


# CÁLCULO VETORIAL




## INTEGRAIS MÚLTIPLAS, DE LINHA E DE SUPERFÍCIE

raphael.tinarrage@fgv.br      <https://raphaeltinarrage.github.io/>

**Página web do curso.** Informações sobre a agenda e os deveres de casa podem ser encontradas em <https://raphaeltinarrage.github.io/EMApCalculoVetorial.html>

**Conteúdo para avaliação.** As seções marcadas com o símbolo  (veja o conteúdo detalhado na página 2) não serão cobradas nas provas; elas são fornecidas apenas como material didático complementar.









### Bibliografia.

|                  |   |   |   |
|------------------|---|---|---|
|                  |  |  |  |
| Integral 1D      | [Pin10, MHB11]  | [Spi06, PCJ12]  | [Gou20]   |
| Integral 2D & 3D | [PM09, SR17, CB22]  | [MT12]  |   |
| Para ir além     |   | [KKS04, Gri13]  | [Mas16]   |

### Conteúdo.

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 1  | <b>Integrais 1D</b> - Lembrete de integração . . . . .                               | 5   |
| 2  | <b>Campos vetoriais</b> - Definição e campos de gradiente . . . . .                  | 22  |
| 3  | <b>Campos vetoriais</b> - Rotacional e divergente . . . . .                          | 35  |
| 4  | <b>Integral curvilínea</b> - Elementos de geometria diferencial das curvas . . . . . | 45  |
| 5  | <b>Integral curvilínea</b> de campos escalares ou vetoriais . . . . .                | 54  |
| 6  | <b>Integral curvilínea</b> - Teorema de Green . . . . .                              | 64  |
| 7  | <b>Integral curvilínea</b> de campos conservativos . . . . .                         | 75  |
| 8  | <b>Interlúdio analítico</b> - Mudança de coordenadas múltipla . . . . .              | 82  |
| 9  | <b>Interlúdio analítico</b> - Teorema da função inversa . . . . .                    | 93  |
| 10 | <b>Superfícies</b> - Definição . . . . .   | 99  |
| 11 | <b>Superfícies</b> - Plano tangente e orientação . . . . .                           | 104 |
| A  | Notações e convenções . . . . .  | 112 |
| B  | Indicações para os exercícios . . . . .  | 113 |
| C  | Avaliações . . . . .   | 134 |
| D  | Referências . . . . .  | 140 |

## Conteúdo detalhado

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Integrais 1D - Lembrete de integração</b>  | <b>5</b>  |
| 1.1      | Integral de Riemann   | 5         |
| 1.1.1    | Somas de Riemann  | 5         |
| 1.1.2    | Somas de Darboux  | 8         |
| 1.1.3    | Propriedades fundamentais   | 9         |
| 1.1.4    | Passagem ao limite sob o sinal de integral  | 10        |
| 1.2      | Técnicas de integração e integral imprópria   | 11        |
| 1.2.1    | Integração via primitiva  | 11        |
| 1.2.2    | Integração por substituição   | 12        |
| 1.2.3    | Integração por partes   | 12        |
| 1.2.4    | Integral imprópria                                       | 13        |
| 1.3      | Outras integrais   | 14        |
| 1.3.1    | Integral de Lebesgue  | 15        |
| 1.3.2    | Integral de Henstock-Kurzweil   | 17        |
| 1.4      | Exercícios  | 20        |
| 1.4.1    | Integrais definidas   | 20        |
| 1.4.2    | Integrais impróprias                                     | 21        |
| 1.4.3    | Limites de integrais                                     | 22        |
| <b>2</b> | <b>Campos vetoriais - Definição e campos de gradiente</b>   | <b>22</b> |
| 2.1      | Lembrete sobre diferenciais   | 22        |
| 2.1.1    | Estrutura euclidiana  | 22        |
| 2.1.2    | Diferenciabilidade  | 23        |
| 2.1.3    | O gradiente   | 25        |
| 2.2      | Campos vetoriais  | 27        |
| 2.2.1    | Definição   | 27        |
| 2.2.2    | Problema de Cauchy                                     | 28        |
| 2.3      | Campos de gradiente   | 30        |
| 2.3.1    | Definição   | 31        |
| 2.3.2    | Campos conservativos  | 32        |
| 2.4      | Exercícios  | 33        |
| 2.4.1    | Diferenciais  | 33        |
| 2.4.2    | Curvas integrais e potenciais   | 34        |
| <b>3</b> | <b>Campos vetoriais - Rotacional e divergente</b>   | <b>35</b> |
| 3.1      | Lembrete de diferenciação de ordem superior   | 35        |
| 3.1.1    | Diferencial segunda   | 35        |
| 3.1.2    | Diferenciabilidade infinita   | 36        |
| 3.2      | O rotacional  | 37        |
| 3.2.1    | Definição em $\mathbb{R}^3$ e propriedades elementares  | 37        |
| 3.2.2    | Definição em $\mathbb{R}^2$ e interpretação dinâmica  | 38        |
| 3.2.3    | Rotacional de campos conservativos  | 40        |
| 3.3      | O divergente  | 41        |
| 3.3.1    | Definição e propriedades elementares  | 41        |
| 3.3.2    | Divergente de campos rotacionais                       | 42        |
| 3.4      | Exercícios  | 43        |
| 3.4.1    | Rotacional e divergente   | 43        |
| 3.4.2    | Eletrostática    | 44        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>4</b>  | <b>Integral curvilínea - Elementos de geometria diferencial das curvas</b> | <b>45</b> |
| 4.1       | Curvas parametrizadas . . . . .  | 45        |
| 4.1.1     | Definição e velocidade . . . . .   | 45        |
| 4.1.2     | Reparametrizações e comprimento de arco . . . . .                          | 48        |
| 4.1.3     | Comprimento das curvas . . . . .   | 49        |
| 4.2       | Curvas planas . . . . .  | 51        |
| 4.2.1     | Curvas de Jordan . . . . .   | 51        |
| 4.2.2     | Determinação do ângulo e número de voltas 🚀 . . . . .                      | 51        |
| 4.3       | Exercícios . . . . .   | 53        |
| <b>5</b>  | <b>Integral curvilínea de campos escalares ou vetoriais</b>                | <b>54</b> |
| 5.1       | Integral curvilínea de um campo escalar . . . . .                          | 54        |
| 5.1.1     | Curvas e parametrizações . . . . .   | 54        |
| 5.1.2     | Definição de integral curvilínea de campos escalares . . . . .             | 55        |
| 5.2       | Integral curvilínea de um campo vetorial . . . . .                         | 57        |
| 5.2.1     | Curvas orientadas e parametrizações . . . . .                              | 57        |
| 5.2.2     | Definição de integral curvilínea de campos vetoriais . . . . .             | 59        |
| 5.3       | Exercícios . . . . .   | 63        |
| <b>6</b>  | <b>Integral curvilínea - Teorema de Green</b>                              | <b>64</b> |
| 6.1       | Lembrete de integral dupla . . . . .                                       | 64        |
| 6.2       | Teorema de Green . . . . .   | 67        |
| 6.2.1     | Demonstração para domínios simples . . . . .                               | 67        |
| 6.2.2     | Formulação para domínios regulares . . . . .                               | 70        |
| 6.3       | Generalização em menor regularidade 🚀 . . . . .                            | 72        |
| 6.4       | Exercícios . . . . .   | 73        |
| <b>7</b>  | <b>Integral curvilínea de campos conservativos</b>                         | <b>75</b> |
| 7.1       | Integral curvilínea ao longo de um gradiente . . . . .                     | 75        |
| 7.1.1     | Teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas . . . . .        | 75        |
| 7.1.2     | Campos vetoriais com integrais independentes do caminho . . . . .          | 77        |
| 7.2       | Integral curvilínea em domínios simplesmente conexos 🚀 . . . . .           | 79        |
| 7.2.1     | Conexidade simples . . . . .   | 79        |
| 7.2.2     | Lema de Poincaré . . . . .   | 81        |
| 7.3       | Exercícios . . . . .   | 81        |
| <b>8</b>  | <b>Interlúdio analítico - Mudança de coordenadas múltipla</b>              | <b>82</b> |
| 8.1       | Lembrete de integração múltipla . . . . .                                  | 82        |
| 8.2       | O teorema de mudança de coordenadas . . . . .                              | 84        |
| 8.2.1     | Volume de paralelepípedos . . . . .  | 84        |
| 8.2.2     | Enunciado e prova do teorema . . . . .                                     | 87        |
| 8.2.3     | Mudanças de coordenadas clássicas . . . . .                                | 91        |
| 8.3       | Exercícios . . . . .   | 92        |
| <b>9</b>  | <b>Interlúdio analítico - Teorema da função inversa</b>                    | <b>93</b> |
| 9.1       | Caso unidimensional . . . . .  | 93        |
| 9.2       | Caso geral . . . . .   | 95        |
| 9.3       | Teorema da função implícita . . . . .                                      | 97        |
| <b>10</b> | <b>Superfícies - Definição</b>   | <b>99</b> |
| 10.1      | Parametrização por imersões . . . . .                                      | 99        |
| 10.2      | Descrição implícita . . . . .  | 102       |

|   |            |
|---|------------|
| 10.3 Exercícios . . . . .                                     | 103        |
| <b>11 Superfícies - Plano tangente e orientação . . . . .</b> | <b>104</b> |
| 11.1 Definição do plano tangente e linha normal . . . . .     | 104        |
| 11.1.1 Por meio de parametrizações . . . . .                  | 104        |
| 11.1.2 Por meio de vetores tangentes . . . . .                | 107        |
| 11.1.3 Por meio implícito . . . . .                           | 108        |
| 11.2 Orientabilidade . . . . .                                | 110        |
| 11.3 Exercícios . . . . .                                     | 111        |
| <b>A Notações e convenções . . . . .</b>                      | <b>112</b> |
| <b>B Indicações para os exercícios . . . . .</b>              | <b>113</b> |
| B.1 Exercícios da seção 1 . . . . .                           | 113        |
| B.2 Exercícios da seção 2 . . . . .                           | 117        |
| B.3 Exercícios da seção 3 . . . . .                           | 118        |
| B.4 Exercícios da seção 4 . . . . .                           | 120        |
| B.5 Exercícios da seção 5 . . . . .                           | 122        |
| B.6 Exercícios da seção 6 . . . . .                           | 123        |
| B.7 Exercícios da seção 7 . . . . .                           | 128        |
| B.8 Exercícios da seção 8 . . . . .                           | 129        |
| B.9 Exercícios da seção 10 . . . . .                          | 130        |
| B.10 Exercícios da seção 11 . . . . .                         | 132        |
| <b>C Avaliações . . . . .</b>                                 | <b>134</b> |
| C.1 Primeiro teste para casa . . . . .                        | 134        |
| C.2 Primeira avaliação . . . . .                              | 136        |
| <b>D Referências . . . . .</b>                                | <b>140</b> |

## 1 Integrais 1D - Lembrete de integração



Augustin-Louis Cauchy  
1789 – 1857



Peter G. L. Dirichlet  
1805 – 1859



Bernhard Riemann  
1826 – 1866



Jean-Gaston Darboux  
1842 – 1917



Cesare Arzelà  
1847 – 1912



Henri Lebesgue  
1875 – 1941



Pierre J. L. Fatou  
1878 – 1929



Oskar Perron  
1880 – 1975



Arnaud Denjoy  
1884 – 1974



Edward J. McShane  
1904 – 1989



Ralph Henstock  
1923 – 2007



Jaroslav Kurzweil  
1926 – 2022

### 1.1 Integral de Riemann

Em livros de cálculo, define-se a integral de Riemann a partir de *somas de Riemann* (e de Darboux) [KKS04, Spi06, Pin10, PCJ12], a partir de *primitivas* [MHB11] ou de *funções simples* [Gou20]. Começaremos com o primeiro ponto de vista, deduzindo logo o segundo (teorema fundamental do cálculo). O terceiro ponto de vista é melhor compreendido no contexto da integral de Lebesgue, que estudaremos no final desta seção.

#### 1.1.1 Somas de Riemann

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $a < b$ , e  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função numérica (não se supõe que seja contínua). Por *integral de  $f$* , entendemos a área do subconjunto do plano  $\mathbb{R}^2$  contido entre o segmento  $[a, b]$  e o gráfico  $f([a, b]) = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ . Na teoria da integral de Riemann, esta é obtida por meio de aproximações sucessivas com retângulos (veja a figura 1). Para tanto, definimos uma **partição** de  $[a, b]$  como um conjunto de intervalos

$$\mathcal{P} = \{[t_i, t_{i+1}] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

onde  $n$  é um número inteiro,  $t_1 = a$ ,  $t_{n+1} = b$ , e  $t_i \leq t_{i+1}$  para todo  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Também definimos uma **partição pontilhada** como um conjunto de pares

$$\mathcal{P}_p = \{(x_i, [t_i, t_{i+1}]) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

onde  $\{[t_i, t_{i+1}] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  define uma partição de  $[a, b]$ , e  $x_i \in [t_i, t_{i+1}]$  para  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Definição 1.1.** A soma de Riemann de uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  para uma partição pontilhada  $\mathcal{P}_p = \{(x_i, [t_i, t_{i+1}]) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  é definida como

$$S(f, \mathcal{P}_p) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Espera-se que quanto mais “fina” a partição, melhor a aproximação da área. Isto é formalizado da seguinte forma. Seja  $\epsilon > 0$  um número real. Dizemos que uma partição  $\mathcal{P} = \{[t_i, t_{i+1}] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  é  **$\epsilon$ -fina** se  $t_{i+1} - t_i \leq \epsilon$  para todo  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Similarmente, uma partição pontilhada  $\mathcal{P}_p$  é dita  $\epsilon$ -fina se a partição  $\mathcal{P}$  subjacente for. No limite, obtém-se a definição original da integral de Riemann.

**Definição 1.2.** Dizemos que uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **Riemann-integrável**, ou simplesmente **integrável**, se existe um número real  $\ell \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\epsilon > 0$ , existe um  $\eta > 0$  tal que para toda partição pontilhada  $\mathcal{P}_p$   $\eta$ -fina, temos

$$|S(f, \mathcal{P}_p) - \ell| < \epsilon.$$

Neste caso, o valor  $\ell$  é único, é chamado de **integral** de  $f$  e é denotado  $\int f$ .

**Notação 1.3.** Se quisermos explicitar o intervalo de integração, escreveremos  $\int_a^b f$  no lugar de  $\int f$ . A propósito, se  $f$  é integrável, então mostra-se que por todo intervalo  $[x, y] \subset [a, b]$ , a restrição de  $f$  a  $[x, y]$ , denotada  $f|_{[x, y]}$ , também é integrável. Denotaremos sua integral  $\int_x^y f$ . Além disso, se quisermos explicitar a variável de integração, escreveremos  $\int_a^b f(x) dx$ . Por exemplo, poderemos escrever  $\int_a^b (x^2 + x + 1) dx$ .

Como consequência da definição, se  $f$  for integrável, então obtém-se a integral como o limite das somas de Riemann por *qualquer* sequência de partições pontilhadas  $\eta$ -finas com  $\eta$  indo para 0. Por exemplo, pode-se usar a *n-subdivisão regular* de  $[a, b]$ :

$$\mathcal{P} = \left\{ \left[ a + (i-1) \cdot \frac{b-a}{n}, a + i \cdot \frac{b-a}{n} \right] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}, \quad (1)$$

e escolher, em cada um desses intervalos, o ponto  $x_i$  como sendo o meio do intervalo. Porém, a definição exige que o limite valha para *toda sequência* de partições pontilhadas. Exceto pelos exemplos simples a seguir, essa definição de integrabilidade é imprática, e preferiremos a baseada nas somas de Darboux (apresentada na seção 1.1.2), ou, melhor ainda, usando o arsenal clássico de técnicas de integração coletadas na seção 1.2.

**Observação 1.4.** Na verdade, podemos restringir a definição 1.2 apenas a partições regulares, como na equação (1) (veja [Ton01] para uma prova). Isso é feito de forma implícita em vários livros de cálculo, como [SR17]. Porém, não podemos restringir a partições regulares pontilhadas com o ponto médio (ou o ponto à esquerda, ou à direita, do intervalo). De fato, certas funções não Riemann-integráveis se tornariam integráveis para essa nova definição — um exemplo sendo a indicadora dos racionais, no exemplo 1.9.

**Observação 1.5.** Antes de Riemann, Cauchy já havia dado uma definição da integral semelhante à 1.2, com a diferença de que os pontos das partições eram escolhidos como *o ponto à esquerda* dos intervalos. Isto é, só considerava partições pontilhadas da forma

$$\mathcal{P}_p = \{(t_i, [t_i, t_{i+1}]) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

Enfatizamos o fato de que ele considerava todas as partições, não apenas as regulares. Mostra-se então que a definição de Riemann e a de Cauchy são equivalentes, no caso de funções contínuas [Gil15], ou mais geralmente de funções limitadas [KPR62]. Porém, fora estes casos, podemos construir funções Cauchy-integráveis mas não Riemann-integráveis. Um exemplo é dado pela função  $x \mapsto 1/\sqrt{1-x}$  sobre  $[0, 1]$  (veja o exemplo 1.10).

**Exemplo 1.6** (Função constante). Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a função constante igual a 1. Por qualquer partição pontilhada  $\mathcal{P}_p = \{(x_i, [t_i, t_{i+1}]) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ , temos

$$S(f, \mathcal{P}_p) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (t_{i+1} - t_i) = \underbrace{t_{n+1}}_b - \underbrace{t_1}_a = b - a.$$

Como o cálculo não depende da partição escolhida,  $f$  é Riemann-integrável, e  $\int f = b - a$ .

**Exemplo 1.7** (Indicadora de um intervalo semiaberto). Seja  $f = \chi_{[a,b)}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a função indicadora de  $[a, b)$ , i.e.,  $f(x) = 1$  se  $x \in [a, b)$  e  $f(b) = 0$ . Observemos que ela não é contínua. Contudo, ela é integrável. Com efeito, por qualquer partição pontilhada, e reproduzindo o cálculo acima, obtemos

$$S(f, \mathcal{P}_p) = t_n - t_1 \quad \text{ou} \quad t_{n+1} - t_1,$$

dependendo se  $x_n = b$  ou não. Em ambos os casos, se  $\mathcal{P}$  é  $\epsilon$ -fina, temos

$$|S(f, \mathcal{P}_p) - (b - a)| \leq \epsilon.$$

Deduzimos que  $f$  é integrável e  $\int f = b - a$ .

**Exemplo 1.8** (Função identidade). Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a função identidade, i.e.,  $f(x) = x$ . Por qualquer partição pontilhada  $\mathcal{P}_p = \{(x_i, [t_i, t_{i+1}]) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ , temos

$$S(f, \mathcal{P}_p) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Introduzimos agora a soma auxiliar

$$S^* = \sum_{i=1}^n \frac{t_{i+1} + t_i}{2} (t_{i+1} - t_i).$$

Por um lado, um cálculo telescópico mostra que

$$S^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_{i+1} + t_i)(t_{i+1} - t_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_{i+1}^2 - t_i^2) = \frac{1}{2} (b - a)^2.$$

Por outro lado, se  $\mathcal{P}$  for  $\epsilon$ -fina, vale

$$|S^* - S(f, \mathcal{P}_p)| \leq \left| \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_{i+1} + t_i}{2} - x_i \right) (t_{i+1} - t_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{2} (t_{i+1} - t_i) = \frac{\epsilon}{2} (b - a)$$

pois  $x_i \in [t_i, t_{i+1}]$ . Deduzimos a desigualdade

$$\left| S(f, \mathcal{P}_p) - \frac{1}{2}(b-a)^2 \right| \leq \frac{\epsilon}{2}(b-a)^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Logo,  $f$  é Riemann-integrável e sua integral vale  $\frac{1}{2}(b-a)^2$ .

**Exemplo 1.9** (Função de Dirichlet). Seja  $f = \chi_{\mathbb{Q}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função indicadora dos racionais sobre  $[0, 1]$ , isto é,  $f(x) = 1$  se  $x$  é racional e  $f(x) = 0$  se não. Ela não é Riemann-integrável. Com efeito, por *qualquer* partição  $\mathcal{P} = \{[t_i, t_{i+1}] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  de  $[0, 1]$ , podemos definir duas partições pontilhadas  $\mathcal{P}_p$  e  $\mathcal{P}'_p$  tal que

$$S(f, \mathcal{P}_p) = 0 \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}'_p) = 1.$$

Elas são obtidas respectivamente escolhendo em cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  um ponto  $x_i$  racional ou irracional — lembremos que os racionais são densos em  $\mathbb{R}$ . Vale mencionar que essa função, embora não seja integrável no sentido de Riemann, é no sentido de Lebesgue e de Henstock-Kurzweil (consulte a seção 1.3).

**Exemplo 1.10.** Seja  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(0) = 0$  e  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  se  $x > 0$ . Pelo fato de ser ilimitada, pode-se mostrar que ela não é Riemann-integrável. De fato, por qualquer partição  $\mathcal{P} = \{[t_i, t_{i+1}] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  de  $[0, 1]$ , existe um intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  onde  $f$  é ilimitada. Escolhendo nesse intervalo um ponto  $x_i$  tal que  $f(x_i)$  é arbitrariamente grande, obtemos uma soma de Riemann arbitrariamente grande, que portanto não admite limite. De modo geral, mostra-se que *uma função Riemann-integrável tem que ser limitada*. Porém, é interessante observar que as integrais restritas  $\int_{\epsilon}^1 f$ , por  $\epsilon \in (0, 1]$ , existem e valem  $2(1 - \sqrt{\epsilon})$ . Em particular, temos o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 f = 2.$$

Este limite é chamado de *integral imprópria* (veja a seção 1.2.4). Como no exemplo anterior, mencionamos que  $f$  é integrável no sentido de Lebesgue e de Henstock-Kurzweil.

### 1.1.2 Somas de Darboux

Para pontilhar uma partição, os “piores” pontos que pode-se escolher são os que atingem o mínimo e o máximo da função em cada intervalo. Esta é a ideia de Darboux.

**Definição 1.11.** As **somas inferior e superior de Darboux** de uma função limitada  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  em relação a uma partição (não-pontilhada)  $\mathcal{P} = \{[t_i, t_{i+1}] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  são

$$\begin{aligned} S_{\inf}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n \inf\{f(x) \mid x \in [t_i, t_{i+1}]\} \cdot (t_{i+1} - t_i) \\ \text{e} \quad S_{\sup}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n \sup\{f(x) \mid x \in [t_i, t_{i+1}]\} \cdot (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Claramente, por toda partição pontilhada  $\mathcal{P}_p$  cuja partição subjacente é  $\mathcal{P}$ , temos

$$S_{\inf}(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}_p) \leq S_{\sup}(f, \mathcal{P}).$$

Além disso, se  $\mathcal{P}'$  é um *refinamento* de  $\mathcal{P}$  — i.e., uma partição cujos intervalos estão contidos nos de  $\mathcal{P}$  — então

$$S_{\inf}(f, \mathcal{P}') \geq S_{\inf}(f, \mathcal{P}) \quad \text{e} \quad S_{\sup}(f, \mathcal{P}') \leq S_{\sup}(f, \mathcal{P}).$$

Os “valores limites” destas somas têm nome.



**Definição 1.12.** As integrais inferior e superior de Darboux de  $f$  são

$$\begin{aligned} S_{\inf}(f) &= \sup \{ S_{\inf}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b] \} \\ \text{e } S_{\sup}(f) &= \inf \{ S_{\sup}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b] \}. \end{aligned}$$

Quando estes valores coincidem, dizemos que  $f$  é **Darboux-integrável**, e definimos a sua integral como este valor.

**Teorema 1.13.** *Uma função limitada  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é Riemann-integrável se e somente se ela é Darboux-integrável. Neste caso, as integrais coincidem.*

### 1.1.3 Propriedades fundamentais

Da formulação de Darboux deduzem-se convenientemente as principais propriedades da integral de Riemann. Recomendamos que o leitor consulte as provas em [Spi06, §§ 13-14].

**Teorema 1.14** (Linearidade). *Sejam  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integráveis e  $c \in \mathbb{R}$ . Então  $f + cg$  é Riemann-integrável e*

$$\int (f + cg) = \int f + c \int g.$$

**Teorema 1.15** (Positividade & monotonicidade). *Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrável e não negativa. Então*

$$\int f \geq 0.$$

*Como corolário, se  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são Riemann-integráveis e  $f \leq g$ , vale*

$$\int f \leq \int g.$$

**Teorema 1.16** (Integrabilidade absoluta). *Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrável. Então  $|f|$  é Riemann-integrável, e*

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

**Teorema 1.17** (Aditividade). *Sejam  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrável e  $c \in (a, b)$ . Então  $f$  é Riemann-integrável em  $[a, c]$  e  $[c, b]$ , e*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**Teorema 1.18** (Teorema fundamental do cálculo). *Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então ela é Riemann-integrável. Além disso, a função*

$$\begin{aligned} F: [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f \end{aligned}$$

*é continuamente derivável e  $F' = f$ .*

Como corolário, se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva de  $f$  (i.e.,  $F$  derivável e  $F' = f$ ), então

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

O próximo teorema é uma generalização deste resultado ( $F'$  pode não ser contínua).

**Teorema 1.19** (Segundo teorema fundamental do cálculo). *Seja  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável. Se  $F'$  é Riemann-integrável, então*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

**Notação 1.20.** Neste documento, usaremos os colchetes  $[F]_a^b$ , ou a barra vertical  $F|_a^b$ , para denotar  $F(b) - F(a)$  (preferiremos a primeira notação para expressões longas).

**Observação 1.21** (Critério de integrabilidade de Lebesgue-Vitali). O teorema 1.18 mostra que toda função contínua (em um intervalo compacto  $[a, b]$ ) é Riemann-integrável. No entanto, a classe das funções Riemann-integráveis não se restringe às funções contínuas. Já estudamos no exemplo 1.7 uma função com um ponto de descontinuidade. De modo geral, o teorema de Lebesgue-Vitali garante que uma função limitada é Riemann-integrável se e somente se ela for contínua *quase em todo lugar* — ou seja, o conjunto de pontos de descontinuidade é *de medida zero*, na linguagem da teoria de medida de Lebesgue (veja a seção 1.3.1). Em particular, uma função limitada com um número finito, ou contável, de descontinuidades é Riemann-integrável. Mencionemos que o exemplo 1.9 fornece uma função não Riemann-integrável, de fato, ela admite um número incontável de descontinuidades (ela é contínua em nenhum lugar).

**Observação 1.22** (Outra formulação do teorema fundamental do cálculo). De modo mais geral, pode-se perguntar se o resultado a seguir é válido: dado  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável, *então a derivada  $F'$  é Riemann-integrável e  $\int_a^b F' = [F]_a^b$* . Como se vê no seguinte exemplo, está errado. Considere a função  $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{se } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ela é derivável, e

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x^2} & \text{se } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como  $F'$  é ilimitada, ela não é Riemann-integrável. Veremos que esse resultado ainda é falso para a integral de Lebesgue, mas se torna válido para a de Henstock-Kurzweil.

#### 1.1.4 Passagem ao limite sob o sinal de integral

Citamos agora três resultados relacionados ao comportamento da integral de Riemann a passagem ao limite. O segundo e terceiro são mais trabalhosos; uma demonstração foi dada por Cesare Arzelà, para a qual encaminhamos o leitor para [Lux71]. Vale a pena destacar que esses resultados são expressos de forma mais geral na integral de Lebesgue.

**Teorema 1.23** (Convergência uniforme sob o sinal de integral). *Considere uma sequência  $(f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  de funções Riemann-integráveis que converge uniformemente a uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Então  $f$  é Riemann-integrável, e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

**Teorema 1.24** (Convergência dominada para a integral de Riemann). *Considere uma sequência  $(f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  de funções Riemann-integráveis que converge pontualmente a uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrável, e tal que existe uma função Riemann-integrável  $g: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  que domina a sequência, i.e., tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para todos  $x \in [a, b]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Então vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

**Teorema 1.25** (Lemma de Fatou para a integral de Riemann). *Considere uma sequência  $(f_n: [a, b] \rightarrow [0, +\infty))_{n \in \mathbb{N}}$  de funções não negativas e Riemann-integráveis que converge pontualmente a uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrável. Então vale*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \geq \int f.$$

## 1.2 Técnicas de integração e integral imprópria

Veremos nessa seção as três estratégias elementares para calcular uma integral (via primitiva, substituição e integração por partes), bem como a noção de integral imprópria.

### 1.2.1 Integração via primitiva

Ao calcular uma integral, nosso primeiro reflexo é procurar uma primitiva e calcular sua diferença, como no teorema 1.18. Para isso, consultamos uma tabela de primitivas.

| Função                            | Primitiva                       | Função                                       | Primitiva  |
|-----------------------------------|---------------------------------|--|--|
| $x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$                         | $\tan x$   |
| $x^{-1}$                          | $\log  x $                      | $\frac{1}{\sin^2 x}$                         | $-\cotan x$  |
| $e^x$                             | $e^x$                           | $\frac{1}{a^2+x^2} \quad (a \neq 0)$         | $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$                  |
| $a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$     | $\frac{a^x}{\log a}$            | $\frac{1}{a^2-x^2} \quad (a \neq 0)$         | $\frac{1}{2a} \log \left  \frac{x+a}{x-a} \right $ |
| $\sin x$                          | $-\cos x$                       | $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a > 0)$     | $\arcsen \frac{x}{a}$                              |
| $\cos x$                          | $\sin x$                        | $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad (a \neq 0)$  | $\log (x + \sqrt{a^2+x^2})$                        |
| $\tan x$                          | $-\log  \cos x $                | $\frac{1}{\sqrt{-a^2+x^2}} \quad (a \neq 0)$ | $\log  x + \sqrt{-a^2+x^2} $                       |
| $\cotan x$                        | $\log  \sin x $                 | $\log x$                                     | $x \log x - x$                                     |

**Exemplo 1.26.** Para calcular  $\int_0^1 \sqrt{3x+1} \, dx$ , observamos que a derivada de  $x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{3/2}$  é  $x \mapsto \sqrt{3x+1}$ , e escrevemos

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1} \, dx = \left[ \frac{2}{9}(3x+1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{14}{9}.$$

### 1.2.2 Integração por substituição

Um outro procedimento, mais sofisticado, é baseado no seguinte teorema (que é apenas uma consequência da regra da cadeia).

**Teorema 1.27** (Mudança de coordenadas). *Sejam  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $\phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$  continuamente derivável. Vale*

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u) \, du.$$

Na prática, para aplicar esse resultado a uma expressão  $\int_a^b g \, dx$ , tentaremos adivinhar a substituição  $\phi$ , e escrever  $g$  como  $f(\phi(x))\phi'(x)$ . É conveniente usar a notação simbólica

$$\begin{cases} "u = \phi(x)" \\ "du = \phi'(x) \, dx" \end{cases} \quad \text{donde} \quad \int_a^b \underbrace{f(\phi(x))}_u \underbrace{\phi'(x) \, dx}_{du} = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u) \, du.$$

Como mnemônico, lembraremos que “ $du = \phi'(x) \, dx$ ” vem de “ $\frac{du}{dx} = \frac{d\phi(x)}{dx} = \phi'(x)$ ”.

**Exemplo 1.28.** Para calcular  $\int_0^1 2x \ln(x^2 + 1) \, dx$ , usamos a substituição  $\phi(x) = x^2 + 1$ :

$$\begin{cases} u = x^2 + 1 \\ du = 2x \, dx, \end{cases}$$

e escrevemos a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x \ln(x^2 + 1) \, dx &= \int_0^1 \ln(\underbrace{x^2 + 1}_u) \underbrace{2x \, dx}_{du} = \int_{\phi(0)}^{\phi(1)} \ln(u) \, du = \int_1^2 \ln(u) \, du \\ &= [x \ln(x) - x]_1^2 = 1 - 2 \ln(2). \end{aligned}$$

### 1.2.3 Integração por partes

Dadas duas funções  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deriváveis, sabemos que vale  $(uv)' = u'v + uv'$ . Se elas são também continuamente deriváveis, então deduz-se, por linearidade,

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$

Passando um termo integral ao outro lado, obtém-se a fórmula de *integração por partes*:

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

**Exemplo 1.29.** Para calcular  $\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx$ , usamos a integração por partes com

$$\begin{cases} u(x) = \arctan x & u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x, \end{cases}$$

e escrevemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx &= \int_0^{\sqrt{3}} uv' = [uv]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} u'v \\ &= [x \arctan x]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2). \end{aligned}$$

### 1.2.4 Integral imprópria 🚀

Uma lacuna crucial da integral de Riemann, conforme definida na seção 1.1.1, é que ela não aceita integrar funções ilimitadas, ou definidas em intervalos não-compactos. Felizmente, ela pode ser generalizada para esses casos. Para compreender isso, consideremos uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Ela é Riemann-integrável, e mostra-se que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f = \int_a^b f.$$

Isso nos convida à seguinte definição.

**Definição 1.30.** Seja uma função contínua  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um intervalo da forma

$$I = (a, b], \quad [a, b), \quad (-\infty, b] \quad \text{ou} \quad [a, +\infty).$$

Se o seguinte limite existe

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f,$$

então dizemos que a função  $f$  é **Cauchy-Riemann-integrável** e que a integral  $\int_I f$  **converge**. Definimos sua **integral imprópria** (ou **generalizada**, ou de **Cauchy-Riemann**)  $\int_I f$  como este limite. Caso contrário, dizemos que a integral **diverge**.

**Definição 1.31.** Dizemos que a integral  $\int_I f$  é **absolutamente convergente** se a integral  $\int_I |f|$  é convergente, e que  $f$  é **absolutamente integrável**.

**Observação 1.32.** Pode-se mostrar que uma integral absolutamente convergente é convergente (isto é, uma função Cauchy-Riemann-integrável é absolutamente integrável), mas a recíproca é falsa (veja o exemplo 1.38). As integrais que são convergentes, mas não absolutamente, são ditas **semiconvergentes** (ou **condicionalmente convergentes**).

**Notação 1.33.** Poderemos denotar uma integral imprópria como  $\int_a^b f$  no lugar de  $\int_{(a,b]} f$  ou  $\int_{[a,b)} f$ . Porém, na notação  $\int_a^b f$ , não se vê de que lado o intervalo é aberto. Isso não será um problema, pois poderemos ler na função  $f$  onde ela não for definida. Se ela for definida em todo  $[a, b]$  e for Riemann-integrável, então a integral imprópria é de fato igual à integral usual, e não há ambiguidade. Além disso, para distingui-las das integrais próprias, é costumeiro referirmo-nos às integrais usuais por **integrais definidas**.

**Exemplo 1.34.** A integral  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  é divergente. De fato,

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = [\log(x)]_1^t = \log(t) - 1 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Por outro lado,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  é convergente, já que

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^t = 1 - \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1.$$

Ela também é absolutamente convergente, pois é não negativa.

**Propriedade 1.35** (Exemplos referenciais). *Seja  $\alpha > 0$ .*

1. A função  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  é absolutamente integrável sobre  $(0, 1]$  se e somente se  $\alpha < 1$ , e sobre  $[1, +\infty)$  se e somente se  $\alpha > 1$ .
2. A função  $x \mapsto e^{\alpha x}$  é absolutamente integrável sobre  $[0, +\infty)$  por qualquer  $\alpha > 0$ .

Para mostrar que uma integral é absolutamente convergente, podemos a comparar com funções já conhecidas, usando o seguinte resultado.

**Propriedade 1.36** (Critério da comparação para a integrabilidade absoluta). *Sejam  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}^+$  contínuas.*

1. Se  $|f| \leq \phi$  e  $\phi$  abs. integrável sobre  $I$ , então  $f$  também é abs. integrável sobre  $I$ , e

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I \phi.$$

Suponhamos agora que  $f$  seja não negativa, e que  $I = (a, b]$  com  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

2. Se  $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a} \phi(x)$  e  $\phi$  abs. integrável sobre  $I$ , então  $f$  é abs. integrável sobre  $I$ .
3. Se  $f(x) \sim_{x \rightarrow a} \phi(x)$ , então  $f$  é abs. integrável sobre  $I$  se e somente se  $\phi$  é.

Similarmente, suponhamos que  $I = [a, b)$  com  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

4. Se  $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow b} \phi(x)$  e  $\phi$  abs. integrável sobre  $I$ , então  $f$  é abs. integrável sobre  $I$ .
5. Se  $f(x) \sim_{x \rightarrow b} \phi(x)$ , então  $f$  é abs. integrável sobre  $I$  se e somente se  $\phi$  é.

**Exemplo 1.37.** A integral  $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x^2 \, dx$  é absolutamente convergente. De fato,  $x \mapsto \sin(x)/x^2$  é limitada pela função não negativa  $x \mapsto 1/x^2$ , que é absolutamente integrável sobre  $\mathbb{R}^+$  pelo exemplo 1.34. Podemos usar então o ponto 1 da propriedade 1.36.

No caso de integrais semiconvergentes, não podemos aplicar o critério de comparação anterior. Outras técnicas de integração devem ser usadas.

**Exemplo 1.38.** A integral  $\int_0^{+\infty} \cos(x)/x \, dx$  é convergente. Para ver isso, fixemos um  $a > 0$ , e efetuemos uma integração por partes com  $u'(x) = \cos(x)$  e  $v(x) = 1/x$ :

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\cos(x)}{x} \, dx &= [u(x)v(x)]_0^a - \int_0^a u(x)v'(x) \, dx \\ &= \frac{\sin(a)}{a} + \int_0^a \frac{\sin(x)}{x^2} \, dx. \end{aligned}$$

O primeiro termo converge para zero, e o segundo para  $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x^2 \, dx$ , pois a integral é absolutamente convergente, pelo exemplo 1.37. Concluimos que  $\int_0^{+\infty} \cos(x)/x \, dx$  converge. Porém, mostra-se que não é absolutamente convergente (veja o exercício 1.10).

### 1.3 Outras integrais

Esta seção “cultural” serve como um esboço de outras teorias de integração encontradas durante uma formação em matemática, aos níveis de graduação e mestrado. Apresentaremos brevemente a integral de Lebesgue que, além de fornecer um cenário muito geral para a integração — a teoria contemporânea da probabilidade baseia-se na teoria da medida de Lebesgue — nos permite generalizar os teoremas de convergência que vimos

na seção 1.1.4. Em seguida, definiremos a integral Henstock e Kurzweil que, surpreendentemente, não é mais do que uma simples modificação da definição da integral de Riemann. Entretanto, ela é bastante geral: permite integrar todas as funções integráveis no sentido de Riemann e Lebesgue, e também pode lidar com integrais impróprias. Recomendamos a leitura de [KKS04] para um relato detalhado dessas duas integrais (e mais), e de [Wel11] para uma introdução acessível à integral de Henstock-Kurzweil.

### 1.3.1 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue repõe na teoria da medida, cuja ideia principal é “medir a largura” dos subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Denotemos  $P(\mathbb{R})$  o conjunto de partes de  $\mathbb{R}$ , isto é, o conjunto de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

$$P(\mathbb{R}) = \{A \mid A \subset \mathbb{R}\}.$$

Como primeira tentativa, Lebesgue quis definir uma função  $m^*: P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo a três axiomas [Leb72, página 118]:

*invariância* as translações de um conjunto têm a mesma medida,

*$\sigma$ -aditividade* a medida de uma união numerável de conjuntos disjuntos vale a soma das medidas,

*intervalos* a medida de um intervalo é  $m^*([a, b]) = b - a$ .

Para tanto, um candidato natural é a **medida exterior**, definida por todo  $A \subset \mathbb{R}$  como

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i - a_i) \mid ((a_i, b_i))_{i \in \mathbb{N}} \text{ família de intervalos tal que } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i) \right\}.$$

Infelizmente, esta medida não satisfaz os três axiomas. Isto se deve a detalhes sutis da teoria dos conjuntos; por exemplo, o *conjunto de Vitali*, que só pode ser definido usando o axioma da escolha, mostra que  $m^*$  não é  $\sigma$ -aditiva. Para contornar este problema, é preciso restringir a medida exterior  $m^*$  a um determinado tipo de conjuntos.

**Definição 1.39.** Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  é **mensurável** se por todo  $B \subset \mathbb{R}$ , vale

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \setminus A).$$

A coleção dos mensuráveis é chamada de  **$\sigma$ -álgebra de Lebesgue** e denotada  $\mathcal{M}$ . A restrição de  $m^*$  a  $\mathcal{M}$  é chamada de **medida de Lebesgue** e denotada  $m: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .

A medida  $m$  agora é  $\sigma$ -aditiva. Além disso, mostra-se que  $\mathcal{M}$  contém todos intervalos de  $\mathbb{R}$ , bem como os subconjuntos abertos, seus complementares, e suas uniões finitas.

Passemos agora para a integral de funções. Da mesma forma que apenas determinados conjuntos são considerados, apenas determinadas funções devem ser consideradas.

**Definição 1.40.** Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  é **mensurável** se por todo  $a \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > a\}$  é mensurável.

Em particular, funções contínuas, funções monótonas, ou funções com um número finito de descontinuidades, são mensuráveis. Uma outra classe de funções mensuráveis, importantes na teoria da medida, são as **funções simples**, isto é, as funções que assumem um número finito de valores. Toda função simples  $\phi$  pode se escrever

$$\phi: x \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$$

para um determinado  $n \in \mathbb{N}$ , valores  $a_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e conjuntos mensuráveis  $A_i \subset \mathbb{R}$ . Relembremos aqui que a indicadora  $\chi_{A_i}$  é a função que vale 1 quando  $x \in A_i$ , e 0 se não. Para tal função simples, é natural definir sua integral como

$$\int \phi = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i).$$

De modo geral, definimos a integral de Lebesgue como a “integral inferior” de aproximações por funções simples, um processo semelhante ao da integral de Darboux.

**Definição 1.41.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  mensurável e não negativa. A sua **integral de Lebesgue** é

$$\int f = \sup \left\{ \int \phi \mid \phi \text{ simples e } 0 \leq \phi \leq f \right\}.$$

Mais geralmente, seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  uma função mensurável, e defina

$$f^+: x \mapsto \max \{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-: x \mapsto \max \{-f(x), 0\}.$$

Se pelo menos uma das integrais  $\int f^+$  e  $\int f^-$  for finita, definimos a **integral de Lebesgue** de  $f$  como

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Dizemos que  $f$  é **Lebesgue-integrável** se sua integral for finita.

Todas propriedades básicas da integral de Riemann vistas na seção 1.1.3 valem para a integral de Lebesgue: linearidade, positividade, monotonicidade, integrabilidade absoluta e aditividade. Entretanto, uma diferença fundamental é que a integral de Lebesgue permite a integração de funções ilimitadas, como ilustrado pelo seguinte teorema.

**Teorema 1.42** (Convergência monótona). *Seja  $(f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência crescente de funções mensuráveis e não negativas. Seja  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  o limite pontual. Então  $f$  é mensurável, e vale*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Em particular, se o limite  $\int f$  é finito, então  $f$  é Lebesgue-integrável. Esse é o caso, por exemplo, da função  $x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \chi_{(0,1]}(x)$  do exemplo 1.10, cuja integral é 2.

**Observação 1.43.** Quando  $f$  é mensurável e não negativa, podemos construir explicitamente uma sequência crescente de funções simples  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a  $f$ . Em particular, teremos que  $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n$ . Para tanto, definimos, para  $i, n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_i^n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{i}{2^n} \right\} \quad \text{e} \quad A_\infty^n = \{x \in \mathbb{R} \mid n \leq f(x)\},$$

e pomos

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{A_i^n}(x) + n \chi_{A_\infty^n}(x).$$

Mostra-se que  $\phi_n \rightarrow f$  pontualmente. Além disso, quando  $f$  é limitada, a convergência é uniforme. Damos uma representação gráfica dessa construção na figura 1.



Para continuar nossa apresentação, é importante observar que, no sentido de Lebesgue, as funções são definidas apenas **quase em todo lugar (q.t.l.)**. Para ser mais preciso, dizemos que duas funções mensuráveis  $f$  e  $g$  são **iguais em q.t.l.** se

$$m(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Em outras palavras, as funções são iguais fora de um conjunto de medida zero. Neste caso,  $f$  é Lebesgue-integrável se e somente se  $g$  é, sendo então iguais suas integrais.

Outro resultado fundamental da integral de Lebesgue é o seguinte.

**Teorema 1.44** (Convergência dominada para a integral de Lebesgue). *Seja  $(f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções mensuráveis que converge pontualmente q.t.l. a uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (isto é, ela converge pontualmente fora de um conjunto de medida zero). Suponha que exista uma função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  Lebesgue-integrável que domina a sequência, i.e., tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para todos  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $f$  é Lebesgue-integrável, e vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

A força desse teorema, em comparação com a versão para a integral de Riemann no teorema 1.24, é que a integrabilidade do limite é automática: nenhuma condição precisa ser verificada sobre  $f$ .

### 1.3.2 Integral de Henstock-Kurzweil

Observamos no exemplo 1.10 que a integral de Riemann não é capaz de integrar funções ilimitadas (a não ser por meio da integral imprópria). Este fenômeno ocorre porque, dada uma partição, a soma de Riemann de uma função ilimitada pode se tornar arbitrariamente grande. Além disso, destacamos no teorema 1.16 que ela é uma *integral absoluta*, isto é, uma função é Riemann-integrável se e somente se ela é absolutamente Riemann-integrável. Para superar essas limitações, a integral de Henstock-Kurzweil envolve uma versão mais refinada de partição pontilhada, baseada na noção de calibre.

**Definição 1.45.** Um **calibre** em  $[a, b]$  é uma função  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ . Se  $\mathcal{P}_p = \{(x_i, [t_i, t_{i+1}]) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  é uma partição pontilhada de  $[a, b]$  e  $\delta$  é um calibre, dizemos que  $\mathcal{P}_p$  é  **$\delta$ -fina** se satisfaz, para todo  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$[t_i, t_{i+1}] \subset [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)].$$

**Observação 1.46.** Seja  $\epsilon > 0$ . Ao comparar a definição precedente com a da integral de Riemann, vemos que uma partição pontilhada  $\epsilon$ -fina nada mais é do que uma partição pontilhada  $\delta$ -fina com  $\delta$  o calibre constante igual a  $\epsilon$ .

**Observação 1.47.** Graças aos calibres, poderemos contornar o problema da integração de funções ilimitadas que motivou essa seção: bastará escolher um calibre que “assuma valores pequenos onde a função é grande” (veja a figura 1 para uma explicação visual).

Antes de tudo, citamos um lema que garante a existência de partições finas.

**Lema 1.48** (de Cousin). *Dado um calibre  $\delta$  em  $[a, b]$ , existe uma partição pontilhada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ .*

Agora, a definição de nossa nova integral é uma réplica da definição 1.2 de Riemann.

**Definição 1.49.** Dizemos que uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **KH-integrável** se existe um número real  $\ell \in \mathbb{R}$  tal que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe um calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para toda partição pontilhada  $\mathcal{P}_p$   $\delta$ -fina, temos

$$|S(f, \mathcal{P}_p) - \ell| < \epsilon.$$

Neste caso,  $\ell$  é único, chamado **integral de Henstock-Kurzweil** de  $f$ , e denotado  $\int f$ .

**Observação 1.50.** Da mesma forma, podemos definir a integral de Henstock-Kurzweil de uma função sobre  $\mathbb{R}$ , considerando partições (finitas) de  $\mathbb{R}$ .

É uma consequência direta da definição que a integral de Henstock-Kurzweil abrange a de Riemann. Isto também vale para a integral de Lebesgue, mas a prova é menos trivial. Nesse sentido, a integral de Henstock-Kurzweil é a integral “mais geral”.

**Teorema 1.51.** *Toda função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrável é HK-integrável. Além disso, se  $f$  é mensurável, então ela é Lebesgue-integrável se e somente se é absolutamente HK-integrável. Nestes casos, as integrais coincidem.*

Em seguida, estudaremos as propriedades da integral de Henstock-Kurzweil. Ela exhibe as propriedades básicas da integral de Riemann: linearidade, positividade, monotonicidade e aditividade; no entanto, não verifica a integrabilidade absoluta, como veremos no teorema 1.53. Além disso, ela satisfaz um teorema fundamental do cálculo generalizado (conforme mencionado na observação 1.22)

**Teorema 1.52** (Segundo teorema fundamental do cálculo para a integral de Henstock-Kurzweil). *Sejam  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável (exceto potencialmente em um número numerável de pontos). Então  $F'$  é HK-integrável em  $[a, b]$ , e*

$$\int_a^b F' = [F]_a^b.$$

Por fim, examinemos o problema das integrais impróprias. Conhecemos diversos belos cálculos que não são funções integráveis no sentido de Riemann ou de Lebesgue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) \, dx = -\frac{\pi \log 2}{2}.$$

Pelo contrário, todas essas funções são KH-integráveis. Com efeito, o próximo teorema revela que, no sentido de de Henstock-Kurzweil, a noção de integral imprópria não existe.

**Teorema 1.53** (Corolário do lema de Henstock). *Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  HK-integrável sobre  $[c, b]$  por todo  $c \in (a, b)$ . Então  $f$  é HK-integrável sobre  $[a, b]$  se e somente se  $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f$  existe. Neste caso,*

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f.$$

**Observação 1.54.** Um aluno impressionado com o poder da integral de Henstock-Kurzweil pode se perguntar por quê preferimos ensinar a ele a de Riemann. Acontece que eles dois, e outros atores da teoria, responderam em uma carta aberta<sup>1</sup> de 1997:

<sup>1</sup><https://math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/letter/>

To: The authors of calculus textbooks

From: Several authors of more advanced books and articles

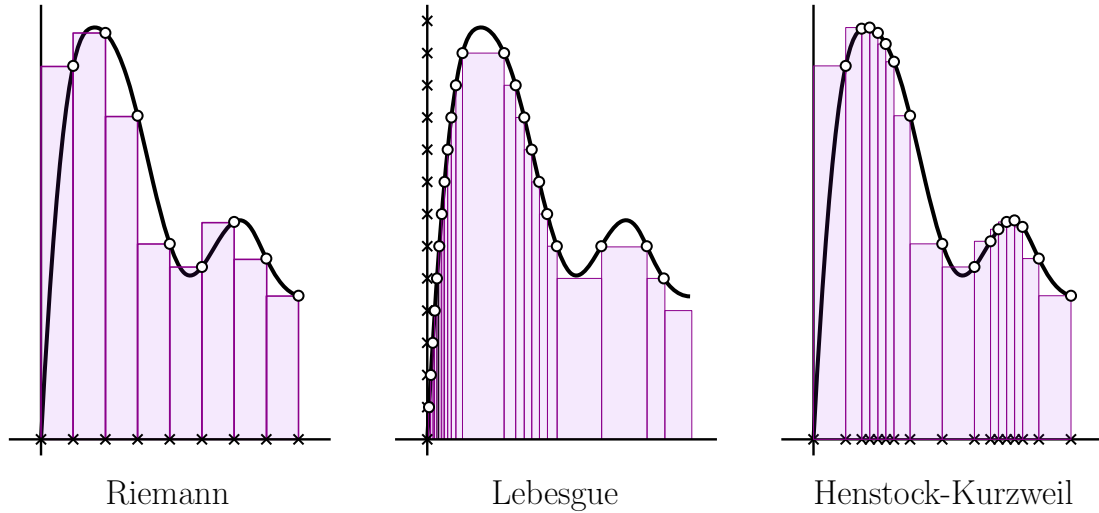
Subject: Replacing the Riemann integral with the gauge integral

It is only an accident of history that the Riemann integral is the one used in all calculus books today. The gauge integral (also known as the generalized Riemann integral, the Henstock integral, the Kurzweil integral, the Riemann complete integral, etc.) was discovered later, but it is a “better” integral in nearly all respects. Therefore, we would like to suggest that in the next edition of your calculus textbook, you present both the Riemann and gauge integrals, and then state theorems mainly for the gauge integral.

**Observação 1.55** (Integral de McShane). Imaginemos a seguinte modificação da integral de Henstock-Kurzweil. Chamemos de **partição pontilhada livre** de  $[a, b]$  um conjunto de pares

$$\mathcal{P}_1 = \{(x_i, [t_i, t_{i+1}]) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

onde  $\{[t_i, t_{i+1}] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  define uma partição de  $[a, b]$ , mas  $x_i$  não é necessariamente um elemento de  $[t_i, t_{i+1}]$ . Como anteriormente, dado um calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ , dizemos que  $\mathcal{P}_1$  é  **$\delta$ -fina** se satisfaz, para todo  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $[t_i, t_{i+1}] \subset [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)]$ . Copiemos então a definição 1.49, substituindo “partição pontilhada” por “partição pontilhada livre”. Obtemos desse modo a **integral de McShane**. Acontece que esta integral é equivalente à de Lebesgue. Esse resultado é uma ilustração do trabalho frutífero em análise no final do século passado, com um retorno às técnicas riemannianas.



**Figura 1:** Para calcular a área sob uma curva, a integral de Riemann corta o eixo das abcissas em segmentos iguais e constrói retângulos. Na integral de Lebesgue, é o eixo das ordenadas que é cortado, e os retângulos são puxados para trás. A integral de Henstock-Kurzweil usa a aproximação de Riemann, mas exige que os intervalos se adaptem às variações da função.

## 1.4 Exercícios

### 1.4.1 Integrais definidas

**Exercício 1.1** (correção). Calcule as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 5x^3 - 3x - 7 \, dx & I_2 &= \int_0^{\pi/4} 2 \cos x - 3 \sin x \, dx & I_3 &= \int_0^{1/3} 2e^{3x} + 2x \, dx \\ I_4 &= \int_0^2 \frac{x}{1+2x^2} \, dx & I_5 &= \int_0^2 \frac{e^{3x}}{1+2e^{3x}} \, dx & I_6 &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x} \, dx \\ I_7 &= \int_0^1 x e^x \, dx & I_8 &= \int_1^e x^2 \ln x \, dx & I_9 &= \int_1^2 \ln^2 x \, dx \\ I_{10} &= \int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx & I_{11} &= \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} \, dx & I_{12} &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \end{aligned}$$

Para  $I_{10}$ ,  $I_{11}$  e  $I_{12}$ , pode-se usar respectivamente as substituições  $t = \sqrt{x}$ ,  $t = \sqrt{x}$  e  $\sin t = x$ .

**Exercício 1.2** (Integrais de Wallis, correção).

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

1. Calcule explicitamente  $I_n$  por todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Deduza a fórmula do *produto de Wallis*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{p=1}^n \left( \frac{2p}{2p-1} \frac{2p}{2p+1} \right) = \frac{\pi}{2}$$

e a aproximação

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

**Exercício 1.3** (Desigualdade de Hölder, correção). Sejam  $a > 0$  e  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  crescente estritamente, derivável em  $]0, a[$ , e tal que  $f(0) = 0$ . Ponha, para todo  $x \in [0, a]$ ,

$$g(x) = \int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} - x f(x),$$

onde  $f^{-1}$  denota a função inversa.

1. Mostre que  $g(x) = 0$  para todo  $x \in [0, a]$ .
2. Deduza a desigualdade de Young: para todo  $b \in ]0, f(a)[$ ,

$$ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}.$$

3. Deduza a desigualdade de Hölder: dados  $a, b \geq 0$  e  $p, q > 1$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Exercício 1.4** (Teorema do valor médio para integrais, correção). Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua.

1. Defina  $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  e  $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ . Mostre que

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

2. Mostre que existe um  $c \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f = (b-a)f(c).$$

3. Além disso, se  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é não negativa e Riemann-integrável, mostre que existe um  $c \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

**Exercício 1.5** (correção). Prova que se  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua,  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis, e

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h,$$

então  $F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$ .

#### 1.4.2 Integrais impróprias

**Exercício 1.6** (correção). Determine se as seguintes integrais impróprias convergem.

$$\begin{array}{lll} I_1 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx & I_2 = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x\sqrt{2-x}} \, dx & I_3 = \int_0^1 \ln x \, dx \\ I_4 = \int_0^{\pi/2} \tan x \, dx & I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+2)^2(x+1)} \, dx & I_6 = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \, dx \\ I_7 = \int_0^{+\infty} x^{2024} e^{-x} \, dx & I_8 = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} \, dx & I_9 = \int_1^2 \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx \end{array}$$

**Exercício 1.7** (Integral de Dirichlet, correção). Considere a integral imprópria

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) \, dx.$$

1. Mostre que  $I$  converge.
2. Partindo da fórmula  $\sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$ , mostre que  $I = -\frac{\pi \log 2}{2}$ .

**Exercício 1.8** (Integrais de Bertrand, correção). Sejam  $\alpha, \beta$  reais. Mostre que

1.  $\frac{1}{t^\alpha (\log t)^\beta}$  é abs. integrável sobre  $[e, +\infty)$  se e somente se  $\alpha > 1$ , ou  $\alpha = 1$  e  $\beta > 1$ .
2.  $\frac{1}{t^\alpha |\log t|^\beta}$  é abs. integrável sobre  $(0, 1/e]$  se e somente se  $\alpha < 1$ , ou  $\alpha = 1$  e  $\beta > 1$ .

**Exercício 1.9** (Função gamma, correção). Ponhamos, por todo  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1. Mostre que a integral imprópria  $\Gamma(x)$  é convergente.
2. Mostre que para todo  $x \in ]1, +\infty[$ , temos  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
3. Mostre que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

**Exercício 1.10** (correção). Mostre que  $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x} dx$  não é absolutamente convergente.

**Exercício 1.11** (correção). Seja  $f: [1, +\infty)$  tal que  $\int_1^{+\infty} f$  converge. Mostre que por todo  $\alpha > 0$ , a seguinte integral converge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx.$$

### 1.4.3 Limites de integrais

**Exercício 1.12** (correção). Por todo  $n \in \mathbb{N}$  positivo, considere a função  $f_n = n \cdot \chi_{(0, 1/n)}$ , onde  $\chi_{(0, 1/n)}$  é a indicadora do intervalo aberto  $(0, 1/n)$ . Calcule  $\int_0^1 f_n$ . Deduza que a hipótese de dominação no teorema de convergência dominada é necessária.

**Exercício 1.13** (correção). Suponha que  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0).$$

**Exercício 1.14** (correção). Suponha que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua, não negativa, e defina  $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ . Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n} = M.$$

## 2 Campos vetoriais - Definição e campos de gradiente

Neste primeiro curso sobre campos vetoriais, apresentaremos a definição, e o importante caso dos campos de gradientes. Também aproveitaremos a oportunidade para discutir o conceito de campos elétricos. Como veremos ao longo do semestre, o cálculo vetorial é um formalismo bem sucedido para o eletromagnetismo. Recomendamos a referência [Gri13].

### 2.1 Lembrete sobre diferenciais

#### 2.1.1 Estrutura euclidiana

Seja  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Relembremos que o espaço  $\mathbb{R}^n$  é munido da norma euclidiana

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

e do produto escalar

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Além disso, definimos a bola aberta de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  e raio  $r > 0$  como o subconjunto

$$\mathcal{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}.$$

A **topologia euclidiana** é definida da seguinte forma: um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é dito aberto se por todo  $x \in A$ , existe  $r > 0$  tal que  $\mathcal{B}(x, r) \subset A$ .

Outra estrutura de que  $\mathbb{R}^n$  é munido é a linear. Sejam  $n, m > 0$  inteiros, e  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  os espaços euclidianos. Denotaremos  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  o espaço vetorial das **aplicações lineares** de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ . Lembremos que, fixando as bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , construímos um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \quad (2)$$

onde  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  representa o espaço vetorial das **matrizes** de ordem  $n \times m$ . Mais precisamente, por toda aplicação linear  $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , existe uma única matriz  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  tal que por todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos  $l(x) = Ax$ , usando o produto matricial.

Em particular, **espaço dual** de  $\mathbb{R}$ , definido como  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  — isto é, o conjunto das formas lineares — é isomorfo a  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Por outro lado,  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  é canonicamente isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Explicitamente, temos o seguinte isomorfismo de espaços vetoriais, conhecido como o teorema da representação de Riesz:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & \langle x, h \rangle \end{array} \right). \end{aligned}$$

Por fim, e abusando levemente das notações, um vetor de  $\mathbb{R}^n$  também será visto como uma matriz  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (veja as convenções no apêndice A). Escreveremos

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{ou} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

### 2.1.2 Diferenciabilidade

**A diferencial.** Para continuar, consideremos um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Relembramos que uma função  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é **diferenciável** em  $x \in \mathbb{R}^n$  se existe  $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - l(h)}{\|h\|} = 0.$$

Se  $l$  existe, então é único, chamamos de diferencial de  $f$  em  $x$  e denotamos  $d_x f$ . Observamos que, equivalentemente, podemos escrever

$$f(x+h) = f(x) + l(h) + o(\|h\|)$$

onde  $o(\|h\|)$  representa uma função tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \|h\|^{-1} o(\|h\|) = 0$ . Esta formulação mostra que  $l$  é a “aproximação linear da função  $f$  ao redor de  $x$ ”. Sabemos que uma função diferenciável é contínua, mas a recíproca é falsa. Além disso, as **derivadas parciais** são, por  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}, \end{aligned}$$

onde  $(e_1, \dots, e_n)$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Se a função for diferenciável, então existem derivadas parciais. Por outro lado, se as derivadas parciais existem e são contínuas, então a função é diferenciável.

**Notação 2.1.** A diferencial  $d_x f$  também denota-se como  $D_x f$ , e as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  como  $\partial_i f$ . Em dimensão dois ou três, usaremos também as notações  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

**Observação 2.2.** Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável se e somente se ela é diferenciável. Neste caso, a derivada e a diferencial admitem a seguinte equivalência: por todo  $s, t \in \mathbb{R}$ ,

$$d_t f(s) = s f'(t).$$

Em particular, a derivada  $f'(t)$  nada mais é do que a diferencial de  $f$  em  $t$  na direção 1, isto é,  $f'(t) = d_t f(1)$ .

**A jacobiana.** Seja  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ao explicitar as funções componentes de  $f$  como  $(f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R})_{1 \leq i \leq m}$ , isto é,

$$f = (f_1, \dots, f_m),$$

vale que  $f$  é diferenciável se e somente se todas as suas componentes forem. Vista como uma matriz, a diferencial chama-se a **matriz jacobiana**:

$$J_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Em particular, quando  $n = 1$ , as componentes de  $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  são funções de (um subconjunto) de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$ , a matriz jacobiana escreve-se como a matriz coluna

$$J_t f = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_m(t) \end{pmatrix},$$

Além disso, quando  $m = n$ , a matriz jacobiana é  $n \times n$ , e podemos considerar seu determinante, chamado de **determinante jacobiano**

$$\det J_x f.$$

Essa quantidade desempenha um papel importante no teorema da mudança de coordenadas (veja a seção 8).

**Notação 2.3.** Para não ficarmos sobrecarregados com muitas notações e detalhes formais supérfluos, não usaremos a notação jacobiana  $J_x f$  neste documento, mas em vez dela, a diferencial  $d_x f$ . Em particular, o determinante jacobiano será denotado  $\det d_x f$ . É verdade que, a rigor, eles não são exatamente os mesmos objetos:  $d_x f$  é uma aplicação linear, e  $J_x f$  uma matriz. No entanto, como definimos o isomorfismo canônico entre aplicações lineares e matrizes (na equação (2)), isto não é um abuso grave de notação.



**Regra da cadeia.** Uma propriedade fundamental é a seguinte, que simplesmente significa que a diferencial de uma composição é igual à composição das diferenciais. Veremos casos especiais dessa fórmula nos corolários 2.7 e 2.8.

**Propriedade 2.4** (Regra da cadeia). *Sejam  $n, m, p$  inteiros positivos,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  abertos, e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^p$  diferenciáveis tal que  $f(\Omega) \subset \Gamma$ . Diagramaticamente, estas funções se encaixam em*

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \Gamma \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p.$$

Então a função composta  $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável e, por todo  $x \in \Omega$ , vale

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f.$$

**Exemplo 2.5.** Sejam  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidas por

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - yz \\ xy - z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

As diferenciais valem, em forma matricial,

$$d_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} 1 & -z & -y \\ y & x & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad d_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

A diferencial da composta  $g \circ f$  escreve-se, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} d_{(x,y,z)}(g \circ f) &= d_{(x-yz, xy-z)}g \cdot d_{(x,y,z)}f \\ &= \begin{pmatrix} 2(x-yz) & 0 \\ xy-z & x-yz \\ 0 & 2(xy-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z & -y \\ y & x & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(xy-z) & -2(xy-z)z & -2(xy-z)y \\ (xy-z) + (y-xz)y & -(xy-z)z - (x-yz)x & -(xy-z)y + (yz-x) \\ 2(xy-z)y & 2(xy-z)x & -2(xy-z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.1.3 O gradiente

Por fim, discutamos o caso  $m = 1$ , i.e., quando  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função numérica. A diferencial é então uma matriz linha, chama-se de **gradiente**, e denota-se

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Como o produto matricial de uma matriz de ordem  $1 \times n$  e uma matriz  $n \times 1$  é igual ao produto escalar, temos a formulação, por todo  $y \in \mathbb{R}^n$

$$d_x f(y) = \nabla f(x) \cdot y = \langle \nabla f(x), y \rangle.$$

Observamos um abuso de notação: no segundo termo,  $\nabla f(x)$  e  $y$  são vistos como matrizes linha e coluna, e no terceiro, eles são vistos como vetores de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.6.** Seja  $f: (0, +\infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y, z) = (xyz)^{1/3}$ . Temos

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &= \frac{1}{3}(xyz)^{1/3} \begin{pmatrix} x^{-1} & y^{-1} & z^{-1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vale destacar que a regra da cadeia assume uma formulação prática no caso onde o domínio e codomínio da composição são  $\mathbb{R}$ , i.e.,

$$\Omega \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

**Corolário 2.7** (Regra da cadeia com domínio e codomínio a reta). *Sejam  $m$  inteiro positivo,  $\Omega \subset \mathbb{R}$  e  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  abertos, e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis tal que  $f(\Omega) \subset \Gamma$ . Então a função composta  $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável e, por todo  $t \in \Omega$ , vale*

$$(g \circ f)'(t) = \langle (\nabla g)(f(t)), f'(t) \rangle.$$

Outro caso prático da regra da cadeia aparece quando a segunda função é de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

A partir da observação 2.2, deduz-se:

**Corolário 2.8** (Regra da cadeia com segunda função numérica). *Sejam  $n$  inteiro positivo,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  abertos, e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis tal que  $f(\Omega) \subset \Gamma$ . Então a função composta  $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e, por todo  $x \in \Omega$ , vale*

$$\nabla(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \nabla f(x).$$

Essas duas fórmulas são, na verdade, apenas casos especiais do diagrama mais geral

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

**Corolário 2.9** (Regra da cadeia com segunda função de codomínio  $\mathbb{R}$ ). *Sejam  $n, m$  inteiros positivos,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  abertos, e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis tal que  $f(\Omega) \subset \Gamma$ . Então a função composta  $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e, por todo  $x \in \Omega$ , vale*

$$\nabla(g \circ f)(x) = (\nabla_{f(x)} g) \cdot d_x f,$$

onde temos um produto de matrizes  $1 \times m$  e  $m \times n$ .

Por fim, e por ser útil para cálculos, fornecemos uma fórmula de diferenciação para o produto de uma função numérica e uma vetorial. O diagrama correspondente é

$$\begin{array}{ccc} & f & \nearrow \\ \Omega \subset \mathbb{R}^n & & \mathbb{R} \\ & g & \searrow \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

**Corolário 2.10** (Diferencial de um produto numérico-vetorial). *Sejam  $n, m$  inteiros positivos,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto, e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciáveis. Então a função produto  $fg: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável e, por todo  $x \in \Omega$ , vale*

$$d_x(fg) = g(x) \nabla f(x) + f(x) d_x g,$$

onde primeiro termo, um produto de matrizes  $m \times 1$  e  $1 \times n$ , é uma matriz  $m \times n$ .

## 2.2 Campos vetoriais

A noção de campo vetorial surge naturalmente em muitas questões matemáticas, seja na teoria das equações diferenciais (problema de Cauchy), na geometria (teoria de Morse) ou na topologia (cohomologia de De Rham), para citar apenas alguns exemplos. Teremos a oportunidade de explorar estes assuntos na segunda metade deste curso. Por enquanto, nos restringiremos à sua aplicação ao formalismo do eletromagnetismo.

### 2.2.1 Definição

**Definição 2.11.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Um **campo vetorial de classe  $C^k$**  em  $\Omega$  é definido como uma aplicação  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ .

**Notação 2.12.** Para explicitarmos as funções componentes de um campo vetorial  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , poderemos usar a notação

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)).$$

Pondo  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , isto lê-se  $F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$ . Para facilitar a leitura, poderemos preferir a notação vertical

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Quando  $n = 2$  (resp.  $n = 3$ ), é comum denotar as coordenadas dos pontos do plano como  $(x, y)$  (resp. dos pontos do espaço como  $(x, y, z)$ ), e as componentes como  $P, Q$  (resp.  $P, Q, R$ ). Escrevemos então

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

**Observação 2.13.** Como vimos na seção 2.1, para provar que um campo  $F = (F_1, \dots, F_n)$  é de classe  $C^k$ , basta verificar que todas as funções componentes  $F_i$  são. Em particular, um campo é  $C^1$  se as  $n^2$  derivadas parciais  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  existem e são contínuas.

**Exemplo 2.14.** As seguintes funções são campos vetoriais e pertencem à classe  $C^\infty$ .

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, y) & (x, y) \longmapsto (-y, x) & (x, y) \longmapsto (1, \cos x). \end{array}$$

Para esboçarmos um campo vetorial  $F$  no plano, escolheremos uns pontos  $(x, y)$ , e desenharemos a seta de origem  $(x, y)$  e direção  $F(x, y)$  (veja a figura 2).

**Exemplo 2.15** (Equação de Lotka-Volterra). Este é um modelo clássico de dinâmica populacional. Seja  $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  o número de coelhos — ou, melhor, a densidade — e  $y: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  o de lobos. O sistema (normalizado) modeliza-se como

$$\begin{cases} x' = x - yx, \\ y' = yx - y. \end{cases}$$

Traduzida para o português, esta equação tem a seguinte redação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A taxa de crescimento da população de coelhos vale:} \\ \quad \underbrace{\text{a quantidade de coelhos}}_{\text{reprodução}} \text{ menos } \underbrace{\text{o produto das duas populações}}_{\text{predação}}, \\ \text{A taxa de crescimento da população de lobos vale:} \\ \quad \underbrace{\text{o produto das duas populações}}_{\text{alimentação}} \text{ menos } \underbrace{\text{a quantidade de lobos}}_{\text{extinção}}. \end{array} \right.$$

Entende-se a evolução da função  $t \mapsto (x(t), y(t))$  como um sistema dinâmico cujo campo vetorial subjacente é

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x - xy \\ xy - y \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 2.16** (Lei de Coulomb). O **campo elétrico** produzido por uma carga pontual  $q$  em  $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  é

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X = (x, y, z) &\longmapsto \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|X - X_0\|^3} (X - X_0), \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\epsilon_0$  é a constante de permissividade do vácuo. Em presença de várias cargas, o *princípio da superposição* garante que o campo resultante é a soma dos campos produzidos por cada uma das cargas em separado. Por exemplo, um **dipolo elétrico** é o sistema formado por duas cargas opostas  $q$  e  $-q$ . Denotemos  $X_0^+$  e  $X_0^-$  suas coordenadas em  $\mathbb{R}^3$ . O campo elétrico torna-se

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\longmapsto \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{X - X_0^+}{\|X - X_0^+\|^3} - \frac{X - X_0^-}{\|X - X_0^-\|^3} \right). \end{aligned}$$

Na presença de uma *distribuição contínua* de cargas — por exemplo, ao longo de um fio ou de uma superfície — não podemos mais somar as contribuições e precisamos integrá-las, como veremos mais adiante.

**Observação 2.17.** Na definição 2.11, a premissa de que o domínio  $\Omega$  é aberto poderia ser relaxada para subconjuntos mais gerais. Em particular, um objeto que nos interessará mais tarde será o das subvariedades.

### 2.2.2 Problema de Cauchy

Sejam dois abertos  $I \subset \mathbb{R}$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , o primeiro representando o *tempo* e o segundo o *espaço*. Seja também uma função contínua

$$H: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Observemos que  $H$  é um “campo vetorial dinâmico”: por todo  $t \in I$ , a função

$$H(t, \cdot): \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é um campo vetorial. Neste contexto, o **problema de Cauchy**, ou **problema de valor inicial**, consiste em, dado um valor inicial  $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$ , achar uma função  $\gamma: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  tal que  $t_0 \in J$  e

$$\begin{cases} \gamma'(t) = H(t, \gamma(t)) & \forall t \in J, \\ \gamma(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (4)$$

Em outras palavras,  $\gamma$  é uma solução da **equação diferencial ordinária** (4).

Um caso interessante é quando  $H$  não depende do tempo: para todo  $t$ ,  $H(t, \cdot)$  vale um determinado campo vetorial  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Falamos então de **equação diferencial ordinária autônoma**. Uma solução  $\gamma: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  satisfaz

$$\begin{cases} \gamma'(t) = F(\gamma(t)) & \forall t \in J, \\ \gamma(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Isto é,  $\gamma$  é um caminho cuja velocidade sempre vale o valor do campo vetorial em que se encontra. Também dizemos que  $\gamma$  segue a dinâmica prescrita por  $F$ . Ela chama-se **curva integral**.

No centro da teoria das equações diferenciais reside a questão da *existência* e da *unicidade* das soluções. O resultado fundamental, que foge ao escopo deste curso mas que vale a pena mencionar, é o teorema de Picard-Lindelöf (chamado de Cauchy-Lipshitz nas referências francesas).

**Teorema 2.18** (Picard-Lindelöf). *Se  $H: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e localmente lipschitziana na segunda variável<sup>2</sup>, então para toda condição inicial  $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$ , existe  $\epsilon > 0$  e  $\gamma: (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow \Omega$  tal que a equação (4) vale.*

**Observação 2.19.** O teorema garante apenas a existência local (no tempo) de soluções para o problema de Cauchy. Para estudar as soluções em sua totalidade, precisamos invocar outros resultados, como lema de Grönwall.

**Exemplo 2.20.** Dado  $(t_0, (x_0, y_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , as curvas integrais dos campos vetoriais do exemplo 2.14 tomam respectivamente a forma

$$\begin{aligned} \gamma_F: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_G: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto e^{t-t_0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} & t &\longmapsto r_0 \begin{pmatrix} \cos(t - t_0 + \theta_0) \\ \sin(t - t_0 + \theta_0) \end{pmatrix} \\ \\ \gamma_H: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} t - t_0 + x_0 \\ \sin(t) + c_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde  $r_0, \theta_0$  e  $c_0$  são definidas por  $(x_0, y_0) = r_0(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$  e  $c_0 = y_0 - \sin t_0$ .

**Exemplo 2.21.** Pode-se mostrar que as curvas integrais da equação de Lotka-Volterra (exemplo 2.15) são periódicas. Infelizmente, elas não podem ser escritas explicitamente por meio de funções trigonométricas usuais. Além disso, a equação admite uma solução constante: o ponto fixo  $(x, y) = (1, 1)$ .

<sup>2</sup> $\forall (t, x) \in I \times \Omega, \exists \epsilon > 0, \exists L > 0, \forall (s, y) \in \Omega, \|(t, x) - (s, y)\| < \epsilon \implies \|H(t, x) - H(s, y)\| \leq L\|x - y\|.$

**Exemplo 2.22.** Seja uma carga pontual  $Q$ , chamada de carga teste, mergulhada num campo elétrico  $F$  como na equação (3). Denotemos  $\gamma(t)$ ,  $v(t)$  e  $a(t)$  sua posição, velocidade e aceleração, respectivamente. Segundo a *lei de Coulomb*, a carga experimenta uma força elétrica igual a

$$QF(\gamma(t)) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(t) - X_0}{\|\gamma(t) - X_0\|^3}.$$

Para simplificar, suponhamos que o campo é centrado, isto é,  $X_0 = (0, 0, 0)$ . Por outro lado, e supondo que apenas a força elétrica esteja exercida, a *segunda lei de Newton para o movimento* afirma que

$$ma(t) = \text{soma das forças} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|^3}$$

com  $m$  a massa. Se escrevermos  $a = \gamma''$ , aparece uma equação de segunda ordem:

$$\gamma''(t) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|^3}.$$

Diferentemente da formulação do problema de Cauchy, esta equação fornece uma relação com a derivada segunda, não com a primeira. No entanto, ainda podemos buscar soluções. Vejamos o caso em que as cargas são opostas:  $qQ = -|qQ|$ , portanto a força elétrica é atrativa. Neste caso, a seguinte função é uma solução e é periódica:

$$t \mapsto \left( \cos \left( \sqrt{\frac{|qQ|}{4\pi\epsilon_0 m}} \cdot t \right), \sin \left( \sqrt{\frac{|qQ|}{4\pi\epsilon_0 m}} \cdot t \right), 0 \right).$$

**Observação 2.23.** Na verdade, as equações diferenciais de segunda ordem são apenas um caso especial do caso de primeira ordem, ao contrário do que o exemplo anterior poderia sugerir. De fato, há um truque para transformar uma na outra: se considerarmos

$$\gamma''(t) = F(\gamma(t)),$$

com  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial, pomos  $\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix}$ , e a equação se reescreve

$$\Gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ F(\gamma(t)) \end{pmatrix} = \Phi(\Gamma(t)) \quad \text{onde} \quad \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ F(x) \end{pmatrix}.$$

A relação  $\Gamma'(t) = \Phi(\Gamma(t))$  é, de fato, uma equação diferencial de primeira ordem, como na equação (4). Observemos, entretanto, que a curva  $\Gamma(t)$  agora assume valores em  $\mathbb{R}^{2n}$ . Em conclusão, aumentando a dimensão, podemos transformar uma equação diferencial de segunda ordem em um problema clássico de Cauchy. Mais geralmente, isto se aplica à equações de qualquer ordem.

### 2.3 Campos de gradiente

Da mesma forma que a primitiva de uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cuja derivada é  $f$ , definiremos uma noção de “primitiva” para campos vetoriais, chamada de potencial. Por outro lado, ao contrário da noção usual de primitiva, somente um tipo específico de campos vetoriais admite tal primitiva, chamados de campos conservativos.

### 2.3.1 Definição

Se uma função numérica  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável, relembramos na seção 2.1 que seu gradiente é uma função

$$\nabla f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

ou seja, é um campo vetorial. Tais campos têm nome.

**Definição 2.24.** Dizemos que  $\nabla f$  é o **campo vetorial gradiente** da função  $f$ .

**Notação 2.25.** O símbolo “ $\nabla$ ” é chamado de nabla. A notação  $\text{grad} f$  também é comumente usada para representar o gradiente de  $f$ . Além disso, neste contexto, a função numérica  $f$  às vezes é chamada de campo escalar.

Relembramos a interpretação clássica do gradiente: ele indica a *direção de maior elevação* de  $f$ . Em outras palavras, em um determinado ponto  $x$ , o gradiente  $\nabla f(x)$  é a direção a ser seguida para maximizar a função  $f$  localmente. Isto é também compreendido com o uso do seguinte conceito.

**Definição 2.26.** Dados  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o **conjunto de nível** de  $f$  de valor  $\alpha$  é

$$N_\alpha = f^{-1}(\{\alpha\}).$$

Quando  $n = 2$  (resp.  $n = 3$ ), os conjuntos de nível são chamados de curvas de nível ou curvas de contorno (resp. superfícies de nível).

Temos então a seguinte nova interpretação: o gradiente de uma função é *ortogonal aos conjuntos de nível*. Mas é preciso ser matematicamente cuidadoso aqui: não é verdade que as curvas de nível são sempre “curvas”, em um sentido geométrico-diferencial a ser definido mais adiante (teorema da função inversa).

**Exemplo 2.27.** Consideremos a função numérica

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy. \end{aligned}$$

Ela é derivável, e seu campo de gradiente escreve-se

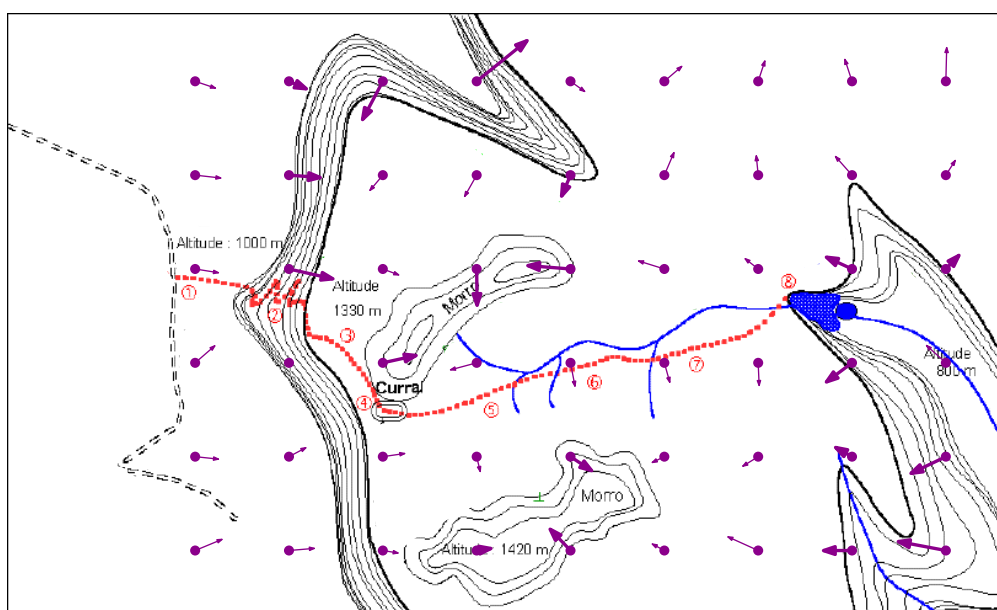
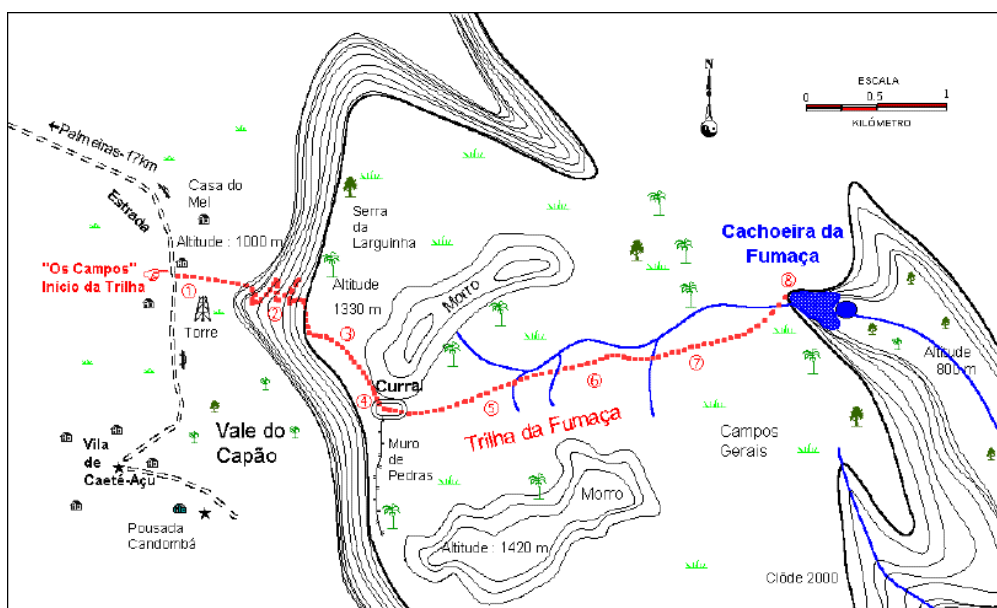
$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (y \quad x).$$

Além disso, as linhas de nível escrevem-se, por  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , como

$$N_\alpha = \left\{ \left( t, \frac{\alpha}{t} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

**Exemplo 2.28.** Em topografia, o mapa da elevação de um terreno pode ser visto como uma função numérica do plano. Neste contexto, as linhas de nível são conjuntos de pontos na mesma altitude. Como exemplo, a figura 2 indica a elevação de uma seção da Chapada Diamantina<sup>3</sup>, bem como o campo de gradiente correspondente.

<sup>3</sup><https://www.infochapada.com.br/pt/parquechapadadiamantina/>



**Figura 2:** Vendo um mapa da elevação topográfica como um campo escalar  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , associamos um campo de gradiente.

### 2.3.2 Campos conservativos

Uma questão natural surge: dado um campo vetorial, ele é um campo de gradiente?

**Definição 2.29.** Um campo vetorial  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é **conservativo** se existe uma função diferenciável  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F = \nabla f$ . Neste caso,  $f$  é chamada de **função potencial** para  $F$ .

Esta é uma definição recíproca à 2.24: um campo conservativo nada mais é do que um campo de gradiente de uma função, com a “diferença” de que a função não é conhecida



a priori. Para achar um potencial — um problema delicado em geral — um método clássico é o da *separação de variáveis*, como veremos nos exercícios.

**Exemplo 2.30.** O campo  $F$  exemplo 2.14 é conservativo pois admite o potencial  $f(x) = \|x\|^2/2$ . Os outros dois não são; estudamos  $G$  no exemplo 2.33 e  $H$  na próxima aula.

**Exemplo 2.31** (Potencial elétrico). O campo elétrico gerado por uma carga pontual, dado pela equação (3), admite o seguinte potencial:

$$V: X \mapsto -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|X - X_0\|}.$$

Convém destacar que, na literatura física, o potencial é definido por  $F = -\nabla f$  em vez de  $F = \nabla f$ . Além disso, acrescentamos que, como é bem conhecido no eletromagnetismo, o campo elétrico é sempre conservativo, não apenas no caso de uma carga pontual.

Um dos objetivos deste semestre é fornecer ferramentas para reconhecer se um campo é conservativo ou não. Neste estágio, já podemos propor um primeiro critério.

**Propriedade 2.32.** *Se um campo é conservativo, então suas curvas integrais não-constantes são injetoras.*

*Demonstração.* Sejam  $\gamma: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva integral não-constante de  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função potencial para  $F$ . Por ser uma curva integral, vale

$$\gamma'(t) = F(\gamma(t))$$

por todo  $t \in J$ . Em particular, podemos ver que  $\gamma'(t) \neq 0$ , se não, a curva seria constante. Vemos também, pela regra da cadeia (corolário 2.7), que

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))' &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle F(\gamma(t)), F(\gamma(t)) \rangle = \|F(\gamma(t))\| > 0. \end{aligned}$$

Logo,  $t \mapsto f(\gamma(t))$  é estritamente crescente. Deduzimos que  $\gamma$  não assume duas vezes o mesmo valor, ou seja, ela é injetora.  $\square$

**Exemplo 2.33.** O campo  $G$  do exemplo 2.14 não é conservativo. Com efeito, vimos no exemplo 2.20 que suas curvas integrais são periódicas. Concluimos pela contrapositiva da propriedade 2.32.

## 2.4 Exercícios

### 2.4.1 Diferenciais

**Exercício 2.1** (correção). Nosso objetivo é calcular, de duas maneiras diferentes, o gradiente de

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|^p \end{aligned}$$

onde  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  e  $p \in \mathbb{R}$ . Quando  $p$  é negativo, removemos a origem do domínio.

1. Calcule, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , o gradiente  $\nabla F(x)$  via a fórmula com derivadas parciais.

2. Calcule a diferencial de  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$  e de  $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^{p/2}$ . Aplique a regra da cadeia ao seguinte diagrama e deduza de novo o gradiente de  $F$ .

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{x \mapsto \|x\|^2} \mathbb{R} \xrightarrow{t \mapsto t^{p/2}} \mathbb{R}.$$

**Exercício 2.2** (correção). Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $p \in \mathbb{R}$  positivos. Dê a diferencial das seguintes funções em todos os pontos do domínio.

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & H: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x^2 + y^2) \\ \cos(x^2 - y^2) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xe^{yz} \\ ye^{xz} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ \\ I: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} & J: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n & K: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|}} & x \mapsto \frac{x}{\|x\|^p} & x \mapsto e^{-\|x\|^2} x \end{array}$$

**Exercício 2.3** (Diferencial do determinante na identidade, correção). Seja  $n \in \mathbb{N}$  positivo,  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  o espaço das  $n \times n$  matrizes,  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  sua base canônica,  $I$  a matriz identidade e  $\det: \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  o determinante.

1. Por todo  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  e  $t \in \mathbb{R}$ , calcule  $\det(I + tE_{i,j})$  e deduza  $\frac{\partial \det}{\partial x_{i,j}}(I)$ .
2. Mostre que por todo  $H \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ,  $d_I \det(H) = \text{traço}(H)$ .

#### 2.4.2 Curvas integrais e potenciais

**Exercício 2.4** (correção). Esboce os seguintes campos de gradiente. Além disso, dê uma curva integral  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma(0) = (1, 0)$ .

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2y \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exercício 2.5** (correção). Exibindo um potencial, mostre que os campos a seguir são conservativos (pode usar o método de separação de variáveis).

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & H: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \cos x \\ y + \sin x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + y^2 \\ x + 2xy \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x^2y^5z^7 \\ 5x^3y^4z^7 \\ 7x^3y^5z^6 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exercício 2.6** (Campo dipolar assintótico, correção). Definimos no exemplo 2.16 um dipolo elétrico como o sistema formado por duas cargas opostas  $q$  e  $-q$ . Suponhamos que elas estejam posicionadas no plano, nas coordenadas  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  respectivamente.

1. Dê um potencial  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  para o campo elétrico gerado pelo sistema.

2. Mostre que  $f$  é nulo ao longo do eixo das ordenadas.

3. Mostre que

$$f(r, 0) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

### 3 Campos vetoriais - Rotacional e divergente

Nesta seção, definiremos os operadores diferenciais mais importantes do eletromagnetismo: o rotacional e o divergente. Por enquanto, suas interpretações poderão parecer obscuras — aceitaremos que o rotacional mede o quanto um campo vetorial “gira”, e o divergente o quanto um campo vetorial “foge”. Como geralmente acontece em um curso de graduação, o rotacional será apresentado aqui apenas na dimensão 2 ou 3; veremos mais adiante como ele pode ser elegantemente generalizado para qualquer dimensão, dentro do formalismo das formas diferenciais.

#### 3.1 Lembrete de diferenciação de ordem superior

##### 3.1.1 Diferencial segunda

Lembremos que uma função numérica  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é aberto, é dita **duas vezes derivável** se ela é derivável, assim como sua derivada  $f'$ . Há uma sutileza ao generalizar esta ideia para dimensões maiores: se  $U \subset \mathbb{R}^n$  é aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável, então a diferencial é, como vimos na seção 2.1, uma aplicação

$$df: U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Diferentemente do exemplo numérico, o codomínio da diferencial  $df$  — a saber,  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  — não é mais o codomínio da função  $f$ . No entanto, dadas as bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , existe um isomorfismo canônico  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{nm}$ . Deste ponto de vista, a diferencial tem codomínio euclidiano:

$$df: U \longrightarrow \mathbb{R}^{nm},$$

e podemos aplicar a definição usual de diferenciabilidade. Se  $df$  é diferenciável, diremos que  $f$  é **duas vezes diferenciável**, e sua **diferencial segunda** é então uma função

$$d(df): U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)).$$

O espaço  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$  também é conhecido como o espaço das **aplicações bilineares** de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  até  $\mathbb{R}^m$  — sua dimensão é  $n \times n \times m$ . No entanto, não estamos lidando com qualquer aplicação bilinear: o seguinte teorema afirma que  $d(df)$  é uma aplicação bilinear simétrica — reduzindo então a dimensão para  $n(n+1)m/2$ .

**Teorema 3.1** (Teorema de Clairaut-Schwarz). *Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  duas vezes diferenciável. Então para todo  $x \in U$  and  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , vale*

$$d_x(df)(u, v) = d_x(df)(v, u).$$

Escrito componente por componente, o resultado aplicado a  $f = (f_1, \dots, f_m)$  significa que, por todo  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$  e  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}.$$

Em particular, quando  $m = 1$ , a diferencial segunda é uma matriz de ordem  $n \times n$ , chamada de **matriz hessiana**:

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Em livros de cálculos, é comum ler a seguinte versão do teorema de Clairaut-Schwarz. Ela é mais fraca, no sentido que suas hipóteses são mais fortes do que as do teorema (como consequência da propriedade 3.3).

**Corolário 3.2.** *Suponha que  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  possua derivadas parciais segundas contínuas. Então para todo  $x \in U$  e  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , vale*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

### 3.1.2 Diferenciabilidade infinita

Seguindo o parágrafo anterior, podemos definir a diferencial de uma função e iterar

$$\begin{aligned} f &: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ df &: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ d(df) = d^2f &: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \\ d^3f &: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))) \\ &\dots \end{aligned}$$

Dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$  se ela é diferenciável  $k$  vezes e se  $d^k f$  é contínua. Denotaremos o conjunto de tal aplicações como  $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ . Além disso, ela é **suave**, ou de classe  $C^\infty$ , se for de classe  $C^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Denotaremos o conjunto  $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ .

Para simplificar as seções a seguir, introduzimos duas notações adicionais. Dado  $U \subset \mathbb{R}^n$ , o conjunto  $C^\infty(U, \mathbb{R})$  de funções  $U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  — isto é, os campos escalares suaves em  $U$  — será denotado simplesmente

$$C^\infty(U).$$

Da mesma forma, o conjunto  $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$  de funções  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$  — isto é, os campos vetoriais suaves em  $U$  — será denotado

$$\Gamma(U).$$

Por fim, citamos um resultado que permite verificar a classe de regularidade de uma função estudando apenas suas derivadas parciais.

**Propriedade 3.3.** *Sejam  $k \in \mathbb{N}$  inteiro positivo e  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que para todo  $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , a derivada parcial*

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f$$

*seja contínua. Então  $f$  é de classe  $C^k$ .*

## 3.2 O rotacional

### 3.2.1 Definição em $\mathbb{R}^3$ e propriedades elementares

**Definição 3.4.** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^3$  aberto e  $F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial tridimensional diferenciável, descrito por meio de suas componentes

$$F = (F_1, F_2, F_3).$$

Seu **rotacional** é campo vetorial  $\text{rot } F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido como

$$\text{rot } F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Mais explicitamente, por todo  $(x, y, z) \in U$ , temos

$$\text{rot } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

**Notação 3.5.** Em inglês, o rotacional chama-se de *curl* e denota-se  $\text{curl } F$ . Outra notação popular, especialmente em física, é

$$\nabla \times F,$$

onde  $\times$  denota o produto vetorial. Ele vem do seguinte cálculo simbólico

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \end{pmatrix}$$

Note que este curso não trata os operadores  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  e  $\frac{\partial}{\partial z}$  como objetos algébricos. Portanto, o cálculo acima serve apenas para fins mnemônicos.

**Observação 3.6.** De acordo com a definição 3.4, o rotacional (de  $\mathbb{R}^3$ ) transforma um campo vetorial (tridimensional) em um campo vetorial (tridimensional). Veremos na definição 3.12 que o rotacional de  $\mathbb{R}^2$  transforma um campo vetorial (bidimensional) em um *campo escalar* (bidimensional). Consulte a observação 3.13 para uma explicação deste fenômeno.

**Exemplo 3.7.** Sejam os campos

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 & G: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (yz, xz, xy) & (x, y, z) &\longmapsto (y^2 z^2, x^2 z^2, x^2 y^2). \end{aligned}$$

Um cálculo direto mostra que

$$\begin{array}{ll} \text{rot } F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \text{rot } G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (0, 0, 0) & (x, y) \longmapsto 2(x^2(y - z), y^2(z - x), z^2(x - y)). \end{array}$$

**Exemplo 3.8.** O rotacional do campo elétrico definido no exemplo 2.16 é nulo.

**Propriedade 3.9** (Linearidade do rotacional). *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^3$  aberto, dois campos diferenciáveis  $F, G: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então vale*

$$\text{rot}(F + \alpha G) = \text{rot } F + \alpha \text{rot } G.$$

**Propriedade 3.10** (Rotacional de um produto escalar-vetorial). *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^3$  aberto,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo vetorial diferenciável e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  campo escalar diferenciável. Vale*

$$\text{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \text{rot } F$$

onde  $\times$  representa o produto vetorial.

**Observação 3.11.** Veremos outras fórmulas nos exercícios 3.4 e 3.5: o rotacional de um produto vetorial e rotacional de um rotacional.

### 3.2.2 Definição em $\mathbb{R}^2$ e interpretação dinâmica

**Definição 3.12.** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto e  $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial bidimensional diferenciável, com componentes  $F = (F_1, F_2)$ . Seu **rotacional** é campo escalar  $\text{rot } F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definido como

$$\text{rot } F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

**Observação 3.13.** Poderia parecer curioso o fato de o rotacional de um campo vetorial bidimensional ser escalar, enquanto o de um campo tridimensional é vetorial. Isto se deve ao fato de que o rotacional, em sua forma mais abstrata, não é um conceito escalar nem vetorial — estamos lidando aqui apenas com as dimensões 2 e 3. Como veremos mais adiante, o rotacional generaliza-se como a **derivada exterior das 1-formas diferenciais**, um operador que transforma um campo vetorial em uma 2-forma.

**Exemplo 3.14.** Consideremos os campos vetoriais bidimensionais do exemplo 2.14:

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, y) & (x, y) \longmapsto (-y, x) & (x, y) \longmapsto (1, \cos x). \end{array}$$

Eles admitem os seguintes rotacionais:

$$\begin{array}{lll} \text{rot } F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{rot } G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{rot } H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto 0 & (x, y) \longmapsto 2 & (x, y) \longmapsto -\sin x. \end{array}$$

Agora, gostaríamos de dar uma interpretação dinâmica ao rotacional de um campo vetorial bidimensional. Conforme mencionamos na seção 2.2.2, todo campo vetorial  $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é associado a uma equação diferencial ordinária

$$\gamma'(t) = F(\gamma(t)).$$

Mais explicitamente, com  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Em seguida, fixemos um ponto  $(x_0, y_0) \in U$ . Lembremos a aproximação linear ao redor deste ponto, por meio da diferencial  $d_{(x_0, y_0)}F$ :

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + d_{(x_0, y_0)}F \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o \left( \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\| \right).$$

Ao movermos o ponto  $(x_0, y_0)$  para a origem e ignorarmos os termos não lineares, aparece uma nova equação diferencial, chamada de **linearização** do sistema em  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{F \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\text{constante}} + \underbrace{d_{(x_0, y_0)}F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{linear}}.$$

Embora essa nova equação seja apenas um substituto linear da primeira e, portanto, suas soluções possam se comportar de maneira substancialmente diferente, ela representa uma maneira interessante de estudar o sistema. Para continuar, lembremos do **princípio da superposição** das equações diferenciais lineares de primeira ordem: as soluções da equação linearizada acima são encontradas como combinação de uma solução particular e as soluções da **equação homogênea**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = d_{(x_0, y_0)}F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Também sabemos, pela teoria das equações diferenciais lineares autônomas, que o comportamento das soluções desta equação homogênea depende dos autovalores da matriz  $d_{(x_0, y_0)}F$ . Em particular, se ela for antissimétrica, então os autovalores são imaginários puros e **as soluções são periódicas**. Como elemento final de nosso estudo, escrevemos a decomposição simétrica-antissimétrica da matriz, i.e.,  $A = (A + A^\top)/2 + (A - A^\top)/2$ :

$$\begin{aligned} d_{(x_0, y_0)}F &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} & 2\frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ -\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antissimétrica}}. \end{aligned}$$

Reconhecemos o rotacional de  $F$  no termo antissimétrico. Concluimos a seguinte interpretação: o rotacional é a parte antissimétrica — a parte “rotativa” — da equação diferencial linearizada associada a  $F$ .

Esta observação ainda vale em dimensão 3: dado um campo  $F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciável, a componente antissimétrica da diferencial  $d_{(x_0, y_0, z_0)} F$  é

$$\begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) & \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} & 0 & -\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \\ -\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) & \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aparecem nesta matriz as componentes do rotacional de  $F$ . Compreendemos estes termos como a parte “rotativa” do campo vetorial ao longo dos eixos.

### 3.2.3 Rotacional de campos conservativos

Os operadores gradiente e rotacional possuem uma relação importante. Para ver isto, usaremos as notações da seção 3.1.2:  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $\Gamma(\mathbb{R}^n)$  denotam respectivamente os conjuntos das funções  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  e os campos vetoriais  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$ . No caso planar, isto é,  $n = 2$ , os operadores se encaixam no diagrama

$$C^\infty(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

No caso espacial, torna-se

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} \Gamma(\mathbb{R}^3).$$

Em ambos os contextos, a relação fundamental é a seguinte: um campo de gradiente possui rotacional nulo.

**Teorema 3.15.** *Sejam  $n = 2$  ou  $3$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Então*

$$\text{rot } \nabla f = 0.$$

*Demonstração.* Provaremos apenas o caso planar; a prova em  $\mathbb{R}^3$  é semelhante. Basta escrever as definições: o gradiente de  $f$  é

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Logo, seu rotacional vale

$$\text{rot } \nabla f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Do teorema de Clairaut-Schwarz (teorema 3.1) segue a igualdade das derivadas parciais cruzadas, isto é, a diferença acima é nula.  $\square$

A contrapositiva desse teorema será de grande utilidade.

**Corolário 3.16.** *Sejam  $n = 2$  ou  $3$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Se existe  $x \in U$  tal que  $\text{rot}_x F \neq 0$ , então  $F$  não é conservativo.*

**Exemplo 3.17.** Deduzimos do corolário que os campos  $G$  e  $H$  do exemplo 3.14 não são conservativos. Observe que a não-conservatividade de  $G$  já havia sido demonstrada no exemplo 2.33 por meio do estudo de curvas integrais, mas este método falharia para  $H$ .

**Observação 3.18.** De modo geral, a recíproca do teorema 3.15 não é verdadeira (veja o exercício 3.2). Porém, veremos que ela vale sob restrições na topologia do domínio  $U$ .



### 3.3 O divergente

#### 3.3.1 Definição e propriedades elementares

**Definição 3.19.** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial diferenciável, com componentes  $(F_1, \dots, F_n)$ . Seu **divergente** é campo escalar  $\operatorname{div} F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definido como

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Mais explicitamente, por todo  $x \in U$ , temos

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x).$$

Em particular, o divergente de um campo vetorial planar  $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é

$$\operatorname{div} F(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y)$$

e o de um campo espacial  $F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z).$$

**Notação 3.20.** O divergente chama-se também de **divergência**. A tradução em inglês é *divergence*. Destacamos que outra notação comum para o divergente é

$$\nabla \cdot F$$

onde  $\cdot$  representa o produto escalar. Esta notação segue do cálculo simbólico

$$\nabla \cdot F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

**Exemplo 3.21.** Consideremos de novo os campos vetoriais do exemplo 2.14:

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, y) & (x, y) \longmapsto (-y, x) & (x, y) \longmapsto (1, \cos x). \end{array}$$

Eles admitem os seguintes divergentes:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{div} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \operatorname{div} G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \operatorname{div} H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto 2 & (x, y) \longmapsto 0 & (x, y) \longmapsto 0. \end{array}$$

**Exemplo 3.22.** O divergente do campo elétrico definido no exemplo 2.16 (equação (3)) é constante e igual a 0, exceto em  $X_0$  onde não está definido (pelo menos por enquanto).

**Propriedade 3.23** (Linearidade do divergente). *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, dois campos diferenciáveis  $F, G: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então vale*

$$\operatorname{div}(F + \alpha G) = \operatorname{div} F + \alpha \operatorname{div} G.$$

**Propriedade 3.24** (Divergente de um produto escalar-vetorial). *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo vetorial diferenciável e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  campo escalar diferenciável. Vale*

$$\operatorname{div}(fF) = \nabla f \cdot F + f \operatorname{div} F$$

onde  $\cdot$  representa o produto escalar.

**Observação 3.25.** Veremos nos exercícios 3.4 e 3.5 fórmulas para o divergente de um produto vetorial e o divergente de um gradiente.

### 3.3.2 Divergente de campos rotacionais

A relação entre o rotacional e o gradiente, conforme visto na seção 3.2.3, ocorre identicamente entre o divergente e o rotacional. Estaremos interessados apenas no caso da dimensão 3, isto é, nos encontraremos no diagrama

$$\Gamma(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{rot}} \Gamma(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{div}} C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

O seguinte teorema mostra que a composição  $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot}$  acima é trivial.

**Teorema 3.26.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^3$  aberto e  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$ . Então*

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0.$$

*Demonstração.* Por definição, o rotacional de  $F$  é

$$\operatorname{rot} F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Em seguida, calculamos o divergente:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} \right). \end{aligned}$$

Ao permutar as derivadas cruzadas, vemos que esta expressão é nula.  $\square$

Com o mesmo teor do corolário 3.27, obtemos um resultado de *obstrução a ser um campo rotacional*. Note que sem restrição na topologia de  $U$ , a recíproca não vale.

**Corolário 3.27.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^3$  aberto e  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ . Se existe  $x \in U$  tal que  $\operatorname{div}_x F \neq 0$ , então  $F$  não é rotacional, isto é, não existe um  $C^2$ -campo vetorial  $G: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F = \operatorname{rot} G$ .*

### 3.4 Exercícios

#### 3.4.1 Rotacional e divergente

**Exercício 3.1** (correção). Calcule o rotacional e divergente dos campos do exercício 2.4, a saber

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \quad G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \quad H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2y \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Determine quais são conservativos.

**Exercício 3.2** (Um campo irrotacional não-conservativo, correção). Considere o campo

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x). \end{aligned}$$

1. Mostre que  $\text{rot } F = 0$ .
2. Usando a propriedade 2.32, mostre que  $F$  não é conservativo.

**Exercício 3.3** (correção). Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} xz + yz + x^2y \\ \alpha(yz + x^2z) \\ \beta(xyz + y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Determine os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para que  $\text{div } F = 0$ .

**Exercício 3.4.** Sejam  $F, G \in \Gamma(\mathbb{R}^3)$ .

1. Mostre que

$$\text{rot}(F \times G) = (\text{div } G)F - (\text{div } F)G + (G \cdot \text{div})F + (F \cdot \text{div})G$$

onde  $F \cdot \text{div}$  é o operador  $\Gamma(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Gamma(\mathbb{R}^3)$  definido por

$$(F \cdot \text{div})G = \left( F_1 \frac{\partial G_1}{\partial x}, F_2 \frac{\partial G_2}{\partial y}, F_3 \frac{\partial G_3}{\partial z} \right).$$

2. Mostre que  $\text{div}(F \times G) = (\text{rot } F) \cdot G - F \cdot (\text{rot } G)$ .

Sugestão: Poderemos usar a identidade  $x \times (y \times z) = (x \cdot z)y + (x \cdot y)z$ , que vale para todo  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercício 3.5.** O **laplaciano** de uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  é

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Além disso, o **laplaciano vetorial** de um  $C^2$ -campo  $F = (F_1, F_2, F_3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é

$$\nabla^2 F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3).$$

1. Para  $n$  inteiro positivo, mostre que  $\text{div}(\nabla f) = \Delta f$ .
2. Para  $n = 3$ , mostre que  $\text{rot}(\text{rot } F) = \nabla(\text{div } F) - \nabla^2 F$ .

### 3.4.2 Eletrostática

**Exercício 3.6** (Campo elétrico de um fio infinito, correção). Neste exercício, colocamos no eixo das abscissas um fio infinito uniformemente carregado. Ele gera um campo elétrico definido por todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $y \neq 0$  como

$$E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} F \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt \quad \text{onde} \quad F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^3}$$

e onde  $q$  e  $\epsilon_0$  são constantes reais.

1. Calcule explicitamente  $E$ .
2. Calcule o rotacional e o divergente de  $E$ .
3. Determine se o campo  $E$  é conservativo.

**Exercício 3.7** (Uma interpretação integral do rotacional em  $\mathbb{R}^2$ , correção). Dado um campo vetorial  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $r \in \mathbb{R}$  positivo, definimos a **circulação** do campo ao longo da circunferência de centro  $(x, y)$  e raio  $r$  como a integral:

$$\mathcal{C}_{(x,y)}(r) = \int_0^{2\pi} F \begin{pmatrix} x + r \cos t \\ y + r \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

onde  $\cdot$  é o produto escalar. Em outras palavras, é o trabalho realizado por  $F$  ao longo das tangentes à circunferência. Se existir, definiremos a **circulação infinitésima** como

$$\mathcal{C}_{(x,y)}^0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r} \mathcal{C}_{(x,y)}(r).$$

Além disso, consideramos os três seguintes campos:

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, y) & (x, y) \longmapsto (-y, x) & (x, y) \longmapsto (1, x^2). \end{array}$$

1. Calcule a circulação infinitésima para cada um dos campos acima e cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
2. Calcule o rotacional destes campos e compare com a questão anterior.

**Exercício 3.8** (Uma interpretação integral do divergente em  $\mathbb{R}^2$ , correção). Dado um campo vetorial  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $r \in \mathbb{R}$  positivo, definimos o **fluxo** através da circunferência de centro  $(x, y)$  e raio  $r$  como a seguinte integral:

$$\mathcal{F}_{(x,y)}(r) = \int_0^{2\pi} F \begin{pmatrix} x + r \cos t \\ y + r \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt$$

onde  $\cdot$  é o produto escalar. Em outras palavras, é o trabalho realizado por  $F$  ao longo das normais à circunferência. Se existir, definiremos o **fluxo infinitésimo** como

$$\mathcal{F}_{(x,y)}^0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r} \mathcal{F}_{(x,y)}(r).$$

Além disso, consideramos os três seguintes campos:

$$\begin{array}{lll}
F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x, y) \longmapsto (x, y) & (x, y) \longmapsto (-2y, x/2) & (x, y) \longmapsto (1, \cos x).
\end{array}$$

1. Calcule o fluxo infinitésimo para cada um dos campos acima e cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
2. Calcule o divergente destes campos e compare com a questão anterior.

## 4 Integral curvilínea - Elementos de geometria diferencial das curvas

Entramos agora em um conjunto de quatro capítulos dedicados à noção de integral curvilínea, cujo ápice será uma prova do teorema de Green. A fim de fornecer uma primeira intuição geométrica sobre os objetos envolvidos, começaremos com um estudo do conceito de curva e suas reparametrizações. Ao longo desta seção, será interessante distinguir entre as propriedades intrínsecas das curvas — ou seja, as que não dependem da parametrização — e as que dependem da parametrização.

### 4.1 Curvas parametrizadas

#### 4.1.1 Definição e velocidade

**Definição 4.1.** Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $k, n \in \mathbb{N}$  com  $n$  positivo. Chamamos de **curva parametrizada** de classe  $C^k$  uma aplicação  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ . Seu **traço** é o subconjunto  $\gamma(I)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Notação 4.2.** Na literatura, há uma certa ambiguidade com relação à palavra “curva”. Dependendo do contexto, “curva” pode significar uma curva parametrizada, ou o traço de uma curva parametrizada. No entanto, estes conceitos são distintos; o exemplo 4.4 apresenta quatro curvas parametrizadas distintas cujos traços são iguais.

**Definição 4.3.** Dada uma curva parametrizada  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivável, chamamos a derivada  $t \mapsto \gamma'(t)$  de **velocidade**, e sua norma  $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$  de **velocidade escalar**. Além disso, dizemos que a curva é **regular** se é derivável e a derivada não se anula. Neste caso, definimos, por todo  $t \in I$ , o **vetor tangente** como

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

**Exemplo 4.4.** As quatro seguintes curvas parametrizadas têm o mesmo traço, a saber, uma semi-circunferência.

$$\begin{array}{llll}
[0, \pi] \xrightarrow{\gamma_1} \mathbb{R}^2 & [0, \sqrt{\pi}] \xrightarrow{\gamma_2} \mathbb{R}^2 & [-1, 1] \xrightarrow{\gamma_3} \mathbb{R}^2 & [-1, 1] \xrightarrow{\gamma_4} \mathbb{R}^2 \\
t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} & t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix} & t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} & t \mapsto \begin{pmatrix} t\sqrt{2-t^2} \\ 1-t^2 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

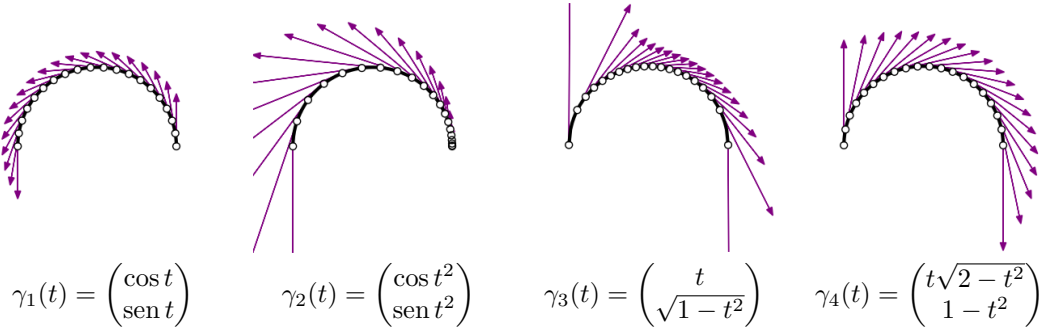
As curvas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_4$  são deriváveis em todo o intervalo e  $\gamma_3$  apenas no intervalo aberto. Nesses subconjuntos, elas são de classe  $C^\infty$ , e suas velocidades são

$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} -2t \sin t^2 \\ 2t \cos t^2 \end{pmatrix} \quad \gamma_3'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \quad \gamma_4'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2(t^2-1)}{\sqrt{2-t^2}} \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Por fim, as velocidades escalares valem

$$\|\gamma_1'(t)\| = 1 \quad \|\gamma_2'(t)\| = 2|t| \quad \|\gamma_3'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \|\gamma_4'(t)\| = \frac{2}{\sqrt{2-t^2}}.$$

A partir desses exemplos, podemos fazer uma observação importante: embora essas curvas tenham o mesmo traço, seus “comportamentos diferenciais” são significativamente diferentes. Conforme ilustrado na figura 3, a curva  $\gamma_1$  é a mais “suave”, com velocidade escalar constante. Em seguida vem  $\gamma_4$ , cujos pontos têm espaçamento aproximadamente uniforme e cuja velocidade escalar é limitada. Quanto à curva  $\gamma_2$ , embora tenha uma velocidade escalar limitada, não é distribuída de maneira muito uniforme na metade semi-circunferência. Por fim, a velocidade escalar da curva  $\gamma_3$  nem sequer é limitada.



**Figura 3:** Traço e velocidade escalar das curvas parametrizadas do exemplo 4.4

**Exemplo 4.5.** Sejam  $p, q \in \mathbb{Z}$ . O nó toral  $(p, q)$  é a  $C^\infty$ -curva parametrizada dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{(p,q)}: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(qt)(1 + \cos(pt)) \\ \sin(qt)(1 + \cos(pt)) \\ \sin(pt) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sua velocidade escalar é  $\|\gamma'_{(p,q)}\|: t \mapsto \sqrt{p^2 + q^2(1 + \cos(pt))^2}$ .

**Exemplo 4.6.** O “seno do topólogo” é a curva parametrizada contínua definida por

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} (t, t \sin(\frac{1}{t})) & \text{if } t > 0, \\ (0, 0) & \text{if } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ela não é derivável em  $t = 0$ . De fato, o seguinte coeficiente diferencial não admite limite quando  $\epsilon$  tende para 0:

$$\frac{\gamma(\epsilon) - \gamma(0)}{\epsilon} = \left(1, \sin\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right).$$

Por outro lado, a curva é derivável sobre  $(0, 1]$ , com derivada

$$\gamma'(t) = \left(1, \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Observe que, em todos os exemplos anteriores, as curvas parametrizadas  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  foram definidas explicitando as componentes, ou seja, na forma

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

onde  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  são funções de  $I$  em  $\mathbb{R}$ . Referiremo-nos a tal descrição como a **parametrização cartesiana**. No caso planar, como alternativa à parametrização cartesiana é possível recorrer à parametrização **parametrização polar**, definida abaixo. Ela é particularmente adequada para curvas de “natureza circular”.

**Definição 4.7.** Sejam um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  e duas funções  $\rho, \theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ . A **curva parametrizada em coordenadas polares** com raio  $\rho$  e ângulo  $\theta$  é a curva parametrizada definida por

$$\begin{aligned} \gamma: I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \rho(t) \cos(\theta(t)) \\ \rho(t) \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quando a função ângulo  $\theta$  não é fornecida, consideremos que é a identidade  $\theta: t \mapsto t$ .

**Observação 4.8.** Claramente, a partir de uma definição em coordenadas polares, podemos deduzir uma definição cartesiana, usando a fórmula acima. A operação inversa — explicitar uma forma polar a partir de uma forma cartesiana — é menos óbvia. Dada uma definição cartesiana  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ , podemos transformá-la em forma polar via o raio e ângulo

$$\rho(t) = \sqrt{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)} \quad \theta(t) = \arctan\left(\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}\right) \quad (5)$$

onde  $\arctan$  é a função arco-tangente. Porém, esta segunda fórmula não é definida quando  $\gamma_1$  se anula, ou seja, quando a curva cruza o eixo das ordenadas. Para obter uma parametrização geral, precisamos combinar diferentes parametrizações locais. Este processo, chamado de “levantamento do ângulo”, será o tema da seção 4.2.2.

**Exemplo 4.9.** A sextica de Cayley é a curva dada em coordenadas polares por

$$\begin{aligned} \rho: [0, 3\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \cos^3 \frac{t}{3}. \end{aligned}$$

Sua parametrização cartesiana é

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 3\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos^3\left(\frac{t}{3}\right) \cos(t) \\ \cos^3\left(\frac{t}{3}\right) \sin(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Propriedade 4.10.** A velocidade escalar de uma curva  $\gamma$  parametrizada em coordenadas polares pelas funções deriváveis  $\rho$  e  $\theta$  vale

$$\|\gamma'\| = \sqrt{(\rho')^2 + (\rho\theta')^2}.$$

**Exemplo 4.11.** A sextica do exemplo 4.9 tem velocidade escalar  $\|\gamma'(t)\| = \cos^2(t/3)$ .

#### 4.1.2 Reparametrizações e comprimento de arco

Lembremos que uma função  $h: J \rightarrow I$  entre intervalos reais é um **homeomorfismo** se ela for contínua, bijetiva e de inversa contínua. Graças aos homeomorfismos, podemos efetuar a mudança de variáveis em curvas parametrizadas, um processo também denominado “reparametrização”.

**Definição 4.12.** Sejam dois intervalos  $I, J \subset \mathbb{R}$ , uma curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo  $h: J \rightarrow I$ . A **reparametrização** de  $\gamma$  por  $h$  é a curva parametrizada  $\gamma \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Se uma curva é uma reparametrização de outra, então ambas têm o mesmo traço. Em particular, as propriedades que são invariantes por reparametrização serão entendidas como propriedades intrínsecas do traço. Uma dessas propriedades, como veremos na seção 4.1.3, é o comprimento.

**Observação 4.13.** Reciprocamente, a curva  $\gamma$  é reparametrização da reparametrização  $\gamma \circ h$ , desta vez pelo homeomorfismo inverso  $h^{-1}$ . Além disso, toda curva é claramente uma reparametrização de si mesma. Isto é, a reparametrização define uma **relação de equivalência** entre as curvas parametrizadas. Uma constatação interessante: as classes de equivalência da relação de reparametrização, sobre o conjunto das curvas parametrizadas injetoras, são em correspondência com os traços, vistos como subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Isto vem do fato de que, dadas duas curvas parametrizadas injetoras  $\gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  com mesmo traço, a segunda é uma reparametrização da primeira. Com efeito, convém o homeomorfismo  $h = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2: J \rightarrow I$ . No entanto, ressaltamos que este resultado não vale para curvas não-injetoras. Um exemplo é dado pelas duas seguintes curvas, de mesmo traço (o círculo), mas não reparametrizações uma da outra:

$$\begin{aligned} \gamma_1: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2: [0, 4\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} & t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Exemplo 4.14.** As curvas parametrizadas  $\gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_4$  do exemplo 4.4 são reparametrizações da curva parametrizada  $\gamma_1$  pelos homeomorfismos

$$\begin{aligned} h_2: [0, \sqrt{\pi}] &\longrightarrow [0, \pi] & h_3: [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] & h_4: [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ t &\longmapsto t^2 & t &\longmapsto \arccos(t) & t &\longmapsto \arccos(t\sqrt{2-t^2}). \end{aligned}$$

De todas as parametrizações de uma curva existentes, uma em particular se destaca, pois simplifica significativamente os cálculos subsequentes.

**Definição 4.15.** Uma curva parametrizada  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivável é **parametrizada pelo comprimento de arco** se sua velocidade escalar é constante igual a 1.

**Exemplo 4.16.** Das quatro curvas do exemplo 4.4, apenas a primeira é parametrizada pelo comprimento de arco, pois  $\|\gamma_1'(t)\| = 1$ .

**Teorema 4.17.** Por toda curva regular  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $I$  compacto, existe um homeomorfismo  $h: J \rightarrow I$  tal que  $\gamma \circ h$  seja parametrizada pelo comprimento de arco.



*Demonstração.* Escrevamos  $I = [a, b]$ . Por definição, a regularidade de  $\gamma$  significa que a derivada  $\gamma'$  não se anula, ou seja,  $\|\gamma'\| > 0$ . Pomos então a função

$$g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \int_a^t \|\gamma'\|.$$

Observamos aqui que a função  $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$  pode não ser integrável no sentido de Riemann (ela pode não ser limitada). No entanto, ela é integrável no sentido de Henstock-Kurzweil (pelo teorema 1.52). Portanto, decidimos usar a integral de Henstock e Kurzweil nesta prova. Em seguida vemos que, como  $\|\gamma'\|$  nunca se anula, a função  $g$  é estritamente crescente. Seja  $J = g(I)$  sua imagem. Como uma função crescente é um homeomorfismo, pode-se definir seu inverso, que chamamos de  $h: J \rightarrow I$ . Sabemos também que

$$h'(t) = \frac{1}{g'(h(t))} = \frac{1}{\|\gamma'(h(t))\|}.$$

Para concluir, consideremos a reparametrização  $\gamma \circ h$ . Ela satisfaz

$$(\gamma \circ h)'(t) = h'(t)\gamma'(h(t)) = \frac{\gamma'(h(t))}{\|\gamma'(h(t))\|}.$$

Em particular, temos  $\|(\gamma \circ h)'(t)\| = 1$ , isto é, a reparametrização curva  $\gamma \circ h$  é parametrizada pelo comprimento de arco.  $\square$

#### 4.1.3 Comprimento das curvas

Considerando que a derivada  $\gamma'$  é o “aumento infinitesimal” da curva, interpretamos a velocidade escalar  $\|\gamma'\|$  como a “distância infinitesimal” percorrida pela curva. Esta interpretação leva naturalmente à seguinte definição.

**Definição 4.18.** O **comprimento** de uma curva derivável  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $I$  compacto é

$$\ell(\gamma) = \int_I \|\gamma'\|.$$

**Observação 4.19.** Aplica-se a mesma observação feita na prova do teorema 4.17: em geral, a derivada pode não ser contínua, também pode não ser limitada, e portanto não integrável no sentido de Riemann. Neste caso, calcularemos sua integral no sentido de Henstock-Kurzweil, bem definida pelo teorema 1.52. No entanto, se a curva for continuamente derivável, sabemos que sua derivada é limitada (já que  $I$  é compacto), e poderemos usar a integral de Riemann.

**Exemplo 4.20.** O comprimento da semi-circunferência, parametrizada pela curva  $\gamma_1$  do exemplo 4.4, vale

$$\ell(\gamma_1) = \int_0^\pi \|\gamma_1(t)\| dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi.$$

**Exemplo 4.21.** O seno do topólogo no exemplo 4.6 é derivável apenas no intervalo  $(0, 1]$ . Para calcular seu comprimento, consideremos um número real  $\epsilon > 0$  e o intervalo compacto  $[\epsilon, 1]$ . Escrevendo  $\gamma_{[\epsilon, 1]}$  a restrição da curva ao intervalo, temos

$$\ell(\gamma_{[\epsilon, 1]}) = \int_\epsilon^1 \sqrt{1^2 + \left( \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2} dt \geq \int_\epsilon^1 \left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt.$$

Mostraremos agora que essa integral diverge para  $+\infty$  quando  $\epsilon$  se aproxima de 0. Seja  $k \in \mathbb{N}$  positivo. Por  $\epsilon$  suficientemente pequeno, o intervalo  $[\frac{1}{2k\pi+\pi/4}, \frac{1}{2k\pi-\pi/4}]$  é um subconjunto de  $[\epsilon, 1]$ . Portanto,

$$\int_{\epsilon}^1 \left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt \geq \int_{\frac{1}{2k\pi+\pi/4}}^{\frac{1}{2k\pi-\pi/4}} \left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt.$$

Por outro lado, neste intervalo, temos a desigualdade

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) &\leq \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\leq -\frac{\sqrt{2}}{2} 2(k-1)\pi. \end{aligned}$$

Por outro lado, o comprimento do intervalo é

$$\frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi(64k^2 - 1)}$$

Por monotonicidade da integral, deduzimos que

$$\int_{\frac{1}{2k\pi+\pi/4}}^{\frac{1}{2k\pi-\pi/4}} \left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} 2(k-1)\pi \cdot \frac{8}{\pi(64k^2 - 1)} = \frac{\sqrt{2}(k-1)}{8k^2 + 1}.$$

Este termo é equivalente a  $\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{1}{k}$ , que é o termo geral de uma série divergente. Deduzimos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}(k-1)}{8k^2 + 1} = +\infty.$$

**Exemplo 4.22.** A curva  $\gamma$  parametrizada em coordenadas polares do exemplo 4.9 admite o comprimento

$$\ell(\gamma) = \int_0^{3\pi} \cos^2\left(\frac{t}{3}\right) dt = \frac{3\pi}{2}.$$

Terminamos esta seção com um resultado importante, que garante que o comprimento de uma curva não depende da parametrização escolhida.

**Propriedade 4.23.** *Sejam duas curvas  $\gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\gamma_2$  é uma reparametrização de  $\gamma_1$ . Então  $\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2)$ .*

*Demonstração.* Pela definição de reparametrização, existe um homeomorfismo  $h: J \rightarrow I$  tal que  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$ . Logo,

$$\ell(\gamma_2) = \ell(\gamma_1 \circ h) = \int_J \|(\gamma_1 \circ h)'\| = \int_J |h'| \cdot \|\gamma_1' \circ h\| = \int_I \|\gamma_1'\| = \ell(\gamma_1)$$

onde usamos a mudança de coordenadas (teorema 1.27) para a quarta igualdade.  $\square$

**Exemplo 4.24.** Aplicado o teorema às curvas do exemplo exemplo 4.4, que são todas reparametrizações umas das outras, obtemos que todos os comprimentos são iguais:

$$\underbrace{\int_0^{\pi} 1 dt}_{\ell(\gamma_1)} = \underbrace{\int_0^{\sqrt{\pi}} 2t dt}_{\ell(\gamma_2)} = \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt}_{\ell(\gamma_3)} = \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{2}{\sqrt{2-t^2}} dt}_{\ell(\gamma_4)}.$$

## 4.2 Curvas planas

Quando restritas ao plano  $\mathbb{R}^2$ , as curvas parametrizadas adquirem propriedades adicionais. Nesta seção, veremos alguns exemplos de noções específicas ao plano: o teorema de Jordan e o número de voltas.

### 4.2.1 Curvas de Jordan

**Definição 4.25.** Sejam  $I = [a, b]$  um intervalo real e  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada. Dizemos que  $\gamma$  é **fechada** se  $\gamma(b) = \gamma(a)$ , e **simples** se ela é injetora. Se ela é fechada e simples, a chamamos de **curva de Jordan**.

Em outras palavras, uma curva fechada “se fecha sobre si mesma”, e uma curva simples “não se corta”. Uma propriedade importante de tais curvas é dada pelo teorema de Jordan, cuja prova admitimos, pois emprega conceitos mais avançados de topologia.

**Teorema 4.26.** *Uma curva de Jordan divide o plano em duas componentes conexas, uma das quais é limitada a outra ilimitada.*

### 4.2.2 Determinação do ângulo e número de voltas

Voltemos ao problema levantado na seção 4.1.1:  $\gamma: t \in I \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  é uma curva plana dada em coordenadas cartesianas, que queremos escrever sob forma polar

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos(\theta(t)) \\ \rho(t) \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}.$$

No que diz respeito ao raio  $\rho$ , devemos simplesmente escolher

$$\rho(t) = \|\gamma(t)\|.$$

Em seguida, se a curva não cruzar o eixo das abcissas, podemos obter o ângulo  $\theta$  por meio da fórmula dada na equação (5). No entanto, esta fórmula limita-se às curvas contidas no semiplano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ . Para lidar com o caso geral, assumiremos que a curva nunca se anula. Em particular, podemos definir a curva normalizada

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}. \end{aligned}$$

Observemos que essa curva assume seus valores no círculo unitário

$$\mathbb{S}^1 = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi)\}.$$

Por outro lado, consideramos a seguinte função, chamada de **recobrimento do círculo**:

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Em particular,  $\Phi$  é injetora sobre  $[0, 2\pi)$ , e sua inversa é conhecida como a **determinação principal do ângulo**, denotada

$$\Phi_{[0, 2\pi)}^{-1}: \mathbb{S}^1 \longrightarrow [0, 2\pi).$$

Ressaltamos que essa função não é contínua em todo o círculo, de fato, ela é descontínua no ponto  $(1, 0)$ . Se quisermos uma determinação contínua em torno de  $(1, 0)$ , usaremos

$$\Phi_{[-\pi, \pi)}^{-1}: \mathbb{S}^1 \longrightarrow [-\pi, \pi)$$

que, por sua vez, não é contínua no ponto  $(-1, 0)$ .

**Lema 4.27** (Levantamento de caminhos no círculo). *Existe uma função contínua  $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, por todo  $t \in I$ ,*

$$\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = \Phi(\theta(t)).$$

*Além disso, se  $\mu$  for outra função com essa propriedade, então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\mu = \theta + 2k\pi.$$

*Demonstração.* Apenas esboçaremos uma prova da primeira asserção. Ela é baseada no fato de que podemos subdividir o intervalo  $I = [a, b]$  em subintervalos

$$[a_0, a_1] \cup [a_2, a_3] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n]$$

de modo que em cada um dos intervalos  $[a_i, a_{i+1}]$ , o traço da curva  $\gamma/\|\gamma\|$  seja contida em  $\Phi([0, 2\pi))$  ou  $\Phi([-\pi, \pi))$ . Em particular, poderemos aplicar as funções  $\Phi_{[0, 2\pi)}^{-1}$  ou  $\Phi_{[-\pi, \pi)}^{-1}$ , respectivamente. Esta decomposição vem do fato de que a curva é contínua e o conjunto  $T \subset \mathbb{R}$  é compacto. Agora, para construir o levantamento  $\theta$ , aplicamos as funções  $\Phi_{[0, 2\pi)}^{-1}$  ou  $\Phi_{[-\pi, \pi)}^{-1}$  em cada um dos intervalos. Só pode ocorrer um problema: indo de  $[a_i, a_{i+1}]$  a  $[a_{i+1}, a_{i+2}]$ , o valor  $\Phi_{[0, 2\pi)}^{-1}(a_{i+1})$  (resp.  $\Phi_{[-\pi, \pi)}^{-1}(a_{i+1})$ ) pode ser igual a  $\Phi_{[-\pi, \pi)}^{-1}(a_{i+1})$  (resp.  $\Phi_{[0, 2\pi)}^{-1}(a_{i+1})$ ) mais ou menos  $2\pi$ . Neste caso, adicionaremos ou subtrairemos  $2\pi$  à função no segundo intervalo  $[a_{i+1}, a_{i+2}]$ . Por construção, obtemos uma função  $\theta$  contínua e tal que  $\Phi(\theta(t))$  vale  $\gamma(t)/\|\gamma(t)\|$ .  $\square$

A forma polar de uma curva parametrizada pode ser usada para definir o número de voltas que ela faz em torno de um ponto. A segunda afirmação do lema anterior garante que essa quantidade seja bem definida (ela não depende do levantamento escolhido).

**Definição 4.28.** Sejam  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada fechada, e  $p \in \mathbb{R}^2$  um ponto que não pertence ao seu traço. Seja também  $(\rho, \theta)$  umas coordenadas polares da curva  $\gamma - p$ . O **número de voltas** de  $\gamma$  em torno de  $p$  é

$$\text{voltas}(\gamma, p) = \theta(b) - \theta(a).$$

**Notação 4.29.** Em inglês, o número de voltas se traduz como *winding number*.

**Exemplo 4.30.** Seja a parametrização do círculo dada por

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Em coordenadas polares, ela se escreve

$$\begin{aligned} \rho: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \theta: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto 1 & t &\longmapsto t. \end{aligned}$$

Consequentemente, o número de voltas em torno do ponto  $(0, 0)$  é

$$\text{voltas}(\gamma, (0, 0)) = \theta(2\pi) - \theta(0).$$

Consideremos agora o ponto  $(2, 0)$ . Explicitamente, a translação  $\gamma - (2, 0)$  vale

$$\gamma(t) - (2, 0) = (\cos t - 2, \sin t).$$

Ela admite a seguinte parametrização polar:

$$\begin{aligned} \rho: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \theta: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \sqrt{5 - 4 \cos t} & t &\longmapsto \arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t - 2}\right). \end{aligned}$$

O número de voltas é então

$$\text{voltas}(\gamma, (2, 0)) = \arctan(0) - \arctan(0) = 0.$$

### 4.3 Exercícios

**Exercício 4.1** (correção). Prove que a velocidade escalar do nó toral  $(p, q)$  definido no exercício 4.1 vale  $t \mapsto \sqrt{p^2 + q^2(1 + \cos(pt))^2}$ .

**Exercício 4.2** (correção). Escreva os três seguintes conjuntos como o traço de uma curva parametrizada.

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2/2 = 1\}, \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, |x| \leq 1\}, \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\}. \end{aligned}$$

Sugestão: Para  $Z$ , poderemos começar procurando por uma parametrização polar.

**Exercício 4.3** (correção). Escreva o seguinte conjunto como o traço de uma curva parametrizada, e calcule seu comprimento.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^{2/3} = x, 0 \leq y \leq 1\}.$$

**Exercício 4.4** (correção). A espiral logarítmica é a curva

$$\begin{aligned} \gamma: [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t). \end{aligned}$$

1. Calcule o comprimento da espiral logarítmica no intervalo  $[0, T]$ , onde  $T$  é um real positivo. Mostre que ele admite um limite quando  $T$  tende ao infinito.
2. Determine uma reparametrização de  $\gamma$  pelo comprimento de arco.

**Exercício 4.5** (Geodésicas do espaço euclidiano, correção). Sejam  $n \in \mathbb{N}$  positivo e  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva derivável parametrizada pelo comprimento de arco.

1. Prove a desigualdade  $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq |b - a|$ .
2. Mostre que  $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| = |b - a|$  se e somente se  $\gamma$  é a reta entre  $a$  e  $b$ .

## 5 Integral curvilínea de campos escalares ou vetoriais

Nossa peregrinação pela teoria da integral, campos vetoriais e geometria das curvas finalmente nos levou ao assunto principal desta primeira metade de período: a integral curvilínea (ou integral de linha). Ela permite integrar funções escalares com domínio uma curva em  $\mathbb{R}^n$ , e não apenas sobre intervalos de  $\mathbb{R}$ , como a integral de Riemann que definimos na seção 1.1. Também introduziremos a noção de integral de linha para campos vetoriais, para a qual não integraremos sobre curvas, mas sobre curvas orientadas.

### 5.1 Integral curvilínea de um campo escalar

#### 5.1.1 Curvas e parametrizações

Em primeiro lugar, precisamos esclarecer a distinção entre curva parametrizada e traço de curva parametrizada, conforme mencionado na notação 4.2.

**Definição 5.1.** Dizemos que um subconjunto  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  é uma **curva** se existe um intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}$  e uma curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regular (i.e., derivável e de derivada nunca nula), injetiva, exceto potencialmente nas extremidades do intervalo, e cujo traço é  $\mathcal{C}$ . Além disso, dizemos que o subconjunto  $\mathcal{C}$  é uma **curva derivável por partes** se existe uma curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivável por partes, cada parte sendo regular, tal que  $\gamma$  é injetiva, exceto potencialmente nas extremidades do intervalo, e de traço  $\mathcal{C}$ . Uma curva  $\gamma$  satisfazendo às propriedades acima é chamada de **parametrização** de  $\mathcal{C}$ .

**Notação 5.2.** Na verdade, definimos acima a noção de *subvariedade com bordo* de  $\mathbb{R}^n$ , de *dimensão 1* e *compacta*. Essa é a noção correta de curva para este curso.

**Observação 5.3.** A definição permite que a parametrização tenha ou não os mesmos pontos inicial e final. Se tiver, diz-se que a curva é **fechada**.

Apresentamos agora um resultado, aparentemente benigno, mas importante para provar os resultados desta seção. Ele diz que todas as parametrizações de uma curva são reparametrizações umas das outras — uma questão já levantada na observação 4.13. Além disso, a mudança de variável da reparametrização pode ser escolhida como sendo um **difeomorfismo** (isto é, um homeomorfismo derivável e de inversa derivável).

**Lema 5.4.** *Sejam  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  uma curva e  $\gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_2: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas parametrizações (i.e., regulares, injetivas exceto potencialmente nas extremidades, e com traço  $\mathcal{C}$ ). Então existe um difeomorfismo  $h: J \rightarrow I$  tal que  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$ .*

*Esboço de demonstração.* Para começar, suporemos que as parametrizações são injetivas. Elas se encaixam no diagrama

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\gamma_1} & \mathcal{C} & \xleftarrow{\gamma_2} & J \\ & \xleftarrow{\gamma_1^{-1}} & & \xrightarrow{\gamma_2^{-1}} & \end{array}$$

Naturalmente, temos  $h = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ . É a composta de  $\gamma_2$ , que é derivável, e  $\gamma_1^{-1}$ , que, infelizmente, não sabemos ainda se é derivável — de fato, nem mesmo definimos o que significa derivável para domínios  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  que não são abertos. Veremos mais adiante o *teorema da forma local das imersões*, um corolário do teorema da função inversa,

que mostra que  $h$  é derivável (isto se deve ao fato de que  $\gamma_1$  é regular). Similarmente, mostra-se que a inversa  $h^{-1}$ , igual a  $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ , é derivável. Logo  $h$  é um difeomorfismo; o que estávamos procurando. Por fim, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  não são injetivas nas extremidades do domínio, basta o dividir em dois intervalos e aplicar o mesmo raciocínio.  $\square$

### 5.1.2 Definição de integral curvilínea de campos escalares

Sejam  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  uma curva e  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização. Começemos examinando a definição de comprimento de curva da seção 4.1.3:

$$\ell(\gamma) = \int_I \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\text{abscissa curvilínea}} dt.$$

Vimos na propriedade 4.23 que por toda outra parametrização  $\gamma_2: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $\mathcal{C}$ , a quantidade  $\ell(\gamma_2)$  é igual a  $\ell(\gamma)$ . Dizemos que a definição de comprimento *independe da escolha da parametrização*. Isso se deve ao fato de que a integral acima é, na verdade, apenas a integral da *abscissa curvilínea* (ou seja, o comprimento de arco infinitésimo), uma quantidade que se adapta a cada parametrização. Ela pode ser considerada como uma nova variável de integração:

$$“ds” = “\|\gamma'(t)\| dt”$$

Agora, se  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que desejamos integrar ao longo de  $\mathcal{C}$ , faríamos bem em a integrar contra a abscissa curvilínea, de modo a compensar a parametrização. Em outras palavras, é natural considerar

$$\int_I f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

É exatamente isso que chamamos de integral curvilínea.

**Propriedade-definição 5.5.** *Sejam  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  uma curva,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização e  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então a quantidade*

$$\int_I f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

*independe da escolha da parametrização  $\gamma$ . Ela é chamada de **integral curvilínea** (ou **integral de linha**) do campo escalar  $f$  ao longo de  $\mathcal{C}$ , e é denotada*

$$\int_{\mathcal{C}} f ds \quad \text{ou} \quad \int_{\mathcal{C}} f(x_1, \dots, x_n) ds.$$

*Demonstração.* Sejam  $\gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas parametrizações. Basta mostrar

$$\int_I f(\gamma_1(t)) \cdot \|\gamma_1'(t)\| dt = \int_J f(\gamma_2(t)) \cdot \|\gamma_2'(t)\| dt.$$

Pelo lema 5.4, existe um difeomorfismo  $h: J \rightarrow I$  tal que  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$ . Logo, a segunda integral reescreve-se

$$\int_J f(\gamma_1(h(t))) \cdot \|h'(t)\gamma_1'(h(t))\| dt = \int_J f(\gamma_1(h(t))) \cdot \|\gamma_1'(h(t))\| \cdot |h'(t)| dt.$$

Do teorema de mudança de variável segue que ela vale

$$\int_J f(\gamma_1(h(t))) \cdot \|\gamma_1'(h(t))\| \cdot \underbrace{|h'(t)|}_{ds} dt = \int_I f(\gamma_1(s)) \cdot \|\gamma_1'(s)\| ds.$$

Assim mostramos que as duas integrais coincidem.  $\square$

**Notação 5.6.** Vale destacar que o termo “ds” na notação  $\int_C f ds$  nada mais é do que um símbolo indicando que nos referimos a uma integral de linha. Além disso, quando a curva  $C$  é fechada, é comum usar o símbolo  $\oint_C f$  em vez de  $\int_C f$ , principalmente na literatura física. Neste documento, não usaremos essa convenção.

**Observação 5.7.** Vemos que, quando  $f$  é o campo constante igual a 1, então a integral curvilínea  $\int_C f$  vale o comprimento de  $C$ .

**Exemplo 5.8.** Tomemos a semicircunferência  $C$  do exemplo 4.4 e o campo escalar  $f$  definidos como

$$\begin{aligned} C &= \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\} & f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x, y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

Queremos calcular a integral curvilínea de  $f$  ao longo de  $C$ . Para isso, consideremos as quatro curvas parametrizadas

$$\begin{array}{llll} [0, \pi] \xrightarrow{\gamma_1} \mathbb{R}^2 & [0, \sqrt{\pi}] \xrightarrow{\gamma_2} \mathbb{R}^2 & [-1, 1] \xrightarrow{\gamma_3} \mathbb{R}^2 & [-1, 1] \xrightarrow{\gamma_4} \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} & t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix} & t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} & t \mapsto \begin{pmatrix} t\sqrt{2-t^2} \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

cujas velocidades escalares valem, conforme calculamos,

$$\|\gamma_1'(t)\| = 1 \quad \|\gamma_2'(t)\| = 2t \quad \|\gamma_3'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \|\gamma_4'(t)\| = \frac{2}{\sqrt{2-t^2}}.$$

Pela propriedade-definição 5.5, todas as integrais a seguir são iguais a  $\int_C f$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\| dt &= \int_0^\pi \sin(t) \cdot 1 dt = \left[ -\cos \right]_0^\pi = 2 \\ \int_0^{\sqrt{\pi}} f(\gamma_2(t)) \|\gamma_2'(t)\| dt &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2) \cdot 2t dt = \left[ -\cos(t^2) \right]_0^{\sqrt{\pi}} = 2 \\ \int_{-1}^1 f(\gamma_3(t)) \|\gamma_3'(t)\| dt &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 1 - (-1) = 2 \\ \int_{-1}^1 f(\gamma_4(t)) \|\gamma_4'(t)\| dt &= \int_{-1}^1 1-t^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2-t^2}} dt = \left[ t\sqrt{2-t^2} \right]_{-1}^1 = 2 \end{aligned}$$

Deve-se ressaltar aqui que, estritamente falando,  $\gamma_2$  não é uma parametrização da curva  $C$ . De fato, ela não é regular (sua velocidade escalar é zero em  $t = 0$ ). No entanto, todos os resultados desta seção ainda são válidos para parametrizações de classe  $C^1$  cuja velocidade se anula apenas um número finito de vezes.

**Exemplo 5.9** (Integral curvilínea de uma distribuição de carga). A integral curvilínea tem uma interpretação física importante: se  $f$  representa uma “quantidade infinitésima” distribuída ao longo de uma curva  $C$ , então a integral  $\int_C f$  representa a “quantidade



total”. Para ilustrar essa situação, lembramos que definimos no exemplo 2.31 o potencial elétrico gerado por uma carga pontual de carga  $q \in \mathbb{R}$  e localizada em  $X_0 \in \mathbb{R}^3$  como o campo escalar

$$\begin{aligned} V_{X_0}: \mathbb{R}^3 \setminus \{X_0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|X - X_0\|}. \end{aligned}$$

Agora, imaginemos que uma curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$  gera, em todo  $X_0 \in \mathcal{C}$ , um “potencial infinitésimo”  $V_{X_0}$ . Traduzida na linguagem da integral de linha, isto significa que a curva gera um potencial elétrico total da forma

$$\begin{aligned} W: \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto -\int_{\mathcal{C}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|X - X_0\|} dX_0. \end{aligned}$$

Por exemplo, se  $\mathcal{C}$  é o intervalo parametrizado por

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (t, 0, 0), \end{aligned}$$

então a velocidade escalar é  $\|\gamma'(t)\| = 1$ , e o potencial elétrico total é

$$W(X) = -\int_{\mathcal{C}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|X - X_0\|} dX_0 = -\int_0^1 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|X - (t, 0, 0)\|} \cdot 1 dt.$$

Em particular, no ponto  $X = (0, 0, 1)$ , temos

$$\begin{aligned} W(0, 0, 1) &= -\int_0^1 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|(t, 0, 1)\|} \cdot 1 dt \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot 1 dt \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_0^1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

**Observação 5.10.** Vale destacar que a propriedade-definição 5.5 ainda vale quando a curva  $\mathcal{C}$  apenas é derivável por partes, conforme definimos na definição 5.1. Nesse caso, a integral curvilínea se define particionando o domínio de uma parametrização  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  em sub-intervalos

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N$$

tal que  $\gamma$  é derivável em cada um desses intervalos, e somando as integrais:

$$\int_{\mathcal{C}} f = \sum_{k=1}^N \int_{I_k} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt.$$

## 5.2 Integral curvilínea de um campo vetorial

### 5.2.1 Curvas orientadas e parametrizações

Em contraste com a integral de um campo escalar, a integral de um campo vetorial depende da *orientação* das curvas, que estudamos agora.

**Revisitando a integração por substituição.** Para explicar a noção de orientação, convém comparar os dois teoremas de mudança de variáveis que conhecemos. Sejam  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $\phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$  continuamente derivável.

- Mudança de variáveis versão numérica (veja o teorema 1.27): vale

$$\int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) \, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u) \, du.$$

- Mudança de variáveis versão generalizável em dimensões maiores: se, além disso,  $\phi$  for injetiva, vale

$$\int_{[a,b]} f(\phi(x)) \cdot |\phi'(x)| \, dx = \int_{\phi([a,b])} f(u) \, du.$$

À primeira vista, poderíamos pensar que as duas fórmulas são iguais. No entanto, há uma sutileza na primeira formulação: se  $\phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$  for decrescente, então teríamos  $\phi(a) > \phi(b)$ , e a integral é, de fato,

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u) \, du = - \int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(u) \, du.$$

Na segunda formulação, integramos diretamente sobre o intervalo  $\phi([a, b])$ , e não ocorre essa mudança de sinal. A partir dessa análise, constatamos que, ao aplicar a mudança de variável com um termo  $\phi'$  e não  $|\phi'|$ , precisamos nos preocupar com o fato de  $\phi'$  “inverter” ou não o intervalo  $[a, b]$ .

**A noção de orientação.** Seja  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  uma curva não-fechada, e denotemos  $A, B \in \mathbb{R}^n$  as extremidades  $\mathcal{C}$ . Visualmente, uma parametrização  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  pode percorrer a curva de duas maneiras: começando em  $A$  e terminando em  $B$ , ou começando em  $B$  e terminando em  $A$ . Em outras palavras, o conjunto de parametrizações pode ser dividido em duas classes, dependendo da direção em que elas percorrem a curva. A escolha de uma dessas classes é chamada de orientação. Como sugere o seguinte resultado, essa propriedade pode ser lida nos difeomorfismos de reparametrização.

**Lema 5.11.** *Sejam  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas parametrizações injetivas de uma curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ , e  $h: [c, d] \rightarrow [a, b]$  o difeomorfismo  $h = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ . Então podem ocorrer dois casos exclusivos:*

- $h'(t) > 0 \, \forall t \in [c, d]$ , caso em que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$ ,
- $h'(t) < 0 \, \forall t \in [c, d]$ , caso em que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(d)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ .

Em outras palavras, é possível saber, pela derivada de  $h$ , se as curvas seguem o mesmo sentido. Isso leva à definição a seguir.

**Definição 5.12.** Uma **curva orientada** é uma par  $(\mathcal{C}, \gamma)$  onde  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  é uma curva e  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma parametrização dela. Chamamos de **parametrização que preserva a orientação** da curva orientada  $(\mathcal{C}, \gamma)$  uma parametrização  $\eta$  da curva  $\mathcal{C}$  tal que  $\gamma^{-1} \circ \eta$  tenha derivada positiva.

**Exemplo 5.13.** Consideremos as quatro parametrizações da semicircunferência  $\mathcal{C}$  no 5.8. As duas primeiras curvas começam em  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (1, 0)$  e terminam em  $\gamma_1(\pi) = \gamma_2(\sqrt{\pi}) = (-1, 0)$ , enquanto o contrário ocorre com as duas segundas. Portanto, se considerarmos a curva orientada para  $(\mathcal{C}, \gamma_1)$ , então  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$  não preservam a orientação. Também podemos ler isso nos difeomorfismos de reparametrização, como no lema 5.11. Para tanto, relembremos do exemplo 4.14: vimos que  $\gamma_1$  reparametriza-se em  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$ , i.e., podemos escrever

$$\gamma_2 = h_2 \circ \gamma_1 \qquad \gamma_3 = h_3 \circ \gamma_1 \qquad \gamma_4 = h_4 \circ \gamma_1$$

por meio dos difeomorfismos

$$\begin{array}{lll} h_2: [0, \sqrt{\pi}] \longrightarrow [0, \pi] & h_3: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] & h_4: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \\ t \longmapsto t^2 & t \longmapsto \arccos(t) & t \longmapsto \arccos(t\sqrt{2-t^2}). \end{array}$$

Eles admitem as seguintes derivadas:

$$h_2'(t) = 2t \geq 0 \qquad h_3'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} < 0 \qquad h_4'(t) = \frac{-2}{\sqrt{2-t^2}} < 0.$$

Vemos que as curvas  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$  verificam o segundo caso do lema 5.11. A curva  $\gamma_2$ , por outro lado, não se enquadra no lema, pois, propriamente dito, não é uma parametrização da semicircunferência (ela não é regular).

**Notação 5.14.** Se  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva parametrizada, denotaremos  $\gamma^-$  a curva parametrizada que percorre o mesmo traço mas no sentido oposto. Mas precisamente, se  $I = [a, b]$ , definiremos

$$\begin{array}{l} \gamma^-: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \gamma(ta + (1-t)b). \end{array}$$

Por outro lado, quando não houver risco de confusão, uma curva orientada  $(\mathcal{C}, \gamma)$  poderá ser indicada apenas como  $\mathcal{C}$ . Usaremos a notação  $\mathcal{C}^-$  para denotar a curva orientada  $(\mathcal{C}, \gamma^-)$ , i.e., a com orientação oposta.

### 5.2.2 Definição de integral curvilínea de campos vetoriais

Sejam  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  uma curva,  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização e  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial. Para definir a integral de  $F$  ao longo de  $\mathcal{C}$ , poderíamos simplesmente decompor  $F = (F_1, \dots, F_n)$  em componentes, e calcular a integral curvilínea de cada uma delas. Porém, não é essa ideia que nos interessa aqui. Na física, sabe-se que, se uma partícula  $\gamma$  estiver exposta à ação de um campo de força  $F$ , o *trabalho* da força em  $t$  é o produto escalar

$$\langle \gamma'(t), F(\gamma(t)) \rangle.$$

Naturalmente, o *trabalho total* é a seguinte integral, que chamaremos de integral de linha de campo vetorial:

$$\int_I \langle \gamma'(t), F(\gamma(t)) \rangle \, dt.$$

**Propriedade-definição 5.15.** *Sejam  $(\mathcal{C}, \gamma)$  uma curva orientada, com  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  uma curva e  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização, e  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo. Então a quantidade*

$$\int_I \langle \gamma'(t), F(\gamma(t)) \rangle \, dt \tag{6}$$

independe da escolha da parametrização  $\gamma$  que preserva a orientação de  $\mathcal{C}$ . Ela é chamada de **integral curvilínea** (ou **integral de linha**) do campo vetorial  $F$  ao longo de  $\mathcal{C}$ , e é denotada

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr \quad \text{ou} \quad \int_{\mathcal{C}} F(x_1, \dots, x_n) \cdot dr$$

*Demonstração.* A prova é semelhante à propriedade-definição 5.5. Sejam  $\gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas parametrizações de  $\mathcal{C}$  que preservem a orientação. Basta mostrar que

$$\int_I \langle \gamma_1'(t), F(\gamma_1(t)) \rangle dt = \int_J \langle \gamma_2'(t), F(\gamma_2(t)) \rangle dt.$$

Pelos lemas 5.4 and 5.11, existe um difeomorfismo  $h: J \rightarrow I$  tal que  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$  e  $h' > 0$ . Logo, a segunda integral reescreve-se

$$\int_J \langle h'(t) \gamma_1'(h(t)), F(\gamma_1(h(t))) \rangle dt = \int_J \langle \gamma_1'(h(t)), F(\gamma_1(h(t))) \rangle h'(t) dt.$$

Do teorema de mudança de variável, e usando que  $h' > 0$ , segue que a integral vale

$$\int_J \langle \gamma_1'(h(t)), F(\gamma_1(h(t))) \rangle \underbrace{h'(t) dt}_{ds} = \int_I \langle \gamma_1'(s), F(\gamma_1(s)) \rangle ds.$$

Assim mostramos que as duas integrais coincidem. □

**Observação 5.16.** É interessante notar que, se  $(F_1, \dots, F_n)$  são as componentes de  $F$  e  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  as de  $\gamma$ , então

$$\langle \gamma'(t), F(\gamma(t)) \rangle = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t) F_i(\gamma(t)).$$

Consequentemente, podemos decompor a integral em

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \sum_{i=1}^n \int_I \gamma_i'(t) F_i(\gamma(t)) dt.$$

O  $i$ -ésimo termo pode ser entendido como a contribuição para a integral ao longo da  $i$ -ésima coordenada. Na prática, essa decomposição permite calcular a integral somando as contribuições de cada coordenada. Vale destacar que cada termo  $\int_I \gamma_i'(t) F_i(\gamma(t)) dt$  é independente da escolha da parametrização  $\gamma$  que preserva a orientação; em particular, uma parametrização diferente pode ser escolhida para cada termo.

**Notação 5.17.** Da mesma forma que o termo “ $ds$ ” na notação  $\int_{\mathcal{C}} f ds$  indica uma integral curvilínea de campo escalar, o termo “ $dr$ ” em  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  indica uma integral curvilínea de campo vetorial. Por outro lado, o símbolo ponto “ $\cdot$ ” deve ser entendido como um produto escalar; de fato,  $x \cdot y$  é outra notação comum para  $\langle x, y \rangle$ . Além disso, como resultado da observação 5.16, é comum encontrar em livros de cálculo a notação

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}} F_i(x_i) dx_i.$$

Tenhamos cuidado com essa notação:  $\int_{\mathcal{C}} F_i(x_i) dx_i$  realmente significa  $\int_I \gamma_i'(t) F_i(\gamma(t)) dt$ .

**Observação 5.18.** Naturalmente, podemos nos perguntar se a integral curvilínea de um campo escalar (propriedade-definição 5.5) e de um campo vetorial (propriedade-definição 5.15) estão relacionadas. De fato, observemos que, se decompormos  $\gamma'(t)$  em

$$\gamma'(t) = \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\text{velocidade escalar}} \underbrace{\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}_{\text{vetor tangente}}$$

então veremos aparecer na equação (6) uma integral curvilínea de campo escalar:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_I \left\langle F(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\mathcal{C}} \langle F, G \rangle ds$$

onde  $G(\gamma(t)) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$  é o *campo vetorial tangente* de  $\gamma$ . Reciprocamente, podemos exprimir uma integral curvilínea de campo escalar como uma integral curvilínea de campo vetorial. Para tanto, definamos o *campo vetorial velocidade* de  $\gamma$  como  $H(\gamma(t)) = \gamma'(t)$  (observe aqui que  $H$ , como  $G$  acima, é definido apenas em  $\mathcal{C}$ , o traço de  $\gamma$ ). Seja um campo escalar  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e consideremos o campo vetorial produto  $fH$ . Temos

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_I f \circ \gamma \|\gamma'\| = \int_I \langle (f \circ \gamma) \gamma', \gamma' \rangle = \int_{\mathcal{C}} f H \cdot dr.$$

Embora interessante, essa ligação não será aprofundada neste curso, e trataremos a integral curvilínea de campo vetorial separadamente da de campo escalar.

**Propriedade 5.19.** *Sejam  $(\mathcal{C}, \gamma)$  uma curva orientada, que denotamos mais simplesmente  $\mathcal{C}$ , e  $(\mathcal{C}, \gamma^-)$  a curva com orientação oposta, que denotamos mais simplesmente  $\mathcal{C}^-$  (veja a notação 5.14). Seja também um campo vetorial  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Vale*

$$\int_{\mathcal{C}^-} F \cdot dr = - \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr.$$

*Demonstração.* As curvas parametrizadas  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma^-: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem mesmo traço e sentido oposto. Isto é, pelo lema 5.11, podemos escrever  $\gamma^- = \gamma \circ h$  com  $h: I \rightarrow I$  um difeomorfismo tal que  $h' < 0$ . Escrevemos então a definição de integral curvilínea de campo vetorial:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^-} F \cdot dr &= \int_I \langle (\gamma^-)'(t), F(\gamma^-(t)) \rangle dt \\ &= \int_I \langle \gamma'(h(t)), F(\gamma(h(t))) \rangle h'(t) dt \\ &= - \int_I \langle \gamma'(h(t)), F(\gamma(h(t))) \rangle \underbrace{|h'(t)|}_{ds} dt \\ &= - \int_I \langle \gamma'(t), F(\gamma(t)) \rangle dt \\ &= - \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr, \end{aligned}$$

onde usamos o teorema de mudança de variável na quarta igualdade.  $\square$

**Exemplo 5.20.** Consideremos as parametrizações  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_4$  da semicircunferência  $\mathcal{C} = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$  dadas no exemplo 5.8. Consideraremos que  $\mathcal{C}$  é orientada no sentido trigonométrico. Já calculamos no exemplo 4.4 as derivadas

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} & \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix} & \gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} & \gamma_4(t) &= \begin{pmatrix} t\sqrt{2-t^2} \\ 1-t^2 \end{pmatrix}. \\ \gamma_1'(t) &= \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} & \gamma_2'(t) &= \begin{pmatrix} -2t \sin t^2 \\ 2t \cos t^2 \end{pmatrix} & \gamma_3'(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} & \gamma_4'(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2(t^2-1)}{\sqrt{2-t^2}} \\ -2t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Agora, seja o campo vetorial constante

$$\begin{aligned}F: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (1, 0).\end{aligned}$$

Para calcular a integral curvilínea de  $F$  ao longo de  $\mathcal{C}$ , reproduziremos o cálculo para as quatro parametrizações. Observemos que as duas primeiras parametrizações percorrem  $\mathcal{C}$  no sentido trigonométrico — fornecendo então a integral  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  —, e as duas outras no sentido horário — cuja integral denotamos  $\int_{\mathcal{C}^-} F \cdot dr$ .

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \langle \gamma_1'(t), F(\gamma_1(t)) \rangle dt &= \int_0^\pi -\sin(t) dt = \left[ \cos \right]_0^\pi = -2, \\ \int_0^{\sqrt{\pi}} \langle \gamma_2'(t), F(\gamma_2(t)) \rangle dt &= \int_0^{\sqrt{\pi}} -2t \sin(t^2) dt = \left[ \cos(t^2) \right]_0^{\sqrt{\pi}} = -2, \\ \int_{-1}^1 \langle \gamma_3'(t), F(\gamma_3(t)) \rangle dt &= \int_{-1}^1 1 dt = 1 - (-1) = 2, \\ \int_{-1}^1 \langle \gamma_4'(t), F(\gamma_4(t)) \rangle dt &= \int_{-1}^1 -\frac{2(t^2-1)}{\sqrt{2-t^2}} dt = \left[ t\sqrt{2-t^2} \right]_{-1}^1 = 2.\end{aligned}$$

**Exemplo 5.21** (Trabalho de uma força). Como apresentamos no início desta seção, a integral curvilínea  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  de um campo vetorial é entendida, na física, como o trabalho da força  $F$  em uma partícula cuja trajetória é  $\mathcal{C}$ . Em particular, podemos deduzir que, no caso de uma partícula cuja trajetória é ortogonal à força aplicada, a força não trabalha. Com efeito,

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_I \underbrace{\langle \gamma'(t), F(\gamma(t)) \rangle}_0 dt = 0.$$

É o caso da força elétrica em uma partícula girando em torno da carga. Denotando

$$\begin{aligned}F: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{X}{\|X\|^3}\end{aligned}$$

o campo elétrico centrado em  $X_0 = (0, 0, 0)$ , e

$$\begin{aligned}\gamma: [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t, 0)\end{aligned}$$

o movimento de uma partícula cujo traço é a semicircunferência  $\mathcal{C}$  percorrida no sentido trigonométrico, temos

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_0^\pi \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_0 dt = 0.$$

### 5.3 Exercícios

**Exercício 5.1** (correção). Calcule a integral curvilínea ao longo do círculo  $\mathcal{C}$  centrado na origem e de raio 1 e orientado no sentido trigonométrico para os seguintes campos vetoriais:

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}. \end{array}$$

**Exercício 5.2** (correção). Considere a curva  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y = x^2\}$ , e os campos

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto xy & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Calcule as integrais curvilíneas  $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$  e  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ . Para a integral de campo vetorial, considere as duas orientações.

**Exercício 5.3** (correção). Calcule as integrais curvilíneas dos seguintes campos escalares  $f$  ao longo das curvas  $\mathcal{C}$ :

1.  $f(x, y) = x + y$  e  $\mathcal{C}$  é o segmento de reta entre  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ ,
2.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  e  $\mathcal{C}$  é o traço de  $\gamma: t \in [0, \pi/2] \mapsto (\sin t, \cos t, 8t)$ ,
3.  $f(x, y) = xy^4$  e  $\mathcal{C}$  é a semicircunferência centrada na origem e de raio 4,
4.  $f(x, y) = 4x^3$  e  $\mathcal{C}$  é o segmento de reta entre  $(-2, -1)$  e  $(1, 2)$ .

**Exercício 5.4** (correção). Calcule as integrais curvilíneas dos seguintes campos vetoriais  $F$  ao longo das curvas orientadas  $\mathcal{C}$ :

1.  $F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3xy \\ -(x+z) \end{pmatrix}$  e  $\mathcal{C}$  é o segmento de reta de  $(0, 1, 2)$  até  $(2, 0, 1)$ ,
2.  $F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/2 \\ -y/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$  e  $\mathcal{C}$  é o traço (orientado) de  $\gamma: t \in [0, 3\pi] \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ ,
3.  $F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \\ x+y \end{pmatrix}$  e  $\mathcal{C}$  é o traço (orientado) de  $\gamma: t \in [0, 2\pi] \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -1 \end{pmatrix}$ ,
4.  $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \sin y \\ x^2 \cos y - 3y^2 \end{pmatrix}$  e  $\mathcal{C}$  é o segmento de reta de  $(-1, 0)$  até  $(5, 1)$ .

Sugestão: Para 3., poderemos usar  $\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2$ . Para 4., lembraremos que uma primitiva de  $t \cos t$  é  $\cos t + t \sin t$ , e uma primitiva de  $t^2 \cos t$  é  $2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t$ .

**Exercício 5.5** (correção). Calcule o trabalho da força elétrica

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X \longmapsto \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{X}{\|X\|^3}$$

exercida sobre uma partícula que se move em uma linha reta de  $(1, 0, 0)$  a  $(0, 1, -1)$ .

**Exercício 5.6** (Energia cinética, correção). Suponha que um objeto siga uma trajetória  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Pela segunda lei de Newton, a força resultante aplicada sobre o objeto no instante  $t$  é

$$F(\gamma(t)) = m\gamma''(t)$$

onde  $m$  é a massa. Além disso, definimos a energia cinética do objeto como

$$E(t) = \frac{m}{2} \|\gamma'(t)\|^2.$$

Mostre que o trabalho da força  $F$  ao longo de  $\gamma$  vale  $E(b) - E(a)$ .

## 6 Integral curvilínea - Teorema de Green

Demonstraremos aqui o teorema de Green, que relaciona a integral curvilínea de um campo vetorial ao longo da fronteira de um domínio plano à integral dupla de seu rotacional no domínio. Esse resultado aparece, embora não nessa forma, na importante publicação de George Green de 1828 [Gre28]. Mais adiante, generalizaremos esse teorema para dimensão 3 (o teorema de Stokes). Vale destacar que, ao nível da graduação em matemática, usualmente apenas uma versão fraca do teorema de Green é provada — para os chamados domínios “simples” — e é admitida sua extensão para domínios “regulares”. Discutiremos, em uma seção facultativa, de domínios mais gerais.

### 6.1 Lembrete de integral dupla

**Integral de Riemann dupla.** A partir de agora, precisaremos integrar funções em domínios planos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  compactos, ou seja, fechados e limitados. Para isso, usaremos a integral de Riemann bidimensional, para a qual damos a referência [MT12, Capítulo 5]. Devemos ter cuidado com um detalhe: a definição básica da integral de Riemann nos permite integrar funções contínuas num retângulo  $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ . Para integrar em domínios mais complexos, digamos  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , poderíamos simplesmente estender  $f$  sobre um retângulo que contém  $\Omega$ , atribuindo o valor 0. Isto pode ser um problema, pois então a extensão de  $f$  não é mais uma função contínua. No entanto, os resultados ainda permanecem válidos se nos restringirmos aos domínios  $\Omega$  que são delimitados por curvas contínuas. Neste caso, temos

$$\int_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = \int_{[a, b] \times [c, d]} \tilde{f}(x, y) d(x, y)$$

onde a extensão de  $f$  é definida como

$$\tilde{f}: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{se } (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus \Omega. \end{cases}$$



**O teorema de Fubini.** O primeiro resultado de que precisaremos é teorema de Fubini. Vale ressaltar que a hipótese de regularidade sobre  $f$  é usada para garantir sua integrabilidade (para a integral de Lebesgue, por exemplo, bastaria que ela fosse mensurável).

**Teorema 6.1** (Teorema de Fubini para a integral de Riemann dupla). *Seja  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada tal que seu conjunto de descontinuidades seja incluído em uma união finita de traços de curvas parametrizadas contínuas.*

- Suponha que por todo  $x \in [a, b]$ , a função  $y \mapsto f(x, y)$  seja integrável sobre  $[c, d]$ . Então a função  $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$  é integrável sobre  $[a, b]$ , e vale

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

- Suponha que por todo  $y \in [c, d]$ , a função  $x \mapsto f(x, y)$  seja integrável sobre  $[a, b]$ . Então a função  $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$  é integrável sobre  $[c, d]$ , e vale

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

No contexto de domínios descritos por duas curvas, temos as seguintes fórmulas.

**Corolário 6.2.** *Além das hipóteses do teorema 6.1, suponha que existam duas curvas  $u_1, u_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Omega$  se escreva como*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}.$$

Então tem-se

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Similarmente, suponha que existam duas curvas  $v_1, v_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Omega$  se escreva

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$$

Então tem-se

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left( \int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Integração por substituição.** Da mesma forma que estabelecemos um teorema de mudança de coordenadas para a integral simples (teorema 1.27), o resultado também é válido para a integral dupla; nesse contexto, o papel da derivada da mudança de coordenadas é desempenhado pelo módulo do determinante jacobiano.

**Teorema 6.3** (Teorema de mudança de coordenadas para a integral dupla de Riemann). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  compacto,  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto tal que  $\Omega \subset U$ ,  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ , injetiva e de determinante jacobiano nunca zero, e  $f: \phi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então*

$$\int_{\Omega} f(\phi(x, y)) \cdot |\det d_{(x,y)} \phi| d(x, y) = \int_{\phi(\Omega)} f(x, y) d(x, y),$$

onde  $|\det d_{(x,y)}\phi|$  representa o módulo do determinante jacobiano  $\phi$  no ponto  $(x, y)$ . Em particular, com a mudança de coordenadas polares

$$\begin{aligned}\phi: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)\end{aligned}$$

obtemos a fórmula

$$\int_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \, d(r, \theta) = \int_{\phi(\Omega)} f(x, y) \, d(x, y).$$

**Observação 6.4.** Ao contrário do enunciado unidimensional (teorema 1.27), o teorema bidimensional acima exige a injetividade da mudança de variáveis  $\phi$ . Como mostra o exemplo a seguir, essa hipótese não pode ser dispensada. Seja  $\Omega$  a fita fechada de raios 1 e 2, isto é,

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} \mid r \in [1, 2], \, t \in [0, 2\pi) \right\},$$

e  $\phi$  a função definida em coordenadas polares por

$$\phi: \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \cos 2t \\ r \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Em outras palavras,  $\phi$  é a função que faz com que a fita gire duas vezes sobre si mesma. Para calcular seu determinante jacobiano, vamos escrevê-la em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \cos(2 \arctan y/x) \\ \sin(2 \arctan y/x) \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Podemos então calcular a diferencial:

$$d_{(x,y)}\phi = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x(x^2 + 3y^2) & -y(3x^2 + y^2) \\ 2y^3 & 2x^3 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det d_{(x,y)}\phi = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} (x(x^2 + 3y^2) \cdot 2x^3 + y(3x^2 + y^2) \cdot 2y^3) = 2.$$

Agora, seja também  $f$  a função constante igual a 1. Queremos verificar se a igualdade do teorema 6.3 vale para  $f$  e  $\phi$ . Por um lado,

$$\int_{\Omega} f(\phi(x, y)) \cdot |\det d_{(x,y)}\phi| \, d(x, y) = \int_{\Omega} 2 \, d(x, y) = 2\mathcal{A}(\Omega)$$

onde  $\mathcal{A}(\Omega)$  é a área da fita (que vale  $3\pi$ ). Por outro lado, temos  $\phi(\Omega) = \Omega$ , e

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{\Omega} 1 \, d(x, y) = \mathcal{A}(\Omega).$$

Esse termos não são iguais. De fato, a primeira integral vale o dobro da segunda, pois o domínio foi girado duas vezes e, portanto, foi “contado” duas vezes.

A propósito, esse problema não aparece na formulação unidimensional do teorema da mudança de variável no teorema 1.27. Com efeito, nesse caso, para que  $\phi$  seja não-injetiva, sua derivada teria que mudar de sinal. Mas essa mudança de sinal “compensaria” o número de voltas que a domínio dá sobre si mesmo. Para ilustrar isso, consideremos a função  $f: [-1, 1]$  constante igual a 1, o intervalo  $[0, 2\pi]$  e a função

$$\begin{aligned}\phi: [0, 4\pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ t &\longmapsto \cos t.\end{aligned}$$

Tem-se

$$\int_{[0, 4\pi]} (f \circ \phi) \phi' = \int_0^{4\pi} (-\sin) = \cos 4\pi - \cos 0 = 0,$$

o que é igual a

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(4\pi)} f = \int_0^0 f = 0.$$

Notemos que no caso da formulação com módulo da derivada (veja seção 5.2.1), a hipótese de injetividade é necessária. Com efeito, a seguinte integral não vale zero:

$$\int_{[0, 4\pi]} (f \circ \phi) |\phi'| = \int_0^{4\pi} |\sin(t)| dt = 8.$$

Por fim, podemos nos perguntar o que aconteceria com o teorema 6.3 se permitíssemos que o determinante jacobiano se cancelasse. Na verdade, como  $\phi$  é  $C^1$  e injetiva, há poucos lugares em que o determinante jacobiano se cancela: pelo teorema de Sard, tem medida zero. A hipótese de que o determinante não se cancela é, nesse sentido, “redundante”. Como comentário final, devemos mencionar que não podemos remover o módulo do determinante jacobiano, pois a fórmula não seria mais válida.

## 6.2 Teorema de Green

### 6.2.1 Demonstração para domínios simples

O teorema de Green trata de domínios do plano delimitados por uma curva. Lembremos que, pelo teorema de Jordan que admitimos (teorema 4.26), uma curva parametrizada  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua, fechada ( $\gamma(a) = \gamma(b)$ ) e simples (injetora) divide o plano em duas componentes conexas, apenas uma sendo limitada, a qual denotaremos  $\Omega$ . O conjunto  $\Omega$  é fechado e sua fronteira, denotada  $\partial\Omega$ , coincide com o traço  $\mathcal{C}$  da curva  $\gamma$ .

A fim de estudar apenas uma configuração que possamos alcançar com as ferramentas que temos em mãos, consideraremos nesta seção que  $\Omega$  é um **domínio simples**, ou seja, existem dois intervalos  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  de  $\mathbb{R}$  e quatro funções  $C^1$  por partes

$$u_1, u_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \qquad v_1, v_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que  $u_1(a) = u_2(a)$ ,  $u_1(b) = u_2(b)$ ,  $v_1(c) = v_2(c)$ ,  $v_1(d) = v_2(d)$  e que  $\Omega$  se escreva simultaneamente como

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\} \quad (7)$$

$$\text{e} \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}. \quad (8)$$

Por exemplo, a circunferência unitária é um domínio simples, com os intervalos  $[-1, 1]$  e  $[-1, 1]$ , e as funções  $u_1(t) = -\sqrt{1-t^2}$ ,  $u_2(t) = \sqrt{1-t^2}$ ,  $v_1(t) = -\sqrt{1-t^2}$  e  $v_2(t) = \sqrt{1-t^2}$ . Um outro exemplo é dado na figura 4a.

**Teorema 6.5** (Teorema de Green para domínios simples). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio simples,  $A \subset \mathbb{R}^2$  um aberto que contém  $\Omega$  e  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Consideremos que a fronteira  $\partial\Omega$  é orientada no sentido trigonométrico. Vale*

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dr = \int_{\Omega} \text{rot } F.$$

**Observação 6.6.** A integral à esquerda é uma integral curvilínea de campo vetorial, bem definida pois  $F$  é diferenciável (bastaria ser contínua); a integral à direita é uma integral bidimensional, integrável no sentido de Riemann pois  $\text{rot } F$  é contínuo.

*Demonstração.* Antes de tudo, explicitaremos a integral curvilínea à esquerda. Seja  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma curva parametrizada fechada e simples cujo traço é  $\mathcal{C}$ . Denotando  $F = (F_1, F_2)$  as componentes de  $F$ , já vimos na observação 5.16 que podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \int_I \langle F \circ \gamma, \gamma' \rangle = \int_I \left\langle \begin{pmatrix} F_1 \circ \gamma \\ F_2 \circ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_I (F_1 \circ \gamma) \gamma'_1 + \int_I (F_2 \circ \gamma) \gamma'_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Uma observação interessante é que essas duas integrais não dependem da escolha da parametrização  $\gamma$  que preserva a orientação. De fato, o primeiro termo corresponde a uma integral contra a componente “horizontal” de  $\gamma$  (representada por  $\gamma'_1$ ), e o segundo contra a componente “vertical” (representada por  $\gamma'_2$ ). Estudaremos eles separadamente.<sup>4</sup>

Como se supõe que o domínio seja simples, podemos escolher a parametrização dada pela equação (7):

$$\begin{aligned} \gamma: [a, 2b-a] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} (t, u_1(t)) & \text{se } t \in [a, b], \\ (2b-t, u_2(2b-t)) & \text{se } t \in [b, 2b-a]. \end{cases} \end{aligned}$$

Observemos que

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1, u'_1(t)) & \text{se } t \in [a, b], \\ (-1, -u'_2(2b-t)) & \text{se } t \in [b, 2b-a]. \end{cases}$$

Logo, o primeiro termo da equação (9) vale

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} (F_1 \circ \gamma) \gamma'_1 &= \int_a^b F_1 \left( \begin{pmatrix} t \\ u_1(t) \end{pmatrix} \right) dt + \int_b^{2b-a} -F_1 \left( \begin{pmatrix} 2b-t \\ -u_2(2b-t) \end{pmatrix} \right) dt \\ &= \int_a^b F_1 \left( \begin{pmatrix} t \\ u_1(t) \end{pmatrix} \right) dt - \int_a^b F_1 \left( \begin{pmatrix} t \\ u_2(t) \end{pmatrix} \right) dt \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>4</sup>Vale destacar aqui que, como já comentamos na notação 5.17, é comum encontrar as notações

$$\int_I F_1(x, y) dx = \int_I (F_1 \circ \gamma) \gamma'_1 \quad \text{e} \quad \int_I F_2(x, y) dy = \int_I (F_2 \circ \gamma) \gamma'_2.$$

Tentamos evitá-las para não sobrecarregar este documento.

onde usamos a mudança de coordenadas na última igualdade. Similarmente, podemos considerar a parametrização oferecida pela equação (8):

$$\begin{aligned}\gamma: [c, 2d - c] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} (v_2(t), t) & \text{se } t \in [c, d], \\ (v_1(2d - t), 2d - t) & \text{se } t \in [d, 2d - c]. \end{cases}\end{aligned}$$

Sua derivada vale

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (v_2'(t), 1) & \text{se } t \in [c, d], \\ (-v_2'(2d - t), -1) & \text{se } t \in [d, 2d - c]. \end{cases}$$

Injetada no segundo termo da equação (9), obtemos

$$\begin{aligned}\int_C (F_2 \circ \gamma) \gamma_2' &= \int_c^d F_2 \left( \begin{matrix} v_2(t) \\ t \end{matrix} \right) dt + \int_d^{2d-c} -F_1 \left( \begin{matrix} v_1(2d-t) \\ 2d-t \end{matrix} \right) dt \\ &= \int_c^d F_2 \left( \begin{matrix} v_2(t) \\ t \end{matrix} \right) dt - \int_c^d F_2 \left( \begin{matrix} v_1(t) \\ t \end{matrix} \right) dt.\end{aligned}\tag{11}$$

Para continuar a prova, decompomos a integral do rotacional da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \text{rot } F &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) d(x, y)}_{(A)} + \underbrace{\int_{\Omega} -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) d(x, y)}_{(B)}.\end{aligned}$$

Para calcular o termo (A), consideramos a parametrização do domínio simples  $\Omega$  dada pela equação (8), e escrevemos o teorema de Fubini (corolário 6.2):

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) d(x, y) &= \int_c^d \left( \int_{v_1(y)}^{v_2(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left( F_2(v_2(y), y) - F_2(v_1(y), y) \right) dy \\ &= \int_c^d F_2(v_2(y), y) dy - \int_c^d F_2(v_1(y), y) dy\end{aligned}$$

onde usamos, na segunda igualdade, o fato de que  $x \mapsto F(x, \cdot)$  é uma primitiva de  $x \mapsto \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, \cdot)$ . De acordo com a equação (11), esse termo vale  $\int_C (F_2 \circ \gamma) \gamma_2'$ . Similarmente, para calcular o termo (B), consideremos a parametrização de  $\Omega$  dada pela equação (7):

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left( \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( F_1(x, u_2(x)) - F_1(x, u_1(x)) \right) dx \\ &= \int_a^b F_1(x, u_2(x)) dx - \int_a^b F_1(x, u_1(x)) dx.\end{aligned}$$

Segundo a equação (10), esse termo vale  $-\int_C (F_1 \circ \gamma) \gamma_1'$ . Para concluir, reunindo os termos (A) e (B), obtemos o teorema.  $\square$

**Exemplo 6.7.** Queremos calcular a integral do campo vetorial  $F(x, y) = (xy^2, x + y)$  ao longo do triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(2, 0)$ , orientado no sentido trigonométrico. Pelo teorema de Green, essa integral vale a integral bidimensional de  $\text{rot } F(x, y) = 1 - 2xy$  no domínio  $\Omega$  delimitado pelo triângulo. Usando o teorema de Fubini, tem-se

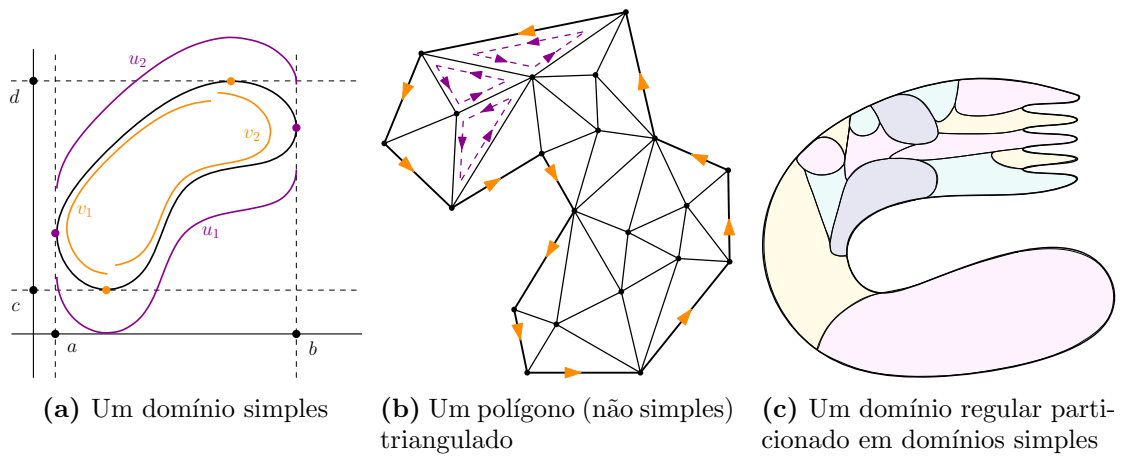
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1 - x^2 \, d(x, y) &= \int_0^1 \left( \int_0^x 1 - 2xy \, dy \right) dx + \int_1^2 \left( \int_0^{2-x} 1 - 2xy \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[ y - xy^2 \right]_{y=0}^x dx + \int_1^2 \left[ y - xy^2 \right]_{y=0}^{2-x} dx \\ &= \int_0^1 x - x^3 \, dx + \int_1^2 (2 - x) - x(2 - x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

É claro que poderíamos ter calculado diretamente a integral curvilínea a partir de sua definição, parametrizando o triângulo. Escrevendo o segmento de reta entre  $(0, 0)$  e  $(2, 0)$  como  $\gamma_1: t \in [0, 1] \mapsto (2t, 0)$ , entre  $(2, 0)$  e  $(1, 1)$  como  $\gamma_2: t \in [0, 1] \mapsto (2 - t, t)$  e entre  $(1, 1)$  e  $(0, 0)$  como  $\gamma_3: t \in [0, 1] \mapsto (1 - t, 1 - t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} F \cdot dr \\ &= \left( \int_{(0,0)}^{(2,0)} + \int_{(2,0)}^{(1,1)} + \int_{(1,1)}^{(0,0)} \right) F \cdot dr \\ &= \int_0^1 \langle F \circ \gamma_1, \gamma_1' \rangle + \int_0^1 \langle F \circ \gamma_2, \gamma_2' \rangle + \int_0^1 \langle F \circ \gamma_3, \gamma_3' \rangle \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} (2-t)t^2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} (1-t)^3 \\ 2(1-t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 0 \, dt + \int_0^1 -(2-t)t^2 + 2 \, dt + \int_0^1 -(1-t)^3 - 2(1-t) \, dt \\ &= 0 + \frac{19}{12} - \frac{5}{4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

### 6.2.2 Formulação para domínios regulares

Gostaríamos de nos libertar da hipótese restritiva de domínio simples no teorema 6.5. Já podemos ver que na junção de dois domínios simples, o teorema de Green ainda se aplica. Com efeito, podemos aplicá-lo duas vezes, as contribuições integrais das arestas comuns se anulando. Este método funciona sem problemas para um domínio triangulado (como na figura 4b); no caso de domínio geral, a questão torna-se mais complicada: podemos particioná-lo em domínios simples? Acontece que o domínio deve verificar certas regularidades (veremos os limites deste resultado na seção seguinte). Citamos abaixo uma versão do teorema de Green que pode ser encontrada em [Spi18, capítulo 5] para o caso  $C^\infty$ , ou em [Lan12, capítulo XXIII §5] para o caso  $C^2$ . A prova, embora não mais complicada do que a ideia de colagens de domínios que apresentamos, requer a utilização de conceitos de geometria diferencial que ultrapassam o âmbito deste curso (mais especificamente, as partições da unidade em uma variedade).



**Figura 4:** Generalizando do teorema de Green para colagens de domínios simples

**Teorema 6.8** (Teorema de Green para domínios  $C^2$ ). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto compacto cuja fronteira  $\partial\Omega$  é conexa e parametrizada por uma curva fechada, regular, simples e de classe  $C^2$ ,  $A \subset \mathbb{R}^2$  um aberto que contém  $\Omega$  e  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Consideramos que  $\partial\Omega$  é orientada no sentido trigonométrico. Vale*

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dr = \int_{\Omega} \text{rot } F.$$

*Por outro lado, o resultado ainda é válido se a fronteira tiver várias componentes conexas, caso em que as contribuições de cada componente devem ser somadas. Por fim, o resultado ainda é válido se  $\partial\Omega$  for apenas  $C^2$  por partes.*

**Observação 6.9.** Dizemos que um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é **mensurável** se a sua função indicadora  $\chi_{\Omega}$  é Riemann-integrável. Neste caso, a **área** de  $\Omega$  é definida como

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega}.$$

Se  $\Omega$  for de fronteira de classe  $C^2$ , podemos aplicar o teorema de Green com o campo vetorial  $F(x, y) = (0, x)$ , obtendo

$$\int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot dr = \int_{\Omega} 1 = \mathcal{A}(\Omega).$$

Similarmente, com  $F(x, y) = (y, 0)$ , obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dr = \int_{\Omega} -1 = -\mathcal{A}(\Omega).$$

Destas duas igualdades deduzimos

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot dr.$$

Esta fórmula é particularmente útil para calcular áreas de domínios descritos em coordenadas polares. De fato, dada uma parametrização  $\gamma: t \in [a, b] \mapsto$

$(\rho(t) \cos t, \rho(t) \sin t)$  de  $\partial\Omega$ , ela se reescreve

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Omega) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} -\rho(t) \sin t \\ \rho(t) \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho'(t) \cos t - \rho(t) \sin t \\ \rho'(t) \sin t + \rho(t) \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(t) dt.\end{aligned}\quad (12)$$

No caso de uma parametrização da forma  $\gamma: t \in [a, b] \mapsto (\rho_1(t) \cos t, \rho_2(t) \sin t)$ , tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Omega) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} -\rho_2(t) \sin t \\ \rho_1(t) \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1'(t) \cos t - \rho_1(t) \sin t \\ \rho_2'(t) \sin t + \rho_2(t) \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \rho_1(t) \rho_2(t) + (\rho_1(t) \rho_2'(t) - \rho_1'(t) \rho_2(t)) \cos(t) \sin(t) dt.\end{aligned}\quad (13)$$

**Exemplo 6.10.** Para calcular a área da alça direita da lemniscata de Bernoulli, parametrizada em coordenadas polares por  $\rho: t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \mapsto \sqrt{\cos 2t}$ , usamos a equação (12):

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \frac{1}{2}.$$

**Observação 6.11.** O teorema 6.8 permite que a fronteira  $\partial\Omega$  consista em vários componentes conexas. Em particular, o domínio  $\Omega$  pode conter buracos — um exemplo é dado pela faixa de raio interno 1 e raio externo 2, obtida como o disco de raio 2 do qual o disco de raio 1 foi removido. Nesse caso, as fronteiras internas devem ser orientadas no sentido horário, não trigonométrico. Como uma aplicação clássica disso, podemos calcular a integral curvilínea de um campo vetorial ao longo da fronteira de um domínio no qual o campo admite uma singularidade. Mais precisamente, seja  $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo que não está definido na origem. Seja  $\mathcal{C}_2$  o círculo de raio 2 e centrado na origem. O teorema de Green não pode ser aplicado, pois o campo não está definido em todo o disco. Entretanto, ele pode ser aplicado à fita  $\Omega$  descrita acima. Sua fronteira consiste em  $\mathcal{C}_2$ , mas também em  $\mathcal{C}_1$ , o círculo de raio 1. Orientando  $\mathcal{C}_1$  no sentido horário, o teorema nos dá

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} F = \int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr.$$

Deduzimos que a integral curvilínea inicial pode ser encontrada como

$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = \int_{\Omega} \operatorname{rot} F - \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr.$$

Na prática, esperamos que essa fórmula seja mais fácil de lidar. Daremos um exemplo no exercício 6.4.

### 6.3 Generalização em menor regularidade

Poderíamos naturalmente nos perguntar se o teorema 6.8 ainda é válido sob hipóteses mais fracas de regularidade na curva  $\partial\Omega$ . Por exemplo, poderíamos pedir que fosse parametrizada por uma curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  apenas derivável. Isto está fadado ao fracasso,



uma vez que sabemos que certas curvas deriváveis têm comprimento infinito<sup>5</sup>, a integral do teorema à direita seria então infinita.

Devemos nos limitar pelo menos às curvas de comprimento finito, o que chamamos de curvas retificáveis. Também deve ser derivável, para que possamos calcular a integral curvilínea. Mais precisamente, dizemos que uma curva derivável  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $I$  compacto, é **retificável** se a integral  $\int_I \|\gamma'\|$  é finita. Estas curvas ainda podem ser bastante selvagens, por exemplo, podemos encontrar curvas retificáveis tais que a derivada é descontínua em um número incontável de pontos.<sup>6</sup> No entanto, existe um teorema de Green neste contexto. Uma prova pode ser encontrada em [Gre04].

**Teorema 6.12** (Teorema de Green para domínios retificáveis). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto compacto cuja fronteira  $\partial\Omega$  é conexa e parametrizada por uma curva fechada, simples e retificável,  $A \subset \mathbb{R}^2$  um aberto que contém  $\Omega$  e  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Consideramos que  $\partial\Omega$  é orientada no sentido trigonométrico. Vale*

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dr = \int_{\Omega} \text{rot } F.$$

## 6.4 Exercícios

**Exercício 6.1** (correção). Usando o teorema de Green, calcule a integral curvilínea dos seguintes campos vetoriais  $F$  ao longo das curvas  $\mathcal{C}$ . Consideraremos que as curvas são orientadas no sentido trigonométrico.

1.  $F(x, y) = (x^2 + e^y, x + y)$  e  $\mathcal{C}$  é o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,
2.  $F(x, y) = (5x + y, x + 3y)$  e  $\mathcal{C}$  é o retângulo de vértices  $(-1, -2)$ ,  $(1, -2)$ ,  $(1, 3)$  e  $(-1, 3)$ ,
3.  $F(x, y) = (-xy^2, x^2y)$  e  $\mathcal{C}$  é o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ ,
4.  $F(x, y) = (x^2y, x^3)$  e  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, (y = x \text{ ou } y = x^2)\}$ ,
5.  $F(x, y) = (x^2e^{xy}, y^2e^{xy})$  e  $\mathcal{C}$  é a curva que percorre o segmento entre  $(1/2, 1/2)$  e  $(1, 0)$ , o segmento entre  $(1/2, 1/2)$  e  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  e o arco do círculo centrado na origem e de raio 1 entre  $(1, 0)$  e  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .

Sugestão: Para 5., poderemos usar as coordenadas  $X = (x - y)/\sqrt{2}$  e  $Y = (x + y)/\sqrt{2}$ .

**Exercício 6.2** (correção). Neste exercício, poderemos usar as equações (12) e (13).

1. Calcule a área do domínio delimitado por

$$\gamma: t \in [0, \pi] \mapsto (\sin(t) \cos(t), \sin(t)).$$

2. Calcule a área da alça delimitada pelo estrofóide, parametrizado em coordenadas polares por

$$\rho: t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \frac{\cos 2t}{\cos t}.$$

<sup>5</sup>Por exemplo, a seguinte curva (que é uma variação do seno do topólogo definido no exemplo 4.6):

$$\gamma: t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} (t, t^2 \sin(1/t^2)) & \text{if } t > 0, \\ (0, 0) & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

<sup>6</sup>Veja <https://math.stackexchange.com/questions/292275/discontinuous-derivative>.

3. Calcule a área do domínio delimitado pela hipocicloide, parametrizada por

$$\gamma: t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

4. Dados  $a, b > 0$ , calcule a área da elipse

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Sugestão: Para 2., lembre-se de que  $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$ , que a derivada de  $(2t + \sin 2t)/4$  é  $\cos^2 t$ , e que a derivada de  $\tan$  é  $1/\cos^2$ . Para 3., uma primitiva de  $\cos^2(t) \sin^2(t)$  é  $t/8 + \sin(4t)/32$ .

**Exercício 6.3** (correção). Calcule o trabalho realizado pelo campo de força  $F(x, y) = (3y - 4x, 4x - y)$  quando um objeto se move uma vez no sentido trigonométrico em torno da elipse  $4x^2 + y^2 = 4$ .

**Exercício 6.4** (correção). Calcule a integral curvilínea do campo

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - \frac{y}{x^2 + y^2/9} \\ 3x + \frac{x}{x^2 + y^2/9} \end{pmatrix}$$

ao longo das curvas

$$1. \mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4\},$$

$$2. \mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 4\}.$$

Sugestão: Para 1., poderemos aplicar o teorema de Green ao domínio delimitado por  $\mathcal{C}_1$ . Para 2., poderemos nos livrar da singularidade em  $(0, 0)$  removendo uma pequena elipse do domínio delimitado por  $\mathcal{C}_2$ , como na observação 6.11.

**Exercício 6.5** (Forma normal do teorema de Green ou teorema do divergente, correção). Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio cuja fronteira é uma curva conexa e parametrizada por  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  fechada, regular, simples e de classe  $C^2$ . Seja, por todo  $t \in I$ ,  $n(t)$  o vetor normal a  $\gamma'(t)$  que aponta para fora do domínio e com a mesma norma de  $\gamma'(t)$ . Dado um campo vetorial  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definimos o **fluxo** através de  $\partial\Omega$  como a integral

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, ds = \int_I \langle F(\gamma(t)), n(t) \rangle \, dt.$$

Usando o teorema de Green, prove o **teorema do divergente**: se o campo for  $C^1$ , vale

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} F.$$

Em seguida, calcule o fluxo nos seguintes casos:

$$1. F(x, y) = (-x, 2y) \text{ e } \partial\Omega \text{ é a circunferência centrada na origem e de raio 4,}$$

$$2. F(x, y) = (y^2 - x^2, y^2 + x^2) \text{ e } \partial\Omega \text{ é o triângulo de vértices } (0, 0), (3, 3) \text{ e } (0, 3),$$

$$3. F(x, y) = (-y, x) \text{ e } \partial\Omega \text{ é a circunferência centrada na origem e de raio 1.}$$

Sugestão: Para provar o teorema do divergente, poderemos aplicar o teorema de Green ao campo vetorial  $G = (-F_2, F_1)$ .

**Exercício 6.6** (correção). Que valores a integral de  $F(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ , definido em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , pode assumir ao longo de curvas fechadas simples de classe  $C^1$ ?

## 7 Integral curvilínea de campos conservativos

Estudaremos agora a integral curvilínea de campos vetoriais conservativos, formulando o teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas. Deduziremos que a propriedade de ser conservativo é equivalente à noção, bem conhecida na física, de ter suas integrais curvilíneas independentes do caminho. Em uma seção opcional, veremos como dessa ideia segue o lema de Poincaré, um resultado importante de topologia algébrica.

### 7.1 Integral curvilínea ao longo de um gradiente

#### 7.1.1 Teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas

Lembremo-nos que definimos na seção 2.3.2 um campo conservativo como um campo vetorial  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que admite um potencial  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja, uma função diferenciável tal que  $F = \nabla f$ . Nosso primeiro resultado é mostrar que existe uma versão do teorema fundamental de cálculo para esses campos.

**Teorema 7.1** (Teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas, ou teorema do gradiente). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial conservativo e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  um potencial. Por toda curva  $C \subset \Omega$  orientada por  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , vale*

$$\int_C F \cdot dr = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

*Demonstração.* Por definição da integral curvilínea, e usando o potencial  $f$ , obtemos

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt. \quad (14)$$

Por outro lado, consideremos a função  $g = f \circ \gamma$ . Da regra da cadeia (mais precisamente, do corolário 2.7) temos

$$g'(t) = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Isto é,  $g$  é uma primitiva do integrando da equação (14). Concluimos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt &= g(b) - g(a) \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned} \quad \square$$

**Observação 7.2.** Outra maneira de formular o teorema é dizer que, se  $C$  for orientada de modo que os pontos inicial e final sejam  $A$  e  $B$ , respectivamente, então

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A).$$

**Exemplo 7.3.** Calculamos no exemplo 5.20 as integrais curvilíneas ao longo de  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$  do campo vetorial constante

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (1, 0). \end{aligned}$$

O cálculo poderia ter sido feito mais rapidamente. Observando que  $F$  admite o potencial

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x, \end{aligned}$$

e aplicando o teorema 7.1, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \langle \gamma_1'(t), F(\gamma_1(t)) \rangle dt &= F(\gamma_1(\pi)) - F(\gamma_1(0)) = -2, \\ \int_0^{\sqrt{\pi}} \langle \gamma_2'(t), F(\gamma_2(t)) \rangle dt &= F(\gamma_2(\sqrt{\pi})) - F(\gamma_2(0)) = -2, \\ \int_{-1}^1 \langle \gamma_3'(t), F(\gamma_3(t)) \rangle dt &= F(\gamma_3(1)) - F(\gamma_3(-1)) = 2, \\ \int_{-1}^1 \langle \gamma_4'(t), F(\gamma_4(t)) \rangle dt &= F(\gamma_4(1)) - F(\gamma_4(-1)) = 2.\end{aligned}$$

Dois resultados podem ser deduzidos diretamente do teorema 7.1: em um campo conservativo, a integral de linha não depende do caminho escolhido, e a integral ao longo de uma curva fechada é zero.

**Corolário 7.4.** *A integral curvilínea de um campo conservativo independe da escolha da curva entre os pontos  $A$  e  $B$ . Isto é, dado um campo vetorial conservativo  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e dois pontos  $A, B \in \Omega$ , então para todas curvas  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \Omega$  com pontos iniciais e finais  $A$  e  $B$ , respectivamente, vale*

$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr.$$

*Demonstração.* A igualdade ocorre porque, se denotarmos  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização de  $\mathcal{C}_1$  tal que  $\gamma_1(a) = A$  e  $\gamma_1(b) = B$ , e  $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização de  $\mathcal{C}_2$  tal que  $\gamma_2(c) = A$  e  $\gamma_2(d) = B$ , então utilizando o teorema 7.1 duas vezes, temos

$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = f(B) - f(A) = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr. \quad \square$$

**Corolário 7.5.** *A integral curvilínea de um campo conservativo ao longo de uma curva fechada é nula. Isto é, dado um campo vetorial conservativo  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e uma curva  $\mathcal{C}$  com pontos iniciais e finais iguais, vale*

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 0.$$

*Demonstração.* Isso se deve ao fato de que, denotando  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização de  $\mathcal{C}$ , temos  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , logo pelo teorema 7.1,

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0. \quad \square$$

Na prática, esses resultados permitem mostrar que um campo não é conservativo, mostrando que suas integrais de linha dependem do caminho percorrido.

**Exemplo 7.6.** Um exemplo importante é o do exercício 3.2:

$$\begin{aligned}F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Já mostramos que ele não é conservativo, estudando suas curvas integrais. Agora podemos propor outra prova. Sua integral curvilínea ao longo da circunferência unitária  $\mathcal{C}$  orientada no sentido trigonométrico é

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} \left\langle F \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t dt = 2\pi.$$

Por outro lado, a curva  $\mathcal{C}$  é fechada. Portanto, se o campo fosse conservativo, a integral acima teria que ser 0, devido ao corolário 7.5.

### 7.1.2 Campos vetoriais com integrais independentes do caminho

Agora examinaremos os campos que verificam o resultado do corolário 7.4: dizemos que um campo vetorial  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  **tem suas integrais curvilíneas independentes do caminho** se por todos pontos  $A, B \in \Omega$  e todas curvas  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \Omega$  com pontos iniciais e finais  $A$  e  $B$ , respectivamente, vale

$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr.$$

Nosso objetivo é mostrar que esse campo é conservativo, fornecendo assim uma recíproca para corolário 7.4. Para tanto, precisamos de uma hipótese adicional.

**Definição 7.7.** Dizemos que o subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é **conexo por caminhos** se, para qualquer par de pontos, existe uma curva  $C$  de  $A$  até  $B$ .

**Teorema 7.8.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo por caminhos. Um campo  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é conservativo se e somente se tem suas integrais curvilíneas independentes do caminho.*

*Demonstração.* A implicação direta já foi provada no corolário 7.4. Para provar a recíproca, construiremos uma função potencial manualmente. Seja  $A \in \Omega$  um ponto qualquer, fixado até o final da prova. Seja também a função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por todo  $B \in \Omega$  como

$$f(B) = \int_{\mathcal{C}(A,B)} F \cdot dr,$$

onde  $\mathcal{C}(A, B)$  é qualquer curva de  $A$  até  $B$ . Pelo menos uma dessas curvas existe, pois  $\Omega$  é conexo por caminhos, e a função é bem definida, pois o campo tem suas integrais curvilíneas independentes do caminho. Agora só precisamos mostrar que essa função satisfaz  $\nabla f = F$ .

Por definição da diferencial de uma função, basta mostrar que por todo  $B \in \Omega$ ,  $C \in \mathbb{R}^n$  e  $\epsilon > 0$ , vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(B + \epsilon C) - f(B)}{\epsilon} = \langle F(B), C \rangle.$$

Sejam então  $B \in \Omega$ ,  $C \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $\epsilon > 0$  tal que  $B + \epsilon C \in \Omega$  (tal  $\epsilon$  existe, pois  $\Omega$  é aberto). Denotando por  $\mathcal{C}(A, B + \epsilon C)$  uma curva de  $A$  até  $B + \epsilon C$ , que podemos restringir em uma curva  $\mathcal{C}(A, B)$  de  $A$  até  $B$ , vemos que a diferença  $f(B + \epsilon C) - f(B)$  é uma integral de  $B$  até  $B + \epsilon C$ :

$$f(B + \epsilon C) - f(B) = \int_{\mathcal{C}(A, B + \epsilon C)} F \cdot dr - \int_{\mathcal{C}(A, B)} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}(B, B + \epsilon C)} F \cdot dr.$$

Como  $F$  tem suas integrais curvilíneas independentes do caminho, podemos escolher  $\mathcal{C}(B, B + \epsilon C)$  como sendo o segmento de reta entre  $B$  e  $B + \epsilon C$  (de novo, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, o segmento é incluído em  $\Omega$ , pois  $\Omega$  é aberto). Seja  $\gamma: I \rightarrow \Omega$  a parametrização de  $\mathcal{C}(B, B + \epsilon C)$  pelo comprimento de arco. O comprimento do segmento é  $\epsilon\|C\|$ , onde  $\|C\|$  é a norma de  $C$ . Logo, como consequência da parametrização pelo comprimento de arco, podemos escrever o intervalo  $I$  como  $I = [0, \epsilon\|C\|]$ . Além disso, por todo  $t \in I$ , temos

$$\gamma'(t) = \frac{\gamma(\epsilon) - \gamma(0)}{\|\gamma(\epsilon) - \gamma(0)\|} = \frac{(B + \epsilon C) - B}{\|(B + \epsilon C) - B\|} = \frac{C}{\|C\|}.$$

Por outro lado, a integral vale

$$\int_{\mathcal{C}(B, B + \epsilon C)} F \cdot dr = \int_0^{\epsilon\|C\|} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{\epsilon\|C\|} \left\langle F(\gamma(t)), \frac{C}{\|C\|} \right\rangle dt.$$

Pelo teorema do valor intermediário para integrais (veja exercício 1.4 ponto 2), existe um  $t^* \in [0, \epsilon\|C\|]$  tal que essa integral valha

$$\int_0^{\epsilon\|C\|} \left\langle F(\gamma(t)), \frac{C}{\|C\|} \right\rangle dt = \left\langle F(\gamma(t^*)), \frac{C}{\|C\|} \right\rangle \cdot \epsilon\|C\|.$$

Até agora, provamos o seguinte: por todo  $\epsilon$  suficientemente pequeno, existe um  $t^* \in [0, \epsilon\|C\|]$ , que denotaremos  $t_\epsilon^*$  para explicitar sua dependência em  $\epsilon$ , tal que

$$f(B + \epsilon C) - f(B) = \int_0^{\epsilon\|C\|} \left\langle F(\gamma(t)), \frac{C}{\|C\|} \right\rangle dt = \left\langle F(\gamma(t_\epsilon^*)), \frac{C}{\|C\|} \right\rangle \cdot \epsilon\|C\|.$$

Deduzimos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(B + \epsilon C) - f(B)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle F(\gamma(t_\epsilon^*)), C \rangle = \langle F(B), C \rangle$$

por continuidade de  $F$  em  $B$ . Em conclusão, mostramos que o gradiente de  $f$  é  $F$ .  $\square$

Por fim, fornecemos um resultado que garante que a independência das integrais também pode ser determinada por meio de integrais ao longo de curvas fechadas.

**Propriedade 7.9.** *Um campo vetorial  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem suas integrais curvilíneas independentes do caminho se e somente se suas integrais curvilíneas ao longo de curvas fechadas são nulas, isto é, por toda curva orientada fechada  $\mathcal{C} \subset \Omega$ , vale  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 0$ .*

*Demonstração.* Vamos primeiro mostrar que, se o campo tem suas integrais curvilíneas independentes do caminho, então a integral ao longo das curvas fechadas é zero. Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  uma parametrização de uma curva fechada  $\mathcal{C} \subset \Omega$ . Em particular,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , que denotamos  $A$ . Seja também  $B = \gamma(\frac{a+b}{2})$ . Podemos restringir  $\gamma$  em duas curvas

$$\gamma_1 = \gamma|_{[a, \frac{a+b}{2}]} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \gamma|_{[\frac{a+b}{2}, b]}$$

cujos traços denotamos  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ , respectivamente. A integral se decompõe em

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr.$$

Por outro lado, o ponto inicial (resp. final) de  $\gamma_1$  é  $A$  (resp.  $B$ ), que é o ponto final (resp. inicial) de  $\gamma_2$ . Como as integrais do campo apenas dependem dos pontos iniciais e finais, deduzimos que

$$\int_{C_1} F \cdot dr = - \int_{C_2} F \cdot dr$$

e conseqüentemente que  $\int_C F \cdot dr = 0$ . A recíproca prova-se de maneira semelhante.  $\square$

Deduz-se imediatamente a seguinte consequência do teorema 7.8.

**Corolário 7.10.** *Em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  conexo por caminhos, um campo  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  é conservativo se e somente se suas integrais curvilíneas ao longo de curvas fechadas são nulas.*

## 7.2 Integral curvilínea em domínios simplesmente conexos

Nesta seção, usaremos a integral de linha como uma ferramenta para provar o lema de Poincaré, que ele provou em 1887 [Poi87]. Na verdade, provaremos apenas um caso particular (para 1-formas diferenciais no plano), que já era conhecido por Augustin-Louis Cauchy (e baseado no teorema de Green, formulado ainda antes). Teremos a oportunidade de abordar suas generalizações mais adiante. Convém destacar que evitaremos alguns detalhes técnicos (explicitando-os sempre), especialmente aqueles relacionados ao teorema de Jordan (teorema 4.26).

### 7.2.1 Conexidade simples

**Homotopias.** Como vimos na demonstração de teorema 7.8, a propriedade de ser conservativo pode ser tratada por meio de integrais curvilíneas. Na verdade, quando falamos de integrais curvilíneas, a ideia topológica de deformar uma curva na outra entra em cena. Isso é formalizado pelo conceito de homotopia.

Além disso, nesta seção, consideraremos curvas fechadas. Em vez de vê-las como funções contínuas  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  tais que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , as veremos como funções  $\gamma: S^1 \rightarrow \Omega$ , onde  $S^1$  é o círculo unitário. Desse ponto de vista, não precisamos adicionar a hipótese  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ; a curva é fechada por definição, já que o círculo é fechado.

**Definição 7.11.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto qualquer e  $f, g: S^1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  duas curvas parametrizadas fechadas. Uma **homotopia** entre  $f$  e  $g$  é uma função  $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  tal que  $F(\cdot, 0)$  vale  $f$ ,  $F(\cdot, 1)$  vale  $g$  e  $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow Y$  é contínua. Se existir tal homotopia, dizemos que  $f$  e  $g$  são **homotópicas**.

Esclarecemos que, na definição, a notação se refere à função

$$\begin{aligned} F(\cdot, t): S^1 &\longrightarrow \Omega \\ \theta &\longmapsto F(\theta, t). \end{aligned}$$

**Exemplo 7.12.** Seja  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . A função

$$\begin{aligned} F: S^1 \times [0, 1] &\longrightarrow \Omega \\ (\theta, t) &\longmapsto (t \cos(\theta), t \sin(\theta)) \end{aligned}$$

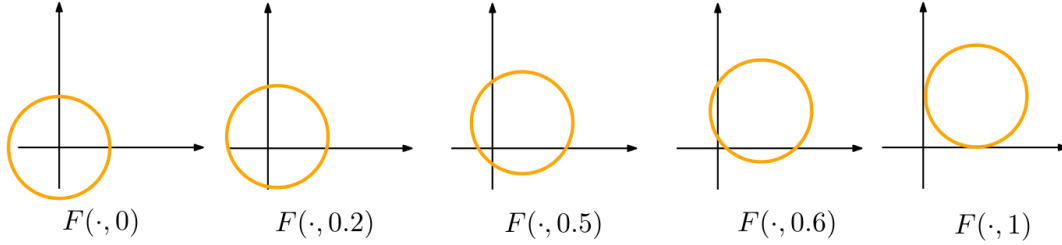
é uma homotopia entre  $f: \theta \mapsto (0, 0)$  e  $g: \theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

**Exemplo 7.13.** Seja  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . A função

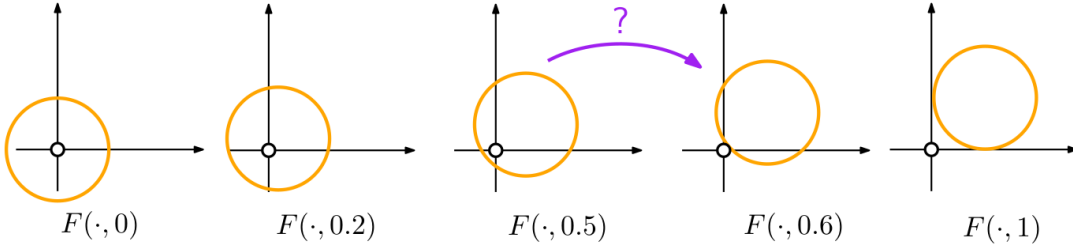
$$F: S^1 \times [0, 1] \longrightarrow \Omega$$

$$(\theta, t) \longmapsto (\cos(\theta) + t, \sin(\theta) + t)$$

é uma homotopia entre  $f: \theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))$  e  $g: \theta \mapsto (\cos(\theta) + 1, \sin(\theta) + 1)$ .



**Exemplo 7.14.** Em  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , o plano sem a origem, não há homotopia entre as funções  $f$  e  $g$  do exemplo anterior. De fato, uma homotopia  $F$  passaria pelo ponto  $(0, 0)$ , o que é impossível, pois ele não pertence ao domínio. Para provar esse resultado formalmente, é possível usar a noção de número de voltas, definida na seção 4.2.2.



Do ponto de vista homotópico, uma função “trivial” é uma função homotópica a uma função constante. Por exemplo, a função  $g$  do exemplo 7.12 é homotópica à função constante  $\theta \mapsto (0, 0)$ . De modo mais geral, temos:

**Propriedade 7.15.** *Seja  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Então qualquer função contínua  $f: S^1 \rightarrow \Omega$  é homotópica a uma função constante.*

*Demonstração.* Considere a função contínua  $F: (\theta, t) \in S^1 \times [0, 1] \mapsto tf(x)$ . Temos que  $F(\cdot, 1) = f$ , e  $F(\cdot, 0): \theta \mapsto 0$  é uma função constante.  $\square$

No entanto, quando  $\Omega$  não é o espaço euclidiano inteiro, como no exemplo 7.14, podem existir funções não homotópicas.

**Espaços simplesmente conexos.** Agora definimos a classe de espaços que, homotopicamente falando, são os mais simples.

**Definição 7.16.** Dizemos que um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é **simplesmente conexo** se toda função contínua é homotópica a uma função constante.

De acordo com a propriedade 7.15, o espaço  $\mathbb{R}^n$  inteiro é simplesmente conexo. De modo mais geral, dizemos que um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é **estrelado** se existir um ponto  $x_0 \in \Omega$  tal que, para todos os  $x \in \Omega$ , o segmento  $[x_0, x]$  pertence a  $\Omega$ . Os conjuntos



estrelados são simplesmente conectados. De fato, a mesma prova funciona: podemos retrair qualquer função  $f: S^1 \rightarrow \Omega$  para a função constante  $g: \theta \mapsto x_0$  via

$$F: S^1 \times [0, 1] \longrightarrow \Omega$$

$$(\theta, t) \longmapsto tx_0 + (1 - t)f(\theta).$$

Os conjuntos estrelados, entretanto, formam apenas uma pequena classe. Existem conjuntos simplesmente conexos que não são estrelados. De fato, a questão de saber se um conjunto é simplesmente conexo é uma questão importante (e, em geral, complicada) da topologia algébrica. No caso dos subconjuntos planos, que é o foco desta seção, temos a seguinte caracterização, cuja prova pode ser encontrada em [Rud87, Teorema 13.11].

**Lema 7.17.** *Um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é simplesmente conexo se e somente se por toda curva  $\gamma: S^1 \rightarrow \Omega$  contínua e simples, de traço  $\mathcal{C}$ , a componente conexa limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$  é um subconjunto de  $\Omega$ .*

### 7.2.2 Lema de Poincaré

Conforme estudado na seção 3.2.3, um critério prático para saber se um campo vetorial  $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é conservativo consiste em verificar se seu rotacional é zero. A recíproca, como vimos no exercício 3.2, é falsa. No entanto, temos uma recíproca parcial.

**Teorema 7.18** (Lema de Poincaré para campos vetoriais planos). *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto e  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  tal que  $\text{rot } F = 0$ . Além disso, suponhamos que  $U$  seja simplesmente conexo. Então  $F$  é conservativo.*

*Esboço de prova.* Diante do corolário 7.10, é suficiente mostrar que as integrais curvilíneas de  $F$  ao longo de curvas fechadas são nulas. Para começar, consideremos uma curva fechada, regular e continuamente derivável  $\gamma: S^1 \rightarrow U$  que supomos simples. Seja também  $\Omega$  a componente interior de  $\gamma$ , dada pelo teorema de Jordan. Segundo o lema 7.17, temos  $\Omega \subset U$ . Além disso,  $\Omega$  é compacto, e sua fronteira  $\partial\Omega$  é parametrizada pela curva  $\gamma$ . Podemos então aplicar o teorema de Green (teorema 6.8):

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dr = \int_{\Omega} \underbrace{\text{rot } F}_0 = 0.$$

Logo, deduzimos o resultado desejado a partir do corolário 7.10.

No caso em que  $\gamma$  não é simples, podemos mostrar que ela parametriza a fronteira de um número finito de compactos  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ , onde podemos aplicar o raciocínio acima.  $\square$

## 7.3 Exercícios

**Exercício 7.1** (correção). Usando o teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas, calcule a integral dos seguintes campos vetoriais  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ao longo das curvas  $\mathcal{C}$ .

1.  $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e  $\mathcal{C}$  é qualquer curva de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  até  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,
2.  $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2 \\ 4xy \end{pmatrix}$  e  $\mathcal{C}$  é qualquer curva de  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  até  $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,

$$3. F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ -e^x \sin y \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{C} \text{ é qualquer curva de } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ até } \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \end{pmatrix},$$

$$4. F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \ln y + e^y/x \\ e^y \ln x + e^x/y \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{C} \text{ é qualquer curva de } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ até } \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercício 7.2** (correção). Usando o teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas, calcule a integral do campo

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} e^z \\ 2y \\ xe^z \end{pmatrix}$$

ao longo de qualquer curva de  $(0, 0, 0)$  até  $(-1, \sqrt{2}, \ln(2))$ .

**Exercício 7.3** (correção). Conforme definido no exemplo 2.16, uma carga pontual  $q$  em  $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  gera o campo elétrico

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X \longmapsto \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|X - X_0\|^3} (X - X_0).$$

Calcule o trabalho realizado pela força elétrica em um objeto cuja trajetória é  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{X_0\}$  em função dos pontos inicial e final  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ .

## 8 Interlúdio analítico - Mudança de coordenadas múltipla

Esta lição e a seguinte constituem uma pausa em nossa exposição ao cálculo vetorial. Queremos introduzir, de forma rigorosa, duas ferramentas fundamentais: o teorema de mudança de coordenadas nas integrais múltiplas e o teorema da função inversa.

### 8.1 Lembrete de integração múltipla

Esboçaremos nesta seção a construção da integral múltipla de Riemann. Para uma análise mais aprofundada desses conceitos, recomendamos [Spi18, §3] ou [HH15, §4].

**Integral de Riemann múltipla sobre domínios retângulos.** Como é o caso na reta real, conforme vimos na seção 1.1, ou no plano, como esboçamos na seção 6.1, a integral de Riemann de uma função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , se define por aproximações sucessivas com (hiper-)retângulos. Para começar, suponhamos que  $\Omega$  seja um retângulo, da forma

$$\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Ao subdividir cada intervalo em

$$[a_i, b_i] = [t_1^i, t_2^i] \cup [t_2^i, t_3^i] \cup \cdots \cup [t_{m_i}^i, t_{m_i+1}^i],$$

obtemos uma nova partição de  $\Omega$ :

$$\mathcal{P} = \left\{ [t_{i_1}^1, t_{i_1+1}^1] \times \cdots \times [t_{i_n}^n, t_{i_n+1}^n] \mid (i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, m_1 \rrbracket \times \cdots \times \llbracket 1, m_n \rrbracket \right\}.$$

Essa partição é considerada **pontilhada** se a cada retângulo for atribuído um valor nele:

$$\mathcal{P}_p = \{(x_R, R) \mid R \in \mathcal{P}\}$$

onde  $x_R \in R$ . A **soma de Riemann** associada é

$$S(f, \mathcal{P}_p) = \sum_{R \in \mathcal{P}} f(x_R) \text{Vol}(R),$$

onde o volume de um retângulo arbitrário  $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  é definido como

$$\text{Vol}(R) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

Dizemos que a partição é  **$\epsilon$ -fina** se cada retângulo tem lados de comprimento  $\epsilon$  no máximo. Podemos então definir a integral de Riemann imitando a definição 1.2.

**Definição 8.1.** Seja  $n \geq 1$  inteiro. Dizemos que uma função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um retângulo, é **Riemann-integrável**, ou simplesmente **integrável**, se existe um número real  $\ell \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\epsilon > 0$ , existe um  $\eta > 0$  tal que para toda partição pontilhada  $\mathcal{P}_p$   $\eta$ -fina de  $\Omega$ , temos

$$|S(f, \mathcal{P}_p) - \ell| < \epsilon.$$

Neste caso, o valor  $\ell$  é único, é chamado de **integral** de  $f$  e é denotado  $\int_{\Omega} f$ .

**Integral de Riemann múltipla sobre domínios gerais.** Enfrentamos o mesmo problema que na seção 6.1, no caso planar: dado um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  que não é um retângulo, como podemos definir a integral de uma função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ? Para tanto, basta escolher um retângulo  $R$  que contenha  $\Omega$ , definir a extensão de  $f$  para  $R$  por 0:

$$\begin{aligned} \tilde{f}: R &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \in R \setminus \Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

e usar a definição 8.1 com  $\tilde{f}$ . Isso levanta a questão de saber se  $\tilde{f}$  é de fato integrável em  $R$ . Gostaríamos que fosse suficiente que  $f$  fosse contínua, no entanto, isso depende do domínio  $\Omega$  sobre o qual ela é definida. Esse é o caso se a fronteira do domínio for suficientemente regular (de medida zero), conforme mostrado no resultado a seguir.

Em termos mais gerais, a integrabilidade de uma função definida em um retângulo  $R$  depende do “tamanho” de seu conjunto de descontinuidades. Digamos que um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é de **medida nula** se, para todo  $\epsilon > 0$ , pudermos cobrir  $S$  com um número finito de retângulos  $\{R_i \mid i \in I\}$  de modo que a soma de seus volumes seja limitada por  $\epsilon$ :

$$\sum_{i \in I} \text{Vol}(R_i) < \epsilon.$$

Temos então o seguinte resultado, encontrado em [Spi18, Teorema 3-8]:

**Propriedade 8.2.** *Uma função  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $R \subset \mathbb{R}^n$  é um retângulo, é integrável se e somente se o seguinte conjunto tem medida nula:*

$$\{x \in R \mid f \text{ é descontínua em } x\}.$$

**Resultados fundamentais.** A maior parte dos resultados da integral unidimensional ainda se aplica à dimensão  $n$ . Por exemplo, a integral pode ser definida por somas de Darboux, todas as funções contínuas são integráveis (já que estamos considerando apenas domínios compactos), as funções integráveis são necessariamente limitadas, e há funções integráveis descontínuas (por exemplo, a função indicadora de um retângulo incluído em  $\Omega$ ). Além disso, vale uma versão do teorema de convergência uniforme sob o sinal de integral [HH15, Teorema 4.11.10], e do teorema de convergência dominada [HH15, Teorema 4.11.12] (já enunciados na seção 1.1.4 no caso unidimensional).

**Teorema 8.3** (Convergência uniforme sob o sinal de integral múltipla). *Sejam  $n \geq 1$  inteiro e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Considere uma sequência  $(f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  de funções Riemann-integráveis que converge uniformemente a uma função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Então  $f$  é Riemann-integrável, e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

**Teorema 8.4** (Convergência dominada para a integral múltipla de Riemann). *Sejam  $n \geq 1$  inteiro e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Considere uma sequência  $(f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  de funções Riemann-integráveis que converge pontualmente a uma função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrável, e tal que existe uma função Riemann-integrável  $g: \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  que domina a sequência, i.e., tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para todos  $x \in \Omega$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

Por fim, o teorema de Fubini é válido para a integral múltipla. Citamos uma versão, menos geral do que o teorema 6.1, mas simples de ser enunciada [Spi18, Teorema 3-10].

**Teorema 8.5** (Teorema de Fubini para a integral múltipla de Riemann). *Seja  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrável sobre um domínio retangular*

$$\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

*Então, para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  e  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , o corte*

$$t \in [a_i, b_i] \longmapsto f(x_1, \dots, \underbrace{t}_{i\text{-ésima coordenada}}, \dots, x_n)$$

*é integrável, e tem-se*

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

*Além disso, a ordem de integração não importa.*

## 8.2 O teorema de mudança de coordenadas

### 8.2.1 Volume de paralelepípedos

O restante desta seção é dedicado à demonstração do teorema de mudança de coordenadas (teorema 8.12), equivalente ao teorema 6.3 no plano. Começaremos analisando aqui o caso em que a mudança de coordenadas é linear. Acontece que o principal elemento de nosso estudo será o cálculo do volume de um paralelepípedo.

Mais precisamente, definimos o **paralelepípedo** associado a  $n$  vetores  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$  como

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) = \{t_1 u_1 + \dots + t_n u_n \mid t_1, \dots, t_n \in [0, 1]\}.$$

Seu volume é definido como a integral de Riemann de sua função indicadora:

$$\text{Vol}(\Pi) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Pi = \int_P 1.$$

Por outro lado, podemos organizar os vetores em colunas em uma matriz  $U = (u_1, \dots, u_n)$  de tamanho  $n \times n$ , e considerar seu determinante  $\det U$ . O seguinte resultado explicita uma ligação entre essas duas noções.

**Lema 8.6.**  $\text{Vol}(\Pi(u_1, \dots, u_n)) = |\det(u_1, \dots, u_n)|$ .

*Demonstração.* Será conveniente definir o **volume com sinal** de  $P(u_1, \dots, u_n)$  por

$$\text{Vol}_s(\Pi(u_1, \dots, u_n)) = \epsilon(u_1, \dots, u_n) \text{Vol}(\Pi(u_1, \dots, u_n))$$

onde  $\epsilon(u_1, \dots, u_n)$  é o sinal de  $\det(u_1, \dots, u_n)$  se  $(u_1, \dots, u_n)$  são linearmente independentes (caso em que o determinante é não-nulo), e 0 senão. Em outras palavras,  $\epsilon(u_1, \dots, u_n)$  indica a orientação dos vetores: é 1 se eles formarem uma base direta, e  $-1$  se indireta. Mostraremos que

$$\text{Vol}_s(\Pi(u_1, \dots, u_n)) = \det(u_1, \dots, u_n).$$

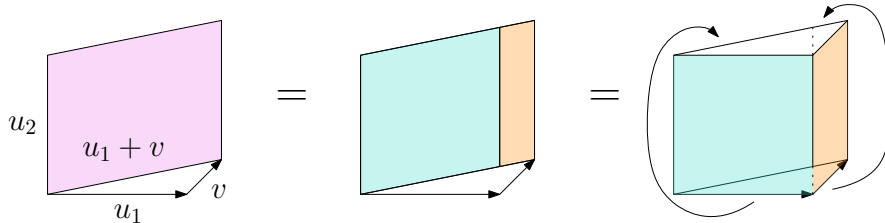
Para tanto, consideremos a função

$$\begin{aligned} M: \mathbb{R}^{n \times n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto \text{Vol}_s(\Pi(u_1, \dots, u_n)). \end{aligned}$$

A função  $M$  possui três propriedades:

- Ela vale 1 na base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , pois o volume do cubo unitário é 1.
- Além disso, ela é alternada, no sentido de que muda de sinal se dois vetores forem permutados. De fato, o volume sem sinal  $\text{Vol}(\Pi(u_1, \dots, u_n))$  permanece intacto, e  $\epsilon(u_1, \dots, u_n)$  muda de sinal, pois o determinante é alternado.
- Finalmente,  $M$  é multilinear. Para ver isso, basta mostrar que ele é linear na primeira coordenada. Seja então um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ . A figura 5 mostra que

$$\text{Vol}(\Pi(u_1 + v, \dots, u_n)) = \text{Vol}(\Pi(u_1, \dots, u_n)) + \text{Vol}(\Pi(v, \dots, u_n)).$$



**Figura 5:** O volume de  $\Pi(u_1 + v, \dots, u_n)$  é a soma dos de  $\Pi(u_1, \dots, u_n)$  e  $\Pi(v, \dots, u_n)$ .

Por outro lado, sabemos pela teoria do determinante que a única função que verifica todas as três propriedades acima é o próprio determinante. Deduzimos o resultado.  $\square$

**Observação 8.7.** Uma outra demonstração interessante consiste em escrever a *decomposição polar* da matriz  $U = (u_1, \dots, u_n)$ : existe duas matrizes ortogonais  $O, P$  e uma diagonal  $D$  tal que  $U = ODP^{-1}$ . Por outro lado, os vetores  $(u_1, \dots, u_n)$  são as imagens da base canônica  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  pela matriz  $U^\top$ . Como uma matriz ortogonal não altera o volume, podemos nos preocupar apenas com a transformação  $D$ . Temos

$$\text{Vol}(\Pi(u_1, \dots, u_n)) = \text{Vol}(\Pi(De_1, \dots, De_n)) = (D_{1,1} \times \dots \times D_{n,n}) \text{Vol}(\Pi(e_1, \dots, e_n)).$$

O primeiro termo é o produto dos valores diagonais de  $D$ , ou seja, seu determinante, que também é o de  $U$ . O segundo termo é 1, pois ele é o volume do paralelepípedo canônico.

**Observação 8.8.** Em dimensão 2, o lema 8.6 dá que o volume do paralelepípedo gerado por  $(a, b)$  e  $(c, d)$  é igual ao módulo do determinante de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , ou seja,  $|ac - bd|$ . Esse resultado poderia ter sido obtido por cálculo direto.

**Observação 8.9.** Esse lema é o ponto-chave na prova do teorema da mudança de coordenadas que apresentaremos. De fato, uma mudança de coordenadas  $\phi$  tem, localmente, o efeito de transformar o domínio  $\Omega$  pela ação de sua diferencial  $d_x\phi$ . Ela é uma aplicação linear, que transforma os cubos pequenos  $C$  em paralelepípedos  $d_x\phi(C)$ , cujo volume será então “ $|\det d_x\phi(C)|$ ”.

Aproveitamos a oportunidade para demonstrar um caso especial do teorema, em que a mudança de variável é linear. Lembre-se de que se  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  for linear, então, em qualquer ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , sua diferencial será ela mesma:  $d_x\phi = \phi$ .

**Teorema 8.10** (de mudança de coordenadas para a integral múltipla de Riemann e mudança linear). *Sejam  $n$  inteiro positivo,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  compacto,  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto tal que  $\Omega \subset U$ ,  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear injetiva, e  $f: \phi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Vale*

$$|\det \phi| \int_{\Omega} f(\phi(x)) \, dx = \int_{\phi(\Omega)} f(x) \, dx.$$

*Demonstração.* Como na definição da integral de Riemann, colocamos o domínio  $\Omega$  em um cubo, que dividimos em vários cubos  $\{C_i \mid i \in I\}$  com lados de comprimento  $\epsilon$ . Sejam  $\{p_i \mid i \in I\}$  os seus centros. A soma de Riemann de  $f \circ \phi$  se escreve

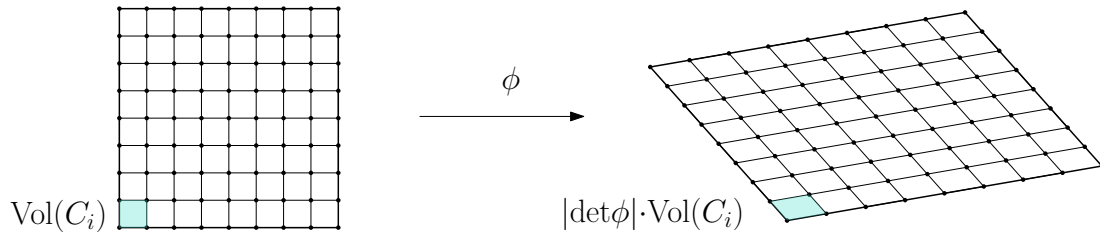
$$\sum_{i \in I} f(p_i) \text{Vol}(C_i).$$

Ela tende para  $\int_{\Omega} f \circ \phi$  quando  $\epsilon$  tende para zero. Por outro lado, seja  $C_i$  um cubo, e  $u_1, \dots, u_n$  seus lados. Queremos calcular o volume do cubo imagem  $\phi(C_i)$ . Pelo lema 8.6,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\phi(C_i)) &= \text{Vol}(\Pi(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n))) = |\det(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n))| \\ &= |\det \phi| \cdot \underbrace{|\det(u_1, \dots, u_n)|}_{\text{Vol}(C_i)}. \end{aligned}$$

Deduzimos que

$$|\det \phi| \sum_{i \in I} f(p_i) \text{Vol}(C_i) = \sum_{i \in I} f(p_i) \text{Vol}(\phi(C_i)).$$



**Figura 6:** A transformação linear  $\phi$  multiplica os volumes por  $|\det \phi|$ .

Para terminar a prova, escreveremos esta relação de uma forma diferente. Seja  $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a função que é constante e igual a  $f(p_i)$  em cada cubo  $C_i$ . Tem-se

$$\begin{aligned} f(p_i) \text{Vol}(C_i) &= \int_{C_i} \tilde{f}(x) dx, \\ f(p_i) \text{Vol}(\phi(C_i)) &= \int_{\phi(C_i)} \tilde{f}(x) dx. \end{aligned}$$

Deduzimos da desigualdade acima que

$$|\det \phi| \int_{\Omega} \tilde{f}(x) dx = \int_{\phi(\Omega)} \tilde{f}(x) dx.$$

Notemos que a função  $\tilde{f}$  depende de  $\epsilon$ , e tende pontualmente para  $f$  quando  $\epsilon$  tende para 0 (a convergência é uniforme se  $f$  for contínua). Deduzimos do teorema de convergência dominada (teorema 8.4) aplicado às duas integrais que

$$|\det \phi| \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\phi(\Omega)} f(x) dx,$$

que é a relação desejada. □

**Observação 8.11.** É instrutivo ver esse resultado na forma

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \frac{1}{|\det \phi|} \int_{\phi(\Omega)} f(x) dx.$$

Quanto mais dilatarmos o espaço  $\Omega$  por  $\phi$ , maior será a integral  $\int_{\phi(\Omega)} f$ , e também maior será o volume  $|\det \phi|$ . Os dois termos se compensam mutuamente para dar  $\int_{\Omega} f$ .

### 8.2.2 Enunciado e prova do teorema

Apresentamos e provamos agora o teorema em sua forma mais geral.

**Teorema 8.12** (de mudança de coordenadas para a integral múltipla de Riemann). *Sejam  $n$  inteiro positivo,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  compacto,  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto tal que  $\Omega \subset U$ ,  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , injetiva e de determinante jacobiano  $\det d_x \phi$  nunca zero, e  $f: \phi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Vale*

$$\int_{\Omega} f(\phi(x)) \cdot |\det d_x \phi| dx = \int_{\phi(\Omega)} f(x) dx.$$

**Observação 8.13.** Podemos ver intuitivamente porque este resultado é verdadeiro. Digamos que dividimos o domínio  $\Omega$  em vários cubos pequenos  $C_i$  de centro  $p_i$ :

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} C_i.$$

O codomínio é então particionado em imagens destes cubos:

$$\phi(\Omega) = \bigcup_{i \in I} \phi(C_i)$$

e a integral é reescrita como uma soma

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) \, dx = \sum_{i \in I} \int_{\phi(C_i)} f(x) \, dx.$$

Sobre um cubo, temos a aproximação de ordem zero:

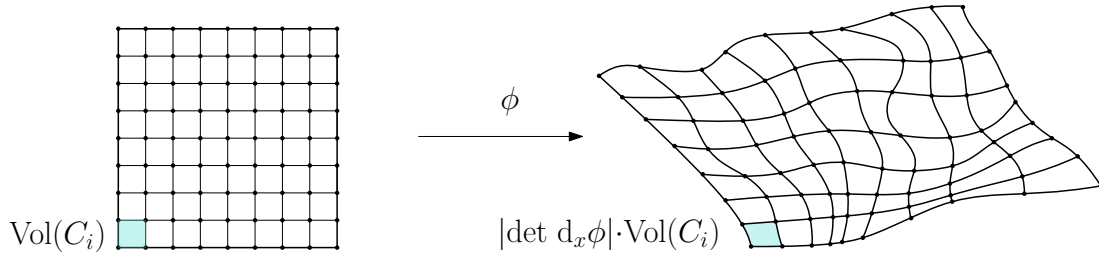
$$\int_{\phi(C_i)} f(x) \approx f(\phi(p_i)) \cdot \text{Vol}(\phi(C_i)).$$

Se o cubo for suficientemente pequeno, o volume será corretamente aproximado pelo determinante jacobiano, tal como estudado na seção 8.2.1:

$$\text{Vol}(\phi(C_i)) \approx \text{Vol}(p_i + d_{p_i}\phi(C_i)) = \text{Vol}(d_{p_i}\phi(C_i)) = |\det d_{p_i}\phi| \cdot \text{Vol}(C_i).$$

Obtemos então a aproximação desejada

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) \, dx \approx \sum_{i \in I} f(\phi(p_i)) \cdot \det |d_{p_i}\phi| \cdot \text{Vol}(C_i) \approx \int_{\Omega} f(\phi(x)) \cdot |\det d_x\phi| \, dx.$$



**Figura 7:** A transformação  $\phi$  multiplica localmente os volumes por  $|\det d_x\phi|$ .

A prova clássica do teorema de mudança de coordenadas consiste precisamente em formalizar este argumento. Em [Spi18, Teorema 3-13], por exemplo, é usada a noção de aproximação da unidade. A prova em [HH15, §A.16] não envolve noções adicionais, mas se estende por mais de seis páginas. Seguiremos a prova mais concisa de [Sch54].

Naturalmente, existem outras demonstrações. Em particular, citamos a exposta por Peter D. Lax em [Lax99], que se baseia no teorema fundamental do cálculo (teorema 1.18). No entanto, a sua prova restringe-se ao caso em que a mudança de variável se estende à identidade fora de  $U$ . Este requisito é atenuado em [Lax01].



*Demonstração.* Nesta prova, dado um subconjunto compacto mensurável  $S \subset \mathbb{R}^n$ , denotaremos por  $\text{Vol}(C)$  seu volume. Lembre-se que o conjunto é mensurável se a função indicadora associada  $\chi_C$  for integrável, caso em que

$$\text{Vol}(C) = \int \chi_C.$$

Em particular, se  $C$  é um cubo com lados de comprimento  $\epsilon$ , tem-se  $\text{Vol}(C) = \epsilon^n$ . Além disso, denotamos por  $\|d_x\phi\|$  a norma euclidiana da diferencial de  $\phi$  em  $x \in \Omega$ .

Primeira etapa. Provaremos primeiro que, por todo cubo  $C \subset \Omega$ , vale

$$\text{Vol}(\phi(C)) \leq \left( \max_{x \in C} \|d_x\phi\| \right)^n \cdot \text{Vol}(C). \quad (15)$$

Seja  $p$  o centro de  $C$  e  $\epsilon$  o comprimento dos seus lados. Um ponto  $x \in \Omega$  pertence a  $C$  se e somente se vale  $|x^i - p^i|$  por todo  $i = 1, \dots, n$ , onde  $x^i$  e  $p^i$  denotam as  $i$ -ésimas coordenadas. De modo a limitar a distância de  $\phi(x)$  a  $\phi(p)$ , designaremos por  $(\phi^1, \dots, \phi^n)$  as componentes de  $\phi$ . Seja  $i$  entre 1 e  $n$ . O teorema do valor médio aplicado à função  $f: t \mapsto \phi^i((1-t)p + tx)$ , cuja derivada é

$$f'(t) = d_{((1-t)p+tx)} \phi^i(x-p),$$

dá um  $t_i \in [0, 1]$  tal que

$$\frac{|\phi^i(x) - \phi^i(p)|}{1-0} = f'(t_i).$$

Por outro lado, por todo  $t \in [0, 1]$ , vale a desigualdade

$$f'(t) \leq \max_{x \in C} \|d_x\phi\| \cdot \|x - p\| \leq \max_{x \in C} \|d_x\phi\| \cdot \epsilon/2.$$

Consequentemente, temos

$$|\phi^i(x) - \phi^i(p)| \leq \max_{x \in C} \|d_x\phi\| \cdot \epsilon/2.$$

Por outras palavras, as imagens dos pontos  $x \in C$  têm as suas coordenadas à distância, no máximo,  $\max_{x \in C} \|d_x\phi\| \cdot \epsilon/2$  de  $\phi(p)$ . Deduzimos que  $\phi(C)$  está incluído no cubo de centro  $\phi(p)$  e comprimento  $\max_{x \in C} \|d_x\phi\| \cdot \epsilon$ . Isto é, temos a equação (15).

Segunda etapa. Seja agora a aplicação linear  $A = d_p\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Recorrendo à função  $A^{-1}\phi$  na equação (15), obtemos

$$\text{Vol}(A^{-1}\phi(C)) \leq \left( \max_{x \in C} \|A^{-1}d_x\phi\| \right)^n \cdot \text{Vol}(C).$$

Por um lado, vimos no teorema 8.10 que

$$\text{Vol}(A^{-1}\phi(C)) = |\det(A^{-1})| \text{Vol}(\phi(C)).$$

Por outro lado, temos  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ . Logo,

$$\text{Vol}(\phi(C)) \leq |\det(A)| \cdot \left( \max_{x \in C} \|A^{-1}d_x\phi\| \right)^n \cdot \text{Vol}(C).$$

Explicitando a aplicação  $A$ , tem-se

$$\text{Vol}(\phi(C)) \leq |\det(d_p\phi)| \cdot \left( \max_{x \in C} \|(d_p\phi)^{-1}d_x\phi\| \right)^n \cdot \text{Vol}(C). \quad (16)$$

Terceira etapa. Consideramos agora um cubo  $C \subset \Omega$  qualquer, dividido em cubos disjuntos  $\{C_i \mid i \in I\}$  de comprimento  $\epsilon$ , como na definição do integral de Riemann. Sejam  $\{p_i \mid i \in I\}$  os seus centros. Aplicando equação (16) por cada cubo, tem-se

$$\text{Vol}(\phi(C)) \leq \sum_{i \in I} |\det(d_{p_i}\phi)| \cdot \left( \max_{x \in C_i} \|(d_{p_i}\phi)^{-1}d_x\phi\| \right)^n \cdot \text{Vol}(C_i).$$

Observemos agora que a função  $x \mapsto \|(d_{p_i}\phi)^{-1}d_x\phi\|$  vale 1 em  $x = p_i$ . Mais ainda, por continuidade uniforme sobre o compacto  $\Omega$ , existe uma função  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\|(d_{p_i}\phi)^{-1}d_x\phi\| \leq 1 + \eta(\|x - p_i\|)$$

tal que  $\eta(t)$  tende para 0 quando  $t$  tende para 0. Podemos deduzir da desigualdade acima que

$$\text{Vol}(\phi(C)) \leq (1 + \eta(\epsilon/2))^n \sum_{i \in I} |\det(d_{p_i}\phi)| \cdot \text{Vol}(C_i).$$

Em particular, quando  $\epsilon$  tende para 0, pela definição da integral de Riemann, obtemos

$$\text{Vol}(\phi(C)) \leq \int_C |\det(d_p\phi)| dp. \quad (17)$$

Quarta etapa. Podemos agora retomar o esboço de prova apresentada na observação 8.13. Dividimos  $\Omega = \bigcup_{i \in I} C_i$  em cubos de centros  $p_i$ . Aplicando a equação (17) a todos os cubos, temos que a soma de Riemann satisfaz

$$\sum_{i \in I} f(p_i) \text{Vol}(\phi(C_i)) \leq \sum_{i \in I} f(p_i) \int_{C_i} |\det(d_p\phi)| dp.$$

Da mesma forma que fizemos na prova da teorema 8.10, consideremos  $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a função que é constante e igual a  $f(p_i)$  em cada cubo  $C_i$ . Tem-se

$$\begin{aligned} f(p_i) \text{Vol}(\phi(C_i)) &= \int_{\phi(C_i)} \tilde{f}(x) dx, \\ f(p_i) \int_{C_i} |\det(d_p\phi)| dp &= \int_{C_i} \tilde{f}(p) \cdot |\det(d_p\phi)| dp. \end{aligned}$$

Deduzimos da desigualdade acima que

$$\int_{\phi(\Omega)} \tilde{f}(x) dx \leq \int_{\Omega} \tilde{f}(p) \cdot |\det(d_p\phi)| dp.$$

Notemos que a função  $\tilde{f}$  depende de  $\epsilon$ , e tende puntualmente para  $f$  quando  $\epsilon$  tende para 0 (a título de informação, especificamos que a convergência é uniforme se  $f$  for contínua). Deduzimos do teorema de convergência dominada (teorema 8.4) que

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\phi(\Omega)} f(\phi(p)) \cdot |\det(d_p\phi)| dp. \quad (18)$$

Para obter a desigualdade inversa, basta aplicar a desigualdade à função  $x \mapsto f(\phi(x)) \cdot |\det(d_x\phi)|$  e a mudança de coordenadas  $\phi^{-1}: \phi(\Omega) \rightarrow \Omega$ . Mais precisamente, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\phi(\Omega)} f(\phi(x)) \cdot |\det(d_x\phi)| dx \\ &\leq \int_{\phi^{-1}(\phi(\Omega))} \underbrace{f(\phi(\phi^{-1}(p)))}_{f(p)} \cdot \underbrace{|\det(d_{\phi^{-1}(p)}\phi)| \cdot |\det(d_p\phi^{-1})|}_1 dp = \int_{\Omega} f(p) dp \end{aligned}$$

pois  $d_{\phi^{-1}(p)}\phi = d_p\phi^{-1}$  pela regra da cadeia. □

### 8.2.3 Mudanças de coordenadas clássicas

Em  $\mathbb{R}^2$ , a mudança mais importante são as coordenadas polares (veja teorema 6.3). Em  $\mathbb{R}^3$ , é uma boa ideia conhecer as mudanças de coordenadas *esféricas* e *cilíndricas*.

**Mudança de coordenadas cilíndricas.** Ela é baseada na transformação

$$\begin{aligned} \phi: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seu determinante jacobiano vale  $\det d_{(r,\theta,z)}\phi = z$ . Para aplicar o teorema 8.12, seja uma função integrável  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  cujo domínio não contém a origem. Temos

$$\int_{\Omega} f \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} r \, d(r, \theta, z) = \int_{\phi(\Omega)} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \, d(x, y, z). \quad (19)$$

**Exemplo 8.14.** Para calcular a integral

$$\int_A (x^2 + y^2)z \, d(x, y, z)$$

sobre o domínio

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\},$$

basta observar que  $A$  é a imagem por  $\phi$  de

$$\Omega = \{(r, \theta, z) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mid r \leq z \leq 1\}.$$

Da equação (19), tem-se

$$\begin{aligned} \int_A (x^2 + y^2)z \, d(x, y, z) &= \int_{\Omega} r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)zr \, d(r, \theta, z) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r^3 z \, dz dr d\theta = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

**Mudança de coordenadas esféricas.** Trata-se da transformação

$$\begin{aligned} \phi: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \nu \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \nu \\ r \sin \theta \cos \nu \\ r \sin \nu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um cálculo mostra que seu determinante jacobiano é

$$\det d_{(r,\theta,\nu)}\phi = r^2 \cos \nu.$$

Dada uma função integrável  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  cujo domínio não abrange  $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ , o teorema 8.12 se escreve

$$\int_{\Omega} f \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \nu \\ r \sin \theta \cos \nu \\ r \sin \nu \end{pmatrix} r^2 \cos \nu \, d(r, \theta, \nu) = \int_{\phi(\Omega)} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \, d(x, y, z). \quad (20)$$

**Exemplo 8.15.** Queremos calcular a integral

$$\int_A z \, d(x, y, z)$$

sobre o domínio

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Observemos que  $A$  é a imagem por  $\phi$  de  $\Omega = (0, 1] \times [0, 2\pi) \times [0, \pi/2)$ . Deduzimos da equação (20) que

$$\begin{aligned} \int_A z \, d(x, y, z) &= \int_{\Omega} r \sin(\nu) r^2 \cos \nu \, d(r, \theta, \nu) \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^3 \sin(\nu) \cos(\nu) \, d\theta d\nu dr = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

### 8.3 Exercícios

**Exercício 8.1** (correção). Prove que o volume da bola unitária  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  é  $4\pi/3$ , onde

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Sugestão: Efetue uma mudança de coordenadas esféricas.

**Exercício 8.2** (correção). Dados  $a, b, c > 0$ , calcule o do elipsoide  $\mathcal{E}$  definido por

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Sugestão: Transforme  $\mathcal{E}$  na bola unitária  $\mathcal{B}$  do exercício precedente.

**Exercício 8.3** (correção). Prove que o volume do toro  $T$  é  $4\pi^2$ , onde  $T$  é a imagem de

$$\begin{aligned} \phi: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \theta \\ \nu \\ r \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} (2 + r \cos \theta) \cos \nu \\ (2 + r \cos \theta) \sin \nu \\ r \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercício 8.4** (correção). Prove que o volume do seguinte domínio  $T$  é  $2\pi/3$ :

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2)^2 + z \leq 1, z \geq 0 \right\}.$$

Sugestão: Use coordenadas cilíndricas.

**Exercício 8.5** (correção). Prove que o volume do seguinte domínio  $T$  é  $4\pi/3$ :

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left( \frac{x}{1-z} \right)^2 + \left( \frac{y}{1+z} \right)^2 \leq 1, z \in [-1, 1] \right\}.$$

Sugestão: Use o teorema da mudança de coordenadas, com o fato de que  $T$  é parametrizado por

$$\begin{aligned} \phi: [0, 2\pi] \times [0, 1] \times [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \theta \\ t \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} t(1-z) \cos \theta \\ t(1+z) \sin \theta \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercício 8.6** (correção). Sejam  $a, b > 0$ . Calcule a integral

$$\int_A \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} d(x, y, z)$$

onde  $A$  é o anel

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}.$$

**Exercício 8.7** (Integral gaussiana). Mostre que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

Sugestão: Primeiro, usando coordenadas polares, mostre que  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \pi$ . Conclua com o teorema de Fubini.

## 9 Interlúdio analítico - Teorema da função inversa

Para nossa segunda aula sobre resultados inesquecíveis de análise, apresentaremos (e provaremos parcialmente) o teorema da função inversa. O caso em dimensão 1 é mais fácil de lidar e será estudado separadamente na primeira parte. Apresentaremos também o teorema da função implícita, um corolário fundamental do teorema da função inversa.

### 9.1 Caso unidimensional

**Teorema 9.1** (da função inversa em  $\mathbb{R}$ ). *Sejam  $U \subset \mathbb{R}$  aberto,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , e suponha que exista  $a \in U$  tal que  $f'(a) \neq 0$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f$  é injetiva sobre o intervalo  $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ . A imagem  $f(I)$  é um intervalo aberto, a restrição*

$$f|_I: I \rightarrow f(I)$$

*é bijetiva, e a função inversa*

$$f|_I^{-1}: f(I) \rightarrow I$$

*é de classe  $C^1$ .*

**Observação 9.2.** Veremos na prova que, sob essas hipóteses, temos

$$(f^{-1})'(f(x)) = f'(x)^{-1}. \quad (21)$$

Isto também poderia ter sido visto como uma consequência da regra da cadeia:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Se  $g$  é a inversa de  $f$ , vale  $g \circ f(x) = x$ , e  $(g \circ f)'(x) = 1$ . Deduzimos que

$$1 = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

ou seja,  $g'(f(x)) = f'(x)^{-1}$ . Ao escrever  $g = f^{-1}$ , obtemos a equação (21). Na verdade, esse é o caso unidimensional da fórmula válida em qualquer dimensão:

$$d_{f(x)} f^{-1} = (d_x f)^{-1},$$

onde especificamos que o primeiro expoente  $-1$  indica a inversa da função  $f$  e o segundo a inversa da aplicação linear  $d_x f$ .

*Demonstração.* Na verdade, podemos escolher  $I$  como qualquer intervalo que contenha  $a$  e no qual  $f'$  não se cancele. De fato, em tal intervalo,  $f$  deve ser injetiva, pois, se não for, digamos que  $f(x) = f(y)$  com  $x, y \in I$  e  $x \neq y$ , teríamos

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0,$$

e deduziríamos a existência de  $c \in [x, y]$  tal que  $f'(c) = 0$  pelo teorema do valor médio.

Agora precisamos mostrar que a inversa  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  é de classe  $C^1$ . Em primeiro lugar, observemos que a imagem  $f(I)$  é um intervalo (pelo teorema do valor intermediário) aberto (esse é um fato clássico, demonstrado por um argumento de conexidade). Para continuar, a função  $f^{-1}$  é derivável, pois temos, por todo  $u \in f(I)$ , e escrevendo  $u = f(x)$  e  $v = f(y)$ ,

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \lim_{v \rightarrow u} \frac{f^{-1}(v) - f^{-1}(u)}{v - u} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f^{-1}(f(y)) - f^{-1}(f(x))}{f(y) - f(x)} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{y - x}{f(y) - f(x)} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{\frac{f(y) - f(x)}{y - x}} \\ &= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(u))}. \end{aligned}$$

Temos então que  $(f^{-1})'$  é contínua, pois é a inversa da função contínua  $f' \circ f^{-1}$ .  $\square$

**Observação 9.3.** Vimos na prova que o intervalo  $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$  pode ser escolhido *quantitativamente*: podemos escolher o maior  $\epsilon$  de modo que  $f'$  não se cancele sobre  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ . Esse é um caso excepcional específico da dimensão 1. No enunciado do teorema geral (teorema 9.6), não poderemos escolher o maior subconjunto aberto no qual a diferencial é invertível; de fato,  $f$  pode não ser injetiva nele (como no exemplo 9.8).

**Exemplo 9.4.** Considere a função seno

$$\text{sen}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sua derivada em 0 é  $\text{sen}'(0) = \cos(0) = 1$ . Pelo teorema, ela é localmente invertível. Mais precisamente, sabemos que podemos inverter sua restrição em  $(-\pi/2, \pi/2)$ ,

$$\text{sen}|_{(-\pi/2, \pi/2)}: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-1, 1).$$

Sua inversa é chamada de arco seno:

$$\arcsen: (-1, 1) \rightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

Podemos calcular sua derivada usando a fórmula da equação (21):

$$\arcsen'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\arcsen(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**Exemplo 9.5.** Acontece que a função tenha uma derivada zero em um ponto, mas ainda assim seja localmente invertível. Esse é o caso de  $x \mapsto x^3$ , invertível sobre  $\mathbb{R}$  inteiro, com inversa  $x \mapsto \text{senal}(x) \cdot |x|^{1/3}$ . Porém, não é coberto pelo teorema. Na verdade, nesse caso, a função inversa não pode ser derivável: ela deve tender ao infinito no ponto singular, pela equação (21).

## 9.2 Caso geral

**Teorema 9.6** (da função inversa em  $\mathbb{R}^n$ ). *Sejam  $n$  inteiro positivo,  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , e suponha que exista  $a \in U$  tal que  $d_a f$  seja invertível (ou seja,  $\det d_a f \neq 0$ ). Então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f$  é injetiva sobre a bola aberta  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(a, \epsilon)$ , de imagem  $f(\mathcal{B})$  aberta, e tal que a sua restrição*

$$f|_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow f(\mathcal{B}),$$

*que é bijetiva, admite uma função inversa*

$$f|_{\mathcal{B}}^{-1}: f(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$$

*de classe  $C^1$ .*

**Observação 9.7.** Vale destacar que o teorema se aplica apenas quando o domínio e o codomínio de  $f$  são o mesmo espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Se eles forem diferentes, digamos  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , então a matriz diferencial não é quadrada, e não tem determinante. No entanto, poderíamos impor condições em seu posto; entrariamos então na teoria das subvariedades, que estudaremos mais adiante.

*Esboço de demonstração.* Provaremos apenas que  $f$  admite uma inversa contínua. A prova de sua diferenciabilidade não é muito mais complicada e pode ser encontrada em [Spi18, Theorem 2.11] ou [HH15, Theorem 2.9.4].

Primeira etapa. O primeiro passo consiste em mostrar que vale a desigualdade

$$\|x - y\| \leq \Lambda \|f(x) - f(y)\| \quad (22)$$

para  $x$  e  $y$  suficientemente próximos de  $a$ , e para

$$\Lambda = \frac{2}{\|(d_a f)^{-1}\|},$$

onde  $\|(d_a f)^{-1}\|$  denota a norma de operador da aplicação linear inversa  $(d_a f)^{-1}$ . Sabemos que por todo  $u \in \mathbb{R}^n$ , essa norma satisfaz a

$$\|(d_a f)^{-1}\| \cdot \|u\| \leq \|d_a f(u)\|,$$

ou seja,

$$\frac{2}{\Lambda} \|u\| \leq \|d_a f(u)\|. \quad (23)$$

Agora, consideremos a função

$$\begin{aligned} \phi: U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto f(x) - d_a f(x - a). \end{aligned}$$

Sua diferencial é

$$d_x \phi = d_x f - d_a f.$$

Em particular,  $d_a \phi = 0$ . Por continuidade, existe um  $\eta > 0$  tal que por todo  $x \in \mathcal{B}(a, \eta)$ ,

$$\|d_x \phi\| \leq \frac{1}{\Lambda}.$$

Consequentemente, o teorema do valor médio nos diz que

$$\begin{aligned}\|\phi(x) - \phi(y)\| &\leq \sup_{z \in \mathcal{B}(a, \eta)} \|\mathrm{d}_z \phi\| \cdot \|x - y\| \\ &\leq \frac{1}{\Lambda} \|x - y\|.\end{aligned}\tag{24}$$

Por outro lado, usando a segunda desigualdade triangular, observemos que

$$\begin{aligned}\|\phi(x) - \phi(y)\| &= \|f(x) - \mathrm{d}_a f(x - a) - (f(y) - \mathrm{d}_a f(y - a))\| \\ &\geq \|\mathrm{d}_a f(x - y)\| - \|f(x) - f(y)\|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|\mathrm{d}_a f(x - y)\| - \|\phi(x) - \phi(y)\|.$$

Injetando as equações (23) e (24) nessa desigualdade, obtemos a equação (22).

Segunda etapa. Inverteremos agora  $f$ . Definamos

$$\delta = \inf \{ \|f(x) - f(a)\| \mid x \in \partial \mathcal{B}(a, \eta) \}$$

onde  $\mathcal{B}(a, \eta)$  representa a fronteira da bola. Como consequência da equação (22),  $\delta$  é positivo (ela é maior do que  $\eta/\Lambda$ ). Consideremos então  $\Lambda' = \max(\Lambda, 2)$  e a bola  $\mathcal{B}(f(a), \delta/\Lambda')$ . Por todo  $y \in \mathcal{B}(f(a), \delta/\Lambda')$ , encontraremos uma solução  $x \in \mathcal{B}(a, \eta)$  de  $f(x) = y$ . Para tanto, seja

$$\begin{aligned}g: \mathcal{B}(a, \eta) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|f(x) - y\|^2 = \sum_{i=1}^n (f_i(x) - y_i)^2.\end{aligned}$$

O mínimo de  $g$  não é atingido por  $x \in \partial \mathcal{B}(a, \eta)$  na fronteira, pois, por definição de  $\delta$ , e usando o fato de que  $y \in \mathcal{B}(f(a), \delta/\Lambda')$ ,

$$g(a) = \|f(a) - y\|^2 \leq \frac{\delta}{\Lambda} < \delta \leq g(x).$$

Logo, o mínimo é atingido por um ponto  $x \in \mathcal{B}(a, \eta)$  da bola aberta. Pela caracterização dos mínimos de uma função sobre um subconjunto aberto, temos

$$\nabla_x g = 0.$$

Por outro lado, pela regra da cadeia (corolário 2.9), o gradiente se escreve como um produto de matrizes

$$\nabla_x g = 2(f(x) - y)^\top \mathrm{d}_a f.$$

Deduzimos que  $(\mathrm{d}_a f)^\top (f(x) - y) = 0$ . Como o determinante de  $(\mathrm{d}_a f)^\top$  é diferente de zero, isso só pode acontecer se  $f(x) - y = 0$ , ou seja,  $f(x) = y$ .

Terceira etapa. Consideramos finalmente o conjunto aberto

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(a, \eta) \cap f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \delta/\Lambda')).$$

A função  $f$  é injetiva sobre  $\mathcal{B}$ , com imagem  $\mathcal{B}(f(a), \delta/\Lambda')$ . Sua inversa  $f|_{\mathcal{B}}^{-1}$  é contínua, pois ela verifica uma desigualdade de Lipschitz:

$$\|f|_{\mathcal{B}}^{-1}(x) - f|_{\mathcal{B}}^{-1}(y)\| \leq \Lambda \|x - y\|,$$



como consequência direta da equação (22). Para concluir, observemos que o conjunto  $\mathcal{B}$  pode não ser uma bola centrada em  $a$ , mas pelo menos contém  $\mathcal{B}(a, \epsilon)$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. A sua imagem por  $f$  é aberta, pois  $f|_{\mathcal{B}}^{-1}$  é contínua. Obtemos então o teorema.  $\square$

**Exemplo 9.8.** Considere a função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (e^x \cos y, e^x \sin y). \end{aligned}$$

Seu determinante jacobiano é  $\det d_{(x,y)} f = e^x$ , nunca nulo. Logo, o teorema da função inversa se aplica em qualquer ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  do domínio. No entanto, devemos ter cuidado para não concluir que  $f$  tem um inverso global: ele não é injetiva sobre  $\mathbb{R}^2$ .

### 9.3 Teorema da função implícita

Uma maneira comum de definir subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  é defini-los implicitamente, usando equações. Por equação, queremos dizer uma relação da forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

para uma certa função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Espera-se que uma equação defina um objeto no  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $n - 1$ , ou seja, a expectativa é poder parametrizar o conjunto de soluções com apenas  $n - 1$  coordenadas. Por exemplo, em  $\mathbb{R}^3$  a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0. \quad (25)$$

parametriza a esfera de raio  $c$ . Podemos descrever esse conjunto com apenas  $2 = 3 - 1$  coordenadas: dados  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  suficientemente pequenos, a outra coordenada deve valer

$$z = \pm \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}.$$

Dizemos que temos uma função implícita, que parametriza as soluções:

$$g(x, y) = (x, y, \pm \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}).$$

De modo geral, podemos considerar uma definição implícita com  $k$  equações

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Da mesma forma, espera-se que essas  $k$  equações definam um subconjunto de dimensão  $n - k$ , ou seja, descrito por  $n - k$  coordenadas apenas. Por exemplo, a equação

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0, \\ x - a = 0 \end{cases} \quad (26)$$

descreve a círculo de raio  $\sqrt{c^2 - a^2}$  no plano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = a\}$ . Podemos descrever esse conjunto com apenas  $1 = 3 - 2$  coordenadas: dado  $y \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeno, as outras coordenadas devem valer

$$\begin{cases} z = \pm \sqrt{c^2 - a^2 - y^2}. \\ x = a. \end{cases}$$

A função implícita correspondente é

$$g(y) = (a, y, \pm \sqrt{c^2 - a^2 - y^2}).$$

O teorema da função implícita garante que essa parametrização exista, desde que as equações se comportem bem.

**Teorema 9.9** (da função implícita). *Seja uma função  $f: \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  continuamente diferenciável sobre um subconjunto aberto  $U \times V$  tal que existe um  $(a, b) \in U \times V$  com  $f(a, b) = 0$ . Seja  $M$  a matriz  $k \times k$  das derivadas parciais de  $f$  segundo  $\mathbb{R}^k$  e no ponto  $(a, b)$ . Se  $\det M \neq 0$ , existe um subconjunto aberto  $A \subset \mathbb{R}^{n-k}$  contendo  $a$  e um subconjunto aberto  $B \subset \mathbb{R}^k$  contendo  $b$  tal que para cada  $x \in A$  existe um único  $g(x) \in B$  tal que  $f(x, g(x)) = 0$ . A função*

$$g: A \subset \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow B \subset \mathbb{R}^k$$

*assim definida é diferenciável.*

*Demonstração.* Definamos

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \\ (x, y) &\longmapsto (x, f(x, y)). \end{aligned}$$

Sua diferencial é uma matriz com dois blocos diagonais (e um bloco superior direito), sendo um deles a matriz identidade de tamanho  $n - k$  e o outro a matriz  $M$ . Em particular, temos

$$\det d_{(a,b)} F = \det M \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa (teorema 9.6), existe uma vizinhança  $\mathcal{B}$  de  $(a, 0)$  em  $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$  e uma função inversa de classe  $C^1$

$$F|_{\mathcal{B}}^{-1}: f(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}.$$

Como a primeira coordenada de  $F$  é a identidade,  $F|_{\mathcal{B}}^{-1}$  assume a forma

$$F|_{\mathcal{B}}^{-1}(x, y) = (x, h(x, y)).$$

Seja então a função

$$g: x \mapsto h(x, 0),$$

onde 0 representa o zero de  $\mathbb{R}^k$ . Com  $(x, y) \in \mathcal{B}$ , temos

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\iff F(x, y) = (x, 0) \\ &\iff (x, y) = F|_{\mathcal{B}}^{-1}(x, 0) \\ &\iff (x, y) = (x, h(x, 0)) \\ &\iff y = h(x, 0) \\ &\iff y = g(x), \end{aligned}$$

o que mostra que  $g$  é a função desejada. □

**Exemplo 9.10.** Para encaixar nosso primeiro exemplo (equação (25)) no formalismo do teorema, podemos escolher a função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), z) &\longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - c^2, \end{aligned}$$

A matriz  $M$  associada é

$$M = \left( \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2 - c^2) \right) = (2z),$$

invertível quando  $z \neq 0$ . De fato, quando  $z$  está próximo de 0, ele não pode ser parametrizado diferenciavelmente como uma função de  $x$  e  $y$ :  $(x, y) \mapsto \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$  não é diferenciável sobre  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c^2\}$ . Similarmente, o segundo exemplo (equação (26)) corresponde à função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (y, (x, z)) &\longmapsto (x^2 + y^2 + z^2 - c^2, x - c) \end{aligned}$$

cujas matriz é

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2 - c^2) & \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2 - c^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} (x - c) & \frac{\partial}{\partial z} (x - c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

com determinante  $2z$ , também não nulo quando  $z \neq 0$ .

**Observação 9.11.** Seguindo nossa interpretação dos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  definidos por equações,  $n$  equações devem levar a um conjunto de dimensão 0, ou seja, reduzido a um ponto. Desse ponto de vista, podemos entender o teorema da função inversa como o teorema da função implícita com  $k = n$ : a função “ $g: \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ” indica que existe apenas um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  que satisfaça a igualdade  $f(x) = (0, \dots, 0)$ .

## 10 Superfícies - Definição

Começaremos nosso estudo de superfícies definindo-as por meio de parametrizações e, quando possível, implicitamente, como pré-imagens de valores regulares. Assim como estávamos interessados em curvas apenas por meio de seus grafos, veremos as superfícies apenas como subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ : elas não carregam uma parametrização específica. A definição exige apenas que exista uma parametrização. Esse ponto de vista sugere a definição de quantidades intrínsecas (espaço tangente, área), como veremos mais adiante.

### 10.1 Parametrização por imersões

**Definição 10.1.** Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  inteiros positivos,  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto,  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ . Dizemos que  $f$  é uma **imersão** se por todo  $x \in U$ , a diferencial  $d_x f$  é injetiva.

**Observação 10.2.** A diferencial é injetiva se e somente se  $n \leq m$  e seu posto é  $n$ . No nosso caso, estamos interessados em imersões  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , portanto, o posto das diferenciais deve ser 2.

**Definição 10.3.** Sejam  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  e  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $S$  é uma **superfície de classe  $C^k$**  se para todo  $x \in S$ , existe um aberto  $V_x \subset \mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $x$ , um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  de  $\mathbb{R}^2$  e uma imersão  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^k$  tal que  $f$  induza um homeomorfismo  $f: U \rightarrow V_x \cap S$ .

**Notação 10.4.** Tal função  $f$  é chamada de **parametrização**, ou **carta local**, em torno de  $x$ .

**Exemplo 10.5.** Consideremos o cilindro

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ele é a imagem da seguinte função de classe  $C^\infty$ :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\longmapsto (\cos \theta, \sin \theta, z). \end{aligned}$$

De fato, dado um ponto  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$  podemos escrever  $(x_0, y_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ , e  $f(\theta_0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$ . Além disso, a diferencial de  $f$  tem posto 2:

$$d_{(\theta, z)}f = \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,  $f$  é uma  $C^\infty$ -imersão. No entanto, ele não é injetiva, então não define um homeomorfismo. Para obter uma carta local de  $\mathcal{C}$ , restringimos  $f$  ao conjunto

$$A = (\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2) \times \mathbb{R}.$$

A restrição  $f|_A: A \rightarrow f(A)$  é bijetiva, e admite uma inversa contínua:

$$f^{-1}: (x, y, z) \in f(A) \longmapsto (\arccos x, z).$$

**Exemplo 10.6.** A esfera unitária de  $\mathbb{R}^3$  é o conjunto

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Ele pode ser parametrizada da seguinte forma. Seja a bola unitária de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}.$$

Dado  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$  tal que  $z_0 \neq 0$ , consideremos

$$\begin{aligned} f: \mathcal{B} &\subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}). \end{aligned}$$

onde o sinal depende de  $(x_0, y_0, z_0)$  estar no hemisfério superior ( $z_0 > 0$ ) ou inferior ( $z_0 < 0$ ). Sua diferencial é, de fato, de posto 2:

$$d_{(x, y)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \pm x/\sqrt{1 - x^2 - y^2} & \pm y/\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}.$$

Quando  $z_0$  é zero, precisamos parametrizar com outras coordenadas, por exemplo, supondo que  $x_0 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (y, z) &\longmapsto (\pm \sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z),\end{aligned}$$

ou, supondo que  $y_0 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, z) &\longmapsto (x, \pm \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z).\end{aligned}$$

**Exemplo 10.7.** Outra parametrização bem conhecida da esfera  $\mathbb{S}^2$  se deduz das coordenadas esféricas (definidas na seção 8.2.3), usando  $r = 1$ :

$$\begin{aligned}\phi: [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\} \\ \begin{pmatrix} \theta \\ \nu \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \nu \\ \sin \theta \cos \nu \\ \sin \nu \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Sua diferencial é

$$d_{(\theta, \nu)}\phi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \nu & -\cos \theta \sin \nu \\ \cos \theta \cos \nu & -\sin \theta \sin \nu \\ 0 & \cos \nu \end{pmatrix}$$

Quando  $\cos \nu \neq 0$ , essa matriz tem posto 2. Caso contrário, porém, temos  $\nu = -\pi/2$ , e a diferencial tem posto 0 ou 1:

$$d_{(\theta, -\pi/2)}\phi = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 10.8.** Seja o cone

$$\mathcal{C} = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Claramente, é a imagem de

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}),\end{aligned}$$

cuja diferencial é

$$d_{x,y}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x/\sqrt{x^2 + y^2} & y/\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Ela só é bem definida quando  $(x, y) \neq (0, 0)$ , caso em que tem posto 2, e define uma parametrização local de  $\mathcal{C}$ . Só podemos concluir que  $\mathcal{C} \setminus \{(0, 0, 0)\}$  é uma superfície. De fato, mostraremos na próximo capítulo que  $\mathcal{C}$  não é uma superfície na origem (usando um argumento de plano tangente).

## 10.2 Descrição implícita

**Definição 10.9.** Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  inteiros positivos,  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável. Dizemos que  $x \in U$  é um **ponto regular** se a diferencial  $d_x f$  é sobrejetora, e que  $y \in \mathbb{R}^m$  é um **valor regular** se a pré-imagem  $f^{-1}(\{y\})$  contém apenas pontos regulares. Um ponto  $x \in U$  não regular é chamado de **ponto crítico**.

**Observação 10.10.** A diferencial é sobrejetora se e somente se  $n \geq m$  e seu grau é  $m$ . Consideraremos principalmente funções  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , neste caso, o posto das diferenciais deve ser 1, ou seja, o gradiente deve ser diferente de zero.

**Teorema 10.11.** Sejam  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^3$  aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ . Se  $y \in f(U)$  é um valor regular, então  $S = f^{-1}(\{y\})$  é uma superfície de classe  $C^k$ .

*Demonstração.* Precisamos parametrizar  $S$  localmente. Seja  $(x_0, y_0, z_0) \in S$ . Por hipótese, a diferencial é diferente de zero, ou seja,

$$d_{(x_0, y_0, z_0)} f = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos supor que  $w$  seja diferente de zero (caso contrário, escolhemos simplesmente outra coordenada). Pelo teorema da função implícita (teorema 9.9) aplicado a

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

existe um subconjunto aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  contendo  $(x_0, y_0)$ , um subconjunto aberto  $B \subset \mathbb{R}$  contendo  $z_0$  e uma função  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que por todo  $(x, y) \in A$ ,

$$f(x, y, g(x, y)) = 0.$$

A função  $(x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$  será então uma parametrização de  $S$  em torno de  $(x_0, y_0, z_0)$ , pois sua imagem é  $S \cap A \times B$ , e sua diferencial tem posto 2.  $\square$

**Exemplo 10.12.** O cilindro do exemplo 10.5 é a pré-imagem de 1 pela função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Sua diferencial tem posto 1 quando  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$d_{(x, y, z)} f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso,  $f^{-1}(\{0\})$  não contém os pontos  $(0, 0, z)$ . Logo, 1 é um valor regular de  $f$ . Deduzimos do teorema 10.11 que o cilindro é uma superfície.

**Exemplo 10.13.** Seguindo o mesmo raciocínio, a esfera, definida no exemplo 10.6, é a pré-imagem de 1 pela função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Sua diferencial é

$$d_{(x, y, z)} f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

Seu único ponto crítico é  $(0, 0, 0)$ , que não pertence a esfera. Logo, 1 é valor regular de  $f$ , e a esfera é uma superfície.

**Exemplo 10.14.** Da mesma forma, o cone do exemplo 10.8 se escreve como a pré-imagem de 0 por

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 + y^2 - z^2. \end{aligned}$$

Agora, a diferencial é singular em  $(0, 0, 0)$ , e esse ponto pertence ao cone:

$$d_{(x,y,z)}f = (2x \quad 2y \quad -2z).$$

Portanto, não podemos concluir do teorema 10.11 que o cone é uma superfície. Para aplicá-lo, precisamos restringir  $f$  a  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , como no exemplo 10.8.

### 10.3 Exercícios

**Exercício 10.1** (correção). Seja o helicóide

$$\mathcal{H} = \{(x \cos y, x \sin y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

1. Mostre que  $\mathcal{H}$  é uma superfície, usando a definição 10.3.
2. Mostre que  $\mathcal{H}$  é uma superfície, usando o teorema 10.11.

**Exercício 10.2** (correção). Determine para quais valores de  $p \in (1, +\infty)$  o seguinte subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|^p + |y|^p + |z|^p = 1\}.$$

**Exercício 10.3** (Projeção estereográfica, correção). A projeção estereográfica  $\phi$  associa a todo ponto  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ , a esfera sem o polo norte, as duas primeiras coordenadas do único ponto de interseção entre a reta passando por  $(x, y, z)$  e  $(0, 0, 1)$ , e o plano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ .

1. Dê uma expressão explícita para  $\phi$ .
2. Mostre que sua inversa  $\phi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  é uma carta local da esfera.

**Exercício 10.4** (correção). Sejam  $a, b, c > 0$ . Mostre que o hiperboloide de uma folha  $\mathcal{H}_1$  e o hiperboloide de duas folhas  $\mathcal{H}_2$  são superfícies, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}, \\ \mathcal{H}_2 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

**Exercício 10.5.** A superfície de revolução gerada por uma curva  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo, é

$$S = \{(f_1(t) \cos(\theta), f_1(t) \sin(\theta), f_2(t)) \mid t \in I, \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

1. Mostre que o cilindro (exemplo 10.5) e o toro (exercício 8.3) podem ser obtidos como superfícies de revolução.
2. Se  $f$  é uma imersão de classe  $C^k$  que define um homeomorfismo sobre sua imagem, mostre que  $S$  é uma superfície de classe  $C^k$ .

## 11 Superfícies - Plano tangente e orientação

Assim como uma curva pode ser aproximada em um ponto por seu vetor tangente, uma superfície pode ser aproximada por seu plano tangente. Essa ferramenta é fundamental para o cálculo diferencial em superfícies, e daremos três definições equivalentes. Como nossas superfícies estão imersas no espaço  $\mathbb{R}^3$ , também podemos estudar os planos tangentes por meio de seus complementos ortogonais, conhecidos como linhas normais. Usando essas noções, podemos definir a orientação de uma superfície, que será necessária posteriormente para integrar funções.

### 11.1 Definição do plano tangente e linha normal

A definição clássica de um plano tangente (ou, de modo mais geral, de um espaço tangente, no contexto das subvariedades) baseia-se em parametrizações locais por imersões, que apresentaremos primeiro. Uma outra definição, talvez menos abstrata, consiste em calcular os vetores tangentes; mostraremos que ela é equivalente à primeira. Por fim, forneceremos uma descrição do espaço tangente no caso em que a superfície é descrita implicitamente.

#### 11.1.1 Por meio de parametrizações

**Propriedade-definição 11.1.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $p \in S$ . Por toda parametrização  $f: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em torno de  $p$ , tal que  $f(q) = p$ , a imagem da diferencial  $d_q f$  é um subespaço vetorial de dimensão 2, independe da escolha da parametrização  $f$ , é chamado de **plano tangente** a  $S$  em  $p$ , e denotado  $T_p S$ . Isto é,*

$$T_p S = \text{Im}(d_q f).$$

*Demonstração.* Seja  $f: V \rightarrow S$  uma parametrização. A imagem de  $d_q f$  tem dimensão 2 porque  $f$  é, por definição, uma imersão. A diferencial é, então, injetiva, ou seja, tem posto 2 (como na observação 10.2). Agora, se  $g: V' \rightarrow S$  é uma outra parametrização, com  $g(q') = p$ , estamos no diagrama

$$\begin{array}{ccc} & S \subset \mathbb{R}^3 & \\ f \nearrow & & \nwarrow g \\ V \subset \mathbb{R}^2 & & V' \subset \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Consideremos então os conjuntos (abertos)

$$U = f(V) \cap g(V')$$

$$W = f^{-1}(U)$$

$$W' = g^{-1}(U)$$

e a composta  $h = g^{-1} \circ f$ . Como  $f$  e  $g$  são homeomorfismos sobre suas imagens,  $h$  é bem definida, diferenciável, e elas se encaixam no diagrama

$$\begin{array}{ccc} & U \subset S \subset \mathbb{R}^3 & \\ f \nearrow & & \nwarrow g \\ W \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h=g^{-1} \circ f} & W' \subset \mathbb{R}^2. \end{array}$$



Temos  $f = g \circ h$ . Agora, pela regra da cadeia, a diferencial em  $q$  de  $f$  é

$$\begin{aligned} d_q f &= d_q(g \circ h) = d_{h(q)}g \circ d_q h \\ &= d_{q'}g \circ d_q h. \end{aligned}$$

Em particular, deduzimos que

$$\text{Im}(d_q f) \subset \text{Im}(d_{q'}g).$$

Agora, usando a função  $f^{-1} \circ g$ , mostramos, reciprocamente, que

$$\text{Im}(d_{q'}g) \subset \text{Im}(d_q f).$$

Ou seja,  $\text{Im}(d_q f) = \text{Im}(d_{q'}g)$ , e o plano tangente não depende de  $f$  ou  $g$ .  $\square$

Uma maneira conveniente de estudar um plano tangente é calcular seu vetor normal. Dessa forma, passamos de um estudo bidimensional para um estudo unidimensional.

**Definição 11.2.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $p \in S$ . O espaço normal (perpendicular) ao plano tangente  $T_p S$  é uma linha vetorial, chamada de **linha normal** e denotada por

$$N_p S = (T_p S)^\perp.$$

**Observação 11.3.** Escrevendo explicitamente as derivadas parciais em  $q = (x, y)$ , vemos que o plano tangente é o subespaço vetorial gerado por elas:

$$T_p S = \text{Im}(d_{(x,y)}f) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right].$$

Sabemos que a linha normal é gerada pelo produto vetorial dos dois vetores, ou seja:

$$N_p S = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \right].$$

Pela propriedade-definição 11.1,  $N_p S$  independe da parametrização  $f$ . Porém, o produto vetorial depende da parametrização (sua direção e norma), apenas o espaço que ele gera é independente de  $f$ . O chamaremos de **vetor normal** relativo à parametrização  $f$ .

**Exemplo 11.4.** Vimos no exemplo 10.5 que o cilindro  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  é parametrizado por

$$f(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z).$$

Em um ponto  $(\cos \theta, \sin \theta, z)$  de  $\mathcal{C}$ , a diferencial é

$$d_{(\theta,z)}f = \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e gera o plano

$$T_{(\theta,z)}\mathcal{C} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \left[ \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \sin \theta \\ \lambda \cos \theta \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por outro lado, o vetor normal é

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \times \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

e ele gera a linha normal

$$N_{(\theta,z)}\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \cos \theta \\ \lambda \operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podemos ver que  $T_{(\theta,z)}\mathcal{C}$  e  $N_{(\theta,z)}\mathcal{C}$  não dependem de  $z$ ; isso é bem natural, pois o cilindro é invariante a translações verticais.

**Exemplo 11.5.** Até agora, encontramos três parametrizações da esfera  $\mathbb{S}^2$ : o achatamento dos hemisférios, as coordenadas esféricas e a projeção estereográfica, dadas por

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} &\xrightarrow{f_1} \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2) &\xrightarrow{f_2} \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \nu) &\mapsto (\cos \theta \cos \nu, \operatorname{sen} \theta \cos \nu, \operatorname{sen} \nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{f_3} \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ (a, b) &\mapsto \left( \frac{2a}{1 + a^2 + b^2}, \frac{2b}{1 + a^2 + b^2}, \frac{-1 + a^2 + b^2}{1 + a^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

Já calculamos as diferenciais:

$$\begin{aligned} d_{(x,y)}f_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x/\sqrt{1-x^2-y^2} & y/\sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} \\ d_{(\theta,\nu)}f_2 &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \theta \cos \nu & -\cos \theta \operatorname{sen} \nu \\ \cos \theta \cos \nu & -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \nu \\ 0 & \cos \nu \end{pmatrix} \\ d_{(a,b)}f_3 &= \frac{1}{(1+a^2+b^2)^2} \begin{pmatrix} 2(1+b^2-a^2) & -4ab \\ -4ab & 2(1+a^2-b^2) \\ 4a & 4b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para comparar suas imagens, calcularemos o vetor normal:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} \times \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x/\sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y/\sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial f_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial f_2}{\partial \nu} &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \nu \\ \cos \theta \cos \nu \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \nu \\ -\sin \theta \sin \nu \\ \cos \nu \end{pmatrix} \\
&= \cos \nu \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \nu \\ \sin \theta \cos \nu \\ \sin \nu \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial f_3}{\partial a} \times \frac{\partial f_3}{\partial b} &= \frac{1}{(1+a^2+b^2)^2} \begin{pmatrix} 2(1+b^2-a^2) \\ -4ab \\ 4a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4ab \\ 2(1+a^2-b^2) \\ 4b \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+a^2+b^2} \begin{pmatrix} -8a \\ -8b \\ -4(1-a^2-b^2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Em todos os três casos, o vetor normal em  $q$  é colinear com  $q$ , ou seja,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \times \frac{\partial f_1}{\partial y} \parallel f_1(x, y), \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial f_2}{\partial \nu} \parallel f_2(\theta, \nu), \quad \frac{\partial f_3}{\partial a} \times \frac{\partial f_3}{\partial b} \parallel f_3(a, b).$$

Isso mostra que a linha normal à esfera em um ponto é exatamente o espaço gerado por este ponto. O espaço tangente é, por definição, o plano ortogonal a essa linha.

### 11.1.2 Por meio de vetores tangentes

Consideremos uma superfície  $S$  e um ponto  $p \in S$ . Podemos caminhar ao longo da esfera, através de curvas

$$\gamma: [-1, 1] \rightarrow S.$$

Digamos que  $\gamma(0) = p$ . Então, o vetor derivado  $\gamma'(0)$  pode ser considerado como um “vetor tangente” a  $S$ . A próxima propriedade mostra que o plano tangente é descrito exatamente dessa forma.

**Propriedade 11.6.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $p \in S$ . Então*

$$T_p S = \{ \gamma'(0) \mid \gamma: [-1, 1] \rightarrow S \text{ diferenciável e tal que } \gamma(0) = p \}.$$

*Demonstração.* A inclusão direta vem do fato de que  $T_p S$  é gerado pelas derivadas parciais de uma parametrização. Mais precisamente, seja  $f: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização em torno de  $p$ , e tal que  $f(0, 0) = p$ . Todo vetor  $v \in T_p S$  se escreve

$$v = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y}$$

por um certo par  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Consideremos então a curva

$$\gamma: t \mapsto f(t\lambda, t\mu).$$

Temos  $\gamma'(0) = v$ , como desejamos mostrar.

Reciprocamente, por toda curva  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow S$  cuja imagem é contida em  $f(V)$ , podemos escrever

$$\gamma = f \circ \eta$$

por uma certa curva  $\eta: [-1, 1] \rightarrow V$  tal que  $\eta(0) = (0, 0)$ . Em particular, pela regra da cadeia,

$$\gamma'(0) = d_{\eta(0)}(f)\eta'(0).$$

Deduzimos que  $\gamma'(0) \in \text{Im}(d_{(0,0)}f)$ , ou seja,  $\gamma'(0) \in T_p S$ .  $\square$

**Observação 11.7.** Essa propriedade é particularmente útil para mostrar que um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  não é uma superfície: basta mostrar que o conjunto dos vetores tangentes,

$$\{\gamma'(0) \mid \gamma: [-1, 1] \rightarrow S \text{ diferenciável e tal que } \gamma(0) = p\},$$

não é um subespaço vetorial de dimensão 2.

**Exemplo 11.8.** Consideremos o cone do exemplo 10.8:

$$\mathcal{C} = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Mostraremos que não é uma superfície em torno de  $(0, 0, 0)$ . Por todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , consideremos a curva

$$\gamma: t \in [0, 1] \mapsto (t \cos \theta, t \sin \theta, t).$$

Ela pertence a  $\mathcal{C}$ , e sua derivada em zero é

$$\gamma'(0) = (\cos \theta, \sin \theta, 1).$$

Agora, observemos que o conjunto de vetores

$$\{(\cos \theta, \sin \theta, 1) \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$

gera  $\mathbb{R}^3$  inteiro. Segue que ele não pode ser contido em um subespaço de dimensão 2. Pela contrapositiva da propriedade 11.6,  $S$  não é uma superfície. Salientamos que, rigorosamente falando, a propriedade não se aplica diretamente, pois a curva  $\gamma$  não está definida em  $[-1, 1]$  mas apenas  $[0, 1]$ . No entanto, podemos mostrar que, mesmo neste caso, o resultado é válido.

### 11.1.3 Por meio implícito

Conforme estudado na seção 10.2, certas superfícies podem ser definidas como pré-imagem  $f^{-1}(\{y\})$  de valor regular de funções  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Neste caso, temos outra descrição do plano tangente e linha normal.

**Propriedade 11.9.** *Seja uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  descrita implicitamente, isto é,  $S = f^{-1}(\{y\})$  com  $y$  um valor regular de uma função  $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Então por todo  $p \in S$ , o plano tangente é o núcleo da diferencial de  $f$ :*

$$T_p S = \text{Ker}(d_p f).$$

Consequentemente, a linha normal é gerada pelo gradiente de  $f$  em  $p$ :

$$N_p S = [\nabla_p f].$$

*Demonstração.* Na prova do teorema 10.11, mostramos que uma superfície assim definida pode ser parametrizada por meio de uma imersão

$$h: (x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$$

onde  $g$  é uma função tal que  $f(x, y, g(x, y)) = 0$ . A diferencial de  $h$  é

$$d_{(x,y)}h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Por definição, o plano tangente é aquele gerado pelos vetores colunas

$$T_p S = \text{Im}(d_{(x,y)}h) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \right].$$

Para concluir, tudo o que precisamos fazer é observar que esse espaço é o núcleo de  $f$ . Para tanto, aplicamos a regra da cadeia a  $f \circ h$ , que vale 0:

$$0 = d_{(x,y)}(f \circ h) = d_{h(x,y)}f \circ d_{(x,y)}h.$$

Segue que

$$\text{Im}(d_{(x,y)}h) \subset \text{Ker}(d_{h(x,y)}f).$$

Por outro lado, como  $(x, y)$  é um ponto regular de  $f$ , temos que  $\text{Ker}(d_{h(x,y)}f)$  tem dimensão 2 e deduzimos a igualdade

$$\text{Im}(d_{(x,y)}h) = \text{Ker}(d_{h(x,y)}f).$$

A segunda afirmação da propriedade é uma consequência direta da caracterização do gradiente como um vetor ortogonal ao núcleo.  $\square$

**Exemplo 11.10.** Podemos usar essa propriedade para calcular a linha normal à esfera. Usemos a descrição implícita do exemplo exemplo 10.13:  $\mathbb{S}^2 = f^{-1}(\{0\})$ , onde

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Em um ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ , o gradiente vale

$$\nabla_{(x,y,z)}f = (2x, 2y, 2z).$$

Pela propriedade 11.9, obtemos que a linha normal à esfera em  $(x, y, z)$  é o espaço gerado por  $(x, y, z)$  (como já observado no exemplo 11.5):

$$N_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2 = [(2x, 2y, 2z)] = [(x, y, z)] = \{(\mu x, \mu y, \mu z) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

## 11.2 Orientabilidade

De modo geral, a linha normal a uma superfície é canonicamente definida, como sendo o espaço perpendicular ao plano tangente (veja a observação 11.3):

$$N_p S = (T_p S)^\perp.$$

Com isso, queremos dizer que a linha não depende de uma parametrização  $f$ . Por outro lado, o vetor tangente de uma parametrização, definido como

$$\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y},$$

depende de  $f$ . Mais precisamente, ele pertence ao subespaço vetorial  $N_p S$ , mas sua norma e direção dependem de  $f$ . A questão da orientabilidade de uma superfície se resume à escolha contínua desse vetor tangente.

**Definição 11.11.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície. Dizemos que ela é **orientável** se existe uma função contínua  $M: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que por todo  $p \in S$ ,  $\|M(p)\| = 1$  (o vetor é unitário) e  $M(p) \in N_p S$  (o vetor gera a linha normal). Se tal aplicação existir, a chamamos de **orientação** de  $S$ , e chamamos o par  $(S, M)$  de **superfície orientada**.

**Propriedade 11.12.** *Uma superfície orientável conexa tem exatamente duas orientações diferentes.*

*Esboço de demonstração.* Isso decorre de um argumento de conexidade, já que em cada linha normal  $[v]$ , há apenas dois vetores unitários que a geram ( $v/\|v\|$  e  $-v/\|v\|$ ).  $\square$

**Exemplo 11.13.** No exemplo 11.5, calculamos a linha tangente à esfera: par todo  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ ,

$$N_{(x,y,z)} \mathbb{S}^2 = [(x, y, z)].$$

Vemos que uma orientação de  $\mathbb{S}^2$  é dada por

$$M(x, y, z) = (x, y, z).$$

Consequentemente, a esfera é orientável. A outra orientação é dada por

$$M'(x, y, z) = -(x, y, z).$$

**Exemplo 11.14.** Algumas superfícies não são orientáveis, como a faixa de Mobius em  $\mathbb{R}^3$ , ou a garrafa de Klein ou o espaço projetivo em  $\mathbb{R}^4$  (no entanto, neste curso, não definimos a noção de superfície em  $\mathbb{R}^4$ ). Para mostrar que a faixa de Mobius não é orientável, tudo o que precisamos fazer é supor que ela seja e percorrê-la. Depois de uma volta completa, podemos ver que o vetor normal deve mudar de sinal, o que significa que a orientação não é contínua.

**Propriedade 11.15.** *Seja uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  descrita implicitamente, isto é,  $S = f^{-1}(\{y\})$  com  $y$  um valor regular de uma função  $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Então ela é orientável. Mais precisamente, uma orientação é dada por*

$$M: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$p \longmapsto \frac{\nabla_p f}{\|\nabla_p f\|}.$$

*Demonstração.* Essa é uma consequência direta da propriedade 11.9, que descreve a linha normal como o gradiente da função implícita. Simplesmente normalizamos o gradiente para que a função  $M$  verifique os axiomas da definição 11.11.  $\square$

**Observação 11.16.** Essa proposição revela uma característica notável das superfícies implicitamente definidas: todas elas são orientáveis. Do lado positivo, isso significa que podemos trabalhar automaticamente com uma orientação nelas. Por outro lado, isso implica também que a definição implícita não é geral o suficiente para lidar com todas as superfícies.

### 11.3 Exercícios

**Exercício 11.1** (correção). Dê um vetor normal em cada ponto dos hiperboloides do exercício 10.4:

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

**Exercício 11.2** (correção). Dê o plano tangente em  $(2, 1, 1)$  à superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{27}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 3}} = 9 \right\}.$$

**Exercício 11.3** (correção). Encontre o(s) ponto(s) da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 - 2y^2 + z^2 = 27\}$$

em que o plano tangente é perpendicular à linha parametrizada por

$$t \mapsto (3t - 5, 2t + 7, 1 - \sqrt{2}t).$$

**Exercício 11.4** (correção). Considere o subconjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 - x^2y + z^3 = 0\}.$$

1. Mostre que  $S$  é uma superfície em torno de  $(2, -3/2, 1)$ , e calcule seu plano tangente.
2. Mostre que  $S$  não é uma superfície em torno da origem.

**Exercício 11.5** (correção). Considere o subconjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3z + x^2y^2 + \sin(yz) = -3\}.$$

1. Mostre que  $S$  é uma superfície.
2. Calcule sua linha normal em  $(-1, 0, 3)$ .

**Exercício 11.6.** Mostre que a seguinte “esfera” não é uma superfície:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| = 1\}.$$

**Exercício 11.7.** Para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , sejam os subconjuntos

$$X_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y^2 = a\},$$

$$Y_b = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = b\}.$$

1. Para quais valores de  $a$  e  $b$  esses conjuntos são superfícies?
2. Para quais valores de  $a$  e  $b$  a interseção  $X_a \cap Y_b$  é uma curva regular (veja a definição 5.1)?

**Exercício 11.8.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a  $n$ -ésima faixa de Mobius, denotada  $\text{Mob}(n)$ , é definida como a colagem das duas extremidades de uma fita, após efetuar  $n$  meia voltas em uma delas. Em particular,  $\text{Mob}(0)$  é um cilindro, e  $\text{Mob}(1)$  é a faixa de Mobius convencional.

1. Para quais valores de  $n$  ela é orientável?
2. Suponhamos que cortemos  $\text{Mob}(n)$  com uma tesoura ao longo de seu círculo interno. Quantas componentes conexas o espaço resultante tem?

## A Notações e convenções

Neste documento, o conjunto dos números naturais (0 incluído) e dos números inteiros serão escritos respectivamente como  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$ . Diremos que um número real  $a \in \mathbb{R}$  é

$$\begin{array}{ll} \text{positivo} & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ \text{negativo} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ \text{não negativo} & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ \text{não positivo} & \text{se } x \in (-\infty, 0] \end{array}$$

Escreveremos as coordenadas de um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  entre parênteses e separadas por vírgulas, e de uma matriz  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  entre parênteses e sem vírgula:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

De um ponto de vista matricial, veremos o vetor como uma matriz de ordem  $n \times 1$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad \dots \quad x_n)^\top.$$

Em particular, dado um outro  $y \in \mathbb{R}^n$ , o produto matricial  $x^\top y$  vale o produto escalar dos vetores, e o produto matricial  $xy^\top$  vale o produto externo dos vetores (matriz  $n \times n$ ):

$$x^\top y = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$xy^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \quad \dots \quad y_n) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}.$$

Além disso, usaremos as seguintes notações:



|   |  |
|---|--|
| $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$  | Números inteiros, racionais, reais, reais não negativos                                |
| $\mathbb{R}^n$                                      | Espaço euclidiano de dimensão $n$  |
| $\ \cdot\ ^2$                                       | Norma euclidiana   |
| $\langle x, y \rangle$ ou $x \cdot y$               | Produto escalar de vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$                                     |
| $[a, b], \llbracket m, n \rrbracket$                | Intervalo real, intervalo inteiro  |
| $x^\top$  | Transposta de um vetor ou uma matriz $x$   |
| $\text{traço}(A)$                                   | Traço de uma matriz $A$  |
| $\chi_A$  | Função indicadora de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$              |
| $\mathcal{P}, \mathcal{P}_p$                        | Partição de um intervalo, partição pontilhada  |
| $\int f, \int_a^b f, \int_a^b f(x) \, dx$           | Integral de uma função $f$   |
| $[F]_a^b$ ou $F _a^b$                               | A diferença $F(b) - F(a)$  |
| $d_x f, J_x f$                                      | Diferencial de uma função $f$ em $x$ , matriz jacobiana                                |
| $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_i f$ | Derivadas parciais de uma função $f$   |
| $\nabla f(x)$                                       | Gradiente de uma função $f$ em $x$   |
| $\text{rot}_x F$ ou $\text{rot } F(x)$              | Rotacional em $x$ de um campo vetorial $F$ bi- ou tridimensional                       |
| $\text{div}_x F$ ou $\text{div } F(x)$              | Divergente de um campo vetorial $F$ $n$ -dimensional                                   |
| $\ell(\gamma)$                                      | Comprimento de uma curva parametrizada   |
| $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$                        | Integral curvilínea de um campo escalar $f$ ao longo da curva $\mathcal{C}$            |
| $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$                     | Integral curvilínea de um campo vetorial $F$ ao longo da curva orientada $\mathcal{C}$ |

## B Indicações para os exercícios

### B.1 Exercícios da seção 1

#### Correção do exercício 1.1.

- $I_1 = 0$  por integração via a primitiva  $\frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 7x$ .
- $I_2 = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 3$  por integração via a primitiva  $2\sin x + 3\cos x$ .
- $I_3 = \frac{2}{3}e - \frac{5}{9}$  por integração via a primitiva  $\frac{2}{3}e^{3x} + 2x$ .
- $I_4 = \frac{2}{9}$  por integração via a primitiva  $\frac{1}{4}\ln(1 + 2x^2)$ .
- $I_5 = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{1+2e^6}{3}\right)$  por integração via a primitiva  $\frac{1}{6}\ln(1 + 2e^{3x})$ .
- $I_6 = \frac{\log^2 2}{2}$  por integração via a primitiva  $\frac{1}{2}\ln^2 x$ .
- $I_7 = 1$  por integração por partes com  $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & v(x) = e^x \end{cases}$

$$\int_0^1 uv' = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e - 1).$$

- $I_8 = \frac{1}{9}(1 - 2e^3)$  por integração por partes com  $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = 1/x \\ v'(x) = x^2 & v(x) = x^3/3 \end{cases}$ ,

$$\int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 - \frac{1}{9}.$$

- $I_9 = 2(\ln 2 - 1)^2$  por integração por partes com  $\begin{cases} u(x) = \ln^2 x & u'(x) = 2\frac{\ln x}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$ ,

$$\int_1^2 uv' = [uv]_1^2 - \int_1^2 u'v = [x \ln^2 x]_1^2 - \int_1^2 2 \ln x dx = 2 \ln^2 2 - 2(2 \ln 2 - 1),$$

onde usamos a primitiva  $x \ln x - x$  de  $\ln x$ .

- $I_{10} = -1$  por mudança de coordenadas com  $\begin{cases} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^4 2(1 - \sqrt{x}) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} dx}_{dt} = \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} 2(1 - t) dt \\ &= [2t - t^2]_1^2 = -1. \end{aligned}$$

- $I_{11} = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$  por mudança de coordenadas com  $\begin{cases} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx &= \int_1^3 2 \frac{x}{x+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} dx}_{dt} = 2 \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} 1 - \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= 2[t - \arctan t]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2(\sqrt{3} - \arctan \sqrt{3} - 1 + \arctan 1) \\ &= 2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

- $I_{12} = \frac{\pi}{2}$  por mudança de coordenadas com  $\begin{cases} \sin t = x & (t = \arcsin x) \\ dx = \cos t dt & (dt = \frac{1}{\cos t} dx) \end{cases}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \underbrace{dx}_{\cos t dt} &= \int_{\arcsin -1}^{\arcsin 1} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

### Correção do exercício 1.2.

1. Ao integrar  $I_n$  por partes, vemos que  $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ , e portanto  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ . Como  $I_0 = \pi/2$ , deduzimos

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

onde o duplo fatorial é definido como  $p!! = p(p-2)(p-4) \cdots$ .

2. Este produto vale  $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \frac{\pi}{2}$ . Por monotonicidade da integral,  $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ . Logo,

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

### Correção do exercício 1.3.

1. Primeiro, mostre que se  $G$  é uma primitiva de  $f^{-1}$ , então  $G(f(x))' = xf'(x)$ .
2. Chame o teorema do valor intermediário: existe  $x \in [0, a]$  tal que  $f(x) = b$ .
3. Use  $f(x) = x^{p-1}$ .

### Correção do exercício 1.4.

1. Use a monotonicidade da integral.
2. Use o teorema do valor médio para função  $f$  cujos mínimo e máximo são  $m$  e  $M$ .
3. Mostre primeiro que  $m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$ , e raciocine como antes.

**Correção do exercício 1.5.** Poderemos começar com  $F(x) = \int_0^{g(x)} h$ .

### Correção do exercício 1.6.

|                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| $I_1$ converge | $I_2$ diverge  | $I_3$ converge |
| $I_4$ diverge  | $I_5$ converge | $I_6$ diverge  |
| $I_7$ converge | $I_8$ converge | $I_9$ converge |

### Correção do exercício 1.7.

1. A convergência segue da aproximação  $\ln(\sin(x)) \sim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$ , uma primitiva do qual é  $x \mapsto x \ln(x) - x$ .
2. Usando  $\sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$ , obtemos

$$I = \frac{\pi \ln(2)}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln \sin \frac{x}{2} dx + \int_0^{\pi/2} \ln \cos \frac{x}{2} dx$$

Por outro lado, integrando por substituição, temos

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin x dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos x dx,$$

bem como

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos x dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin x dx.$$

Logo, a primeira equação reescreve-se como  $I = \frac{\pi \ln(2)}{2} + 2I$ , e deduzimos

$$I = -\frac{\pi \ln(2)}{2}.$$

**Correção do exercício 1.8.** Poderemos usar o critério da comparação (propriedade 1.36), juntamente com o seguinte truque: se  $\alpha > 0$ , então pode-se escrever  $\alpha = 1 + 2h$ , com  $h > 0$ , e

$$\frac{1}{t^\alpha (\log t)^\beta} = \frac{1}{t^{1+h} \cdot t^h (\log t)^\beta} = \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^{1+h}} \right).$$

**Correção do exercício 1.9.**

1. Escreva  $e^t t^{x-1} = e^{t+(x-1)\ln(x)}$ , estude o comportamento assintótico da função em 0 e  $+\infty$ , e usa resultados de comparação para integral imprópria.
2. Integre por partes.
3. Use (2) junto com  $\Gamma(1) = 1$ .

**Correção do exercício 1.10.** Fabrique, à mão, uma sequência de intervalos  $[t_0, t_1]$ ,  $[t_2, t_3]$ , ..., tal que  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  e

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{t_{2i+1}} \int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} |\cos x| dx = +\infty.$$

**Correção do exercício 1.11.** Pondo  $F(t) = \int_1^t f$ , a integração por partes mostra que

$$\int_1^t \frac{f(x)}{x^\alpha} dx = \left[ \frac{F(x)}{x^\alpha} \right]_1^t + \alpha \int_1^t \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} dx.$$

**Correção do exercício 1.12.** Por um lado,  $\int_0^1 f_n = 1$ . Por outro lado,  $(f_n)_{n>0}$  converge pontualmente em  $[0, 1]$  a função constante igual a 0, cuja integral é 0. Consequentemente,  $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim f_n$ .

**Correção do exercício 1.13.** Pode-se usar o teorema de convergência dominada, junto com a convergência pontual  $f(x^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(0)$  por todo  $x \in [0, 1)$ .

**Correção do exercício 1.14.** Usando a desigualdade  $f \leq M$ , obtemos

$$\left( \int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n} \leq \left( \int_a^b M^n dx \right)^{1/n} = \left( (b-a)M^n \right)^{1/n} = (b-a)^{1/n} M \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M.$$

Agora, escolhamos um  $\epsilon > 0$ . Mostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n} \geq M - \epsilon,$$

o que bastará para concluir. Seja  $y \in [a, b]$  que atinge o máximo  $M$  e, por continuidade,  $\eta > 0$  tal que  $f(x) > M - \epsilon$  por todo  $x \in [y - \eta, y + \eta]$ . Escrevemos

$$\begin{aligned} \left( \int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n} &\geq \left( \int_{y-\eta}^{y+\eta} (M - \epsilon)^n dx \right)^{1/n} = \left( (2\eta)(M - \epsilon)^n \right)^{1/n} \\ &= (2\eta)^{1/n} (M - \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M - \epsilon. \end{aligned}$$

## B.2 Exercícios da seção 2

**Correção do exercício 2.1.** O gradiente é

$$\nabla \|x\|^p = p\|x\|^{p-2}x = p\|x\|^{p-1} \frac{x}{\|x\|}.$$

**Correção do exercício 2.2.** Seja  $I$  a matriz identidade  $n \times n$ . Temos as diferenciais:

$$d_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} 2x \cos(x^2 + y^2) & 2y \cos(x^2 + y^2) \\ -2x \sin(x^2 - y^2) & 2y \sin(x^2 - y^2) \end{pmatrix} \quad d_{(x,y,z)}G = \begin{pmatrix} e^{yz} & xze^{yz} & xye^{yz} \\ yze^{xz} & e^{xz} & xye^{xz} \end{pmatrix}$$

$$d_{(x,y)}H = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad d_x I = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \|x\|)^{3/2}} \frac{x}{\|x\|}$$

$$d_x J = \frac{1}{\|x\|^p} \left( I - p \frac{xx^\top}{\|x\|^2} \right) \quad d_x K = e^{-\|x\|^2} (I - 2xx^\top)$$

**Correção do exercício 2.3.**

1. Temos

$$\det(I + tE_{i,j}) = \begin{cases} 1 + t & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se não} \end{cases} \quad \text{donde} \quad \frac{\partial \det}{\partial x_{i,j}}(I) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se não.} \end{cases}$$

2. Decompomos a diferencial na base canônica:

$$d_I \det(H) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial \det}{\partial x_{i,j}}(I) H_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq n} H_{i,i} = \text{traço}(H).$$

**Correção do exercício 2.4.** As seguintes curvas são integrais e  $\gamma(0) = (1, 0)$ :

$$\begin{array}{lll} \gamma_F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_H: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} t+1 \\ 0 \end{pmatrix} & t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix} & t \longmapsto (t+1) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array}$$

**Correção do exercício 2.5.** Temos os potenciais respectivos

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto y \sin x + \frac{1}{2}y^2 & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2}x^2 + x(y + y^2) & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x^3 y^5 z^7 \end{array}$$

**Correção do exercício 2.6.**

1. Denotando  $X^+ = (1, 0)$  e  $X^- = (-1, 0)$ , um potencial é dado por

$$f(X) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\|X - X^+\|} - \frac{1}{\|X - X^-\|} \right).$$

2. Como um ponto  $X = (0, y)$  é equidistante de  $X^+$  e  $X^-$ , temos  $\|X - X^+\| = \|X - X^-\|$ , e logo  $f(X) = 0$ .

3. Explicitamente,

$$f(r, 0) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|r-1|} - \frac{1}{|r+1|} \right).$$

Por outro lado, temos o equivalente

$$\frac{1}{|r-1|} - \frac{1}{|r+1|} = \frac{|r+1| - |r-1|}{|r-1||r+1|} = \frac{2}{|r-1||r+1|} \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{r^2}.$$

Concluimos injetando a segunda fórmula na primeira.

### B.3 Exercícios da seção 3

**Correção do exercício 3.1.** Um cálculo direto mostra que

$$\begin{array}{lll} \text{rot } F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{rot } G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{rot } H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto 0 & (x, y) \longmapsto \frac{5}{2} & (x, y) \longmapsto 2 \\ \\ \text{div } F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{div } G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{div } H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \longmapsto 0 & (x, y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

Apenas  $F$  tem um rotacional nulo, o que indica que é o único candidato para ser conservativo. De fato, ele é, pois admite o potencial  $f: (x, y) \mapsto \|(x, y)\|$  (consulte o exercício 2.1).

**Correção do exercício 3.2.**

1. Calculamos:

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Exibiremos uma curva integral periódica (e, portanto, não injetora). Seja

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Ela é uma curva integral para  $F$ , pois

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) &= F(\cos t, \sin t) = \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t, \cos t) \\ &= (-\sin t, \cos t) \\ &= \gamma'(t). \end{aligned}$$

Pela propriedade 2.32, concluimos que  $F$  não é conservativo.

**Correção do exercício 3.3.** A solução é  $(\alpha, \beta) = (-1, -2)$ .

**Correção do exercício 3.6.**

1. Para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  com  $y \neq 0$ , o resultado é  $E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q/(2\pi\epsilon_0 y) \end{pmatrix}$ . De fato,

$$E_1(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x-t}{((x-t)^2 + y^2)^{3/2}} dt = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-1}{((x-t)^2 + y^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$E_2(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{((x-t)^2 + y^2)^{3/2}} dt = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{t-x}{y^2((x-t)^2 + y^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y}.$$

2. Aplicando as definições, obtemos  $\text{rot } E = 0$  e  $\text{div } E = -q/(2\pi\epsilon_0 y^2)$ .

3. O campo é conservativo pois admite o potencial  $V(x, y) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(|y|)$ .

**Correção do exercício 3.7.** Calculemos a circulação para os três campos.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{(x,y)}^F(r) &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} x + r \cos t \\ y + r \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -(x + r \cos t) \sin t + (y + r \sin t) \cos t dt \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} -x \sin t dt}_0 + \underbrace{\int_0^{2\pi} y \cos t dt}_0 + \underbrace{\int_0^{2\pi} -r \cos t \sin t + r \sin t \cos t dt}_0 \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{C}_{(x,y)}^F(r) = 0$  e  $\mathcal{C}_{(x,y)}^{0,F} = 0$ . Similarmente, temos

$$\mathcal{C}_{(x,y)}^G(r) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(y + r \sin t) \\ x + r \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi r$$

donde  $\mathcal{C}_{(x,y)}^{0,G} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r}{\pi r} = 2$ . Finalmente,

$$\mathcal{C}_{(x,y)}^H(r) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ (x + r \cos t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 2xr \cos^2 t dt = 2\pi x r$$

do qual obtemos  $\mathcal{C}_{(x,y)}^{0,H} = 2x$ . Além disso, ao calcular o rotacional destes campos, vemos que eles coincidem com as circulações infinitesimais calculadas acima.

**Correção do exercício 3.8.** Calculemos o fluxo para os três campos.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(x,y)}^F(r) &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} x + r \cos t \\ y + r \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (x + r \cos t) \cos t + (y + r \sin t) \sin t dt \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} x \cos t dt}_0 + \underbrace{\int_0^{2\pi} y \sin t dt}_0 + \underbrace{\int_0^{2\pi} r \cos^2 t + r \sin^2 t dt}_r = 2\pi r. \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{F}_{(x,y)}^{0,F} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\pi r}{\pi r} = 2$ . Os cálculos continuam:

$$\mathcal{F}_{(x,y)}^G(r) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2(y + r \sin t) \\ (x + r \cos t)/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt = 0$$

donde  $\mathcal{F}_{(x,y)}^{0,G} = 0$ . Por fim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(x,y)}^H(r) &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(x + r \cos t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t dt}_0 + \int_0^{2\pi} \cos(x + r \cos t) \sin t dt \\ &= [\cos(x + r \cos t)/r]_{t=0}^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Deduzimos que  $\mathcal{F}_{(x,y)}^{0,H} = 0$ . Se calcularmos os divergentes destes campos, veremos que são iguais aos fluxos infinitésimos que acabamos de calcular.

## B.4 Exercícios da seção 4

**Correção do exercício 4.1.** A velocidade da curva  $\gamma_{(p,q)}$  é

$$\begin{aligned} \gamma'_{(p,q)}: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} -q \sin(qt)(1 + \cos(pt)) - p \cos(qt) \sin(pt) \\ q \cos(qt)(1 + \cos(pt)) - p \sin(qt) \sin(pt) \\ p \cos(pt) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo, por definição, sua velocidade escalar quadrada é dada por

$$\begin{aligned} \|\gamma'_{(p,q)}\|^2 &= \left( -q \sin(qt)(1 + \cos(pt)) - p \cos(qt) \sin(pt) \right)^2 \\ &\quad + \left( q \cos(qt)(1 + \cos(pt)) - p \sin(qt) \sin(pt) \right)^2 \\ &\quad + \left( p \cos(pt) \right)^2 \\ &= q^2(1 + \cos(pt))^2 + p^2 \sin^2(pt) + p^2 \cos^2(pt) \\ &= p^2 + q^2(1 + \cos(pt))^2. \end{aligned}$$

**Correção do exercício 4.2.** Respectivamente, temos as parametrizações

$$\begin{aligned} \gamma_X: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_Y: [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_Z: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sqrt{2} \sin(t) \end{pmatrix} & t &\longmapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} & t &\longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2} |\cos 2t| \cos t \\ \sqrt{2} |\cos 2t| \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para obter a forma de  $\gamma_Z$ , podemos raciocinar da seguinte forma. Escrevendo  $(x, y) = (r \cos t, r \sin t)$ , vemos que a equação  $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$  é equivalente a

$$r^4(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 = 2(\cos^2 t - \sin^2 t).$$



Usando a relação  $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ , obtemos

$$r^2 = 2 \cos 2t,$$

ou seja, temos  $\cos 2t \geq 0$  e  $r = \pm\sqrt{2 \cos 2t}$ . Supondo que  $t \in [-\pi/2, 2\pi - \pi/2]$ , temos que  $\cos 2t \geq 0$  se e somente se  $t \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$ . Logo, as soluções da equação se dividem em dois conjuntos, de acordo com  $r = +\sqrt{2 \cos 2t}$  ou  $r = -\sqrt{2 \cos 2t}$ :

$$A = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2 \cos 2t} \cos t}{\sqrt{2 \cos 2t} \sin t} \right) \mid t \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \right\},$$

$$B = \left\{ \left( \frac{-\sqrt{2 \cos 2t} \cos t}{-\sqrt{2 \cos 2t} \sin t} \right) \mid t \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \right\}.$$

É possível simplificar ainda mais. Observe que, se

$$t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4} \right],$$

então o cosseno é negativo, e vale

$$\left( \frac{-\sqrt{2|\cos 2t|} \cos t}{-\sqrt{2|\cos 2t|} \sin t} \right) = \left( \frac{\sqrt{2 \cos(2t + \pi)} \cos(t + \pi)}{\sqrt{2 \cos(2t + \pi)} \sin(t + \pi)} \right).$$

Consequentemente, o conjunto  $B$  pode ser reescrito como

$$B = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2|\cos 2t|} \cos t}{\sqrt{2|\cos 2t|} \sin t} \right) \mid t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4} \right] \right\}.$$

Deduzimos que o conjunto de soluções  $A \cup B$  admite a forma

$$A \cup B = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2|\cos 2t|} \cos t}{\sqrt{2|\cos 2t|} \sin t} \right) \mid t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

$$= \left\{ \left( \frac{\sqrt{2|\cos 2t|} \cos t}{\sqrt{2|\cos 2t|} \sin t} \right) \mid t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

**Correção do exercício 4.3.** Uma parametrização é

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ t^{3/2} \end{pmatrix}$$

cujo comprimento é

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1^2 + \left( \frac{3}{2} \sqrt{t} \right)^2} dt = \frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8).$$

**Correção do exercício 4.4.**

1. O comprimento vale

$$\int_0^T \sqrt{2} e^{-t} dt = \sqrt{2} (1 - e^{-T}),$$

e tende para  $\sqrt{2}$ .

2. Um homeomorfismo para uma reparametrização pelo comprimento de arco é

$$\begin{aligned}\gamma: [0, \sqrt{2}(1 - e^{-T})] &\longrightarrow [0, T] \\ t &\longmapsto \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{t}{\sqrt{2}}} \right).\end{aligned}$$

**Correção do exercício 4.5.** Poderemos supor que  $\gamma$  é parametrizada pelo comprimento de arco, e estudar a projeção de  $\gamma'$  no subespaço vetorial gerado por  $\gamma(b) - \gamma(a)$ .

## B.5 Exercícios da seção 5

**Correção do exercício 5.1.** Temos

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 2\pi \qquad \int_{\mathcal{C}} G \cdot dr = 2\pi \qquad \int_{\mathcal{C}} H \cdot dr = 0$$

**Correção do exercício 5.2.** Consideremos a seguinte parametrização de  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned}\gamma: [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t^2).\end{aligned}$$

Munida dessa orientação, temos

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = 0 \qquad \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \frac{6}{7} \qquad \int_{\mathcal{C}^-} F \cdot dr = -\frac{6}{7}.$$

**Correção do exercício 5.3.**

1.  $\sqrt{2}$ ,
2.  $\frac{3\pi}{2} + 8\pi^2$ ,
3. 0,
4.  $-6\sqrt{2}$ .

**Correção do exercício 5.4.**

1.  $\frac{7}{2}$ ,
2. 0,
3.  $\pi$ ,
4.  $25 \sin(1) - 1$ .

**Correção do exercício 5.5.** Denotando  $\mathcal{C}$  o segmento de reta, com parametrização  $\gamma: t \in [0, 1] \mapsto (1 - t, t, -t)$ , obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

**Correção do exercício 5.6.** Poderemos (demonstrar e) usar o fato de que a derivada de  $t \mapsto \|\gamma'(t)\|^2$  é  $t \mapsto 2\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle$ .

## B.6 Exercícios da seção 6

**Correção do exercício 6.1.** Fazemos os cálculos usando o teorema de Green. Para cada uma das curvas  $\mathcal{C}$ , denotamos  $\Omega$  o domínio que ela delimita.

1. O rotacional de  $F$  vale  $1 - e^y$ , e pelo teorema de Green (teorema 6.5 ou teorema 6.8) e teorema de Fubini (mais precisamente, o corolário 6.2), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \int_{\Omega} \operatorname{rot} F = \int_0^1 \int_0^{3-3x} 1 - e^y \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 (3 - 3x - e^{3-3x} + 1) \, dx \\ &= \frac{1}{6}(17 - 2e^3). \end{aligned}$$

Para fins de comparação, poderíamos ter calculado a integral de linha diretamente. Parametrizando o triângulo por  $t \in [0, 1] \mapsto (t, 0)$ ,  $t \in [0, 1] \mapsto (1 - t, 3t)$  e  $t \in [0, 3] \mapsto (0, 3 - t)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} (1-t)^2 + e^{3t} \\ 1 + 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &\quad + \int_0^3 \left\langle \begin{pmatrix} e^{3-t} \\ 3 - t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 t^2 + 1 \, dt + \int_0^1 -((1-t)^2 + e^{3t}) + 3(1 + 2t) \, dt + \int_0^3 -(3 - t) \, dt \\ &= \frac{4}{3} + 6 - \frac{e^3}{3} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{1}{6}(17 - 2e^3). \end{aligned}$$

2. O rotacional é  $\operatorname{rot} F(x, y) = 0$ , logo

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\Omega} \operatorname{rot} F = 0.$$

3. O rotacional é  $\operatorname{rot} F(x, y) = 4xy$ , logo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \int_{\Omega} \operatorname{rot} F = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4xy \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 2x(1-x)^2 \, dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4. O rotacional é  $\operatorname{rot} F(x, y) = x^2$ , e o domínio pode ser parametrizado por

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_{\Omega} \operatorname{rot} F = \int_0^1 \int_{x^2}^x x^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 x^2(x - x^2) \, dx = \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

5. O rotacional é  $\operatorname{rot} F(x, y) = e^{xy}(y^2 - x^2)$ . Para calcular a integral dupla, passamos nas coordenadas  $X = (x - y)/\sqrt{2}$  e  $Y = (x + y)/\sqrt{2}$ . A diferencial de  $\phi(x, y) = (X, Y)$  é

$$d_{x,y} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

cujo determinante é 1. Com essas coordenadas, o domínio se escreve

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2}/2 \leq Y \leq 0, \sqrt{2}/2 \leq X \leq \sqrt{1 - Y^2}\}.$$

Deduzimos, usando o teorema de mudança de coordenadas (teorema 6.3),

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} F = \int_{\Omega} e^{xy}(y^2 - x^2) \, d(x, y) = \int_{\phi(\Omega)} e^{(X^2 - Y^2)/2}(-2XY) \, d(X, Y).$$

Em seguida, do teorema de Fubini deduzimos

$$\begin{aligned}& \int_{\phi(\Omega)} e^{(X^2 - Y^2)/2}(-2XY) \, d(X, Y) \\ &= \int_{-\sqrt{2}/2}^0 \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{1 - Y^2}} e^{(X^2 - Y^2)/2}(-2XY) \, dX \, dY \\ &= \int_{-\sqrt{2}/2}^0 -2Y \left( e^{(\sqrt{1 - Y^2})^2 - Y^2}/2 - e^{((\sqrt{2}/2)^2 - Y^2)/2} \right) dY \\ &= \int_{-\sqrt{2}/2}^0 -2Y \left( e^{1/2 - Y^2} - e^{1/4 - Y^2/2} \right) dY \\ &= 1 - 2e^{1/4} + e^{1/2}.\end{aligned}$$

**Correção do exercício 6.2.** Denotaremos as áreas por  $\mathcal{A}$ .

1. Usamos a equação (13) com  $\rho_1(t) = \sin t$  e  $\rho_2(t) = 1$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho_1(t)\rho_2(t) + (\rho_1(t)\rho_2'(t) - \rho_1'(t)\rho_2(t)) \cos(t) \sin(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(t) - \cos^2(t) \sin(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin(t) + \frac{\cos(t)^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

2. Usamos diretamente a equação (12) com  $\rho(t) = \frac{\cos 2t}{\cos t}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 2t}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(2 \cos^2 t - 1)^2}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^2 t + \frac{1}{\cos^2 t} - 4 dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ (2t + \sin 2t) + \tan t - 4t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} (4 - \pi).\end{aligned}$$

3. Usamos a equação (13) com  $\rho_1(t) = \cos^2 t$  e  $\rho_2(t) = \sin^2(t)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_1(t) \rho_2(t) + (\rho_1(t) \rho_2'(t) - \rho_1'(t) \rho_2(t)) \cos(t) \sin(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) + \underbrace{(2 \cos(t) \sin^3(t) + 2 \cos(t)^3 \sin(t))}_{=2} \cos(t) \sin(t) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) dt \\ &= \frac{3}{2} \left[ \frac{t}{8} + \frac{\sin(4t)}{32} \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

4. Podemos parametrizar a elipse com

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Da equação (13) com  $\rho_1(t) = a$  e  $\rho_2(t) = b$  segue

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_1(t) \rho_2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

**Correção do exercício 6.3.** Seja  $\mathcal{C}$  a elipse e  $\Omega$  o domínio que ela delimita. Pelo teorema de Green, o trabalho se reescreve

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\Omega} \underbrace{\text{rot } F}_{4-3} = \int_{\Omega} 1 = 2\pi.$$

onde usamos que a área da elipse  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  é  $\pi ab$ .

**Correção do exercício 6.4.** Antes de tudo, e para preparar o teorema de Green, calculemos o rotacional de  $F$ :

$$\begin{aligned}\text{rot } F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left( 3 + \frac{(x^2 + y^2/9) - x \cdot (2x)}{(x^2 + y^2/9)^2} \right) - \left( 1 - \frac{(x^2 + y^2/9) - y \cdot (2y/9)}{(x^2 + y^2/9)^2} \right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Continuemos com as duas perguntas.

1. A curva  $\mathcal{C}_1$  delimita o disco de raio 2 e de centro  $(1, 2)$ . O campo  $F$  é bem definido nesse domínio, que denotamos  $\Omega_1$ , e o teorema de Green fornece

$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = \int_{\Omega_1} \operatorname{rot} F = \int_{\Omega_1} 2 = 8\pi.$$

onde usamos que a área de  $\Omega_1$  é  $4\pi$ .

2. Não podemos mais aplicar o mesmo raciocínio: o domínio  $\Omega_2$  delimitado por  $\mathcal{C}_2$  contém o ponto  $(0, 0)$ , no qual o campo  $F$  não está definido. Para contornar esse problema, aplicaremos a técnica da observação 6.11. Seja a elipse

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2/9 = 1/9\},$$

e  $\Omega'_2$  o domínio que ela delimita. A curva está contida em  $\Omega_2$  e contém a origem. Suponhamos que seja orientada no sentido horário. Seja também o domínio  $\Gamma = \Omega_2 \setminus \Omega'_2$ . Sua fronteira consiste em  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{E}$ , logo, pelo teorema de Green,

$$\int_{\Gamma} \operatorname{rot} F = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr + \int_{\mathcal{E}} F \cdot dr,$$

ou seja, podemos calcular a integral ao longo de  $\mathcal{C}_2$  por meio de

$$\int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr = \underbrace{\int_{\Gamma} \operatorname{rot} F}_{(A)} - \underbrace{\int_{\mathcal{E}} F \cdot dr}_{(B)}. \quad (27)$$

A integral (A) é obtida pela subtração das áreas:

$$\int_{\Gamma} \operatorname{rot} F = \int_{\Omega_2} 2 - \int_{\Omega'_2} 2 = 2 \left( 4\pi - \frac{1}{3}\pi \right) = \frac{22}{3}\pi,$$

onde usamos que a área da elipse  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  é  $\pi ab$ . Por outro lado, a integral (B) pode ser calculada diretamente usando a definição da integral curvilínea. Ao parametrizar a elipse no sentido horário por  $\eta(t) = \left(\frac{1}{3}\cos(-t), \sin(-t)\right)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \sin(-t) \left(1 - \frac{1}{1/9}\right) \\ \frac{1}{3}\cos(-t) \left(3 + \frac{1}{1/9}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sin(-t) \\ -\cos(-t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} \sin^2 t + \frac{12}{3} \cos^2 t \, dt \\ &= -\frac{20}{3}\pi. \end{aligned}$$

Deduzimos da equação (27) que

$$\int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr = \frac{22}{3}\pi - \left(-\frac{20}{3}\pi\right) = 14\pi.$$

**Correção do exercício 6.5.** O teorema do divergente se prova assim. Dada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização regular, simples e de classe  $C^2$  de  $\partial\Omega$ , o vetor velocidade é

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix}$$

e o vetor normal que aponta para fora do domínio é

$$n(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix}.$$

Logo, a integral se escreve

$$\begin{aligned} \int_I \langle F(\gamma(t)), n(t) \rangle dt &= \int_I \left\langle \begin{pmatrix} F_1(\gamma(t)) \\ F_2(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_I \left( F_1(\gamma(t))\gamma'_2(t) - F_2(\gamma(t))\gamma'_1(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Agora, o truque é aplicar o teorema de Green ao campo vetorial  $G = (-F_2, F_1)$ . Por um lado, a integral curvilínea de  $G$  vale, por definição

$$\int_{\partial\Omega} G \cdot dr = \int_I \left\langle \begin{pmatrix} -F_2(\gamma(t)) \\ F_1(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt.$$

Ela é igual ao termo acima. Por outro lado, o rotacional de  $G$  vale o divergente de  $F$ :

$$\text{rot } G = \text{rot} \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial(-F_2)}{\partial y} = \text{div } F.$$

Por fim, do teorema de Green segue

$$\int_{\partial\Omega} G \cdot dr = \int_{\Omega} \text{rot } G = \int_{\Omega} \text{div } F.$$

Em conclusão,

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, ds = \int_{\Omega} \text{div } F.$$

Usaremos essa fórmula para os cálculos a seguir.

1. O divergente de  $F$  vale  $-1 + 2 = 1$ , logo

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, ds = \int_{\Omega} \text{div } F = \int_{\Omega} 1,$$

ou seja, a área do disco delimitado pela circunferência:  $16\pi$ .

2. O divergente de  $F$  vale  $2(y - x)$ , logo

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, ds &= \int_{\Omega} \text{div } F = \int_0^3 \int_x^3 2(x - y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^3 \left[ y^2 - 2xy \right]_{y=x}^{y=3} dx \\ &= \int_0^3 9 - x^2 - 2x(3 - x) \, dx \\ &= 9. \end{aligned}$$

3. O divergente sendo nulo, do teorema do divergente segue que  $\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, ds$  é zero.

**Correção do exercício 6.6.** Se a curva não circundar a origem, então, pelo teorema de Green na região de simplesmente conexa que ela circunda, a integral é 0. Se a curva contiver a origem, podemos desenhar um pequeno círculo ao redor da origem; pelo teorema de Green, a integral ao longo da curva vale então a integral ao longo desse círculo, que é  $2\pi$ .

## B.7 Exercícios da seção 7

**Correção do exercício 7.1.** Pelo teorema 7.1, basta calcular a diferença de um potencial aos pontos inicial e final.

1. O campo  $F$  admite o potencial  $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = (x^2 + y^2)/2$ , logo tem-se

$$\int_C F \cdot dr = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

2. O campo  $F$  admite o potencial  $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2xy^2$ , logo tem-se

$$\int_C F \cdot dr = f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 4.$$

3. O campo  $F$  admite o potencial  $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = e^x \cos y$ , logo tem-se

$$\int_C F \cdot dr = f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi/2 \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

4. O campo  $F$  admite o potencial  $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = e^x \ln y + e^y \ln x$ , logo tem-se

$$\int_C F \cdot dr = f\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 2e^3 \ln 3.$$

**Correção do exercício 7.2.** O campo  $F$  admite o potencial

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto xe^z + y^2. \end{aligned}$$

Portanto, do teorema 7.1 segue

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dr &= f(-1, \sqrt{2}, \ln(2)) - f(0, 0, 0) \\ &= (-2 + 2) - 0 = 0. \end{aligned}$$

**Correção do exercício 7.3.** Sabemos (veja o exemplo 2.31) que o campo elétrico admite o potencial

$$V: X \longmapsto -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|X - X_0\|}.$$

Portanto, podemos aplicar o teorema 7.1 ao longo da curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por  $\gamma$ :

$$\int_C F \cdot dr = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\|\gamma(a) - X_0\|} - \frac{1}{\|\gamma(b) - X_0\|} \right).$$



## B.8 Exercícios da seção 8

**Correção do exercício 8.1.** O conjunto  $\mathcal{B}$  é a imagem de  $(0, 1] \times [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2]$  pela transformação em coordenadas esféricas (na equação (20)). Segue, pela mudança de coordenadas esféricas e teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}} 1 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\nu) \, d\nu d\theta dr \\ &= \left[ r^2 \right]_{r=0}^1 \cdot 2\pi \cdot \left[ \cos \nu \right]_{\nu=-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

**Correção do exercício 8.2.** Seja a transformação

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (ax, by, cz).\end{aligned}$$

O elipsoide  $\mathcal{E}$  é a imagem da bola unitária  $\mathcal{B}$  por  $\phi$ . Por outro lado, o determinante jacobiano de  $\phi$  é

$$\det d_{(x,y,z)}\phi = abc.$$

Pelo teorema 8.12, tem-se

$$\underbrace{\int_{\mathcal{B}} 1 \cdot abc \, d(x, y, z)}_{abc \cdot \text{Vol}(\mathcal{B}) = abc \frac{4\pi}{3}} = \int_{\mathcal{E}} 1 \, d(x, y, z) = \text{Vol}(\mathcal{E}).$$

**Correção do exercício 8.3.** O determinante jacobiano de  $\phi$  é

$$\det d_{(\theta, \nu, r)}\phi = r(2 + r \cos \theta).$$

Pelo teorema de mudança de coordenadas, temos

$$\int_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 1]} 1 \cdot r(2 + r \cos \theta) \, d(\theta, \nu, r) = \int_T 1 \, d(x, y, z) = \text{Vol}(T).$$

O primeiro termo vale  $4\pi^2$ .

**Correção do exercício 8.4.** O conjunto  $T$  é a imagem pela transformação em coordenadas cilíndricas (na equação (19)) de

$$\Omega = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq (1 - z)^{1/4} \leq 1, \, z \in [0, 1] \right\}.$$

Pela mudança de coordenadas cilíndricas, temos

$$\int_{\Omega} 1 \cdot r \, d(r, \theta, z) = \int_T 1 \, d(x, y, z) = \text{Vol}(T).$$

Por outro lado, segue do teorema de Fubini que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} r \, d(r, \theta, z) &= \int_0^1 \int_0^{(1-z)^{1/4}} \int_0^{2\pi} 1 \cdot r \, d\theta dr dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[ t \right]_{r=0}^{(1-z)^{1/4}} dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} (1-z)^{1/2} dz = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

**Correção do exercício 8.5.** Um cálculo mostra que o determinante jacobiano é

$$\det d_{(\theta, t, z)} \phi = t(z^2 - 1).$$

Seja  $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 1] \times [-1, 1]$ . Pelo teorema de mudança de coordenadas, o volume de  $T$  vale

$$\int_{\Omega} |t(z^2 - 1)| \, d(\theta, t, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 |t(z^2 - 1)| \, dz dt d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

**Correção do exercício 8.6.** O conjunto  $A$  é a imagem de  $\Omega = [a, b] \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$  pela transformação em coordenadas esféricas (na equação (20)). Segue, pela mudança de coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned}\int_A \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, d(x, y, z) &= \int_{\Omega} \frac{1}{(r^2)^{3/2}} \cdot r^2 \cos \nu \, d(r, \theta, \nu) \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{r} \cos \nu \, d\nu d\theta dr \\ &= \left[ \ln r \right]_{r=a}^b \cdot 2\pi \cdot \left[ \cos \nu \right]_{\nu=-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 4\pi \ln(a/b).\end{aligned}$$

## B.9 Exercícios da seção 10

**Correção do exercício 10.1.**

1. A seguinte função é uma imersão:

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x \cos y, x \sin y, y)\end{aligned}$$

De fato, sua diferencial é

$$\begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de posto 2, pois  $\cos y$  e  $\sin y$  não podem se anular ao mesmo tempo. Além disso,  $f$  é claramente injetiva, e sua imagem é precisamente o heloicoide  $\mathcal{H}$ . Temos a

inversa contínua

$$f^{-1}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto \begin{cases} (x/\sin z, z) & \text{se } y \notin \pi\mathbb{Z}, \\ (y/\cos z, z) & \text{se não.} \end{cases}$$

Logo, por definição,  $\mathcal{H}$  é uma superfície.

2. O conjunto  $\mathcal{H}$  se escreve como

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \sin z - y \cos z = 0\}.$$

Além disso, o gradiente de  $(x, y, z) \mapsto x \sin z - y \cos z$  é

$$(\sin z, -\cos z, x \cos z + y \sin z),$$

que é não-nulo. Logo, pelo teorema 10.11,  $\mathcal{H}$  é uma superfície.

**Correção do exercício 10.2.** Seja  $p > 1$ . Para aplicar o teorema 10.11, calculamos que o gradiente de  $(x, y, z) \mapsto x^p + y^p + z^p$  é

$$(px^{p-1}, py^{p-1}, pz^{p-1}).$$

Este vetor é diferente de zero quando  $(x, y, z)$  não é a origem. Como a origem não pertence a  $\mathcal{S}$ , concluímos que se trata de uma superfície.

Por outro lado, quando  $p = 1$ ,  $\mathcal{S}$  é um octaedro: tem ângulos e, portanto, não é uma superfície (só poderemos justificar isto formalmente na próxima aula).

**Correção do exercício 10.3.**

1. Parametrizando por  $t \mapsto (0, 0, 1) + t((0, 0, 1) - (x, y, z))$  a reta, podemos ver que a sua terceira coordenada é zero quando  $t = \frac{1}{1-z}$ . Deduzimos que

$$\phi(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

2. Um cálculo mostra que, dados  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  e  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) = (a, b) &\implies (1-z)^2 a^2 + (1-z)^2 b^2 + z^2 = 1 \\ &\implies z = \frac{2(a^2 + b^2) \pm \sqrt{4}}{2(a^2 + b^2 + 1)} \\ &\implies (x, y, z) = \left( \frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{-1+a^2+b^2}{1+a^2+b^2} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, a diferencial de  $\phi^{-1}: (a, b) \mapsto \left( \frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{-1+a^2+b^2}{1+a^2+b^2} \right)$  é:

$$\begin{aligned} d_{(a,b)}\phi^{-1} &= \begin{pmatrix} 2\frac{1+b^2-a^2}{(1+a^2+b^2)^2} & -4\frac{ab}{(1+a^2+b^2)^2} \\ -4\frac{ab}{(1+a^2+b^2)^2} & 2\frac{1+a^2-b^2}{(1+a^2+b^2)^2} \\ 4\frac{a}{(1+a^2+b^2)^2} & 4\frac{b}{(1+a^2+b^2)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+a^2+b^2)^2} \begin{pmatrix} 2(1+b^2-a^2) & -4ab \\ -4ab & 2(1+a^2-b^2) \\ 4a & 4b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ela tem posto 2 (basta olhar para a matriz superior  $2 \times 2$ ). Portanto,  $\phi^{-1}$  é uma imersão e, como define um homeomorfismo na sua imagem (pela questão 1), deduzimos que é uma parametrização local da esfera.

**Correção do exercício 10.4.** Utilizaremos o teorema 10.11. Para  $\mathcal{H}_1$ , só precisamos de verificar que o gradiente de  $(x, y, z) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$  não se anula em  $\mathcal{H}_1$ , o que é claro, pois vale

$$\left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2} \right),$$

zero apenas na origem. O raciocínio é semelhante para  $\mathcal{H}_2$ .

## B.10 Exercícios da seção 11

**Correção do exercício 11.1.** Aplicamos a propriedade 11.9. Para  $\mathcal{H}_1$ , ela nos dá o vetor normal

$$\left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2} \right),$$

e para  $\mathcal{H}_2$ , o vetor

$$\left( \frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2} \right).$$

**Correção do exercício 11.2.** Equivalentemente,  $S$  é a pré-imagem de 6 pela função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ou seja, ela é uma esfera de raio  $\sqrt{6}$ . Sabemos que um vetor normal em  $(2, 1, 1)$  é  $(2, 1, 1)$  mesmo, e o plano tangente é o espaço ortogonal, gerado por exemplo por  $(1, 0, -2)$  e  $(0, 1, -1)$ . Consequentemente,

$$T_{(2,1,1)}S = \{(\lambda, \mu, -2\lambda - \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

**Correção do exercício 11.3.** Pela propriedade 11.9, por todo  $(x, y, z) \in S$ , um vetor tangente é dado pelo gradiente de

$$f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2,$$

que é

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2, -4y, 2z).$$

Por outro lado, a linha tem o vetor diretor

$$(3, 2, -\sqrt{2}).$$

O plano tangente é perpendicular à linha precisamente quando o vetor normal é paralelo ao vetor diretor, isto é,

$$(3x^2, -4y, 2z) // (3, 2, -\sqrt{2}) \iff \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = -9/2 \\ z = -9/\sqrt{2} \end{cases}$$

#### Correção do exercício 11.4.

1. O conjunto  $S$  é a pré-imagem de 0 pela função

$$f(x, y, z) = x^3 - x^2y + z^3.$$

Seu gradiente é

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 - 2xy, -2x^2y, 3z^2).$$

Ele não é nulo em  $(2, -3/2, 1)$ :

$$\nabla f(2, -3/2, 1) = (18, -4, 3),$$

o que mostra que  $S$  é uma superfície em torno deste ponto, pelo teorema 10.11. Além disso, o plano tangente é ortogonal ao gradiente. Ela é gerado, por exemplo, pelos vetores  $(1, 0, -6)$  e  $(0, 3, -4)$ . Obtemos,

$$T_{(2, -3/2, 1)}S = \{(\lambda, 3\mu, -6\lambda - 4\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

2. Para mostrar que  $S$  não é uma superfície em  $(0, 0, 0)$ , usaremos a observação 11.7. Consideremos as curvas

$$\gamma_1(t) = (0, t, 0), \quad \gamma_2(t) = (t, t, 0), \quad \gamma_3(t) = (-t, 0, t).$$

As derivadas em 0 são

$$\gamma'_1(0) = (0, 1, 0), \quad \gamma'_2(0) = (1, 1, 0), \quad \gamma'_3(0) = (1, 0, 1).$$

Estes vetores geram  $\mathbb{R}^3$  inteiro. Em particular, eles não podem ser contidos em um subespaço vetorial de dimensão 2. Deduzimos da propriedade 11.6 que  $S$  não é uma superfície na origem.

#### Correção do exercício 11.5.

1. O conjunto  $S$  é a pré-imagem de  $-3$  pela função

$$f(x, y, z) = x^3z + x^2y^2 + \sin(yz).$$

Seu gradiente é

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2z + 2xy^2, 2x^2y + z \cos(yz), x^3 + y \cos(yz)).$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) &\implies 2x^2y + z \cos(yz) = x^3 + y \cos(yz) \\ &\implies 2x^2y \cdot y = x^3 \cdot z \\ &\implies 3x^2z + 2xy^2 = 6xy^2 + 2xy^2 = 0 \\ &\implies (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Mas o ponto  $(0, 0, 0)$  não pertence a  $S$ . Concluimos com o teorema 10.11.

2. A linha normal é gerada pelo gradiente, que vale

$$\nabla f(-1, 0, 3) = (9, 3, -1).$$

## C Avaliações

### C.1 Primeiro teste para casa

**Modalidades.** Este teste consiste em dois problemas, cada questão valendo um ponto, em um total de dez pontos. As respostas devem ser argumentadas, e a aplicação de propriedades ou teoremas deve ser feita mediante a verificação das hipóteses. Os alunos têm a opção de devolver suas respostas por escrito em papel, pessoalmente ou por foto para o e-mail [raphael.tinarrage@fgv.br](mailto:raphael.tinarrage@fgv.br), ou como um documento escrito com um software de redação matemática, enviado para o mesmo e-mail. Este documento será entregue aos alunos no 13/03/2024, e o prazo final é o 03/04/2024 às 11h10.

**Problema 1** (campos vetoriais fechados no toro). Sejam os conjuntos

$$\begin{aligned} L &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0\}, \\ S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}, \\ \Omega &= \mathbb{R}^3 \setminus (L \cup S) \end{aligned}$$

e os campos vetoriais

$$\begin{aligned} F: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^3 & G: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{-xz}{\sqrt{x^2 + y^2} \left( (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 \right)} \\ \frac{-yz}{\sqrt{x^2 + y^2} \left( (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 \right)} \\ \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (a) Justifique que  $F$  e  $G$  são bem definidos e são de classe  $C^\infty$ .
- (b) Mostre que o rotacional destes campos vale zero.
- (c) Da pergunta anterior, podemos concluir que os campos são conservativos? Detalhe.
- (d) Esboce  $F$  no plano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$  e  $G$  no plano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ .
- (e) Mostre que as duas seguintes curvas são curvas integrais de  $F$  e  $G$ , respectivamente. Conclua que os campos não são conservativos.

$$\begin{aligned} \gamma_F: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 & \gamma_G: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(4t)/2 \\ \sin(4t)/2 \\ 0 \end{pmatrix} & t &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 + \cos(4t)/2 \\ 0 \\ \sin(4t)/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Indicações: Um campo vetorial conservativo tem rotacional nulo. Além disso, uma curva integral para o campo  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\gamma' = F \circ \gamma$ . Se um

campo admite uma curva integral não-constante e não-injetora, então não é conservativo.

Comentário: A existência de campos vetoriais não conservativos de rotacional nulo depende da topologia do espaço subjacente. Por exemplo, se o domínio for simplesmente conexo, então tais campos não existem (esse resultado é o lema de Poincaré). Por outro lado, o domínio  $\Omega$  em nosso problema é, topologicamente falando, um toro (mais precisamente,  $\Omega$  se retrai em um toro). No toro, há essencialmente dois campos vetoriais não conservativos com rotacional nulo: são os campos  $F$  e  $G$  acima.

**Problema 2** (velocidade da luz). Neste problema, trabalharemos no espaço  $\mathbb{R}^4$ , cujos pontos serão denotados genericamente  $(x, y, z, t)$ , sendo as três primeiras coordenadas entendidas como coordenadas espaciais e a quarta como uma coordenada temporal. Dada uma função  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que veremos como um campo vetorial dinâmico (ou seja, dependente do tempo), calcularemos o rotacional (rot), o divergente (div) e o laplaciano vetorial ( $\nabla^2$ ) com relação às coordenadas espaciais. Isto é, denotando  $(F_1, F_2, F_3)$  as componentes de  $F$ , consideraremos

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right), \\ \text{div } F &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}, \\ \nabla^2 F &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Este problema trata das equações de Maxwell no vácuo sem carga e sem corrente:

$$\text{div } E = 0 \quad (28)$$

$$\text{div } B = 0 \quad (29)$$

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (30)$$

$$\text{rot } B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (31)$$

onde  $E, B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  são funções de classe  $C^2$ , chamadas respectivamente de campo elétrico e campo magnético,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  é a permeabilidade do vácuo e  $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}$  é a permissividade do vácuo. Além disso, dado  $\omega > 0$ ,  $k \in \mathbb{R}^3$  unitário e  $n \in \mathbb{R}^3$  ortogonal a  $k$ , pomos a seguinte função, chamada de onda plana monocromática:

$$\begin{aligned} F_{(\omega, k, n)}: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, z, y, t) &\longmapsto \cos(\langle k, (x, y, z) \rangle - t\omega)n. \end{aligned} \quad (32)$$

O termo  $\omega$  é chamado de velocidade,  $k$  de vetor de propagação e  $n$  de polarização.

(f) Sejam  $\omega > 0$  e  $k, n \in \mathbb{R}^3$  ortogonais. Calcule  $\text{rot } F_{(\omega, k, n)}$ ,  $\text{div } F_{(\omega, k, n)}$  e  $\frac{\partial}{\partial t} F_{(\omega, k, n)}$ .

- (g) Seja  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{R}^3$  unitário,  $n \in \mathbb{R}^3$  ortogonal a  $k$ , e defina  $\tilde{n} = \frac{1}{\omega} k \times n$ . Além disso, consideremos as funções  $E = F_{(\omega, k, n)}$  e  $B = F_{(\omega, k, \tilde{n})}$ . Mostre que  $E$  e  $B$  são soluções das equações (28), (29), (30) e (31) se e somente se  $\omega = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ .
- (h) Seja  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$ . Prove que  $\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } F = \text{rot } \frac{\partial}{\partial t} F$ .
- (i) Sejam  $E, B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  soluções de classe  $C^2$  das equações (28), (29), (30) e (31). Mostre

$$\nabla^2 E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (33)$$

$$\nabla^2 B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \quad (34)$$

Poderemos aplicar o operador rotacional aos membros das equações (30) e (31) e usar a pergunta anterior e a indicação abaixo.

- (j) Dada  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , e denotando genericamente os pontos de  $\mathbb{R}^2$  como  $(x, t)$ , considere equação

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (35)$$

Mostre que para toda função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  e  $\omega = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , a seguinte função é solução da equação (35):

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto f(x - t\omega). \end{aligned}$$

Indicação: Uma função  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  satisfaz a relação

$$\text{rot}(\text{rot}(F)) = \nabla \text{div } F - \nabla^2 F.$$

Comentário: O resultado da questão (g) é uma das previsões notáveis das equações de Maxwell: para que uma onda plana seja uma solução, sua velocidade deve ser igual a  $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 2,99 \times 10^8$ , ou seja, a velocidade da luz. Hoje sabemos que a luz é uma onda eletromagnética, e este resultado pode parecer tautológico. No entanto, em uma época em que esse conhecimento ainda não estava solidificado, as equações de Maxwell permitiram argumentar a favor da luz como uma onda eletromagnética. Além disso, vemos na questão (i) que as equações admitem, em nosso caso (no vácuo, sem carga e sem corrente), uma desacoplagem dos campos elétrico e magnético. Elas seguem então a equação da onda. Em geral, a equação da onda admite uma grande variedade de soluções, como vemos na questão (j), no caso unidimensional em espaço. No entanto, ao adicionar as equações (28) e (29) de Maxwell, que atuam como valor inicial, mostra-se que as soluções são, na realidade, apenas combinações lineares das ondas planas monocromáticas da equação (32) (na verdade, precisamos tomar “combinações lineares infinitas”, por meio da teoria das séries de Fourier).

## C.2 Primeira avaliação

**Modalidades.** Este documento tem quatro páginas, e será distribuído aos alunos na sexta-feira, 12/04, às 9h. A avaliação consiste em dois problemas, cada questão valendo



um ponto, em um total de dez pontos. Os alunos têm três horas para responder. As respostas devem ser argumentadas, e a aplicação de propriedades ou teoremas deve ser feita mediante a verificação das hipóteses. Três perguntas, mais difíceis do que as outras, estão assinaladas com um asterisco. Após a realização da prova, reclamações ou comentários eventuais podem ser dirigidos a [raphael.tinarrage@fgv.br](mailto:raphael.tinarrage@fgv.br).

**Notações.** Os problemas a seguir ocorrem no plano  $\mathbb{R}^2$ , cujos pontos são denotados genericamente como  $(x, y)$ . Denotaremos a norma euclidiana por  $\|\cdot\|$  e o produto escalar por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Como de costume, uma integral curvilínea de um campo escalar  $f$  ao longo de uma curva  $\mathcal{C}$  é representada por  $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$ , e integral curvilínea de um campo vetorial  $F$  ao longo de uma curva orientada  $\mathcal{C}$  é representada por  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ . Além disso, a integral de Riemann de uma função integrável  $f$  em um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é denotada  $\int_{\Omega} f$ .

**Problema 1** (Lema de não retração de Borsuk). Seja  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^2$  tal que  $\|F(X)\| = 1$  por todo  $X \in \mathbb{R}^2$ , e  $F(X) = X$  por todo  $X \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|X\| = 1$ . O objetivo deste problema é mostrar que tal campo não existe. Denotamos  $P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como as componentes de  $F$ , isto é, temos  $F = (P, Q)$ . Seja também  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  o disco de raio 1 centrado na origem:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Sua fronteira  $\partial\Omega$  é o círculo unitário, parametrizado no sentido trigonométrico por

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Além disso, consideramos os campos  $A, B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidos como

$$A(x, y) = (0, x) \qquad B = \left( P \frac{\partial Q}{\partial x}, P \frac{\partial Q}{\partial y} \right).$$

(a) Mostre que

$$\int_{\partial\Omega} A \cdot dr = \pi.$$

(b) Por todo  $t \in [0, 2\pi]$ , mostre que  $\langle A(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle B(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ . Deduza a seguinte igualdade entre integrais curvilíneas de campos vetoriais:

$$\int_{\partial\Omega} A \cdot dr = \int_{\partial\Omega} B \cdot dr.$$

Sugestão: Explicite a derivada de  $t \mapsto Q(\gamma(t))$  em função das derivadas parciais de  $Q$ , e use as relações  $P(\gamma(t)) = \cos t$  e  $Q(\gamma(t)) = \sin t$  por todo  $t \in [0, 2\pi]$ .

(c\*) O restante do problema consiste em mostrar que a integral de  $B$  é zero, obtendo assim uma contradição com a pergunta (a). Para começar, prove a igualdade

$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Sugestão: Considere o campo escalar  $G = P^2 + Q^2$ , que é constante igual a 1, e calcule suas derivadas parciais.

(d) Aplicando o teorema de Green, mostre que

$$\int_{\partial\Omega} B \cdot dr = 0.$$

**Comentário:** Em 1910, Brouwer demonstrou seu teorema do ponto fixo [Bro11], um resultado fundamental de topologia, que garante que toda função contínua  $f: \Omega \rightarrow \Omega$  do disco até o disco admite um ponto fixo (isto é, existe um  $x \in \Omega$  tal que  $f(x) = x$ ). Em particular, se jogarmos um mapa amassado do Rio de Janeiro em uma rua do Rio de Janeiro, então deve haver um ponto no mapa que esteja exatamente acima dele mesmo na rua. Acontece que este teorema está intimamente relacionado ao lema de não retração, devido a Borsuk em 1933 [Bor33], que provamos neste problema: não há retração do plano no círculo. Uma dedução do teorema de Brouwer a partir do lema de Borsuk já aparece no livro de Alexandroff e Hopf em 1935 [AH35]. Vale ressaltar que, após a prova dada pelo próprio Brouwer (usando a noção de grau de aplicações entre esferas), uma miríade de provas diferentes foi proposta, utilizando combinatória (a prova de Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz em 1929 usa o lema de Sperner [KKM29]), topologia algébrica (a prova usando a cohomologia das esferas já aparece em 1960 no livro de Hilton e Wylie [HW67]), ou cálculo diferencial (como Hirsch em 1963 [Hir63], corrigido por Joshi em 1999 [Jos00], ou Milnor em 1978 [Mil78]). O prova do lema de não retração proposta neste problema é uma adaptação da de Boothby de 1971 [Boo71] (que, na verdade, lembra ideias já apresentadas por Bohl em 1904) e que, em sua forma geral, emprega o teorema de Stokes. Recomendamos a leitura de [Par99] para um histórico.

**Problema 2** (Fórmula do valor médio para funções harmônicas). O **laplaciano** de uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^2$  é aberto, é a função  $\Delta f: U \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Dizemos que  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é **harmônica** se ela é de classe  $C^2$  e  $\Delta f = 0$ . Além disso, dados  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $r > 0$ , denotaremos por  $\mathcal{D}((x_0, y_0), r)$  o disco centrado em  $(x_0, y_0)$  e de raio  $r$ , e por  $\mathcal{C}((x_0, y_0), r)$  sua fronteira. Para ser mais preciso,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}((x_0, y_0), r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}, \\ \mathcal{C}((x_0, y_0), r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}.\end{aligned}$$

Suporemos que as curvas são orientadas no sentido trigonométrico. O objetivo deste problema é provar a **fórmula do valor médio**: dada uma função harmônica  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , por todo  $(x, y) \in U$  e  $r > 0$  tal que  $\mathcal{D}((x, y), r) \subset U$ , a integral curvilínea da função ao longo da circunferência  $\mathcal{C}((x, y), r)$  é ligada ao valor da função no centro pela relação

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathcal{C}((x, y), r)} f \, ds. \quad (36)$$

(e) Mostre que a seguinte função é harmônica:

$$\begin{aligned}g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \ln(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

- (f) Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto compacto cuja fronteira  $\partial\Omega$  consiste em um número finito de componentes conexas, parametrizadas por curvas fechadas, regulares, simples e de classe  $C^2$ . Além disso, sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto que contém  $\Omega$ ,  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de classe  $C^2$ , e  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo definido por

$$F = \begin{pmatrix} v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Usando o teorema de Green, prove a **identidade de Green**:

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dr = \int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u). \quad (37)$$

- (g) Até o final deste problema, consideraremos um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e uma função harmônica  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja o campo  $G: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Além disso, sejam  $(x, y) \in U$  e  $r > 0$  tal que  $\mathcal{D}((x, y), r) \subset U$ . Mostre que

$$\int_{\mathcal{C}((x, y), r)} G \cdot dr = 0.$$

Sugestão: Use a identidade de Green (equação (37)) com uma escolha judiciosa de  $u, v$  e  $\Omega$ . Ou use o teorema de Green.

- (h\*) Sejam  $(x, y) \in U$  e  $r, \epsilon > 0$  tal que  $\mathcal{D}((x, y), r) \subset U$  e  $\epsilon < r$ . Prove que

$$\frac{1}{r} \int_{\mathcal{C}((x, y), r)} f \, ds = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{C}((x, y), \epsilon)} f \, ds$$

Sugestão: Aplique a identidade de Green (equação (37)) com  $u$  definida por

$$u: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) \mapsto \ln((x - a)^2 + (y - b)^2).$$

(que é harmônica como consequência da pergunta (e)),  $v = f$  e  $\Omega = \mathcal{D}((x, y), r) \setminus \mathcal{D}((x, y), \epsilon)$ , e use a pergunta (g).

- (i) Prove que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\mathcal{C}((x, y), \epsilon)} f \, ds = f(x, y)$$

e deduza a fórmula do valor médio (equação (36)).

Sugestão: Use o fato de que, como  $f$  é contínua, tem-se

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \{f(a, b) \mid (a, b) \in \mathcal{C}((x, y), \epsilon)\} = f(x, y), \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup \{f(a, b) \mid (a, b) \in \mathcal{C}((x, y), \epsilon)\} = f(x, y). \end{cases}$$

(j\*) Mostre que a função  $f$  não tem seus zeros isolados, isto é, por todo  $a \in U$  tal que  $f(a) = 0$  e por todo  $\epsilon > 0$ , existe um  $b \in U$  tal que  $a \neq b$ ,  $\|a - b\| \leq \epsilon$  e  $f(b) = 0$ .

Comentário: O estudo das funções harmônicas iniciou-se no final do século XVIII, com o trabalho de Lagrange, Legendre, Laplace, Poisson, Green e Gauss, entre outros. As funções harmônicas são, por definição, as soluções da equação de Laplace:

$$\Delta f = 0.$$

O estudo moderno das funções harmônicas geralmente começa com a fórmula do valor médio, cuja prova clássica apresentamos aqui, por meio da identidade de Green [ABW13]. Elas satisfazem propriedades de regularidade fortes, como o fato de serem analíticas, de não terem zeros isolados (pergunta (j)), de satisfazerem um princípio do máximo e de não poderem ser limitadas sem serem constantes (teorema de Liouville).

## D Referências

- [ABW13] Sheldon Axler, Paul Bourdon, and Ramey Wade. *Harmonic function theory*, volume 137. Springer Science & Business Media, 2013. <https://www.axler.net/HFT.pdf>.
- [AH35] P. Alexandroff and H. Hopf. *Topologie*. Springer Berlin Heidelberg, 1935. <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.358148/page/n5/mode/2up>.
- [Boo71] WM Boothby. On two classical theorems of algebraic topology. *The American Mathematical Monthly*, 78(3):237–249, 1971.
- [Bor33] Karol Borsuk. Drei sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische sphäre. *Fundamenta Mathematicae*, 20(1):177–190, 1933. <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm20/fm20117.pdf>.
- [Bro11] Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische annalen*, 71(1):97–115, 1911. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01456931>.
- [CB22] Jean Cerqueira Berni. Mat 2455 - Cálculo diferencial e integral III. *Instituto de Matemática e Estatística - IME/USP*, 2022. <https://www.ime.usp.br/~jeancb/mat2455.html>.
- [Gil15] DC Gillespie. The Cauchy definition of a definite integral. *The Annals of Mathematics*, 17(2):61–63, 1915. <https://www.jstor.org/stable/2007121>.
- [Gou20] Xavier Gourdon. Les maths en tête: Analyse. *Les maths en tête*, pages 1–456, 2020. <https://keybase.theophile.me/maths/livres/gourdon-analyse.pdf>.
- [Gre28] George Green. An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1828. <https://arxiv.org/pdf/0807.0088.pdf>.

- [Gre04] W. M. Greenlee. On Green's theorem and Cauchy's theorem. *Real Analysis Exchange*, 30(2):703 – 718, 2004. <https://projecteuclid.org/journals/real-analysis-exchange/volume-30/issue-2/On-Greens-theorem-and-Cauchys-theorem/rae/1129416470.full>.
- [Gri13] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Pearson, 2013.
- [HH15] John H Hubbard and Barbara Burke Hubbard. *Vector calculus, linear algebra, and differential forms: a unified approach*. Matrix Editions, 2015. [https://download.tuxfamily.org/openmathdep/calculus\\_advanced/Vector\\_Calculus-Hubbards.pdf](https://download.tuxfamily.org/openmathdep/calculus_advanced/Vector_Calculus-Hubbards.pdf).
- [Hir63] Morris W Hirsch. A proof of the nonretractibility of a cell onto its boundary. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 14(2):364–365, 1963. <https://www.ams.org/journals/proc/1963-014-02/S0002-9939-1963-0145502-8/S0002-9939-1963-0145502-8.pdf>.
- [HW67] Peter John Hilton and Shaun Wylie. *Homology theory: An introduction to algebraic topology*. CUP Archive, 1967.
- [Jos00] Kapil Joshi. Mistake in Hirsch's proof of the Brouwer fixed point theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(5):1523–1525, 2000. <https://www.ams.org/journals/proc/2000-128-05/S0002-9939-99-05205-3/S0002-9939-99-05205-3.pdf>.
- [KKM29] Bronisław Knaster, Kazimierz Kuratowski, and Stefan Mazurkiewicz. Ein beweis des fixpunktsatzes für  $n$ -dimensionale simplexe. *Fundamenta Mathematicae*, 14(1):132–137, 1929. <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm14/fm141111.pdf>.
- [KKS04] D.S. Kurtz, J. Kurzweil, and C.W. Swartz. *Theories of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane*. Series in real analysis. World Scientific Pub., 2004. <https://epdf.tips/theories-of-integration.html>.
- [KPR62] Erik Kristensen, Ebbe Thue Poulsen, and Edgar Reich. A characterization of riemann-integrability. *The American Mathematical Monthly*, 69(6):498–505, 1962.
- [Lan12] Serge Lang. *Real and functional analysis*, volume 142. Springer Science & Business Media, 2012. <https://59clc.files.wordpress.com/2012/08/real-and-functional-analysis-lang.pdf>.
- [Lax99] Peter D Lax. Change of variables in multiple integrals. *The American mathematical monthly*, 106(6):497–501, 1999. <https://www.jstor.org/stable/2589462>.
- [Lax01] Peter D Lax. Change of variables in multiple integrals ii. *The American Mathematical Monthly*, 108(2):115–119, 2001. <https://www.jstor.org/stable/2695524>.
- [Leb72] Henri Lebesgue. *Œuvres scientifiques, Volumes I and II*. L'enseignement mathématique. and Université de Genève. Institut de mathématiques, 1972.

- [Lux71] WAJ Luxemburg. Arzela's dominated convergence theorem for the Riemann integral. *The American Mathematical Monthly*, 78(9):970–979, 1971. [https://sites.math.washington.edu/~morrow/335\\_17/dominated.pdf](https://sites.math.washington.edu/~morrow/335_17/dominated.pdf).
- [Mas16] Patrick Massot. Mat 553 - Formes différentielles et intégration. *Université Paris-Saclay - IMO*, 2016. <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~patrick.massot/enseignement/mat553/chap-formes-diff.html>.
- [MHB11] Pedro Alberto Morettin, Samuel Hazzan, and Wilton de Oliveira Bussab. *Cálculo funções de uma e várias variáveis*. Saraiva Uni, 2011. <https://document.onl/download/link/livro-calculo-funcoes-de-uma-e-varias-variaveis-bussab-wilton.html>.
- [Mil78] John Milnor. Analytic proofs of the “hairy ball theorem” and the Brouwer fixed point theorem. *The American Mathematical Monthly*, 85(7):521–524, 1978. <https://www.jstor.org/stable/2320860?seq=2>.
- [MT12] Jerrold E. Marsden and Anthony Tromba. *Vector calculus*. W.H. Freeman, New York, array edition, 2012. <https://uwaterloohome.files.wordpress.com/2020/04/jerrold-e.-marsden-anthony-tromba-vector-calculus.pdf>.
- [Par99] Sehie Park. Ninety years of the Brouwer fixed point theorem. *Vietnam J. Math*, 27(3):187–222, 1999. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=05ccf06cc58af0fd0c5c0a9c43cc74bcdab66116>.
- [PCJ12] Murray H Protter and B Charles Jr. *A first course in real analysis*. Springer Science & Business Media, 2012. [https://www.mymathcloud.com/api/download/modules/University/Textbooks/analysis-real/8\)A%20First%20Course%20in%20Real%20Analysis%20Protter.pdf?id=25323333](https://www.mymathcloud.com/api/download/modules/University/Textbooks/analysis-real/8)A%20First%20Course%20in%20Real%20Analysis%20Protter.pdf?id=25323333).
- [Pin10] Márcia Maria Fusaro Pinto. Introdução ao cálculo integral, 2010. <https://docente.ifrn.edu.br/elionardomelo/disciplinas/calculo-diferencial-e-integral-ii/material-de-aula>.
- [PM09] Diomara Pinto and Maria Cândida Ferreira Morgado. *Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis*. UFRJ, 2009.
- [Poi87] Henri Poincaré. Sur les résidus des intégrales doubles. *Acta Mathematica*, 1887. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3058f/f202.item>.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis, 3rd ed.* McGraw-Hill, Inc., USA, 1987. <https://59cllc.files.wordpress.com/2011/01/real-and-complex-analysis.pdf>.
- [Sch54] J Schwartz. The formula for change in variables in a multiple integral. *The American Mathematical Monthly*, 61(2):81–85, 1954. <https://www.jstor.org/stable/2307790>.
- [Spi06] Michael Spivak. *Calculus*. Cambridge University Press, 2006. [https://isidore.co/CalibreLibrary/Spivak,%20Michael/Calculus%20\(4th%20ed.\)%20\(8039\)/](https://isidore.co/CalibreLibrary/Spivak,%20Michael/Calculus%20(4th%20ed.)%20(8039)/).

- [Spi18] Michael Spivak. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. CRC press, 2018. <http://www.strangebeautiful.com/other-texts/spivak-calc-manifolds.pdf>.
- [SR17] James Stewart and Jorge Humberto Romo. *cálculo, Volume 2*. Cengage Learning, 2017. [https://ead.ict.unesp.br/pluginfile.php/26291/mod\\_resource/content/3/Calculo%20-%20James%20Stewart%20-%207%20Edi%C3%A7%C3%A3o%20-%20Volume%202.pdf](https://ead.ict.unesp.br/pluginfile.php/26291/mod_resource/content/3/Calculo%20-%20James%20Stewart%20-%207%20Edi%C3%A7%C3%A3o%20-%20Volume%202.pdf).
- [Ton01] Jingcheng Tong. Partitions of the interval in the definition of Riemann’s integral. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(5):788–793, 2001.
- [Wel11] Jonathan Wells. Generalizations of the Riemann integral: an investigation of the Henstock integral. *Whitman Coll*, pages 1–28, 2011. [https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/SeniorProject\\_JonathanWells.pdf](https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/SeniorProject_JonathanWells.pdf).