FGV/EMAp, Matemática Aplicada, 3º período, 2024

# Cálculo Vetorial — Teste II

**Modalidades.** Este documento será distribuído aos alunos na segunda-feira, 03/06. Sete superfícies são apresentadas abaixo. Para realizar esse teste, os alunos devem formar grupos (de no máximo três pessoas), escolher uma superfície (de modo que cada grupo tenha uma superfície diferente) e calcular sua área. Os alunos devem apresentar seus resultados na quarta-feira, 12/09, entre 11:10 e 12:50, na forma de uma palestra no quadro, com duração máxima de 10 minutos. Espera-se que os alunos representem graficamente a superfície em questão, apresentem uma parametrização, e o cálculo da área (se esse cálculo for muito longo, poderão resumi-lo, apresentando as etapas principais). Não se espera que os alunos escrevam um relatório do trabalho. Os alunos podem usar softwares matemáticos para ajudá-los em suas pesquisas, no entanto, os resultados devem ser justificáveis sem ajuda externa.

**Sugestões.** Das sete superfícies, as cinco primeiras são subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, a penúltima de $\mathbb{R}^4$ e a última de $\mathbb{R}^6$. Para calcular a área de uma superfície $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, caso admita uma parametrização global $\phi\colon V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$, pode-se usar a fórmula

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_V \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\| \mathrm{d}(x,y).$$

Se a superfície não puder ser parametrizada globalmente, ela deve ser dividida em várias partes. Para superfícies imersas em espaços de dimensões maiores ($\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^6$), deve-se calcular, em vez disso, a integral

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_V \sqrt{\det\left[ \left(\mathrm{d}_{(x,y)}\phi\right)^{\top} \cdot \left(\mathrm{d}_{(x,y)}\phi\right) \right]}\, \mathrm{d}(x,y),$$

onde o produto matricial dá uma matriz de tamanho $2 \times 2$.

**(1) O esferoide,** ou elipsoide de revolução, é a superfície de equação

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \right\},$$

onde $a$ e $b$ são reais e satisfazem $a > b > 0$. Uma parametrização dessa superfície pode ser obtida a partir da parametrização esférica da esfera. Em algum momento, talvez seja necessário calcular uma primitiva de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Para tanto, pode-se usar um software matemático.

**(2) A catenoide** é definida, em coordenadas cilíndricas, por

$$\mathcal{S} = \left\{ (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) \mid |z| \leq a,\ \theta \in [0, 2\pi),\ r = a \cdot \cosh\left(\frac{z}{a}\right) \right\},$$

onde $a > 0$ é um parâmetro real, e cosh representa o cosseno hiperbólico. Poderá ser útil saber que uma primitiva do cosseno hiperbólico é o seno hiperbólico.

**(3) O helicoide** é definido, em coordenadas cilíndricas, por

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( r \cos \frac{\theta}{a}, r \operatorname{sen} \frac{\theta}{a}, \theta \right) \mid |r| \leq a,\ \theta \in [0, 2\pi) \right\},$$

onde $a > 0$ é um parâmetro real. Poderemos usar um software para calcular uma primitiva de $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$.

**(4) O disco voador** é a superfície definida por

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\nu), a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\nu), \frac{a}{2} \operatorname{sen}^3(\theta) \right) \mid \theta, \nu \in [0, 2\pi) \right\},$$

onde $a > 0$ é um parâmetro real.

**(5) A trombeta de Gabriel** é a superfície

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta), \frac{1}{r} \right) \mid \theta \in [0, 2\pi),\ r \in [1, r_0] \right\},$$

onde $r_0 > 1$. Para essa superfície, denotamos por $\mathcal{A}(r_0)$ sua área, como função do parâmetro $r_0$, e $\mathcal{V}(r_0)$ o volume que ela encerra. Queremos saber qual é o limite dessas quantidades quando $r_0$ vai para $+\infty$.

**(6) A faixa de Möbius** é o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \cos \theta, \operatorname{sen} \theta, r \cos \frac{\theta}{2}, r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \mid \theta \in [0, 2\pi),\ r \in [-1, 1] \right\}.$$

Para simplificar os cálculos, poderá ser útil usar as fórmulas de arco duplo.

**(7) A superfície de momentos** é o seguinte subconjunto de $\mathbb{C}^3$:

$$\mathcal{S} = \left\{ (z^p, z^q, z^r) \mid z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1 \right\}.$$

onde $p$, $q$ e $r$ são inteiros positivos. Veremos essa superfície como um subconjunto de $\mathbb{R}^6$ (usando o isomorfismo canônico entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$).