

# **Ansätze strategischer und struktureller Art zur Implementierung zeitvarianter Digitalfilter für Audiosignale**

**Bachelorthesis**

im Studiengang Medieninformatik

vorgelegt von

**Raphael Wettinger**

**Matrikelnummer: 29283**

am 11. Juni 2018

an der Hochschule der Medien Stuttgart (HdM)

zur Erlangung des akademischen Grades eines Bachelor of Science

Erstprüfer: Prof. Dr. Joachim Charzinski

Zweitprüfer: Prof. Roland Kiefer

Bearbeitungszeitraum: 8. Januar 2018 bis 11. Juni 2018

---

## Erklärung

Hiermit versichere ich, Raphael Wettinger, ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit mit dem Titel: „Ansätze strategischer und struktureller Art zur Implementierung zeitvarianter Digitalfilter für Audiosignale“ selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen wurden, sind in jedem Fall unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht. Die Arbeit ist noch nicht veröffentlicht oder in anderer Form als Prüfungsleistung vorgelegt worden.

Ich habe die Bedeutung der ehrenwörtlichen Versicherung und die prüfungsrechtlichen Folgen (§ 24 Abs. 2 Bachelor-SPO (7 Semester) der HdM) einer unrichtigen oder unvollständigen ehrenwörtlichen Versicherung zur Kenntnis genommen.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift

---

## Kurzfassung

Zur Verarbeitung digitaler Audiosignale werden häufig rekursive Digitalfilter eingesetzt, da sie passende Eigenschaften für Echtzeitanwendungen besitzen. In einigen Anwendungen werden dabei die Parameter eines Filters im laufenden Betrieb verändert, wodurch Artefakte entstehen können. In dieser Arbeit werden praktikable Lösungsansätze struktureller und strategischer Art zur Minderung solcher Artefakte beschrieben und diskutiert. Ausgewählte Ansätze wurden bezüglich des kontrollierten Verhaltens ihres Ausgangssignals miteinander verglichen. Dazu wurde eine Messmethode entwickelt, welches auf dem Konzept der Monte-Carlo-Simulation basiert. Bezüglich des kontrollierten Verhaltens am Ausgang eines zeitvarianten Digitalfilters kann die Struktur basierend auf der *Topology-Preserving Transformation* empfohlen werden. Des Weiteren deutet sich an, dass das langsamere und dezentere Verändern von Filterkoeffizienten einen positiven Einfluss auf die Artefakte ausübt.

**Stichworte:** Digitale Signalverarbeitung, Zeitvariante Digitalfilter, Audioanwendungen, Topology-Preserving Transformation, Monte-Carlo-Simulation

## Abstract

In the field of audio signal processing, recursive digital filters are commonly used for their suitable properties in real-time applications. In many applications the parameters of a filter are changed during operation, which can cause artefacts. This thesis discusses feasible approaches of structural and strategic kind regarding their effectiveness to decrease such artefacts. Several approaches were compared with respect to what extent the output signal shows unusual behaviour regarding the signal's context. For this purpose a measurement method based on the concept of Monte Carlo simulation was developed and applied. Concerning the output signal behaviour of a time-varying digital filter, the structure based on the *topology-preserving transform* can be recommended. Furthermore, the results indicate that slower and more subtle changes of filter coefficients have a positive effect on artefacts.

**Keywords:** Digital signal processing, Time-varying digital filters, Audio applications, Topology-preserving transform, Monte Carlo simulation

---

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Joachim Charzinski herzlich für seine hilfreiche und gründliche Betreuung danken, welche er im Rahmen des Softwareprojekts [[Wet17](#)] und der vorliegenden Arbeit geboten hat.

Mein Dank gilt auch meiner Familie und Freunden für deren Unterstützung beim Korrekturlesen. Vor allem aber möchte ich herzlich für deren persönliche Unterstützung und Ermutigung danken.

Raphael Wettinger

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>6</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>7</b>
<b>Abkürzungen &amp; Fachbegriffe</b>	<b>8</b>
<b>Liste mathematischer Notationen, Symbole &amp; Bemerkungen</b>	<b>10</b>
<b>1. Einführung</b>	<b>12</b>
1.1. Anwendungsgebiete zeitvarianter Filter . . . . .	12
1.2. Herausforderungen bei der Realisierung . . . . .	12
1.3. Angestrebte Lösung . . . . .	13
1.4. Aufbau der Arbeit . . . . .	14
<b>2. Technische &amp; theoretische Grundlagen</b>	<b>15</b>
2.1. Signale . . . . .	15
2.2. Lineare zeitinvariante Systeme (LTI) . . . . .	16
2.2.1. Grundlegende Eigenschaften . . . . .	16
2.2.2. Wirkungsprinzip im Frequenzbereich . . . . .	17
2.2.3. Impulsantwort und Faltung . . . . .	18
2.2.4. Realisierung von digitalen LTI-Filtern . . . . .	19
2.2.5. Filter mit unendlicher Impulsantwort (IIR) . . . . .	21
2.2.6. Stabilität (BIBO) . . . . .	21
2.3. z-Transformation & DTFT . . . . .	22
2.3.1. Definition und Eigenschaften . . . . .	22
2.3.2. Übertragungsfunktion zur Analyse von LTI-Systemen . . . . .	22
2.4. Laplace-Transformation . . . . .	23
2.5. Bilineare Transformation . . . . .	24
2.5.1. Eigenschaften . . . . .	24
2.5.2. Verschiebung der Grenzfrequenz eines Tiefpass-Filters . . . . .	25
2.6. Elliptic Minimal Q-Factor (EMQF) Filter . . . . .	25
<b>3. Zeitvariante Digitalfilter</b>	<b>30</b>
<b>4. Stand der Technik &amp; Forschung</b>	<b>31</b>
4.1. Output-Switching Methode . . . . .	31
4.2. Zetterberg-Zhang Methode . . . . .	32
4.3. Modifizierte Zetterberg-Zhang Methode . . . . .	32
4.4. Zwischenkoeffizienten nach Rabenstein . . . . .	32
4.5. Stabilität . . . . .	33
4.6. Topology-Preserving Transformation (TPT) . . . . .	33
4.7. Wahrnehmung . . . . .	34
<b>5. Vorausgehende Überlegungen</b>	<b>35</b>

<b>6. Qualitätskriterien</b>	<b>37</b>
<b>7. Strukturelle Ansätze</b>	<b>38</b>
7.1. Direkte Kaskadierung . . . . .	38
7.2. Parallelstruktur über Allpass-Summe . . . . .	39
7.3. Auswahl der Grundstrukturen . . . . .	41
7.4. Technische Details der Grundstrukturen . . . . .	42
7.4.1. Direktstruktur I (DF1) . . . . .	43
7.4.2. Transponierte Direktstruktur II (T-DF2) . . . . .	44
7.4.3. Gold-Rader Struktur (GR) . . . . .	45
7.4.4. Topology-Preserving Transformation (TPT) . . . . .	47
7.5. Reihenfolge der Kaskadierung . . . . .	50
<b>8. Messungen</b>	<b>51</b>
8.1. Beobachtungen im Zeitbereich . . . . .	51
8.2. Parameter & Testvariablen . . . . .	54
8.3. Monte-Carlo-Simulation zur Schätzung der momentanen Signalstreuung . . . . .	58
8.3.1. Methode . . . . .	58
8.3.2. Implementierungsdetails . . . . .	60
8.3.3. Ergebnisse, Beobachtungen & Interpretation . . . . .	60
8.3.4. Kritik an der Messmethode . . . . .	66
<b>9. Strategischer Ansatz: Langsames Umschalten</b>	<b>67</b>
9.1. Langsames Umschalten der Grenzfrequenz . . . . .	67
<b>10. Fazit &amp; weitere Forschungsmöglichkeiten</b>	<b>70</b>
<b>A. Verschiedenes</b>	<b>72</b>
A.1. Literaturempfehlungen . . . . .	72
A.2. Koeffizienten eines Polynoms . . . . .	72
A.3. Zeitkontinuierliche Impulsfunktion . . . . .	73
<b>Quellen- &amp; Literaturverzeichnis</b>	<b>74</b>

**Abbildungsverzeichnis**

1. Artefakte zeitvarianter Digitalfilter . . . . .	13
2. SISO-System . . . . .	16
3. Blockdiagramm eines LTI-Systems . . . . .	19
4. Instabile Systemreaktion . . . . .	21
5. Frequency-Warping der bilinearen Transformation . . . . .	25
6. EMQF-Filter Frequenzantwort . . . . .	26
7. EMQF-Filter Pol- und Nullstellen . . . . .	28
8. EMQF-Filter Frequenzantwort . . . . .	29
9. Output-Switching Methode . . . . .	31
10. Transientsignal per Output-Switching Methode . . . . .	32
11. Spektrogramm eines Amplitudensprungs . . . . .	35
12. Spektrogramm eines Phasensprungs von $45^\circ$ . . . . .	36
13. Filter höherer Ordnung in Kaskadenstruktur . . . . .	39
14. Tiefpass als Summe zweier Allpässe . . . . .	40
15. Tiefpass als Summe zweier Allpass-Kaskaden . . . . .	40
16. Verteilung der Filterpole auf zwei Allpässe . . . . .	41
17. Direktstruktur I . . . . .	43
18. Direktstruktur II . . . . .	45
19. Transponierte Direktstruktur II . . . . .	45
20. Gold-Rader Struktur . . . . .	46
21. Gold-Rader Struktur mit FIR-Sektion . . . . .	46
22. Topologische Struktur eines analogen Filters . . . . .	48
23. Topology-Preserving Transformierte der analogen Direktstruktur II . . . . .	49
24. Zeitvariante Systemreaktion bei Schwingung am Eingang . . . . .	52
25. Zeitvariante Systemreaktion bei weißem Rauschen . . . . .	53
26. Impulsantworten verschiedener EMQF-Filter . . . . .	56
27. Grundaufbau der Monte-Carlo-Simulation . . . . .	59
28. Momentane Signalstreuung der Output-Switching Methode . . . . .	60
29. Momentane Signalstreuung der Filterstrukturen . . . . .	63
30. Momentane Signalstreuung der Filterstrukturen . . . . .	63
31. Momentane Signalstreuung der Filterstrukturen . . . . .	64
32. Momentane Signalstreuung der Filterstrukturen . . . . .	64
33. Momentane Signalstreuung der Filterstrukturen . . . . .	65
34. Momentane Signalstreuung der Filterstrukturen . . . . .	65
35. Schema für langsames Umschalten der Grenzfrequenz . . . . .	67
36. Kontrollfunktion als Grundlage für langsame Umschaltvorgänge . . . . .	68
37. Momentane Signalstreuung der Filterstrukturen . . . . .	69

## Tabellenverzeichnis

1. Wichtige Eigenschaften der z-Transformation . . . . .	22
2. Mögliche Testvariablen und Optionen . . . . .	54
3. Konfiguration des Versuchsaufbaus . . . . .	57



## Abkürzungen & Fachbegriffe

**Analytische Antwort** Auch analytische Systemreaktion  $y_{\text{analytic}}$ . Siehe Abschnitt 4.1.

**AP** Allpass.

**BP** Bandpass.

**BS** Bandsperre.

**DF** Direktstruktur von „Direct form“. Vorangestelltes T steht für Transposition. Siehe Abschnitt 7.4.1.

**DTFT** Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale. Aus dem Englischen „Discrete-Time Fourier Transform“. Siehe Abschnitt 2.3.1.

**EMQF** „Elliptic Minimal-Q Factor“ ist eine Klasse rekursiver Filter. Siehe Abschnitt 2.6.

**FIR** „Finite Impulse Response Filter“ sind digitale Filter ohne rekursive Pfade. Sie besitzen eine endliche Impulsantwort.

**GR** Gold-Rader Filterstruktur. Siehe Abschnitt 7.4.3.

**HP** Hochpass.

**IIR** „Infinite Impulse Response Filter“ sind rekursive Filter mit unendlicher Impulsantwort.

**LTI** „Linear Time-Invariant“ also lineare zeitinvariante Systeme.

**SISO** Eingrößensystem aus dem Englischen Single Input, Single Output.

**Start- & Zielfilter**  $H_{\text{pre}}(z)$  und  $H_{\text{post}}(z)$ . Im Kontext eines zeitvarianten Filters geht ab einem gewissen Zeitpunkt sein Frequenzverhalten vom Start- zum Zielfilter über. Siehe Abschnitt 3.

**T-DF2** Transponierte Direktstruktur II. Siehe Abschnitt 7.4.2.

**T-DF2-A** Allpass-Summe, deren Kaskaden-Elemente auf der transponierten Direktstruktur II basiert. Siehe Abschnitt 7.2.

**TP** Tiefpass.

**TPT** Struktur basierend auf der „Topology-Preserving Transformation“. Siehe Abschnitt 7.4.4.

**Transientsignal**  $y_{\text{transient}}$ . Differenz eines zeitvarianten Systems zur analytischen Antwort. Siehe Abschnitt [4.1](#).

**Umschaltdauer**  $\Delta n_{\text{smooth}}$  im Kontext des langsamen Umschaltens zeitvarianter Filter. Siehe Abschnitt [9](#).

**Zielfilter** Siehe Start- & Zielfilter.

**Zustandsraumdarstellung** Siehe Abschnitt [2.2.4](#).

## Liste mathematischer Notationen, Symbole & Bemerkungen

	Erläuterung
$j$	Imaginäre Einheit, sodass $j^2 = -1$ .
$x(t)$	Zeitkontinuierliches Signal. Synonym auch analoges Signal.
$X(s)$	Laplace-Transformierte von $x(t)$ .
$x[n]$	Zeitdiskretes Signal. Synonym auch digitales Signal. Entspricht $x(nT_s)$ mit der Indexvariable $n$ und dem Abtastintervall $T_s$ . Dabei gilt normalerweise $n \in \mathbb{Z}$ .
$X(z)$	$z$ -Transformierte von $x[n]$ .
$f$	Frequenz in Hz.
$f_s, T_s$	Abtastfrequenz $f_s$ in Hz. Entsprechendes Abtastintervall $T_s = 1/f_s$ in Sekunden. Wenn nicht anders angegeben, bezieht sich eine Frequenzangabe im zeitdiskreten Kontext auf die Abtastrate $f_s = 44.1$ kHz.
$f_{3\text{dB}}, \hat{f}_{3\text{dB}}$	Grenzfrequenz eines Tiefpassfilters. Ab dieser Frequenz beträgt die Dämpfung mindestens 3 dB. Im Kontext eines zeitvarianten Filters werden Start- und Zielgrenzfrequenz auch als Zweiertupel angegeben. Z.B. wäre mit $\hat{f}_{3\text{dB}} = (1 \text{ kHz}, 500 \text{ Hz})$ die Zielfrequenz 500 Hz.
$\Omega$	Kreisfrequenz eines analogen Filters in rad/s. $\Omega = 2\pi f$ .
$\omega$	Kreisfrequenz eines digitalen Filters in rad/s. $\omega = 2\pi(f/f_s)$ .
$H_{\text{EMQF}}(N, A_s)$	Analoger normalisierter Prototypfilter vom Typ EMQF <sup>1</sup> mit Tiefpass-Charakteristik. Ordnung $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . $A_s$ beschreibt die Dämpfung im Sperrbereich und wird als positiver Wert in dB angegeben.
$n_{\text{switch}}$	Ganzzahliger diskreter Zeitpunkt, ab welchem die Koeffizienten eines digitalen Filters im laufenden Betrieb verändert werden. Zum Zeitpunkt $n = n_{\text{switch}}$ werden zuerst die Koeffizienten verändert, um anschließend den $n_{\text{switch}}$ -ten Ausgabewert $y[n_{\text{switch}}]$ zu berechnen. Siehe Abschnitt 3.
$H_{\text{pre}}(z), H_{\text{post}}(z)$	Im Kontext eines zeitvarianten Filters geht ab dem Zeitpunkt $n = n_{\text{switch}}$ sein Frequenzverhalten von $H_{\text{pre}}(z)$ zu $H_{\text{post}}(z)$ über. Dabei wird $H_{\text{pre}}(z)$ auch als Startfilter und $H_{\text{post}}(z)$ als Zielfilter bezeichnet. Siehe Abschnitt 3.

---

<sup>1</sup>Elliptic Minimal-Q Factor. Siehe Abschnitt 2.6

$y_{\text{varying}}[n]$	Ausgabesignal eines zeitvarianten Filters (Abschnitt 4.1).
$y_{\text{analytic}}[n]$	Auch analytische Antwort. Ergebnis der Output-Switching Methode (Abschnitt 4.1). Ausgabesignal eines Systems, welches zwei Filter $H_{\text{pre}}(z)$ und $H_{\text{post}}(z)$ parallel betreibt. Bis einschließlich dem Zeitpunkt $n = (n_{\text{switch}} - 1)$ gilt $y[n] = y_{\text{pre}}[n]$ , danach gilt $y[n] = y_{\text{post}}[n]$ .
$y_{\text{transient}}[n]$	Transientsignal. Differenz aus dem Ausgabesignal eines zeitvarianten Filters zur entsprechenden analytischen Antwort $y_{\text{analytic}}[n]$ der Output-Switching Methode (Abschnitt 4.1).
$\Delta n_{\text{smooth}}$	Umschaltdauer bei langsamem Umschalten (Abschnitt 9).

**Bemerkungen:**

- In der vorliegenden Arbeit sind zeitdiskrete Signale als zeitkontinuierliche Kurven dargestellt, welche durch die entsprechenden Tastwerte führen und dazwischen jeweils linear interpolieren.
- Im Rahmen dieser Arbeit wird bei digitalen Signalen & Systemen von zeitdiskreten und wertkontinuierlichen Signalen & Systemen ausgegangen. Bei Simulationen kam deshalb eine hohe Präzision zum Einsatz.
- Wenn nicht anders angegeben, beziehen sich Frequenzangaben im zeitdiskreten Kontext auf die Abtastrate  $f_s = 44.1 \text{ kHz}$ .

## 1. Einführung

*Mit der vorliegenden Arbeit wurden Untersuchungen fortgeführt, welche im Rahmen des Softwareprojekts „Multiband Adaptive Distortion“ [Wet17] begonnen wurden.*

### 1.1. Anwendungsgebiete zeitvarianter Filter

In der Audiosignalverarbeitung werden Digitalfilter vielfältig und zahlreich eingesetzt. Mit Filtern kann der Frequenzinhalt eines Signals beeinflusst werden. Im klassischen Fall eines sog. „*Equalizers*“ wird das Audiosignal direkt mit einem Filter bearbeitet. Die Parameter wie z.B. die Grenzfrequenz eines Filters werden hier durch einen Nutzer (z.B. Toningenieur) justiert. Die meisten Digitalfilter werden als rekursive Filter realisiert, da sie bezüglich des Rechenaufwands effizienter sind und vergleichsweise geringe Latenzen einführen. Damit besitzen rekursive Filter gute Eigenschaften für den Echtzeitbetrieb.

Filter sind auch integraler Bestandteil vieler Audio-Effekte. Diese beeinflussen ebenfalls den Klang eines Audiosignals, wirken jedoch über die reine Filteroperation hinaus. Beispiele hierfür sind *Wah-Wah*-Effekte, *Phaser*-Effekte und Hallalgorithmen. [Zöl11, Kapitel 2.4] [Dat97]

Häufig werden Equalizer eingesetzt, deren Parameter über die Zeit verändert werden können. Ein Nutzer kann also während des Echtzeitbetriebs die Parameterwerte verändern. Wird das Frequenzverhalten eines Filters im laufenden Betrieb mit der Zeit verändert, so handelt es sich um einen **zeitvarianten Filter**. Auch in den oben genannten Audio-Effekten werden zeitvariante Digitalfilter eingesetzt. Bei einem Wah-Wah-Effekt wird das Eingangssignal von einem Bandpassfilter verarbeitet, dessen Mittenfrequenz mit der Zeit verändert wird. Die Mittenfrequenz wird dabei häufig vom Nutzer über ein Fußpedal gesteuert. Der Name beschreibt lautmalerisch den Klangeinfluss des Effekts, der an einen sprachähnlichen „Wah-Wah“-Klang erinnern kann.

Auch zur Synthese von Sprachsignalen können zeitvariante Digitalfilter eingesetzt werden. Beim sog. „Source-Filter“-Modell wird der Zustand des Vokaltraktes durch rekursive Filter modelliert. Der akustische Zustand des Vokaltraktes - dazu gehören Rachen, Mund und Nasenraum - formt die menschliche Sprache in ihre unterschiedlichen Laute. In der Sprache ändern sich die Laute und damit auch der Vokaltrakt über die Zeit. Somit ändert sich auch das Filtermodell des Vokaltraktes über die Zeit. Das Filtermodell muss daher zeitvariant realisiert werden. [R+07] [PK08]

### 1.2. Herausforderungen bei der Realisierung

Wird ein rekursiver Digitalfilter zeitvariant betrieben, können unerwünschte Artefakte entstehen. Abbildung 1 zeigt verschiedene Ausgabesignale eines zeitvarianten Tiefpass-Filters, dessen Grenzfrequenz zu unterschiedlichen Zeitpunkten von 1 kHz nach 500 Hz herabgesetzt wird. Das Eingangssignal ist eine Sinusschwingung und liegt mit 400 Hz

dauerhaft im Durchlassbereich. (Frequenzangaben bezüglich der Abtastfrequenz  $f_s = 44.1 \text{ kHz}$ )

Es lassen sich zwei Arten an Artefakten beobachten:

- Ungewöhnlich große Signalspitzen und damit ein unkontrolliertes Signalverhalten. Obwohl sich Ausgabesignal dauerhaft mit seiner Schwingungsamplitude im Wertebereich  $[-1, +1]$  aufhalten müsste, wird dieser deutlich überschritten.
- Unstetigkeiten („Knicke“) im Signalverlauf. Diese werden häufig als „Klick“-Geräusch wahrgenommen.

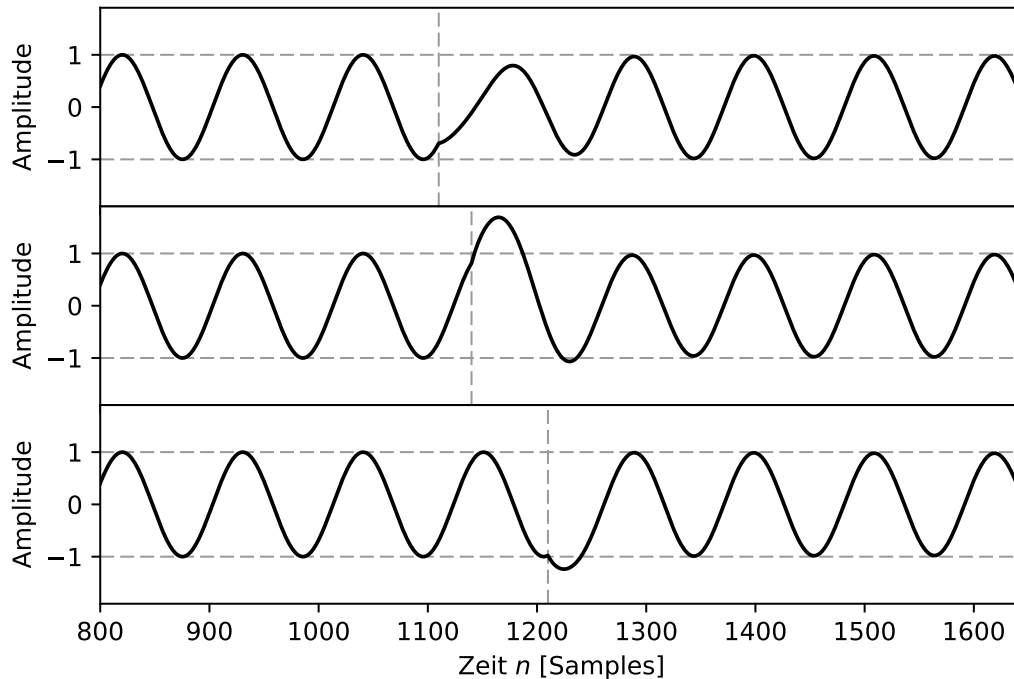


Abbildung 1: Verschiedene Artefakte eines zeitvarianten Digitalfilters. Eingangssignal war eine 400 Hz Sinusschwingung. Umschaltzeitpunkte sind jeweils durch die vertikale gestrichelte Linie gekennzeichnet.

Die Herausforderung bei der Realisierung zeitvarianter rekursiver Digitalfilter liegt also darin, die genannten Artefakte zu mindern.

### 1.3. Angestrebte Lösung

Bestehende Lösungsansätze (siehe Abschnitt 4) zur Minderung von Artefakten zeitvarianter rekursiver Digitalfilter sind in ihrer Realisierung häufig komplex und rechenintensiv. Unter anderem deshalb sind viele der bestehenden Lösungsansätze nicht für den Echtzeitbetrieb und damit nicht für den Audiobereich geeignet.

In dieser Arbeit werden daher bewusst praktikablere Lösungsansätze betrachtet, welche weniger komplex sind und einen geringeren Rechenaufwand benötigen. Deshalb wurde auch untersucht, inwieweit die Auswahl einer bestimmten Grundstruktur des zeitvarianten Digitalfilters einen positiven Einfluss auf die Artefakte nehmen kann. Zusätzlich wurde der Ansatz betrachtet, langsamere und dezentere Veränderungen am zeitvarianten Filter vorzunehmen.

Bei der Bewertung der Lösungsansätze wurde in dieser Arbeit der Fokus auf die Kontrolliertheit des Ausgabesignals im Zeitbereich gelegt.

### 1.4. Aufbau der Arbeit

In Abschnitt 2 werden die technischen und theoretischen Grundlagen beschrieben und formale Notationen etabliert. Im Anschluss daran wird in Abschnitt 3 das grundlegende Szenario eines zeitvarianten Filters skizziert, auf dem die Überlegungen und Experimente dieser Arbeit basieren. Abschnitt 4 bietet einen Überblick über den Stand der Technik zeitvarianter Digitalfilter. In den beiden genannten Abschnitten 3 und 4 werden ebenfalls für die weiteren Abschnitte wichtige Begriffe und Notationen beschrieben.

Mit Abschnitt 5 wird das Szenario eines zeitvarianten rekursiven Digitalfilters näher betrachtet und theoretische Überlegungen bezüglich eines optimalen Verhaltens bezüglich der auditiven Wahrnehmung angestellt. In Abschnitt 6 wird auf die Qualitätskriterien eingegangen, die ein zeitvarianter Digitalfilter bezogen auf Audiosignale erfüllen sollte.

In Abschnitt 7 werden schließlich die strukturellen Ansätze vorgestellt, welche im Rahmen dieser Arbeit auf ihr zeitvariantes Verhalten hin untersucht wurden. Die hauptsächliche vergleichende Untersuchung der strukturellen Ansätze findet sich im darauffolgenden Abschnitt 8. Dort werden zunächst in Abschnitt 8.1 zwei konkrete Tests im Zeitbereich besprochen. Danach wird die Ausgestaltung der Versuchsreihe begründet und erläutert. Anschließend wird in Abschnitt 8.3 eine Messmethode beschrieben, welche auf dem Konzept der Monte-Carlo-Simulation basiert. Mit dieser Methode lässt sich einschätzen, inwiefern sich das Ausgabesignal eines zeitvarianten Filters in einem kontrollierten Rahmen verhält. Die Messmethode wurde auf die Versuchsreihe angewandt. Die Ergebnisse davon finden sich in Abschnitt 8.3.3 und werden dort detailliert besprochen und interpretiert.

In Abschnitt 9 wird die Strategie des langsamen Umschaltens behandelt. Dort werden auch Ergebnisse aus der Monte-Carlo-basierten Messmethode präsentiert.

Mit Abschnitt 10 werden die erarbeiteten Ergebnisse und Erkenntnisse ganzheitlich zusammengefasst. Dort werden auch Empfehlungen zur Implementierung zeitvarianter Digitalfilter formuliert. Außerdem werden Möglichkeiten für künftige Forschungsarbeiten aufgezeigt.

## 2. Technische & theoretische Grundlagen

*Dieser Abschnitt soll vor allem mathematische Notationen und die wichtigsten technischen Grundlagen beschreiben, welche zum Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendig sind. Daher wird in Abschnitt [A.1](#) entsprechende Literatur empfohlen, welche einen breiten und didaktisch wertvollen Einstieg in die Themen der Signalverarbeitung leistet.*

### 2.1. Signale

Audiosignale sind Zeitsignale und können damit als mathematische Funktionen, bezogen auf die Zeit  $t$  angesehen werden. Solche Signale können als Summe von sinusförmigen Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen, Amplitude und Phase betrachtet werden. Man spricht von der Betrachtung eines Signals im „Frequenzbereich“, wenn man die Zusammensetzung der enthaltenen Frequenzen untersucht. Sei z.B.  $x(t)$  ein solches Audiosignal. Ein additiver frequenzmäßiger Bestandteil des zeitkontinuierlichen analogen Signals<sup>2</sup>  $x(t)$  sei  $p(t)$ :

$$p(t) = A \cos(\underbrace{2\pi f}_{\Omega} t + \theta) \quad (2.1)$$

- $A$  ist die Schwingungsamplitude
- $f$  ist die Frequenz, angegeben in Hz
- $\Omega$  ist die analoge Kreisfrequenz, angegeben in rad/s
- $\theta$  ist die Phase der Schwingung (zum Zeitpunkt Null), angegeben als Winkel in rad

Eine zeitkontinuierliche Schwingung kann auch in gleichförmigen Zeitabständen  $T_s$  ausgewertet bzw. „abgetastet“ werden. Die Abtastwerte, auch „Samples“ genannt, werden dann mit der Variablen  $n \in \mathbb{N}$  zu ganzzahligen Taktzeitpunkten indexiert.

$$p[n] = p(t) \Big|_{t=nT_s} = p(nT_s) = A \cos(\underbrace{2\pi f T_s}_{\omega} n + \theta) \quad (2.2)$$

- $T_s$  ist das Abtastintervall, angegeben in Sekunden. Das Abtastintervall ist auch der Kehrwert der Abtastrate  $f_s = 1/T_s$ , welche in Hz angegeben wird.
- $A$  ist die Schwingungsamplitude
- $f$  ist die Frequenz, angegeben in Hz
- $\omega$  ist die digitale Kreisfrequenz, angegeben in rad/s
- $\theta$  ist die Phase der Schwingung (zum Zeitpunkt Null), angegeben als Winkel in rad

---

<sup>2</sup>siehe dazu auch [\[Pap17\]](#)



Bei der Abtastung muss das Abtast-Theorem für gleichförmige Abtastung berücksichtigt werden: Das besagt, es dürfen im abzutastenden Signal keine Frequenzen größer oder gleich der halben Abtastrate enthalten sein. [PM13, Kapitel 1.4.2] Die halbe Abtastrate wird auch als Nyquist-Frequenz  $f_{\text{nyquist}} = f_s/2$  bezeichnet. Die entsprechende Kreisfrequenz ist also:

$$\omega_{\text{nyquist}} = 2\pi \frac{f_s}{2} T_s = 2\pi \frac{f_s}{2} \frac{1}{f_s} = \pi \quad (2.3)$$

Über die Eulersche Formel

$$e^{\pm j\varphi} = \exp(\pm j\varphi) = \cos \varphi \pm j \sin \varphi \quad (2.4)$$

kann die Kosinusfunktion auch folgendermaßen dargestellt werden: [Pap17]

$$\cos \varphi = \operatorname{Re}(e^{j\varphi}) \quad (2.5)$$

Der Operator  $\operatorname{Re}$  bildet den Real-Teil einer komplexen Zahl ab. Damit kann die Schwingung aus Gleichung (2.2) auch durch ihre komplexe Darstellung  $\hat{p}[n]$  folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} p[n] &= \operatorname{Re}(\hat{p}[n]) \\ &= \operatorname{Re}(A e^{j(\omega n + \theta)}) \\ &= A \cos(\omega n + \theta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.2. Lineare zeitinvariante Systeme (LTI)

Sei ein System  $\mathcal{T}$  mit einem Eingang und einem Ausgang (SISO<sup>3</sup>), wie in Abbildung 2 schematisch dargestellt, gegeben.

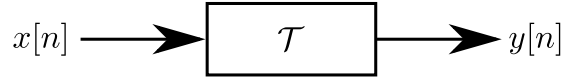


Abbildung 2: SISO-System (Single Input, Single Output)

Damit kann das Ausgabesignal  $y[n]$  für ein bestimmtes Eingangssignal  $x[n]$  durch folgende Notation mit dem Operator  $\mathcal{T}\{\}$  ausgedrückt werden:

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} \quad (2.7)$$

### 2.2.1. Grundlegende Eigenschaften

Lineare zeitvariante Systeme, kurz LTI-Systeme<sup>4</sup>, sind Systeme, die die Eigenschaften der Linearität und der Zeitinvarianz immer erfüllen. Im folgenden werden diese Eigenschaften

<sup>3</sup>Eingrößensystem aus dem Englischen Single Input, Single Output

<sup>4</sup>aus dem Englischen „linear time-invariant“

für zeitdiskrete (digitale) Systeme formuliert. Sie gelten aber genauso für zeitkontinuierliche LTI-Systeme.<sup>5</sup>

Das System  $\mathcal{T}$  sei in diesem Unterabschnitt ein LTI-System.

**Linearität** [PM13, Kapitel II.2.3]

Aufgrund der Eigenschaft der Linearität muss für das LTI-System  $\mathcal{T}$  mit jeden beliebigen Eingangssignalen  $x_1[n]$  und  $x_2[n]$  sowie jeden beliebigen Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  gelten:

$$\mathcal{T}\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 \mathcal{T}\{x_1[n]\} + a_2 \mathcal{T}\{x_2[n]\} \quad (2.8)$$

**Zeitinvarianz** [PM13, Kapitel II.2.3]

Aufgrund der Eigenschaft der Zeitinvarianz muss für das System  $\mathcal{T}$  mit jedem beliebigen Eingangssignal  $x[n]$  und jeder beliebigen Verschiebung um die Dauer  $M$  gelten:

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} \Rightarrow y[n - M] = \mathcal{T}\{x[n - M]\} \quad (2.9)$$

In Worten: Wird ein Eingangssignal um eine bestimmte Zeitdauer verschoben, so verschiebt sich die Systemreaktion um dieselbe Zeitdauer.

### 2.2.2. Wirkungsprinzip im Frequenzbereich

LTI-Systeme bearbeiten die Eingangssignale im Frequenzbereich. Sie nehmen dabei Einfluss in multiplikativer Art auf die Schwingungsamplitude und in additiver Art auf die Phase der im Eingangssignal enthaltenen Frequenzen. Diese Operation kann als Multiplikation mit der komplexwertigen Darstellung einer Schwingung ausgedrückt werden. Habe das LTI-System  $\mathcal{T}$  bei der Kreisfrequenz  $\omega$  die komplexwertige Frequenzantwort  $H_\omega$ , dann kann diese komplexe Zahl dargestellt werden mit ihrer Magnitude  $M$  und dem Winkel  $\alpha$ :

$$H_\omega = M e^{j\alpha} \quad (2.10)$$

Durchlaufe die sinusförmige Schwingung  $p[t]$  aus Gleichung (2.6) dieses LTI-System und erzeuge damit das Signal  $p_{\text{out}}[n]$ .

$$p_{\text{out}}[n] = \mathcal{T}\{p[n]\} \quad (2.11)$$

So kann die neue Amplitude und die neue Phase der Schwingung bestimmt werden, indem die Schwingung in ihrer komplexen Darstellung  $\hat{p}[n]$  mit der entsprechenden kom-

---

<sup>5</sup>In diesem Fall muss natürlich der zeitdiskrete Index  $n$  durch die zeitkontinuierliche Variable  $t$  ersetzt werden.

plexwertigen Frequenzantwort  $H_\omega$  multipliziert wird:

$$p_{\text{out}}[n] = \text{Re}(H_\omega \cdot \hat{p}[n]) \quad (2.12)$$

$$= \text{Re}\left(M e^{j\alpha} \cdot A e^{j(\omega n + \theta)}\right) \quad (2.13)$$

$$= \text{Re}\left(M \cdot A e^{j(\omega n + \theta + \alpha)}\right) \quad (2.14)$$

Damit wird deutlich, dass die Amplitude mit der Magnitude der Frequenzantwort multipliziert und die Phase mit dem Winkel der Frequenzantwort addiert wird.

Ist eine Frequenz im Eingangssignal nicht vorhanden, so ist ihre Amplitude gleich Null. Daraus folgt ein Nullprodukt mit der Frequenzantwort des LTI-Systems. Damit wird auch deutlich, dass LTI-Systeme in Signale keine Frequenzen einführen können, wenn sie im Eingangssignal nicht bereits vorhanden waren.

### 2.2.3. Impulsantwort und Faltung

Die zeitdiskrete Impulsfunktion  $\delta[n]$  wird gemeinhin definiert und notiert mit:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Durchläuft die Impulsfunktion  $\delta[n]$  ein LTI-System  $\mathcal{T}$ , dann erhält man mit der Systemreaktion die sogenannte *Impulsantwort* dieses Systems:

$$h[n] = \mathcal{T}\{\delta[n]\} \quad (2.16)$$

Die Impulsantwort identifiziert das System  $\mathcal{T}$  vollständig. Mit ihr kann der Einfluss des Systems im Frequenzbereich genau beschrieben werden. Außerdem kann bei bekannter Impulsantwort mithilfe der „Faltungsoperation“ die Systemreaktion  $y[n]$  für beliebige Eingangssignale  $x[n]$  berechnet werden. Die Faltungsoperation wird gemeinhin folgendermaßen notiert und definiert: [Mit11]

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k] \quad (2.17)$$

Für zeitkontinuierliche Signale & Systeme existiert ein gleichartiger Zusammenhang. Dort wird die zeitkontinuierliche Impulsfunktion  $\delta(t)$  wie in Gleichung (A.4) definiert. Die zeitkontinuierliche Faltung mit der zeitkontinuierlichen Impulsantwort  $h(t)$  wird gemeinhin folgendermaßen definiert: [Pap17, Kapitel XII.4.7]

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot h(t - u) \, du \quad (2.18)$$

Für die Operation der Faltung gelten die algebraischen Gesetze der Kommutativität, die Assoziativität und die Distributivität. [Mit11, Kapitel 4.4.1]

#### 2.2.4. Realisierung von digitalen LTI-Filtern

Digitale LTI-Filter bzw. zeitdiskrete LTI-Systeme können über die in Tabelle 1 aufgeführten Operationen realisiert werden. Die Realisierung eines LTI-Systems kann über *Blockdiagramme* exakt beschrieben werden. Die grundlegenden Operationen sind dort:

- **Addition** von Signalen.
  - In Blockdiagrammen notiert mit:  $\rightarrow \oplus \rightarrow$
- **Multiplikation** eines Signals mit einem **konstanten** Koeffizienten  $a$ .
  - In Blockdiagrammen notiert mit:  $\xrightarrow{a}$
- **Verzögerung** eines Signals um eine Dauer von  $M$  Taktzeitpunkten, mit  $M \in \mathbb{N}$ . Die Samples müssen hierfür also zwischengespeichert werden.
  - In Blockdiagrammen notiert mit:  $\rightarrow \boxed{z^{-M}} \rightarrow$

Betrachte man z.B. das LTI-System in Abbildung 3 mit einem Eingangssignal  $x[n]$  und dem Ausgabesignal  $y[n]$ .

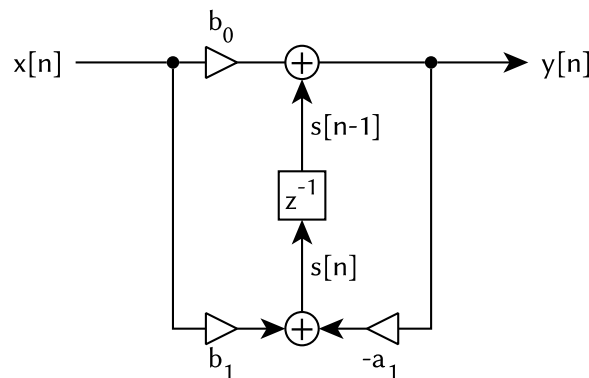


Abbildung 3: Blockdiagramm eines LTI-Systems

Durch Pseudo-Programmcode könnte eine mögliche Realisierung in einer prozeduralen Programmiersprache folgendermaßen formuliert werden:

```
FOR each point of discrete time n DO:
    x      = getNextInputSampleValue()
    y      = b0*x + s_delayed
    s_delayed = b1*x - a1*y
    putNextOutputSampleValue(y)
END OF LOOP
```

Damit lässt sich erkennen, dass das Verzögerungselement  $z^{-1}$  im Programmcode in Form der Variable `s_delayed` realisiert ist. Das LTI-System aus Abbildung 3 ist damit also Zustandsorientiert (*stateful*) mit einer sogenannten Zustandsvariable. Die Zustandsvariable wird üblicherweise mit dem Wert Null initialisiert. Sie ist abhängig vom Eingangssignal und von den Koeffizienten.

Dieses Beispiel verdeutlicht auch das Konzept der sog. **Zustandsraumdarstellung** eines LTI-Systems. Die Operation eines LTI-Systems kann in zwei grundlegenden Schritten formuliert werden:

- Das aktuelle Ausgabesignal wird berechnet, indem das aktuelle Eingangssignal über die Koeffizienten und die aktuellen Zustandsvariablen mit einer bestimmten *Rechenvorschrift* transformiert werden. Die *Rechenvorschrift* ergibt sich dabei z.B. aus der Struktur.
- Die neuen Zustände der Zustandsvariablen werden berechnet, indem die „noch aktuellen“ Zustandsvariablen über die Koeffizienten und dem aktuellen Eingangssignal mit einer bestimmten *Rechenvorschrift* transformiert werden.

Bei LTI-Systemen lässt sich diese *Rechenvorschrift* mithilfe linearer Algebra formulieren. Diesen Umstand macht sich die Zustandsraumdarstellung zunutze, bei der ein LTI-System mittels linearer Algebra formuliert wird. [Sun09] [Mit11, Kapitel 12.11.3]

Mit **Differenzengleichungen** existiert eine weitere Möglichkeit, das System aus Abbildung 3 zu beschreiben. Dazu werden die Gleichungen entsprechend im Zeitbereich formuliert. Für das konkrete Beispiel können diese folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$y[n] = b_0 x[n] + s[n-1] \quad (2.19)$$

$$s[n] = b_1 x[n] - a_1 y[n] \quad (2.20)$$

### 2.2.5. Filter mit unendlicher Impulsantwort (IIR)

Die Struktur in Abbildung 3 weist einen Rückkopplungspfad (über den Koeffizienten  $a_0$ ) auf. Filter, die in ihren Strukturen Rückkopplungspfade enthalten, können eine unendlich lange Impulsantwort besitzen und werden daher als IIR-Filter im Gegensatz zu FIR-Filtern mit endlicher Impulsantwort bezeichnet:

- IIR: Infinite Impulse Response
- FIR: Finite Impulse Response

Digitale IIR-Filter können auch als rekursive Filter bezeichnet werden.

### 2.2.6. Stabilität (BIBO)

Systeme, welche Signale verarbeiten, können instabil werden. Eine verbreitete Definition für die Stabilität von Systemen ist die BIBO-Stabilität [Mit11]. BIBO steht für „Bounded-Input, Bounded-Output“.

Ein Signal  $x[n]$  wird als *beschränktes Signal* bezeichnet, wenn für alle  $n$  gilt:

$$|x[n]| < B_x \quad (2.21)$$

Die reellwertige Schranke  $B_x$  muss dabei eine endliche positive Konstante sein.

**BIBO-Stabilität:** Sei ein System  $\mathcal{T}$  gegeben (nicht zwingend LTI). Dieses System ist nur dann stabil, wenn für jedes beschränkte Eingangssignal das entsprechende Ausgangssignal ebenfalls beschränkt ist.

Abbildung 4 zeigt die Impulsantwort eines zeitdiskreten LTI-Systems, welches die BIBO-Stabilität nicht erfüllt. Das Eingangssignal besitzt mit der zeitdiskreten Impulsfunktion  $\delta[n]$  die endliche positive konstante Schranke  $B_\delta = 1$ . Das Signal am Ausgang ist jedoch nicht beschränkt. Damit ist das System instabil.

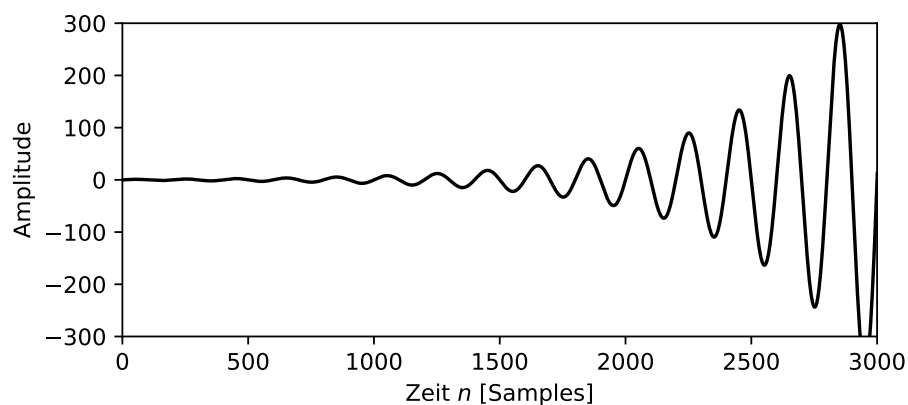


Abbildung 4: Impulsantwort eines instabilen LTI-Systems zweiter Ordnung.

## 2.3. z-Transformation & DTFT

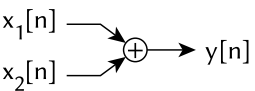
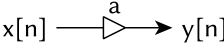
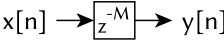
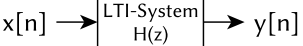
### 2.3.1. Definition und Eigenschaften

Bilaterale z-Transformation für ein zeitdiskretes Signal  $x[n]$  ist definiert mit:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad , \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.22)$$

Setzt man für die Variable  $z = e^{j\omega} \Rightarrow X(e^{j\omega})$  ein, so erhält man die „Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale“ (DTFT). Damit erhält man für eine bestimmte Kreisfrequenz  $\omega$  eine komplexwertige Zahl, deren Magnitude (Betrag) und Phase (Winkel) den entsprechenden Frequenzanteil des Signals beschreibt. Die z-Transformierte wird hier also auf dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene ausgewertet.

Tabelle 1: Wichtige Eigenschaften der z-Transformation

Blockdiagramm	$y[n]$	$Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$
	$x_1[n] + x_2[n]$	$X_1(z) + X_2(z)$
	$a x[n]$	$a X(z)$
	$x[n - M]$	$z^{-M} X(z)$
	$x[n] * h[n]$	$H(z)X(z)$

### 2.3.2. Übertragungsfunktion zur Analyse von LTI-Systemen

Wenn ein Signal  $x[n]$  ein System mit der Impulsantwort  $h[n]$  durchläuft, dann gilt für die z-Transformierte des Ausgangssignals  $Y(z)$ :

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.23)$$

Betrachtet man die Relation von Eingangs- und Ausgangssignal, erhält man die **Übertragungsfunktion** des LTI-Systems:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.24)$$

Mit  $H(e^{j\omega})$  lässt sich dann entsprechend die Frequenzantwort für beliebige Kreisfrequenzen  $\omega$  berechnen.

Übertragungsfunktionen zeitdiskreter LTI-Systeme sind rationale Funktionen der Variable  $z$ . So kann eine Übertragungsfunktion  $H(z)$  durch ihr ganzrationales *Nennerpolynom*  $N(z)$  und ihr ganzrationales *Zählerpolynom*  $D(z)$  folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (2.25)$$

Damit kann die Übertragungsfunktion durch die entsprechenden **Pol- und Nullstellen** beschrieben und analysiert werden. Polstellen der Übertragungsfunktion sind die Nullstellen des Nennerpolynoms. Nullstellen der Übertragungsfunktion sind die Nullstellen des Zählerpolynoms.

Die Stabilität (BIBO) eines LTI-Systems hängt dabei ausschließlich von den Polstellen ab. Ein zeitdiskretes LTI-System ist nur dann stabil, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen. D.h. sie dürfen auch nicht auf dem Einheitskreis liegen.

## 2.4. Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformierte eines zeitkontinuierlichen Signals  $f(t)$  ist definiert<sup>6</sup> mit:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(s)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad , \quad s \in \mathbb{C} \quad (2.26)$$

Setzt man für die Variable  $s = j\Omega \Rightarrow X(j\Omega)$  ein, so erhält man die „kontinuierliche Fourier-Transformation“ (FT). Damit erhält man für eine bestimmte (analoge) Kreisfrequenz  $\Omega$  eine komplexwertige Zahl, deren Magnitude (Betrag) und Phase (Winkel) den entsprechenden Frequenzanteil des Signals beschreibt. Die Laplace-Transformierte wird hier also auf der Imaginär-Achse ausgewertet.

Mit der Laplace-Transformation lassen sich ähnlich zur z-Transformation LTI-Systeme (hier zeitkontinuierlich) analysieren. Dabei ist ein wichtiges Element von zeitkontinuierlichen LTI-Strukturen der Integrierer, welcher in Blockdiagrammen folgendermaßen notiert wird:

$$x(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow y(t) \quad (2.27)$$

Der Integrierer beschreibt dabei folgendes zeitabhängiges Integral:

$$y(t) = \int_0^t x(u) du \quad (2.28)$$

Im Laplace-Bereich entspricht diese Operation einer Multiplikation mit  $\frac{1}{s} = s^{-1}$ :

$$Y(s) = \frac{1}{s} X(s) \quad (2.29)$$

---

<sup>6</sup>siehe dazu auch [Pap17, Kapitel XIII]



**Übertragungsfunktionen:** Ähnlich zur z-Transformation entspricht die zeitkontinuierliche Faltung zweier Signale einer Multiplikation ihrer Laplace-Transformierten. Daher lässt hier ebenso das Konzept einer Übertragungsfunktion  $H(s)$  anwenden mit:

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = H(s)X(s) \quad \Leftrightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (2.30)$$

Ähnlich zur z-Transformation lässt sich die Übertragungsfunktion  $H(s)$  auch auf ihre Frequenzantwort mit  $H(j\Omega)$  hin untersuchen. Ferner lässt sich die Übertragungsfunktion  $H(s)$  als rationale Funktion auch durch Pol- und Nullstellen beschreiben.

## 2.5. Bilineare Transformation

### 2.5.1. Eigenschaften

Die bilineare Transformation [PM13, Kapitel 10.3.3] kann analoge (zeitkontinuierliche) LTI-Filter in digitale (zeitdiskrete) LTI-Filter transformieren, wobei die Stabilität erhalten bleibt. Sie wird formuliert mit:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1+sT/2}{1-sT/2} \quad (2.31)$$

Ein analoger Filter  $H_a(s)$  kann damit in den z-Bereich überführt werden, indem die Variable  $s$  mit der entsprechenden Gleichung (2.31) ersetzt wird:

$$H_d(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}} \quad (2.32)$$

Äquivalent dazu können auch die einzelnen Pol- und Nullstellen von  $H_a(s)$  mit der Gleichung (2.31) in die z-Ebene überführt werden. Dabei ist zu beachten, dass Punkte bei  $|s| = \infty$  durch die bilineare Transformationen an den Punkt  $z = -1$  abgebildet werden.

Mit der bilinearen Transformation wird die gesamte analoge Frequenzachse  $s = j\Omega$  des analogen Filters auf den Einheitskreis der z-Ebene  $z = e^{j\omega}$  abgebildet. Damit wird ein unendlicher Wertebereich auf einen endlichen abgebildet. Der Zusammenhang zwischen analoger Frequenz  $\Omega$  und digitaler Frequenz  $\omega$  lautet dabei folgendermaßen:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 2 \arctan\left(\frac{T}{2}\Omega\right) \quad (2.33)$$

Die analoge Frequenzantwort wird dabei gestaucht. Dieser Effekt wird als „Frequency-Warping“ bezeichnet und wird in Abbildung 5 deutlich.

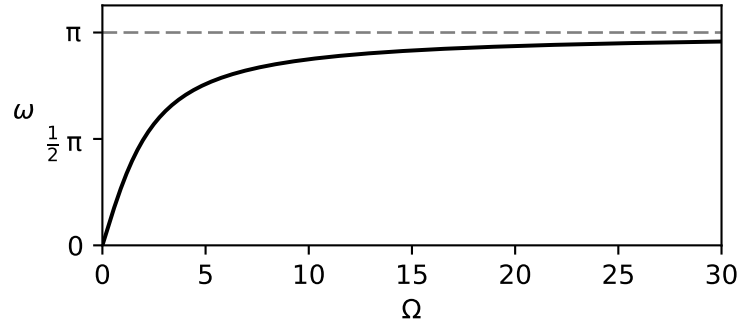


Abbildung 5: Abbildung der analogen Frequenz  $\Omega$  auf die digitale Frequenz  $\omega$  im Rahmen der bilinearen Transformation mit  $T = 1$ .

### 2.5.2. Verschiebung der Grenzfrequenz eines Tiefpass-Filters

Das Frequency-Warping kann mit dem Parameter  $T$  der bilinearen Transformation kontrolliert werden:

$$T = \frac{2}{\Omega} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.34)$$

Durch Einsetzen von  $\Omega$  und  $\omega$  kann ein entsprechender Wert für  $T$  berechnet werden. Wird mit diesem ermittelten Wert für den Parameter  $T$  die bilineare Transformation durchgeführt, dann wird der Punkt  $s = j\Omega$  an den Punkt  $z = e^{j\omega}$  abgebildet. Damit lässt sich über den Parameter  $T$  z.B. die Grenzfrequenz  $\Omega_{3\text{dB}}$  eines Tiefpass-Filters an eine beliebige digitale Frequenz  $\omega_{3\text{dB}}$  verschieben.

## 2.6. Elliptic Minimal Q-Factor (EMQF) Filter<sup>7</sup>

„Elliptic Minimal Q-Factor“-Filter wurden durch Lutovac [RL94] beschrieben und bilden eine Klasse analoger Tiefpass-Filter mit unendlich langer Impulsantwort (IIR). Die Frequenzantwort eines EMQF-Filters kann sowohl im Durchlassbereich als auch im Sperrbereich eine Welligkeit aufweisen. Die beiden Welligkeiten hängen bei EMQF-Filtern miteinander zusammen. So bewegen sich die Welligkeiten der quadrierten Frequenzantwort in einem gleich großen Korridor. Abbildung 6 verdeutlicht diesen Zusammenhang an einem Beispiel.

Wenn ein EMQF-Filter so entworfen wird, dass der Korridor der Welligkeiten den Wert Null annimmt, erhält man einen sogenannten Butterworth-Filter [LTE00; PM13]. Butterworth-Filter bilden also eine Untermenge der EMQF-Filter.

Ein EMQF-Filter kann durch zwei Parameter vollständig beschrieben werden:

- Ordnung  $N$
- Selektivitätsfaktor  $\xi$

---

<sup>7</sup>Die in diesem Abschnitt beschriebenen Zusammenhänge wurden durch den Autor der vorliegenden Arbeit teilweise bereits für das Projekt [Wet17] erarbeitet und dokumentiert.

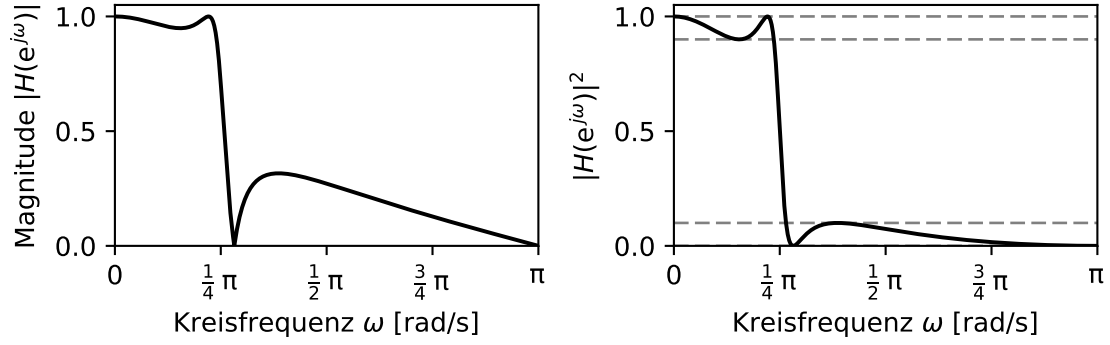


Abbildung 6: Frequenzantwort eines bilinear transformierten EMQF-Filter der Ordnung  $N = 3$  und Dämpfung  $A_s = 10$  dB im Sperrbereich.

Der Selektivitätsfaktor  $\xi$  hängt dabei mit der Welligkeit und der Flankensteilheit des Tiefpass-Filters zusammen. Der Selektivitätsfaktor kann z.B. anhand der gewünschten Dämpfung  $A_s$  im Sperrbereich angegeben werden. Die Dämpfung  $A_s$  wird als positive Zahl in Dezibel<sup>8</sup> angegeben. Der Sperrbereich eines solchen Tiefpass-Filters beginnt also bei der Frequenz  $\Omega_s$ , wenn ab dort die Magnitude der Frequenzantwort immer kleiner oder gleich der Dämpfung  $A_s$  ist.

Der Parameter  $\xi$  kann bei gegebener Ordnung  $N$  und Dämpfung  $A_s$  im Sperrbereich mit folgenden Formeln [LTE00, Kapitel 9.7.2] näherungsweise bestimmt werden:

$$L = 10^{A_s/10} - 1 \quad (2.35)$$

$$t = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{L^2}}}{1 - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{L^2}}} \quad (2.36)$$

$$q = t + 2t^5 + 15t^9 + 150t^{13} \quad (2.37)$$

$$g = e^{\ln(q)/N} \quad (2.38)$$

$$q_0 = \frac{g + g^9 + g^{25} + g^{49} + g^{81} + g^{121} + g^{169}}{1 + 2(g^4 + g^{16} + g^{36} + g^{64} + g^{100} + g^{144})} \quad (2.39)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-2q_0}{1+2q_0}\right)^4}} \quad (2.40)$$

Bei gegebener Ordnung  $N$  und dem Selektivitätsfaktor  $\xi$  können dann die Polstellen  $s_{p,i}$  und Nullstellen  $s_{z,i}$  der Übertragungsfunktion  $H(s)$  des Prototyp-Filters für den Laplace-Bereich berechnet werden [LTE00, Kapitel 10.3.5]. Dabei sei der Index  $i \in (1, 2, \dots, N)$ .

<sup>8</sup>Dezibel-Angabe bezogen auf die Magnitude von 1.

Zuerst werden die Nullstellen  $X_i$  der rational elliptischen Funktion bestimmt mit:

$$X_i = -\operatorname{cd}\left(\left(\frac{2i-1}{N}\right)K\left(\frac{1}{\xi}\right), \frac{1}{\xi}\right) \quad (2.41)$$

$$X_i = 0, \text{ falls } N \text{ ungerade und } i = \frac{N+1}{2}$$

Dabei ist  $\operatorname{cd}(u, k)$  eine der jacobischen elliptischen Funktionen [Olv+10] und  $K(k)$  das vollständige elliptische Integral erster Art:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.42)$$

Dann ergibt sich die  $i$ -te Polstelle  $s_{p,i}$  mit:

$$s_{p,i} = -\frac{\sqrt{1-X_i^2}\sqrt{\xi-X_i^2}}{\xi+X_i^2} + j\frac{X_i(\xi+1)}{\xi+X_i^2} \quad (2.43)$$

Die  $i$ -te Nullstelle  $s_{z,i}$  ergibt sich mit [LTE00, Eq 12.373]:

$$s_{z,i} = j\frac{\xi}{\sqrt{\xi}X_i} \quad (2.44)$$

Bei der Realisierung ist zu beachten, dass im Falle von  $X_i = 0$  für die zugehörige Nullstelle gilt  $|s_{z,i}| = \infty$ . Eine Nullstelle bei  $|s| = \infty$  kann durch eine entsprechende rationale Übertragungsfunktion wie z.B. Gleichung (7.4) realisiert werden.

Die Polstellen  $s_{z,i}$  eines EMQF-Filters liegen auf einem Kreis in der  $s$ -Ebene, welcher die Imaginärachse  $j\Omega$  bei der 3dB-Grenzfrequenz  $\Omega_{3\text{dB}}$  schneidet. Im Falle der beschriebenen Entwurfsprozedur gilt für die Grenzfrequenz immer  $\Omega_{3\text{dB}} = 1$ .

Abbildung 7 zeigt die Pol- und Nullstellen eines konkreten Prototyp-Filters im Laplace-Bereich und seinen bilinear transformierten digitalen Filter im  $z$ -Bereich. Abbildung 8 zeigt die entsprechende Frequenzantwort des digitalen Filters. Dort wird auch ersichtlich, dass der Phasengang eines EMQF-Filters nicht linear und auch nicht stückweise linear verläuft.

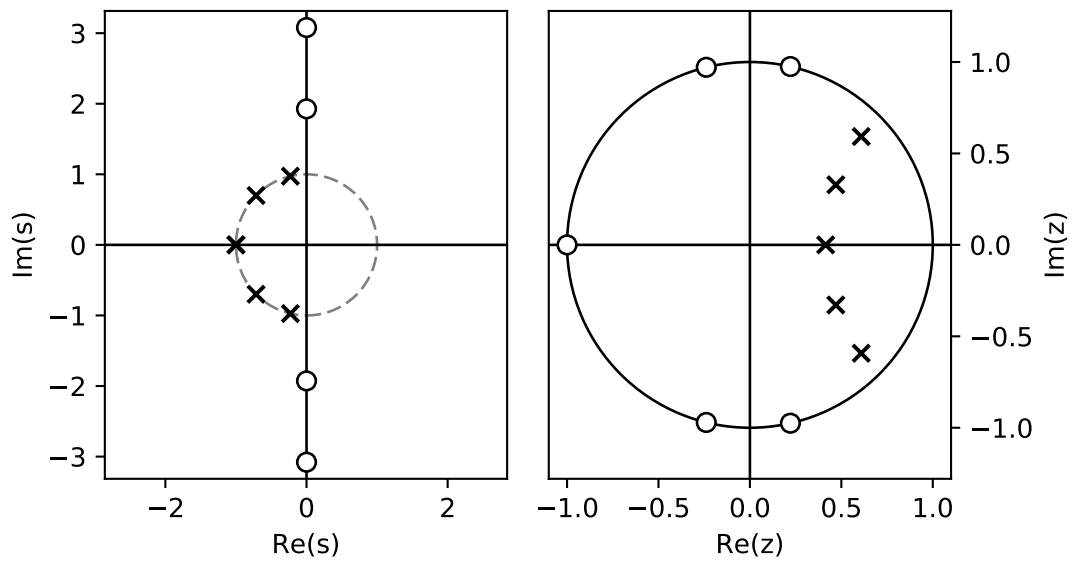


Abbildung 7: Pol- und Nullstellen eines EMQF-Filters mit Ordnung  $N = 5$  und Dämpfung  $A_s = 50$  dB im Sperrbereich. Prototyp-Filter im Laplace-Bereich (links) mit  $\Omega_{3\text{dB}} = 1$ . Bilinear transformierter Filter im z-Bereich (rechts) mit  $\omega_{3\text{dB}} = \pi/4$ .

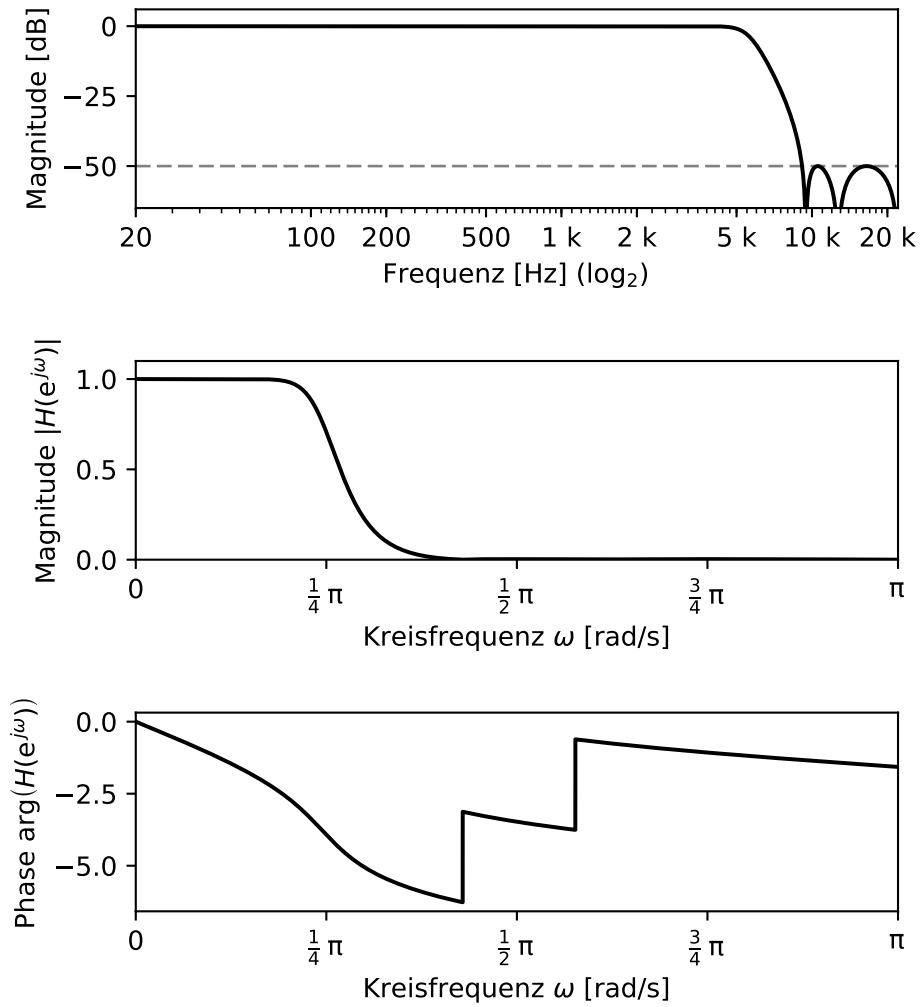


Abbildung 8: EMQF-Filter der Ordnung  $N = 5$  und Dämpfung  $A_s = 50$  dB im Sperrbereich. Grenzfrequenz  $\omega_{3\text{dB}} = \pi/4$ . Frequenzangaben bezüglich  $f_s = 44.1$  kHz.

### 3. Zeitvariante Digitalfilter

Die Grundlegende Motivation für den Einsatz zeitvarianter Digitalfilter besteht darin, dass das Frequenzverhalten über die Zeit im laufenden Betrieb verändert werden kann. Deshalb wird das Szenario betrachtet, dass sich ein zeitvariantes System vor einem gewissen *Umschaltzeitpunkt*  $n_{\text{switch}}$  äquivalent zu einem LTI-System  $H_{\text{pre}}(z)$  verhalten soll. Nach dem Umschaltzeitpunkt  $n_{\text{switch}}$  soll sich das zeitvariante System dann äquivalent zu einem LTI-System  $H_{\text{post}}(z)$  verhalten.  $H_{\text{pre}}(z)$  wird als *Startfilter* und  $H_{\text{post}}(z)$  als *Zielfilter* bezeichnet.

Im Falle von FIR-Filtern ist dieses Szenario leicht realisierbar. Bei FIR-Filtern in nicht-transponierter Struktur entsprechen die Zustandsvariablen den vergangenen Samples des Eingangssignals. Das Ausgangssignal wird also berechnet als eine Linearkombination der vergangenen Samples des Eingangssignals. Bei einem FIR-System kann also sofort das äquivalente Verhalten zu einem neuen LTI-System realisiert werden, indem die Koeffizienten entsprechend ausgetauscht werden.

Im Falle von IIR-Filtern stellt das gewünschte Szenario dagegen eine Herausforderung dar. Hier sind die Zustandsvariablen nicht mehr unabhängig von den Koeffizienten. Die Zustandsvariablen sind abhängig vom Eingangssignal, Ausgangssignal (unmittelbar oder mittelbar) und häufig auch von den Koeffizienten. Damit sind die Zustandsvariablen auch abhängig vom vergangenen Frequenzverhalten des Filters. Wenn jetzt im laufenden Betrieb die Koeffizienten ausgetauscht werden, passen die alten Zustandsvariablen nicht zum neuen Gesamtsystem. Lässt man trotzdem die Zustandsvariablen bei einem Umschaltvorgang unangetastet, können Artefakte entstehen.

In der vorliegenden Arbeit wurde der Fokus auf die Zeitvarianz der Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}}$  eines Tiefpassfilters gelegt. Start- und Zielfilter besitzen also unterschiedliche Grenzfrequenzen. Deshalb wird nachfolgend die Grenzfrequenz häufig als Zweiertupel mit  $\hat{f}_{3\text{dB}}$  angegeben:

$$\hat{f}_{3\text{dB}} = (f_{3\text{dB}(\text{pre})}, f_{3\text{dB}(\text{post})}) \Rightarrow \begin{cases} f_{3\text{dB}} = f_{3\text{dB}(\text{pre})} & \text{für } n < n_{\text{switch}} \\ f_{3\text{dB}} = f_{3\text{dB}(\text{post})} & \text{für } n \geq n_{\text{switch}} \end{cases} \quad (3.1)$$

## 4. Stand der Technik & Forschung

### 4.1. Output-Switching Methode

Ein Lösungsansatz für zeitvariante Digitalfilter wurde in [ZZ88] vorgeschlagen und in [VL98] vereinfachend als „Output-Switching Method“ beschrieben. Die Grundidee basiert hier auf parallel laufenden LTI-Filtern, die alle mit demselben Eingangssignal betrieben werden. Findet ein Umschaltvorgang statt, so wird dann auf den Ausgang des Filters mit entsprechendem Frequenzverhalten gewechselt. Damit muss für jeden Koeffizientensatz, dessen Filtercharakteristik im zeitvarianten System möglich sein soll, ein weiterer LTI-Filter betrieben werden.

Im Falle eines einzigen Umschaltvorgangs sind damit zwei parallele LTI-Filter zu betreiben. Abbildung 9 zeigt die Output-Switching Methode für diesen Fall als Blockdiagramm.

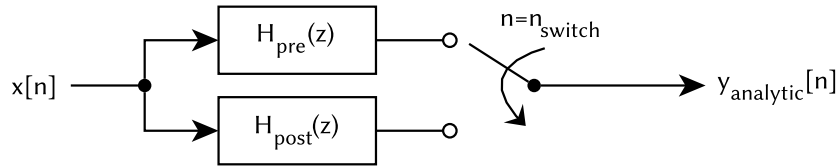


Abbildung 9: Output-Switching Methode für einen einzigen Umschaltvorgang.

Das Ausgangssignal  $y_{\text{analytic}}[n]$  kann für diesen Fall mit der Output-Switching Methode folgendermaßen formuliert werden:

$$y_{\text{analytic}}[n] = \begin{cases} y_{\text{pre}}[n] & \text{für } n < n_{\text{switch}} \\ y_{\text{post}}[n] & \text{für } n \geq n_{\text{switch}} \end{cases} \quad (4.1)$$

Damit erreicht die Output-Switching Methode aus Sicht des momentanen Amplituden- und Phasengangs ein ideales Verhalten. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit das Ergebnis der Output-Switching Methode auch als *analytische Antwort* oder *analytische Systemreaktion* mit  $y_{\text{analytic}}[n]$  bezeichnet.

Die Differenz einer zeitvarianten Systemreaktion  $y_{\text{varying}}[n]$  zu der entsprechenden analytischen Systemreaktion wird als *Transient-Signal* bezeichnet und mit  $y_{\text{transient}}[n]$  notiert:

$$y_{\text{varying}}[n] = y_{\text{analytic}}[n] + y_{\text{transient}}[n] \quad (4.2)$$

Abbildung 10 zeigt das entsprechende Schema für den Fall eines einzigen Umschaltvorgangs.

Das Transient-Signal kann also bezogen auf die Output-Switching Methode als ein Fehler-signal angesehen werden. Dies stellt eine mögliche Grundlage zur Bewertung zeitvarianter Filter dar.



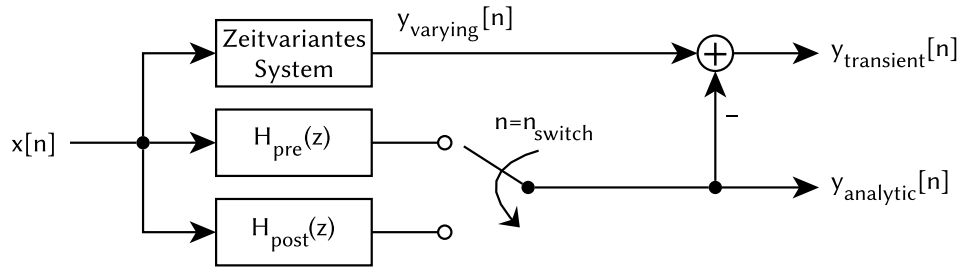


Abbildung 10: Berechnung des Transient-Signals eines speziellen zeitvarianten Systems mithilfe der Output-Switching Methode für einen einzigen Umschaltvorgang.

## 4.2. Zetterberg-Zhang Methode

Die in [ZZ88] vorgeschlagene „Zetterberg-Zhang Methode“ entspricht im Ergebnis der Output-Switching Methode, jedoch nicht in der Realisierung. Ein Unterschied liegt darin, dass die Zetterberg-Zhang Methode in der Zustandsraumdarstellung formuliert wurde. Ferner müssen nicht alle gewünschten Filter parallel betrieben werden, dafür muss aber zu jedem Zeitpunkt das gesamte vergangene Eingangssignal bekannt sein. Wenn dann ein Umschaltvorgang stattfindet, werden die neuen Zustandsvariablen errechnet. Es wird sozusagen dann erst begonnen, einen entsprechenden LTI-Filter mit dem gesamten Eingangssignal zu betreiben. Es ist damit trivial, dass so die idealen neuen Werte für die Zustandsvariablen ermittelt werden können.

## 4.3. Modifizierte Zetterberg-Zhang Methode

In [VL98] wird eine Modifikation der Zetterberg-Zhang Methode vorgeschlagen. Bei dieser werden die Zustandsvariablen für einen Umschaltvorgang nicht mehr mit dem gesamten vergangenen Eingangssignal errechnet, sondern nur noch mit einer bestimmten Anzahl der vergangenen Samples des Eingangssignals. Die Methode macht sich die Tatsache zunutze, dass die meisten praxisrelevanten LTI-Filter exponentiell (oder ähnlich schnell) abfallende Impulsantworten besitzen. Insofern ist der additive Einfluss, den ein sehr altes Eingangssample auf das aktuelle Ausgangssample leistet, relativ gering. Dies kann man sich daran klar machen, dass eine diskrete Faltung auch als eine Summe von Impulsantworten, die jeweils nach Eingangssample gewichtet und verzögert wurden, definiert werden kann.

## 4.4. Zwischenkoeffizienten nach Rabenstein

In [Rab88] wird das Szenario eines einzigen Umschaltvorgangs um einen weiteren Umschaltvorgang ergänzt. Das Umschalten erfolgt also in zwei Schritten. Zuerst wird auf

sogenannte „Zwischenkoeffizienten“ umgeschaltet und auch entsprechend ein Ausgangssample berechnet und ausgegeben. Direkt nach diesem Taktzeitpunkt werden die Koeffizienten zu denen des Zielfilters umgeschaltet, womit der Umschaltvorgang abgeschlossen ist.

Im Unterschied zum naiven Umschalten wird also ein Umschaltvorgang zu Zwischenkoeffizienten für einen Taktzeitraum eingeschoben. Dadurch sollen die Zustandsvariablen so beeinflusst werden, dass Artefakte gemindert werden. Rabensteins Methode orientiert sich ebenfalls an der Output-Switching Methode, indem statistisch die analytische Systemreaktion angestrebt wird. Die Zwischenkoeffizienten sind abhängig von den Koeffizienten des Start- und Zielfilters, jedoch nicht vom Eingangssignal. Somit können sie berechnet werden, ohne den Signalkontext kennen zu müssen.

### 4.5. Stabilität

Die Stabilität zeitvariant betriebener Strukturen ist eine weitere Herausforderung. Betrachtet man zu jedem Zeitpunkt eine Struktur und ihre aktuellen Koeffizienten als LTI-System, so könnte man die LTI-Stabilität dieses momentanen Systems ermitteln. Ist die LTI-Stabilität zu jedem Zeitpunkt gegeben, bedeutet dies aber nicht zwingend, dass sich das zeitvariante Gesamtsystem stabil verhält. Dieser Zusammenhang wurde durch Laroche in [Lar98; Lar07] erarbeitet. Dort beschrieb Laroche in auch zwei mathematische Kriterien, mithilfe derer die zeitvariante Stabilität einer Filterstruktur bewiesen werden kann. Dabei genügt es, wenn eines der beiden Kriterien erfüllt wird. Die beiden Kriterien wurden für die Zustandsraumdarstellung formuliert. Erfüllt eine Struktur eine der beiden Kriterien von Laroche, dann verhält sich die Struktur im zeitvarianten Fall stabil, solange die Koeffizienten zu jedem Zeitpunkt einem stabilen LTI-System entsprechen.

In [RC85] beschrieb Rabenstein und Czarnach eine Methode zur Stabilisierung von beliebigen Strukturen, die im zeitvarianten Fall instabil werden könnten. Die Stabilisierung findet in der entsprechenden Zustandsraumdarstellung der Struktur statt.

### 4.6. Topology-Preserving Transformation (TPT)

Zavalishin stellte in [Zav15] die „Topology-Preserving Transformation“ (TPT) vor. Bei dieser handelt es sich im Wesentlichen um eine graphische Version der bilinearen Transformation (BLT). Deshalb bleibt die Topologie des analogen Prototyp-Filters bis zu einem gewissen Grad erhalten. Zavalishin behauptete in seiner Arbeit [Zav15, Preface], dass die TPT hauptsächlich ein guter Ansatz für „hochqualitative zeitvariante Digitalfilter“ sei.

In [Wis14] wurde unter anderem die TPT untersucht. Die Topologie des analogen Prototyp-Filters ist dort der „State-Variable Filter“, welcher auch in Zavalishins Arbeit detailliert besprochen wird. In [Wis14] konnte Wishnick die zeitvariante Stabilität jener Struktur beweisen.

### 4.7. Wahrnehmung

Die Forschungen von Zetterberg, Zhang und Rabenstein waren hauptsächlich durch digitale Sprachsynthese motiviert. Dagegen untersuchte Wishnick in [Wis14] verschiedene Ansätze und Strukturen auf ihre Eignung für musikbezogene Anwendungen. Dazu wurden die Lösungsansätze auch einem Hörtest unterzogen. Alle 21 Probanden des Tests waren erfahren im Musizieren und in der Musikproduktion. Am besten schnitt dort die transponierte Direktstruktur II ab, welche aber keine zeitvariante Stabilität erfüllt. Ihr Pendant, welches durch die Methode nach Rabenstein und Czarnach stabilisiert wurde, schnitt fast genauso gut bei den Probanden ab. Die TPT wurde nur wenig schlechter bewertet.

Am schlechtesten bewerteten die Probanden die Output-Switching Methode. Unter anderem deshalb kommt Wishnick zum Schluss, dass für musikbezogene Anwendungen das Verhalten der Output-Switching Methode nicht als Maßstab im positiven Sinne geeignet ist.

Abschließend empfiehlt Wishnick die TPT für musikbezogene Anwendungen, da sie bei den Hörtests gut abschnitt und sich zusätzlich durch zeitvariante Stabilität, einfache Implementierung, geringen Rechenaufwand und Echtzeitfähigkeit auszeichne.

## 5. Vorausgehende Überlegungen

Wie in Abschnitt 4.7 beschrieben, kommt Wishnick in [Wis14] zum Schluss, dass die Output-Switching Methode für musikbezogene Anwendungen aus Sicht der Wahrnehmung ungeeignet ist. Dieser Umstand wird auch klar, wenn man die damit verbundenen Phänomene betrachtet:

Wird die Grenzfrequenz eines IIR-Filters mit nicht-linearem Phasengang verändert, so bedeutet dies für eine beliebige Frequenz bezüglich der Frequenzantwort, dass sich ihre Phase und/oder ihre Amplitude verändern kann. Im Falle der Output-Switching Methode geschieht die Veränderung von Phase und Amplitude von einem Tastzeitpunkt zum anderen. So entsteht in Amplitude und Phase ein „Sprung“.

Die Abbildungen 11 und 12 zeigen jeweils ein konkretes Beispiel für einen Phasen- bzw. Amplitudensprung. In beiden Fällen zeigt das Spektrogramm, dass durch die entsprechende Unstetigkeit neue Energie in Frequenzbändern entsteht, wo ohne die Unstetigkeit keine wäre. Bei der Output-Switching Methode entsteht also additiv Energie bei Frequenzen, die im Eingangssignal nicht vorhanden waren. Damit ist diese Methode auch nicht-linear.

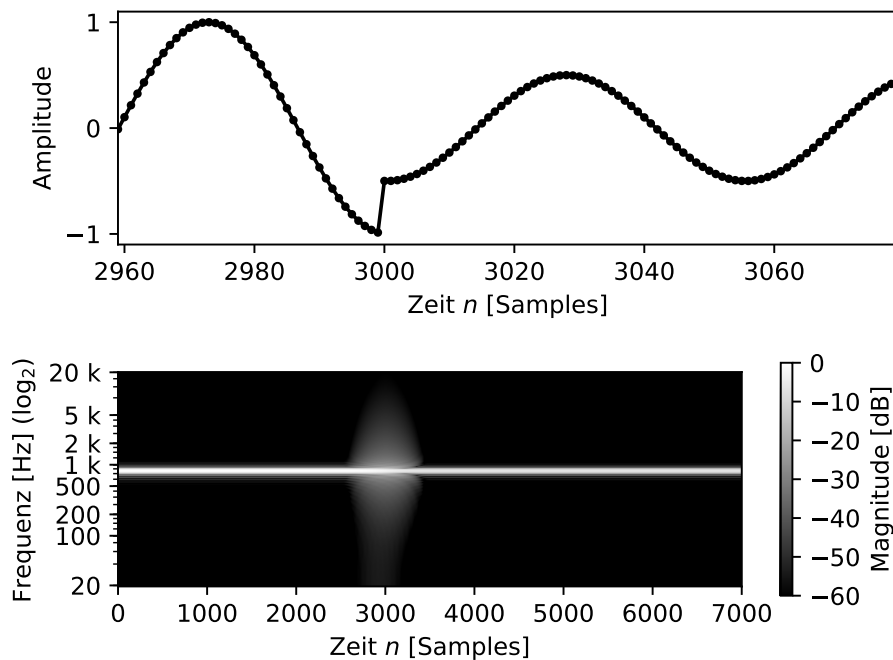


Abbildung 11: Amplitudensprung im Zeitsignal (oben), 800 Hz bei 44.1 kHz Abtastrate. Entsprechendes Spektrogramm (unten) durch eine gleitende DTFT mit jeweils einem Hann-Fenster von 1000 Samples Breite (22.7 ms).

Man nehme ein Spektrogramm als näherungsweise Modell für die menschliche auditive Wahrnehmung an. Dann ist in den vorliegenden Beispielen unschwer zu erkennen, dass

sich die Unstetigkeiten durch kurze breitbandige Artefakte abbilden. Diese würden also als sogenannte „Klicks“ und „Pops“ wahrgenommen werden.

Um die Artefakte zu mindern, könnte ein weicher langsamer Übergang zur neuen Amplitude und Phase<sup>9</sup> angestrebt werden. Ferner könnte die Phasenänderung auch ignoriert werden, da sie aus Sicht der Wahrnehmung im Zusammenhang üblicher Filter keine Rolle spielt [Dic+14, 10.4.2 Phasendifferenzen]. Diese Möglichkeit ist aber eher theoretischer Natur, da bei zeitvariant betriebenen LTI-Strukturen kein Einfluss darauf genommen werden kann. So zeigt sich in Abschnitt 8, dass sich ein zeitvariantes System langfristig dem Verhalten seines momentanen LTI-Pendants angleicht.

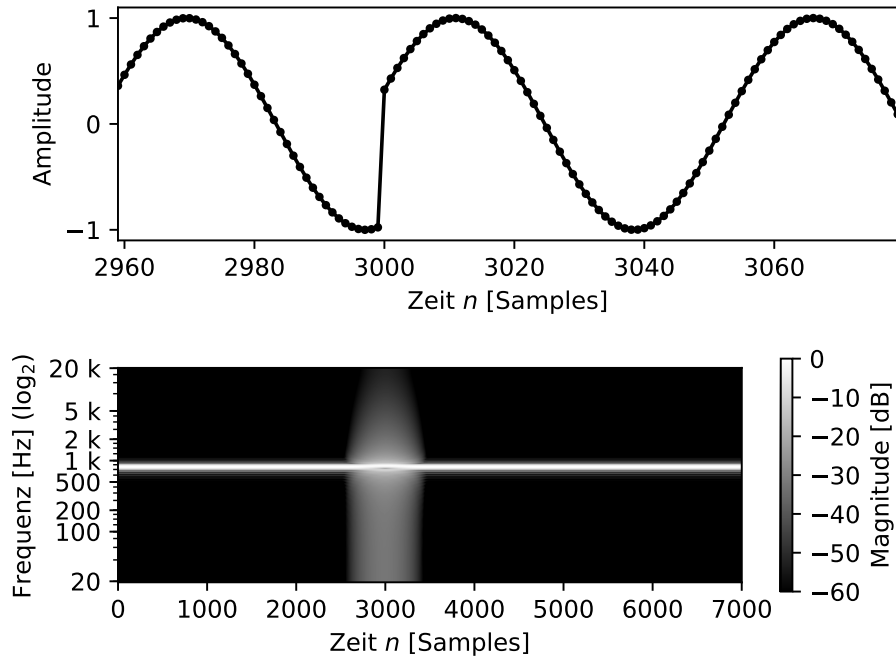


Abbildung 12: Phasensprung von  $45^\circ$  im Zeitsignal (oben), 800 Hz bei 44.1 kHz Abtastrate. Entsprechendes Spektrogramm (unten) durch eine gleitende DTFT mit jeweils einem Hann-Fenster von 1000 Samples Breite (22.7 ms).

---

<sup>9</sup>Bei einer langsamen Änderung der Phase wäre zu beachten, dass dies auch die momentane Frequenz beeinflusst.

## 6. Qualitätskriterien

Zeitvariante Digitalfilter für Audiosignale sollten die folgenden Qualitätsmerkmale erfüllen:

**Möglichst geringe auditiv wahrnehmbare Artefakte:** Zeitvariante Operationen an einer Realisierung eines Digitalfilters sollten auditiv möglichst nicht wahrnehmbar sein. Die Überlegungen aus Abschnitt 5 legen nahe, dass die Output-Switching Methode für dieses Qualitätsmerkmal nicht als positive Orientierung dient. Die in [Wis14] für musikbezogene Anwendungen durchgeführten Hörtests kommen zum selben Ergebnis. Stattdessen sollten wahrnehmungstechnisch relevantere Modelle wie z.B. das Frequenzspektrum zur Bewertung hinzugezogen werden.

**Kontrolliertes Verhalten:** Vor allem das Ausgabesignal eines zeitvarianten Digitalfilters sollte ein kontrolliertes Verhalten aufweisen. Je nach Realisierung können bei zeitvarianten Digitalfiltern am Ausgang ungewöhnlich große Signalspitzen bezüglich des Signalkontextes beobachtet werden. Dies kann zum sog. „Clipping“<sup>10</sup> führen und stellt damit eine weitere Quelle für wahrnehmbare Artefakte dar. Außerdem könnten Komponenten, die in der Signalverarbeitungskette folgen, in ihrem optimalen Betrieb gestört werden. Im Falle von Hardwarekomponenten könnten sogar dauerhaft Schäden entstehen.

**Kostengünstige Realisierung & Echtzeitfähigkeit:** In Audioanwendungen werden häufig viele Filter gleichzeitig und im Echtzeitbetrieb eingesetzt. Deshalb sollte eine Realisierung entsprechend kostengünstig sein. Dies betrifft v.a. die Anzahl von Multiplikationen sowie lesende und schreibende Speicherzugriffe.

**Geringe Komplexität bezüglich der Implementierung:** Geringe Komplexität dient meistens auch dem Qualitätsmerkmal der *kostengünstigen Realisierung & Echtzeitfähigkeit*. Zusätzlich reduziert eine geringe Komplexität meistens auch die potentiellen Fehlerquellen. Außerdem können die Sonderfälle von Realisierungen niedrigerer Komplexität eher erkannt und behandelt werden.

---

<sup>10</sup>Erzwingen der Signalamplituden auf einen bestimmten Wertebereich z.B.  $[-1, +1]$ . Amplituden, die diesen Wertebereich verlassen, werden durch die entsprechende obere oder untere Grenze ersetzt.

## 7. Strukturelle Ansätze

Mit dieser Arbeit wurden Strukturen untersucht, welche grundsätzlich für die Realisierung von LTI-Filtern geeignet sind. Jedoch werden die Strukturen jeweils zeitvariant betrieben. Das bedeutet, dass die jeweiligen Strukturen denen von LTI-Filtern entsprechen, jedoch werden die Koeffizienten abhängig der Zeit verändert. Im Folgenden wird eine Auswahl an LTI-Strukturen vorgestellt, die dann auf ihre zeitvariante Eignung hin untersucht werden.

Gegeben sei für die folgenden Abschnitte ein analoger Prototyp-Filter vom Typ EM-QF (Abschnitt 2.6) mit Tiefpass-Charakteristik der Ordnung  $N$ , einem Vorfaktor  $g_a$ , den Polstellen  $s_{p,i}$  und den Nullstellen  $s_{z,i}$ . Für ungerade Ordnungen  $N$  lässt sich die Übertragungsfunktion dann ausdrücken mit:

$$H_a(s) = g_a \frac{\overbrace{1}^{H_1(s)}}{s - s_{p,1}} \prod_{i=2}^N \frac{s - s_{z,i}}{s - s_{p,i}} \quad (7.1)$$

### 7.1. Direkte Kaskadierung

Filter höherer Ordnung werden meist als Kaskade von Filtern 1. und 2. Ordnung realisiert [PM13] [Mit11]. So können mit jedem Kaskadenelement 2. Ordnung zwei komplex-konjugierte Polstellen und zwei komplex-konjugierte Nullstellen realisiert werden. Man verteile also die Nullstellen- und Pol-Paare auf die entsprechenden Kaskadenelemente, so dass die Übertragungsfunktion aus Gleichung (7.1) folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$H_a(s) = g_a \prod_{k=1}^{(N+1)/2} H_k(s) \quad (7.2)$$

$$= g_a H_{k=1}(s) \prod_{k=2}^{(N+1)/2} H_k(s) \quad (7.3)$$

$$= g_a \frac{1}{s - s_{p,1}} \underbrace{\prod_{k=2}^{(N+1)/2} \frac{(s - s_{z,k})(s - \overline{s_{z,k}})}{(s - s_{p,k})(s - \overline{s_{p,k}})}}_{\text{Kaskadenelemente 2. Ordnung}} \quad (7.4)$$

Man beachte, dass das Teilsystem 1. Ordnung  $H_1(s)$  eine Nullstelle bei  $|s| = \infty$  besitzt. Über die bilineare Transformation können die Pol- und Nullstellen in die  $z$ -Ebene überführt werden. Die Übertragungsfunktion kann dann mit einem Vorfaktor  $g$ , den Polstellen

$z_{p,k}$  und den Nullstellen  $z_{z,k}$  ebenfalls als Kaskade formuliert werden:

$$\begin{aligned} H(z) &= g H_{k=1}(z) \prod_{k=2}^{(N+1)/2} H_k(z) \\ &= g \frac{z+1}{z-z_{p,1}} \prod_{k=2}^{(N+1)/2} \frac{(z-z_{z,k})(z-\overline{z_{z,k}})}{(z-z_{p,k})(z-\overline{z_{p,k}})} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Abbildung 13 zeigt das Prinzip der Realisierung eines Filters durch Kaskadierung.

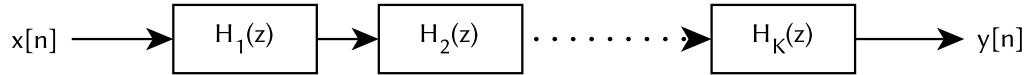


Abbildung 13: Realisierung eines Filters  $H(z)$  in Kaskadenstruktur. Die Kaskadierung der Teilsysteme  $H_k(z)$  mit dem Index  $k \in (1, 2, \dots, K)$  und  $K = \frac{N+1}{2}$ .

Mit dem Vorfaktor  $g \in \mathbb{R}$  kann die Frequenzantwort des Filters normalisiert werden. Im Falle eines Tiefpass-Filters ist es sinnvoll, den Durchlassbereich auf eine Magnitude von 1 zu normalisieren. Der Vorfaktor  $g$  kann im Falle eines Tiefpass-Filters mit der Magnitude bei der Frequenz  $\omega = 0$  bestimmt werden. Mit dem Tiefpass-Filter  $H(z) = g \hat{H}(z)$  ergibt sich dann der Vorfaktor:

$$g = \frac{1}{|\hat{H}(e^{j\omega})|} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{|\hat{H}(1)|} \quad (7.6)$$

## 7.2. Parallelstruktur über Allpass-Summe<sup>11</sup>

Allpass-Filter [Smi07] besitzen die Eigenschaft, dass alle Frequenzen das System mit gleicher Magnitude passieren können. Die Magnitude ist dabei üblicherweise auf den Wert 1 normiert. Für die Übertragungsfunktion eines Allpassfilters  $A(z)$  gilt also:

$$|A(e^{j\omega})| = 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (7.7)$$

Für digitale Allpass-Filter gilt, dass der Filter für jede Polstelle auch eine entsprechende Nullstelle bei gleichem Winkel und reziprokem Radius besitzen muss. Die zu einem Filterpol  $z_p$  zugehörige Nullstelle  $z_z$  ergibt sich also mit:

$$z_p = r e^{j\theta} \quad \Leftrightarrow \quad z_z = \frac{1}{r} e^{j\theta} \quad (7.8)$$

Ein normierter Allpass-Filter ist also durch seine Filterpole bereits vollständig beschrieben.

<sup>11</sup>Die in diesem Abschnitt beschriebenen Zusammenhänge wurden durch den Autor der vorliegenden Arbeit teilweise bereits für das Projekt [Wet17] erarbeitet und dokumentiert.



In [Mit11, Kapitel 8.10] wird gezeigt, dass sich Tiefpass-Filter als Summe zweier Allpass-Filter realisieren lassen:

$$H_{\text{lowpass}}(z) = \frac{1}{2} [A_1(z) + A_2(z)] \quad (7.9)$$

Dabei müssen sich die beiden Allpass-Filter in ihrer Ordnung um einen Grad unterscheiden. Damit ergibt sich die in Abbildung 14 dargestellte Parallelstruktur.

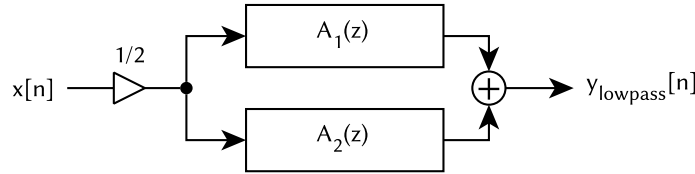


Abbildung 14: Tiefpass als Summe zweier Allpässe

Die beiden Allpässe können im Falle höherer Ordnungen wiederum mit dem vorher beschriebenen Kaskaden-Ansatz realisiert werden. Abbildung 15 verdeutlicht dieses Prinzip an einem Beispiel.

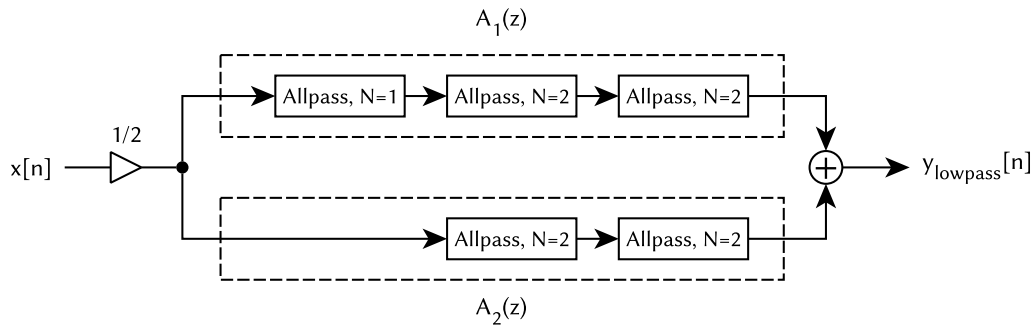


Abbildung 15: Tiefpass der Ordnung  $N = 9$  als Summe zweier Allpass-Kaskaden.

In [Mit11, Kapitel 8.10] wird auch beschrieben, wie elliptische (rekursive) Tiefpass-Filter ungerader Ordnung in eine Summe zweier Allpässe zerlegt werden können. Hierzu müssen lediglich die bilinear transformierten Filterpole  $z_{p,i}$  bekannt sein. Man betrachte die zueinander komplex-konjugierten Filterpole jeweils als Pol-Paar. Damit besitzt ein elliptischer Tiefpass-Filter ungerader Ordnung  $\frac{N-1}{2}$  Pol-Paare und einen weiteren Filterpol auf der Real-Achse der  $z$ -Ebene. Der Filterpol auf der Real-Achse wird als Allpass 1. Ordnung realisiert und die Pol-Paare werden als Allpass 2. Ordnung realisiert. Die Allpässe werden dann bezüglich ihres Polradius abwechselnd auf die beiden Allpass-Kaskaden  $A_1(z)$  und  $A_2(z)$  verteilt. Abbildung 16 verdeutlicht die Verteilung der Filterpole an einem konkreten Beispiel.

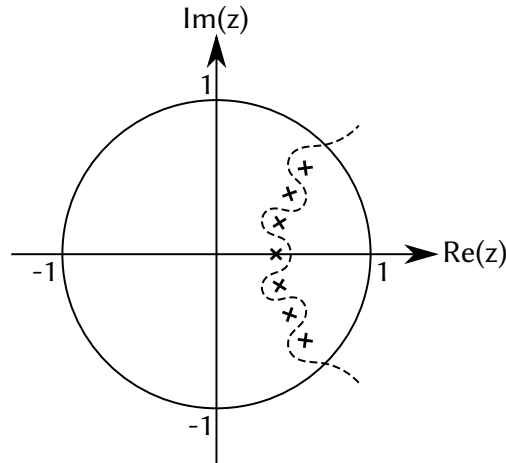


Abbildung 16: Zerlegung eines bilinear transformierten elliptischen Tiefpass-Filters 7. Ordnung. Verteilung der Filterpole auf die beiden Allpass-Kaskaden  $A_1(z)$  und  $A_2(z)$ . Links der gestrichelten Linie befinden sich die Pole der einen Kaskade, rechts der gestrichelten Linie die Pole der anderen Kaskade.

### 7.3. Auswahl der Grundstrukturen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden vier Grundstrukturen ausgewählt. Die gewählten Grundstrukturen können beliebige LTI-Filter 1. und 2. Ordnung realisieren und eignen sich damit für den Einsatz in einer Kaskade (siehe Abschnitt 7.1 und 7.2).

Ausgewählt wurden:

- **Direktstruktur I (DF1):** Wie der Name schon andeutet ist dies die einfachste und offensichtlichste Art einen Filter zu realisieren. Diese Struktur dient daher in erster Linie als Vergleichsmöglichkeit.
- **Transponierte Direktstruktur II (T-DF2):** Die T-DF2 wurde bezüglich ihres zeitvarianten Verhaltens in den Hörtests aus [Wis14] am besten bewertet. Daher lohnt es sich, diese Struktur näher zu betrachten.
- **Gold-Rader Struktur (GR):** Diese Struktur ist weit verbreitet, da bezüglich der Empfindlichkeit gegenüber Rundungsfehlern gute Eigenschaften besitzt. Sie ist für diese Arbeit interessant, da die Struktur im zeitvarianten Betrieb stabil ist [Lar98], solange die momentanen Koeffizienten einem stabilen LTI-Filter entsprechen.
- **Topology-Preserving Transformation (TPT):** Dieser strukturelle Ansatz wurde für den zeitvarianten Einsatz in [Zav15] vorgeschlagen und in [Wis14] empfohlen. Die in der vorliegenden Arbeit untersuchte Struktur basierend auf der analogen Direktstruktur II ist im zeitvarianten Betrieb ebenfalls stabil [Wis14].

#### 7.4. Technische Details der Grundstrukturen

Im folgenden werden die technischen Details der gewählten Grundstrukturen beschrieben. Um für den Einsatz in einer Kaskade (siehe Abschnitt 7.1 und 7.2) geeignet zu sein, müssen die Grundstrukturen jeweils beliebige LTI-Filter 1. und 2. Ordnung realisieren können. Für die folgenden Unterabschnitte werden daher zunächst Schreibweisen zur Formulierung einer gewünschten Übertragungsfunktionen 1. bzw. 2. Ordnung etabliert. Die Ordnung wird mit  $N = 1$  bzw.  $N = 2$  angegeben.

##### Filter 2. Ordnung:

Ein zeitdiskreter Filter 2. Ordnung ( $N = 2$ ) sei angegeben durch das zueinander komplex-konjugierte Pol-Paar  $(\tilde{z}_p, \overline{\tilde{z}_p})$  und dem zueinander komplex-konjugierten Nullstellen-Paar  $(\tilde{z}_z, \overline{\tilde{z}_z})$ :

$$(\tilde{z}_z, \overline{\tilde{z}_z}) = \tilde{r}_z \exp(\pm j\tilde{\theta}_z) = \underbrace{\tilde{r}_z \cos \tilde{\theta}_z}_{= \tilde{c}_z} \pm j \underbrace{\tilde{r}_z \sin \tilde{\theta}_z}_{= \tilde{d}_z} \quad , \quad \tilde{z}_z \in \mathbb{C} \quad (7.10)$$

$$(\tilde{z}_p, \overline{\tilde{z}_p}) = \tilde{r}_p \exp(\pm j\tilde{\theta}_p) = \underbrace{\tilde{r}_p \cos \tilde{\theta}_p}_{= \tilde{c}_p} \pm j \underbrace{\tilde{r}_p \sin \tilde{\theta}_p}_{= \tilde{d}_p} \quad , \quad \tilde{z}_p \in \mathbb{C} \quad (7.11)$$

Seine Übertragungsfunktion kann dann mit  $\tilde{H}(z)$  durch dessen Linearfaktoren formuliert werden:

$$\tilde{H}(z) = \tilde{g} \frac{(z - \tilde{z}_z)(z - \overline{\tilde{z}_z})}{(z - \tilde{z}_p)(z - \overline{\tilde{z}_p})} \quad (7.12)$$

Dabei ist  $\tilde{g} \in \mathbb{R}$  ein Vorfaktor. Ausmultipliziert kann  $\tilde{H}(z)$  dann in folgender Form angegeben werden:

$$\tilde{H}(z) = \frac{\tilde{b}_0 z^2 + \tilde{b}_1 z^1 + \tilde{b}_2}{z^2 + \tilde{a}_1 z^1 + \tilde{a}_2} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \quad (7.13)$$

$$\boxed{\tilde{H}(z) = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z^{-1} + \tilde{b}_2 z^{-2}}{1 + \tilde{a}_1 z^{-1} + \tilde{a}_2 z^{-2}}} \quad (7.14)$$

Mit den Gleichungen (A.3) ergeben sich also die Koeffizienten für (7.14) durch:

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{b}_0 &= \tilde{g} \quad , \quad \tilde{b}_1 = -2 \tilde{c}_z \cdot \tilde{g} \quad , \quad \tilde{b}_2 = \tilde{r}_z^2 \cdot \tilde{g} \\ &\quad , \quad \tilde{a}_1 = -2 \tilde{c}_p \quad , \quad \tilde{a}_2 = \tilde{r}_p^2 \end{aligned}} \quad (7.15)$$

##### Filter 1. Ordnung:

Ein zeitdiskreter Filter 1. Ordnung ( $N = 1$ ) sei angegeben durch die reellwertige Polstelle  $\tilde{z}_p$  und die reellwertige Nullstelle  $\tilde{z}_z$ :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_z &= \tilde{c}_z + j\tilde{d}_z \quad , \quad \tilde{z}_z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_z = \tilde{z}_z \quad , \quad \tilde{d}_z = 0 \\ \tilde{z}_p &= \tilde{c}_p + j\tilde{d}_p \quad , \quad \tilde{z}_p \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_p = \tilde{z}_p \quad , \quad \tilde{d}_p = 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Seine Übertragungsfunktion kann dann mit  $\tilde{H}(z)$  durch dessen Linearfaktoren formuliert werden:

$$\begin{aligned}\tilde{H}(z) &= \tilde{g} \frac{z - \tilde{z}_z}{z - \tilde{z}_p} \\ &= \tilde{g} \frac{z - \tilde{z}_z}{z - \tilde{z}_p} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \tilde{g} \frac{1 - \tilde{z}_z z^{-1}}{1 - \tilde{z}_p z^{-1}}\end{aligned}\quad (7.17)$$

Die Koeffizienten für  $\tilde{H}(z)$  aus Gleichung (7.14) ergeben sich dann mit einem einfachen Koeffizientenvergleich zur Gleichung (7.17):

$$\begin{aligned}\tilde{b}_0 &= \tilde{g} \quad , \quad \tilde{b}_1 = -\tilde{z}_z \cdot \tilde{g} \quad , \quad \tilde{b}_2 = 0 \\ , \quad \tilde{a}_1 &= -\tilde{z}_p \quad , \quad \tilde{a}_2 = 0\end{aligned}\quad (7.18)$$

#### 7.4.1. Direktstruktur I (DF1)

Abbildung 17 zeigt die Direktstruktur I für einen Filter höchstens zweiter Ordnung. Zu erkennen ist die FIR-Sektion  $H_{\text{FIR}}(z)$  und die rekursive IIR-Sektion  $H_{\text{IIR}}(z)$ .

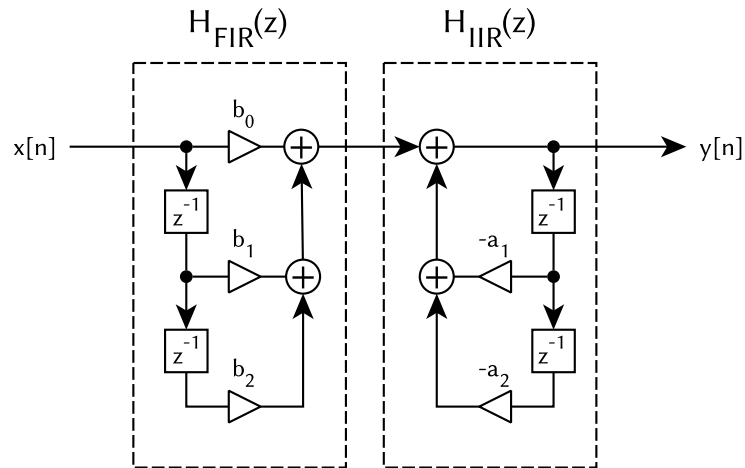


Abbildung 17: Direktstruktur I

Die Differenzengleichung für die Direktstruktur I zweiter Ordnung ist damit:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] \quad (7.19)$$

Die z-Transformierte von  $y[n]$  ist  $Y(z)$  mit:

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z)z^{-1} + b_2 X(z)z^{-2} - a_1 Y(z)z^{-1} - a_2 Y(z)z^{-2} \quad (7.20)$$

Durch entsprechende Umformung kann dann die Übertragungsfunktion  $H(z)$  ermittelt werden.

$$Y(z) (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = X(z) (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) \quad (7.21)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (7.22)$$

Die Koeffizienten zur Realisierung des durch Gleichung (7.14) gegebenen Filters lauten dann (1. und 2. Ordnung):

$$\begin{array}{ccc} b_0 = \tilde{b}_0 & , & b_1 = \tilde{b}_1 & , & b_2 = \tilde{b}_2 \\ & & a_1 = \tilde{a}_1 & , & a_2 = \tilde{a}_2 \end{array} \quad (7.23)$$

Für die FIR- und IIR-Sektion gilt übrigens:

$$H(z) = H_{\text{FIR}}(z) H_{\text{IIR}}(z) \quad (7.24)$$

$$H_{\text{FIR}}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z^1 + b_2}{z^2} \quad (7.25)$$

$$H_{\text{IIR}}(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z^1 + a_2} \quad (7.26)$$

Dies macht deutlich, dass die „reine“ FIR-Sektion  $H_{\text{FIR}}(z)$  eine doppelte Polstelle bei  $z = 0$  besitzt. Ähnlich dazu besitzt die „reine“ IIR-Sektion  $H_{\text{IIR}}(z)$  eine doppelte Nullstelle bei  $z = 0$ .

#### 7.4.2. Transponierte Direktstruktur II (T-DF2)

Abbildung 17 zeigt die Direktstruktur I zweiter Ordnung mit ihrer FIR-Sektion  $H_{\text{FIR}}(z)$  und ihrer rekursiven IIR-Sektion  $H_{\text{IIR}}(z)$ . Mit dem Kommutativgesetz für LTI-Systeme lassen sich die beiden Sektionen in ihrer Reihenfolge vertauschen. Abbildung 18 zeigt im linken Teil den Ansatz der Vertauschung. Dort wird auch deutlich, dass jeweils zwei Verzögerungselemente die selben Signale abbilden. Daher können die Verzögerungselemente zusammengefasst werden und erhält somit die Direktstruktur II (siehe Abbildung 18 rechts).

In [PM13, Kapitel 9.3.2] wird das Theorem der sogenannten „Transposition“ beschrieben. Dieses kann auf Blockdiagramme angewendet werden, wobei die Übertragungsfunktion letztlich unverändert bleibt. Angewandt auf die Direktstruktur II ergibt sich die transponierte Direktstruktur II (T-DF2) wie sie in Abbildung 19 dargestellt ist.

In diesem und dem vorangegangenen Abschnitt (7.4.1) wurden verschiedene Strukturen zur Realisierung beliebiger LTI-Filter zweiter Ordnung beschrieben. Alle beschriebenen Direktstrukturen besitzen dabei dieselbe Übertragungsfunktion (7.22) und können mit den entsprechenden Koeffizienten aus (7.23) einen beliebigen Filter höchstens zweiter Ordnung realisieren.

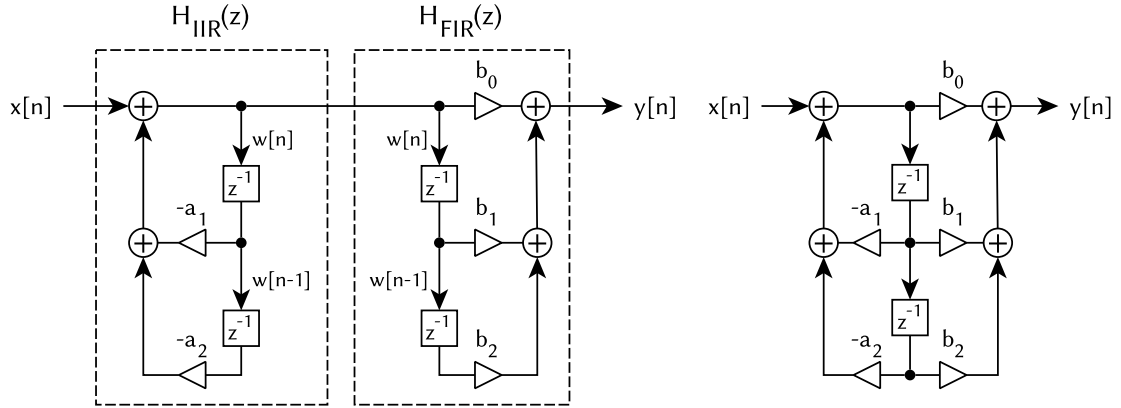


Abbildung 18: Direktstruktur II (rechts) und ihr Herleitungsansatz (links).

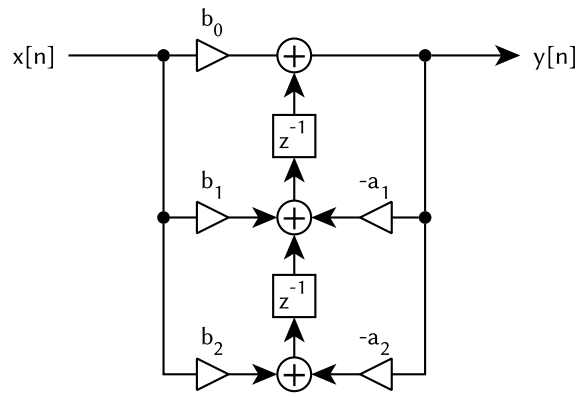


Abbildung 19: Transponierte Direktstruktur II

### 7.4.3. Gold-Rader Struktur (GR)

In [Mit11, Kapitel 12.4] wird die Gold-Rader Struktur beschrieben. Abbildung 20 zeigt das Blockdiagramm der Struktur mit den Ausgabesignalen  $y_{1,\text{GR}}[n]$  und  $y_{2,\text{GR}}[n]$ .

Es lässt sich zeigen, dass die entsprechenden Übertragungsfunktionen der  $z$ -Transformierten wie folgt lauten:

$$H_{1,\text{GR}}(z) = \frac{Y_{1,\text{GR}}(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - c z^{-1}} \quad (7.27)$$

$$H_{2,\text{GR}}(z) = \frac{Y_{2,\text{GR}}(z)}{X(z)} = \frac{d}{1 - 2c z^{-1} + (c^2 + d^2) z^{-2}} \quad (7.28)$$

Am Ausgang  $y_{1,\text{GR}}[n]$  realisiert die Gold-Rader Struktur also einen IIR-Filter 1. Ordnung mit einer Polstelle bei  $z = c$ . Die Übertragungsfunktion für den Ausgang  $y_{2,\text{GR}}[n]$

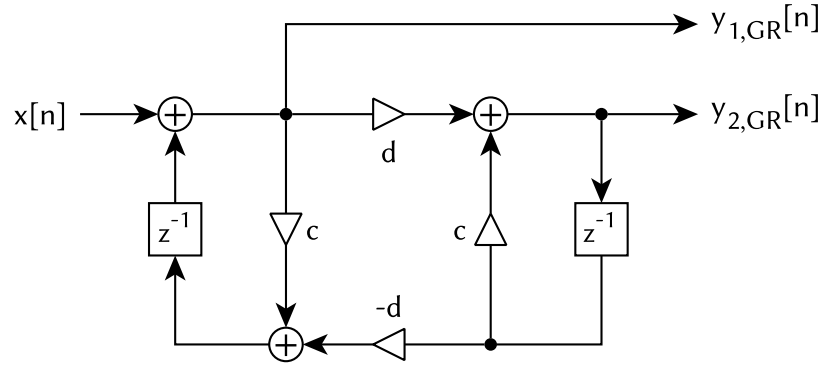
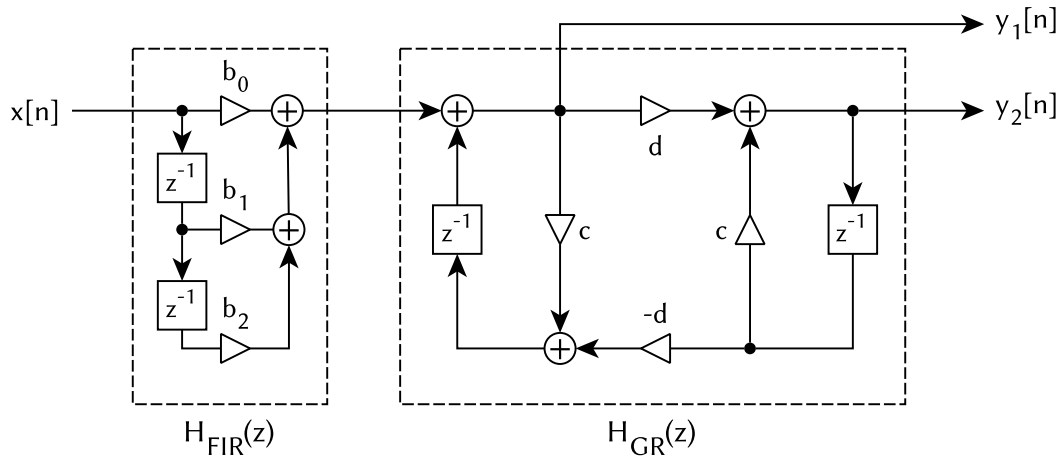


Abbildung 20: Gold-Rader Struktur

wird mit  $H_{2,GR}(z)$  angegeben. Durch einen Vergleich des Nennerpolynoms mit der Gleichung (A.2) lässt sich erkennen, dass  $y_{2,GR}[n]$  einen IIR-Filter 2. Ordnung mit einem zueinander komplex-konjugierten Pol-Paar bei  $z = c \pm jd$  realisiert. Die Koeffizienten der Gold-Rader Struktur bilden also in beiden Fällen die Polstelle direkt in ihren kartesischen Koordinaten ab.

Um beliebige Filter höchstens zweiter Ordnung realisieren zu können, kann der Gold-Rader Struktur ein FIR-Filter vorangeschaltet werden. Damit lassen sich dann auch beliebige Nullstellen realisieren. Dazu kann die FIR-Sektion  $H_{FIR}(z)$  der Direktstruktur I genutzt werden. Abbildung 21 zeigt die vollständige Grundstruktur, welche im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurde.


 Abbildung 21: Gold-Rader Struktur ergänzt durch den FIR-Filter  $H_{FIR}(z)$ .

Mit den Gleichungen (7.25), (7.28) und (7.27) ergeben sich dann für die Ausgänge  $y_1[n]$  und  $y_2[n]$  folgende Übertragungsfunktionen  $H_1(z)$  und  $H_2(z)$ :

$$\begin{aligned}
 H_1(z) &= H_{\text{FIR}}(z) H_{1,\text{GR}}(z) \\
 &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1} \cdot \frac{1}{1 - c z^{-1}} \\
 &= \boxed{H_1(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - c z^{-1}}}
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

$$\begin{aligned}
 H_2(z) &= H_{\text{FIR}}(z) H_{2,\text{GR}}(z) \\
 &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1} \cdot \frac{d}{1 - 2c z^{-1} + (c^2 + d^2) z^{-2}} \\
 &= \boxed{H_2(z) = d \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - 2c z^{-1} + (c^2 + d^2) z^{-2}}}
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

Damit können die Koeffizienten für einen gegebenen Filter bestimmt werden. Sei ein gegebener Filter wie in Abschnitt 7.4 formuliert, dann ergibt sich die Realisierung mit der Struktur aus Abbildung 21 folgendermaßen:

**Fall 1. Ordnung:** Dazu muss der Ausgang  $y_1[n]$  gewählt und die folgenden Koeffizienten entsprechend den Gleichungen (7.16) und (7.14) gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
 b_0 = \tilde{b}_0 \quad , \quad b_1 = \tilde{b}_1 \quad , \quad b_2 = \tilde{b}_2 = 0 \\
 , \quad c = \tilde{c}_p \quad , \quad d = \tilde{d}_p = 0
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

**Fall 2. Ordnung:** Dazu muss der Ausgang  $y_2[n]$  gewählt und die folgenden Koeffizienten entsprechend den Gleichungen (7.11) und (7.14) gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
 b_0 = \tilde{b}_0/d \quad , \quad b_1 = \tilde{b}_1/d \quad , \quad b_2 = \tilde{b}_2/d \\
 , \quad c = \tilde{c}_p \quad , \quad d = \tilde{d}_p
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

#### 7.4.4. Topology-Preserving Transformation (TPT)

Die „Topology-Preseving Transformation“ (TPT) wurde von Zavilishin [Zav15] vorgeschlagen. Dabei handelt es sich um eine graphische Version der bilinearen Transformation. Als Grundlage dient die topologische Struktur eines analogen zeitkontinuierlichen Filters. Diese „analoge Filterstruktur“ wird dann digital (zeitdiskret) simuliert, indem im Wesentlichen die Integrierer der topologischen Struktur durch entsprechende zeitdiskrete Integrierer der bilinearen Transformation ersetzt<sup>12</sup> werden.

---

<sup>12</sup>Dabei können im Blockdiagramm verzögerungsfreie Rückkopplungspfade entstehen. Ein solches Blockdiagramm wäre nicht realisierbar. Deshalb müssen im Rahmen der TPT durch Äquivalenzumformungen des Blockdiagramms diese problematischen Pfade aufgelöst werden. Zavalishin beschreibt in seiner Arbeit entsprechende Schritte.



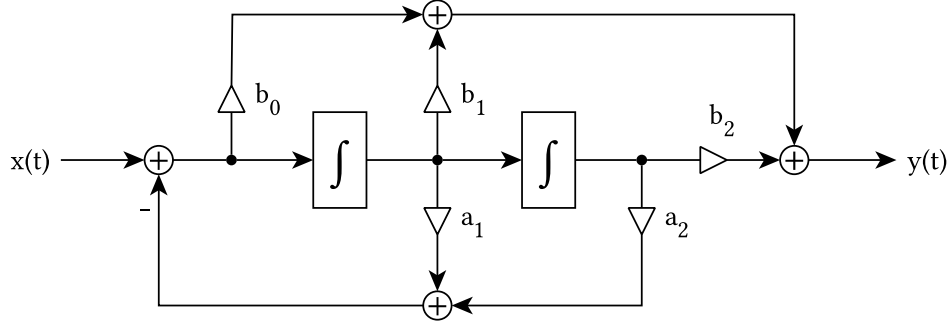


Abbildung 22: Topologische Struktur eines analogen Filters in „analoger Direktstruktur II“.

Gegeben sei die in Abbildung 22 dargestellte topologische Struktur eines analogen Filters in „analoger Direktstruktur II“<sup>13</sup>. Es lässt sich zeigen, dass diese Struktur die Übertragungsfunktion  $H_a(s)$  besitzt mit:

$$H_a(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2}} \quad (7.33)$$

Wendet man die Topology-Preserving Transformation auf die topologische Struktur aus Abbildung 22 an, so erhält man die digitale Filterstruktur aus Abbildung 23.

Es lässt sich zeigen [Wis14], dass die Struktur in Abbildung 23 folgende Übertragungsfunktion  $H_{\text{TPT}}(z)$  besitzt:

$$H_{\text{TPT}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1}{g} \cdot \frac{z-1}{z+1}} = \frac{b_0 + b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2}} \Big|_{s=\frac{1}{g} \cdot \frac{z-1}{z+1}} \quad (7.34)$$

$$= \frac{b_0 (z-1)^2 + b_1 g (z-1)(z+1) + b_2 g^2 (z+1)^2}{(z-1)^2 + a_1 g (z-1)(z+1) + a_2 g^2 (z+1)^2} \quad (7.35)$$

$$= \frac{(b_0 + b_1 g + b_2 g^2) + (-2b_0 + 2b_2 g^2) z^{-1} + (b_0 - b_1 g + b_2 g^2) z^{-2}}{(1 + a_1 g + a_2 g^2) + (-2 + 2a_2 g^2) z^{-1} + (1 - a_1 g + a_2 g^2) z^{-2}} \quad (7.36)$$

Die Struktur realisiert also einen zeitdiskreten Filter, welcher durch einen beliebigen Prototyp-Filter mit dessen Laplace-Transformation  $H_a(s)$  angegeben werden kann und mit der bilinearen Transformation in den  $z$ -Bereich überführt wurde.

Ein gegebener Digitalfilter der Form (7.14) könnte mit dieser Struktur realisiert werden, indem die Koeffizienten über den Ansatz eines Koeffizientenvergleichs mit Gleichung (7.36) ermittelt werden.

<sup>13</sup>Diese „analoge Direktstruktur II“ erhält man, wenn man die Verzögerungselemente  $z^{-1}$  der digitalen Direktstruktur II (Abb. 18) jeweils durch Integrierer  $s^{-1}$  ersetzt.

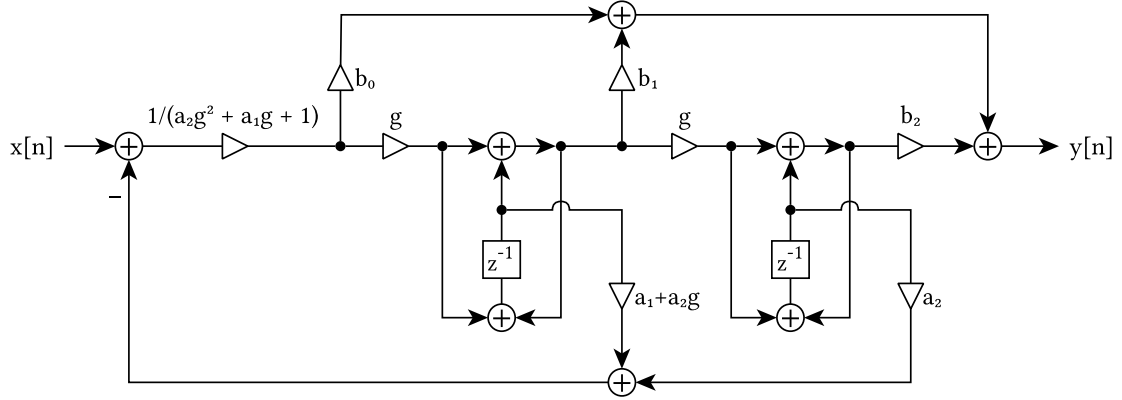


Abbildung 23: *Topology-Preserving* transformierte „analoge Direktstruktur II“. Beschrieben in [Zav15] und [Wis14].

Einfacher lässt sich jedoch diese Struktur verwenden, wenn der zu realisierende Filter als Prototyp-Filter im Laplace-Bereich vorliegt. Bei den im Rahmen dieser Arbeit verwendeten EMQF-Filtern ist dies der Fall, da sie im Laplace-Bereich entworfen werden. Andernfalls könnte man auch einen gegebenen Digitalfilter mit der bilinearen Transformation in den Laplace-Bereich überführen, um dann die Koeffizienten einfacher bestimmen zu können. Nachfolgend wird beschrieben, wie die Koeffizienten für die Struktur aus Abbildung 23 bestimmt werden können.

### Fall 2. Ordnung:

Ein zeitkontinuierlicher Prototyp-Filter 2. Ordnung ( $N = 2$ ) sei angegeben durch das zueinander komplex-konjugierte Pol-Paar  $(\hat{s}_p, \hat{s}_p^*)$  und dem zueinander komplex-konjugierten Nullstellen-Paar  $(\hat{s}_z, \hat{s}_z^*)$ :

$$\hat{s}_z \in \mathbb{C} \quad , \quad \hat{s}_p \in \mathbb{C} \quad (7.37)$$

Dann kann mit derselben algebraischen Vorgehensweise, wie sie bereits für Gleichung (7.14) beschrieben wurde, der gegebene Filter in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 s^{-1} + \hat{b}_2 s^{-2}}{1 + \hat{a}_1 s^{-1} + \hat{a}_2 s^{-2}} \quad (7.38)$$

### Fall 1. Ordnung:

Ein zeitkontinuierlicher Prototyp-Filter 1. Ordnung ( $N = 1$ ) sei angegeben durch die reellwertige Polstelle  $\hat{s}_p$  und die reellwertige Nullstelle  $\hat{s}_z$ :

$$\hat{s}_z \in \mathbb{R} \quad , \quad \hat{s}_p \in \mathbb{R} \quad (7.39)$$

Dann lässt sich mit der entsprechenden algebraischen Vorgehensweise, wie sie bereits in Abschnitt 7.4 beschrieben wurde, der gegebene Filter mit Koeffizienten für die Gleichung

chung (7.38) ausdrücken. Im Fall 1. Ordnung gilt dabei  $\hat{b}_2 = 0$  und  $\hat{a}_2 = 0$ .

**Koeffizienten für beide Fälle:**

In beiden Fällen liegt nun ein Prototyp-Filter  $\hat{H}(s)$  der Form (7.38) vor mit den Prototyp-Koeffizienten:

$$\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \mathbb{R} \quad (7.40)$$

Damit gilt für die Koeffizienten der Struktur aus Abbildung 23:

$$\begin{aligned} b_0 &= \hat{b}_0 \quad , \quad b_1 = \hat{b}_1 \quad , \quad b_2 = \hat{b}_2 \quad , \\ a_1 &= \hat{a}_1 \quad , \quad a_2 = \hat{a}_2 \quad , \\ g &= \frac{T}{2} = \Omega \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.41)$$

Dabei ist  $T$  der Parameter der bilinearen Transformation (siehe Abschnitt 2.5), mit welchem das Frequency-Warping der bilinearen Transformation beeinflusst werden kann. Die analoge Kreisfrequenz  $\Omega$  wird dabei auf die digitale Kreisfrequenz  $\omega$  abgebildet.

Dieser Zusammenhang ermöglicht z.B. das einfache Verändern der Grenzfrequenz eines Tiefpass-Filters. Sei die Grenzfrequenz des Prototyp-Filters  $\hat{H}(s)$  bekannt mit  $\Omega_{3\text{dB}}$ . So kann mit der entsprechenden Gleichung aus (7.41) die Grenzfrequenz des zu realisierenden Filters hin zu einer beliebigen Kreisfrequenz  $\omega_{3\text{dB}}$  verschoben werden.

## 7.5. Reihenfolge der Kaskadierung

In Abschnitt 7.1 wurde das Prinzip der Kaskadierung beschrieben. Zur Realisierung von Filtern höherer Ordnung wird dazu der gewünschte Filter in entsprechende Kaskadenelemente 1. und 2. Ordnung aufgetrennt. Im linearen zeit-invarianten Fall (LTI) gilt das entsprechende Kommutativgesetz. D.h., dass die Reihenfolge der Kaskadenelemente keinen Einfluss auf das Verhalten des Gesamtsystems ausübt.

Für zeitvariante Digitalfilter muss dieses Gesetz aber nicht gelten. Deshalb wurde im Rahmen dieser Arbeit auch der Einfluss der Reihenfolge näher betrachtet. Es wurden zwei verschiedene Ansätze untersucht, welche sich auf den Radius des Filterpols (z-Ebene) der jeweiligen Kaskadenelemente beziehen.

- Aufsteigende Kaskadierung bezüglich des Polradius'
- Absteigende Kaskadierung bezüglich des Polradius'

Bei dem Ansatz der aufsteigenden Kaskadierung (bezügl. Polradius) wird also zuerst das Kaskadenelement mit dem kleinsten Polradius durchlaufen.

## 8. Messungen

### 8.1. Beobachtungen im Zeitbereich

Um eine Vorstellung vom Verhalten zeitvarianter Filter zu erhalten, werden im Folgenden zwei konkrete Tests im Zeitbereich betrachtet. Die Tests unterscheiden sich lediglich in ihrem Eingangssignal und Umschaltzeitpunkt. Es wird jeweils ein einziger Umschaltvorgang von den Koeffizienten eines Startfilters  $H_{\text{pre}}(z)$  zu denen eines Zielfilters  $H_{\text{post}}(z)$  betrachtet. Beide Filter sind vom Typ EMQF<sup>14</sup> der Ordnung  $N = 5$  und einer Dämpfung  $A_s = 50$  dB im Sperrbereich. Die Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}}$  des Startfilters beträgt 1 kHz und die des Zielfilters 500 Hz. Beide Tests wurden mit der transponierten Direktstruktur II durchgeführt. Dem wird jeweils die analytische Antwort  $y_{\text{analytic}}[n]$  gegenübergestellt, welche über die Output-Switching Methode berechnet wurde.

- **Test 1**, Abb. 24: Eingangssignal ist eine 200 Hz Schwingung.
- **Test 2**, Abb. 25: Eingangssignal ist weißes Rauschen. Beim Rauschsignal handelt es sich um eine Folge von Pseudozufallszahlen, dessen Werte im Intervall  $[-1, 1]$  gleichverteilt sind. Man spricht hier von weißem Rauschen [Mit11], da es statistisch alle Frequenzen mit gleicher Energie enthält.

#### Umschwingvorgang & Stabilität

In beiden Tests unterscheidet sich ab dem Umschaltvorgang das zeitvariante Signal zunächst deutlich vom analytischen. In Teil (b) der Schaubilder ist jeweils das Transientsignal dargestellt und ist damit die Differenz aus den Signalen in Teil (a). In beiden Tests nimmt die Signaldifferenz mit der Zeit ab, bis sie sich ab 300 Samples nach dem Umschaltvorgang nur noch in einem sehr kleinen Korridor bewegt. Ab hier hat sich sozusagen das zeitvariante System auf sein neues Systemverhalten eingeschwungen und verhält sich identisch zum zeitinvariant betriebenen Zielfilter. Damit zeigen beide Tests konkret auch keine Anzeichen an Instabilität.

#### Ähnlichkeit zur aktuellen Impulsantwort

In beiden Fällen zeigt das Transientsignal in Teil (b) eine starke Ähnlichkeit zur jeweiligen Impulsantwort des Zielfilters. Damit kann die folgende Hypothese formuliert werden: Bei zeitvarianten Filtern handelt es sich bei den Artefakten eines einzigen Umschaltvorgangs im Wesentlichen um die additiv induzierte Impulsantwort bezogen auf die analytische Antwort.

#### Signalstreuung & Signaldynamik

In beiden Tests verlässt das zeitvariante Signal deutlich die Signalstreuung der analytischen Antwort. Bezogen auf Eingangssignal und gewünschtem Filterverhalten tauchen also ungewöhnlich große Amplitudenbeträge im gefilterten Signal auf.

#### Unstetigkeit

In beiden Tests weist die analytische Antwort eine deutliche Unstetigkeit zum Umschaltzeitpunkt auf. Im Kontext weicher Signalverläufe werden einzelne Unstetigkeiten meist

---

<sup>14</sup> „Elliptic Minimal-Q Factor“ ist eine Klasse rekursiver Filter. Siehe Abschnitt 2.6

als impulsartige Geräusche wahrgenommen. Dieser Umstand kann anhand der Beobachtungen aus Abschnitt 5 nachvollzogen werden. In Test 2 wird die Unstetigkeit der analytischen Antwort anscheinend gut ausgeglichen. Das bedeutet aber nicht zwingend, dass an dieser Stelle keine Artefakte wahrnehmbar sind. In Test 1 zeigt auch das zeitvariante Signal eine deutliche Unstetigkeit. Es kann hiermit also keine Tendenz dahingehend ausgemacht werden, dass die zeitvariante Systemreaktion Unstetigkeiten ausgleichen würde.

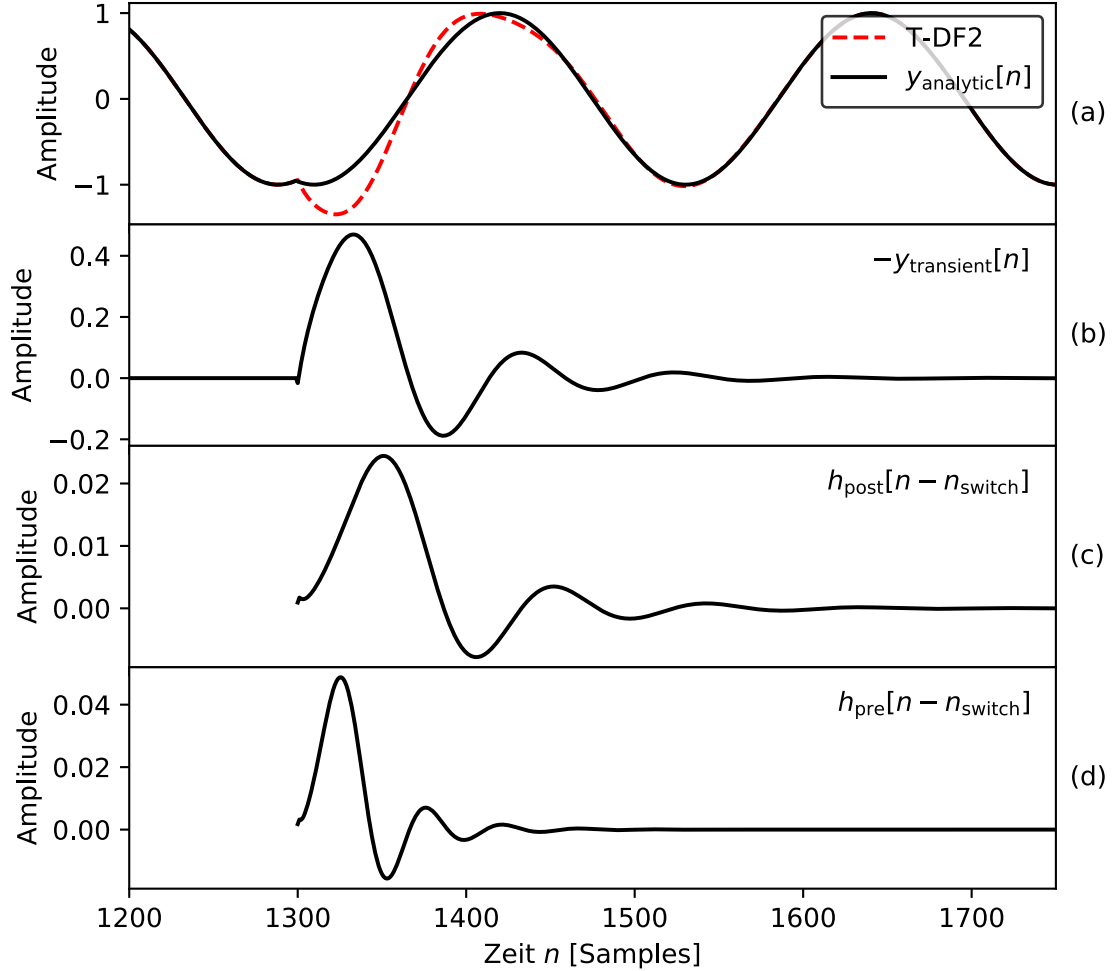


Abbildung 24: Test 1: Systemreaktion eines einzigen Umschaltvorgangs bei  $n_{\text{switch}} = 1300$  mit  $H_{\text{EMQF}}(5, 50 \text{ dB})$  und  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (1 \text{ kHz}, 500 \text{ Hz})$ . Eingangssignal ist ein 200 Hz Sinus. (a) Systemreaktion und analytische Antwort; (b) Transientsignal; Impulsantworten in (c) und (d).

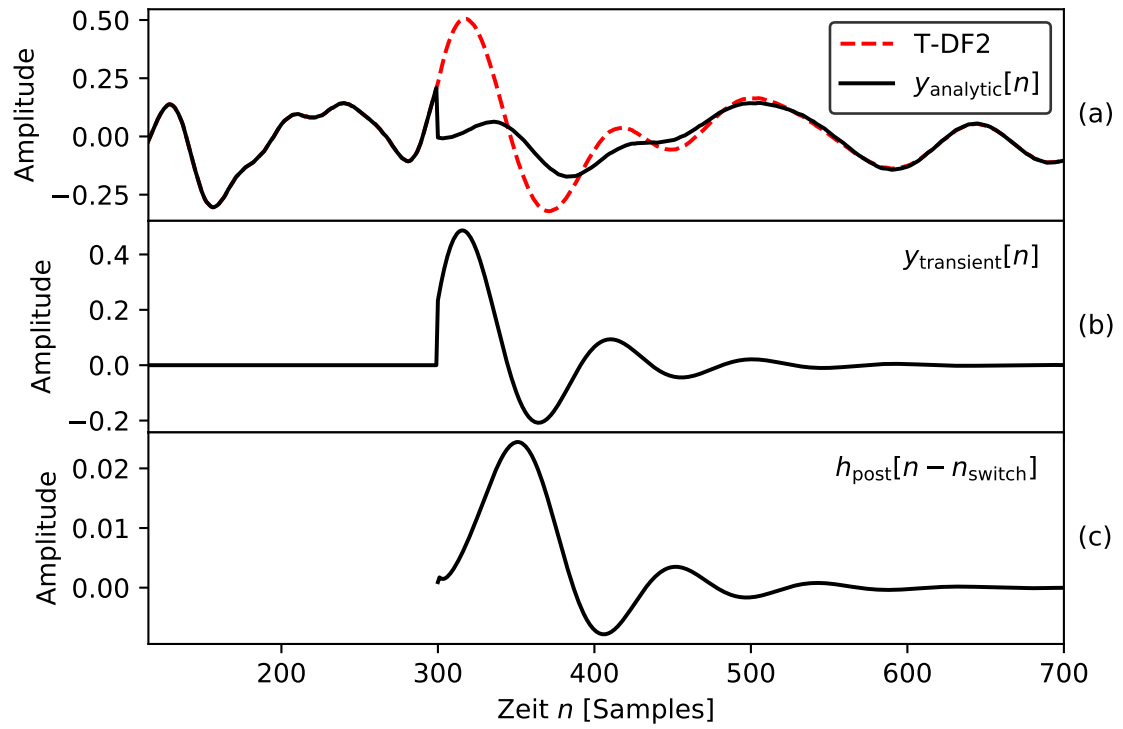


Abbildung 25: Test 2: Systemreaktion eines einzigen Umschaltvorgangs bei  $n_{\text{switch}} = 300$  mit  $H_{\text{EMQF}}(5, 50 \text{ dB})$  und  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (1 \text{ kHz}, 500 \text{ Hz})$ . Eingangssignal ist weißes Rauschen. (a) Systemreaktion und analytische Antwort; (b) Transientsignal; (c) Impulsantwort von  $H_{\text{post}}(z)$ .

## 8.2. Parameter & Testvariablen

Der Versuchsaufbau orientiert sich an folgendem Szenario: Ein Nutzer verändert die Grenzfrequenz eines rekursiven Tiefpassfilters im laufenden Betrieb.

Deshalb wird ein zeitvarianter Digitalfilter betrachtet, welcher auf EMQF-Filtern basiert und dessen Koeffizienten von denen eines Startfilters direkt zu denen eines Zielfilters umgeschaltet werden. Aus semantischer Sicht wird ausschließlich die Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}}$  als zeitvariant festgelegt. Damit bleiben die übrigen Parameter wie z.B. Ordnung  $N$  und Dämpfung  $A_s$  von Start- und Zielfilter innerhalb eines Versuchs immer gleich.

Solch ein Versuchsobjekt besitzt einige Parameter. In Tabelle 2 sind alle<sup>15</sup> Parameter und ihre möglichen Optionen bzw. Wertebereiche aufgeführt. Um allgemeine Aussagen ableiten zu können, muss das Versuchsobjekt in möglichst vielen verschiedenen *Optionskombinationen* betrachtet werden.

Problematisch ist hier zunächst, dass Parameter mit unendlich möglichen Optionen enthalten sind. Daraus ergäben sich unendlich viele Kombinationsmöglichkeiten und damit unendlich viele zu interpretierende Ergebnisse. Diese Problematik kann aber durch eine sinnvolle Auswahl konkreter Werte vernachlässigt werden. So können z.B. Filterordnungen gewählt werden, die in der Praxis häufig anzutreffen sind.

Tabelle 2: Mögliche Testvariablen und Optionen

Parameter	Optionen	Anzahl der Optionen	Auswahl (Bsp.)
Ordnung $N$	$(1, 2, \dots)$	$\infty$	3
Dämpfung $A_s$	$[0, \infty]$	$\infty$	3
Grenzfrequenzen für $\hat{f}_{3\text{dB}}$	$[0 \text{ Hz}, 22.05 \text{ kHz}]^2$	$\infty$	3
Modulationsrichtung von $f_{3\text{dB}}$	Aufwärts, Abwärts	2	2
Eingangssignaltyp	Rauschen, Schwingung	2	2
Kaskadentyp	Direkt, Allpass-Summe	2	2
Kaskade nach Polradius	Aufsteigend, Absteigend	2	2
Charakteristik	TP, HP, BP, BS, AP	5	1
Grundstruktur	DF1, T-DF2, TPT, GR	4	4
<b>Kombinationsmöglichkeiten</b>		$\infty$	$432 \cdot 4 = 1728$

<sup>15</sup>Zusätzlich denkbar wären die Parameter Eingangsfrequenz und Umschaltzeitpunkt  $n_{\text{switch}}$ .

Die Ausgestaltung des Versuchsaufbaus (*Konfiguration*) erfordert damit die Entscheidung über folgende Aspekte für jeden einzelnen Parameter:

- Soll dieser Parameter als Variable oder als Konstante gewählt werden?
- Auswahl der Werte:
  - Im Falle einer Konstanten: Welcher Wert wird hierfür festgesetzt?
  - Im Falle einer Variablen mit unendlicher Wertemenge: Welche konkreten Werte werden ausgewählt?

Tabelle 2 zeigt in der Spalte „Auswahl“ eine Beispielfunktion für einen möglichen Versuchsaufbau. Mit Ausnahme der Charakteristik wurden alle Parameter als Variable gewählt. Außerdem wurden unendliche Wertebereiche auf je drei konkrete Werte begrenzt. Mit dieser Auswahl wären noch 1728 verschiedene Differenzierungen möglich. Schaubilder, die jeweils alle Grundstrukturen in ansonsten gleicher Differenzierung zeigen, wären immer noch in  $(1728/4) = 432$  verschiedenen Optionskombinationen möglich.

Diese große Menge an Schaubildern wäre schwer zu überblicken. Deshalb wurden die Möglichkeiten an Optionen eingeschränkt und der Fokus stärker auf die strukturellen Aspekte gelegt. Dies geschah hauptsächlich unter der Annahme, dass sich die Parameter Ordnung  $N$  und Dämpfung  $A_s$  zwar auf die Ergebnisse auswirken, jedoch nicht auf die qualitativen Unterschiede zwischen den Filterstrukturen bezogen auf eine Optionskombination mit abweichender Ordnung oder Dämpfung.

Folgende Überlegung soll diese Annahme verdeutlichen: Wenn zwei Messreihen mit unterschiedlichen Ordnungen  $N$  durchgeführt würden, dann würden sich wahrscheinlich die beiden Messreihen in ihren absoluten Ergebnissen unterscheiden. Das läge darin begründet, dass die Abklingzeit von Impulsantworten normalerweise mit der Ordnung  $N$  ansteigt und sich damit die zeitvarianten Artefakte ebenfalls verändern. Es wird hier jedoch davon ausgegangen, dass sich die qualitativen Unterschiede nicht ändern. D.h., wenn eine Struktur A der Struktur B in einer Messreihe überlegen ist, gilt dies auch in einer Messreihe mit anderer Ordnung.

Ähnliches wird auch von der Dämpfung im Sperrbereich  $A_s$  angenommen. Mit veränderter Dämpfung verändert sich der Abstand der einzelnen digitalen Filterpole zum Einheitskreis und damit die Abklingzeit der einzelnen Kaskadenelemente.

Abbildung 26 verdeutlicht die Auswirkungen der Dämpfung  $A_s$  und der Ordnung  $N$  auf die Impulsantwort.

Die Versuchsreihe steht also unter der Annahme, dass die qualitativen Ergebnisse bezogen auf die Filterstruktur unabhängig von den Parametern Ordnung  $N$  und Dämpfung  $A_s$  sind.

Übliche Ordnungen im Audiobereich für IIR-Filter liegen unterhalb 10. Ordnung, wobei 2. und 4. Ordnung anscheinend am weitesten verbreitet sind. [Zöl11; RM14; Zav15; Bri; AWR15; Mit11]. Da sich in ersten Tests zeigte, dass höhere Ordnungen deutlichere Ergebnisse erzielen, wurde zunächst Ordnung  $N = 4$  als Orientierung gewählt. Da aber



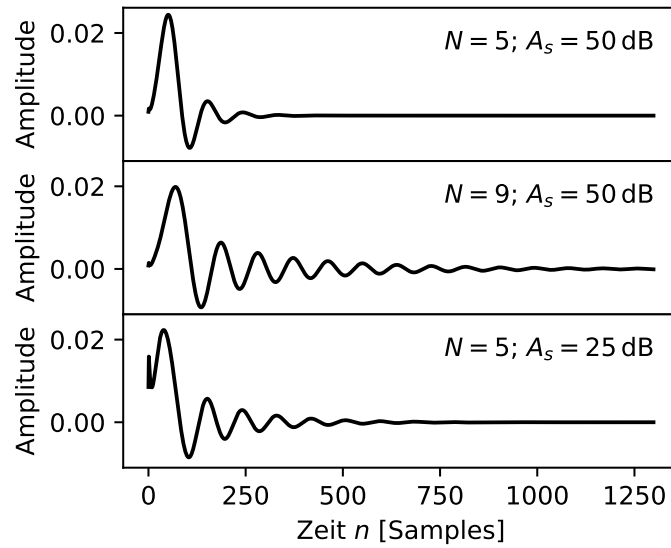


Abbildung 26: Verschiedene Impulsantworten von EMQF-Filtern mit entsprechenden Ordnungen  $N$ , Dämpfung  $A_s$  und der Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}} = 500$  Hz.

Allpass-Summen<sup>16</sup> einfacher für Tiefpassfilter ungerader Ordnungen zu realisieren sind, wurde deshalb die Ordnung für alle Versuche auf  $N = 5$  festgelegt.

Die Dämpfung im Sperrbereich  $A_s$  wurde auf 50 dB festgesetzt. Dieser Pegel dämpft den Sperrbereich deutlich hörbar gegenüber dem Durchlassbereich. Orientierung kann hier die in der Raumakustik etablierte Größe Nachhallzeit  $T_{60}$  geben [Dic+14]. Angenommen wird hier, dass bei üblichen Schalldruckpegeln eine Dämpfung von 60 dB wahrgenommener Stille entspricht.

Als Typ des Eingangssignals wurde weißes Rauschen gewählt. Es ist im Gegensatz zu einer Schwingung sehr breitbandig und kann damit Musik- und Audiosignale viel besser repräsentieren.

Um den Umfang weiter zu begrenzen, wurde der Fokus auf Tiefpass-Filter gelegt und damit der Parameter Filtercharakteristik konstant gesetzt. Dies steht unter der Annahme, dass die qualitativen Ergebnisse bezüglich der Filterstrukturen unabhängig von der Filtercharakteristik sind.

Aufgrund des Umfangs wurde ebenso auf eine systematische Untersuchung der Realisierung als Allpass-Summe verzichtet. Daher wurde dieser Kaskadentyp nur in Kombination mit einer Grundstruktur untersucht. So wurde die transponierte Direktstruktur II in ihrer Allpass-Realisierung als weitere Option (T-DF2-A) zu den Grundstrukturen hinzugefügt.

Als Grenzfrequenzen für die Start- und Zielfilter wurden Paare gewählt, die jeweils einer Oktave entsprechen. Im Kontext des direkten Umschaltens ist dies ein großer Sprung

<sup>16</sup>siehe Abschnitt 7.2

innerhalb eines sehr kurzen Zeitabschnitts. Solch eine Aktion ist in der Praxis vermutlich selten gewünscht. Trotzdem wurde hier diese Extremsituation gewählt, um deutliche Ergebnisse zu erzielen. Für die drei Frequenzpaare wurden mit  $\{500 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}\}$  und  $\{2.5 \text{ kHz}, 5 \text{ kHz}\}$  zwei Oktaven gewählt, die in den für Audiosignale wichtigen Mitten und oberen Mitten [Sch15] liegen. Das dritte Frequenzpaar liegt mit  $\{5 \text{ kHz}, 10 \text{ kHz}\}$  wesentlich in den Höhen. Die Frequenzangaben beziehen sich auf die im Audiobereich weit verbreitete Abtastrate  $f_s = 44.1 \text{ kHz}$  [Dic+14]. Damit ist letztere Oktave nur noch ungefähr eine weitere Oktave von der Nyquistfrequenz entfernt.

Aufgrund der vorangegangenen Überlegungen und Annahmen kommen wir zu dem in Tabelle 3 zusammengefassten Versuchsaufbau. Dieser dient als Grundlage der kommenden Abschnitte.

Tabelle 3: Konfiguration des Versuchsaufbaus

Parameter	Optionsauswahl	Optionsanzahl
Ordnung $N$	5	1
Dämpfung $A_s$	50 dB	1
Grenzfrequenzen für $\hat{f}_{3\text{dB}}$	$\{500 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}\}, \{2.5 \text{ kHz}, 5 \text{ kHz}\}, \{5 \text{ kHz}, 10 \text{ kHz}\}$	3
Modulationsrichtung von $f_{3\text{dB}}$	Aufwärts ( $\uparrow$ ), Abwärts ( $\downarrow$ )	2
Eingangssignal	Weißes Rauschen	1
Kaskade nach Polradius	Aufsteigend ( $\nearrow$ ), Absteigend ( $\searrow$ )	2
Grundstruktur	DF1, T-DF2, T-DF2-A, TPT, GR	5
<b>Kombinationsmöglichkeiten</b>		$12 \cdot 5 = 60$

### 8.3. Monte-Carlo-Simulation zur Schätzung der momentanen Signalstreuung

#### 8.3.1. Methode

In Abschnitt 8.1 zeigen die konkreten Beispiele ab dem Umschaltzeitpunkt kurzzeitig ungewöhnlich große Amplitudenauslenkungen bezogen auf den momentanen Signalkontext (Eingangssignal und Filtercharakteristik). Die Beispiele verletzen damit das entsprechende Qualitätskriterium aus Abschnitt 6. Nachfolgend wird eine Messmethode vorgestellt, die das Verhalten zeitvarianter Filter bezogen auf dieses Qualitätskriterium näher beleuchtet. Dazu wird eine hohe zeitliche Auflösung angestrebt. Die hohe Auflösung lässt dann mögliche Artefakte eindeutiger auf die Zeitvarianz beziehen, da die Umschaltzeitpunkte genau bekannt sind.

Das Vorgehen bezieht sich auf folgende Art der Fragestellung: „*Unter der Bedingung, dass vor 10 Taktzeitpunkten ein Umschaltvorgang stattgefunden hat: Wie stark wird die aktuelle Signalamplitude am Ausgang von Null abweichen?*“. Gesucht ist also ein bedingter bzw. ein zeitlich abhängiger Erwartungswert. Wir gehen davon aus, dass je nach Situation, ungewöhnliche Amplituden im positiven als auch im negativen Wertebereich auftreten können. Bei einem Erwartungswert würden sich diese Fälle dann gegenseitig ausgleichen. Deshalb wird das Vorzeichen ignoriert und damit jeweils der Betrag der Amplitude in Betracht gezogen. Der Erwartungswert des Amplitudenbetrags ist der mittlere absolute Abstand zur Nulllinie und beschreibt damit gleichzeitig die Streuung bezüglich Null. Um solch einen zeitlich lokalisierten Erwartungswert zu ermitteln, lohnt es sich die Idee von Monte-Carlo-Simulationen [MNR12] aufzugreifen. Bei diesen wird die mehrmalige Durchführung gleichartiger Einzelexperimente zu einem Ensemble zusammengefasst. Die Einzelexperimente eines Ensembles sind gleichartig, müssen sich aber an mindestens einem Parameter zufällig unterscheiden. Dies ermöglicht dann einen statistisch aussagekräftigen Einblick in das Experiment. Monte-Carlo-Simulationen basieren also auf dem Gesetz der großen Zahlen. Dieses Gesetz besagt, dass das arithmetische Mittel (geschätzter Erwartungswert) einer Zufallsvariable<sup>17</sup> konvergiert, wenn das zugrundeliegende Zufallsexperiment ausreichend häufig wiederholt wird.

**Einzelexperiment:** Betrachte man als Beispiel zunächst ein Einzelexperiment, bei dem die Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}}$  eines digitalen Tiefpassfilters von 1 kHz ab dem Zeitpunkt  $n_{\text{switch}} = 400$  nach 500 Hz umgeschaltet wird. Der Tiefpassfilter basiere auf  $H_{\text{EMQF}}(5, 50 \text{ dB})$ . Das Eingangssignal  $x_0[n]$  sei weißes Rauschen, dessen Amplitudenwerte im Intervall  $[-1, +1]$  gleichverteilt sind.

Mit dem Ausgabesignal  $y_0[n]$  des Einzelexperiments kann jetzt die momentane Signalstreuung über den Betrag der jeweiligen Amplitude  $|y_0[n]|$  zu diskreten Zeitpunkten grob geschätzt werden. Dabei könnte wie in Abschnitt 8.1 das Ergebnis sein, dass nach dem Umschaltvorgang zu mehreren Zeitpunkten die Signalstreuung bezogen auf den Signalkontext deutlich überschritten wird.

---

<sup>17</sup>Betrachte man das Werfen eines Würfels als Zufallsexperiment. Eine mögliche Zufallsvariable wäre dann eine mathematische Funktion der Augenzahl. Z.B. wäre die quadrierte Augenzahl eine mögliche Zufallsvariable des Würfelwurfs.

**Ensemble:** Bei den Ergebnissen des Einzelexperiments wüsste man nicht, inwiefern man hier einen eher seltenen Sonderfall getroffen hat. Um das durchschnittlich zu erwartende Systemverhalten zu einem spezifischen Zeitpunkt zu ermitteln, kann das Einzelexperiment mehrmals durchgeführt werden. Man führe also  $M$  Einzelexperimente durch und fasse sie zu einem *Ensemble* zusammen. Die Einzelexperimente werden über den Index  $m \in (0, 1, 2, \dots, M-1)$  identifiziert. Dabei unterscheiden sich die Einzelexperimente lediglich darin, dass sie mit jeweils unterschiedlichem Rauschsignal betrieben werden. Die Charakteristik des Rauschsignals bleibt aber für alle Einzelexperimente gleich. Abbildung 27 zeigt die grundsätzliche Struktur eines solchen Ensembles.

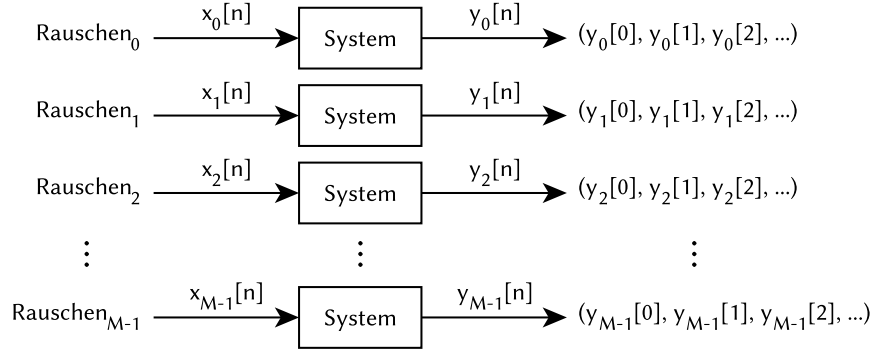


Abbildung 27: Grundaufbau des Ensembles zur Monte-Carlo-Simulation.

Anschließend können für einen spezifischen Zeitpunkt  $n$  alle Amplitudenbeträge gemittelt werden und erhält so einen geschätzten Erwartungswert für die momentane Signalstreuung MSS zu diesem Zeitpunkt  $n$ :

$$\text{MSS} ( y[n] ) := \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |y_m[n]| \quad (8.1)$$

Abbildung 28 zeigt den zeitlichen Verlauf der geschätzten momentanen Signalstreuung eines Ensembles bestehend aus  $M = 6000$  Einzelexperimenten. Die Parameter der Einzelexperimente entsprechen dem vorhergehend skizzierten Beispiel. Die Ausgabesignale entsprechen jeweils der analytischen Antwort basierend auf der Output-Switching Methode. Bis zum Umschaltzeitpunkt  $n_{\text{switch}} = 400$  zeigt Abbildung 28 also zunächst das Verhalten eines LTI-Systems. Zu Beginn ist eine Art Einschwingphase zu sehen, bei der die Streuung ansteigt. Ab ungefähr  $n = 80$  stabilisiert sich die Streuung sehr deutlich.

In diesem Zusammenhang scheint für einen mit weißem Rauschen betriebenen LTI-Filter, welcher ab dem Zeitpunkt  $n_{\text{steadystate}}$  eingeschwungen ist, zu gelten:

$$\text{MSS} ( y[n] ) = \text{MSS} ( y[n+1] ) \quad \text{für } n \geq n_{\text{steadystate}} \text{ und } M \rightarrow \infty \quad (8.2)$$

Ab dem Umschaltzeitpunkt ändert sich dann die momentane Signalstreuung und stabilisiert sich auf einen neuen Wert. Die momentane Signalstreuung von gefiltertem weißem Rauschen ist also abhängig von den Eigenschaften des durchlaufenen Filters.

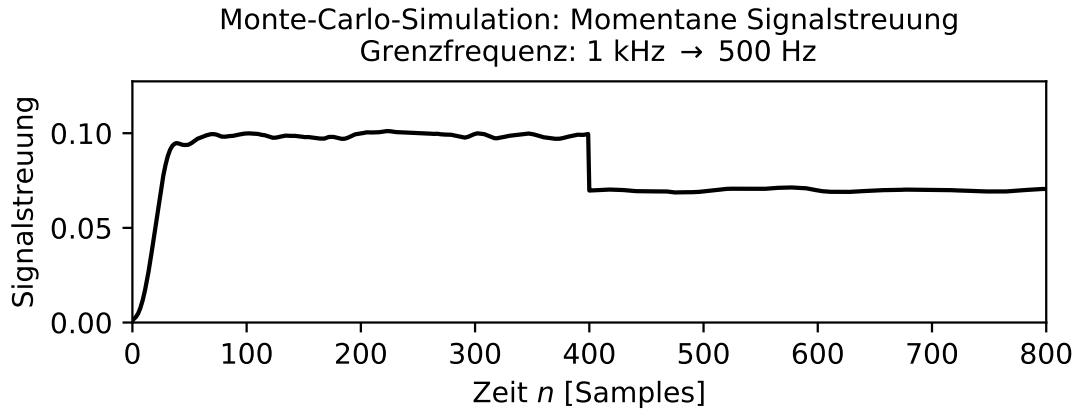


Abbildung 28: Geschätzte momentane Signalstreuung der analytischen Antworten (Output-Switching Methode) eines einzelnen Umschaltvorgangs bei  $n_{\text{switch}} = 400$ . Ensemblegröße  $M = 6000$ . Die übrigen Parameter sind  $H_{\text{EMQF}}(5, 50 \text{ dB})$  und  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (1 \text{ kHz}, 500 \text{ Hz})$ .

### 8.3.2. Implementierungsdetails

Die hier vorgestellte Messmethode und die damit getesteten Ansätze aus den Abschnitten 7 und 9 sowie der Prozess des Filterentwurfs wurde in der Programmiersprache *Python* [Ros] implementiert.

Für sämtliche Berechnungen wurde die Python-Bibliothek „*mpmath*“ (Version 0.19) [Joh+] genutzt. Dies ist eine Bibliothek für Fließkommaarithmetik mit beliebiger Präzision. Für die Simulationen wurde mindestens eine Präzision von 86 Bits eingesetzt, was bei *mpmath* ungefähr 25 dezimalen Nachkommastellen entspricht.

Die Berechnungen wurden mit dem Interpreter *CPython* (Version 2.7.13) ausgeführt.

### 8.3.3. Ergebnisse, Beobachtungen & Interpretation

In Abschnitt 8.2 wurde mit einer Auswahl an Testvariablen und möglichen Optionen für entsprechende Parameter eine Versuchsreihe erarbeitet. Für die daraus möglichen Optionskombinationen wurden jeweils die momentanen Signalstreuungen über Monte-Carlo-Simulationen mit einer Ensemblegröße von  $M = 6000$  angenähert. Dabei wurden für alle Ensembles ein einziger Satz von 6000 unterschiedlichen weißen Rauschsignalen mit jeweils 1000 Samples verwendet. Damit würden zwei Ensembles mit dem selben Systemverhalten exakt identische Ergebnisse liefern. Die Ergebnisse aus den Simulationen sind in den Abbildungen 29 bis 34 dargestellt.

Nachfolgend beziehen sich Oktavangaben auf das jeweilige Grenzfrequenzpaar  $\hat{f}_{3\text{dB}}$ . Dabei wird  $\{500 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}\}$  als untere,  $\{2.5 \text{ kHz}, 5 \text{ kHz}\}$  als mittlere und  $\{5 \text{ kHz}, 10 \text{ kHz}\}$  als obere Oktave bezeichnet.

In Abbildung 28 kann man erkennen, dass sich je nach aktueller Grenzfrequenz die Signalstreuung auf einen bestimmten Wert stabilisiert. Es existieren hier also zwei wesentliche Signalstreuungen jeweils vor und nach dem Umschaltvorgang. Der Wertebereich zwischen diesen beiden *analytischen Signalstreuungen* wird nachfolgend als **Streuungskorridor** bezeichnet.

In allen Ergebnissen ist zu sehen, dass sich die momentanen Signalstreuungen der jeweiligen Filter nach einer bestimmten Zeit nach dem Umschaltvorgang wieder zunehmend identisch verhalten. Das deutet darauf hin, dass im Rahmen der Experimente keine Probleme bezüglich Instabilität aufgetaucht sind. Ferner deutet es darauf hin, dass in allen Experimenten der Übergang zum Frequenzverhalten des Zielfilters erreicht wurde. Außerdem zeigen die Ergebnisse durchgehend, dass die Dauer des Übergangs abhängig vom Zielfilter ist. In diesem Kontext scheint folgendes zu gelten: Je höher die Grenzfrequenz des Zielfilters, desto kürzer dauert der Übergang zum neuen Frequenzverhalten.

**Topology-Preserving Transformation (TPT):** Das zeitvariante System auf Grundlage der TPT zeigt in allen Simulationen ein sehr kontrolliertes Verhalten. So geht die momentane Signalstreuung weich von der alten zur neuen Streuung über. Der Streuungskorridor zwischen alter und neuer analytischer Streuung wird nur in der oberen Oktave leicht verlassen. Diese Struktur scheint gegenüber der Kaskadierung beinahe agnostisch zu sein. So unterscheiden sich die Ergebnisse entgegengesetzter Kaskadierung nicht erkennbar (aber messbar). Eventuelle Implementierungsfehler diesbezüglich wurden überprüft und konnten ausgeschlossen werden. Diese Agnostik könnte ein Hinweis darauf sein, dass auch die inneren Signale der Struktur ein kontrolliertes Verhalten aufweisen.

**Gold-Rader (GR):** Die Gold-Rader Struktur mit aufsteigender Kaskadierung verlässt in der unteren Oktave den Streuungskorridor leicht. In der mittleren & oberen Oktave verlässt sie den Streuungskorridor nicht. Bei absteigender Kaskadierung und Aufwärtsbewegung der Grenzfrequenz verlässt sie den Streuungskorridor dagegen deutlich, indem die obere Grenze des Streuungskorridors überschritten wird. Deshalb sollte vom Einsatz Gold-Rader Struktur mit absteigender Kaskadierung bezüglich des Polradius eher abgesehen werden.

**Direktstrukturen (DF):** Die Direktstrukturen verlassen in fast allen Simulationen den Streuungskorridor sehr deutlich. Ausnahmefälle sind:

- Direktstruktur I in absteigender Kaskade unter Auswärtsbewegung der Grenzfrequenz in der unteren Oktave.
- Transponierte Direktstruktur II (inkl. Allpass-Realisierung) in der oberen Oktave unter Aufwärtsbewegung der Grenzfrequenz.

Grundsätzlich scheint bei den getesteten Direktstrukturen die Abwärtsbewegung der Grenzfrequenz kritisch zu sein. So wird in allen entsprechenden Testergebnissen mit Abwärtsbewegung die obere Grenze des Streuungskorridors deutlich überschritten. In diesen Fällen muss also mit einer für den Signalkontext ungewöhnlich großen Amplitudenauslenkung gerechnet werden.

Dagegen tendieren die Direktstrukturen bei Aufwärtsbewegung der Grenzfrequenz dazu, die untere Grenze des Streuungskorridors zu unterschreiten. In diesen Fällen kann

also mit geringen Amplitudenauslenkungen bezüglich des Signalkontextes gerechnet werden.

Vergleicht man die transponierte Direktstruktur II mit ihrer Allpass-Realisierung, erkennt man in allen Fällen ein extremeres Verhalten der Allpass-Realisierung. Die Allpass-Realisierung scheint im Falle der Direktstruktur II also ungünstiger zu sein. Ob dies generell für Allpass-Realisierungen basierend auf anderen Strukturen gilt, kann hiermit aber nicht belegt werden.

Gegenüber der aufsteigenden Kaskadierung scheint eine absteigende Kaskadierung die Extrema der Direktstrukturen zu mindern, ziehen die Artefakte jedoch etwas in die Länge.

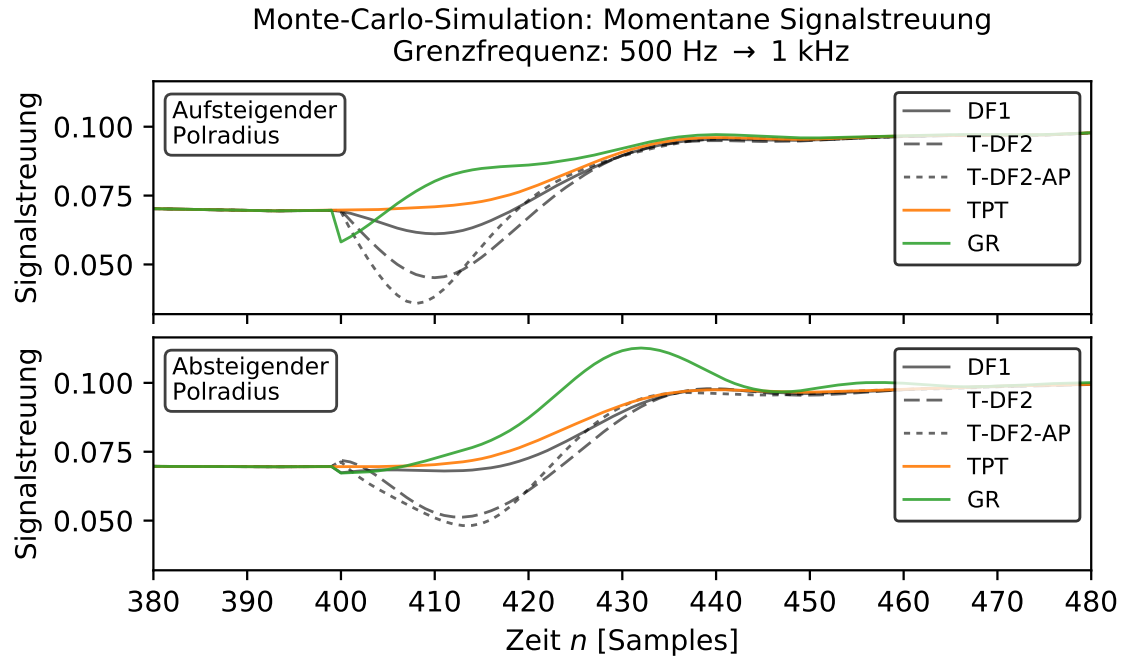


Abbildung 29: Geschätzte momentane Signalstreuung;  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (500 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz})$ ;  $n_{\text{switch}} = 400$ ;  $H_{\text{EMQF}}(N = 5, A_s = 50 \text{ dB})$ ; Ensemblegröße  $M = 6000$ ; Kaskade nach Polradius aufsteigend (oben) und absteigend (unten).

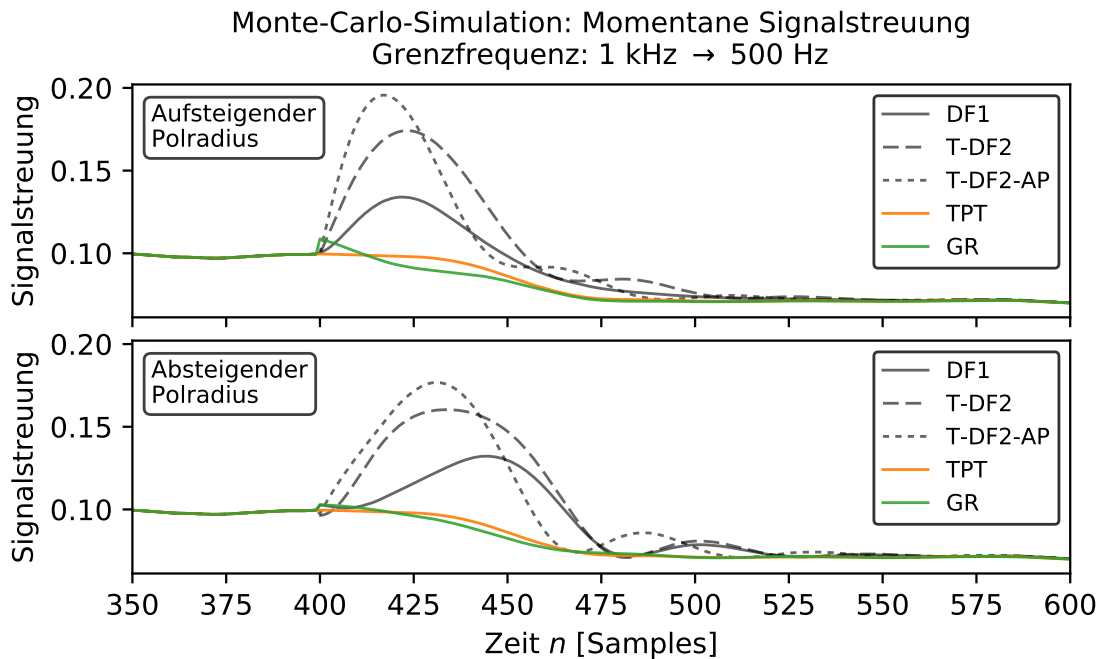


Abbildung 30: Geschätzte momentane Signalstreuung;  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (1 \text{ kHz}, 500 \text{ Hz})$ ;  $n_{\text{switch}} = 400$ ;  $H_{\text{EMQF}}(N = 5, A_s = 50 \text{ dB})$ ; Ensemblegröße  $M = 6000$ ; Kaskade nach Polradius aufsteigend (oben) und absteigend (unten).



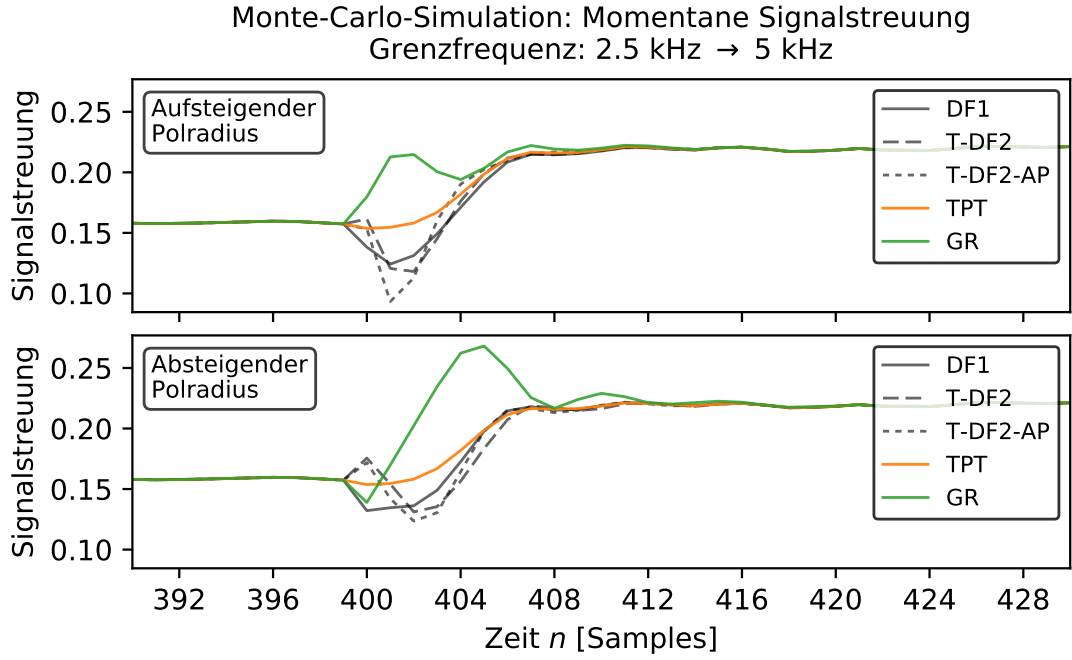


Abbildung 31: Geschätzte momentane Signalstreuung;  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (2.5 \text{ kHz}, 5 \text{ kHz})$ ;  $n_{\text{switch}} = 400$ ;  $H_{\text{EMQF}}(N = 5, A_s = 50 \text{ dB})$ ; Ensemblegröße  $M = 6000$ ; Kaskade nach Polradius aufsteigend (oben) und absteigend (unten).

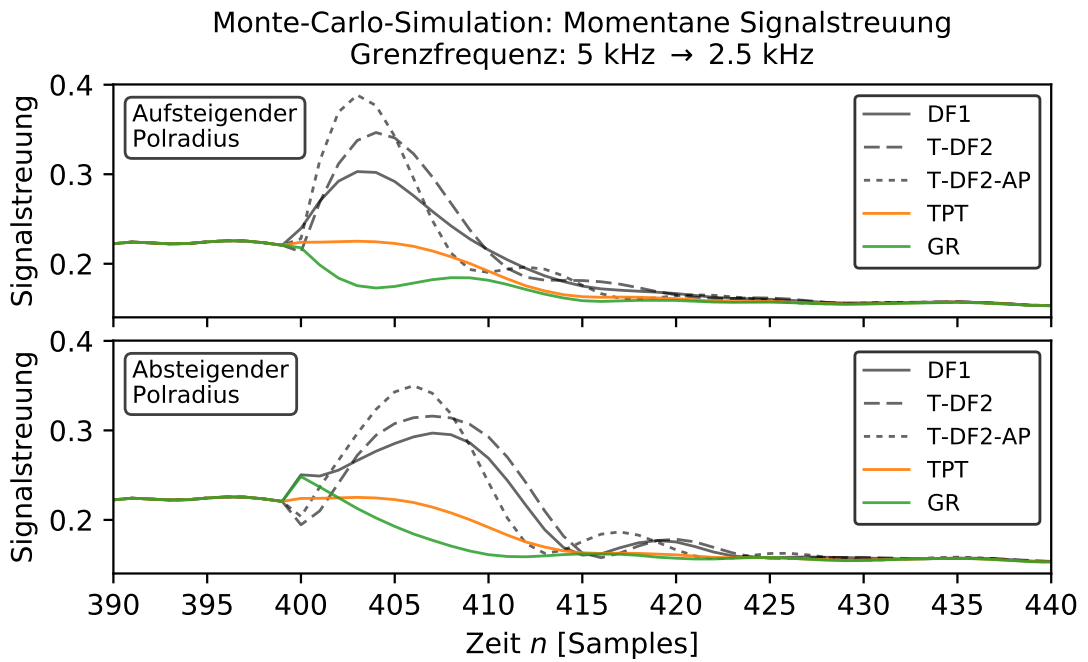


Abbildung 32: Geschätzte momentane Signalstreuung;  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (5 \text{ kHz}, 2.5 \text{ kHz})$ ;  $n_{\text{switch}} = 400$ ;  $H_{\text{EMQF}}(N = 5, A_s = 50 \text{ dB})$ ; Ensemblegröße  $M = 6000$ ; Kaskade nach Polradius aufsteigend (oben) und absteigend (unten).

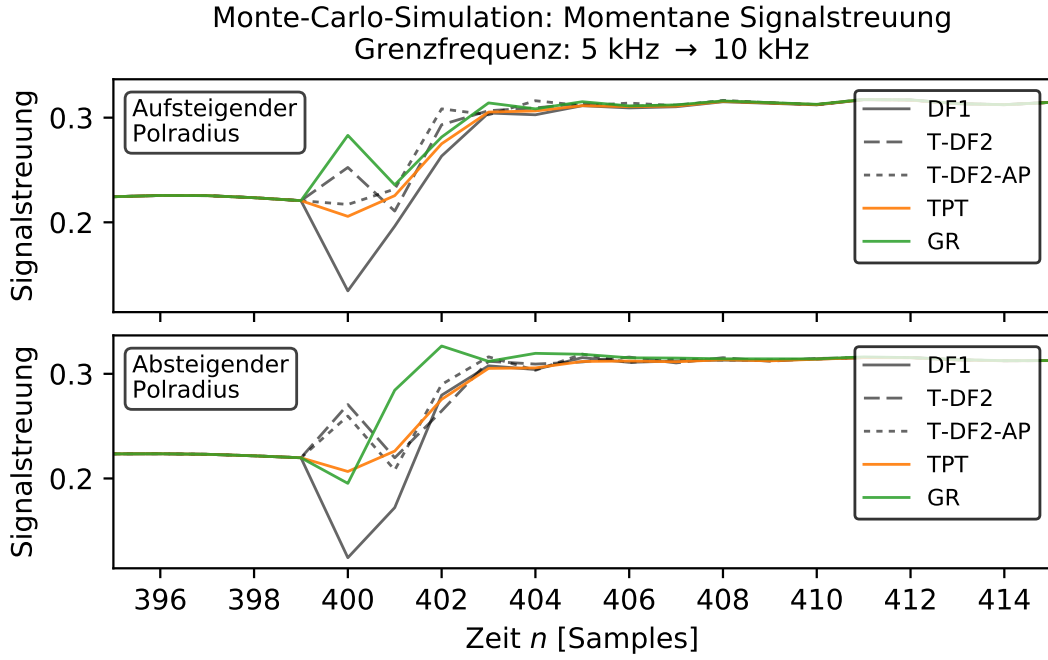


Abbildung 33: Geschätzte momentane Signalstreuung;  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (5 \text{ kHz}, 10 \text{ kHz})$ ;  $n_{\text{switch}} = 400$ ;  $H_{\text{EMQF}}(N = 5, A_s = 50 \text{ dB})$ ; Ensemblegröße  $M = 6000$ ; Kaskade nach Polradius aufsteigend (oben) und absteigend (unten).

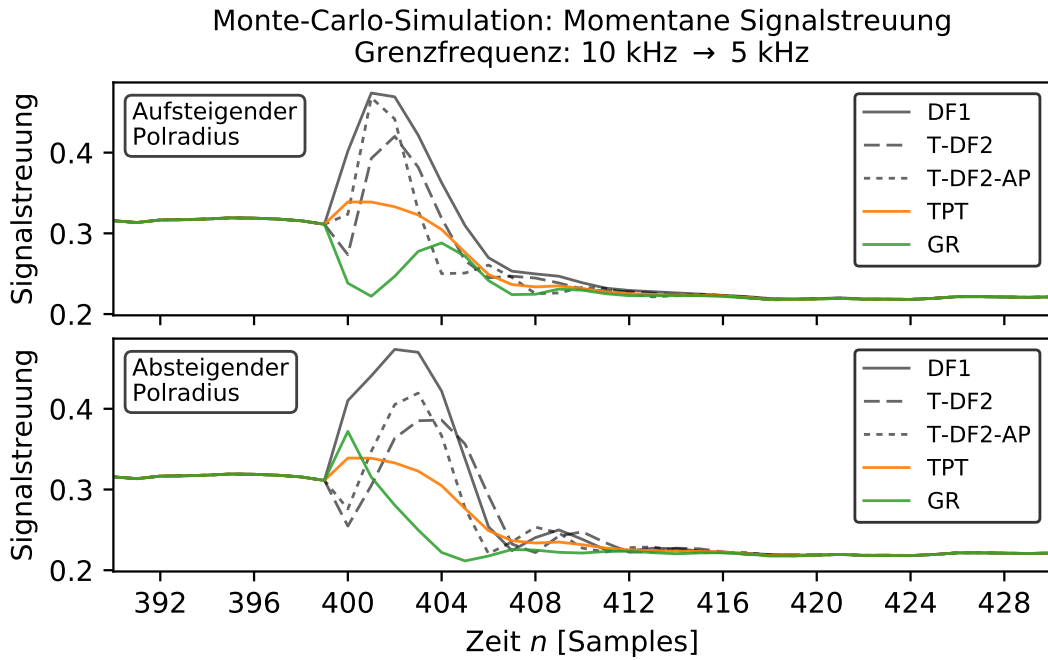


Abbildung 34: Geschätzte momentane Signalstreuung;  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (10 \text{ kHz}, 5 \text{ kHz})$ ;  $n_{\text{switch}} = 400$ ;  $H_{\text{EMQF}}(N = 5, A_s = 50 \text{ dB})$ ; Ensemblegröße  $M = 6000$ ; Kaskade nach Polradius aufsteigend (oben) und absteigend (unten).

### 8.3.4. Kritik an der Messmethode

Die Ergebnisse in Abschnitt 8.3.3 zeigen, dass die vorgestellte Messmethode deutliche Ergebnisse liefern kann. Deshalb eignen sich die Ergebnisse gut zur Interpretation und zum Vergleich von unterschiedlichen Filterimplementierungen.

Bei der Interpretation muss in Betracht gezogen werden, dass sich die Aussagekraft der Methodik zunächst unmittelbar auf die momentane Signalstreuung bezieht. Das liegt daran, dass bei der Entwicklung der Methode der Fokus sehr stark auf das Kriterium eines kontrollierten Signalverhaltens gelegt wurde. Damit liegt der Fokus aber nur auf einem einzigen Qualitätskriterium aus Abschnitt 6.

Dagegen wird speziell das Qualitätskriterium der wahrnehmungsarmen Artefakte durch diese Messmethode offenbar nicht zusätzlich abgebildet. So erzielten die Ansätze TPT und Output-Switching Methode bei dieser Messmethode sehr gute Ergebnisse. In den Ergebnissen der Hörtests aus [Wis14] wurden die beiden Ansätze jedoch sehr unterschiedlich bewertet. Während die TPT gut abschnitt, erhielt die Output-Switching Methode die schlechteste Bewertung. Ferner schnitt die T-DF2 bei der hier vorgestellten Messmethode sehr schlecht ab, während sie bei den Hörtests die besten Ergebnisse erzielte.

Die Messmethode behandelt ein SISO-System nach dem Blackbox-Prinzip. Dies hat den Vorteil, dass beliebige Systeme unabhängig von ihrer Komplexität und dem Grad ihrer Nicht-Linearität auf gleiche Weise untersucht werden können. Daraus ergibt sich aber auch der Nachteil, dass die Messmethodik allein keine ganzheitliche Bewertung erlaubt. Beispielsweise könnte eine „betrügerische Filterimplementierung“ so gestaltet werden, dass die Messergebnisse optimal ausfallen. Um dies zu erzwingen, könnte die Filterstruktur selbst den Signalkontext erfassen und eine entsprechende Signalstreuung anstreben. Wird durch die „betrügerische Filterimplementierung“ ein Umschaltvorgang beobachtet, könnte diese dann kurzzeitig ein Rauschsignal mit entsprechender Streuung ausgeben. Damit wären optimale Ergebnisse bezüglich der momentanen Signalstreuung möglich. Dazu würde aber das Qualitätskriterium der wahrnehmungsarmen Artefakte vermutlich stark verletzt werden.

Ferner ist zu beachten, dass diese Methodik ein statistisches Verfahren ist. D.h., dass spezielle ungünstige Fälle, die sich in extremen Ausreißern ausdrücken, durch die statistische Mittelung verdeckt und damit nicht erkannt werden könnten. Um dieser Problematik entgegenzuwirken, empfiehlt es sich aus den Ausgabesignalen eines Ensembles weitere statistische Kenngrößen zu erheben.

## 9. Strategischer Ansatz: Langsames Umschalten

Langsames Umschalten ist ein Ansatz, um Artefakte im zeitvarianten Betrieb von IIR-Filtern zu mindern. Ziel ist es, über einen Zeitraum der *Umschaltdauer*  $\Delta n_{\text{smooth}}$  viele kleine Änderungen an den Koeffizienten des Systems vorzunehmen. Eine mögliche Intuition dahinter ist, dass eine sehr geringe Änderung eines Koeffizienten äquivalent zu einem geringen Rundungsfehler bei der Multiplikation angesehen werden kann.

Betrachte man das Szenario eines zeitvarianten Tiefpassfilters, der sich bis zum Zeitpunkt  $n_{\text{switch}}$  äquivalent zu einem Startfilter  $H_{\text{pre}}(z)$  mit der Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}(\text{pre})}$  verhalten hat. Wählt dann ein Nutzer eine neue Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}(\text{post})}$ , so definiert er damit einen Zielfilter  $H_{\text{post}}(z)$ .

### 9.1. Langsames Umschalten der Grenzfrequenz

Das langsame Umschalten von Start- zu Zielfilter könnte z.B. auf den semantischen Parameter der Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}}$  bezogen werden. Abbildung 35 zeigt das Schema, bei dem die Grenzfrequenz über den Zeitraum  $\Delta n_{\text{smooth}}$  linear zum neuen Zielwert überführt wird. Zu jedem Taktzeitpunkt wird also die aktuelle Grenzfrequenz ermittelt und damit die Koeffizienten für einen LTI-Filter berechnet, um diese dann am zeitvarianten Filter anzuwenden.

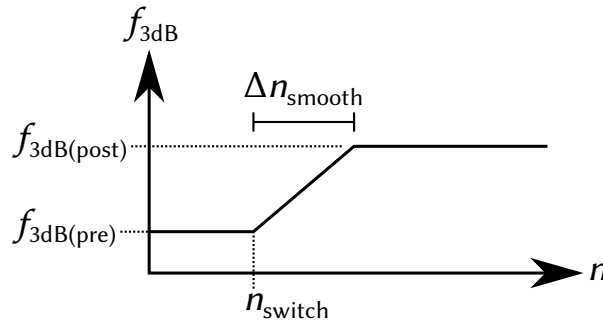


Abbildung 35: Schema für langsames Umschalten der Grenzfrequenz

Um andere Ansätze einfach ausdrücken zu können, kann man den Ansatz des langsamen linearen Übergangs der Grenzfrequenz durch eine Kontrollfunktion  $v[n]$  formulieren. Diese Kontrollfunktion hat einen Wertebereich von  $[0, 1]$ . Wenn ein Nutzer zum Zeitpunkt  $n_{\text{switch}}$  einen Umschaltvorgang zu einem Zielfilter auslöst, steigt der Wert der Kontrollfunktion  $v[n]$  innerhalb des Zeitraums  $\Delta n_{\text{smooth}}$  linear von 0 auf 1 an. Die Funktion kann somit für einen einzigen vom Nutzer ausgelösten Umschaltvorgang folgendermaßen formuliert werden:

$$v[n] = \begin{cases} 0 & \text{für } n \leq (n_{\text{switch}} - 1) \\ \frac{n - n_{\text{switch}} + 1}{\Delta n_{\text{smooth}} + 1} & \text{für } (n_{\text{switch}} - 1) < n < (n_{\text{switch}} + \Delta n_{\text{smooth}}) \\ 1 & \text{für } n \geq (n_{\text{switch}} + \Delta n_{\text{smooth}}) \end{cases} \quad (9.1)$$

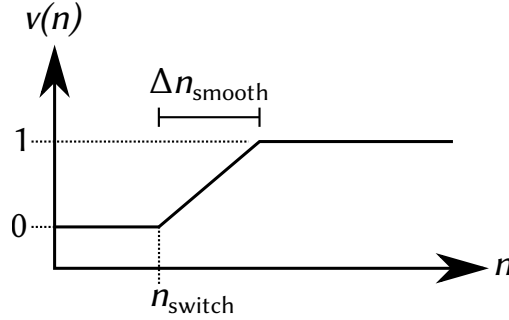


Abbildung 36: Prinzip der Kontrollfunktion als Grundlage zur Formulierung langsamer Umschaltvorgänge.

Abbildung 36 verdeutlicht das Prinzip der Kontrollfunktion  $v[n]$ . Mit dieser Funktion lässt sich nun das langsame Umschalten der Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}}$  einfach ausdrücken:

$$f_{3\text{dB}}[n] = f_{3\text{dB}(\text{pre})} + v[n] \left( f_{3\text{dB}(\text{post})} - f_{3\text{dB}(\text{pre})} \right) \quad (9.2)$$

Um eine Vorstellung von den Auswirkungen dieses Ansatzes zu erhalten wurde die in Abschnitt 8.3 beschriebene Methode zur Schätzung der momentanen Signalstreuung angewandt. Dazu wurde eine Optionskombination als Basis gewählt, die in der Versuchsreihe aus Abschnitt 8.3.3 deutliche Ergebnisse erzielte:  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (1 \text{ kHz}, 500 \text{ Hz})$ ;  $H_{\text{EMQF}}(N = 5, A_s = 50 \text{ dB})$ ; Kaskade nach Polradius aufsteigend.

Auf dieser Basis wurden drei Simulationen mit jeweils unterschiedlichen Werten für die Umschaltdauer  $\Delta n_{\text{smooth}}$  durchgeführt: 0, 50 und 100.

Die Simulationsergebnisse sind in Abbildung 37 dargestellt.

In den Simulationsergebnissen deuten sich einige Tendenzen bezüglich einer zunehmenden Umschaltdauer an:

- Die Direktstrukturen verlassen den Streuungskorridor nicht mehr so deutlich.
- Die Gold-Rader Struktur zeigt bei langsamem Umschalten durchgehend eine geringere Streuung, als die TPT.
- Die Filterstrukturen verhalten sich zunehmend ähnlich. Dies bezieht sich auf die Signalstreuung. Ob dies auch auf das Verhalten im Zeit- und/oder im Frequenzbereich zutrifft, kann hieraus nicht abgeleitet werden.

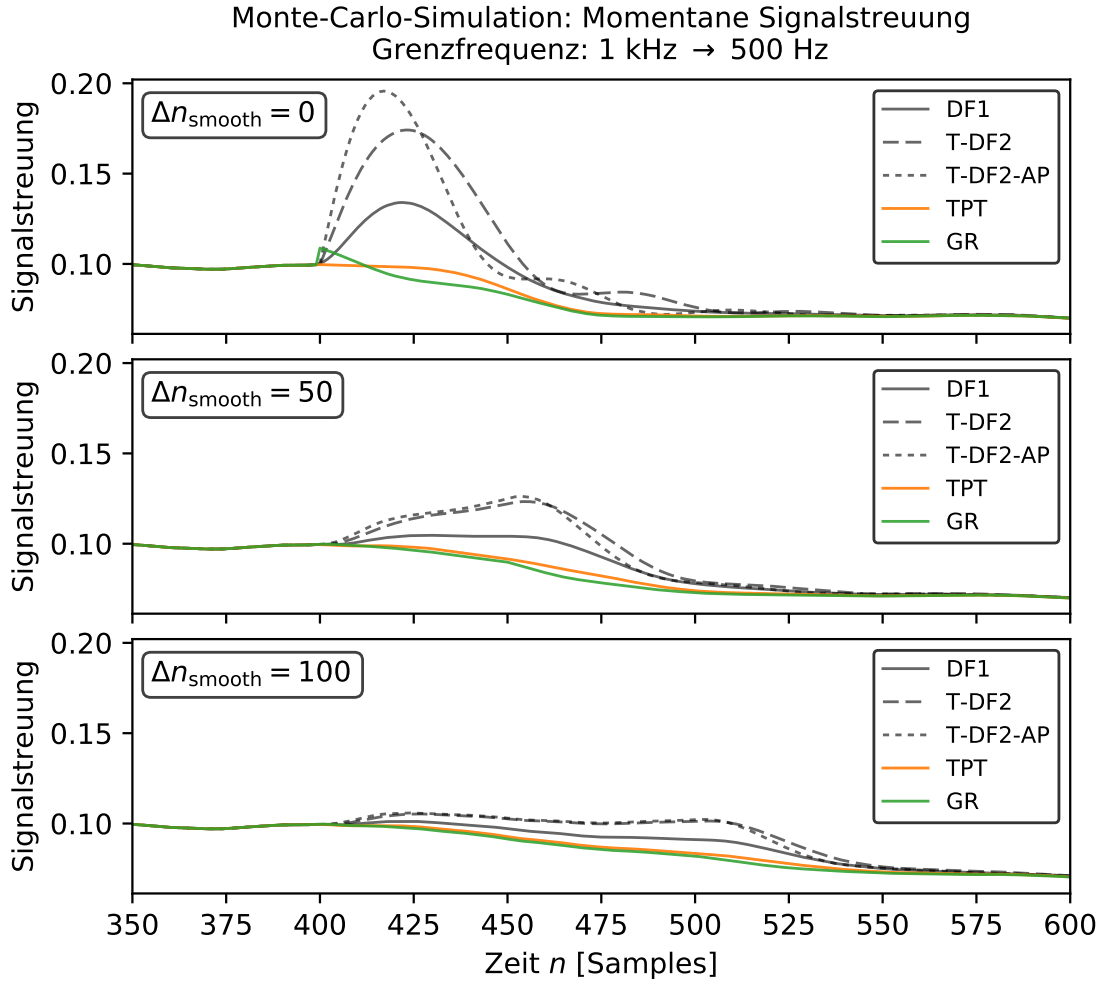


Abbildung 37: Geschätzte momentane Signalstreuung bei langsamem Umschalten der Grenzfrequenz;  $\hat{f}_{3\text{dB}} = (1 \text{ kHz}, 500 \text{ Hz})$ ;  $n_{\text{switch}} = 400$ ;  $H_{\text{EMQF}}(N = 5, A_s = 50 \text{ dB})$ ; Ensemblegröße  $M = 6000$ ; Kaskade nach Polradius aufsteigend.

## 10. Fazit & weitere Forschungsmöglichkeiten

In dieser Arbeit wurden verschiedene Ansätze (Abschnitt 9 & 7) zur Implementierung zeitvarianter Digitalfilter beschrieben und untersucht. Zur Untersuchung der Ansätze wurde ein Verfahren (Abschnitt 8.3) vorgestellt, welches auf dem Konzept der Monte-Carlo-Simulation beruht. In diesem Rahmen wurde der Aspekt der *momentanen Signalstreuung* eingeführt. Dieser Aspekt gibt Aufschluss darüber, inwiefern sich statistisch das Ausgabesignal eines zeitvarianten Digitalfilters in einer bestimmten Situation kontrolliert verhält. Es konnte gezeigt werden, dass das Verfahren deutliche und unterscheidbare Ergebnisse liefert. Damit sind die Ergebnisse auch gut interpretierbar.

Die vorgestellten Messergebnisse deuten ferner darauf hin, dass der Aspekt der momentanen Signalstreuung unabhängig vom Aspekt der auditiven Wahrnehmung ist. Das bedeutet, dass zur Bewertung eines zeitvarianten Digitalfilters bezüglich wahrnehmungsarmer Artefakte weitere Methoden angewandt bzw. entwickelt werden müssen. Andererseits bedeutet dies, dass der Aspekt der momentanen Signalstreuung einen weiteren eigenständigen Aspekt zeitvarianter Digitalfilter beschreibt.

Alle Versuche und Messergebnisse in dieser Arbeit beziehen sich auf rekursive Filter mit Tiefpass-Charakteristik. In künftigen Arbeiten sollte daher untersucht werden, ob die hier erarbeiteten Erkenntnisse auch für andere Filtercharakteristiken gelten. Dies gilt auch für weitere Benutzerparameter. So wurde in dieser Arbeit ausschließlich die Grenzfrequenz  $f_{3\text{dB}}$  als Benutzerparameter behandelt. Denkbar wären je nach Filtertyp und Charakteristik weitere Parameter wie z.B. die Flankensteilheit.

Von den hier untersuchten Grundstrukturen kann diejenige der *Topology-Preserving Transformation (TPT)* empfohlen werden. Diese erzielte unter dem Kriterium eines kontrollierten Verhaltens des Ausgabesignals durchweg gute Ergebnisse. Darüber hinaus wurde in [Wis14] ihre unbedingte zeitvariante Stabilität bewiesen und ein gutes Verhalten bezüglich wahrnehmbarer Artefakte durch Hörtests beobachtet. Hinzu kommt, dass die Struktur einfach implementiert werden kann. Außerdem ist sie wegen des geringen Rechenaufwands sehr gut für den Einsatz in Echtzeit geeignet.

Die TPT-Struktur basiert in dieser Arbeit auf einem analogen Filter zweiter Ordnung in Direktstruktur II, auf welcher auch der analoge *State-Variable Filter* basiert. Mit der *Topology-Preserving Transformation* können auch weitere analoge Filterstrukturen simuliert werden. In künftigen Arbeiten könnte untersucht werden, ob diese Varianten ebenfalls gute Eigenschaften besitzen.

Die Gold-Rader Struktur zeigte keine so eindeutigen Ergebnisse. Bezüglich der momentanen Signalstreuung verhält diese sich bei einer Kaskadierung nach aufsteigendem Polradius ähnlich zur TPT. Die Gold-Rader Struktur ist ebenfalls unbedingt zeitvariant stabil. Bei den Hörtests aus [Wis14] wurde diese Struktur aber vergleichsweise schlecht bewertet. Da die Gold-Rader Struktur abgesehen davon aber gute Eigenschaften, auch bezüglich der Implementierung, aufweist, sollte diese deshalb noch nicht verworfen werden. Insofern sollte diese Struktur in aufsteigender Kaskade (bezügl. Polradius) und bei zusätzlich langsamem Umschalten genauer untersucht werden.

Bezüglich des Aspekts des kontrollierten Signalverhaltens am Ausgang sind die getesteten Direktstrukturen nicht zu empfehlen. Die Realisierung als Summe zweier Allpässe führte in diesem Zusammenhang eher zu einer Verschlechterung. Ob Allpass-Realisierungen im zeitvarianten Fall sich immer ungünstiger verhalten als der entsprechende Kaskaden-Ansatz, kann daraus nicht abgeleitet werden und bedarf weiterer Forschung. Außerdem ist die zeitvariante Stabilität der Direktstrukturen nicht garantiert.

Ob eine bestimmte Art der Kaskadierung (bezügl. Polradius) generell zu bevorzugen ist, konnte in dieser Arbeit nicht geklärt werden. Dies könnte in künftigen Arbeiten untersucht werden.

Der strategische Ansatz des langsamen Umschaltens wurde in Abschnitt 9 beschrieben. Für den semantischen Fall, bei dem die Grenzfrequenz langsam umgeschaltet wird, weisen die Ergebnisse auf einen durchweg positiven Einfluss hinsichtlich eines kontrollierten Signalverhaltens am Ausgang hin. In künftigen Forschungen könnte untersucht werden, ob diese Vermutung einen allgemein gültigen Zusammenhang beschreibt. Des Weiteren kann untersucht werden, ob langsames Umschalten zu auditiv weniger wahrnehmbaren Artefakten führt. Eine weitere Forschungsmöglichkeit wäre die Frage, inwieweit eine weichere geformte Kontrollfunktion einen positiven Einfluss auf die genannten Qualitätskriterien hat.

Im Rahmen dieser Arbeit hat sich gezeigt, dass das Konzept der Monte-Carlo-Simulation ein sinnvoller Ansatz zur Untersuchung zeitvarianter Digitalfilter sein kann. Daher könnten weitere Methoden basierend auf diesem Konzept erarbeitet werden. Beispielsweise könnte eine Monte-Carlo-Simulation entwickelt werden, bei welcher der Frequenzbereich des Ausgabesignals berücksichtigt wird. Damit wäre ein Messverfahren denkbar, welches bezüglich der auditiven Wahrnehmung von Artefakten aussagekräftig ist. Dies könnte Hörexperimente ersparen und eine größere Objektivität ermöglichen.



## A. Verschiedenes

### A.1. Literaturempfehlungen

Für die entsprechenden Themen kann folgende Literatur empfohlen werden:

- [Lyo10]: Ermöglicht einen guten Einstieg in die digitale Signalverarbeitung.
  - Fourier-Transformation für digitale Signale
  - Analyse beliebiger digitaler Filterstrukturen über die z-Transformation
- [PM13]: Behandelt weiterführende Themen der digitalen Signalverarbeitung.
  - Bilineare Transformation
  - Einstieg in den Entwurf rekursiver Digitalfilter basierend auf analogen Prototyp-Filtern
- [Sun09]: Beleuchtet v.a. die Analyse von zeitdiskreten (digitalen) und zeitkontinuierlichen (analogen) LTI-Systemen.
  - Laplace-Transformation
  - Zustandsraumdarstellung zeitdiskreter und zeitkontinuierlicher LTI-Systeme

### A.2. Koeffizienten eines Polynoms

Gesucht sind die reellen Koeffizienten eines Polynoms  $P(z)$  zweiten Grades. Das Polynom besitzt zwei komplexe Nullstellen, die zueinander komplex-konjugiert sind. Das Polynom kann daher durch eine der beiden komplexen Nullstellen formuliert werden. Eine der beiden Nullstellen sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ :

$$z_0 = c + jd = re^{j\theta} = r(\cos \theta + j \sin \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} c = r \cos \theta \\ d = r \sin \theta \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Das Polynom lässt sich dann folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = (z - z_0)(z - \bar{z}_0) \\ &= (z - (c + jd))(z - (c - jd)) \\ &= z^2 - 2 \underbrace{c}_{=r \cos \theta} z + \underbrace{c^2 + d^2}_{=r^2} \\ &= z^2 - 2r \cos \theta z + r^2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Damit gilt für die reellwertigen Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -2c = -2r \cos \theta \\ a_2 &= c^2 + d^2 = r^2 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Da für den Linearfaktor-Ansatz des hier beschriebenen Polynoms kein spezieller Vorfaktor gewählt wurde, beachte man, dass in diesem Fall für den Koeffizienten  $a_0$  immer gilt:  $a_0 = 1$ .

### A.3. Zeitkontinuierliche Impulsfunktion

Die zeitkontinuierliche Impulsfunktion  $\delta(t)$  wird auch als „Diracsche Deltafunktion“ bezeichnet.

Nach [Pap17, Kapitel XII.3.3] wird die Impulsfunktion  $\delta(t)$  folgendermaßen definiert:

$$\delta(t - T) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq T \\ \infty & \text{für } t = T \end{cases} \tag{A.4}$$

Die Impulsfunktion  $\delta(t)$  muss dabei folgende Eigenschaften besitzen:

Die Impulsfunktion  $\delta(t)$  ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) dt = 1 \tag{A.5}$$

Außerdem muss sie die folgende „Siebeigenschaft“ besitzen, sodass für eine bestimmte Zeitfunktion  $f(t)$  mit  $-\infty < t < \infty$  gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) \cdot f(t) dt = f(T) \tag{A.6}$$

Dadurch wird also die Funktion  $f(t)$  an der Stelle  $t = T$  ausgewertet.

## Quellen- & Literaturverzeichnis

- [AWR15] Paul Adenot, Chris Wilson und Chris Rogers. *Web Audio API*. W3C Working Draft. W3C, Dez. 2015. URL: <http://www.w3.org/TR/2015/WD-webaudio-20151208/>.
- [Bri] Robert Bristow-Johnson. *Cookbook formulae for audio EQ biquad filter coefficients*. Abgerufen am 20. Mai 2018. URL: <http://www.musicdsp.org/files/Audio-EQ-Cookbook.txt>.
- [Dat97] Jon Dattorro. „Effect design, part 1: Reverberator and other filters“. In: *Journal of the Audio Engineering Society* 45.9 (1997), S. 660–684.
- [Dic+14] M. Dickreiter u. a. *Handbuch der Tonstudientechnik*. De Gruyter, 2014. ISBN: 978-3-110-31650-6.
- [Joh+] Fredrik Johansson u. a. *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic*. Version 0.19. URL: <http://mpmath.org/>.
- [Lar07] Jean Laroche. „On the Stability of Time-Varying Recursive Filters“. In: *J. Audio Eng. Soc* 55.6 (2007), S. 460–471. URL: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=14168>.
- [Lar98] Jean Laroche. „Using Resonant Filters for the Synthesis of Time-Varying Sinusoids“. In: *Audio Engineering Society Convention 105*. Sep. 1998. URL: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=8398>.
- [LTE00] Miroslav D. Lutovac, Dejan V. Tomic und Brian L. Evans. *Filter Design for Signal Process Using MATLAB and Mathematica*. 1. Aufl. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, 2000. ISBN: 0-20136-130-2.
- [Lyo10] R.G. Lyons. *Understanding Digital Signal Processing*. 3. Aufl. Pearson Education, 2010. ISBN: 978-0-137-02852-8.
- [Mit11] S.K. Mitra. *Digital Signal Processing: A Computer-based Approach*. 4. Aufl. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering. McGraw-Hill, 2011. ISBN: 978-0-073-38049-0.
- [MNR12] T. Müller-Gronbach, E. Novak und K. Ritter. *Monte Carlo-Algorithmen*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 978-3-540-89141-3.
- [Olv+10] F.W.J. Olver u. a. *NIST Handbook of Mathematical Functions Hardback and CD-ROM*. Cambridge University Press, 2010. ISBN: 978-0-521-19225-5.
- [Pap17] L. Papula. *Mathematische Formelsammlung: Für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 12. Aufl. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017. ISBN: 978-3-658-16195-8.
- [PK08] B. Pfister und T. Kaufmann. *Sprachverarbeitung: Grundlagen und Methoden der Sprachsynthese und Spracherkennung*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 978-3-540-75910-2.
- [PM13] J.G. Proakis und D.K. Manolakis. *Digital Signal Processing: Pearson New International Edition*. Pearson Education Limited, 2013. ISBN: 978-1-292-03816-2.

- [R+07] Lawrence R Rabiner, Ronald W Schafer u. a. „Introduction to digital speech processing“. In: *Foundations and Trends in Signal Processing* 1.1–2 (2007), S. 1–194.
- [Rab88] Rudolf Rabenstein. „Minimization of transient signals in recursive time-varying digital filters“. In: *Circuits, Systems and Signal Processing* 7.3 (Sep. 1988), S. 345–359. ISSN: 1531-5878. DOI: [10.1007/BF01599975](https://doi.org/10.1007/BF01599975).
- [RC85] Rudolf Rabenstein und Roland Czarnach. „Stability of recursive time-varying digital filters by state vector transformation“. In: *Signal Processing* 8.1 (1985), S. 75–92. ISSN: 0165-1684. DOI: [10.1016/0165-1684\(85\)90090-8](https://doi.org/10.1016/0165-1684(85)90090-8).
- [RL94] D. M. Rabrenovic und M. D. Lutovac. „Elliptic filters with minimal Q-factors“. In: *Electronics Letters* 30.3 (Feb. 1994), S. 206–207. ISSN: 0013-5194. DOI: [10.1049/el:19940180](https://doi.org/10.1049/el:19940180).
- [RM14] Joshua D. Reiss und Andrew McPherson. *Audio Effects: Theory, Implementation and Application*. CRC Press, 2014. ISBN: 978-1-466-56028-4.
- [Ros] Guido van Rossum. *CPython: Reference implementation of the Python programming language*. Version 2.7. Python Software Foundation. URL: <https://www.python.org/>.
- [Sch15] F.C. Scholz. *Audiotechnik für Mediengestalter*. De Gruyter, 2015. ISBN: 978-3-110-36633-4.
- [Smi07] J.O. Smith. *Introduction to Digital Filters: With Audio Applications*. Music signal processing series. W3K, 2007. ISBN: 9780974560717. URL: <https://ccrma.stanford.edu/~jos/filters/>.
- [Sun09] D. Sundararajan. *A Practical Approach to Signals and Systems*. Wiley, 2009. ISBN: 978-0-470-82354-5.
- [VL98] V. Välimäki und T. I. Laakso. „Suppression of transients in time-varying recursive filters for audio signals“. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on*. Bd. 6. Mai 1998, 3569–3572 vol.6. DOI: [10.1109/ICASSP.1998.679646](https://doi.org/10.1109/ICASSP.1998.679646).
- [Wet17] Raphael Wettinger. *Projektdokumentation: Multiband Adaptive Distortion*. Softwareprojekt im Wintersemester 2016/2017 betreut durch Prof. Dr. Joachim Charzinski. Hochschule der Medien Stuttgart. 2017.
- [Wis14] Aaron Wishnick. „Time-Varying Filters for Musical Applications.“ In: *17th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-14)*. Sep. 2014.
- [Zav15] Vadim Zavalishin. *The Art of VA Filter Design*. Internet. Abgerufen am 24. Mai 2018. Juli 2015. URL: [https://www.native-instruments.com/fileadmin/ni\\_media/downloads/pdf/VAFilterDesign\\_1.1.1.pdf](https://www.native-instruments.com/fileadmin/ni_media/downloads/pdf/VAFilterDesign_1.1.1.pdf).
- [Zöl11] Udo Zölzer, Hrsg. *DAFX: Digital Audio Effects*. 2. Aufl. Wiley, 2011. ISBN: 0-47066-599-8.
- [ZZ88] Lars H Zetterberg und Qingshi Zhang. „Elimination of transients in adaptive filters with application to speech coding“. In: *Signal Processing* 15.4 (1988), S. 419–428. ISSN: 0165-1684. DOI: [10.1016/0165-1684\(88\)90060-6](https://doi.org/10.1016/0165-1684(88)90060-6).