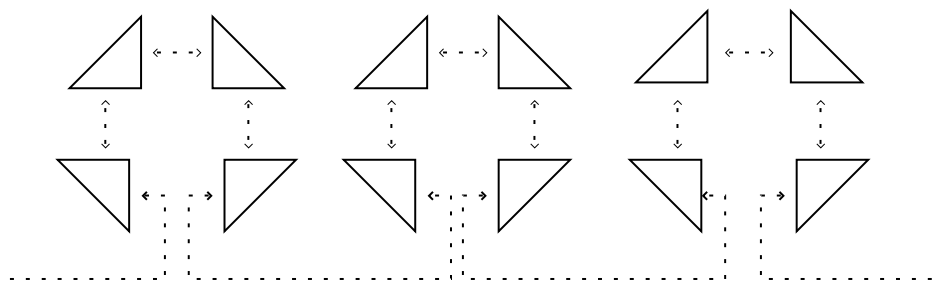


UNIVERSITÉ PARIS-SUD

MÉMOIRE DE TER

Équidistribution des directions de connexions de singularités en une singularité d'une surface de translation

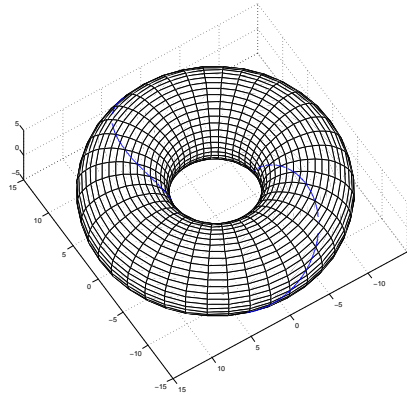
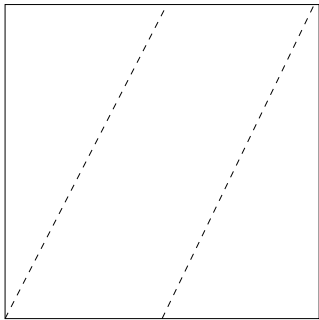


Raphaël TINARRAGE
OLivier STIETEL

Encadrant : Frédéric PAULIN

Introduction

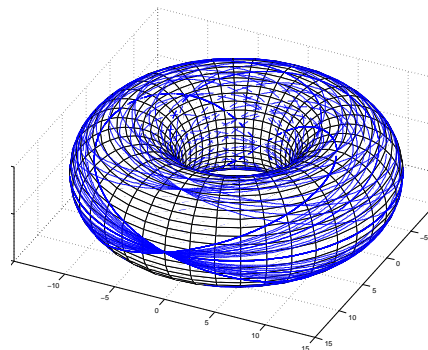
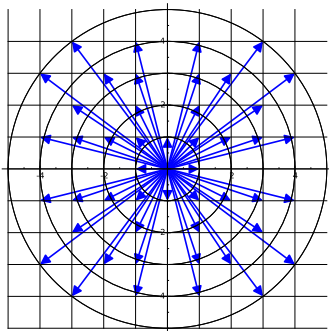
Nous allons étudier les possibilités de déplacement sur les objets plats.



Les figures précédentes représentent un chemin parcouru sur le carré, et ce même chemin parcouru sur sa représentation tridimensionnel imparfaite, le tore de révolution.

Le tore se réalise comme le collage d'un carré du plan euclidien. Bien qu'il se plonge naturellement dans l'espace \mathbb{R}^3 , nous le considérerons comme un recollement formel : il est ce qu'on appelle le tore plat. Ainsi, sa géométrie est de même nature que celle du carré : il est localement plat, sans courbure.

Étant fixé un point, on se demande comment se déplacer sur le tore plat afin de revenir à ce point initial. Plus l'on s'autorise à parcourir des chemins de longueur grande, plus les possibilités de partir dans de nouvelles directions augmente. Notre but est de quantifier cette augmentation.



Nous allons montrer pour une certaine famille de surfaces, si la longueur autorisée augmente, alors il n'y a pas de direction privilégiée dans laquelle partir pour revenir à notre point de départ.

Table des matières

1	Les surfaces plates	3
1.1	Rappels généraux de topologie	3
1.2	Première définition	3
1.2.1	Les données de recollement	3
1.2.2	Découpage des données de recollement	5
1.3	Seconde définition	6
1.3.1	Les surfaces de translation	6
1.3.2	Isomorphisme de surfaces de translation	6
1.4	Équivalence des définitions	6
1.5	Compléments	9
1.5.1	Identifier le genre d'une surface plate à l'œil nu	9
1.5.2	Distance sur une surface plate	10
1.5.3	Classification des tores plats	11
2	Fractions de Farey	14
2.1	Un peu d'arithmétique	14
2.2	Équidistribution des fractions de Farey	16
2.2.1	Première démonstration	17
2.2.2	Seconde démonstration et Critère de Weyl	17
3	Connexion de singularités	19
	Références	20

1 Les surfaces plates

1.1 Rappels généraux de topologie

Nous nous plaçons dans le cadre de la géométrie différentielle. Nous renvoyons par exemple à [2] pour les rappels généraux suivants.

On rappelle qu'une *variété topologique* \mathcal{M} est un espace topologique séparé, à base dénombrable, tel que tout point de \mathcal{M} admette un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace \mathbb{R}^n .

Une *variété différentielle* de classe C^k et de dimension n est une variété topologique munie d'un atlas maximal de cartes C^k à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Étant donné un espace topologique \mathcal{M} muni d'une relation d'équivalence \sim , l'*espace topologique quotient* $\mathcal{M}_{/\sim}$ est l'ensemble quotient $\mathcal{M}_{/\sim}$ muni de la topologie la moins fine rendant continue l'application projection $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{/\sim}$. On rappelle la propriété suivante :

Proposition 1.1 (Séparation de l'espace quotient). *Si \mathcal{M} est un espace topologique séparé, muni d'une relation d'équivalence \sim d'image fermée dans $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, alors l'espace quotient $\mathcal{M}_{/\sim}$ est séparé.*

La formule suivante donne une relation importante quant à la géométrie des objets que nous allons étudier :

Proposition 1.2 (Formule d'Euler pour les polyèdres). *Étant donné une surface polyédrale compacte, connexe et orientable, si on note s son nombre de sommets, a son nombre d'arêtes, f son nombre de faces et g son genre, on a la relation*

$$s - a + f = 2 - 2g.$$

1.2 Première définition

1.2.1 Les données de recollement

La première façon d'obtenir une surface de translation est de recoller par translation des polygones du plan le long de leurs côtés.

Définition (Donnée de recollement). Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille finie de polygones convexes deux à deux disjoints du plan euclidien \mathbb{R}^2 . Pour $i \in I$, on indice par J_i les côtés de P_i , et on note $(\partial P_i^j)_{j \in J_i}$ ces côtés. Soit \mathcal{R}_0 une partition de $\bigsqcup_{i \in I} J_i$ en paires, que nous appellerons *paires de cotés identifiés*, telle que :

- deux cotés identifiés $\partial P_{i_1}^{j_1}$ et $\partial P_{i_2}^{j_2}$ ne diffèrent que d'une translation,
- cette (unique) translation envoie une normale sortante du premier polygone P_{i_1} sur une normale rentrante du second P_{i_2} .

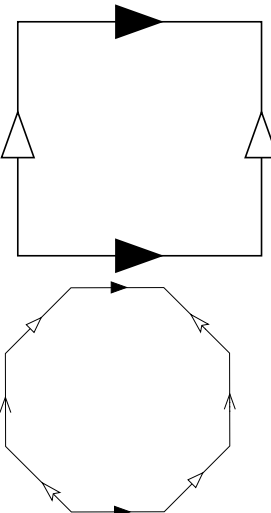
On dit alors que $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ est une *donnée de recollement*.

Soit \mathcal{R}_1 la relation sur $\bigsqcup_{i \in I} P_i$ héritée de \mathcal{R}_0 : c'est à dire telle que deux points $x, y \in \bigsqcup_{i \in I} P_i$ sont identifiés par \mathcal{R}_1 si et seulement s'ils appartiennent à des cotés identifiés par \mathcal{R}_0 , et si la translation correspondante envoie un point sur l'autre. Soit \sim la relation d'équivalence engendrée par la relation \mathcal{R}_1 . On appellera *surface de translation* définie par la donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ l'espace topologique quotient S de $\bigsqcup_{i \in I} P_i$ par \sim .

Exemple.

- Le tore plat standard, construit par un tel recollement, est un premier exemple de surface de translation. On se donne un carré de côté de longueur 1, et l'identification des côtés décrite ci-contre.

Dans la partie 1.5.2, nous munirons les surfaces de translation d'une distance. Ainsi, le tore plat obtenu, en tant que variété topologique, est homéomorphe au tore de révolution dans \mathbb{R}^3 , mais pas isométriquement homéomorphe !



- Le recollement de l'octogone : on choisit un octogone régulier, et on identifie comme précédemment les cotés opposés, en respectant leurs direction.

La surface de translation ainsi définie est de genre 2 (voir la partie 1.2.2).

Remarque. Sur une surface plate S , on distingue trois types de points :

Les points qui étaient initialement dans l'intérieur d'un polygone (figure 1). Ces points ne sont identifiés à aucun autre point des polygones initiaux. A leur voisinage, la surface plate se comporte exactement comme le plan euclidien.

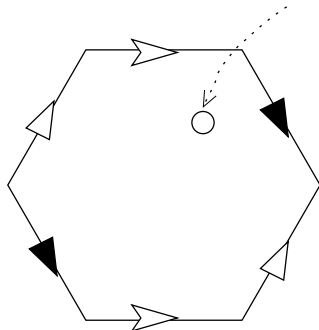


FIGURE 1 – Point intérieur

Les points qui étaient initialement dans l'intérieur d'un côté (figure 2). Ils sont identifiés à un unique point d'un unique autre côté. A leur voisinage, la surface plate se comporte exactement comme le recollement isométrique de deux demi-plans euclidiens, c'est à dire le plan euclidien lui-même.

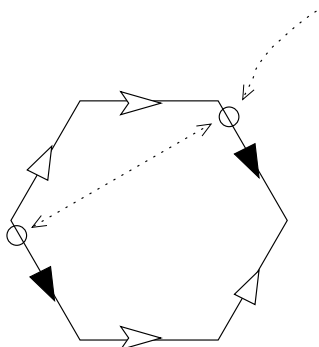


FIGURE 2 – Point sur le bord

Les points qui étaient initialement au sommet d'un polygone (figure 3). Ils sont identifiés avec un nombre fini d'autres sommets. Au voisinage d'un sommet, une singularité peut apparaître : puisque les côtés des polygones ont été recollés par translation, la somme des angles en ce sommet des polygones qui ont été recollés en ce sommet est une multiple entier de 2π .

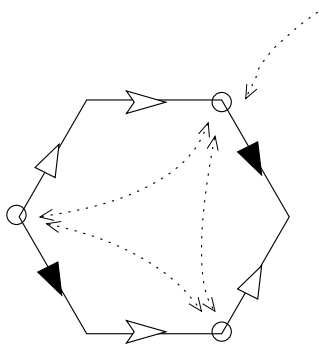


FIGURE 3 – Point sur un sommet

- Si c'est exactement 2π , ce point est une fausse singularité : son voisinage se comporte comme un recollement de sections angulaires du plan euclidien qui forment le plan euclidien lui-même.
- Si c'est $2k\pi$, pour $k > 1$, son voisinage est appelé une singularité conique d'ordre k . On dira qu'il est isomorphe au modèle de la singularité conique d'ordre k (voir ci-dessous).

Définition (Modèle de singularité conique). Pour $k \geq 1$, on définit le modèle de singularité conique d'ordre k comme étant le recollement de $4k$ triangles rectangles isocèles de longueur d'hypoténuse 1 privés de leur hypoténuse, selon le schéma 4.

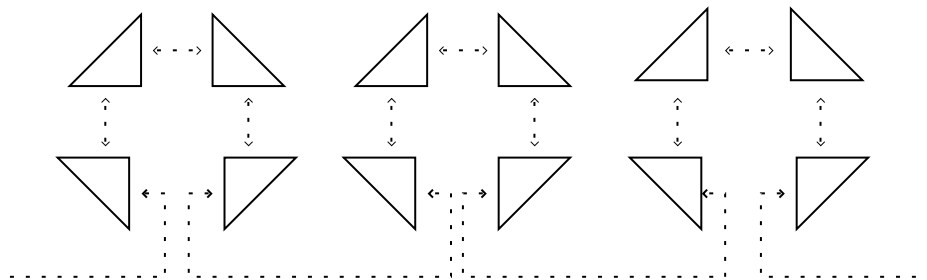


FIGURE 4 – Construction du modèle de singularité conique

A priori, le recollement des triangles du modèle de singularité conique semble se réaliser dans l'espace euclidien de dimension 3. Néanmoins, si l'on plie ces triangles en accordéon comme sur la figure 5, il apparaît que ce recollement est homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 .

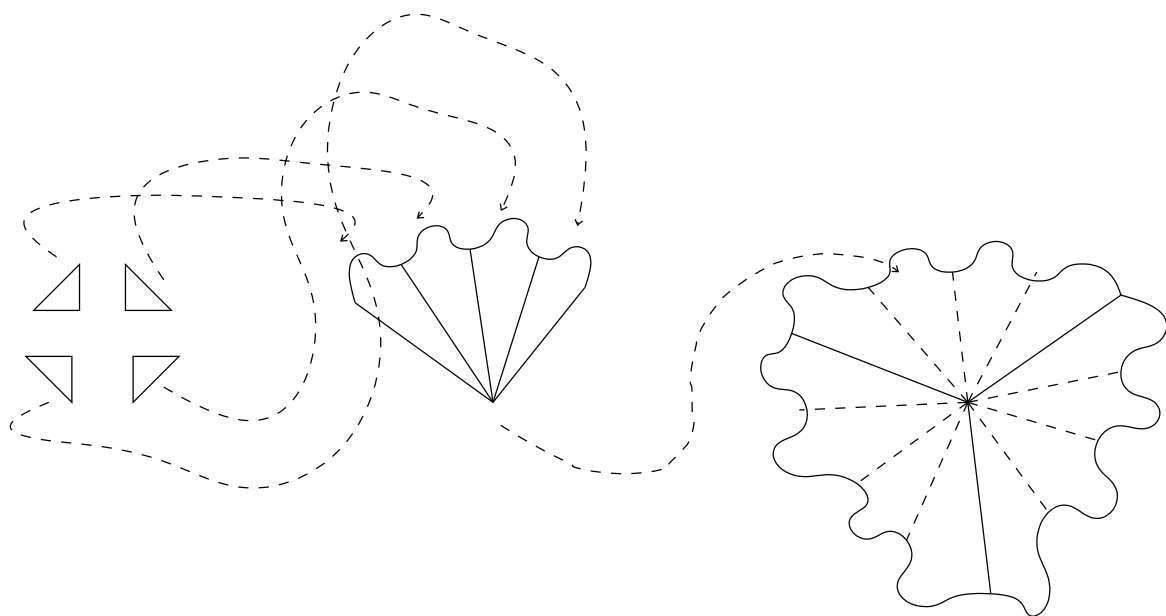


FIGURE 5 – Singularité conique pliée

1.2.2 Découpage des données de recollement

Cette section vise à définir un isomorphisme de données de recollement : étant donné $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ une surface plate, découper les P_i , $i \in I$ en sous-polygones, les traduire dans le plan \mathbb{R}^2 et rajouter les recollements correspondants à \mathcal{R}_0 ne modifie pas la surface de translation obtenue. Deux données de recollements $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ et $((P'_i)_{i \in I'}, \mathcal{R}'_0)$ sont dites *isomorphes* si l'on peut passer de l'une à l'autre par un tel procédé.

Exemple. L'hexagone recollé est isomorphe à un parallélogramme recollé, comme l'illustre la figure 6.

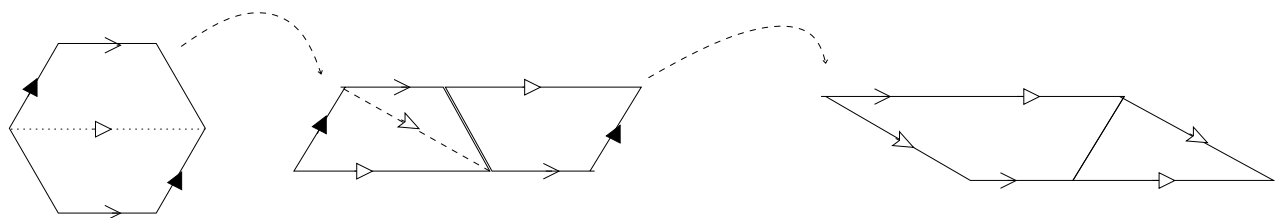


FIGURE 6 – Découpage de l'hexagone en parallélogramme

1.3 Seconde définition

1.3.1 Les surfaces de translation

On dispose aussi d'une définition ex-nihilo des surfaces de translation :

Définition (Surfaces de translation). Une *surface de translation* est un triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ composé de :

- \mathcal{S} une surface (i.e. une variété topologique de dimension 2) compacte, connexe et orientable,
- \mathcal{Z} une partie finie \mathcal{S} telle que tout point de \mathcal{Z} soit un singularité conique d'angle un multiple entier de 2π , c'est-à-dire que tout point $z \in \mathcal{Z}$ admette un voisinage épointé dans \mathcal{S} isomorphe (au sens défini ci-dessous) à un modèle épointé de singularité conique,
- \mathcal{A} un atlas maximal de cartes sur $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 , tel que les applications de changement de cartes soient des restrictions de translations.

Si (Σ, \mathcal{A}) et (Σ', \mathcal{A}') sont deux surfaces munies d'atlas maximaux à changements de cartes des translations, un *isomorphisme* de (Σ, \mathcal{A}) dans (Σ', \mathcal{A}') est un homéomorphisme $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ tel que pour toutes cartes (U, ϕ) de \mathcal{A} et (U', ϕ') de \mathcal{A}' , l'application $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}$ soit sur son domaine de définition la restriction d'une translation de \mathbb{R}^2 . Nous dirons que (Σ, \mathcal{A}) et (Σ', \mathcal{A}') sont *isomorphes* s'il existe un tel isomorphisme.

Remarque. L'atlas \mathcal{A} de la définition précédente est appelé *atlas de translation*. Il est inclus dans un unique atlas maximal C^1 , qui munit $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$ d'une structure de variété différentielle. Il est également possible de le prolonger en un atlas C^1 sur \mathcal{S} . Toutefois, si la surface de translation \mathcal{S} admet des singularités d'ordre $k > 1$, ce nouvel atlas perdra la propriété de translation (voir la proposition 1.3.1).

Proposition 1.3. *Il n'existe pas d'isométrie entre le modèle de singularité conique d'ordre $k > 1$ pour la métrique induite et un ouvert de \mathbb{R}^2 .*

Démonstration. Raisonnons par contradiction. Si une telle isométrie existait, il suffirait de dessiner un cercle de rayon r autour du centre du modèle de singularité conique. Il est de périmètre $2\pi kr$. L'image de ce cercle serait aussi un cercle dans \mathbb{R}^2 de rayon r et de périmètre $2\pi kr > 2\pi r$, ce qui est impossible. \square

1.3.2 Isomorphisme de surfaces de translation

On dit que deux surfaces plates $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ et $(\mathcal{S}', \mathcal{Z}', \mathcal{A}')$ sont *isomorphes* si $(\mathcal{S} - \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ et $(\mathcal{S}' - \mathcal{Z}', \mathcal{A}')$ sont isomorphes au sens défini précédemment.

Proposition 1.4. *Un isomorphisme de surfaces de translation peut être étendu en une bijection sur ces surfaces munies de leurs singularités, de manière à ce qu'il préserve l'ordre des singularités.*

D'après la classification des surfaces connexes, compactes et orientables, une surface de translation est homéomorphe à une des surfaces de genre g (voir [3]). Nous verrons dans la partie 1.5.1 comment identifier son genre. Nous verrons aussi que deux surfaces plates isomorphes sont de même genre.

1.4 Équivalence des définitions

Voici comment nous allons passer d'une surface plate au sens d'une définition à l'autre :

- Une donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, si on la quotient, est une variété topologique. Une paramétrisation locale judicieuse donne un atlas de translation de cette surface.
- Une surface de translation $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$, selon la seconde définition, est une variété différentielle. Par oubli de son atlas, c'est une variété topologique. Il faut vérifier que cette variété topologique s'écrive bien comme recollement de polygones du plan.

Nous allons établir qu'il existe une correspondance univoque entre ces deux définitions, à condition de réfléchir à isomorphisme près.

Lemme 1.5. *Une surface de translation au premier sens est naturellement munie d'une structure de surface de translation au second sens. Plus précisément, si l'on note \mathcal{S} la surface issue de la donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, on peut munir \mathcal{S} d'un atlas de translation en dehors des singularités, et tel que \mathcal{S} ne présente que des singularités coniques.*

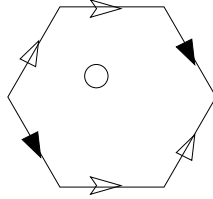
Démonstration. Soit $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ une donnée de recollement. Soient \sim la relation d'équivalence héritée de \mathcal{R}_0 , \mathcal{S} le quotient topologique de $\bigsqcup_{i \in I} P_i$ par \sim . Soient aussi \mathcal{Z}' l'ensemble des sommets des polygones P_i , pour $i \in I$, et $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'_{/\sim} \subset \mathcal{S}$ l'ensemble de ces sommets après identification.

Déjà, \mathcal{S} est à base dénombrable, car $\bigsqcup_{i \in I} P_i$ l'est.

Ensuite, \mathcal{S} est séparé, en utilisant la proposition 1.1. En effet, l'image de \sim dans $\bigsqcup_{i \in I} P_i \times \bigsqcup_{i \in I} P_i$ est fermée, c'est-à-dire que son complémentaire est ouvert pour la topologie produit. Pour montrer cela, considérons un point (x, y) de cet espace. S'il n'est pas dans l'image de \sim , c'est que les points x et y ne sont pas identifiés par \sim . Dans ce cas, il est toujours possible de trouver un voisinage ouvert de x et un voisinage ouvert de y qui ne se rencontrent pas (il suffit de distinguer les cas où ces points sont à l'intérieur ou au bord des polygones). Le produit de ces voisinages est alors un ouvert du produit $\bigsqcup_{i \in I} P_i \times \bigsqcup_{i \in I} P_i$ qui contient (x, y) .

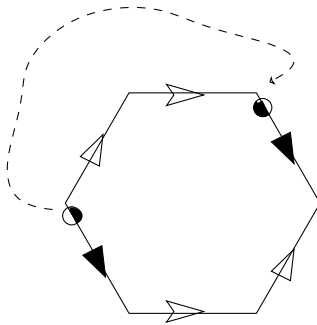
Maintenant, nous allons définir un atlas de translation $\mathcal{A}_0 = \{(U_y, \phi_y), y \in \mathcal{S} - \mathcal{Z}\}$ sur $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$. Soient $x \in \bigsqcup_{i \in I} P_i$ un point qui n'est pas un sommet, et $y = \pi(x) \in \mathcal{S} - \mathcal{Z}$.

- Si x appartient à l'intérieur d'un polygone P_i pour $i \in I$, on choisit un voisinage V de x contenu dans l'intérieur de P_i . Alors $\phi : V \rightarrow \pi(V)$ est une paramétrisation de \mathcal{S} autour de y . On pose $(U_y, \phi_y) = (\pi(V), \phi^{-1}) \in \mathcal{A}_0$.



- Si x appartient au côté d'un polygone P_i pour $i \in I$, mais n'est pas un sommet, il est aussi la projection d'un autre $x' \in P_j$, $j \in I$. On considère V_x un voisinage ouvert de x dans P_i qui ne rencontre ni les sommets, ni les autres côtés que celui où x appartient, puis $V_{x'}$ un voisinage de x' dans P_j qui ne rencontre ni les sommets, ni V_x , et tel que $V_x \cap \partial P_i$ et $V_{x'} \cap \partial P_j$ ne diffèrent que d'une translation, disons $\tau : V_x \cap \partial P_i \rightarrow V_{x'} \cap \partial P_j$, qui s'étend en $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Soient $V_y = \pi(V_x \cup V_{x'})$, et $U = V_x \cup \tau(V_{x'})$, qui est ouvert de \mathbb{R}^2 . On définit $\phi : V_y \rightarrow U$ par morceaux, valant π^{-1} sur $\pi(V_x)$, et $\tau \circ \pi^{-1}$ sur $\pi(V_{x'})$. Alors ϕ est une paramétrisation de \mathcal{S} autour de y . On pose $(U_y, \phi_y) = (\pi(V), \phi^{-1}) \in \mathcal{A}_0$.



L'atlas \mathcal{A}_0 ainsi construit est un atlas de translation. En effet, les cartes locales ont été choisies comme étant des recollement par translation d'ouverts dans les polygones. Pour s'en assurer, on peut distinguer trois cas. Soient $y = \pi(x)$ et $y' = \pi(x')$ deux points distincts de $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$, et $(U_y, \phi_y), (U_{y'}, \phi_{y'})$ leurs paramétrisations locales précédemment définies.

- Si x et x' sont dans l'intérieur de deux polygones, l'application $\phi_{y'} \circ \phi_y^{-1}$ définie sur $\phi_y(U_y \cap U_{y'})$ est l'identité.
- Si x est un point intérieur et x' sur un côté, l'ouvert $\pi^{-1}(U_y \cap U_{y'})$ est dans l'intérieur d'un polygone. Donc l'application $\phi_{y'} \circ \phi_y^{-1}$ définie sur $\phi_y(U_y \cap U_{y'})$ est la composition d'une translation et de l'identité.
- Si x et x' sont sur les côtés de deux polygones, l'application $\phi_{y'} \circ \phi_y^{-1}$ est définie par morceaux sur $\phi_y(U_y \cap U_{y'})$, et c'est une translation.

On prend alors \mathcal{A} un atlas de translation maximal sur $\mathcal{S} - \mathcal{Z}$ contenant \mathcal{A}_0 .

Enfin, il faut montrer que chaque sommet $x \in \bigsqcup_{i \in I} P_i$, la singularité $y = \pi(x) \in \mathcal{Z}$ admet un voisinage époiné isomorphe à un modèle époiné du modèle de singularité conique.

Puisque x est le sommet d'un polygone P_i pour $i \in I$, il est aussi la projection de k autres points $x_{j_1} \in P_{j_1}, \dots, x_{j_k} \in P_{j_k}$, où $j_1, \dots, j_k \in I$. On note $j = j_0$ et $x = x_{j_0}$. Soit r la longueur de la plus petite arête des polygones P_i pour $i \in I$. Pour tout $0 \leq l \leq k$, soit V_{x_l} le voisinage ouvert de x_{j_l} dans P_{j_l} obtenu en intersectant P_{j_l} et le disque ouvert de rayon $r/2$ centré en x_{j_l} .

On choisit un côté de $P_{j_{\sigma(0)}} = P_{j_0}$ d'extrémité $x_{j_{\sigma(0)}} = x_{j_0}$. Soit τ_1 la translation qui envoie ce côté de P_{j_0} sur un autre côté de P_{j_1} . On définit par induction des translations τ_2, \dots, τ_k de la manière suivante : pour $2 \leq l \leq k$, τ_l est la translation qui envoie le côté de $P_{j_{\sigma(l-1)}}$ d'extrémité $x_{j_{\sigma(l-1)}}$ différent du côté précédemment défini sur un côté de $P_{j_{\sigma(l)}}$ d'extrémité $x_{j_{\sigma(l)}}$.

Alors σ est une permutation de $[0, k]$.

Soit $V_y = \bigcup_{l=1}^k \pi(V_{x_l})$ le voisinage ouvert de y dans \mathcal{S} . Il s'agit de relever $U = \bigcup_{l=0}^k \tau_k \circ \tau_{k-1} \circ \dots \circ \tau_{l+1}(V_{x_{\sigma(l)}}) \subset \mathbb{R}^2$ dans un modèle de singularité conique. Il suffit pour cela de définir une application qui remonte une singularité conique morceaux par morceaux, comme il l'est illustré sur la figure 7.

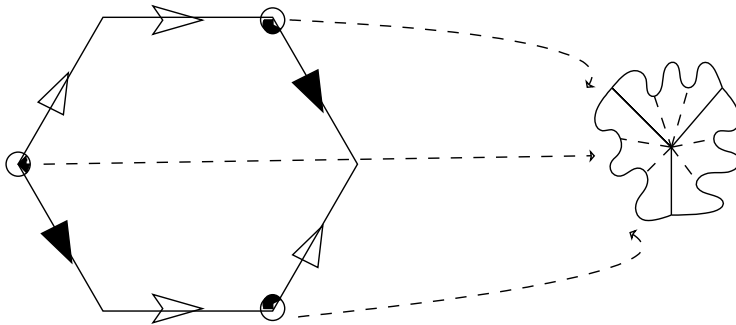


FIGURE 7 – Construction d'un isomorphisme vers un modèle de singularité conique

□

Réciproquement, on veut décrire une surface comme un recollement de polygones. Pour cela, il va falloir la découper. On rappelle qu'une surface est dite *triangulable* si elle est homéomorphe à l'espace topologique quotient de triangles du plan euclidien recollés par homéomorphismes le long de leur cotés.

Lemme 1.6. *Une surface de translation au second sens est triangulable, les triangles étant recollés par translation le long de leurs cotés, et la lecture de l'homéomorphisme dans les cartes étant des translations. Plus précisément, si $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ est une surface de translation, il existe une donnée de recollement $((T_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, où les T_i sont des triangles, et un isomorphisme $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow (\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}$, c'est-à-dire un homéomorphisme tel que pour toute carte locale (U, ϕ) de \mathcal{S} et (U', ϕ') de $((T_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, $\phi \circ \Phi \circ \phi^{-1}$ soit sur son domaine de définition la restriction d'une translation du plan.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ une surface plate au sens de la seconde définition. Pour chaque $y \in \mathcal{S} - \mathcal{Z}$, on choisit ϕ_y une carte locale sur \mathcal{S} d'un voisinage V_y de y . Il existe toujours dans l'image de ϕ_y un triangle fermé T_y de \mathbb{R}^2 qui contient $\phi_y(y)$ dans son intérieur.

Par compacité de \mathcal{S} , on extrait un recouvrement fini $(V_{y_i})_{1 \leq i \leq n}$ de \mathcal{S} par les V_{y_i} , de sorte que les $\phi^{-1}(T_{y_i})$ recouvrent \mathcal{S} privé d'un voisinage des singularités, et tel que ce voisinage soit contenu dans l'image des paramétrisations locales de ces singularités.

Pour les singularités $z \in \mathcal{Z}$, on sait qu'on a une carte ϕ_z d'image le modèle de singularité conique d'angle $2k\pi$. Donc un voisinage de z sur \mathcal{S} est recouvert par un l'image de $4k$ triangles fermés de \mathbb{R}^2 .

On a ainsi obtenu un recouvrement de \mathcal{S} par des images de triangles fermés de \mathbb{R}^2 .

Nous allons raffiner ce recouvrement, de sorte que les images de ces triangles ne se rencontrent qu'en leurs bords. Soient $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$ deux triangles du recouvrement qui ne rencontrent pas \mathcal{Z} , et $\phi_1 : U_1 \rightarrow T_1$, $\phi_2 : U_2 \rightarrow T_2$ les cartes correspondantes. Comme \mathcal{S} est une surface de translation, on a une translation $\tau = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \subset T_1 \rightarrow \phi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \subset T_2$ entre les images de leur intersection. τ s'étend en une translation du plan. Comme T_1 et T_2 sont des triangles, $P = \phi_2(U_1 \cap U_2) = T_2 \cap \tau(T_1)$ est un polygone

fermé du plan, et alors on peut considérer trois polygones : P , $T_2 - P$ et $T_1 - \tau^{-1}(P)$. Ils sont respectivement les images des cartes $(U_1 \cap U_2, \phi_{2|_{U_1 \cap U_2}})$, $(U_2 - U_1, \phi_{2|_{U_2 - U_1}})$, et $(U_1 - U_2, \phi_{1|_{U_1 - U_2}})$. Ces trois polygones sont triangulables. On considérant les restrictions des cartes précédentes à une triangulation de ces polygones, on a obtenu une triangulation du fermé $U_1 \cap U_2$.

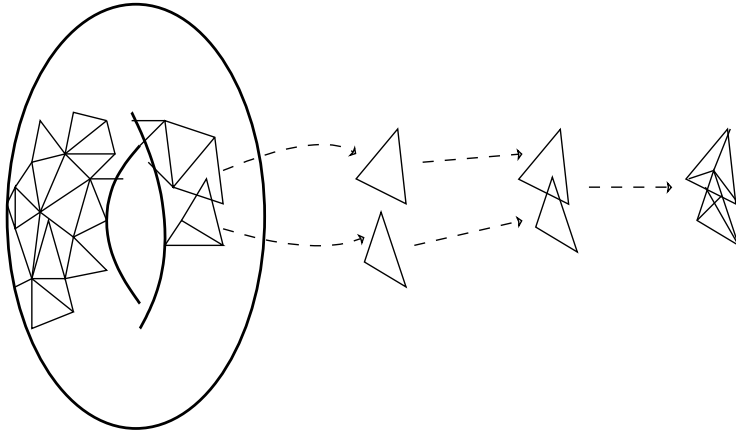


FIGURE 8 – Raffinement d'un recouvrement par triangles

En répétant ce processus, on obtient un recouvrement en fermés d'intérieurs disjoints de \mathcal{S} , et d'images triangulaires. C'est à dire qu'on a construit une triangulation de \mathcal{S} .

Par passage au quotient, on peut définir une bijection $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow (\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}$, qui est un isomorphisme par construction. \square

Remarque. Plus généralement, il est connu que toute surface compacte connexe orientable est triangulable.

Théorème 1.7. *Les deux définitions sont équivalentes. Plus précisément, l'application qui à toute donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, R_0)$ associe la surface de translation (S, Z, \mathcal{A}) induit une bijection*

$$\{\text{données de recollement}\}_{/isom} \longleftrightarrow \{\text{surfaces de translations}\}_{/isom}$$

Démonstration. Étant donné une donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, R_0)$, on a construit au lemme 1.5 une structure de surface de translation sur $S = (\bigsqcup_{i \in I} P_i)_{/\sim}$, et un homéomorphisme $\Psi : \bigsqcup_{i \in I} P_i \rightarrow S$ tel que pour toute carte (U, ϕ) de $S - Z$, et pour tout ouvert U_i d'un polygone P_i qui ne rencontre pas les sommets et tel que $\Psi(U_i) \subset U$, $\psi \circ \Psi : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit une translation.

Réciproquement, une surface de translation (S, Z, \mathcal{A}) peut, d'après le lemme 1.6, être triangulée, c'est à dire qu'elle est homéomorphe par Φ à un recollement $(\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}$, où les T_i sont des triangles du plan, et tel que pour toute carte (U, ϕ) de $S - Z$, $\Phi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit une translation.

Enfin, si $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ est une surface de translation, $((T_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$ la donnée de recollement correspondante par le lemme 1.5, et $(\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}, \mathcal{Z}', \mathcal{A}'$ la surface de translation correspondante par le lemme 1.6, on dispose bien d'un isomorphisme $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow (\bigsqcup_{i \in I} T_i)_{/\sim}$. \square

1.5 Compléments

1.5.1 Identifier le genre d'une surface plate à l'œil nu

Nous allons dériver de la relation d'Euler une relation simple entre une donnée de recollement $((P_i)_{i \in I}, R_0)$ et son genre g . On note $N = |I|$ le nombre de polygones.

Soit $i \in I$, n_i son nombre de sommets de P_i , $x_i^1, \dots, x_i^{n_i}$ ses sommets, et $(\alpha_i^j)_{1 \leq j \leq n_i}$ les angles intérieurs correspondants. Puisqu'il est convexe, on sait que $\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^j = (n_i - 2)\pi$.

Soit s le nombre de sommets de S après recollement, et y_1, \dots, y_s des représentants. Notons k_l le degré de la singularité y_l . On a alors, par définition, $k_l = \frac{1}{2\pi} \sum_{x_i^j \sim y_l} \alpha_i^j$. Soit aussi a le

nombre d'arêtes de S après recollement. On a $a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N n_i$.

On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^s (k_l - 1) &= \left(\sum_{l=1}^N k_l \right) - s = \left(\sum_{l=1}^s \frac{1}{2\pi} \sum_{x_i^j \sim y_l} \alpha_l^j \right) - s \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{x_i^j \text{ sommet}} \alpha_i^j \right) - s = \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{x_i^j \in P_i} \alpha_i^j \right) - s \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N (n_i - 2)\pi \right) - s = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N n_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N 1 \right) - s \\
&= a - N - s = 2g - 2
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant la formule d'Euler (voir la proposition 1.2). Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

Proposition 1.8. *Soit S une surface de translation admettant s singularités, d'ordres respectifs k_1, \dots, k_s . Soit g son genre. Alors ;*

$$\sum_{l=1}^s (k_l - 1) = 2g - 2$$

Grâce à cette formule, on retrouve aisément le genre du tore plat, de l'hexagone recollé, ou de l'octogone recollé.

On obtient aussi un moyen de construction de surfaces plates de genre arbitraire :

Proposition 1.9. *Soit $g \geq 1$, et S la surface plate construite comme le recollement des cotés opposés du $4g$ -gone régulier. Alors S est de genre g .*

Démonstration. Il suffit de voir que le $4g'$ -gone P recollé ne présente qu'une seule singularité, c'est-à-dire que l'orbite d'un sommet du $4g$ -gone pour le recollement parcourt l'ensemble des sommets. On note les sommets $1, 2, \dots, 4g'$ dans le sens direct. Soit $\delta P_{1,2}$ le côté de P auquel appartient le sommet 1, et tel que l'autre extrémité soit le sommet 2. Par symétrie de P , $\delta P_{1,2}$ est recollé à $\delta P_{1+2g', 2+2g'}$, et le sommet 1 est recollé au sommet $1+2g'$. Par induction, l'orbite du sommet 1 est donc l'ensemble des sommets $1 + 2g'\mathbb{Z}$ modulo $4g'$, c'est à dire l'ensemble de tous les sommets.

Cette unique singularité est d'ordre $k = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{4g'} \alpha^j = \frac{(4g'-2)\pi}{2\pi} = (2g' - 1)$.

Ainsi, la proposition précédente donne que le genre de S vaut $\frac{2+k-1}{2} = \frac{1+(2g'-1)}{2} = g'$. \square

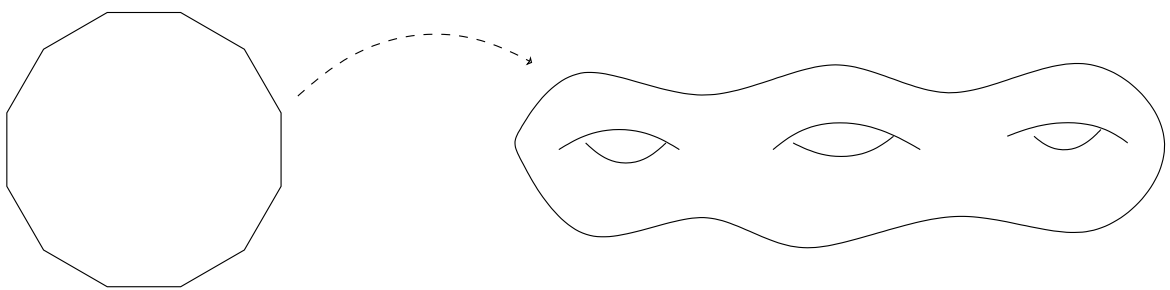


FIGURE 9 – Le dodécagone recollé est de genre 3

1.5.2 Distance sur une surface plate

Sur une surface de translation, les cartes locales permettent de transporter la topologie de \mathbb{R}^2 , mais aussi sa distance. Ceci permet de définir, sur une surface, un plus court chemin d'un point à un autre, et une ainsi une distance.

Définition (Géodésique (locale)). Soient $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ une surface, et deux points $x, y \in \mathcal{S}$. On dit qu'un chemin $C^1 \gamma : [a, b] \rightarrow S$ de x à y est une géodésique si il est localement de longueur minimale, c'est à dire que pour tout $t_0 \in [a, b]$ tel que $\gamma(t_0) \notin \mathcal{Z}$, il existe un voisinage I de t_0 dans $[a, b]$ et une carte (U, ϕ) de \mathcal{A} en telle que $\gamma(I) \subset U$, et telle que

pour tout $s, s' \in I$, $\gamma|_{[s, s']}$ minimise la longueur $\int_s^{s'} |(\phi \circ \alpha)'|$ des courbes α de $\gamma(s)$ à $\gamma(s')$ contenues dans U et telles que $\phi \circ \alpha$ soit C^1 . Lorsque $\gamma(t_0) \in \mathcal{Z}$, il faut que ce soit le cas sur le modèle de singularité conique correspondant, pour la métrique induite.

Dans le cas d'une surface de translation, pour décider si un chemin est géodésique, il suffit de le vérifier sur un recouvrement ouvert du chemin, car les applications de changement de cartes sont isométriques. Cette remarque permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.10. *Sur une surface plate, un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ de x à y est géodésique si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ de $\text{Im}(\gamma)$ et des cartes ϕ_i de V_i , $i \in I$, telle que γ y minimise la longueur de courbe.*

Remarque. En fait, cette proposition reste vraie dans le cas général d'une surface S munie d'un atlas à changements de cartes isométriques.

Dans le cas des surfaces plates, on dispose d'une caractérisation encore plus simple des géodésiques.

Proposition 1.11. *Sur une surface plate S obtenue par recollement de $((P_i)_{i \in I}, \mathcal{R}_0)$, un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ de x à y est géodésique si et seulement si :*

- lorsque γ est à l'intérieur d'un polygone, il se dirige en ligne droite,
- lorsque γ atteint une singularité, il forme un angle supérieur à π lorsqu'il quitte la singularité.

Démonstration. Le premier point résulte de la structure euclidienne locale d'une surface plate, car une géodésique de \mathbb{R}^2 est un segment. Le deuxième point résulte de la forme du modèle de singularité conique, auquel S est localement isomorphe en les singularités. En effet, si γ forme un angle inférieur à π en $z \in \mathcal{Z}$, il est possible de contourner la singularité pour effectuer un chemin plus court. \square

On peut vérifier que l'on définit bien une distance d :

$$d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x, y \longmapsto \inf_{\gamma : x \rightsquigarrow y} \text{longueur}(\gamma)$$

Cette distance munie les surfaces de translation d'une nature métrique. Cette notion est essentielle, et se transmet par isomorphisme. Par exemple, on peut définir un invariant de surface de translation : la systole.

Définition (Systole). Soit $(S, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$ une surface plate. On appelle systole la longueur de la géodésique fermée non-constante la plus courte de S .

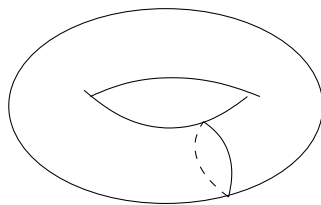


FIGURE 10 – Systole d'un tore

1.5.3 Classification des tores plats

Pour conclure cette partie, nous voulons comprendre la structure des surfaces de translation de genre 1.

Remarquons déjà, d'après la formule 1.8, que les surfaces de translation de genre 1 sont en fait les surfaces de translation sans singularité.

Définition (Tore plat). On appelle tore plat toute surface de translation isomorphe à (P, \mathcal{R}_0) , où P est un parallélogramme, et \mathcal{R}_0 l'identification des cotés opposés.

De manière générale, nous avons une description simple des surfaces de translation sans singularité :

Proposition 1.12. *Une surface de translation sans singularité est isomorphe à un parallélogramme recollé.*

Démonstration. ———Démonstration en chantier—————

Soit $((P_i)_{i \in I}, R_0)$ une donnée de recollement, et \mathcal{S} la surface de translation correspondante. On demande à ce que la donnée ne présente pas de singularité. Ainsi, on peut considérer P un polygone constitué d'un recollement des $(P_i)_{i \in I}$ par \mathcal{R}_0 . Soit s la systole de \mathcal{S} , et $\gamma : [0, 1] \rightarrow P \subset \mathbb{R}^2$ un chemin qui la réalise. D'après la proposition, γ est définie par un vecteur directeur, que l'on note v . Soit \mathcal{D} une droite verticale ou horizontale de \mathbb{R}^2 , qui passe par $\gamma(0)$ et qui n'est pas parallèle à v . Soit s' la longueur de la géodésique de \mathcal{S} passant par $\gamma(0)$ et parallèle à \mathcal{D} .

On peut considérer l'application

$$\begin{aligned} \Psi : [0, s] \times [0, s'] &\longrightarrow \mathcal{S} \\ t, t' &\longmapsto \Phi_{t'}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

où $\Phi_t(u)$ est le flot du champ de vecteur constant égal à v sur \mathcal{S} .

Le rectangle $[0, s] \times [0, s']$, muni du recollement défini par le flot, est isomorphe à un parallélogramme recollé. \square

Nous allons maintenant plonger naturellement l'ensemble des tores plats dans un espace matriciel. Avant cela, remarquons que, puisque l'aire d'une surface de translation est un invariant, deux surfaces de translation d'aires différentes ne sont jamais isomorphes. Nous pouvons donc réduire notre étude à celle des tores plats d'aire 1.

Un tore plat d'aire 1 est défini par un parallélogramme, c'est-à-dire par deux vecteurs non-colinéaires de déterminant 1. On a donc une surjection

$$\{\text{tores plats unitaires}\} \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})$$

qui à un parallélogramme $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ associe la matrice (u, v) .

Si l'on a $(u, v) \in SL_2(\mathbb{R})$, notons $\Lambda(u, v) = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subset \mathbb{R}^2$ le réseau de points correspondant.

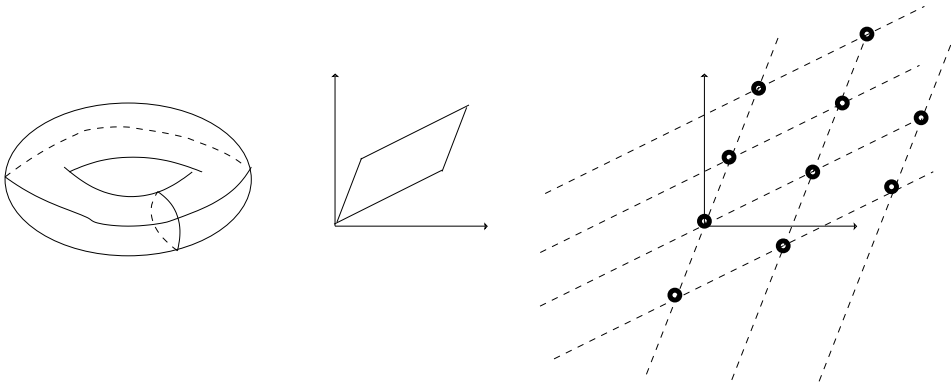


FIGURE 11 – Un tore plat, le parallélogramme qui le définit, et le réseau correspondant

Proposition 1.13. *Deux tores plats (u, v) et (u', v') sont isomorphes en tant que surfaces de translation si et seulement si leurs réseaux de points correspondants coïncident, c'est-à-dire si $\Lambda(u, v) = \Lambda(u', v')$.*

Démonstration. En effet, la surface de translation \mathcal{S} définie par un parallélogramme (u, v) est isomorphe à la surface $\mathbb{R}^2 / \Lambda(u, v)$ munie de l'atlas de translation composé d'inverses locales de la projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \Lambda(u, v)$. \square

Étant donnés $A = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, et $B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ deux matrices de $SL_2(\mathbb{R})$ on cherche une condition pour que $\Lambda(A) = \Lambda(B)$. On va déjà chercher une relation entre $\Lambda(A)$ et $\Lambda(AB)$.

Le réseau de A s'écrit

$$\mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

et celui de $AB = \begin{pmatrix} au + bw & av + bx \\ cu + dw & cv + dx \end{pmatrix}$ s'écrit

$$\mathbb{Z} \begin{pmatrix} au + bw \\ cu + dw \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} av + bx \\ cv + dx \end{pmatrix} = \{(nu + mv) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + (nw + mx) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Il apparaît alors que ces deux ensembles sont égaux si et seulement si les ensembles $\{nu + mv\}$ et $\{nw + mx\}$ sont égaux à \mathbb{Z} , c'est à dire si u et v sont des entiers premiers entre eux, et si w et x sont aussi des entiers premiers entre eux. Autrement dit, ces deux ensembles sont égaux si $B = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. On vient ainsi de montrer le résultat suivant.

Proposition 1.14. *Pour toutes matrices $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$, $\Lambda(A) = \Lambda(AB)$ si et seulement si $B \in SL_2(\mathbb{Z})$.*

Maintenant, remarquons que pour toutes matrices $A, A' \in SL_2(\mathbb{R})$, il existe $B \in SL_2(\mathbb{R})$ tel que $A' = AB$. D'après la proposition précédente, B doit alors être à coefficients entiers si $\Lambda(A)$ et $\Lambda(A')$ sont identiques. Ceci permet d'énoncer la propriété suivante :

Proposition 1.15. *Pour toutes matrices $A, A' \in SL_2(\mathbb{R})$, $\Lambda(A) = \Lambda(A')$ si et seulement si il existe $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $A' = AB$.*

Autrement dit, deux tores plats sont isomorphes si et seulement si leurs représentant dans $SL_2(\mathbb{R})$ ne diffèrent que d'une matrice spéciale linéaire à coefficients entiers. En conclusion, l'ensemble des tores plats à isomorphisme près se réalise comme l'ensemble $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$. On a une bijection :

$$\{\text{tores plats unitaires}\}_{/\text{isom}} \longleftrightarrow SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$$

2 Fractions de Farey

2.1 Un peu d'arithmétique

Afin de poursuivre, nous avons besoin d'un brin d'arithmétique afin de faciliter les démonstrations futures. Tous ces résultats ainsi que leurs démonstrations se trouvent dans [4].

Nous appelons *fonction arithmétique* toute fonction définie sur \mathbb{N}^* et à valeurs dans \mathbb{C} . Deux exemples courants sont la fonction indicatrice d'Euler φ et la fonction de Möbius μ . Pour tout entier n non nul, nous définissons $\varphi(n)$ comme étant le cardinal de $\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ et } \text{pgcd}(k, n) = 1\}$ et $\mu(n)$ par 0 si n possède un facteur carré et -1 à la puissance le nombre de facteur premier de n sinon.

Nous définissons l'opération de *convolution* de deux fonctions arithmétiques, qui à f et g donne la fonction arithmétique notée $f * g$ définie par $f * g(n) = \sum_{k|n} f(k)g(n/k)$.

Proposition 2.1. *L'ensemble des fonctions arithmétiques non nulles en 1 forme un groupe abélien pour le produit de convolution.*

Démonstration. Nous pouvons vérifier facilement que l'opération de convolution est commutative, associative et de neutre l'indicatrice de $\{1\}$ (notée δ_1). De plus si f est une fonction arithmétique non nulle en 1, alors nous pouvons définir g par récurrence en posant $g(1) = \frac{1}{f(1)}$ et $g(n+1) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{k|n+1} f(k)g(\frac{n+1}{k})$. Nous pouvons vérifier que g est l'inverse de f . \square

Nous dirons qu'une fonction arithmétique f est *multiplicative* si $f(1) = 1$ et f commute avec la multiplication sur des entiers premiers entre eux, c'est à dire si $\forall m, n \in \mathbb{N}, \text{pgcd}(m, n) = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n)$. φ est multiplicative par le théorème des restes chinois et μ est trivialement multiplicative. Remarquons qu'une fonction multiplicative est uniquement déterminée par ses valeurs prises sur les puissances de nombres premiers.

Proposition 2.2. *L'ensemble des fonctions multiplicatives est stable par multiplication et forme un sous groupe pour la convolution.*

Démonstration. La stabilité par multiplication est trivial. Pour la stabilité par convolution, soient f, g deux fonctions multiplicative et m, n deux entiers premier entre eux. (Chaque étape du calcul se justifie car m et n sont premiers entre eux.)

$$\begin{aligned} (f * g)(mn) &= \sum_{k|mn} f(k)g\left(\frac{mn}{k}\right) \\ &= \sum_{k_1|m, k_2|n} f(k_1k_2)g\left(\frac{mn}{k_1k_2}\right) \end{aligned}$$

si $a|m$ et $b|n$ alors $\text{pgcd}(a, b) = 1$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k_1|m} \sum_{k_2|n} f(k_1)f(k_2)g\left(\frac{m}{k_1}\right)g\left(\frac{n}{k_2}\right) \\ &= (f * g)(m) (f * g)(n) \end{aligned}$$

Pour la stabilité à l'inverse, soit f une fonction multiplicative. Comme $f(1) = 1 \neq 0$, notons g un inverse pour la convolution. Puis notons g^* la fonction multiplicative coïncidant avec g sur les puissances de nombres premiers. Alors $f * g^*$ est aussi multiplicative et coïncide avec δ_1 sur les puissances de nombres premiers. Or δ_1 est aussi multiplicative. Donc $f * g^* = \delta_1$. Donc g^* est un inverse multiplicatif de f . \square

Proposition 2.3. *μ est l'inverse de la fonction constante $\mathbb{1}$*

Démonstration. On veut montrer que $\mu * \mathbb{1} = \delta_1$. On a bien $(\mu * \mathbb{1})(1) = \mu(1) \mathbb{1}(1) = 1 = \delta_1(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ un entier naturel au moins égal à 2. Puis soit $p_1^{a_1} \dots p_d^{a_d}$ l'unique décomposition de n en produit de facteurs premier. Alors

$$\begin{aligned} (\mu * \mathbb{1})(n) &= \sum_{k|n} \mu(k) \\ &= \sum_{I \subset \llbracket 1, d \rrbracket} (-1)^{|I|} \\ &= \sum_{i=0}^d (-1)^i \binom{d}{i} \\ &= (1-1)^d \\ &= 0 = \delta_1(n) \end{aligned}$$

□

Le travail fournit nous permet de démontrer élégamment le résultat suivant :

Proposition 2.4 (Première formule d'inversion de Möbius). *Si f et g sont deux fonctions arithmétiques quelconques tel que*

$$g(n) = \sum_{k|n} f(k), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$f(n) = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) g(k), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. L'identité vérifiée par f et g se résume en $g = \mathbb{1} * f$. On convole l'égalité par μ , puis on utilise la proposition 2.3 pour simplifier le membre de droite, et l'on obtient que $\mu * g = f$. Ce qui est une forme résumée du résultat voulu. □

Proposition 2.5 (Seconde formule d'inversion de Möbius). *Si F et G sont deux fonctions de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans \mathbb{C} telles que F soit nulle sur un voisinage de 0 et que*

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

alors

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Il faut remarquer que grâce à l'hypothèse faite sur F , toutes les sommes portent en réalité sur un nombre fini de termes.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n \geq 1} \mu(n) \sum_{i \geq 1} F\left(\frac{x}{n i}\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mu(n) \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{j=n i} F\left(\frac{x}{j}\right) \\ &= \sum_{j \geq 1} F\left(\frac{x}{j}\right) \sum_{n \geq 1} \mu(n) \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{i=\frac{j}{n}} \\ &= \sum_{j \geq 1} F\left(\frac{x}{j}\right) \sum_{n|j} \mu(n) \\ &= F\left(\frac{x}{1}\right) \end{aligned}$$

□

Pour clore cette partie, une dernière proposition sur le comportement à l'infini des fonctions multiplicatives :

Proposition 2.6. *Si f est une fonction multiplicative tendant vers 0 sur les puissance de nombres premiers, alors f tend vers 0 en l'infini.*

Démonstration. Construisons un module de convergence nommé $m(\cdot)$ pour f à partir du module $n(\cdot)$, où $n : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que si $\varepsilon > 0$ soit fixé, alors pour tout $p^\alpha \geq n(\varepsilon)$, $|f(p^\alpha)| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$\begin{aligned} M &= \max \left(\max_{1 \leq k \leq n(1)} |f(k)|, 1 \right) \\ m(\varepsilon) &= n \left(\frac{\varepsilon}{M^{n(1)}} \right) + 1 \end{aligned}$$

Soit $n \geq m(\varepsilon)$. Écrivons $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ l'unique décomposition en nombres premiers de n . On a $f(n) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r})$. Examinons les $|f(p_i^{a_i})|$ en fonction des $p_i^{a_i}$:

- Ou bien $p_i^{a_i} < n(1)$. Alors $|f(p_i^{a_i})| \leq M$ et ces contributions sont au nombre maximale de $n(1)$.
- Ou bien $p_i^{a_i} \geq n(1)$. Alors $|f(p_i^{a_i})| \leq \varepsilon$, on peut oublier ces contributions.

De plus, au moins un des $p_i^{a_i}$ est plus grand que $n \left(\frac{\varepsilon}{M^{n(1)}} \right)$, sinon on aurait $n < m(\varepsilon)$. Et donc $|f(p_i^{a_i})| \leq \frac{\varepsilon}{M^{n(1)}}$.

Ainsi, on a

$$|f(n)| \leq M^{n(1)} \frac{\varepsilon}{M^{n(1)}} = \varepsilon.$$

□

2.2 Équidistribution des fractions de Farey

Cette partie introduira la notion d'équidistribution puis étudiera la répartition des rationnels parmi les réels.

Lorsque nous disposons d'un espace topologique localement compact X muni d'une mesure de probabilité borélienne μ , d'une suite de parties finies de X $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Puis en notant δ_x la mesure de Dirac en x , pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mu_{A_n} := \frac{1}{|A_n|} \sum_{x \in A_n} \delta_x$. nous dirons que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers μ si la suite $(\mu_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ pour la topologie faible-étoile.

La notion d'équidistribution permet de qualifier de manière plus fine la propriété de densité : si le poids de tout ouvert par μ est strictement positif (c'est le cas des exemples que nous allons étudier), alors l'ensemble $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est dense dans X . De plus, l'équidistribution introduit une dimension temporelle, invisible pour la notion de densité : si nous découpons les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et que nous réarrangeons les termes, on ne peut rien dire de l'équidistribution de la suite obtenue. Par contre, nous sommes garantis de garder la densité.

Remarque. Dans la suite, X sera ou bien $[0,1]$ ou bien $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ munis de leur topologie usuelle et μ sera la mesure de probabilité uniforme. Par une conséquence du théorème du porte manteau ([1], p.16), il suffira de montrer que :

$$\forall \alpha \in [0, 1] \text{ (resp } [0, 2\pi]), \mu_n([0, \alpha]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \text{ (resp } \frac{\alpha}{2\pi}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n := \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid 0 \leq p \leq q \leq n, \text{ pgcd}(p, q) = 1\}$ et $\Delta F_n := F_n - F_{n-1}$. Puis on note pr : $\left\{ \begin{array}{ccc} \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid x \leq y\} & \rightarrow & [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{array} \right.$. pr(F_n) est nommé l'ensemble des fractions de Farey d'ordre au plus n et pr(ΔF_n) celui des fraction de Farey d'ordre exactement n . Enfin, si on a $\alpha \in [0, 1]$, et si A représente F_n ou ΔF_n , on notera $A(\alpha)$ pour $A \cap \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < \alpha y\}$.

Remarque. Si on note Φ les sommes partielles de la fonction φ indicatrice d'Euler, on a par définition $|\Delta F_n| = \varphi(n)$ et $|F_n| = \Phi(n)$. Et l'on sait par application de la proposition 2.6 que φ et Φ tendent vers l'infini en l'infini.

En notant λ la mesure de Lebesgue sur le segment $[0, 1]$.

Théorème 2.7. *La suite $(\text{pr}(F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers λ .*

Théorème 2.8. *La suite $(\text{pr}(\Delta F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers λ .*

Le théorème 2.7 se déduit du théorème 2.8. C'est donc le second que nous allons démontrer et ce de deux manières différentes. La première démonstration étant plutôt directe, et la seconde s'appuyant sur le critère de Weyl.

Pour l'instant nous allons seulement voir que le théorème 2.8 est effectivement plus puissant, la démonstration étant juste une généralisation pondérée du lemme de Cesàro.

Démonstration du théorème 2.7 à partir du théorème 2.8. Soit $\alpha \in [0, 1]$. Sachant que $\mu_{\text{pr}(\Delta F_n)}([0, \alpha]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$, montrons que $\mu_{\text{pr}(F_n)}([0, \alpha]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $|\mu_{\text{pr}(\Delta F_n)}([0, \alpha]) - \alpha| \leq \varepsilon$. Ainsi pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq |\mu_{\text{pr}(F_n)}([0, \alpha]) - \lambda([0, \alpha])| &= \left| \frac{|F_n(\alpha)|}{\Phi(n)} - \alpha \right| \\ &= \left| \frac{|\Delta F_1(\alpha)| + \dots + |\Delta F_n(\alpha)|}{\Phi(n)} - \frac{\varphi(1) + \dots + \varphi(n)}{\Phi(n)} \alpha \right| \\ &= \left| \frac{|\Delta F_1(\alpha)| - \varphi(1)\alpha + \dots + |\Delta F_n(\alpha)| - \varphi(n)\alpha}{\Phi(n)} \right| \\ &\leq \frac{\Phi(n_0 - 1)}{\Phi(n)} |\mu_{\text{pr}(F_{n_0-1})}([0, \alpha]) - \alpha| \\ &\quad + \frac{1}{\Phi(n)} \sum_{k=n_0}^n \varphi(k) |\mu_{\text{pr}(\Delta F_k)}([0, \alpha]) - \alpha| \\ &\leq \frac{\Phi(n_0 - 1)}{\Phi(n)} |\mu_{\text{pr}(F_{n_0-1})}([0, \alpha]) - \alpha| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mu_{\text{pr}(F_n)}([0, \alpha]) - \lambda([0, \alpha])| \leq \varepsilon.$$

Et ce pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{\text{pr}(F_n)}([0, \alpha]) - \lambda([0, \alpha])| = 0.$$

□

2.2.1 Première démonstration

Démonstration du théorème 2.8. Soit $\alpha \in [0, 1]$. Notre but est de montrer que

$$\mu_{\text{pr}(\Delta F_n)}([0, \alpha]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda([0, \alpha])$$

i.e.

$$\frac{|\Delta F_n(\alpha)|}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha.$$

Posons

$$D_n := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* | 0 \leq x \leq y = n\}.$$

On observe que

$$|D_n(\alpha)| = \lfloor n\alpha \rfloor.$$

On a par unicité du pgcd,

$$D_n(\alpha) = \coprod_{d|n} \frac{n}{d} \cdot \Delta F_d(\alpha).$$

Donc en passant au cardinaux

$$\lfloor n\alpha \rfloor = |D_n(\alpha)| = \sum_{d|n} |\Delta F_d(\alpha)|.$$

Ainsi par la première formule d'inversion de Möbius (prop 2.4)

$$\begin{aligned} |\Delta F_n(\alpha)| &= \sum_{d|n} \mu(d) \lfloor \frac{n}{d} \alpha \rfloor \\ &= \alpha \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} + \sum_{d|n} \mu(d) \{ \frac{n}{d} \alpha \} \\ &= \alpha \varphi(n) + \sum_{d|n} \mu(d) \{ \frac{n}{d} \alpha \}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \frac{|\Delta F_n(\alpha)|}{\varphi(n)} - \alpha \right| &\leq \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{d|n} |\mu(d)| \{ \frac{n}{d} \alpha \} \\ &\leq \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{d|n} |\mu(d)|. \end{aligned}$$

En notant f la fonction qui a tout entier naturel non nul n associe $\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{d|n} |\mu(d)|$, il reste à montrer que f tends vers 0 en l'infini.

On remarque tout d'abord que f tend vers 0 sur les puissances de nombres premiers, i.e. lorsque p est un nombre premier et a un entier,

$$f(p^a) = \frac{1}{p^a - p^{a-1}} (1 + 1 + 0 + \dots + 0) = \frac{2}{p^{a-1}(p-1)} \xrightarrow{p^a \rightarrow \infty} 0.$$

Puis l'on remarque que f est multiplicative, en tant que produit d'une fonction multiplicative et d'une convolution de deux fonctions multiplicatives.

Ces deux remarques permettent de conclure par application de la proposition 2.6 et termine la démonstration. \square

2.2.2 Seconde démonstration et Critère de Weyl

Théorème 2.9 (Critère de Weyl). *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties finies de $[0, 1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons e_k la fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{C}_* la fonction qui à t associe $\exp(2i\pi kt)$.*

Alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers λ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^$, $\frac{1}{|A_n|} \sum_{x \in A_n} e_k(x)$ tend vers 0 lorsque n vers l'infini.*

Démonstration du critère de Weyl. On commence par observer que si $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\frac{1}{A_n} \sum_{x \in A_n} e_k(x) =$

$$\int_{[0,1]} e_k d\mu_{A_n} \text{ et } \int_{[0,1]} e_k d\lambda = 0.$$

Le sens direct est une occurrence particulière de l'hypothèse de convergence faible-étoile pour la fonction e_k .

Pour la réciproque, soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} et $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, il existe un polynôme trigonométrique $P = a_0 + a_1 e_1 + \dots + a_d e_d$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$. On remarque que $\int_{[0,1]} P d\lambda = a_0$.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[0,1]} f (d\mu_{A_n} - d\lambda) \right| \\ & \leq \left| \int_{[0,1]} (f - P) d\mu_{A_n} \right| + \left| \int_{[0,1]} P (d\mu_{A_n} - d\lambda) \right| + \left| \int_{[0,1]} (P - f) d\lambda \right| \\ & \leq \varepsilon + |a_1| \left| \int_{[0,1]} e_1 d\mu_{A_n} \right| + \dots + |a_d| \left| \int_{[0,1]} e_d d\mu_{A_n} \right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{[0,1]} f (d\mu_{A_n} - d\lambda) \right| \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{[0,1]} f (d\mu_{A_n} - d\lambda) \right| = 0,$$

et ce pour toute fonction f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} , c'est à dire que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'équidistribue vers λ . \square

Démonstration du théorème 2.8. En vue d'appliquer le critère de Weyl, soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que

$$\frac{1}{|\Delta F_n|} \sum_{x \in \text{pr}(\Delta F_n)} e_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

i.e.

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\substack{0 \leq r < n \\ r \wedge n = 1}} e_1 \left(\frac{kr}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Notons, pour tout entier naturel n non nul,

$$f_k(n) = \sum_{\substack{0 \leq r < n \\ r \wedge n = 1}} e_1 \left(\frac{kr}{n} \right), \text{ et } g_k(n) = \sum_{0 \leq r < n} e_1 \left(\frac{kr}{n} \right).$$

On a

$$g_k(n) = \sum_{d|n} f_k(d).$$

Donc par la première formule d'inversion de Möbius (prop 2.4)

$$f_k(n) = \sum_{d|n} \mu \left(\frac{n}{d} \right) g_k(d), \text{ puis } |f_k(n)| \leq \sum_{d|n} |g_k(d)|$$

Or comme nous allons le voir, $g_k(n) = 0$ lorsque $n > k$,

$$|f_k(n)| \leq |g_k(0)| + \dots + |g_k(k)|.$$

Ainsi notre fonction f_k est bornée, or comme φ tends vers l'infini, on a bien $\frac{f_k(n)}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Il reste à montrer que g_k est nulle à partir du rang $k+1$. En notant m le pgcd de n et k ,

$$\begin{aligned} g_k(n) &= m g_{\frac{k}{m}} \left(\frac{n}{m} \right) \\ &= \begin{cases} m & \text{si } \frac{n}{m} = 1 \text{ i.e. } n|k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Or lorsque $n > k$, on n'a jamais $n|k$, donc $g_k(n) = 0$ dès lors que $n > k$. \square

3 Connexion de singularités

Lorsque nous nous donnons une surface de translation $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{A})$, nous appellerons une *connexion de singularité* toute géodésique définie sur un segment, commençant et terminant sur une singularité et dont l'intérieur ne contient pas de singularité. On se fixe x_0 une singularité. Notre but est de regarder la répartition des directions de connexions de singularités de départ x_0 lorsque l'on fait croître la longueur des connexions que l'on s'autorise à prendre.

Le résultat auquel nous sommes parvenu concerne les surfaces de translation de genre 1 – c'est à dire les surfaces sans singularité par la formule d'Euler (prop 1.8). Nous avons donc adjoint une fausse singularité puis observé l'équidistribution des directions des vraies connexions de la fausse singularité à elle même. En notant σ la mesure de probabilité invariante par rotation sur le cercle,

Théorème 3.1. *Les directions des connexions triées par longueur d'une fausse singularité du tore plat à elle même s'équidistribue vers σ .*

Afin de traiter ce problème, nous devons en effectuer une traduction dans le monde de l'arithmétique. On rappelle qu'un réseau du plan est un sous groupe additif Λ fermé, discret de \mathbb{R}^2 tel que le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par Λ soit le plan tout entier. Grâce à la proposition 1.12, nous savons que la donnée d'une surface de translation de genre 1 est équivalente à la donnée d'un réseau du plan. Lorsque nous nous fixons un réseau Λ , nous noterons Λ_1 l'ensemble $\{(x, y) \in \Lambda \mid \forall k \in \mathbb{N}^*, (x, y) \in k \cdot \Lambda \Rightarrow k = 1\}$. On remarque que lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, alors $(\mathbb{Z}^2)_1$ correspond aux couples d'entiers premiers entre eux.

La raison d'être de Λ_1 est de représenter les connexions de la fausse singularité sur elle même. En effet, lorsque l'on trace une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ sur le tore démarrant et terminant à x_0 , on peut toujours la relever en $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dans son revêtement universel qu'est le plan tel que $\tilde{\gamma}(0) = (0, 0)$. Puis par la proposition 1.11, nous savons que la courbe relevé est une géodésique si et seulement si c'est un segment dans le plan. Le fait que $\gamma(1) = x_0$ est équivalent à ce que $\tilde{\gamma}(1) \in \Lambda$. Pour terminer, le fait que γ ne rencontre x_0 qu'en 0 et en 1 correspond au fait que $\tilde{\gamma}(1) \in \Lambda_1$.

Ainsi, si pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$ nous notons C_α l'ensemble des points du plan de norme euclidienne au plus 1 et d'argument entre 0 et α , Alors le théorème 3.1 devient une conséquence du théorème suivant.

Théorème 3.2. *Pour tout réseau du plan Λ , pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$:*

$$\frac{|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1|}{|r \cdot C_{2\pi} \cap \Lambda_1|} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2\pi} = \sigma([0, \alpha]).$$

Démonstration du théorème 3.2. Soit Λ un réseau du plan généré par u et v puis fixons $\alpha \in [0, 2\pi]$. Notons $\mathcal{A}(\Lambda)$ l'aire d'un domaine fondamental de Λ et $\mathcal{A}(C_\alpha)$ l'aire de C_α . Commençons par observer que

$$|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda| = r^2 \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) + f(r)$$

où f est telle qu'il existe un $A > 0$ vérifiant $|f(r)| \leq A r$. Cette observation se démontre de manière géométrique en remarquant que $|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda|$ est encadré par l'aire de $r \cdot C_\alpha$ respectivement rogné et étendu par le parallélogramme de coté $2u, 2v$, ce qui nous donne une erreur au plus linéaire de l'estimation. Puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons Λ_n l'ensemble $\{(x, y) \in \Lambda \mid \max\{i \in \mathbb{N}^* \mid (x, y) \in i \cdot \Lambda\} = n\}$. (Lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, Λ_n est l'ensemble des couples dont le pgcd vaut n).

Nous avons

$$r \cdot C_\alpha \cap \Lambda = \coprod_{n=1}^{\infty} r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_n.$$

Puis en passant aux cardinaux, et en remarquant que l'application qui à (x, y) associe $(x/n, y/n)$ fournit une bijection de $r \cdot C_\alpha$ sur $\frac{r}{n} \cdot C_\alpha$ et de Λ_n sur Λ_1 ,

$$|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{r}{n} \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1 \right|$$

Or si l'on note $sys(\Lambda)$ la systole de la surface associée à Λ , $|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1|$ est nul lorsque $r < sys(\Lambda)$. Nous pouvons donc appliquer la seconde formule d'inversion de Möbius (prop

2.5) pour obtenir

$$\begin{aligned}
|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1| &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left| \frac{r}{n} \cdot C_\alpha \cap \Lambda \right| \\
&= \sum_{n=1}^{rsys(\Lambda)} \mu(n) \left| \frac{r}{n} \cdot C_\alpha \cap \Lambda \right| \\
&= \sum_{n=1}^{rsys(\Lambda)} \mu(n) \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) \frac{r^2}{n^2} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{rsys(\Lambda)} f\left(\frac{r}{n}\right)
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\left| \frac{|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1|}{r^2} - \frac{\mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha)}{\zeta(2)} \right| &\leq \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) \left| \sum_{n=rsys(\Lambda)}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \right| \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left| \sum_{n=1}^{rsys(\Lambda)} f\left(\frac{r}{n}\right) \right| \\
&\leq \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) \sum_{n=rsys(\Lambda)}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&\quad + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{rsys(\Lambda)} A \frac{1}{n} \\
&= O\left(\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{\ln(r)}{r}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$|r \cdot C_\alpha \cap \Lambda_1| \sim \mathcal{A}(\Lambda) \mathcal{A}(C_\alpha) r^2.$$

On conclut en remarquant que $2\pi \mathcal{A}(C_\alpha) = \alpha \mathcal{A}(C_2\pi)$.

□

Références

- [1] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*.
- [2] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, 1966.
- [3] André Gramain. *Topologie des surfaces*. PUF, 1971.
- [4] E. M. Wright G.H. Hardy. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 1938.