Proposition 3.4.5. Soient $\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{M}$ trois complexes simpliciaux filtrés et X, Y, Z leurs ensembles de sommets. Soient aussi $C : X \rightrightarrows Y$ ϵ -simpliciale et $D : Y \rightrightarrows Z$ δ -simpliciale. Alors la composée $D \circ C : X \rightrightarrows Z$ est une application multivaluée $(\epsilon + \delta)$ -simpliciale, et on a :

$$H(D \circ C) = H(D) \circ H(C).$$

Démonstration. Par définition, $D \circ C$ est bien $(\epsilon + \delta)$ -simpliciale. Pour montrer le second points, soient $f : X \xrightarrow{C} Y$ et $g : Y \xrightarrow{D} Z$ des applications subordonnées. Alors l'application composée $g \circ f$ est subordonnée à $D \circ C$. Par fonctorialité de l'homologie simpliciale, on obtient $H(D \circ C) = H(D) \circ H(C)$. \square

3.4.2 Correspondances

Soit toujours $C : X \rightrightarrows Y$ une application multivaluée. On appellera transposée de C , notée C^T , l'ensemble

$$C^T = \{(y, x) \text{ tel que } (x, y) \in C\}.$$

C^T n'est pas a priori une application multivaluée.

Définition 3.4.6. Si la transposée C^T est bien une application multivaluée, alors on dit que C est une correspondance.

Proposition 3.4.7. Soit C est une correspondance telle que C et C^T soient ϵ -simpliciales entre \mathbb{K} et \mathbb{L} . Alors $H(C)$ et $H(C^T)$ forment un ϵ -entrelacement entre les modules de persistance $H_*(\mathbb{K})$ et $H_*(\mathbb{L})$.

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'alors les applications id_X et id_Y sont subordonnées à $C^T \circ C$ et $C \circ C^T$. Par la proposition 3.4.5, on a donc $H(C) \circ H(C^T) = \text{id}$ et $H(C^T) \circ H(C) = \text{id}$. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} H_*(K^t) & \longrightarrow & H_*(K^{t+2\epsilon}) \\ H(C)_t \downarrow & \nearrow H(C^T)_{t+\epsilon} & \\ H_*(L^{t+\epsilon}) & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H_*(L^t) & \longrightarrow & H_*(L^{t+2\epsilon}) \\ H(C^T)_t \downarrow & \nearrow H(C)_{t+\epsilon} & \\ H_*(K^{t+\epsilon}) & & \end{array}$$

Ceci montre que l'on a bien affaire à un ϵ -entrelacement. \square

Exemple 3.4.8. Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ à distance de Hausdorff plus petite que ϵ . Alors la proposition précédente montre que les modules de persistance des complexes de Čech $(H_*(\check{\text{Cech}}^t(X))_{t \geq 0}$ et $(H_*(\check{\text{Cech}}^t(Y))_{t \geq 0}$ sont ϵ -entrelacés.

En effet, l'application multivaluée $C = \{(x, y) \in X \times Y, \|y - x\| \leq \epsilon\}$ est une correspondance. On vérifie immédiatement que C et C^T sont ϵ -simpliciales.

Remarquons ici que l'on pouvait directement montrer l'entrelacement de l'exemple précédent, en utilisant le théorème du nerf persistant et les inclusions $X^t \subset Y^{t+\epsilon} \subset X^{t+2\epsilon}$.

3.4.3 Stabilité en Gromov-Hausdorff

On considère dans cette partie deux espaces métriques compacts (X, d_X) et (Y, d_Y) . Pour toute correspondance $C : X \rightrightarrows Y$, on définit sa distorsion :

$$\text{dist}(C) = \sup\left\{\frac{1}{2}|d_X(x, x') - d_Y(y, y')|, (x, y), (x', y') \in C\right\}.$$

Dans ce contexte, la distance de Gromov-Hausdorff entre X et Y s'écrit

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{\text{dist}(C) \text{ pour } C : X \rightrightarrows Y \text{ correspondance}\}.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.4.9. Pour tout $\epsilon > 2d_{GH}(X, Y)$, les modules de persistance des complexes de Čech $(H_*(\check{\text{Cech}}^t(X))_{t \geq 0}$ et $(H_*(\check{\text{Cech}}^t(Y))_{t \geq 0}$ sont ϵ -entrelacés.

Démonstration. Soit $C : X \rightrightarrows Y$ de distorsion plus petite que ϵ . Choisissons σ un simplexe de $\check{\text{Cech}}^t(X)$, et ν un sous-ensemble fini de $C(\sigma)$. Il faut montrer que ν est un simplexe de $\check{\text{Cech}}^{t+\epsilon}(Y)$.

Soit \bar{x} un point de X tel que $\bar{x} \in \bigcap_{x \in \sigma} B(x, t)$. On a que $\forall x \in \sigma, d_X(x, \bar{x}) \leq t$. Choisissons $\bar{y} \in C(x)$. En utilisant la distorsion de C , il vient que pour tout $y \in \nu$,

$$\begin{aligned} d_Y(y, \bar{y}) &\leq d_X(x, \bar{x}) + \epsilon \\ &\leq t + \epsilon. \end{aligned}$$

On a donc montré que $\bar{y} \in \bigcap_{y \in \nu} B(y, t + \epsilon)$. Autrement dit, $\nu \in \check{\text{Cech}}^{t+\epsilon}(Y)$, et C est bien ϵ -simpliciale. Par symétrie, C^T l'est aussi. Il suffit alors d'appliquer la proposition 3.4.7. \square

4 Distance à la mesure

4.1 Introduction

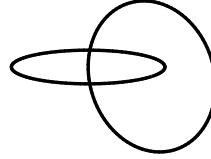
Dans les parties précédentes, nous avons vu comment estimer le diagramme de persistance d'un compact K de \mathbb{R}^d à partir d'un nuage fini de points X qui l'échantillonne.

Notons $\mathbb{V}_K = \mathbb{V}_{d_K}$ et $\mathbb{V}_X = \mathbb{V}_{d_X}$ les modules de persistance de l'homologie simpliciale des sous-niveaux des fonctions distance d_K et d_X . Si la distance de Hausdorff entre ces compacts est $d_H(K, X) = \epsilon$ alors, en vertu de la proposition 2.5.3, on a :

$$d_b(\mathbb{V}_K, \mathbb{V}_X) \leq \epsilon.$$

Nous avons aussi vu que le module \mathbb{V}_X est isomorphe au module de persistance construit sur l'homologie simpliciale du complexe Čech^t(X) (corollaire 3.3.5), et que nous disposons d'un algorithme pour calculer son diagramme de persistance. Quand le complexe est trop grand, on peut aussi utiliser des alternatives moins couteuses que Čech^t(X), comme le complexe de Rips.

Ceci constitue la démarche habituelle en analyse topologique des données. Considérons par exemple l'union de deux cercles plongés dans \mathbb{R}^3 :

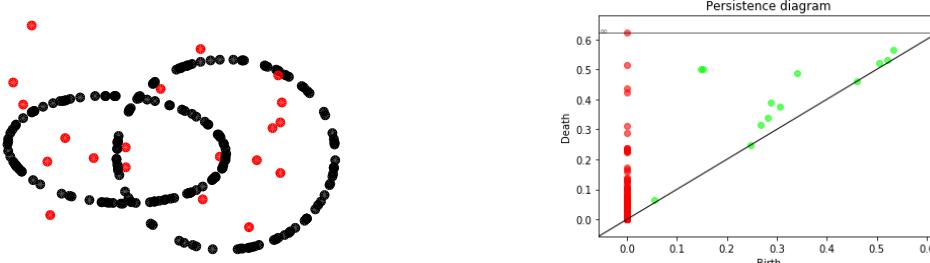


A partir d'un échantillon (ici 200 points), le complexe de Rips permet une restitution fidèle du diagramme de persistance de la fonction distance associée :



(les points de H_0 sont en rouge et ceux de H_1 en vert)

Par contre, cette méthode échoue fatalement lorsque l'échantillon comporte des points aberrants. Par exemple, nous avons ajouté ici un échantillon de 20 points uniformément distribués dans le pavé :



Les résultats précédents sont mis en défaut car la distance $d_H(K, X) = \|d_K - d_X\|_\infty$ n'est plus contrôlée.

Pour remédier à ce problème, il faut remplacer la distance d_X par une fonction qui serait robuste au bruit. C'est le dessein de la distance à la mesure, une fonction qui tient compte de la densité de la distribution de points X .

La distance à la mesure ouvre aussi une nouvelle porte : l'estimation topologique à partir de mesures.

4.2 Définition

On considère une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^d , et un paramètre $m \in [0, 1]$. Soit un point $x \in \mathbb{R}^d$. Pour raisonner par analogie, rappelons que la distance de x à un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ est le plus petit rayon $r \geq 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}(x, r)$ intersecte K . Pour comparer x à la mesure μ , il est naturel de s'intéresser à la quantité :

$$\delta_{\mu,m}(x) = \inf\{r \geq 0, \mu(\overline{B}(x, r)) > m\}.$$

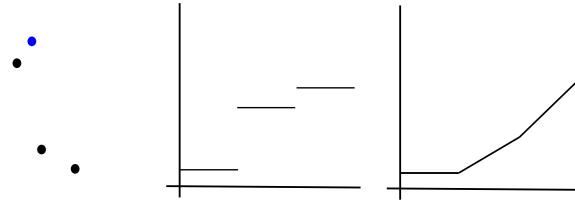
Toutefois, cette fonction n'est pas encore un bon candidat pour l'estimation topologique : elle n'est stable en fonction de μ . Par exemple, considérons les points 0 et 1 de la droite réelle, $\epsilon \in [0, 1]$, et le mélange de mesure de Dirac $\mu = \epsilon\delta_0 + (1 - \epsilon)\delta_1$. Choisissons le paramètre $m = 1/2$. Si $\epsilon > \frac{1}{2}$ la fonction $\delta_{\mu,m}$ coïncide avec $x \mapsto |x|$, tandis que si $\epsilon < \frac{1}{2}$, c'est avec $x \mapsto |1 - x|$.

La distance à la mesure μ se définit comme une moyenne quadratique des fonction $\delta_{\mu,m}$.

Définition 4.2.1. Soit $m_0 \in [0, 1]$. La distance à la mesure μ de paramètre de masse m_0 est la fonction :

$$\begin{aligned} d_{\mu,m_0} : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{1}{m_0} \int_0^{m_0} \delta_{\mu,m}^2(x) dm} \end{aligned}$$

La figure suivante représente un point $x \in \mathbb{R}^2$ (en bleu) et une mesure μ , somme de trois mesures de Dirac (en noir). Le premier graphe est celui de la fonction $m \mapsto \delta_{\mu,m}(x)$, et le deuxième est celui de $m \mapsto d_{\mu,m}(x)$. On y observe l'effet régularisant de la définition de $d_{\mu,m}$.



Cas d'un nuage de points : Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ un nuage fini de points, et $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$. Pour tout réel $m \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors la fonction $\delta_{\mu,m}$ associe à chaque x sa distance avec son k -ème plus proche voisin dans X (sans s'inclure lui-même). On note p_k^x ce voisin.

Si $m_0 = \frac{k_0}{n}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} d_{\mu,m_0}(x) &= \frac{1}{m_0} \int_0^{m_0} \delta_{\mu,m}^2(x) dm \\ &= \frac{1}{m_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{n} \delta_{\mu,\frac{k}{n}}^2 = \frac{1}{k_0} \sum_{k=1}^{k_0} \|x - p_k^x\|^2. \end{aligned}$$

Le calcul de la distance à la mesure dans ce cas se réduit à une recherche de plus proches voisins.

Nous verrons dans la partie 4.4.1 une façon explicite de calculer ses sous-niveaux.

4.3 Régularité et stabilité

Cette partie est basée sur [7].

4.3.1 Lien avec les distances de Wasserstein

Nous allons établir un lien entre la distance à la mesure et un problème de transport. Soient μ et ν deux mesures sur \mathbb{R}^d de même masse. On appelle plan de transport entre μ et ν toute variable aléatoire $\pi = (X, Y)$ sur l'espace mesuré produit $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ telle que X soit de loi μ et Y de loi ν . On note $\Gamma(\mu, \nu)$ l'ensemble des plans de transport.

Définition 4.3.1. La 2-ème distance de Wasserstein entre μ et ν est

$$\begin{aligned} W_2(\mu, \nu) &= \inf_{(X, Y) \in \Gamma(\mu, \nu)} \sqrt{\mathbb{E}[\|X - Y\|^2]} \\ &= \inf_{\pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \left(\int \|x - y\|^2 d\pi(x, y) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La distance W_2 est bien définie pour les lois de probabilité admettant un moment d'ordre 2. On sait aussi qu'elle vérifie les axiomes d'une distance.

Définition 4.3.2. On dit qu'une mesure ν est une sous-mesure de μ si on a $\nu \leq \mu$ en tant que fonctions. L'ensemble des sous-mesures de μ est noté $\text{Sub}(\mu)$. Si $m_0 \in \mathbb{R}$, on notera $\text{Sub}_{m_0}(\mu)$ l'ensemble des sous-mesures de masse m_0 .

La distance à la mesure se reformule comme un problème de transport entre des sous-mesures :

Proposition 4.3.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$d_{\mu, m_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \inf\{W_2(m_0 \delta_x, \nu), \nu \in \text{Sub}_{m_0}(\mu)\},$$

et cet infimum est réalisé par une mesure $\nu \in \text{Sub}_{m_0}(\mu)$.

4.3.2 La DTM est une presque-distance

Nous étudions maintenant les propriétés de régularité de la distance à la mesure.

Proposition 4.3.4. La fonction $x \mapsto d_{\mu, m}(x)$ est 1-lipschitzienne.

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\mu_y \in \text{Sub}_m(\mu)$ la sous-mesure donnée par la proposition 4.3.3. On applique l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} d_{\mu, m}(x) &= \frac{1}{\sqrt{m}} W_2(m \delta_x, \mu_y) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{m}} W_2(m \delta_y, \mu_y) + \frac{1}{\sqrt{m}} W_2(\mu_x, \mu_y) \\ &= d_{\mu, m}(y) + \|x - y\|. \end{aligned}$$

On conclut en échangeant les rôles de x et y . \square

On veut maintenant établir la semi-concavité de la distance à la mesure. Pour cela, nous allons utiliser la notion de sous-différentiel. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$. On dit que v est dans le sous-différentiel $\partial_x f$ de f en x si

$$f(x + h) \geq f(x) + \langle h, v \rangle$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ assez petit. On montre que si f admet un sous-différentiel non-vide en tout point de \mathbb{R}^d , alors elle est convexe.

Proposition 4.3.5. La fonction $f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \|x\|^2 - d_{\mu,m}^2(x)$ est convexe.

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\mu_x, \mu_y \in \text{Sub}_m(\mu)$ les sous-mesures données par la proposition 4.3.3. On écrit :

$$\begin{aligned} d_{\mu,m}^2(y) &= \frac{1}{m} W_2(m\delta_y, \mu_y)^2 = \frac{1}{m} \int \|y - h\|^2 d\mu_y(h) \\ &\leq \frac{1}{m} \int \|y - h\|^2 d\mu_x(h) \\ &= \frac{1}{m} \int \|y - x\|^2 + \|x - h\|^2 + 2\langle y - x, x - h \rangle d\mu_x(h) \\ &\leq \|y - x\|^2 + d_{\mu,m}^2(x) + \langle y - x, v \rangle, \end{aligned}$$

avec $v = \frac{2}{m} \int (x - h) d\mu_x(h)$. En utilisant $\|y - x\|^2 = \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle x, y - x \rangle$, il vient que

$$d_{\mu,m}^2(y) - \|y\|^2 \leq d_{\mu,m}^2(x) - \|x\|^2 + \langle y - x, v - 2x \rangle.$$

Ce qui prouve que $2x - v$ est dans le sous-différentiel de f en x . On conclut par caractérisation des fonctions convexes par le sous-différentiel. \square

Enfin, on veut s'assurer que $d_{\mu,m}$ est propre. Puisqu'elle est continue, il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, la préimage $d_{\mu,m}^{-1}([0, a])$ est bornée. C'est vrai par exemple si μ est à support compact K , auquel cas on a l'inégalité :

$$d_{\mu,m}(x) \leq d_H(x, K) \leq \|x\| + d_H(K, \{0\}).$$

En rassemblant les trois propriétés que l'on vient d'énoncer, on obtient :

Corollaire 4.3.6. Si μ est à support compact et $m \in [0, 1[$, alors $d_{\mu,m}$ est une presque-distance.

Comme on l'a vu dans la partie 2.4, on a alors que le module de persistance $\mathbb{V}_{d_{\mu,m}}$ est q-modéré, et les changements de topologie correspondent aux valeurs critiques généralisées de $d_{\mu,m}$.

4.3.3 Stabilité

La distance à la mesure est stable par rapport à la mesure :

Proposition 4.3.7. Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur \mathbb{R}^d . Alors pour tout $m \in [0, 1[$,

$$\|d_{\mu,m} - d_{\nu,m}\|_{\infty} \leq W_2(\mu, \nu).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\mu_m \in \text{Sub}_m(\mu)$ donné par la proposition 4.3.3. On a $\sqrt{m}d_{\mu,m}(x) = W_2(m\delta_x, \mu_m)$. Soit π un plan de transport entre $m\delta_x$ et μ_m .

On peut alors montrer qu'il existe une sous-mesure de π qui soit un plan de transport entre μ_m et une sous-mesure ν_m de ν de masse m . Par définition, on a $W_2(m\delta_x, \mu_m) \leq W_2(m\delta_x, \nu_m)$ et $W_2(\mu_m, \nu_m) \leq W_2(\mu, \nu)$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} d_{\mu,m}(x) &= \frac{1}{\sqrt{m}} W_2(m\delta_x, \mu_m) \leq \frac{1}{\sqrt{m}} W_2(m\delta_x, \nu_m) + \frac{1}{\sqrt{m}} W_2(\nu_m, \mu_m) \\ &\leq d_{\nu,m}(x) + \frac{1}{\sqrt{m}} W_2(\mu, \nu). \end{aligned}$$

En interchangeant les rôles de μ et ν , on obtient le résultat. \square

On finit par un résultat qui relie la distance à la mesure et la distance au support. Si μ est à support compact K , alors on voit par définition que $d_{\mu,0} = d_K$. De plus :

Proposition 4.3.8. On a une convergence uniforme

$$\|d_{\mu,m} - d_K\|_{\infty} \xrightarrow[m \rightarrow 0]{} 0.$$

4.4 Calcul et approximation

Les résultats précédents montrent que si un nuage de points $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ échantillonne suffisamment bien la mesure μ — c'est à dire si la distance de Wasserstein entre μ et la mesure empirique $\mu^X = \frac{1}{n} \sum \delta_{x_i}$ est faible — alors les diagrammes de persistance des distances à la mesure sont proches :

$$d_b(\mathbb{V}_{d_\mu, m}, \mathbb{V}_{d_{\mu^X}, m}) \leq \|d_{\mu, m} - d_{\mu^X, m}\|_\infty \leq W_2(\mu, \nu).$$

Une première question se pose : à quelle vitesse la quantité $\|d_{\mu, m} - d_{\mu^X, m}\|_\infty$ tend-elle vers 0 ? Sous des hypothèses de régularité sur la mesure μ et son support, on peut obtenir des taux explicites de convergence (comme dans [13]). Mais nous n'en parlerons pas ici.

A vrai dire, le calcul algorithmique du diagramme de $\mathbb{V}_{d_{\mu^X}, m}$ n'est pas tout à fait résolu : à quoi ressemblent les sous-niveau de la fonction $d_{\mu^X, m}$? On aimerait pouvoir les écrire comme de bons recouvrements, comme ce que l'on a fait pour les fonctions distances.

Les résultats de cette partie proviennent de [14].

4.4.1 Décomposition barycentrique

On considère toujours $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$. On notera $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ sa mesure de probabilité empirique. Fixons un paramètre $m \in [0, 1[$ s'écrivant $m = \frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout point $x \in \mathbb{R}^d$ et $i \leq n$, on note p_i^x le i -ème plus proche voisin. On notera aussi $\text{bar}(x)$ le barycentre de ses k plus proches voisins :

$$\text{bar}(x) = \text{isobar}(p_1^x, \dots, p_k^x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k p_i^x.$$

On peut faire intervenir ces barycentres dans l'expression de la distance à la mesure :

$$\begin{aligned} d_{\mu, m_0}^2(x) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|x - p_i^x\|^2 \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [\|x - \text{bar}(x)\|^2 + \|\text{bar}(x) - p_i^x\|^2 + 2\langle x - \text{bar}(x), \text{bar}(x) - p_i^x \rangle] \\ &= \|x - \text{bar}(x)\|^2 + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|\text{bar}(x) - p_i^x\|^2 + 2\langle x - \text{bar}(x), \text{bar}(x) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k p_i^x \rangle \\ &= \|x - \text{bar}(x)\|^2 + \underbrace{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|\text{bar}(x) - p_i^x\|^2}_{\omega^2(x)}. \end{aligned}$$

Interprétons ce résultat. L'ensemble des k -barycentres de points de X est un ensemble fini, que nous notons $\text{Bar}_k(X)$. A chacun de ces barycentres $b \in \text{Bar}_k(X)$ est associé un poids $\omega^2(b) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|\text{bar}(x) - p_i^x\|^2$.

Ensuite, à chaque point $x \in \mathbb{R}^d$ est associé une valeur, $\|x - \text{bar}(x)\|^2$. La distance à la mesure en x est alors la somme de ces deux contributions.

On peut vérifier que la distance à la mesure répond au problème de minimisation suivant :

Proposition 4.4.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$d_{\mu, m_0}^2(x) = \min_{b \in \text{Bar}_k(X)} \|x - b\|^2 + \omega^2(b).$$

Démonstration. Le calcul précédent montre déjà qu'on a l'inégalité " \geq ". Réciproquement, si $b \in \text{Bar}_k(X)$ est le barycentre de p_1, \dots, p_k , on a

$$\begin{aligned} \|x - b\|^2 + \omega^2(b) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [\|x - b\|^2 + \|b - q_i\|^2] \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\|x - b\| + \|b - q_i\|)^2 \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|x - q_i\|^2 \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|x - p_i^x\|^2 = d_{\mu, m}^2(x). \end{aligned}$$

□

Remarque 4.4.2. Une telle fonction s'appelle une *power distance* pour la fonction de poids ω . Son calcul est relié à celui d'un diagramme de Voronoï pondéré d'ordre k , et il existe des algorithmes qui peuvent s'en charger.

Nous savons maintenant décrire les sous-niveaux de la fonction $d_{\mu, m}$: pour tout $t \geq 0$, un point x vérifie $d_{\mu, m} \leq t$ si et seulement si il existe un $b \in \text{Bar}_k(X)$ tel que $\|x - b\|^2 + \omega^2(b) \leq t^2$, c'est à dire si :

$$\|x - b\|^2 \leq t^2 - \omega^2(b).$$

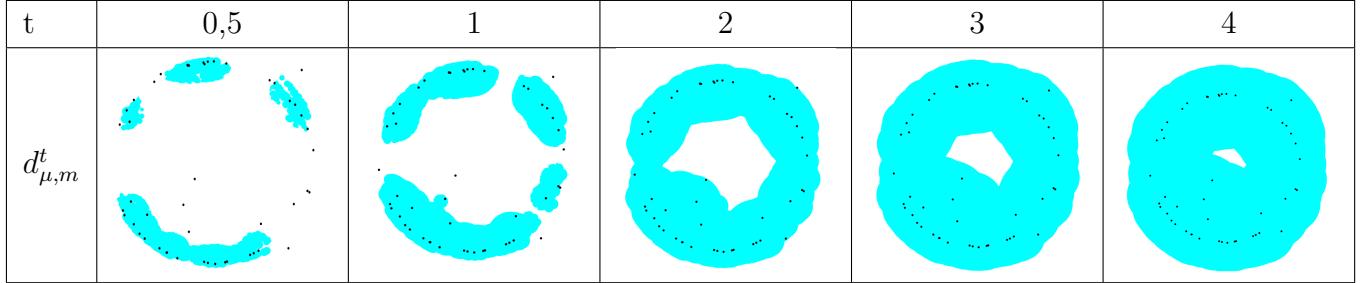
Autrement dit, $d_{\mu, m}^t$ est l'union des boules $B(b, \sqrt{t^2 - \omega^2(b)})$, où b parcourt $\text{Bar}_k(X)$. On note ce recouvrement :

$$\mathcal{U} = \{B(b, \sqrt{t^2 - \omega^2(b)}), b \in \text{Bar}_k(X)\}.$$

En conséquence, et en appliquant le théorème du nerf persistant, le diagramme de persistance $\mathbb{V}_{d_{\mu, m}}$ se calcule en considérant l'homologie simpliciale persistante du nerf de \mathcal{U} .

Tel quel, le calcul de ce recouvrement est toutefois problématique : l'ensemble des k -barycentres est de taille $\binom{n}{k}$. Cependant, certains de ces points ne sont pas utiles, car leur boule $B(b, t^2 - \omega^2(b))$ est déjà contenue dans d'autres boules de \mathcal{U} . Cette remarque est à l'origine de certaines méthodes d'approximation des sous-niveaux.

Voici quelques sous-niveaux de $d_{\mu, m}$ pour $m = 0, 1$ et μ la mesure empirique d'un nuage de points bruité qui échantillonne le cercle :



4.4.2 Complexe de Čech pondéré

Plutôt que de poser sur chaque point de $\text{Bar}_k(X)$ une boule de rayon $\sqrt{t^2 - \omega^2(b)}$, comme le fait la distance à la mesure, on pourrait préférer les poser sur les points du nuage X lui-même. Cela conduit à l'approximation suivante :

Définition 4.4.3. La distance à la mesure approximée est la fonction :

$$d_{\mu, m_0}^X : z \in \mathbb{R}^d \mapsto \min_{x \in X} \sqrt{\|x - z\|^2 + d_{\mu, m}^2(x)}.$$

Comme précédemment, les sous-niveaux de $d_{\mu,m}^X$ sont des unions de boules : pour tout $t \geq 0$,

$$(d_{\mu,m}^X)^t = \bigcup_{x \in X} B(x, \sqrt{t^2 - d_{\mu,m}^2(x)})$$

Le nerf de ce recouvrement est appelé complexe de Čech pondéré, et on le note $\check{\text{Cech}}_m^t(X)$. Le module de persistance correspondant, $(H_*(\check{\text{Cech}}_m^t(X)))_{t \geq 0}$, est isomorphe à $\mathbb{V}_{d_{\mu,m}^X}$.

Voici la qualité de cette approximation :

Proposition 4.4.4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a les inégalités :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}d_{\mu,m}(x) \leq d_{\mu,m}^X(x) \leq \sqrt{3}d_{\mu,m}(x).$$

Ces relations sont optimales.

On déduit de cette proposition que :

$$\log(d_{\mu,m}) \leq \log(\sqrt{3}) + \log(d_{\mu,m}^X) \text{ et}$$

$$\log(d_{\mu,m}^X) \leq \log(\sqrt{3}) + \log(d_{\mu,m}).$$

Autrement dit, les sous-niveaux de $\log(d_{\mu,m})$ et $\log(d_{\mu,m}^X)$ sont $\log(\sqrt{3})$ -entrelacés. Cela se traduit par une majoration de la distance d'entrelacement en échelle logarithmique entre les modules de persistance (définition 3.3.9) :

$$d_i^{\log}(\mathbb{V}_{d_{\mu,m}}, \mathbb{V}_{d_{\mu,m}^X}) \leq \log(\sqrt{3}).$$

Appliquons à ce résultat une dernière approximation : si le complexe $\check{\text{Cech}}_m^t(X)$ est trop couteux à calculer, alors on peut se contenter du complexe de Rips pondéré $\text{Rips}_m^t(X)$, qui est défini comme son complexe de clique (comme dans la partie 3.3.2). Nous avons alors des inclusions entre complexes simpliciaux :

$$\check{\text{Cech}}_m^{\frac{t}{2}}(X) \subset \text{Rips}_m^t(X) \subset \check{\text{Cech}}_m^t(X).$$

Cela se traduit aussi au niveau homologique par un entrelacement logarithmique :

$$d_i^{\log}(H_*(\check{\text{Cech}}_m^t(X)), H_*(\text{Rips}_m^t(X))) \leq \log(2).$$

On vient de montrer :

Théorème 4.4.5. On a un $\log(2\sqrt{3})$ -entrelacement logarithmique entre $\mathbb{V}_{d_{\mu,m}}$, le module des sous-niveaux de la fonction distance à la mesure empirique de X , et $H_*(\text{Rips}_m^t(X))$, le module du complexe de Rips pondéré de X . Autrement dit,

$$d_i^{\log}(\mathbb{V}_{d_{\mu,m}}, H_*(\text{Rips}_m^t(X))) \leq \log(2\sqrt{3}).$$

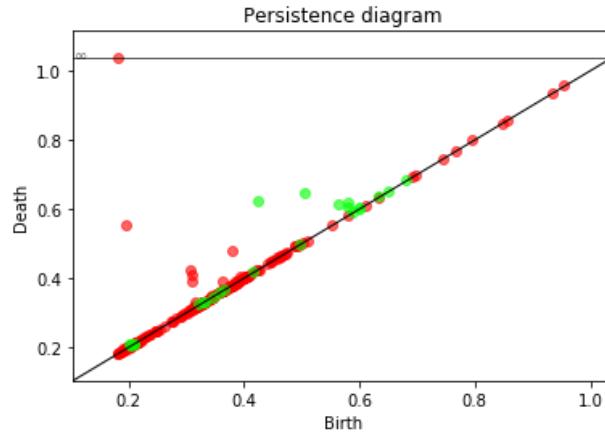
Nous mettons cela à l'épreuve dans la prochaine partie.

4.5 Simulation

Reprendons le même nuage de points X que dans l'introduction, qui échantillonne deux cercles plongés dans du bruit. On applique la méthode du complexe de Rips pondéré :

- μ est la mesure empirique de X ,
- $d_{\mu,m}$ sa distance à la mesure pour un paramètre $m \in [0, 1[$,
- $d_{\mu,m}^X$ est la distance à la mesure approximée,
- $\check{\text{Cech}}_m^t(X)$ est le complexe de Čech pondéré par $d_{\mu,m}^X$,
- $\text{Rips}_m^t(X)$ le complexe de Rips correspondant,
- et $(H_*(\text{Rips}_m^t(X)))_{t \geq 0}$ est le module de persistance de l'homologie simpliciale de ce complexe de Rips.

Nous pouvons calculer le diagramme de $(H_*(\text{Rips}_m^t(X)))_{t \geq 0}$ grâce à l'algorithme de persistance. Pour le paramètre $m = 0.1$, nous obtenons :



Sur ce diagramme, on distingue deux points rouges et deux points verts éloignés de la diagonale : les propriétés topologiques de l'espace initial ont été retrouvées.

5 D'autres structures pour l'inférence topologique

5.1 Le problème de la stabilité

Nous avons vu que l'estimation de la persistance nécessite de développer des méthodes robustes aux points aberrants.

Dans cette partie, nous considérons une fonction continue $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$, et $\mathbb{V}_f = (V_t, v_s^t)$ le module de persistance de l'homologie singulière sous-niveaux $f^t = f^{-1}(]-\infty, t])$ de f :

$$H_*(f^r) \rightarrow H_*(f^s) \rightarrow H_*(f^t).$$

Une hypothèse suffisante de régularité pour f est de supposer qu'elle soit propre, auquel cas le module \mathbb{V}_f est q -modéré, et possède un diagramme de persistance bien défini (proposition 2.5.2).

En pratique toutefois, nous n'avons pas accès à la fonction f , mais seulement à une approximation \hat{f} . Le problème auquel nous sommes confrontés se formule ainsi :

Créer un module de persistance $\hat{\mathbb{V}}$, construit à partir de \hat{f} , qui soit un bon estimateur de \mathbb{V}_f (en distance bottleneck par exemple).

Exemple avec la distance à la mesure : Dans ce cadre, on considère une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^d et un paramètre $m = \frac{k}{n} \in [0, 1[$. La fonction f correspond alors à :

$$f = d_{\mu, m}.$$

On dispose ensuite d'un nuage de n points X , que l'on espère suffisamment bien échantillonnés selon μ . Si on note $\hat{\mu}$ la loi empirique de ce nuage de points, alors la fonction avec laquelle on travaille est en fait :

$$\hat{f} = d_{\hat{\mu}, m}.$$

Si $\mathbb{V}_{\hat{f}}$ est le module de persistance des sous-niveaux de \hat{f} , alors on peut appliquer directement les résultats de convergence de la distance à la mesure :

$$d_b(\mathbb{V}_f, \mathbb{V}_{\hat{f}}) \leq \|f - \hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{m}} W_2(\mu, \hat{\mu}).$$

Le problème n'est pas résolu pour autant, puisque les sous-niveaux de \hat{f} ne sont pas calculables en pratique — c'est a priori l'union de $\binom{n}{k}$ boules (partie 4.4.1). On préfère l'approche suivante :

Créer un complexe simplicial filtré $C^t(X, \hat{f})$, d'ensemble de sommets X et dépendant de \hat{f} , tel que son module de persistance $H_*(C^t(X, \hat{f}))$ soit un bon estimateur de \mathbb{V}_f .

Ceci est le problème de l'approximation. Nous avons déjà donné un exemple d'une telle construction dans la partie 4.4.2.

Dans la suite, nous ne nous intéresserons pas à la dépendance entre X et \hat{f} (comme c'est le cas pour la distance à la mesure). Voici les propriétés de stabilité que l'on espère obtenir :

La variation en distance bottleneck de $H_*(C^t(X, \hat{f}))$ est contrôlée si l'on perturbe \hat{f} , et aussi si l'on modifie X .

5.2 Structure \mathbb{W}

5.2.1 Définition

On considère $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application propre et 1-lipschitzienne. Soit \mathbb{V}_f comme le module de persistance des sous-niveaux de f .

Soit $X \subset \mathbb{R}^d$. Pour $x \in X$ et $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$r_x(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } t < f(x) \\ t - f(x) & \text{sinon} \end{cases},$$

de sorte à avoir des boules

$$\bar{B}(x, r_x(t)) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t < f(x) \\ \{x\} & \text{si } t = f(x) \\ \bar{B}(x, t - f(x)) & \text{si } t > f(x) \end{cases}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère alors le sous-ensemble

$$A_t = \bigcup_{x \in X} \bar{B}(x, r_x(t)) \subset \mathbb{R}^d.$$

Il est recouvert par $\mathcal{U}^t = \{B(x, r_x(t))\}_{x \in X}$. C'est un bon recouvrement (fermé), et on note \mathcal{N}^t son nerf. Enfin, on définit le module de persistance

$$\mathbb{W}_{X,f} = H_*(\mathcal{N}^t).$$

Par le théorème du nerf persistant, on peut considérer $\mathbb{W}_{X,f}$ comme le module de persistance de l'homologie singulière de A_t , ou comme celui de l'homologie simpliciale de \mathcal{N} (ils sont isomorphes).

Proposition 5.2.1. Si $X = \mathbb{R}^d$, \mathbb{V}_f et $\mathbb{W}_{X,f}$ sont isomorphes.

Démonstration. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, on a $f^t \subset A_t$ par définition. Soit $y \in A_t$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $y \in B(x, r_x(t))$, c'est à dire que $\|y - x\| \leq r_x^t = t - f(x)$. Par lipschitzianité de f , on obtient $\|f(y) - f(x)\| \leq t - f(x)$, puis $f(y) \leq t$. Donc $y \in f^t$.

On a montré l'égalité $f^t = A_t$, ce qui conclut. \square

Pour étudier la stabilité de $\mathbb{W}_{X,f}$, nous allons effectuer des contractions d'arêtes.

5.2.2 Contraction d'arêtes

Relation de domination. Soit un complexe simplicial X d'ensemble de sommets V . Soient $u, v \in V$ deux sommets. On dit que v domine u si tout simplexe maximal qui contient u contient aussi v . Autrement dit, pour tout $v_1, \dots, v_n \in V$, si $[u, v_1, \dots, v_n]$ est un simplexe de X , alors $[v, u, v_1, \dots, v_n]$ l'est aussi.

Soit $X \setminus u$ le complexe simplicial obtenu à partir de X en retirant le sommet u des simplexes. Son ensemble de sommets est $V \setminus \{u\}$. On dit qu'on a contracté l'arête $[u, v]$.

Lemme 5.2.2. Si v domine u , alors l'inclusion entre complexes simpliciaux $i : X \setminus u \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme $H(X \setminus u) \xrightarrow{\sim} H(X)$ entre les groupes d'homologie simpliciale.

Démonstration. Soit l'application

$$\begin{aligned} j : V &\longrightarrow V \setminus \{u\} \\ u &\longmapsto v \\ x &\longmapsto x \text{ si } x \neq u \end{aligned}$$

La composée $j \circ i : V \setminus \{u\} \rightarrow V \setminus \{u\}$ coïncide avec l'application identité, et il suffit donc de montrer que j est simpliciale pour obtenir le résultat (proposition A.3.4).

Choisissons $\omega = [v_1, \dots, v_n]$ un simplexe de X . Il faut montrer que $j(\omega)$ est un simplexe de $X \setminus u$. Si w ne contient pas u , on a $j(\omega) = \omega$. Sinon, on peut supposer que $v_1 = u$, et on écrit alors

$$j(\omega) = j([u, v_2, \dots, v_n]) = [v, v_1, \dots, v_n],$$

qui est un simplexe de X (et donc de $X \setminus u$) par domination de u par v . \square

Contraction d'arête au niveau persistance. On considère maintenant que le complexe simplicial est filtré par $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note X^t le complexe simplicial $f^{-1}((-\infty, t])$.

Soient $\epsilon \geq 0$ et u, v deux sommets de V . On dit que v ϵ -domine u si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall v_1, \dots, v_n \in V, [u, v_1, \dots, v_n] \in X^t \implies [v, u, v_1, \dots, v_n] \in X^{t+\epsilon}.$$

On note \mathbb{V}_X le module de persistance associé à (X, f) , et $\mathbb{V}_{X \setminus u}$ celui associé à $(X \setminus u, f)$.

Lemme 5.2.3. Si v ϵ -domine u , alors les applications $(i_t : X^t \setminus u \rightarrow X^{t+\epsilon})_{t \in \mathbb{R}}$ et $(j_t : X^t \rightarrow X^{t+\epsilon} \setminus u)_{t \in \mathbb{R}}$ (définies dans le lemme précédent) induisent un ϵ -entrelacement entre \mathbb{V}_X et $\mathbb{V}_{X \setminus u}$.

Démonstration. Les familles d'applications (i_t) et (j_t) sont bien des ϵ -morphismes. De plus, comme dans le lemme précédent, les applications j_t sont simpliciales, et on a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} H(X^t \setminus u) & \xrightarrow{\quad} & H(X^{t+2\epsilon} \setminus u) \\ \searrow^{i_t} & \nearrow^{j_{t+\epsilon}} & \\ H(X^{t+\epsilon}) & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H(X^t) & \xrightarrow{\quad} & H(X^{t+2\epsilon}) \\ \searrow^{j_t} & \nearrow^{i_{t+\epsilon}} & \\ H(X^{t+\epsilon} \setminus u) & & \end{array},$$

ce qui signifie bien que les deux modules de persistance sont ϵ -entrelacés. \square

En fait, on peut obtenir une version plus forte du résultat :

Lemme 5.2.4. Soient $\{u_i\}_{i \in I}$ et $\{v_i\}_{i \in I}$ deux familles de sommets disjointes (éventuellement infinies) telles que $\forall i \in I, v_i$ ϵ -domine u_i . Alors \mathbb{V}_X et $\mathbb{V}_{X \setminus \{u_i\}_{i \in I}}$ sont ϵ -entrelacés.

Démonstration. Il suffit de considérer l'application :

$$\begin{aligned} j : V &\longrightarrow V \setminus \{u_i\}_{i \in I} \\ u_i &\longmapsto v_i \\ x &\longmapsto x \text{ si } x \neq \{u_i\}_{i \in I} \end{aligned}$$

et de raisonner comme précédemment. \square

5.2.3 Approximation et stabilité

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat de stabilité. Pour cela, on suppose qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et une constante $c \in \mathbb{R}$ tels que :

- $f|_K \leq c$, et
- $\forall y \in \mathbb{R}^d, f(y) \geq d(y, K)$ (la distance euclidienne).

Proposition 5.2.5. Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ qui contient K . Sous les hypothèses précédentes, les modules $\mathbb{W}_{X,f}$ et $\mathbb{W}_{K,f}$ sont c -entrelacés.

Démonstration. On note toujours \mathcal{N}^t le nerf du recouvrement $\{B(x, r_x(t))\}_{x \in X}$.

Pour tout $y \in X \setminus K$, nous allons définir un sommet $z \in K$ qui c -domine y dans le complexe simplicial filtré $(\mathcal{N}^t)_t$. On obtient alors le résultat en appliquant le lemme 5.2.4.

Choisissons $y \in X \setminus K$, et définissons $z \in \operatorname{argmin}_{x \in K} \{d(z, x)\}$ une projection de y sur K . Soit $t \geq f(y)$, et $\omega = [y, x_1, \dots, x_n]$ un simplexe de N_t qui contient y . On veut montrer que $\omega' = [z, y, x_1, \dots, x_n]$ est un simplexe de N_{t+c} .

Puisque N_t est un nerf, on a que

$$\bigcap_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i}(t)) \bigcap B(y, r_y(t)) \neq \emptyset.$$

Si l'on montre que $B(y, r_y(t)) \subset B(z, r_z(t+c))$, on aura alors :

$$\bigcap_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i}(t+c)) \bigcap B(y, r_y(t+c)) \bigcap B(z, r_z(t+c)) \neq \emptyset,$$

et le résultat sera démontré.

Or $B(y, r_y(t)) \subset B(z, r_z(t+c))$ est équivalent à $\|z - y\| + r_y(t) \leq r_z(t+c)$.

Par hypothèse, on a $f(y) \geq \|z - y\|$, et $f(z) \leq c$. Donc $r_y(t) + \|z - y\| = t - f(y) + \|z - y\| \leq t$, et $t \leq t + c - f(z) = r_z(t+c)$. \square

Proposition 5.2.6. On suppose que f est 1-lipschitzienne. Soient deux compacts X et $Y \subset \mathbb{R}^d$ tels que $d_H(X, Y) \leq \epsilon$ (distance de Hausdorff). Alors $\mathbb{W}_{X,f}$ et $\mathbb{W}_{Y,f}$ sont 2ϵ -entrelacés.

Démonstration. Cela vient des inclusions $A_X^t \subset A_Y^{t+\epsilon} \subset A_Y^{t+2\epsilon}$, et du fait que l'on peut considérer les modules de persistance $\mathbb{W}_{X,f}$ et $\mathbb{W}_{Y,f}$ comme induits par l'homologie singulière des espaces $(A_X^t)_t$ et $(A_Y^t)_t$. \square

Ces deux résultats donnent lieu à :

Corollaire 5.2.7. Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble qui contienne un sous-ensemble à distance de Hausdorff au plus ϵ de K . Autrement dit, on demande que la distance de Hausdorff non-symétrique

$$d_H(X; K) = \inf\{r \geq 0, K \subset X^r\}$$

soit plus petite que ϵ . Alors les modules de persistance $\mathbb{W}_{X,f}$ et \mathbb{V}_f sont $(c + \epsilon)$ -entrelacés.

Nous avons ici un résultat de robustesse face aux points aberrants : si $d_H(X; K) \leq \epsilon$ est vérifiée, alors nous pouvons rajouter à X autant de points que voulu sans modifier l'approximation $d_b(\mathbb{W}_{X,f}, \mathbb{V}_f) \leq c + \epsilon$.

5.3 Structure \mathbb{F}

5.3.1 Définition

Nous proposons maintenant une autre construction.

On a toujours $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ propre et 1-lipschitzienne, et $X \subset \mathbb{R}^d$. On définit $S_{X,f}$ comme étant le complexe simplicial filtré d'ensemble de sommets X tel que :

$$\forall \omega = [x_0, \dots, x_n] \subset X, \omega \in S_{X,f}^t \text{ si et seulement si } \max f(\text{conv}(\{x_0, \dots, x_n\})) \leq t,$$

où $\text{conv}(\{x_0, \dots, x_n\})$ signifie enveloppe convexe. Autrement dit, on ajoute un sous ensemble de X au complexe simplicial si la fonction f est assez petite sur l'enveloppe convexe de ses sommets.

On définit ensuite $\mathbb{F}_{X,f}$ comme le module de persistance de l'homologie simpliciale de $(S_{X,f}^t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Ce complexe simplicial ne s'écrit pas naturellement comme le nerf d'un recouvrement. Pour l'étudier, nous allons utiliser les correspondances, que l'on a présenté dans la partie 3.4.2.

5.3.2 Approximation et stabilité

Cette première proposition relate la stabilité de $\mathbb{F}_{X,f}$ lorsque l'on perturbe f :

Proposition 5.3.1. Soit g une fonction telle que $\|f - g\|_\infty = \epsilon$. Alors les modules de persistance $\mathbb{F}_{X,f}$ et $\mathbb{F}_{X,g}$ sont ϵ -entrelacés.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'on a des inclusions $S_{X,f}^t \subset S_{X,g}^{t+\epsilon} \subset S_{X,f}^{t+2\epsilon}$. Cela est clair par définition. \square

Et maintenant lorsque l'on perturbe X :

Proposition 5.3.2. Soit $Y \subset \mathbb{R}^d$ tel que $d_H(X, Y) = \epsilon$. Alors $\mathbb{F}_{X,f}$ et $\mathbb{F}_{Y,f}$ sont ϵ -entrelacés.

Démonstration. On considère l'application multivaluée :

$$C : x \in X \mapsto B(x, \epsilon) \cap Y.$$

Puisque $d_H(X, Y) = \epsilon$, C est bien une correspondance. On veut montrer que C et C^T sont ϵ -simpliciales. Soit $\omega = [x_1, \dots, x_n] \in S_{X,f}^t$. On a que $f(\text{conv}(x_1, \dots, x_n)) \leq t$. Soient $y_1 \in C(x_1), \dots, y_n \in C(x_n)$. Il faut vérifier que $f(\text{conv}(y_1, \dots, y_n)) \leq t + \epsilon$.

On utilise la 1-lipschitzianité de f : pour toute combinaison convexe $y = \sum_{i=1}^n t_i y_i$, et en notant $x = \sum_{i=1}^n t_i x_i$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_\infty &\leq \|x - y\| = \left\| \sum_{i=1}^n t_i (x_i - y_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n t_i \|x_i - y_i\| \leq \sum_{i=1}^n t_i \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci est valable pour tout $y \in \text{conv}(y_1, \dots, y_n)$, et C est bien ϵ -simpliciale.

De la même manière on montre que C^T l'est. En utilisant la proposition 3.4.7, on obtient l' ϵ -entrelacement voulu. \square

Corollaire 5.3.3. Si K est compact, alors $\mathbb{F}_{X,f}$ est q -modéré.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, X un ensemble fini ϵ -proche de K en distance de Hausdorff. D'après la proposition précédente, $\mathbb{F}_{K,f}$ et $\mathbb{F}_{X,f}$ sont ϵ -entrelacés. On a donc par définition des diagrammes commutatifs en tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & v_t^{t+2\epsilon} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 H_*(\mathbb{F}_{K,f}^t) & \longrightarrow & H_*(\mathbb{F}_{X,f}^{t+\epsilon}) & \longrightarrow & H_*(\mathbb{F}_{K,f}^{t+2\epsilon})
 \end{array}$$

Puisque que les espaces vectoriels $H_*(\mathbb{F}_{X,f})$ sont de dimension finie (car X est fini), les applications $v_t^{t+2\epsilon}$ sont de rang fini. Ceci étant valable pour tout $\epsilon > 0$, on a montré que $\mathbb{F}_{K,f}$ est bien modéré. \square

5.3.3 Complexe de clique de \mathbb{F}

Si $S_{X,f}^t$ est le complexe simplicial qui induit le module $\mathbb{F}_{X,f}$, on définit le complexe $\text{Rips}S_{X,f}^t$ comme étant le complexe de clique de $S_{X,f}^t$.

On a vu dans la partie 3.3.2 que les modules de persistance des complexes de Čech et de Rips sont $\log(2)$ -entrelacés en échelle logarithmique.

Ce n'est pas le cas pour le module \mathbb{F} . En effet, si ω est un simplexe de $\text{Rips}S_{X,f}^t$, il se peut que ω ne soit pas dans $S_{X,f}^t$ avant un temps arbitrairement grand, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 5.3.4. Soit $X = \{r, rj, r\bar{j}\} \subset \mathbb{R}^2$ avec $r \leq 0$ et $1, j, \bar{j}$ les racines 3-èmes de l'unité. Soit aussi f la fonction distance au triangle X . Alors on a :

$$f(0) = d_X(0) = \left\| \frac{r + rj}{2} \right\| = \frac{r}{2}.$$

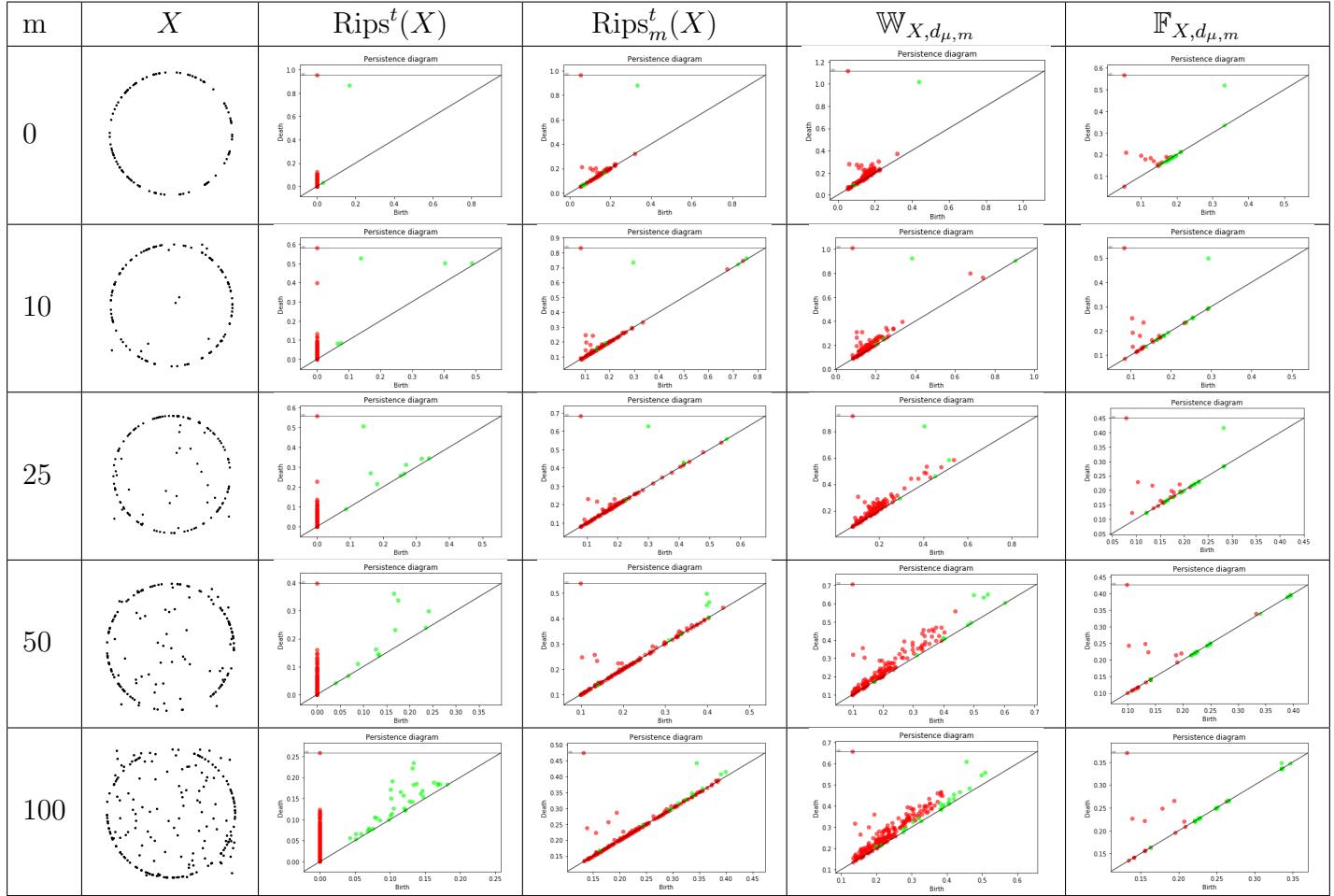
Autrement dit, le simplexe $\omega = [r, rj, r\bar{j}]$ n'apparaît pas dans $S_{X,f}^t$ avant le temps $t = \frac{r}{2}$. Pourtant, ces trois arêtes sont présentes dès $t = 0$, et donc $\omega \in \text{Rips}S_{X,f}^t$ en $t = 0$.

5.4 Simulations

Nous allons maintenant comparer les quatre structures que nous avons défini :

- le complexe Rips^t(X) (partie 3.3.2),
- le complexe de Rips pondéré Rips_m^t(X) (partie 4.4.2),
- le complexe de clique de $\mathbb{W}_{X,d_{\mu,m}}$ (partie 5.2), et
- le complexe de clique de $\mathbb{F}_{X,d_{\mu,m}}$ (partie 5.3).

Nous utilisons comme ensemble d'observations, noté X, l'union d'un échantillon uniforme de 100 points sur le cercle S^1 et d'un échantillon uniforme de m points dans le carré $[-1, 1]^2$. Le tableau suivant rassemble les diagrammes de persistance des complexes que l'on a défini, pour différents ensembles X, et pour le paramètre m = 0, 1.



Nous pouvons observer que dès $m = 50$, le diagramme de $\text{Rips}^t(X)$ n'est plus pertinent. Toutefois, pour $m = 100$, on retrouve des informations topologiques saillantes dans les diagrammes de $\text{Rips}_m^t(X)$ et $\mathbb{W}_{X,d_{\mu,m}}$.

Enfin, les deux derniers diagrammes de $\mathbb{F}_{X,d_{\mu,m}}$ sont éloignés du diagramme à estimer. Cela peut signifier que la méthode consistant à prendre son complexe de clique est trop grossière.

A Formulaire d'homologie dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Cette annexe se base sur [15] et [10]. Bien que la théorie de l'homologie se définisse dans un anneau commutatif quelconque, nous n'aurons ici besoin de la considérer que sur le corps $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans la première partie, nous définissons les groupes d'homologie à partir des complexes de chaînes. Dans les deux suivantes, nous appliquons ces définitions à deux contextes : les espaces topologiques, et les complexes simpliciaux.

A.1 Groupes d'homologie

On appelle complexe de chaînes une suite d'espaces vectoriels $C = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur k , munie d'une suite d'applications linéaires $\delta = (\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

Ces applications sont appelées les opérateurs de bord. On définit aussi par convention $C_0 = 0$ et $\partial_0 = 0$.

A partir d'un tel complexe de chaînes, on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- l'espace des n -cycles : $Z_n(C) = \ker(\partial : C_n \rightarrow C_{n-1})$,
- l'espace des n -bords : $B_n(C) = \text{im}(\partial : C_{n+1} \rightarrow C_n)$.

Enfin, le n -ème groupe d'homologie est l'espace vectoriel quotient

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C).$$

Morphisme de complexe de chaîne. Si C et D sont deux complexes de chaînes, on appelle morphisme de complexes de chaînes entre C et D toute famille de morphismes $\phi = (\phi_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n \circ \partial_{n+1} = \partial_n \circ \phi_{n+1}.$$

Un morphisme de complexes de chaînes envoie cycles sur cycles et bords sur bords, et induit donc un morphisme d'espaces vectoriels

$$\phi : H_n(C) \rightarrow H_n(D).$$

Homotopie. Soient $\phi, \psi : C \rightarrow D$ deux morphismes de complexes de chaînes. On appelle homotopie entre ϕ et ψ une suite de morphismes $(K_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n - \psi_n = \partial_{n+1} \circ K_n - K_{n-1} \circ \partial_{n+1},$$

où l'on pose $K_{-1} = 0$.

Proposition A.1.1. S'il existe une homotopie entre ϕ et ψ , alors ces deux morphismes de complexes de chaînes induisent les mêmes applications entre les groupes d'homologie.

A.2 Homologie singulière

p -simplexe standard. Soit $p \in \mathbb{N}$, et (e_0, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{R}^{p+1} . On définit le p -simplexe standard Δ_p comme l'enveloppe convexe de cette famille :

$$\begin{aligned} \Delta_p &= \text{conv}(e_0, \dots, e_p) \\ &= \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{p+1}, t_1 \geq 0 \text{ et } \sum t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{p+1}. \end{aligned}$$

Chaînes singulières. Soit X un espace topologique. On appelle p -simplexe singulier toute application continue $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$.

Sa i -ème face, pour $0 \leq i \leq p$, est le $(p - 1)$ -simplexe singulier défini par :

$$\partial_i \sigma = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_p).$$

On note $C_p(X)$ l'espace vectoriel libre de base l'ensemble des p -simplexes singuliers. Ses éléments s'écrivent $\sum_{i \in I \text{ fini}} \epsilon_i \sigma_i$, avec $\epsilon_i \in k$.

On définit le bord d'un p -simplexe singulier σ comme :

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p \partial_i \sigma \in C_{p-1}(X).$$

Par linéarité, cette application se prolonge en un morphisme $\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$.

Proposition A.2.1. On a $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Nous venons de construire un complexe de chaîne $(C_i(X), \partial_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Nous pouvons alors utiliser la partie précédente pour définir ses cycles, ses bords et ses groupes d'homologie.

Proposition A.2.2. Une application continue entre deux espaces topologiques induit un morphisme entre leurs complexes de chaînes singulières.

Homotopies. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues entre des espaces topologiques. Une homotopie entre f et g est une application $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = g$.

Proposition A.2.3. Deux applications continues homotopes induisent les mêmes morphismes entre les groupes d'homologie.

Enfin, on dit que deux espaces topologiques X et Y sont du même type d'homotopie si il existe deux applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes aux applications identité.

Proposition A.2.4. Si deux espaces topologiques sont du même type d'homotopie, alors leurs groupes d'homologie singulière sont isomorphes.

A.3 Homologie simpliciale

Complexe simplicial. Soit V un ensemble, appelé ensemble de sommets. Un complexe simplicial (combinatoire) sur V est un sous-ensemble $X \subset \mathcal{P}(V)$ tel que :

- $\forall \sigma \in X$, σ est fini,
- $\forall \sigma \in X, \forall \tau \subset \sigma, \tau \in X$.

Dans ce contexte, on appelle p -simplexe les éléments de X de cardinal $p + 1$.

Chaînes simpliciales. Toujours avec un complexe simplicial X , on note $C_p(X)$ l'espace vectoriel libre de base l'ensemble des p -simplexes. Ses éléments s'écrivent $\sum_{i \in I \text{ fini}} \epsilon_i \sigma_i$, avec $\epsilon_i \in k$.

On définit le bord d'un p -simplexe singulier σ comme :

$$\partial_p \sigma = \sum_{\tau \subset \sigma}^p \tau \in C_{p-1}(X).$$

Par linéarité, cette application se prolonge en un morphisme $\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$.

Proposition A.3.1. On a $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Nous venons encore de construire un complexe de chaîne $(C_i(X), \partial_i)_{i \in \mathbb{N}}$, et nous pouvons donc définir ses cycles, ses bords et ses groupes d'homologie.

Applications simpliciales. Soient X et Y des complexes simpliciaux d'ensembles de sommets V et W . On dit que l'application $f : V \rightarrow W$ est simpliciale si :

$$\forall \sigma \in X, f(\sigma) \in Y.$$

Proposition A.3.2. Une application simpliciale entre deux complexes simpliciaux induit un morphisme entre leurs complexes de chaînes singulières.

Applications contigües. Deux applications simpliciales $f, g : V \rightarrow W$ sont dites contigües si :

$$\forall \sigma \in X, f(\sigma) \cup g(\sigma) \in Y.$$

Proposition A.3.3. Deux applications simpliciales contigües induisent les mêmes morphismes entre les groupes d'homologie.

Proposition A.3.4. Soient $f : V \rightarrow W$ et $g : W \rightarrow V$ deux applications simpliciales telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient contigües avec les applications identité. Alors les groupes d'homologie simpliciale de X et Y sont isomorphes.

Références

- [1] Marc Glisse et Steve Oudot Frédéric Chazal, Vin de Silva. *The Structure and Stability of Persistence Modules*. SpringerBriefs in Mathematics, 2016.
- [2] Gunnar Carlsson Afra Zomorodian. Computing persistent homology. *Discrete and Computational Geometry*, 2005.
- [3] John Harer David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner. Stability of persistence diagrams. *Discrete and Computational Geometry*, 2007.
- [4] William Crawley-Boevey. Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules. *arXiv :1210.0819v3*, 2014.
- [5] Michael Lesnick. The optimality of the interleaving distance on multidimensional persistence modules. *arXiv :1106.5305v1*, 2017.
- [6] Damian Mihai Michèle Audin. *Théorie de Morse et homologie de Floer*. EDP Sciences, 2010.
- [7] Quentin Mérigot. Détection de structure géométrique dans les nuages de points. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00443038v2>, 2010.
- [8] André Lieutier. Any open bounded subset of \mathbb{R}^n has the homotopy type as its medial axis. *Computer-Aided Design*, 2004.
- [9] Mariette Yvinec Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal. *Geometric and Topological Inference*. à paraître.
- [10] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [11] Steve Y. Oudot Frédéric Chazal. Towards persistence-based reconstruction in euclidean spaces. *arXiv :0712.2638*, 2007.
- [12] Steve Oudot Frédéric Chazal, Vin de Silva. Persistence stability for geometric complexes. *arXiv :1207.3885*, 2013.
- [13] Bertrand Michel Frédéric Chazal, Pascal Massart. Rates of convergence for robust geometric inference. *arXiv :1505.07602*, 2015.
- [14] Mickaël Buchet. Topological inference from measures. <https://hal.inria.fr/tel-01108521>, 2015.
- [15] Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire. 2009.