CCMN — 11/06/2024

Análise Topológica de Dados e suas aplicações

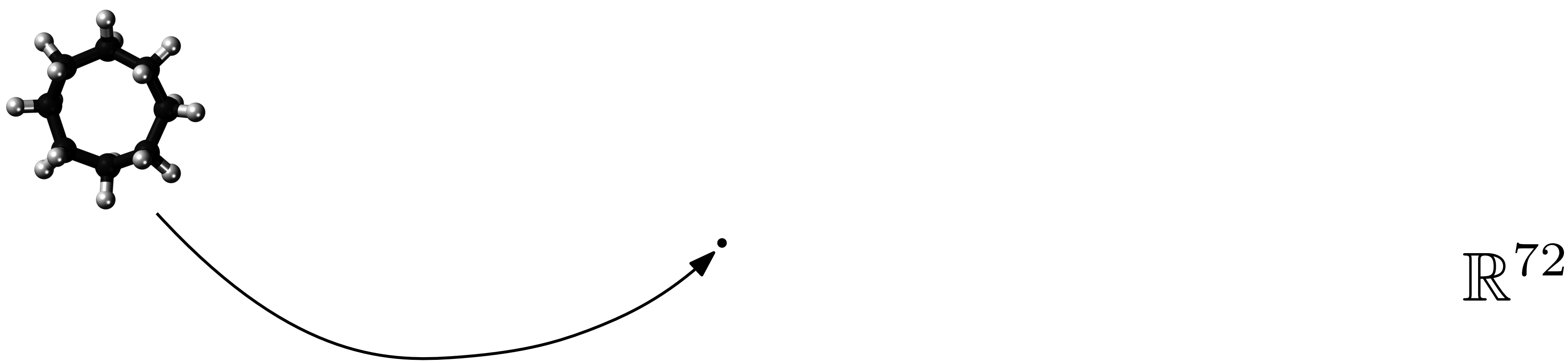
https://raphaeltinarrage.github.io

Last update: June 12, 2024

Aperitivo topológico — Química

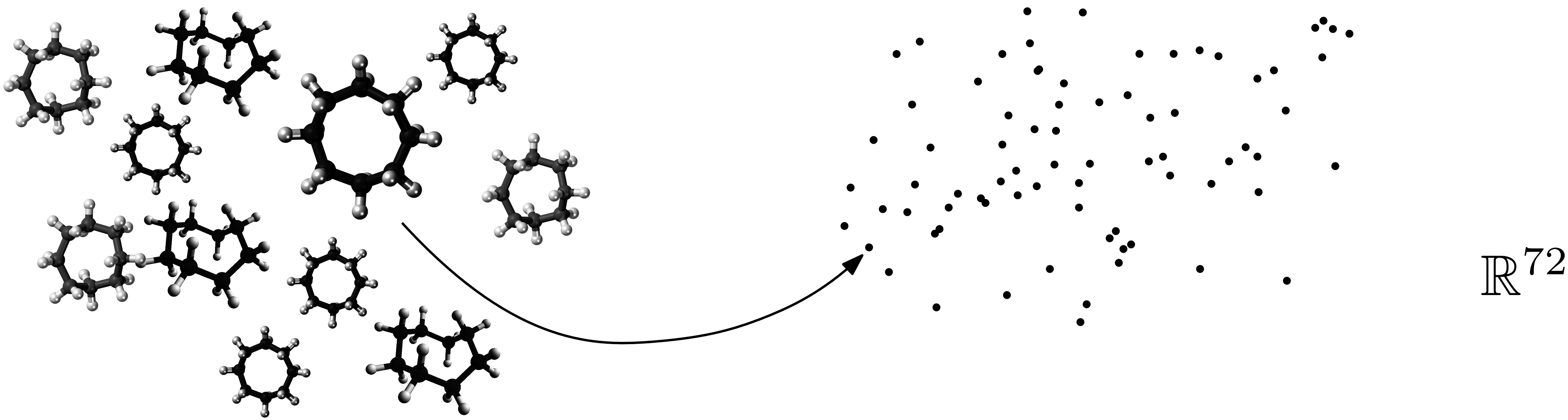
[Martin, Thompson, Coutsias and Watson, Topology of cyclo-octane energy landscape, 2010]

A molécula de ciclo-octano $\mathrm{C_8H_{16}}$ contém 24 átomos.
Cada átomo tem 3 coordenadas espaciais.
Portanto, uma conformação de uma molécula pode ser resumida por **um ponto** em $\mathbb{R}^{72}$.



[Martin, Thompson, Coutsias and Watson, Topology of cyclo-octane energy landscape, 2010]

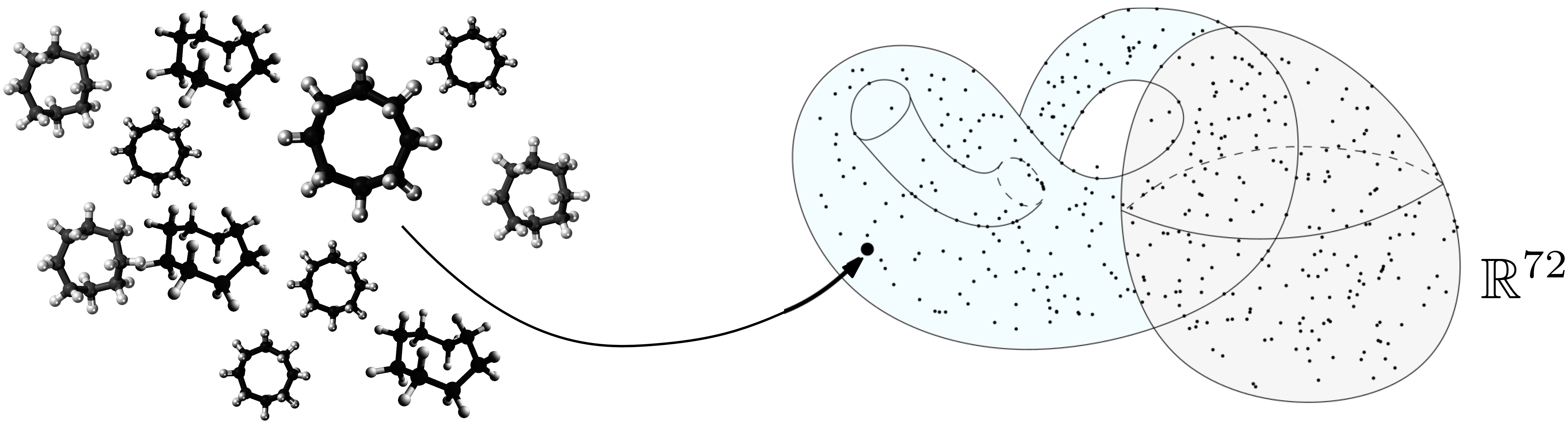
A molécula de ciclo-octano $\mathrm{C_8H_{16}}$ contém 24 átomos.
Cada átomo tem 3 coordenadas espaciais.
Portanto, uma conformação de uma molécula pode ser resumida por **um ponto** em $\mathbb{R}^{72}$.



Ao considerar muitas dessas moléculas, obtemos uma nuvem de pontos em $\mathbb{R}^{72}$.

[Martin, Thompson, Coutsias and Watson, Topology of cyclo-octane energy landscape, 2010]

A molécula de ciclo-octano $\mathrm{C_8H_{16}}$ contém 24 átomos.
Cada átomo tem 3 coordenadas espaciais.
Portanto, uma conformação de uma molécula pode ser resumida por **um ponto** em $\mathbb{R}^{72}$.



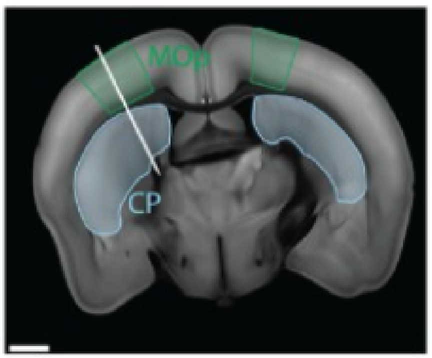
Ao considerar muitas dessas moléculas, obtemos uma nuvem de pontos em $\mathbb{R}^{72}$.

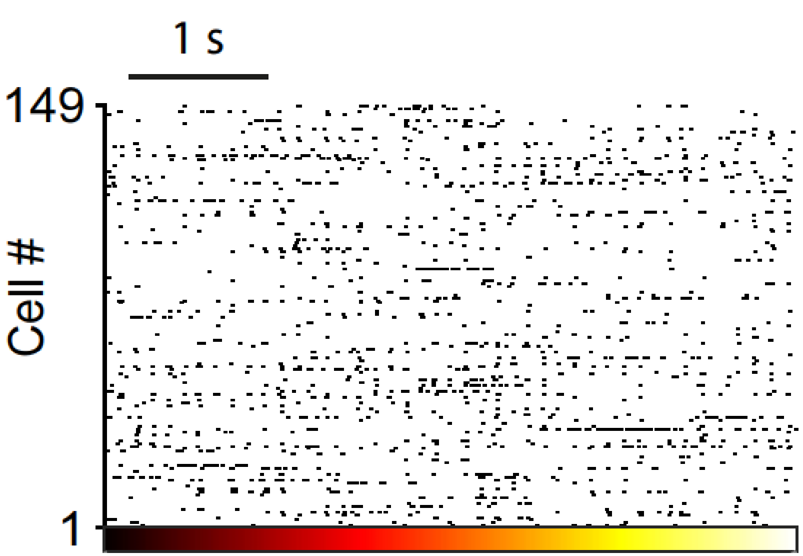
Os autores mostram que essa nuvem de pontos está próxima de um objeto de pequena dimensão: **a união de uma esfera e uma garrafa de Klein**.

Aperitivo topológico — Neurofisiologia

[Richard J. Gardner et al, Toroidal topology of population activity in grid cells, 2022]

Os autores registraram disparos de grid cells em cérebros de ratos. Em seguida, eles aplicaram redução de dimensionalidade à matriz de disparo.

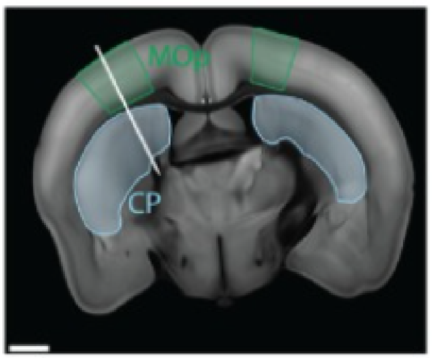


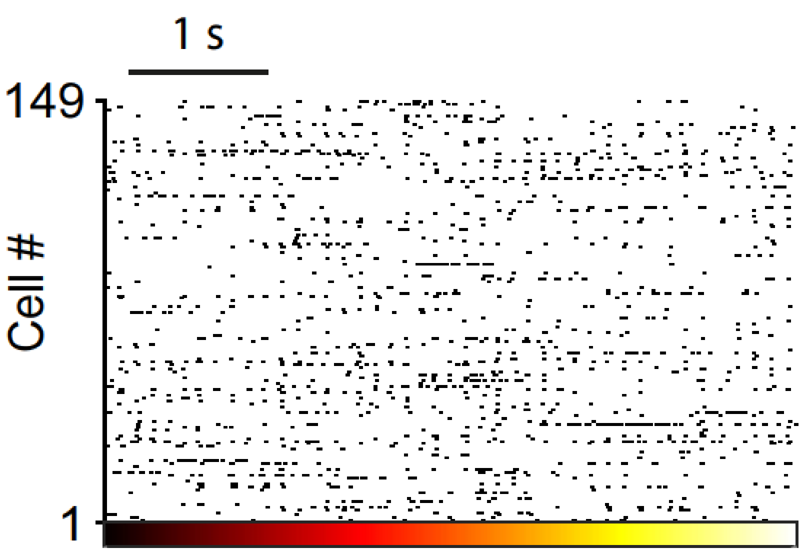


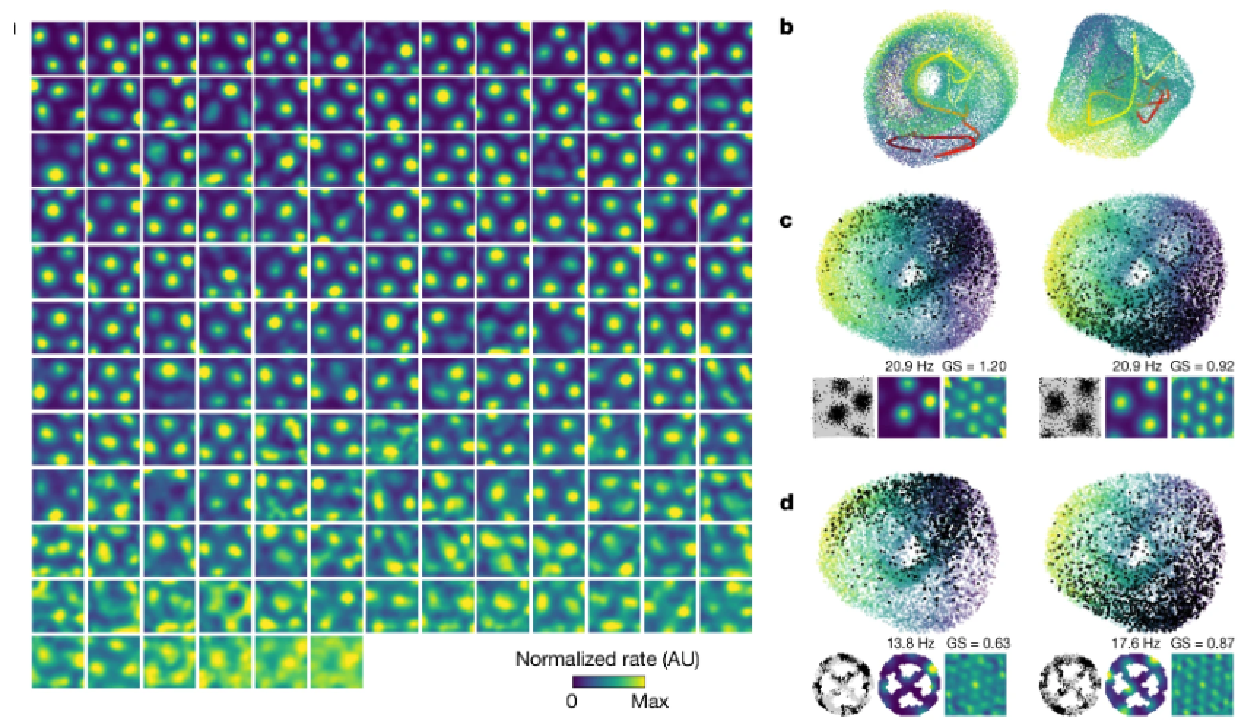
Aperitivo topológico — Neurofisiologia

[Richard J. Gardner et al, Toroidal topology of population activity in grid cells, 2022]

Os autores registraram disparos de grid cells em cérebros de ratos. Em seguida, eles aplicaram redução de dimensionalidade à matriz de disparo.
Ao aplicar a homologia persistente, eles observaram a homologia de um **toro**.



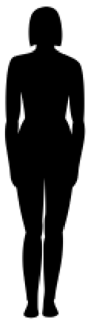




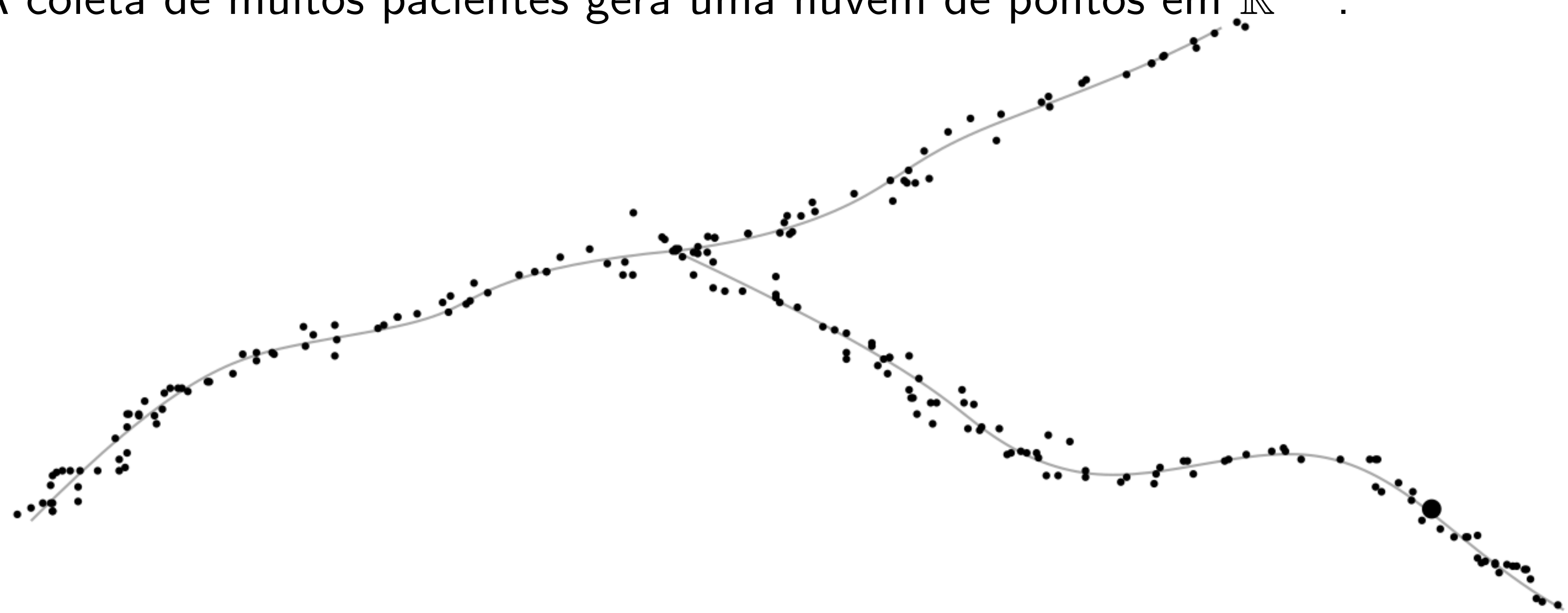
[Topology based data analysis identifies a subgroup of breast cancers with a unique mutational profile and excellent survival, Monica Nicolau, Arnold J Levine, and Gunnar Carlsson, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2011]

Os autores estudam tecidos de pacientes infectadas por câncer de mama. Eles obtiveram 262 variáveis genômicas por paciente.

$$(x_1, x_2, ..., x_{262}) \longleftarrow$$



A coleta de muitos pacientes gera uma nuvem de pontos em $\mathbb{R}^{262}$.

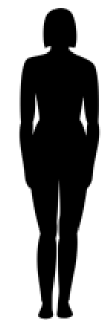


Aperitivo topológico — Biologia

[Topology based data analysis identifies a subgroup of breast cancers with a unique mutational profile and excellent survival, Monica Nicolau, Arnold J Levine, and Gunnar Carlsson, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2011]

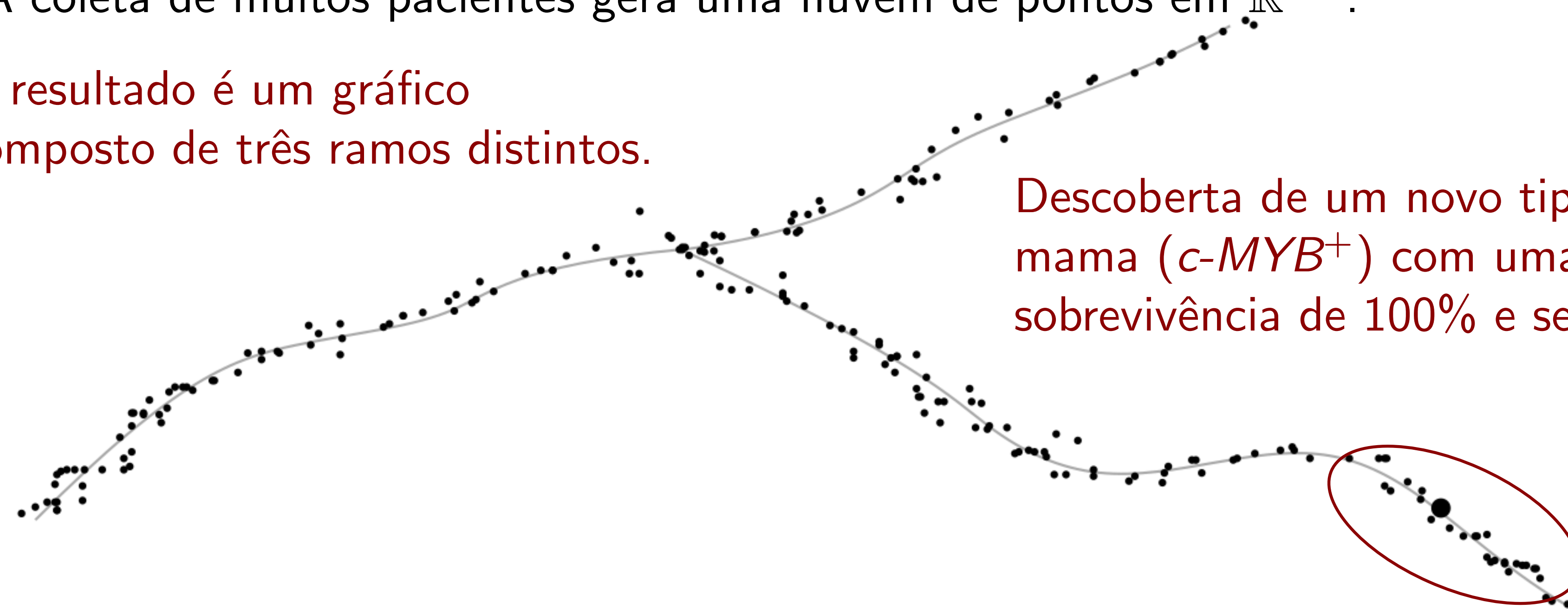
Os autores estudam tecidos de pacientes infectadas por câncer de mama. Eles obtiveram 262 variáveis genômicas por paciente.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{262}) \longleftarrow$$



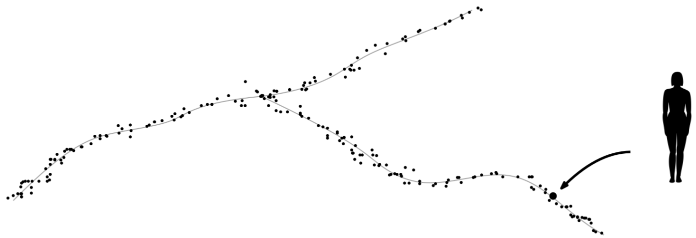
A coleta de muitos pacientes gera uma nuvem de pontos em $\mathbb{R}^{262}$.

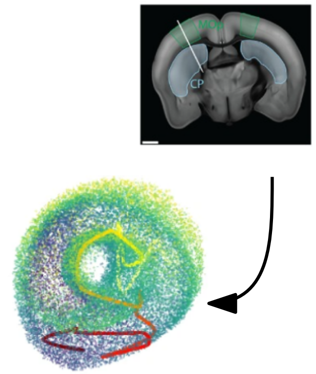
O resultado é um gráfico composto de três ramos distintos.

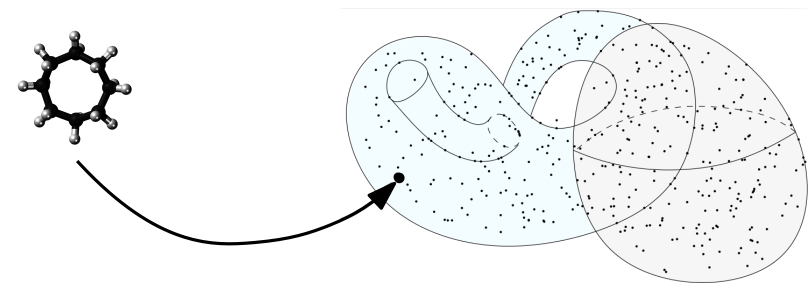


Descoberta de um novo tipo de câncer de mama (*c-MYB*$^+$) com uma taxa de sobrevivência de 100% e sem metástases.

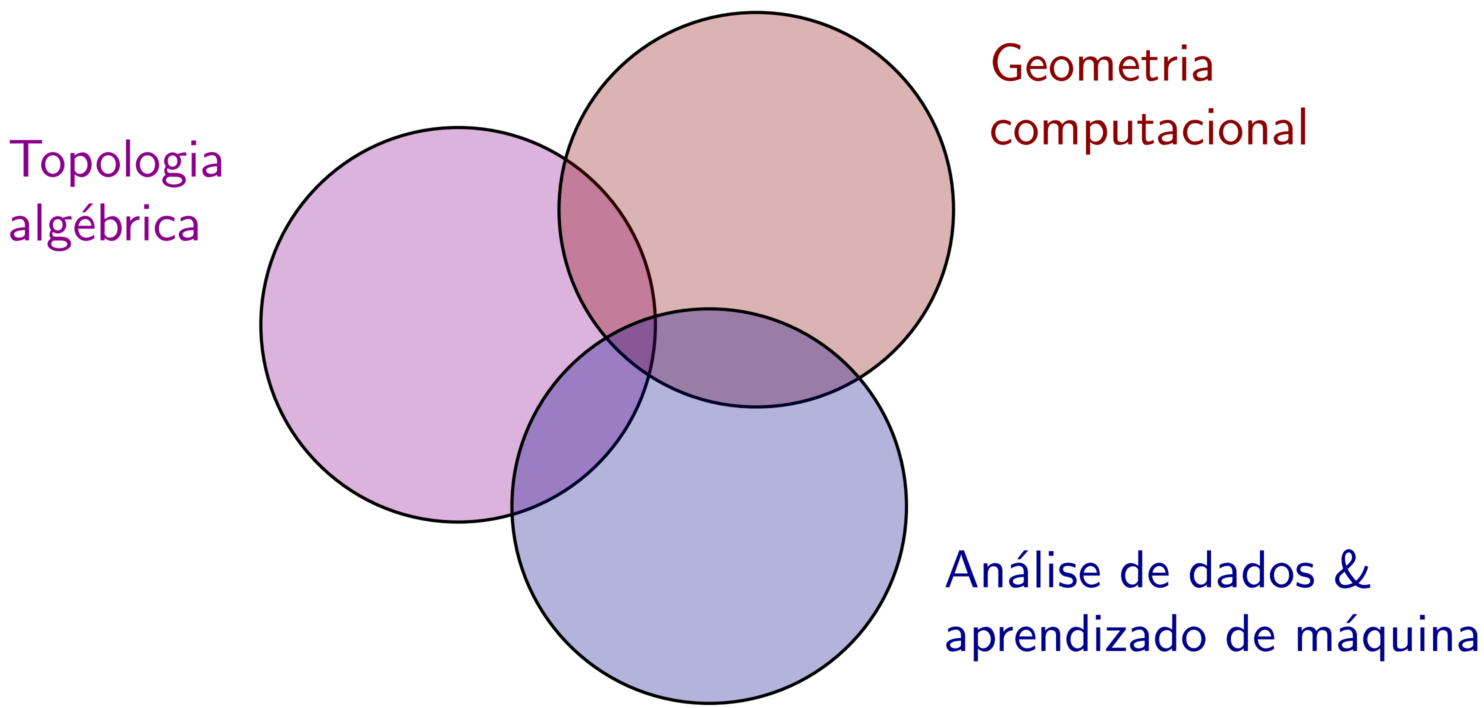
Qual é a forma dos dados?







A análise de dados topológicos (TDA) permite **explorar** e **compreender** a topologia dos conjuntos de dados.



I - Comparar espaços topológicos

1 - Equivalência de homeomorfia

2 - Equivalência de homotopia

II - Invariantes topológicos

1 - Número de componentes conexas

2 - Característica de Euler

3 - Números de Betti

4 - Homologia (simplicial sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

III - Inferência topológica

1 - Estimação do parâmetro t

2 - Nervos

IV - Homologia persistente

1 - Módulos de persistência

2 - Decomposição

3 - Estabilidade

V - Aplicações

Protagonistas em topologia

Em topologia, estudamos **espaços topológicos**.

Definição: um espaço topológico é um conjunto X dotado de uma coleção de **conjuntos abertos** $\{O_\alpha, \alpha \in A\}$, com $O_\alpha \subset X$, tal que

- $\emptyset$ e X são conjuntos abertos,
- uma união infinita de conjuntos abertos é um conjunto aberto,
- uma interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Definição: Dados dois espaços topológicos X e Y, uma função $f\colon X \to Y$ é **contínua** se para cada conjunto aberto $O \subset Y$, ta pré-imagem $f^{-1}(O)$ é um conjunto aberto de X.

$$X \longrightarrow Y$$

Protagonistas em topologia

Em topologia, estudamos **espaços topológicos**.

Definição: um espaço topológico é um conjunto X dotado de uma coleção de **conjuntos abertos** $\{O_\alpha, \alpha \in A\}$, com $O_\alpha \subset X$, tal que

- $\emptyset$ e X são conjuntos abertos,
- uma união infinita de conjuntos abertos é um conjunto aberto,
- uma interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Definição: Dados dois espaços topológicos X e Y, uma função $f\colon X \to Y$ é **contínua** se para cada conjunto aberto $O \subset Y$, ta pré-imagem $f^{-1}(O)$ é um conjunto aberto de X.

$$X \longrightarrow Y$$

tradução em
cálculo ϵ-δ

Podemos pensar em **subconjunto** $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$,

e funções $f\colon X \to Y$ **contínuas** no seguinte sentido:

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in X, \|x - y\| < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Construção de espaços topológicos

1 - Podemos construir um espaço topológico o vendo como um **subespaço** de outro.

No $\mathbb{R}^n$, podemos definir:

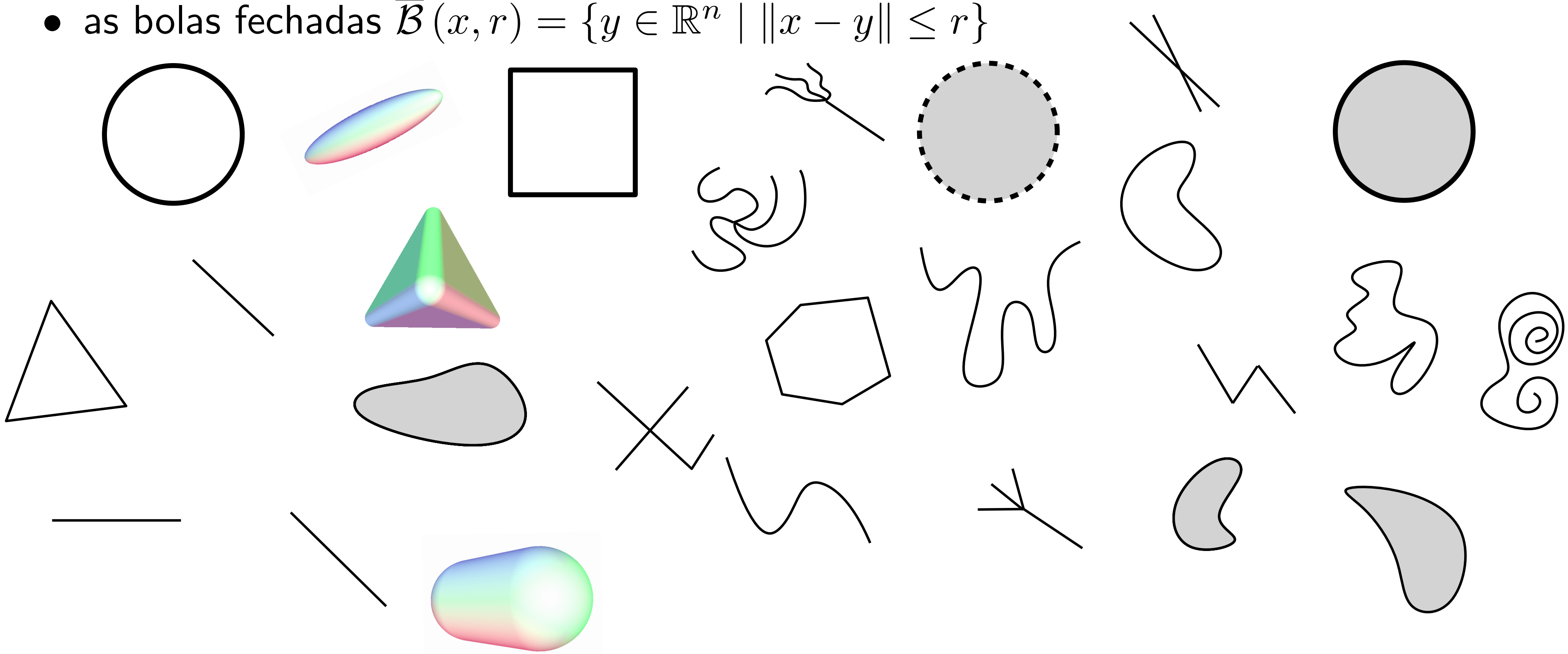
- a esfera unitária $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$
- o cubo unitária $\mathcal{C}_{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max(|x_1|, ..., |x_n|) = 1\}$
- as bolas abertas $\mathcal{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$
- as bolas fechadas $\overline{\mathcal{B}}\,(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}$

Construção de espaços topológicos

1 - Podemos construir um espaço topológico o vendo como um **subespaço** de outro.

No $\mathbb{R}^n$, podemos definir:

- a esfera unitária $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$
- o cubo unitária $\mathcal{C}_{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max(|x_1|, ..., |x_n|) = 1\}$
- as bolas abertas $\mathcal{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$
- as bolas fechadas $\overline{\mathcal{B}}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}$



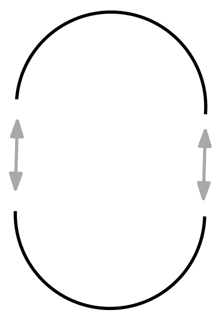
Na maioria das vezes, não temos uma bela definição algébrica...

Construção de espaços topológicos

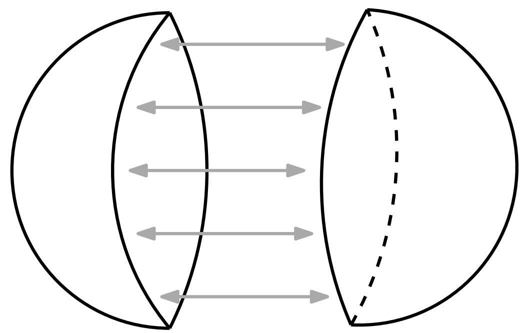
1 - Podemos construir um espaço topológico o vendo como um **subespaço** de outro.

2 - Podemos construir um espaço topológico **grudando** a fronteira de outro espaço.

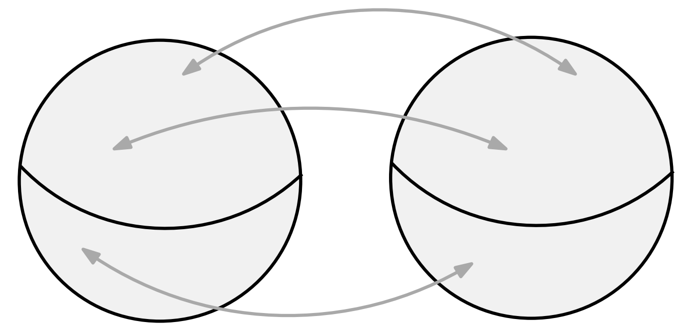
$\mathbb{S}^1$



$\mathbb{S}^2$



$\mathbb{S}^3$

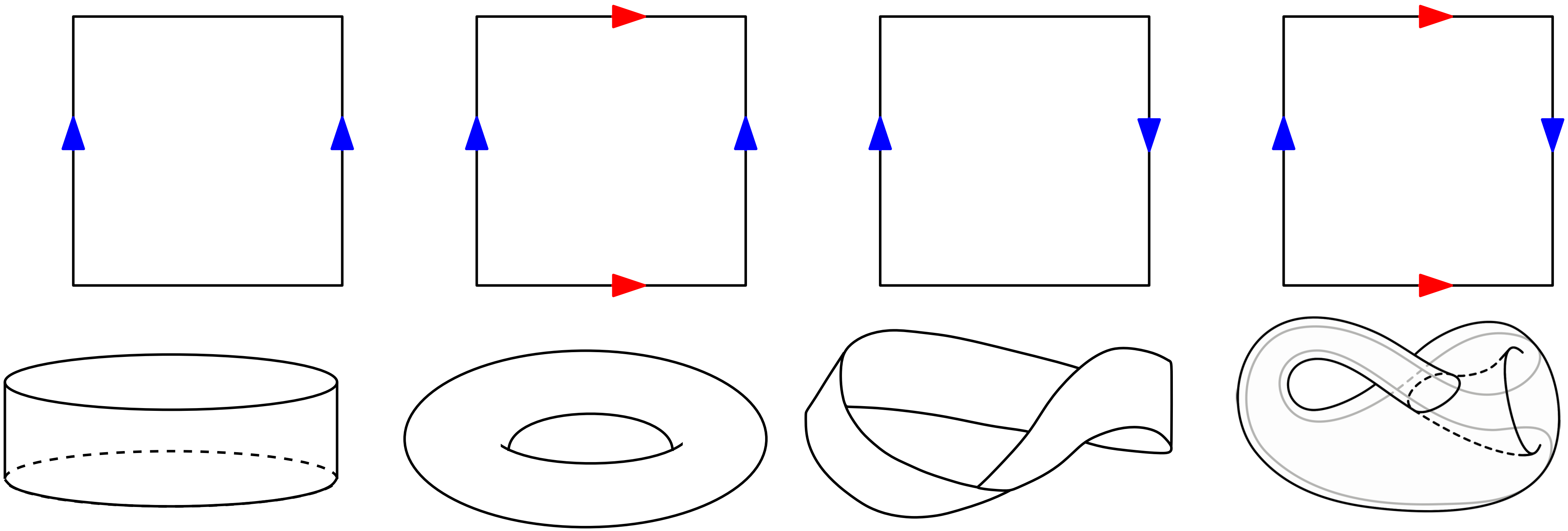


Construção de espaços topológicos

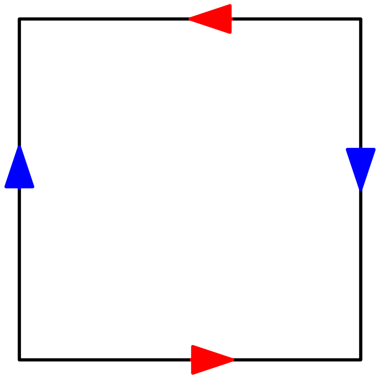
1 - Podemos construir um espaço topológico o vendo como um **subespaço** de outro.

2 - Podemos construir um espaço topológico **grudando** a fronteira de outro espaço.

3 - Podemos construir um espaço topológico como **quociente** de outro.



Bonus:

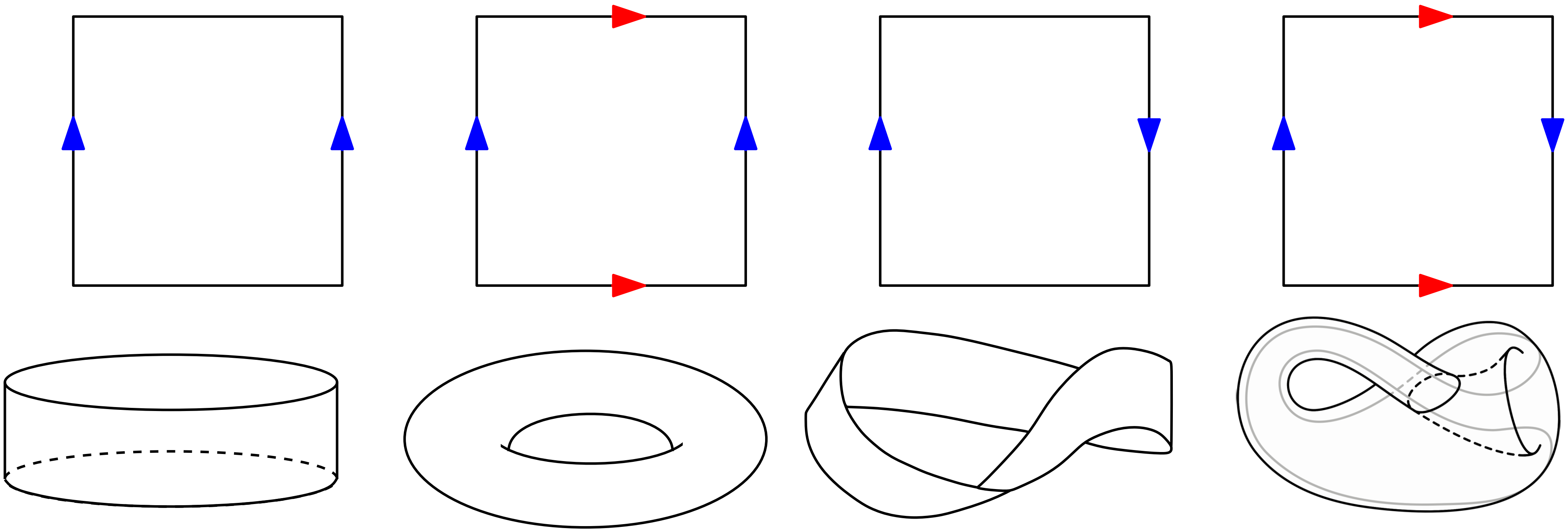


Construção de espaços topológicos

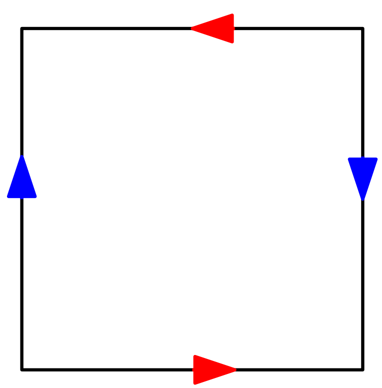
1 - Podemos construir um espaço topológico o vendo como um **subespaço** de outro.

2 - Podemos construir um espaço topológico **grudando** a fronteira de outro espaço.

3 - Podemos construir um espaço topológico como **quociente** de outro.



Bonus:



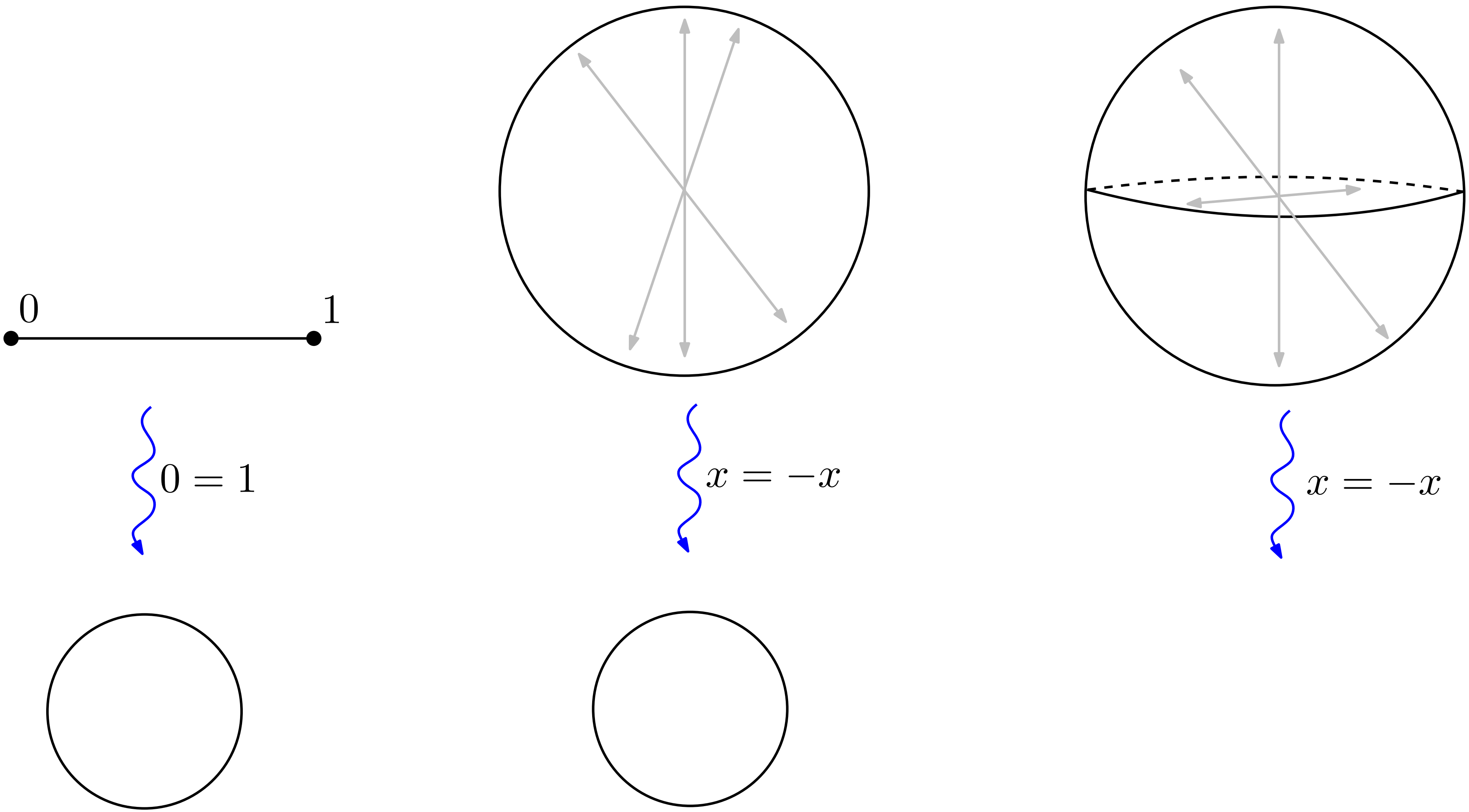
Plano projectivo $\mathbb{R}P^2$

Construção de espaços topológicos

1 - Podemos construir um espaço topológico o vendo como um **subespaço** de outro.

2 - Podemos construir um espaço topológico **grudando** a fronteira de outro espaço.

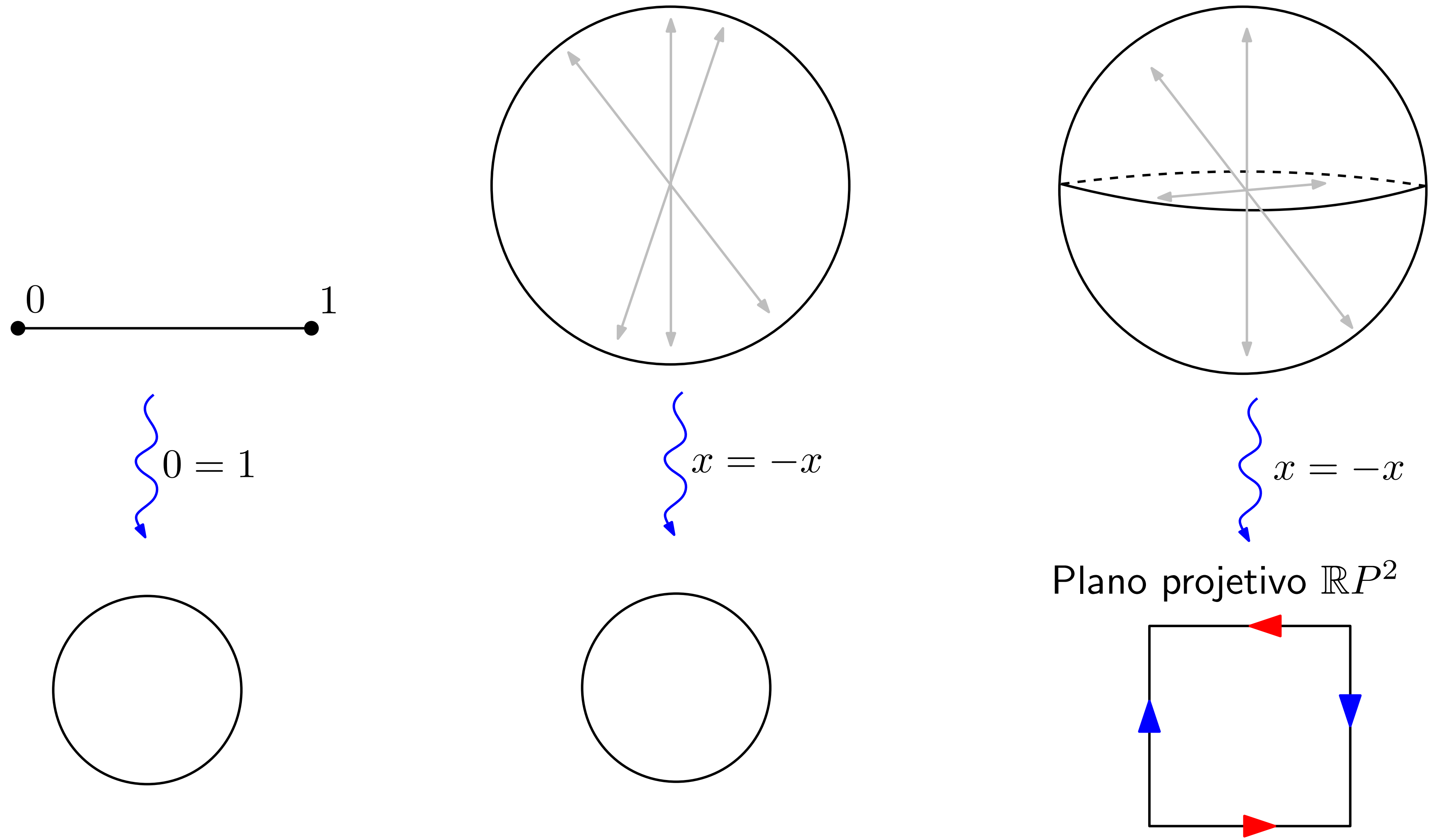
3 - Podemos construir um espaço topológico como **quociente** de outro.



1 - Podemos construir um espaço topológico o vendo como um **subespaço** de outro.

2 - Podemos construir um espaço topológico **grudando** a fronteira de outro espaço.

3 - Podemos construir um espaço topológico como **quociente** de outro.



Construção de espaços topológicos

1 - Podemos construir um espaço topológico o vendo como um **subespaço** de outro.

2 - Podemos construir um espaço topológico **grudando** a fronteira de outro espaço.

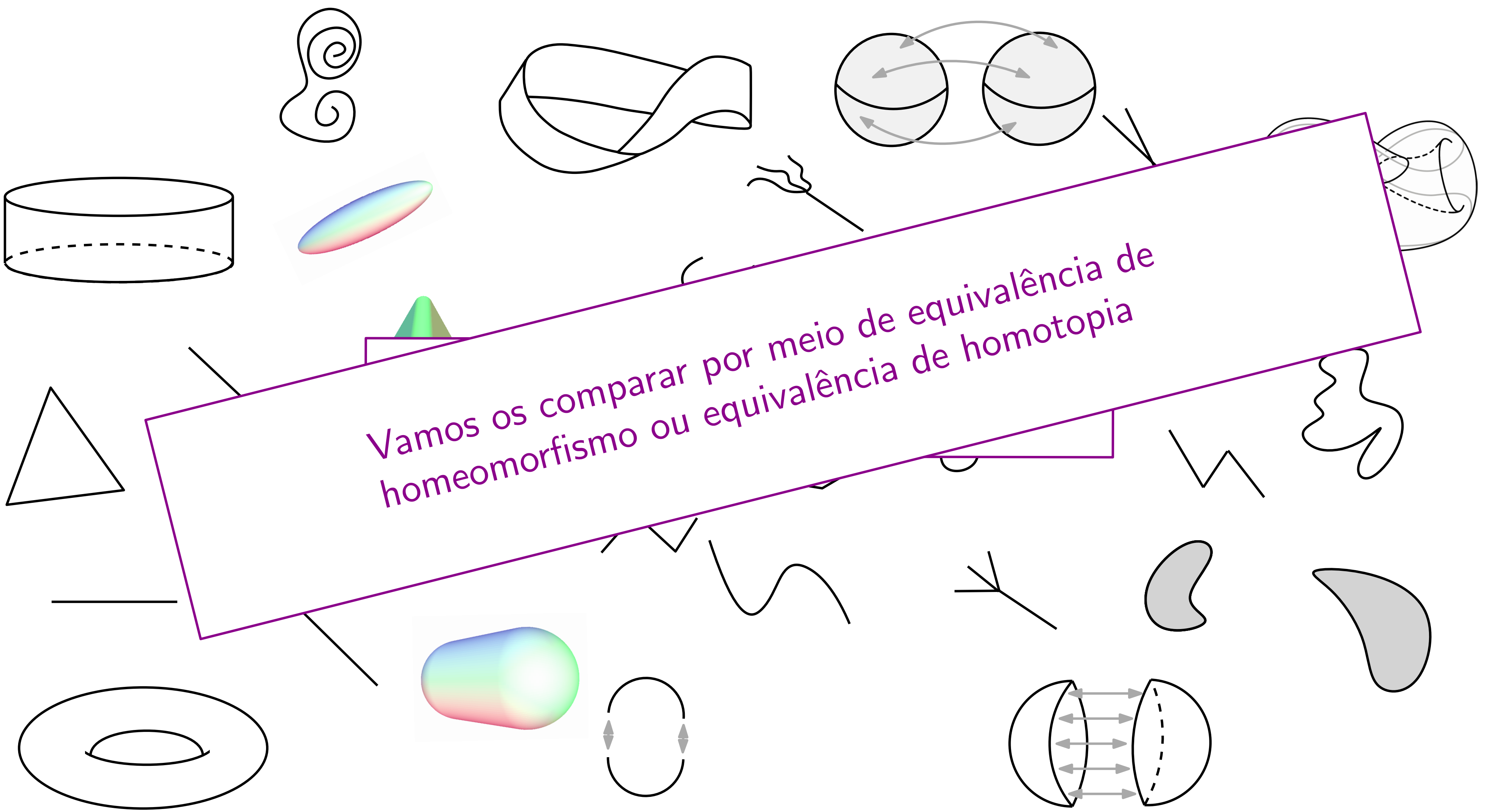
3 - Podemos construir um espaço topológico como **quociente** de outro.

Construção de espaços topológicos

1 - Podemos construir um espaço topológico o vendo como um **subespaço** de outro.

2 - Podemos construir um espaço topológico **grudando** a fronteira de outro espaço.

3 - Podemos construir um espaço topológico como **quociente** de outro.



Vamos os comparar por meio de equivalência de homeomorfismo ou equivalência de homotopia

I - Comparar espaços topológicos

1 - Equivalência de homeomorfia

2 - Equivalência de homotopia

II - Invariantes topológicos

1 - Número de componentes conexas

2 - Característica de Euler

3 - Números de Betti

4 - Homologia (simplicial sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

III - Inferência topológica

1 - Estimação do parâmetro t

2 - Nervos

IV - Homologia persistente

1 - Módulos de persistência

2 - Decomposição

3 - Estabilidade

V - Aplicações

Homeomorfismos

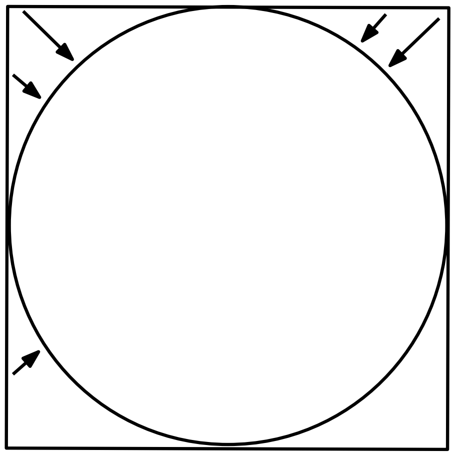
Definition: Sejam X e Y dois espaços topológicos, e $f\colon X \to Y$ uma função. Dizemos que f é um **homeomorfismo** se

- f é uma bijeção,
- $f\colon X \to Y$ é contínua,
- $f^{-1}\colon Y \to X$ é contínua.

Se existe tal homeomorfismo, dizemos que os dois espaços topológicos são **homeomorfos**.

Exemplo: O círculo e o quadrado são homeomorfos via

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{S}_1 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(x_1, x_2) \end{aligned}$$



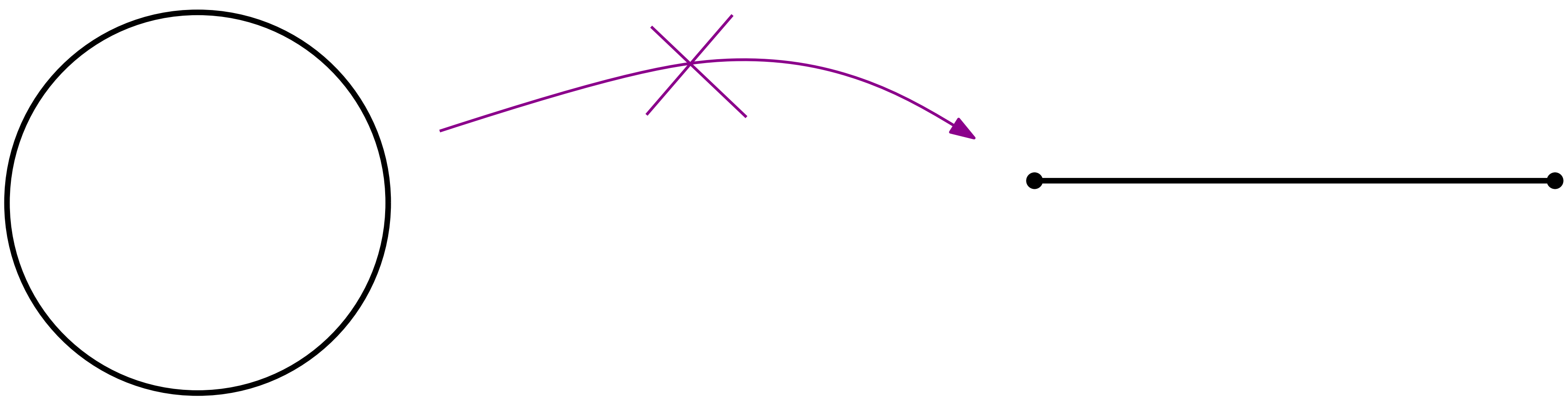
Interpretação: Os homeomorfismos permitem 'deformações contínuas'.

Definition: Sejam X e Y dois espaços topológicos, e $f\colon X \to Y$ uma função.
Dizemos que f é um **homeomorfismo** se

- f é uma bijeção,
- $f\colon X \to Y$ é contínua,
- $f^{-1}\colon Y \to X$ é contínua.

Se existe tal homeomorfismo, dizemos que os dois espaços topológicos são **homeomorfos**.

Exemplo: O círculo e o intervalo $[0, 1]$ não são homeomorfos.



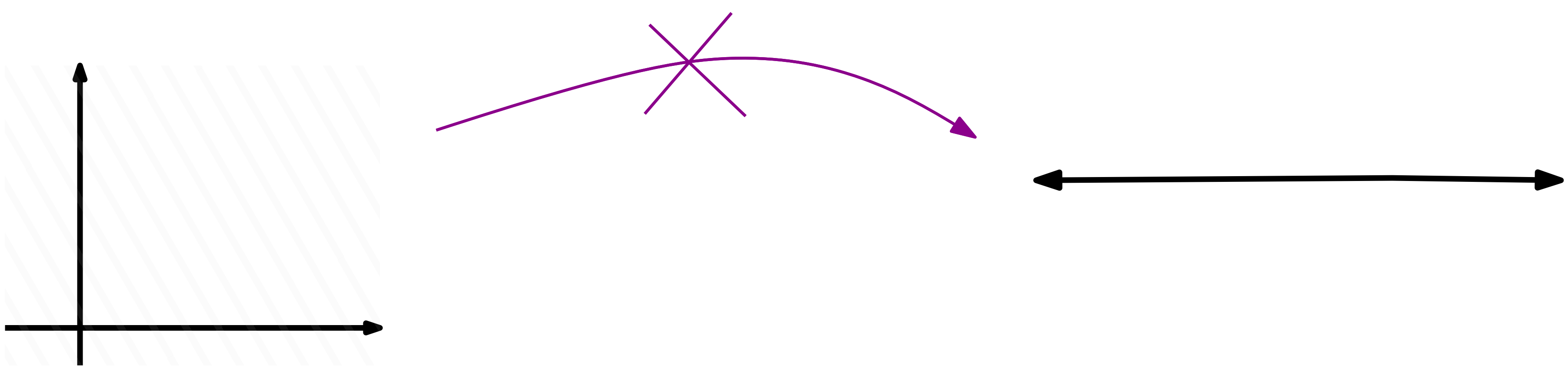
Homeomorfismos

Definition: Sejam X e Y dois espaços topológicos, e $f\colon X \to Y$ uma função. Dizemos que f é um **homeomorfismo** se

- f é uma bijeção,
- $f\colon X \to Y$ é contínua,
- $f^{-1}\colon Y \to X$ é contínua.

Se existe tal homeomorfismo, dizemos que os dois espaços topológicos são **homeomorfos**.

Exemplo (Invariância do domínio) [Brouwer, 1912] Se $n \neq m$, os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ não são homeomórficos.



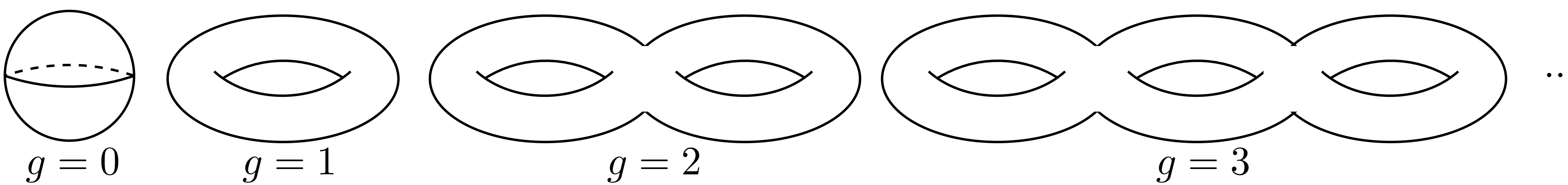
Homeomorfismos

Definition: Sejam X e Y dois espaços topológicos, e $f\colon X \to Y$ uma função. Dizemos que f é um **homeomorfismo** se

- f é uma bijeção,
- $f\colon X \to Y$ é contínua,
- $f^{-1}\colon Y \to X$ é contínua.

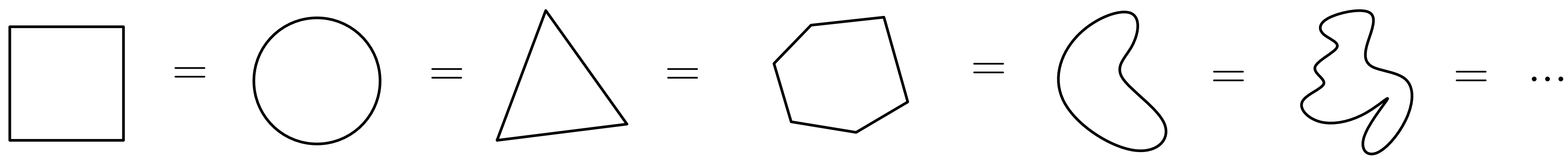
Se existe tal homeomorfismo, dizemos que os dois espaços topológicos são **homeomorfos**.

Exemplo (Classificação de superfícies): [Möbius, Jordan, von Dyck, Dehn e Heegaard, Alexander, Brahana, 1863-1921] Se $g \neq g'$, as superfícies de gênero g e g' não são homeomórficas.



Classes de homeomorfismo

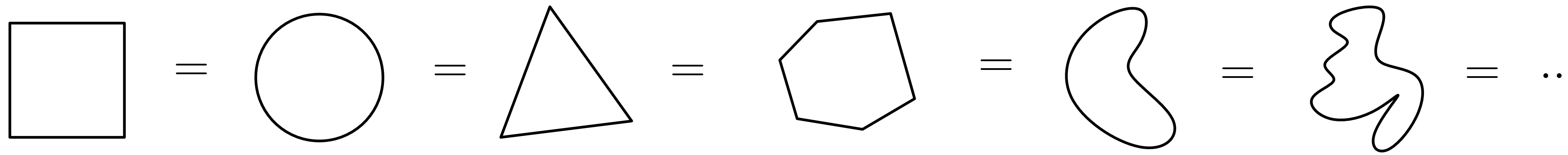
Podemos reunir espaços topológicos que são homeomorfos



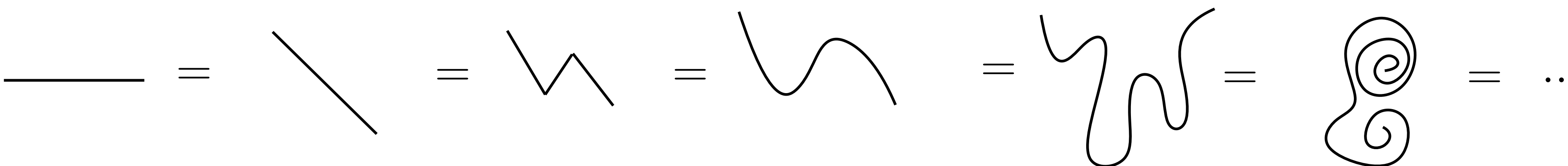
a classe dos círculos

Classes de homeomorfismo

Podemos reunir espaços topológicos que são homeomorfos



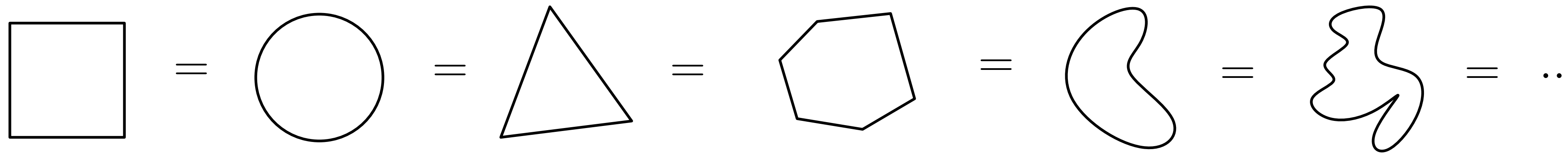
a classe dos círculos



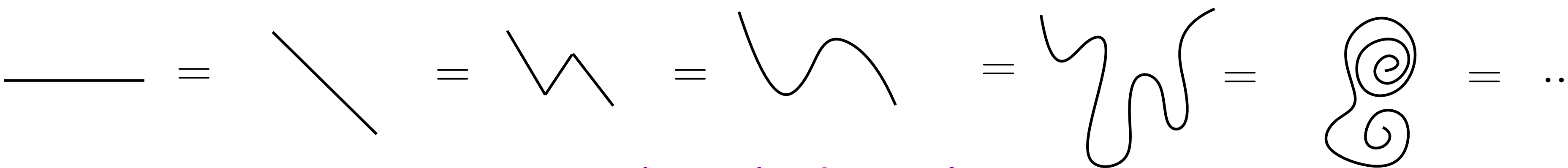
a classe dos intervalos

Classes de homeomorfismo

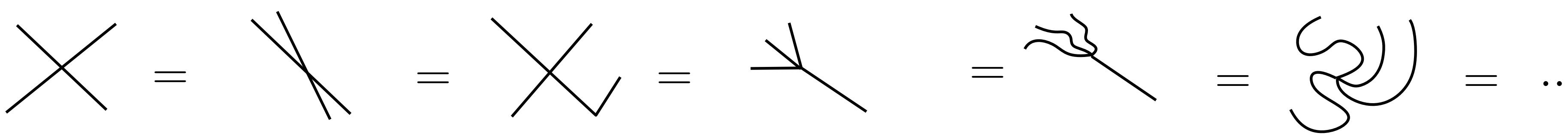
Podemos reunir espaços topológicos que são homeomorfos



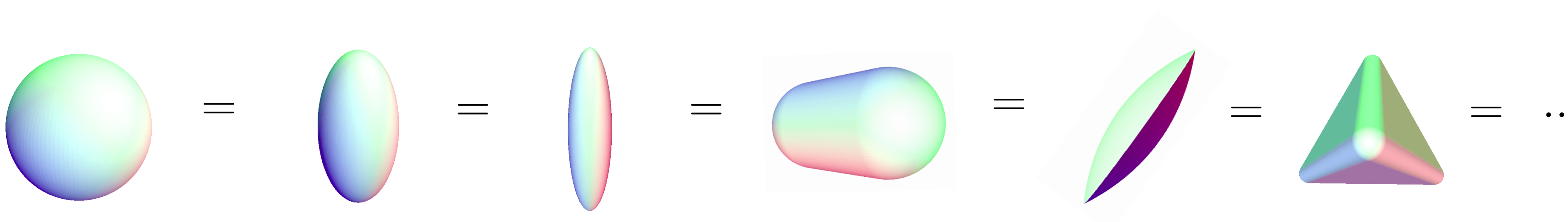
a classe dos círculos



a classe dos intervalos



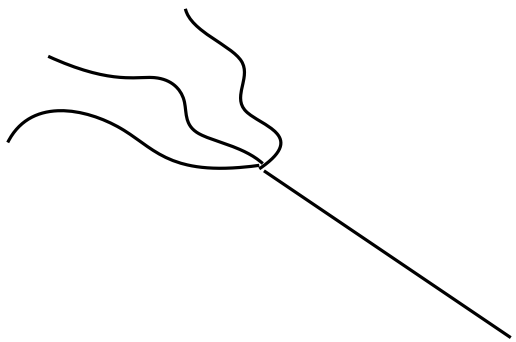
a classe das cruzes



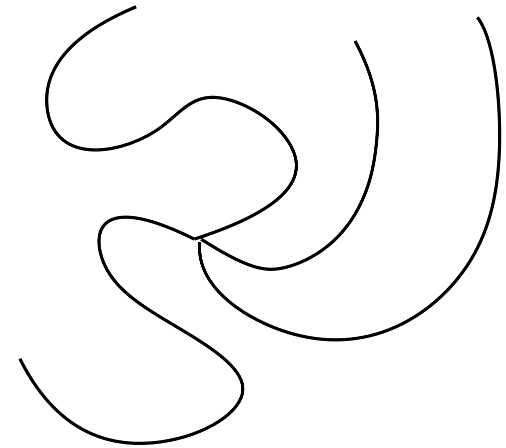
a classe das esferas

Classes de homeomorfismo

Em geral, pode ser complicado determinar se dois espaços são homeomorfos.

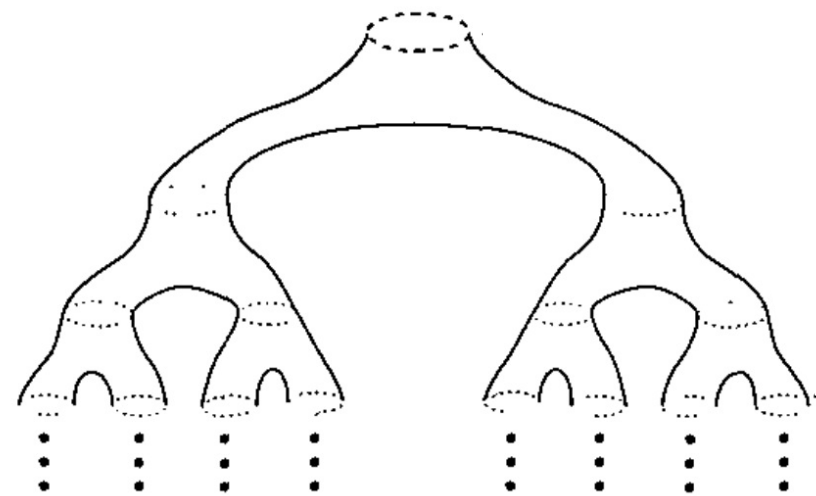


$\overset{?}{=}$



$\mathbb{R}^2 \setminus$ conjunto de Cantor

$\overset{?}{=}$



Para responder a este problema, usaremos a noção de **invariantes**.

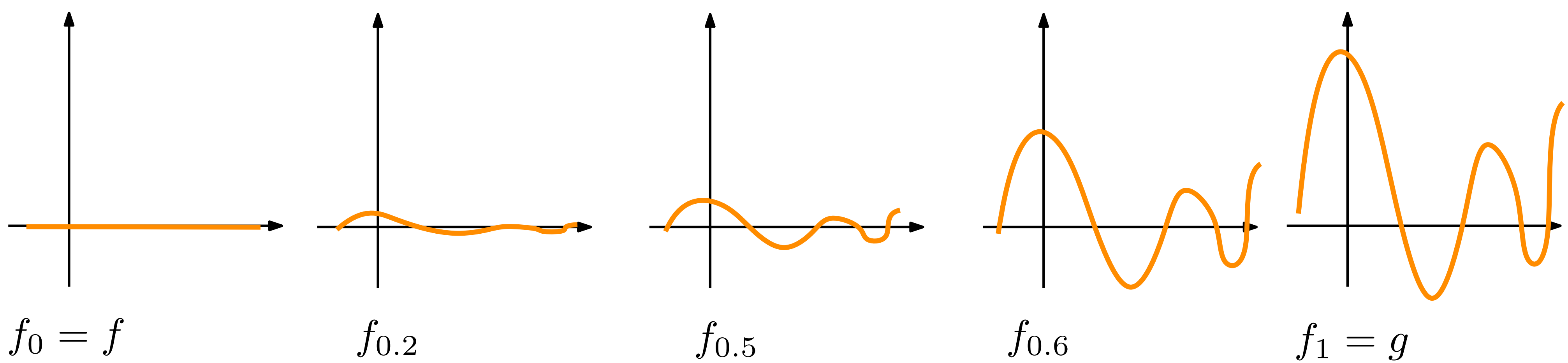
Homotopias

Definição: Sejam X, Y dois espaços topológicos, and $f, g\colon X \to Y$ duas funções contínuas. Uma **homotopia** entre f e g é uma colecção $(f_t\colon X \to Y, t \in [0,1])$ tal que:

- f_0 é igual a f,
- f_1 é igual a g,
- a função $F\colon X \times [0,1] \to Y$ definida como $F(x,t) = f_t(x)$ é contínua.

Se tal homotopia existe, dizemos que as funções f e g são **homotópicas**.

Exemplo: Homotopia entre $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Homotopias

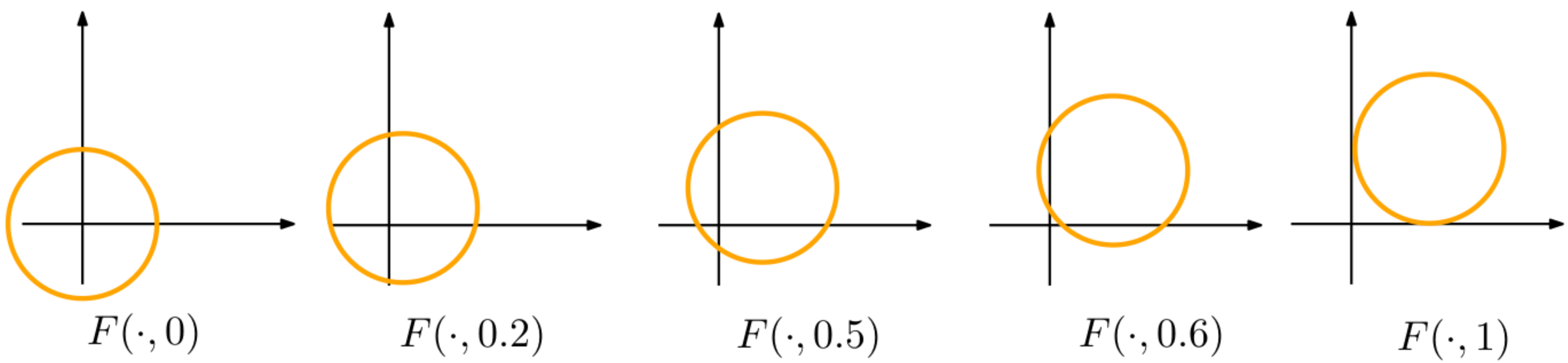
Definição: Sejam X, Y dois espaços topológicos, and $f, g\colon X \to Y$ duas funções contínuas. Uma **homotopia** entre f e g é uma colecção $(f_t\colon X \to Y, t \in [0,1])$ tal que:

- f_0 é igual a f,
- f_1 é igual a g,
- a função $F\colon X \times [0,1] \to Y$ definida como $F(x,t) = f_t(x)$ é contínua.

Se tal homotopia existe, dizemos que as funções f e g são **homotópicas**.

Exemplo: A função $F\colon (x,t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1] \mapsto (\cos(\theta) + 2t, \sin(\theta) + 2t)$ é uma homotopia entre

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} g\colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto (\cos(\theta)+2, \sin(\theta)+2) \end{aligned}$$



Homotopias

Definição: Sejam X, Y dois espaços topológicos, and $f, g\colon X \to Y$ duas funções contínuas. Uma **homotopia** entre f e g é uma colecção $(f_t\colon X \to Y, t \in [0,1])$ tal que:

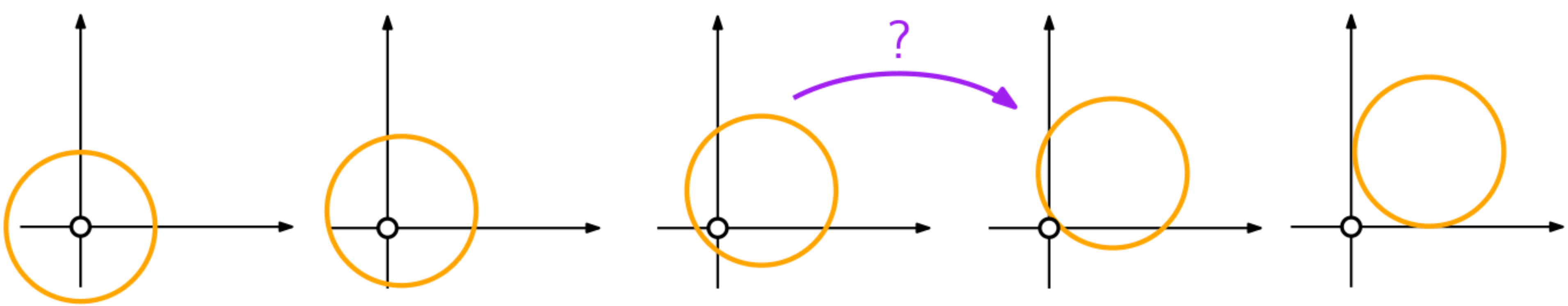
- f_0 é igual a f,
- f_1 é igual a g,
- a função $F\colon X \times [0,1] \to Y$ definida como $F(x,t) = f_t(x)$ é contínua.

Se tal homotopia existe, dizemos que as funções f e g são **homotópicas**.

não bem definida

Exemplo: A função $F\colon (x,t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1] \mapsto (\cos(\theta)+2t, \sin(\theta)+2t)$ ~~é uma homotopia~~ entre

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ \theta &\mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{aligned} \qquad \text{and} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ \theta &\mapsto (\cos(\theta)+2, \sin(\theta)+2) \end{aligned}$$



$F(\cdot,0)$ $F(\cdot,0.2)$ $F(\cdot,0.5)$ $F(\cdot,0.6)$ $F(\cdot,1)$

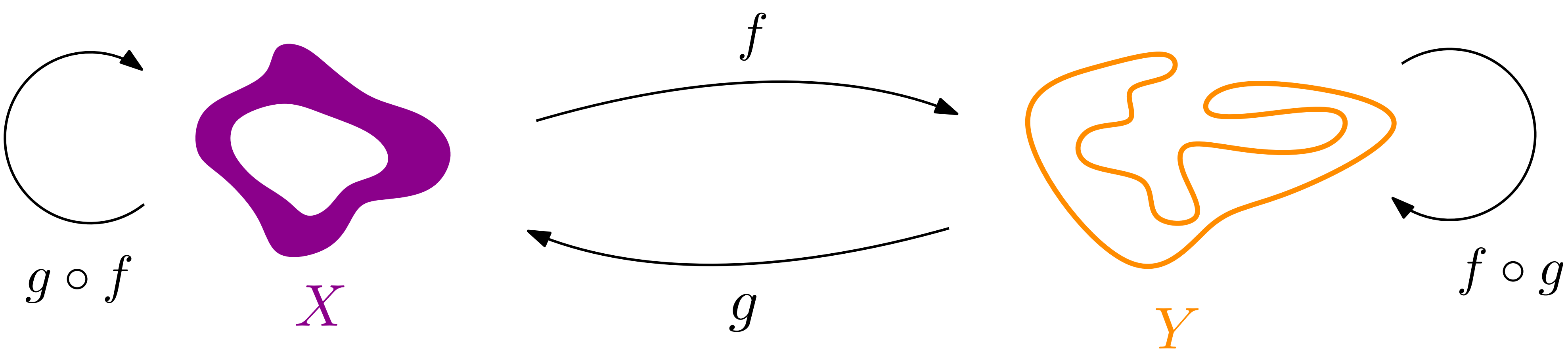
Isso não é mais verdade se removermos a origem do plano.

Equivalência de homotopia

Defintion: Sejam X, Y dois espaços topológicos. Uma **equivalência de homotopia** entre X e Y é um par de funções $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ tais que:

- $g \circ f\colon X \to X$ é homotópica à função identidade $\mathrm{id}\colon X \to X$,
- $f \circ g\colon Y \to Y$ é homotópica à função identidade $\mathrm{id}\colon Y \to Y$.

Se tal equivalência de homotopia existe, dizemos que X e Y são **homotopicamente equivalentes**.

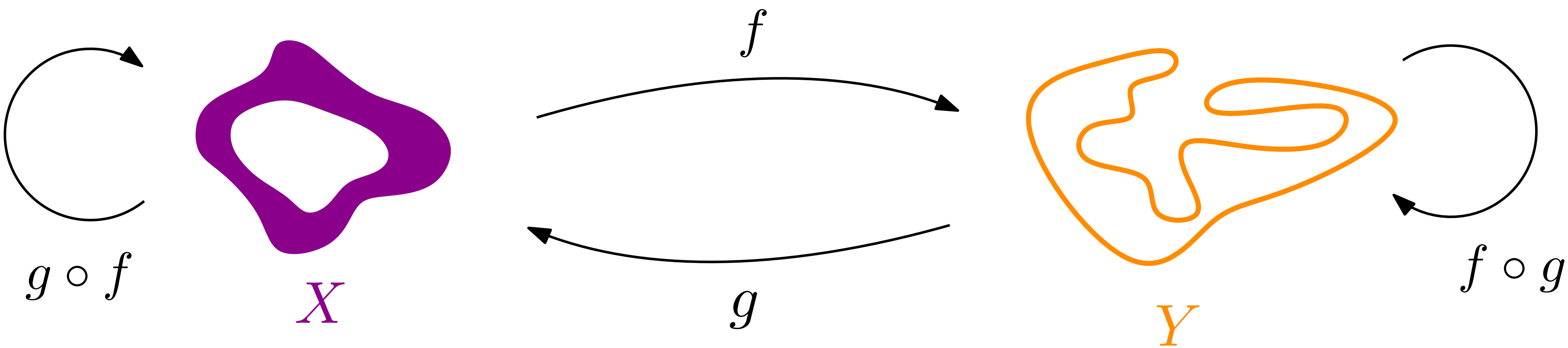


Equivalência de homotopia

Defintion: Sejam X, Y dois espaços topológicos. Uma **equivalência de homotopia** entre X e Y é um par de funções $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ tais que:

- $g \circ f\colon X \to X$ é homotópica à função identidade $\mathrm{id}\colon X \to X$,
- $f \circ g\colon Y \to Y$ é homotópica à função identidade $\mathrm{id}\colon Y \to Y$.

Se tal equivalência de homotopia existe, dizemos que X e Y são **homotopicamente equivalentes**.



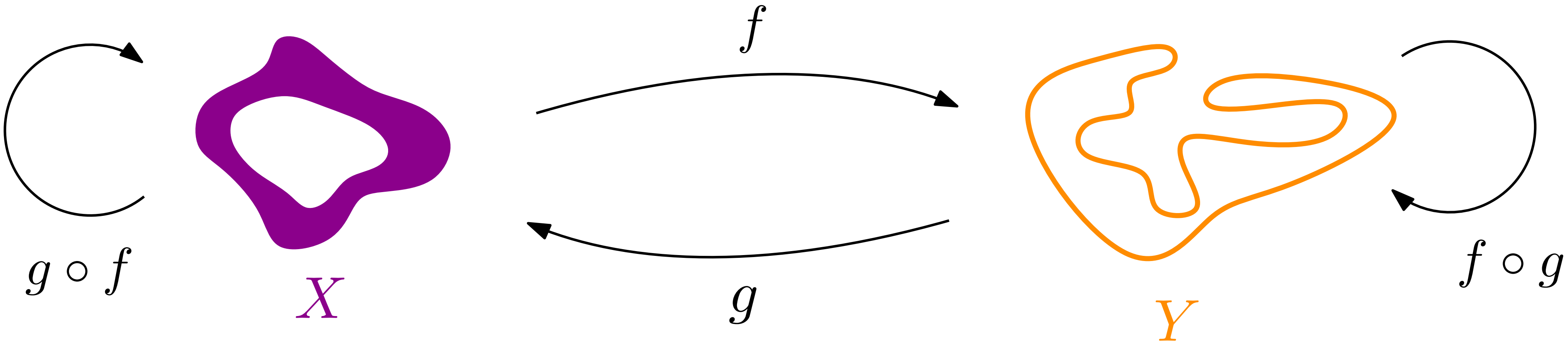
Observação: A equivalência de homotopia nada mais é o que uma formulação mais fraca de homeomorfismo.

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g = f^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

Defintion: Sejam X, Y dois espaços topológicos. Uma **equivalência de homotopia** entre X e Y é um par de funções $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ tais que:

- $g \circ f\colon X \to X$ é homotópica à função identidade $\mathrm{id}\colon X \to X$,
- $f \circ g\colon Y \to Y$ é homotópica à função identidade $\mathrm{id}\colon Y \to Y$.

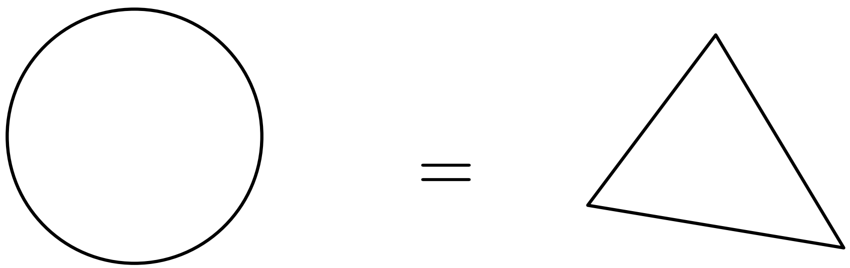
Se tal equivalência de homotopia existe, dizemos que X e Y são **homotopicamente equivalentes**.



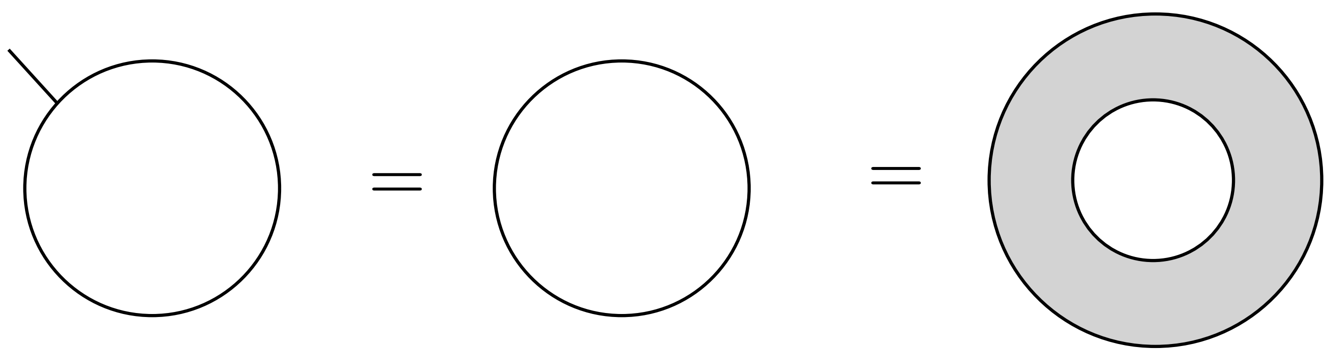
Proposição: Se dois espaços topológicos são homeomorfos, então eles são homotopicamente equivalentes.

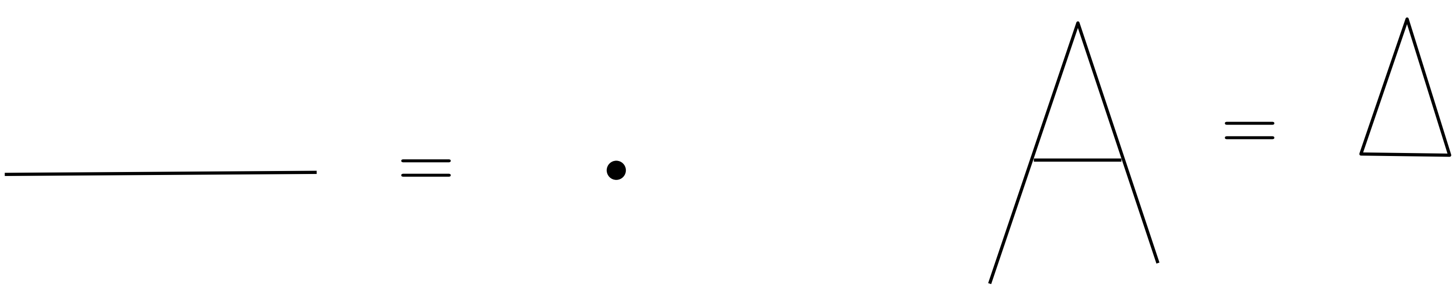
Equivalência de homotopia

A equivalência da homotopia permite **deformar** continuamente o espaço



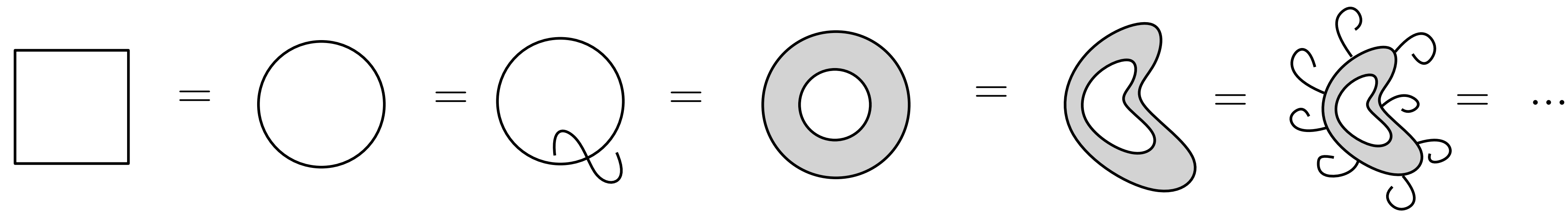
e **retrair** ele.



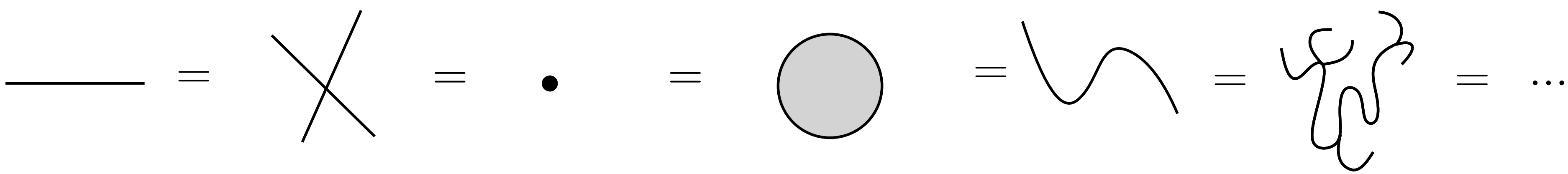


Classes de homotopia

Assim como antes, podemos classificar os espaços topológicos de acordo com esta relação, e obter **classes de equivalência de homotopia**.



a classe dos círculos



a classe dos pontos

a classe das esferas, a classe dos toros, a classe das garrafas de Klein, ...

Classes de homotopia

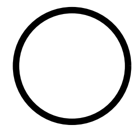
Exemplo: Classificar os seguintes espaços em classes de homotopia.

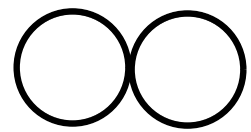
A B C D E F

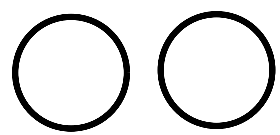
Classes de homotopia

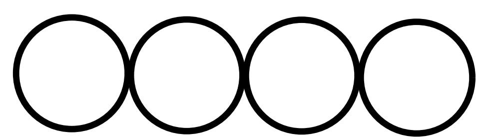
Exemplo: Classificar os seguintes espaços em classes de homotopia.

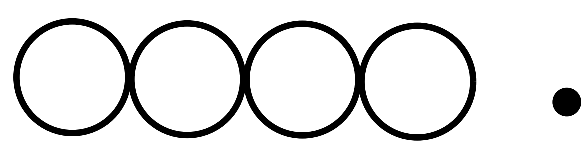
C E F $\approx$ $\bullet$

A D $\approx$ 

B $\approx$ 

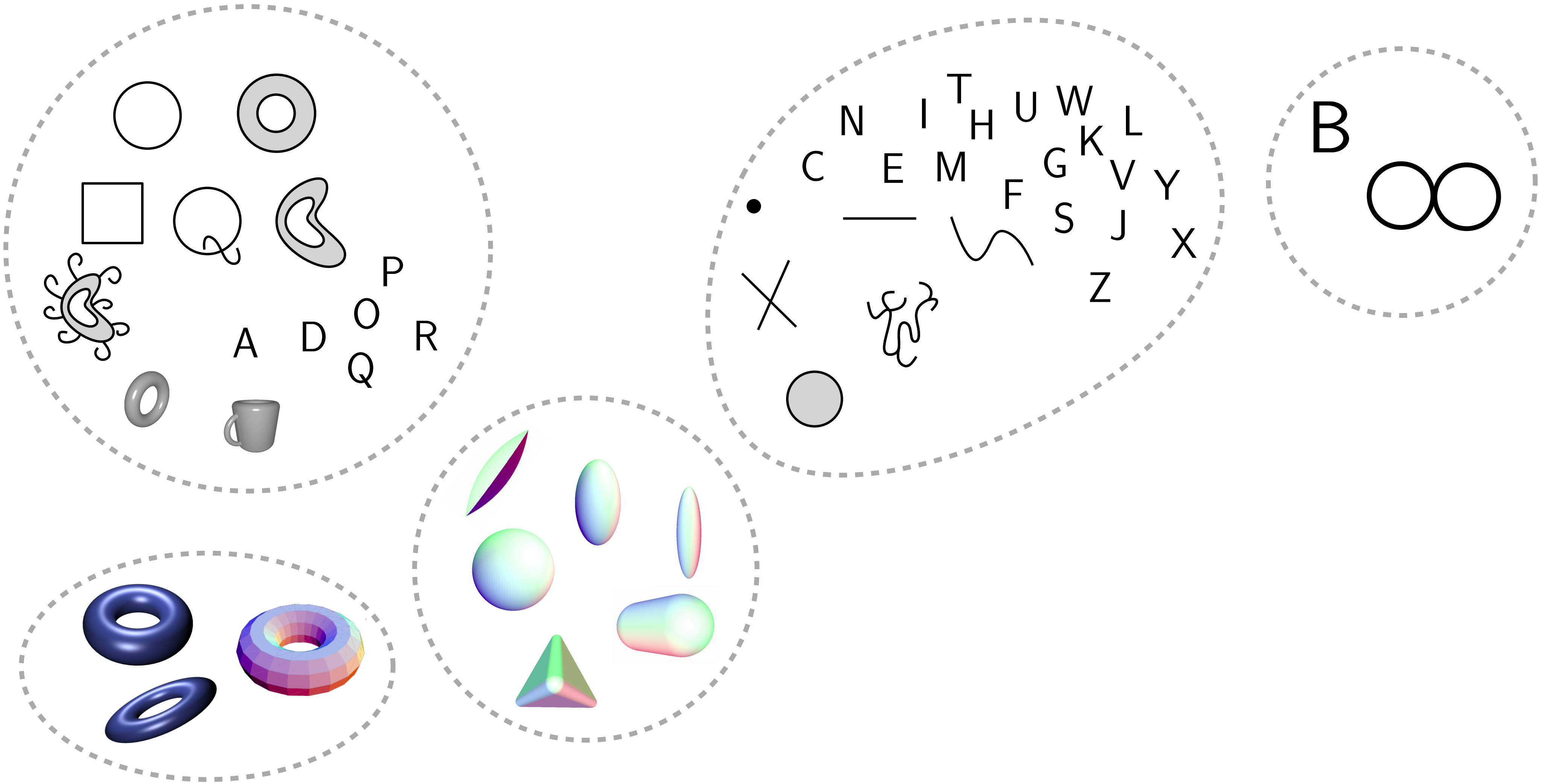
$\approx$ 

$\approx$ 

SPFC $\approx$ 

Invariantes

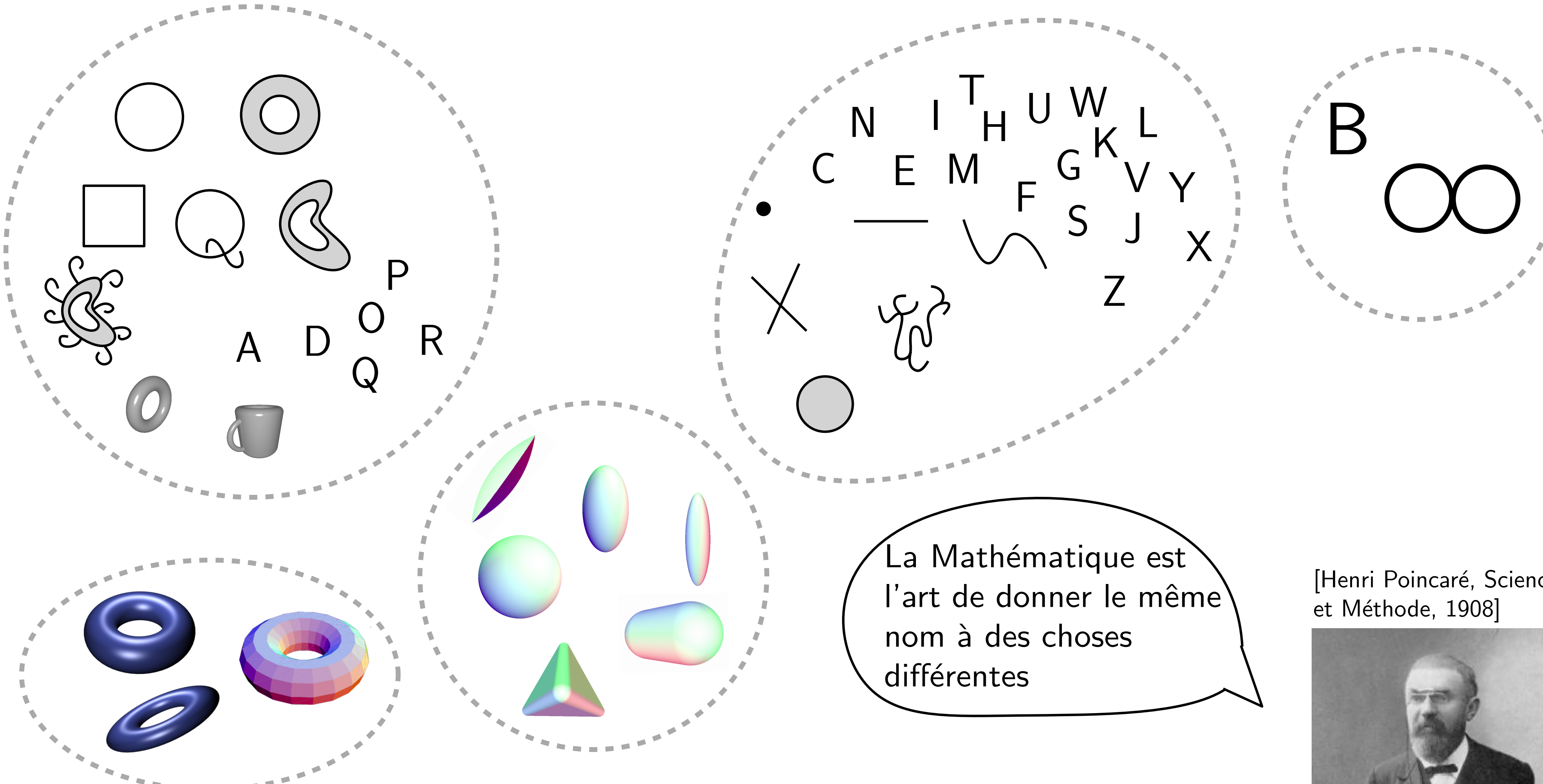
Reunimos os espaços topológicos em classes de homotopia.



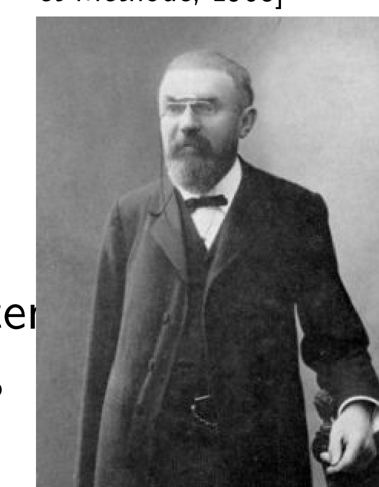
- Dado um espaço topológico X, como reconhecer em que classe ele pertence?
- Quais são as **características comuns** dos espaços numa mesma classe?

Invariantes

Reunimos os espaços topológicos em classes de homotopia.



[Henri Poincaré, Science et Méthode, 1908]



- Dado um espaço topológico X, como reconhecer em que classe ele perter
- Quais são as **características comuns** dos espaços numa mesma classe?

I - Comparar espaços topológicos

1 - Equivalência de homeomorfia

2 - Equivalência de homotopia

II - Invariantes topológicos

1 - Número de componentes conexas

2 - Característica de Euler

3 - Números de Betti

4 - Homologia (simplicial sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

III - Inferência topológica

1 - Estimação do parâmetro t

2 - Nervos

IV - Homologia persistente

1 - Módulos de persistência

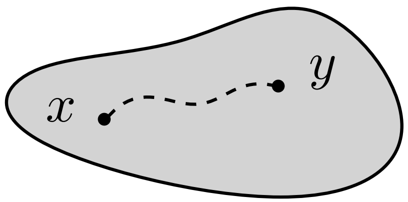
2 - Decomposição

3 - Estabilidade

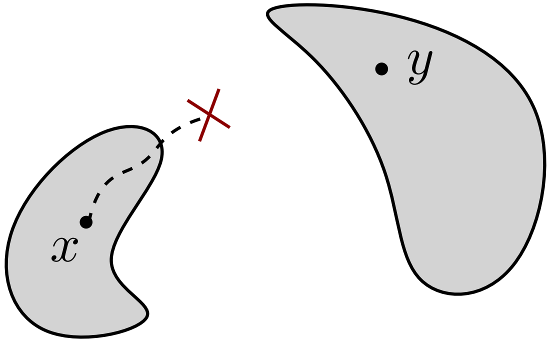
V - Aplicações

Componentes conexas

Definição: Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **conexo** (por arcos) se quaisquer dois dos seus pontos estão ligados por um caminho, ou seja, por tudos $x, y \in X$, existe uma função $f\colon [0,1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$.



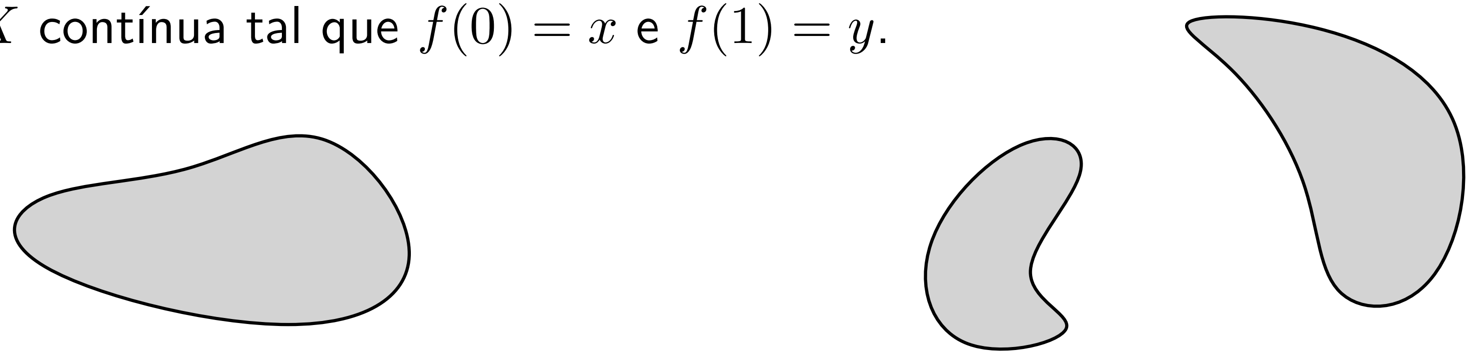
espaço conexo



espaço não conexo

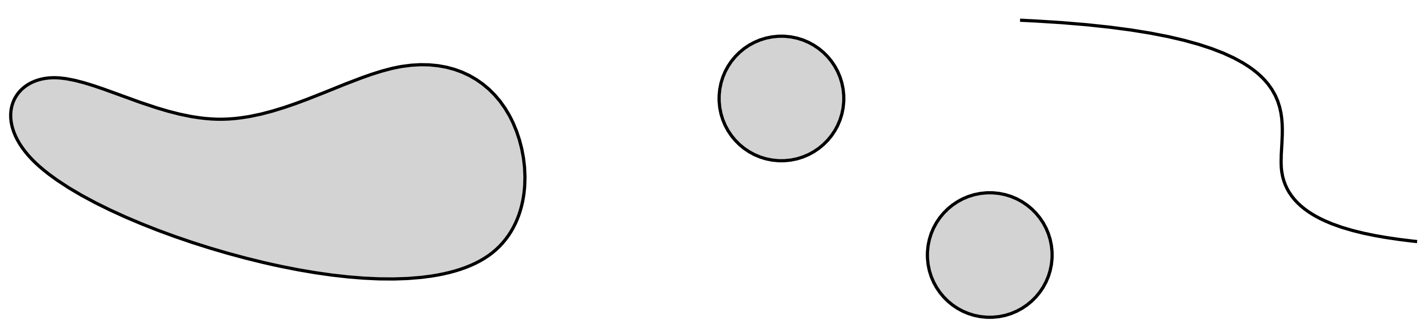
Componentes conexas

Definição: Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **conexo** (por arcos) se quaisquer dois dos seus pontos estão ligados por um caminho, ou seja, por tudos $x, y \in X$, existe uma função $f\colon [0,1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$.



espaço conexo espaço não conexo

De modo geral, todo espaço topológico X pode ser dividido em **componentes conexas**.



Propriedade de invariância - em teoria

Proposição: Se dois espaços X e Y são homotopicamente equivalentes, então eles têm o mesmo número de componentes conexas.

Consequência: Se dois espaços X e Y são homeomorfos, então eles têm o mesmo número de componentes conexas.

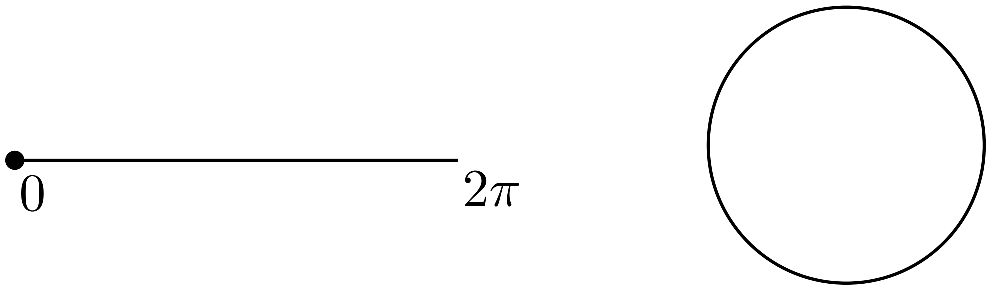
Exemplo: Os subcojuntos $[0,1]$ e $[0,1] \cup [2,3]$ do $\mathbb{R}$ eles não são homeomorfos, nem homotopicamente equivalentes.
De fato, o primeiro tem uma componente conexa, e o segundo duas.

Propriedade de invariância - em teoria

Proposição: Se dois espaços X e Y são homotopicamente equivalentes, então eles têm o mesmo número de componentes conexas.

Exemplo: O intervalo $[0, 2\pi)$ e o círculo $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.

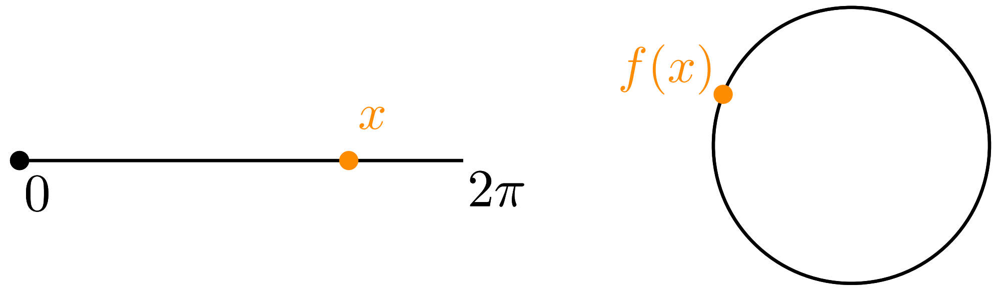
Provaremos isto por contradição. Suponhamos que sejam homeomorfos. Por definição, isto significa que existe uma função $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{S}_1$ que é contínua, invertível, e com inversa contínua.



Proposição: Se dois espaços X e Y são homotopicamente equivalentes, então eles têm o mesmo número de componentes conexas.

Exemplo: O intervalo $[0, 2\pi)$ e o círculo $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.

Provaremos isto por contradição. Suponhamos que sejam homeomorfos. Por definição, isto significa que existe uma função $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{S}_1$ que é contínua, invertível, e com inversa contínua.



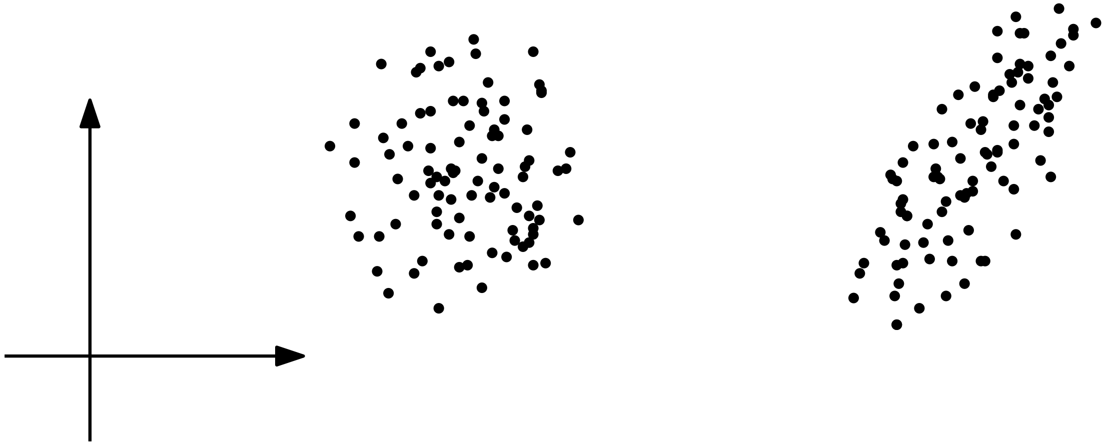
Seja $x \in [0, 2\pi)$ tal que $x \neq 0$. Considere os subconjuntos $[0, 2\pi) \setminus \{x\} \subset [0, 2\pi)$ e $\mathbb{S}_1 \setminus \{f(x)\} \subset \mathbb{S}_1$, e a função induzida

$$g\colon [0, 2\pi) \setminus \{x\} \to \mathbb{S}_1 \setminus \{f(x)\}.$$

A função g é um homeomorfismo.

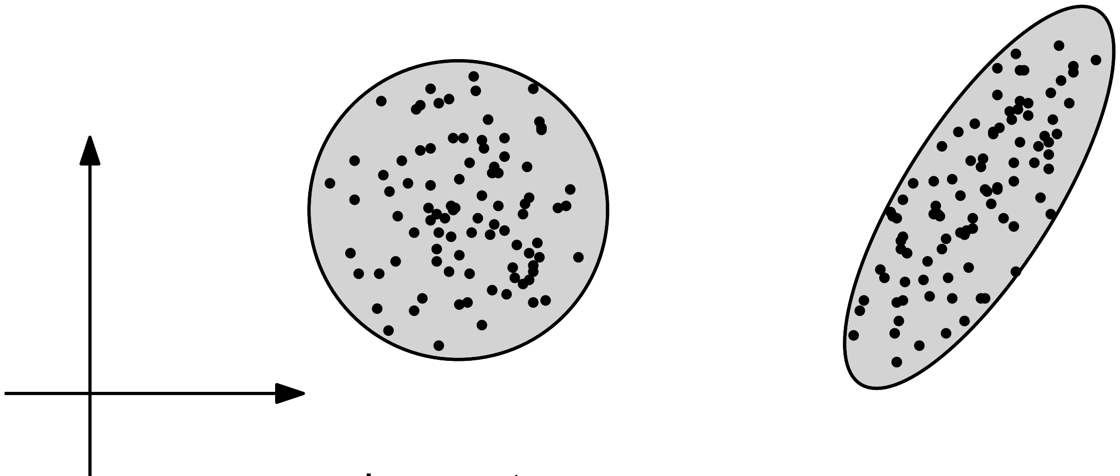
Porém, $[0, 2\pi) \setminus \{x\}$ tem duas componentes conexas, e $\mathbb{S}_1 \setminus \{f(x)\}$ apenas uma. Isso é um absurdo.

Nas aplicações, encontrar componentes conexas corresponde a uma tarefa **classificação**.

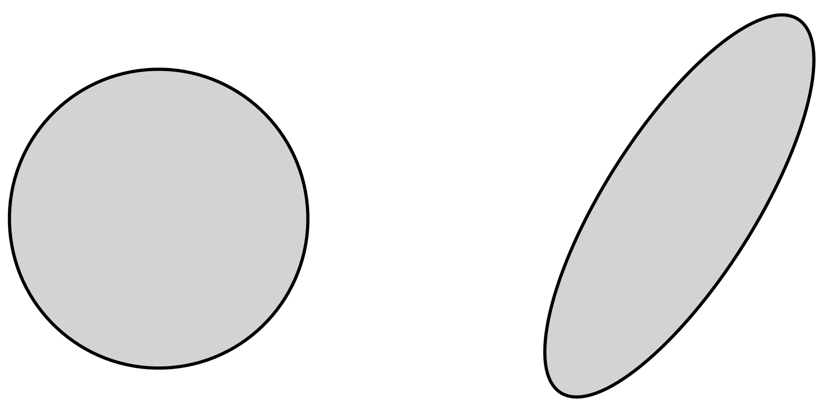


Propriedade de invariância - aplicações

Nas aplicações, encontrar componentes conexas corresponde a uma tarefa **classificação**.



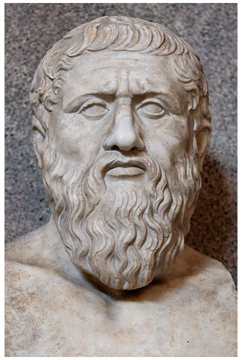
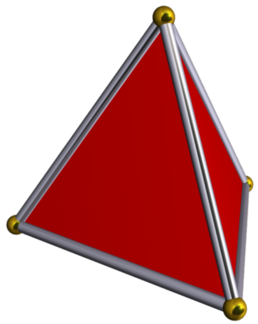
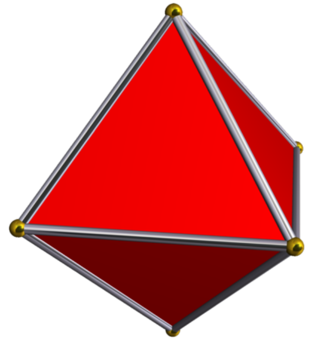
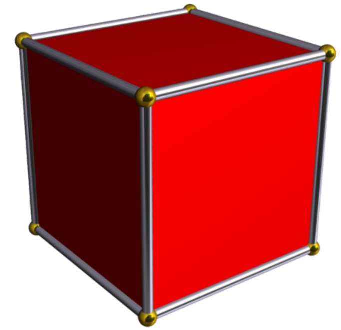
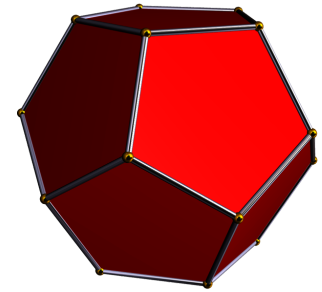
cluster 1 cluster 2



componente conexa 1 componente conexa 2

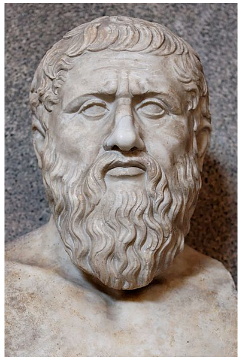
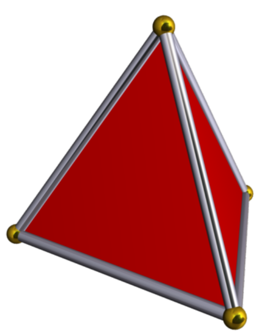
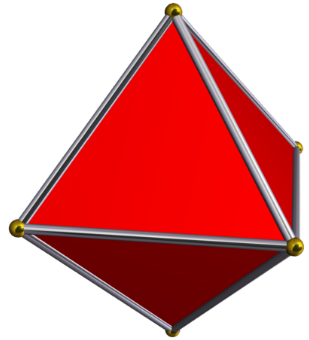
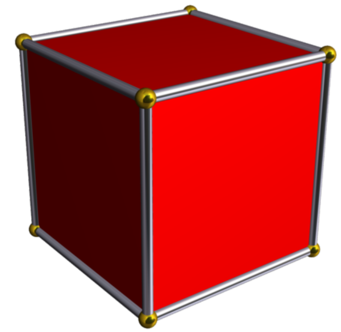
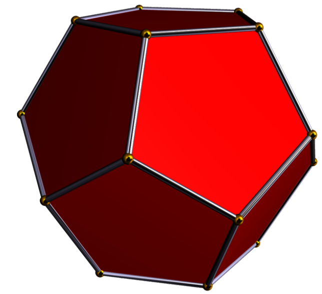
Podemos pensar nestes conjuntos como um **espaço topológico subjacente**, sobre os quais os pontos são amostrados.

Característica de Euler para poliedros


número de faces	4	8	6	12	20
número de arestas	6	12	12	30	30
número de vértices	4	6	8	20	12

Característica de Euler para poliedros

					
número de faces	4	8	6	12	20
número de arestas	6	12	12	30	30
número de vértices	4	6	8	20	12
χ	2	2	2	2	2

Proposição [Euler, 1758]: Em qualquer poliedro convexo, temos
número de faces $-$ número de arestas $+$ número de vértices $= 2$

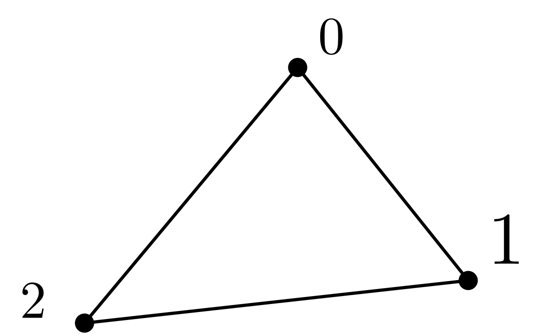
Definição: Seja V um conjunto (chamado o conjunto de *vértices*). Um **complexo simplicial** é uma coleção K de subconjuntos de V (chamados os *simplexos*) tais que, por todo $\sigma \in K$ e todo $\tau \subset \sigma$, temos $\tau \in K$.

A **dimensão** de um simplexo $\sigma \in K$ é definida como $|\sigma| - 1$.

Exemplo: Sejam $V = \{0, 1, 2\}$ e

$$K = \{[0], [1], [2], [0, 1], [1, 2], [0, 2]\}.$$

É um complexo simplicial.



Contém três simplexos de dimensão 0 ($[0]$, $[1]$ e $[2]$) e três simplexos de dimensão 1 ($[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[0, 2]$).

Característica de Euler para complexos

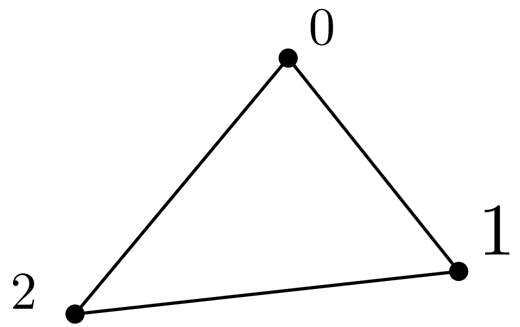
Definição: Seja V um conjunto (chamado o conjunto de *vértices*). Um **complexo simplicial** é uma coleção K de subconjuntos de V (chamados os *simplexos*) tais que, por todo $\sigma \in K$ e todo $\tau \subset \sigma$, temos $\tau \in K$.

A **dimensão** de um simplexo $\sigma \in K$ é definida como $|\sigma| - 1$.

Exemplo: Sejam $V = \{0, 1, 2\}$ e

$$K = \{[0], [1], [2], [0, 1], [1, 2], [0, 2]\}.$$

É um complexo simplicial.



(é um círculo)

Contém três simplexos de dimensão 0 ($[0]$, $[1]$ e $[2]$) e três simplexos de dimensão 1 ($[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[0, 2]$).

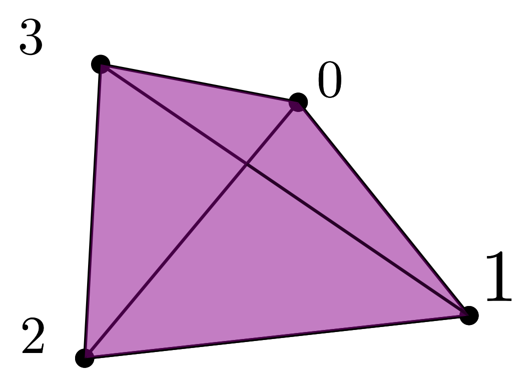
Definição: Seja V um conjunto (chamado o conjunto de *vértices*). Um **complexo simplicial** é uma coleção K de subconjuntos de V (chamados os *simplexos*) tais que, por todo $\sigma \in K$ e todo $\tau \subset \sigma$, temos $\tau \in K$.

A **dimensão** de um simplexo $\sigma \in K$ é definida como $|\sigma| - 1$.

Exemplo: Sejam $V = \{0, 1, 2, 3\}$ e

$K = \{[0], [1], [2], [3], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 0], [0, 2], [1, 3], [0, 1, 2], [0, 1, 3], [0, 2, 3], [1, 2, 3]\}$

É um complexo simplicial.



Contém quatro simplexos de dimensão 0 ($[0]$, $[1]$, $[2]$ e $[3]$), seis simplexos de dimensão 1 ($[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 0]$,$[0, 2]$ e $[1, 3]$) e quatro simplexos de dimensão 2 ($[0, 1, 2]$, $[0, 1, 3]$, $[0, 2, 3]$ e $[1, 2, 3]$).

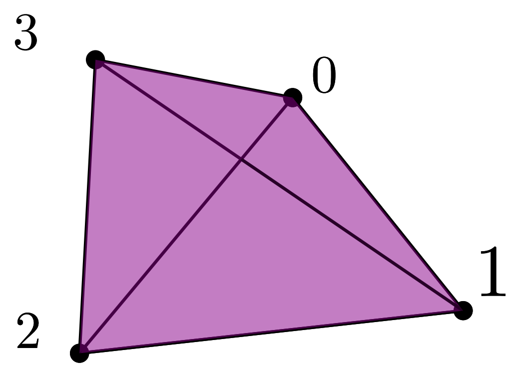
Definição: Seja V um conjunto (chamado o conjunto de *vértices*). Um **complexo simplicial** é uma coleção K de subconjuntos de V (chamados os *simplexos*) tais que, por todo $\sigma \in K$ e todo $\tau \subset \sigma$, temos $\tau \in K$.

A **dimensão** de um simplexo $\sigma \in K$ é definida como $|\sigma| - 1$.

Exemplo: Sejam $V = \{0, 1, 2, 3\}$ e

$K = \{[0], [1], [2], [3], [0,1], [1,2], [2,3], [3,0], [0,2], [1,3], [0,1,2], [0,1,3], [0,2,3], [1,2,3]\}$

É um complexo simplicial.



(é uma esfera)

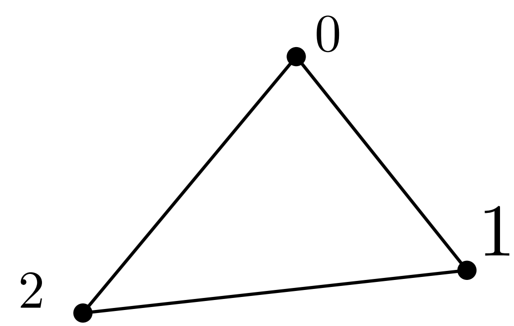
Contém quatro simplexos de dimensão 0 ($[0]$, $[1]$, $[2]$ e $[3]$), seis simplexos de dimensão 1 ($[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,0]$,$[0,2]$ e $[1,3]$) e quatro simplexos de dimensão 2 ($[0,1,2]$, $[0,1,3]$, $[0,2,3]$ e $[1,2,3]$).

Definição: Seja K um complexo simplicial de dimenção n. A sua *característica de Euler* é o número inteiro

$$\chi(K) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \cdot (\text{número de simplexos de dimensão } i).$$

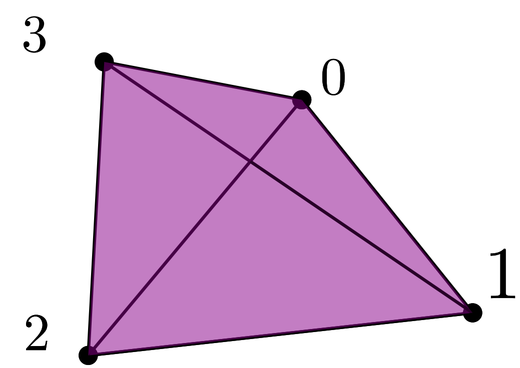
Exemple: O complexo simplicial $K = \{[0], [1], [2], [0,1], [1,2], [2,0]\}$ tem característica de Euler

$$\chi(K) = 3 - 3 = 0$$



Exemplo: O complexo simplicial
$K = \{[0], [1], [2], [3], [0,1], [1,2], [2,3], [3,0], [0,2], [1,3], [0,1,2], [0,1,3], [0,2,3], [1,2,3]\}$
tem característica de Euler

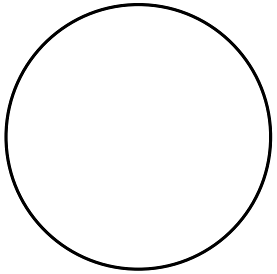
$$\chi(K) = 4 - 6 + 4 = 2$$



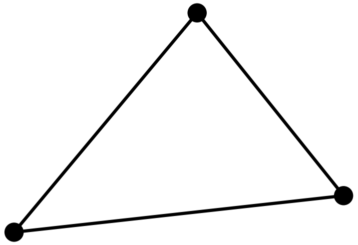
Os complexos simpliciais também são espaços topológicos.

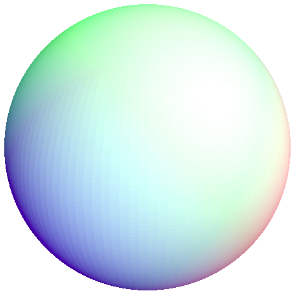
Definição: Uma **triangulação** de um espaço topológico X é um complexo simplicial K homeomorfo a X.

Definição: Seja X um espaço topológico. A sua **característica de Euler** é definida como a característica de Euler de uma de suas triangulações.

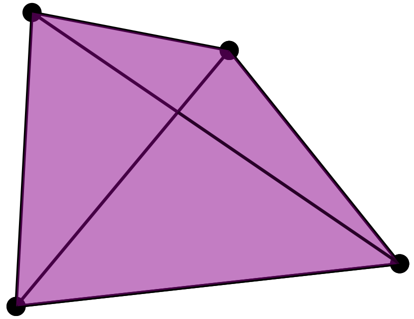


$\chi(\mathbb{S}_1) = 0$





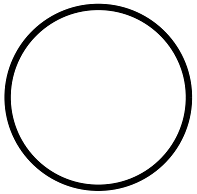
$\chi(\mathbb{S}_2) = 2$



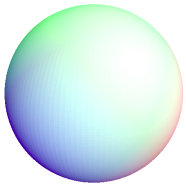
Proposição: Se dois espaços X e Y são homotopicamente equivalentes, então $\chi(X) = \chi(Y)$.

Portanto, a característica de Euler é um **invariante** de classes de equivalência de homotopia.
Podemos usar esta informação para provar que dois espaços não são homotopicamente equivalentes.

Exemplo: O círculo tem característica de Euler 0, e a esfera 2.
Portanto, eles não são equivalentes.



$\chi(\mathbb{S}_1) = 0$



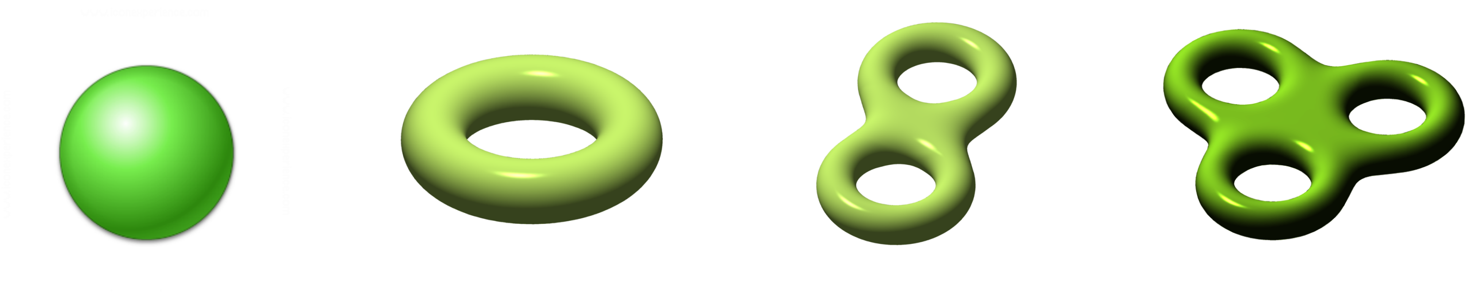
$\chi(\mathbb{S}_2) = 2$

Propriedade de invariância - na teoria

Proposição: Se dois espaços X e Y são homotopicamente equivalentes, então $\chi(X) = \chi(Y)$.

Portanto, a característica de Euler é um **invariante** de classes de equivalência de homotopia.
Podemos usar esta informação para provar que dois espaços não são homotopicamente equivalentes.

Exemplo: Classificação das superfícies.
As classes de homeomorfismo das superfícies *conexes e compactas* são classificadas por sua característica de Euler.

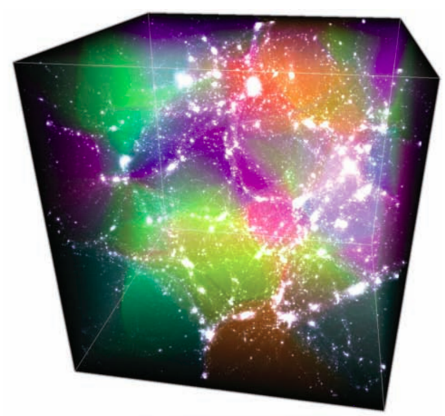


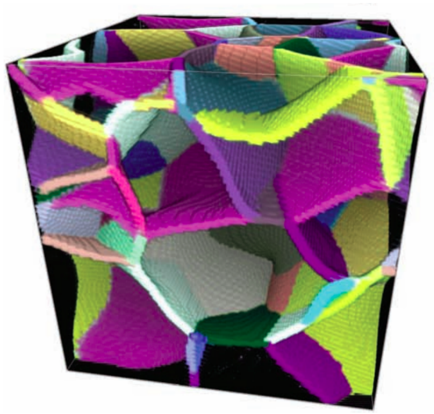
$\cdots$

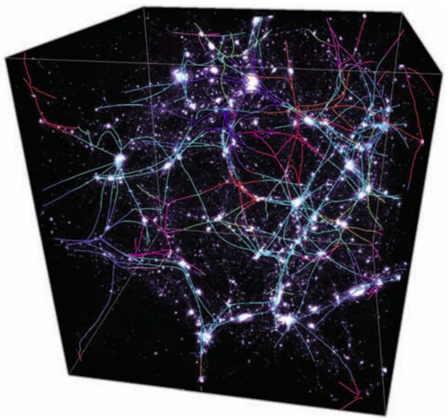
χ 2 0 -2 -4 $2 - 2 \times$ gênero

Propriedade de invariância - aplicações

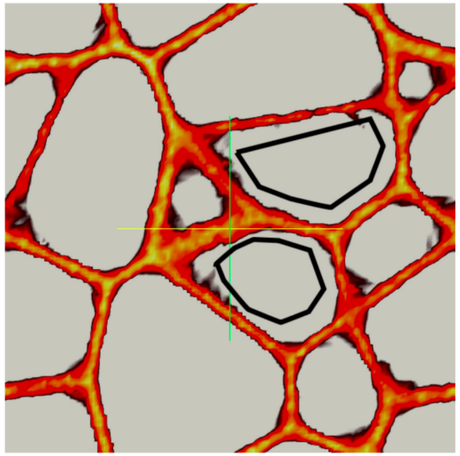
[T. Sousbie, The persistent cosmic web and its filamentary structure, 2011]







[P. Pranav, H. Edelsbrunner, R. de Weygaert, G. Vegter, M. Kerber, B. Jones and M. Wintraecken, The topology of the cosmic web in terms of persistent Betti numbers, 2016]



A característica Euler 'conta' o número de buracos

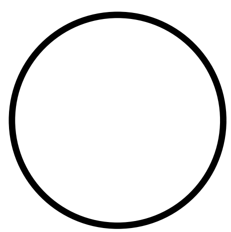
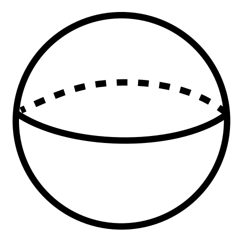
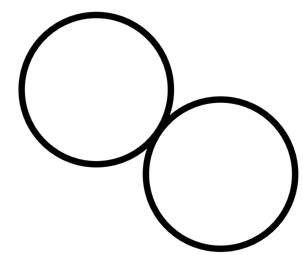
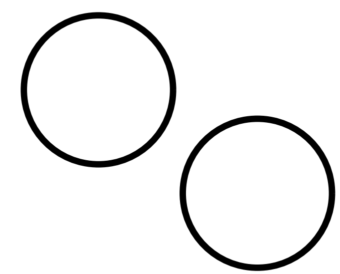
Números de Betti

Para todo espaço topológico X, podemos definir uma sequência de números inteiros

$$\beta_0(X), \quad \beta_1(X), \quad \beta_2(X), \quad \beta_3(X), \quad \dots$$

chamados de **números de Betti**.

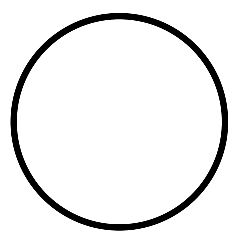
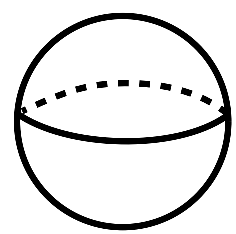
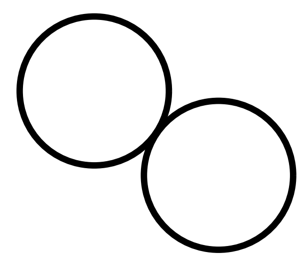
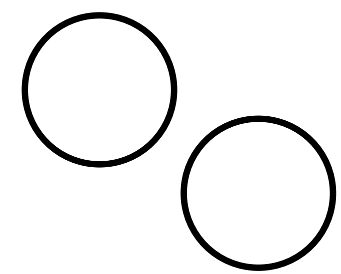
Construção dos números Betti: baseada na teoria da homologia.

X					
$\beta_0(X)$	1	1	1	1	2
$\beta_1(X)$	0	1	0	2	2
$\beta_2(X)$	0	0	1	0	0

Números de Betti

Interpretação:

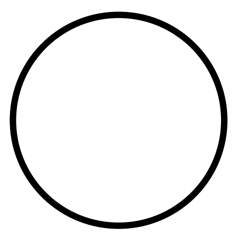
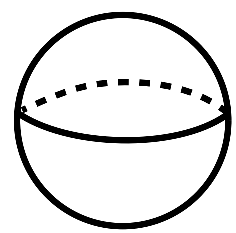
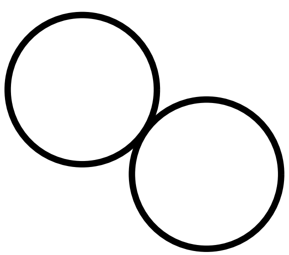
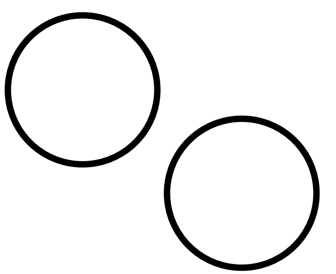
- $\beta_0(X)$ é o número de componentes conexas de X
- $\beta_1(X)$ é o número de 'buracos' em X
- $\beta_2(X)$ é o número de 'vazios' em X
- $\ldots$

X					
$\beta_0(X)$	1	1	1	1	2
$\beta_1(X)$	0	1	0	2	2
$\beta_2(X)$	0	0	1	0	0

Números de Betti

Interpretação:

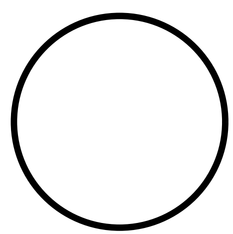
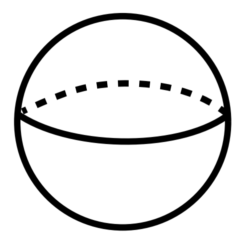
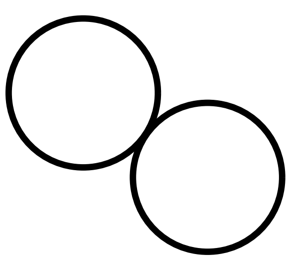
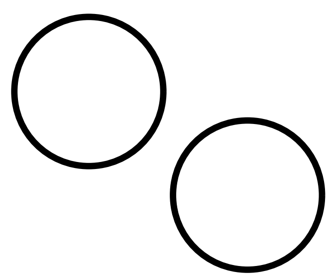
- $\boxed{\beta_0(X) \text{ é o número de componentes conexas de } X}$
- $\beta_1(X)$ é o número de 'buracos' em X
- $\beta_2(X)$ é o número de 'vazios' em X
- $\ldots$

X					
$\beta_0(X)$	1	1	1	1	2
$\beta_1(X)$	0	1	0	2	2
$\beta_2(X)$	0	0	1	0	0

Números de Betti

Interpretação:

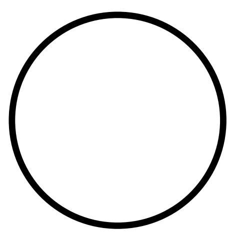
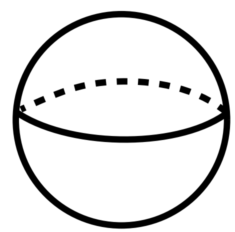
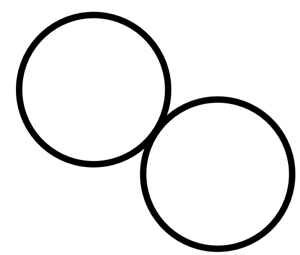
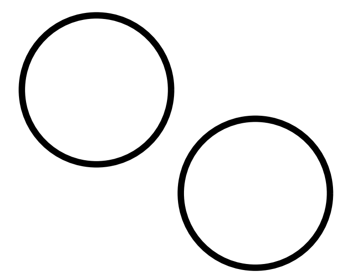
- $\beta_0(X)$ é o número de componentes conexas de X
- $\boxed{\beta_1(X) \text{ é o número de 'buracos' em } X}$
- $\beta_2(X)$ é o número de 'vazios' em X
- $\ldots$

X					
$\beta_0(X)$	1	1	1	1	2
$\beta_1(X)$	0	1	0	2	2
$\beta_2(X)$	0	0	1	0	0

Números de Betti

Interpretação:

- $\beta_0(X)$ é o número de componentes conexas de X
- $\beta_1(X)$ é o número de 'buracos' em X
- $\boxed{\beta_2(X) \text{ é o número de 'vazios' em } X}$
- $\ldots$

X					
$\beta_0(X)$	1	1	1	1	2
$\beta_1(X)$	0	1	0	2	2
$\beta_2(X)$	0	0	1	0	0

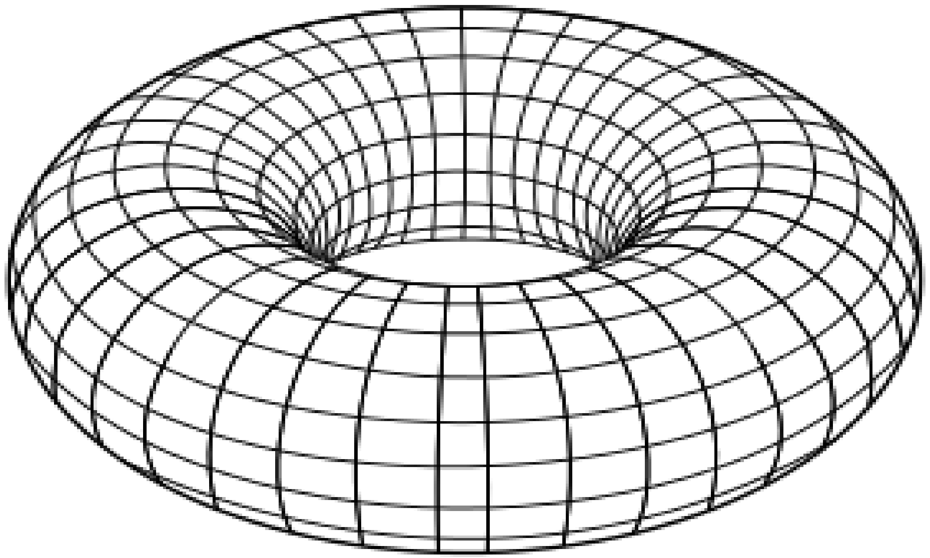
Números de Betti

Interpretação:

- $\beta_0(X)$ é o número de componentes conexas de X
- $\beta_1(X)$ é o número de 'buracos' em X
- $\beta_2(X)$ é o número de 'vazios' em X
- $\dots$

Exemplo: Números de Betti do toro:

$$\beta_0(X) = 1, \quad \beta_1(X) = 2, \quad \beta_2(X) = 1, \quad \beta_3(X) = 0, \quad \dots$$



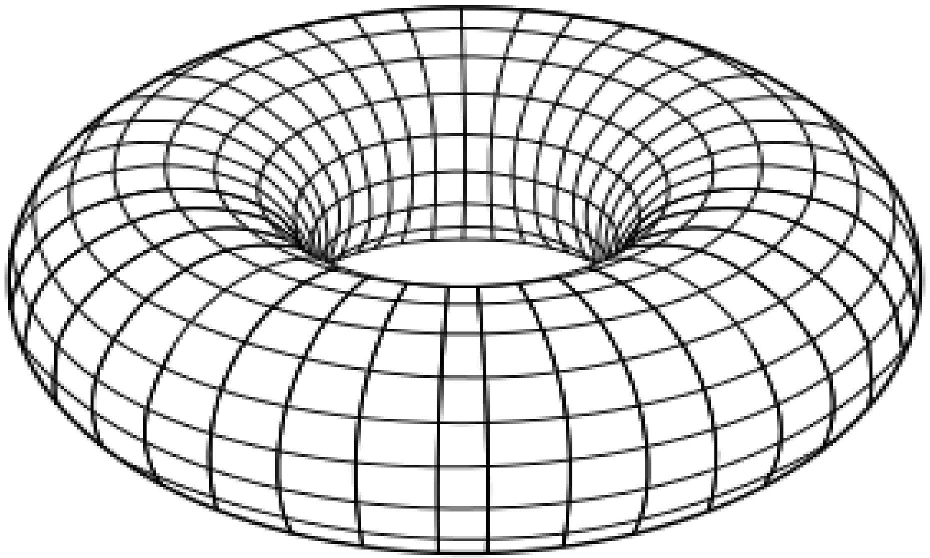
Números de Betti

Interpretação:

- $\beta_0(X)$ é o número de componentes conexas de X
- $\beta_1(X)$ é o número de 'buracos' em X
- $\beta_2(X)$ é o número de 'vazios' em X
- $\dots$

Exemplo: Números de Betti do toro:

$$\boxed{\beta_0(X) = 1,} \quad \beta_1(X) = 2, \quad \beta_2(X) = 1, \quad \beta_3(X) = 0, \quad \dots$$



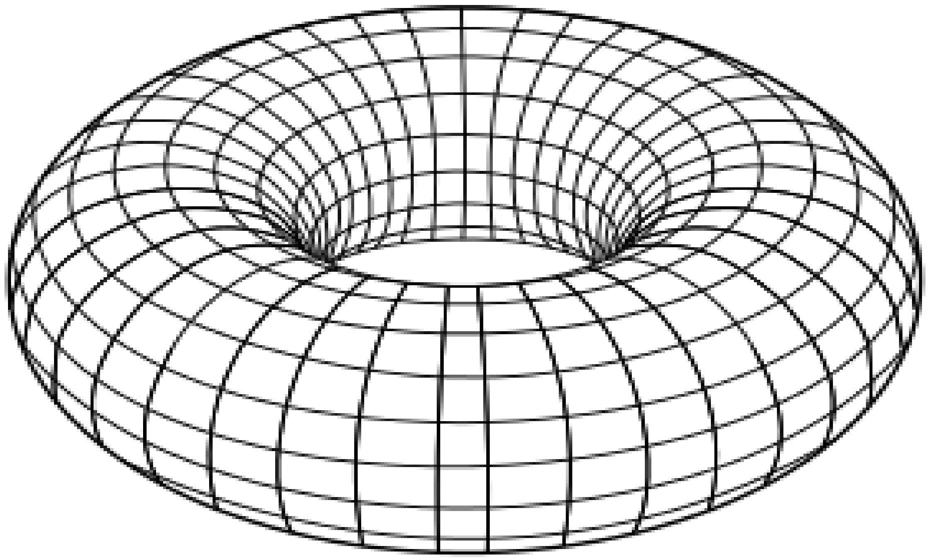
Números de Betti

Interpretação:

- $\beta_0(X)$ é o número de componentes conexas de X
- $\beta_1(X)$ é o número de 'buracos' em X
- $\beta_2(X)$ é o número de 'vazios' em X
- $\dots$

Exemplo: Números de Betti do toro:

$$\beta_0(X) = 1, \quad \beta_1(X) = 2, \quad \boxed{\beta_2(X) = 1,} \quad \beta_3(X) = 0, \quad \dots$$



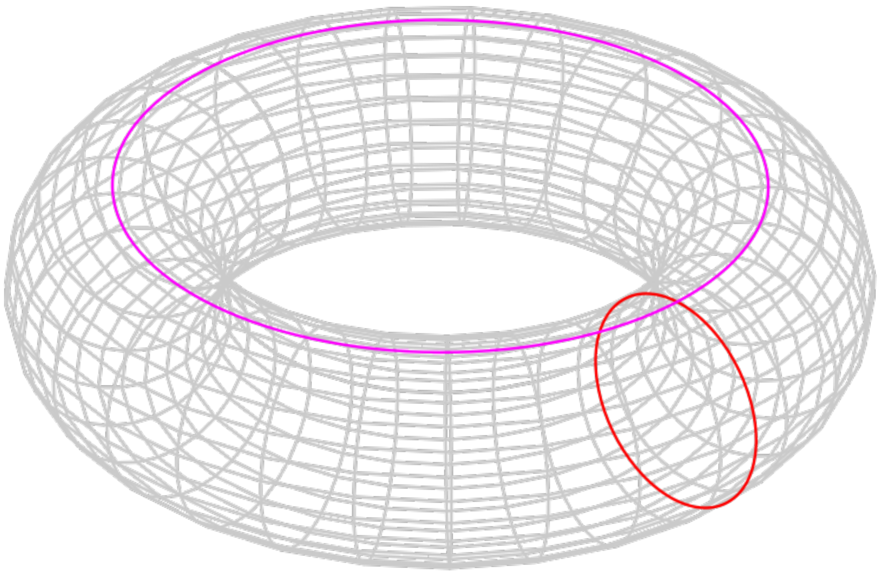
Números de Betti

Interpretação:

- $\beta_0(X)$ é o número de componentes conexas de X
- $\beta_1(X)$ é o número de 'buracos' em X
- $\beta_2(X)$ é o número de 'vazios' em X
- $\ldots$

Exemplo: Números de Betti do toro:

$$\beta_0(X) = 1, \quad \boxed{\beta_1(X) = 2,} \quad \beta_2(X) = 1, \quad \beta_3(X) = 0, \quad \ldots$$



Propriedade de invariância - na teoria

Proposição: Se dois espaços X e Y são homotopicamente equivalentes, então eles têm os mesmos números de Betti.

Consequentemente, dois espaços com números de Betti diferentes não podem ser equivalentes à homotopia.

Exemplo: A esfera $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tem números de Betti

$$\begin{aligned} \beta_i(X) &= 1 \quad \text{if } \ i = 0 \text{ or } n, \\ \beta_i(X) &= 0 \quad \text{else.} \end{aligned}$$

Portanto, se $n \neq m$, então $\mathbb{S}_n$ e $\mathbb{S}_m$ não são equivalentes.

Proposição: Se dois espaços X e Y são homotopicamente equivalentes, então eles têm os mesmos números de Betti.

Consequentemente, dois espaços com números de Betti diferentes não podem ser equivalentes à homotopia.

Exemplo: Invariância de domínio de Brouwer.

Vamos mostrar que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, com $n \neq m$, não são homeomorfos.

Seja $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ um homeomorfismo.
Escolha qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e considera a restrição

$$h\colon \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{h(x)\}$$

Ainda é um homeomorfismo.

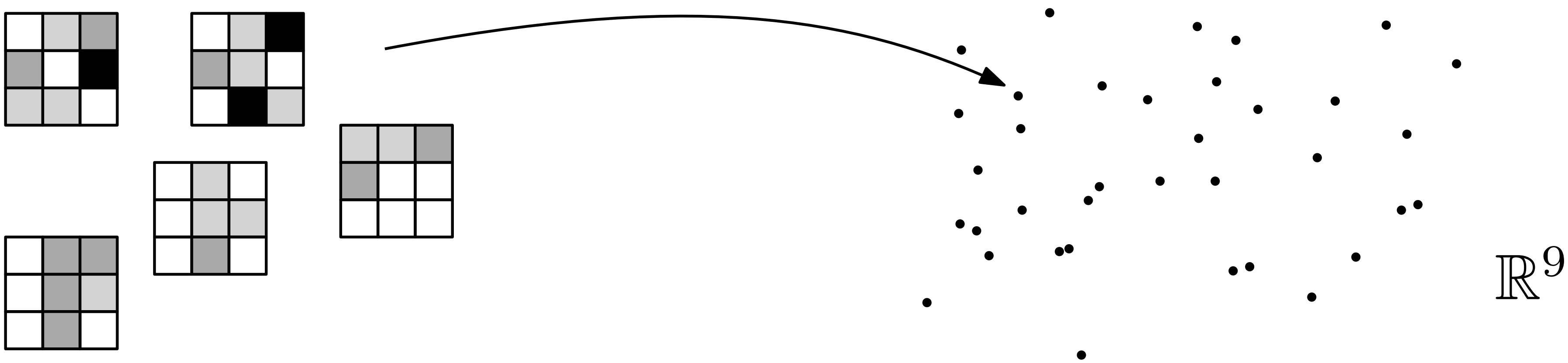
Mas $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ é homotópico à esfera $\mathbb{S}_{n-1}$, e $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ is é homotópico à esfera $\mathbb{S}_{m-1}$

Já vimos que $\mathbb{S}_{n-1}$ e $\mathbb{S}_{m-1}$ são homotópicos se e somente se $m = n$. Isto é uma contradição.

Propriedade de invariância - aplicações

[**On the Local Behavior of Spaces of Natural Images**, G. Carlsson, T. Ishkhanov, V. de Silva, and A. Zomorodian, 2008.]

A partir de uma grande coleção de imagens naturais, os autores extraem patches 3×3. Como cada patch é composto de 9 pixels, ele pode ser visto como um vetor 9-dimensional, e o conjunto inteiro como uma nuvem de pontos em $\mathbb{R}^9$.

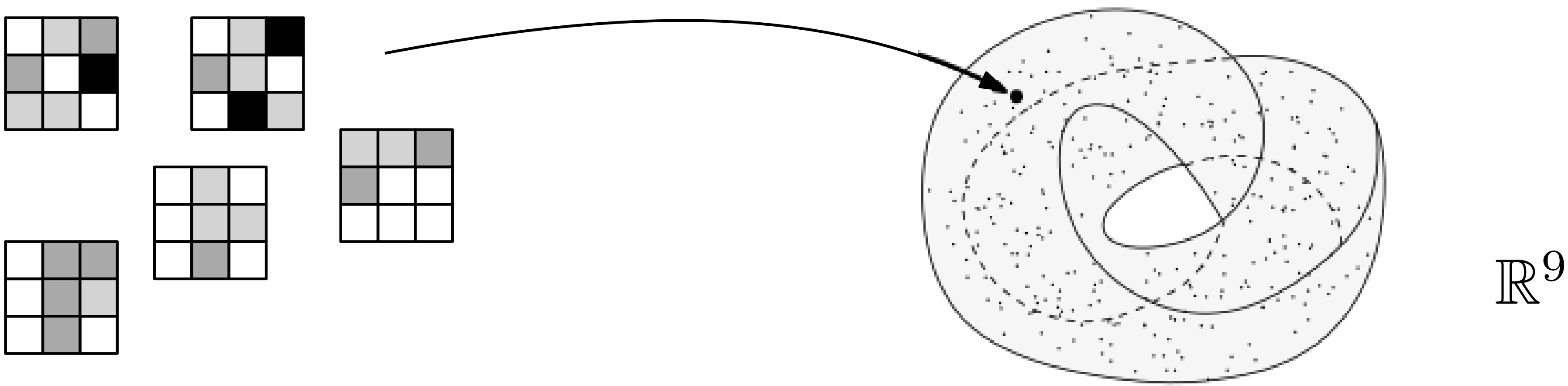


Observam que a nuvem de pontos está próxima de uma forma cujos número de Betti são

$$\beta_0(X) = 1, \quad \beta_1(X) = 2, \quad \beta_2(X) = 1, \quad \beta_3(X) = 0$$

[**On the Local Behavior of Spaces of Natural Images**, G. Carlsson, T. Ishkhanov, V. de Silva, and A. Zomorodian, 2008.]

A partir de uma grande coleção de imagens naturais, os autores extraem patches 3×3. Como cada patch é composto de 9 pixels, ele pode ser visto como um vetor 9-dimensional, e o conjunto inteiro como uma nuvem de pontos em $\mathbb{R}^9$.



Observam que a nuvem de pontos está próxima de uma forma cujos número de Betti são

$$\beta_0(X) = 1, \quad \beta_1(X) = 2, \quad \beta_2(X) = 1, \quad \beta_3(X) = 0$$

São os números Betti de uma garrafa de Klein!

(e os autores realmente mostram que o conjunto de dados se concentra perto de uma garrafa de Klein imersa no $\mathbb{R}^9$.)

Homologia simplicial

Para todo complexo simplicial K, podemos definir uma sequência de espaços vetoriais sobre o corpo finito $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$H_0(K), \quad H_1(K), \quad H_2(K), \quad H_3(K), \quad \dots$$

chamados de **grupos de homologia simplicial**.

Observação: O corpo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ é o conjunto $\{0, 1\}$ dotado das operações

$$\begin{aligned} 0+0&=0 \\ 0+1&=1 \\ 1+0&=1 \\ 1+1&=0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 0\times 0&=0 \\ 0\times 1&=0 \\ 1\times 0&=0 \\ 1\times 1&=1 \end{aligned}$$

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de dimensão finita pode ser escrito como $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

Se X é um espaço topológico, definimos seus grupos de homologia $H_i(X)$ como os de uma de suas triangulações.

Seja $n \geq 0$. As n-**cadeias** de K é o conjunto $C_n(K)$ cujos elementos são as somas formais
$$\sum_{\sigma \in K_{(n)}} \epsilon_\sigma \cdot \sigma \quad \text{onde} \quad \forall \sigma \in K_{(n)},\ \epsilon_\sigma \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$
Podemos definir sobre $C_n(K)$ uma **estrutura de grupo** com
$$\sum_{\sigma \in K_{(n)}} \epsilon_\sigma \cdot \sigma + \sum_{\sigma \in K_{(n)}} \eta_\sigma \cdot \sigma = \sum_{\sigma \in K_{(n)}} (\epsilon_\sigma + \eta_\sigma) \cdot \sigma.$$

Sejam $n \geq 1$ e $\sigma = [x_0, ..., x_n] \in K_{(n)}$ um simplexo de dimensão n. O seu **bordo** é o seguinte element de $C_{n-1}(K)$: $\partial_n \sigma = \sum_{\substack{\tau \subset \sigma \\ |\tau| = |\sigma| - 1}} \tau$. Podemos estender o operador ∂_n como uma transformação linear $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$.

Seja $n \geq 0$. Temos uma sequência de espaços vetoriais
$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial n+1} C_n(K) \xrightarrow{\partial n} C_{n-1}(K) \longrightarrow \ldots$$

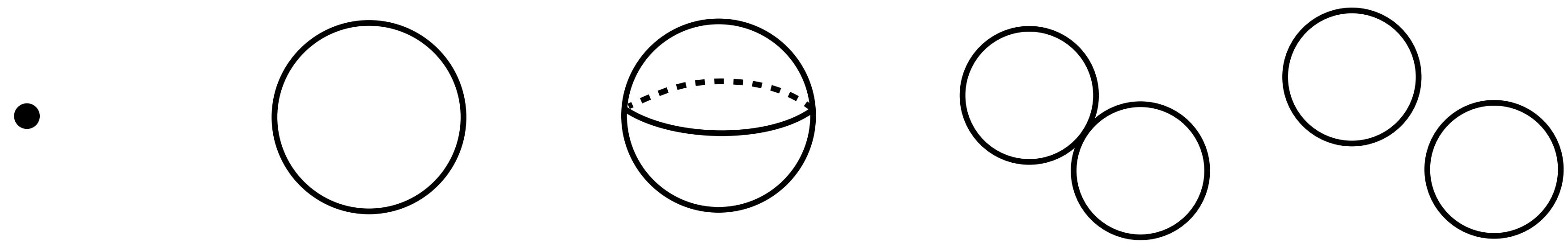
As aplicações ∂_{n+1} e ∂_n são transformações lineares, e podemos considerar seus núcleos e suas imagens. Definimos os n-**ciclos** $Z_n(K) = \mathrm{Ker}(\partial_n)$ e os n-**bordos** $B_n(K) = \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$.

Definição: O n-**ésimo grupo de homologia (simplicial)** de K é o espaço vetorial quociente
$$H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K).$$

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de dimensão finita pode ser escrito como $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

Definição: Sejam K um complexo simplicial e $n \geq 0$. Seu n-ésimo **número de Betti** é definido como $\beta_n(K) = \dim H_n(K)$.

X



$H_0(X)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
$\beta_0(X)$	1	1	1	1	2
$H_1(X)$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
$\beta_1(X)$	0	1	0	2	2
$H_2(X)$	0	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0	0
$\beta_2(X)$	0	0	1	0	0

Homologia é um functor

Temos visto que a homologia transforma **espaços topológicos** em **espaços vetoriais**

$$\begin{aligned} H_i \colon \mathrm{Top} &\longrightarrow \mathrm{Vect} \\ X &\longmapsto H_i(X) \end{aligned}$$

Na verdade, ele também transforma **aplicações contínuas** em **transfomações lineares**.

$$X \xrightarrow{f} Y \qquad\qquad H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y)$$

Esta operação preserva os **diagramas comutativos**:

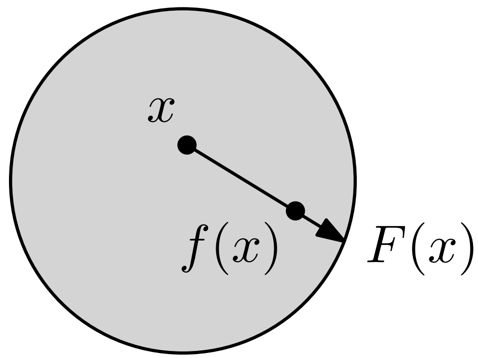
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & Y \arrow[r, "g"'] & Z, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_n(X) \arrow[r, "H_n(f)"'] \arrow[rr, bend left, "H_n(g\circ f)"] & H_n(Y) \arrow[r, "H_n(g)"'] & H_n(Z). \end{tikzcd}$$

$$\boxed{H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)}$$

Aplicação: Teorema do ponto fixo de Brouwer

Seja $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ uma aplicação contínua, one $\mathcal{B}$ é a bola fechada unidade de $\mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que f tem um ponto fixo ($f(x) = x$).

Caso contrário, podemos definir uma aplicação $F\colon \mathcal{B} \to \partial\mathcal{B}$ tal que F restrita to $\partial\mathcal{B}$ é a identidade. Para isso, define $F(x)$ como a primeira interseção entre a meia linha $[x, f(x))$ e $\partial\mathcal{B}$.



Chame a inclusão $i\colon \partial\mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Então $F \circ i\colon \partial\mathcal{B} \to \partial\mathcal{B}$ é a identidade.
Por functorialidade, temos diagramas comutativos

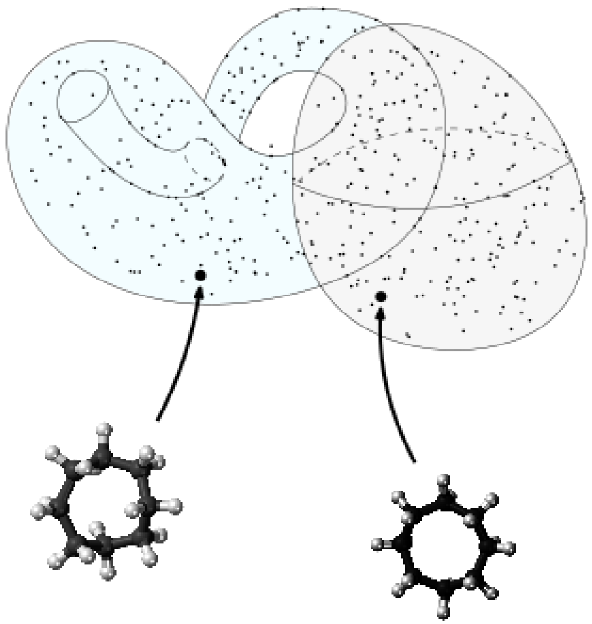
$$\begin{tikzcd} \partial\mathcal{B} \arrow[r, "i"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & \mathcal{B} \arrow[r, "F"'] & \partial\mathcal{B}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_i(\partial\mathcal{B}) \arrow[r, "H_i(i)"'] \arrow[rr, bend left, "H_i(\mathrm{id})"] & H_i(\mathcal{B}) \arrow[r, "H_i(F)"'] & H_i(\partial\mathcal{B}). \end{tikzcd}$$

Mas para $i = n - 1$, é absurdo:

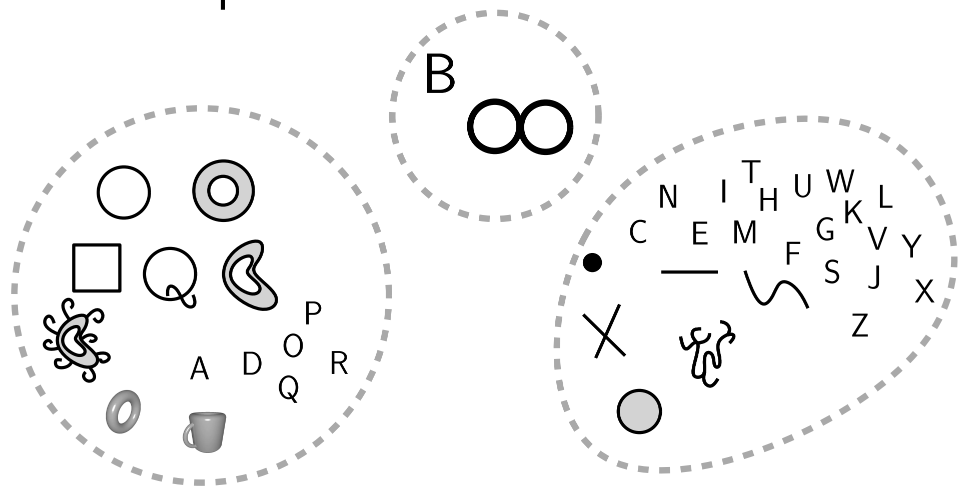
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

Conclusão temporária

Alguns conjuntos de dados contêm topologia



Os espaços topológicos podem ser classificados em **classes de equivalência** de homotopia



Invariantes de classes de homotopia permitem descrever e compreender os espaços topológicos

- Número de componentes conexas
- Característica de Euler χ
- Número de Betti $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$
- Grupos de homologia $H_0, H_1, H_2, \ldots$