Machine Learning Boosting Algorithm: A study case with Tic Tac Toe

Trabalho Prático 2

ABSTRACT KEYWORDS

Machine Learning, boosting, Adaboost

ACM Reference format:

. 2017. Machine Learning Boosting Algorithm: A study case with Tic Tac Toe. In *Proceedings of Machine Learning Class, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil, June 2017 (UFMG 2017),* 4 pages. https://doi.org/

1 INTRODUÇÃO

Boosting é um meta-algoritmo de agregação de classificadores em machine learning cujo objetivo é criar um classificador forte baseado na combinação de classificadores fracos. Neste trabalho prático, iremos construir um classificador de partidas de jogo da velha utilizando a técnica de boosting conhecida como Adaboost. Nela, é introduzido o conceito de importância de classificação nos exemplos de treinamento. Em princípio, todos exemplos tem a mesma importância, porém a cada iteração um classificador fraco é escolhido e a importância dos exemplos é modificada: aquelas em que este classificador acertou, tem sua importância reduzida, e aquelas em que ele errou, tem sua importância aumentada. Desta maneira, na próxima iteração, a escolha do próximo classificador fraco será enviesada para escolher um que acerte aqueles em que o anterior errou. Resultando assim em uma combinação de classificadores (ensamble) mais robusta (figura. 1).

2 DATASET

O dataset utilizado neste experimento é o tic-tac-toe, disponível em https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Tic-Tac-Toe+Endgame. Cada linha desde dataset representa um jogo da velha realizado e o label de qual jogador venceu aquela partida. Caso tenha sido o jogador "x" ele é positivo e se foi o jogador "o", este label é negativo. É interessante relatar, que nesta base da dados, não há exemplos de empate. Acredito que isto tenha sido feito propositalmente para que padecemos utilizar um classificador binário na classificação ao invés de alguma outra técnica, por exemplo a one-against-all. A tabela ?? mostra a caracterização deste dataset.

Como dito antes, cada linha dos dados representa uma instância do jogo em que o jogador 'x' ganhou ("positive") ou perder ("negative"). A figura 2 descreve com mais detalhe a representação

Permission to make digital or hard copies of part or all of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. Copyrights for third-party components of this work must be honored. For all other uses, contact the owner/author(s).

UFMG 2017, June 2017, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil © 2017 Copyright held by the owner/author(s). ACM ISBN 978-x-xxxx-xxxx-x/YY/MM. https://doi.org/

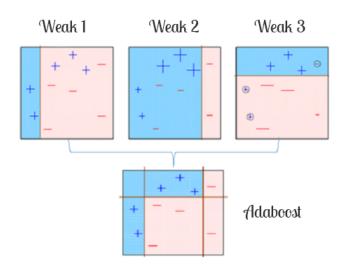


Figure 1: Adaboost com 3 classificadores fracos

Vencedor	Quantidade
x	626
0	332
total	958

Table 1: Tic-Tac-Toe Dataset

de um jogo: um vetor de 10 posições, em que as primeiras nove são mapeadas diretamente para as 9 posições de um jogo da velha (começando do canto superior esquerdo), seguido de um label mostrando se o jogador 'x' ganhou ou perdeu. Cada uma das 9 primeiras posições contem um dos três valores possíveis: 'b' para blank, 'x' para o primeiro jogador e 'o' para o segundo.

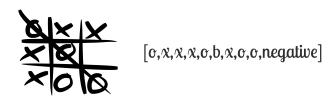


Figure 2: Representação de um jogo.

3 IMPLEMENTAÇÃO

Conforme dito na seção 1, o *Adaboost* se caracteriza por criar um classificador forte a partir de classificadores fracos. Portanto, antes

de implementarmos o *Adaboost* em si, devemos introduzir os classificadores fracos que teremos disponíveis. A especificação deste trabalho prático pede para que seja utilizado como classificadores fracos *stumps* de decisão. Estes *stumps*, nada mais são do que uma árvore de decisão de apenas um separando duas folhas. Também podemos ver eles como uma classificador extremamente simples que toma sua decisão de acordo com um único par de (variavel,valor). A figura 1, ilustra bem este conceito, mostrando 3 *stumps* (classificadores fracos).

3.1 Stumps Possíveis

Traduzindo esses stumps para a nossa aplicação de jogo da velha, teremos ao todo 54 stumps disponíveis. Sendo a combinação de pares (variáveis,valores) disponíveis na representação de um jogo (Figura. 2), associada com uma predição de classificação "positive" ou "negative". As variáveis são as 9 posições no vetor (0-8), os valores são as três possíveis marcações [o,x,b], a tabela. 2 mostra todos os stumps existentes.

3.2 Detalhes de implementação

O algoritmo *Adaboost* foi implementado em python3 (não funcionará em python2) seguindo o pseudocódigo 1. O código fonte foi disponibilizado no github sob licença GLP-3.0 e pode ser encontrado na url: https://github.com/raphaottoni/boosting.

Algorithm 1 Adaboost

- (1) Inicializa o peso de cada observação como $w_i = 1/N, i = 1, 2, ..., N$
- (2) For m = 1 to nstumps:
 - (a) Calcula o errro de todos *stumps* disponíveis e escolhe o stump $S_m(x)$ sendo aquele com menor $erro_j$:

$$Erro_j = \sum_{erros} w_i$$

(b) Calcula o alpha deste stump escolhido:

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \ln(\frac{1 - erro}{erro})$$

(c) Atualiza os pesos de todas as observações considerando a classificação dada pelo stump escolhido:

$$w_i = \frac{w_i}{2} \begin{cases} \frac{1}{1-erro}, & \text{Se classificado correto} \\ \frac{1}{erro}, & \text{Se classificado errado} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N$$

(3) Resultado $Adaboost(x) = \text{sign} \left[\sum_{m=1}^{nstumps} \alpha_m S_m(x) \right].$

Além disso, a implementação foi separada em 1 módulo de leitura de dados e uma classe *Boost*. Eles são usados por dois programas principais: main.py e main_step_by_step.py. A seguir será discorrido um pouco mais sobre essas separações e como são utilizadas para implementar o *Adaboost*.

3.2.1 Modulo datareader.py. Neste modulo são encontrados as funções de leitura do dataset de jogos da velha. Sua função básica é ler os dados no formato csv e clocá-los em memoria para que sejam acessados pela *boost*.

- 3.2.2 Classe Boost. Nesta classe é implementado todo o cerne do Adaboost. O objeto dessa classe representa um algoritmo de Adaboost completo que recebe como parâmetros para sua instanciação o número de observações no dataset e a quantidade de classificadores fracos que serão utilizados. Suas principais funções são:
 - build_classifier(observações_de_treino)
 - classify(sample)

Um pseudo código simples de funcionamento desta classe, pode ser visto em Algorithm. 2

Algorithm 2 Simples utilização da classe Boost

(1) Instância a classe:

adaboost = Boost(len(training_data),nstumps)

(2) Treina o classificador:

adaboost.build_classifier(training_data)

(3) Utiliza o classificador treinado para classificar:

adaboost.classify(sample)

3.3 Exemplo de execução

Conforme informado anteriormente, foram disponibilizado dois programas principais: 1) main.py e 2) main_step_by_step.py. Todos eles são executados a mesma maneira:

- ./python3 main.py <number_of_stumps>
- ./python3 main_step_by_step.py <number_of_stumps>

A única diferença entre eles, é que no main.py, já é reportado o resultado final do *Adaboost*, já tendo escolhido os 5 *stumps* (Figura. 3).

```
Evaluating Adaboost with 5-folds algorithm
Fold 1
Creating boosting class for 767 samples and 5 stubs
Chosen Stumps ander: [27, 39, 15, 3, 51]
Stumps Ernors: [0.30766239762230865, 0.36534839924670515, 0.35952056961087206, 0.37064767416036193, 0.367467876979272708]
Stumps Ernors: [0.30766239762230865, 0.36534839924670515, 0.3595372536344425, 0.26471994531494563, 0.271547550722708]
Fold 2
Creating boosting class for 767 samples and 5 stubs
Chosen Stumps ander: [27, 39, 15, 3, 15]
Stumps Alphas: [0.46180160936071954, 0.260957351567395, 0.2809353200673255, 0.2687988846862225, 0.27165842171298504]
Fold 3
Creating boosting class for 767 samples and 5 stubs
Chosen Stumps order: [27, 51, 3, 15, 39]
Stumps Ernors: [0.307806470791638, 0.356918235474-6559, 0.36652473769613897, 0.37701520404944627, 0.39338236101365726]
Fold 4
Creating boosting class for 767 samples and 5 stubs
Chosen Stumps order: [0.307806470791638, 0.356918235474-6559, 0.36652473769613897, 0.37701520404944627, 0.39338236101365726]
Fold 4
Creating boosting class for 767 samples and 5 stubs
Chosen Stumps order: [0.307806470792033210, 0.37997471235527574, 0.36374713663211106, 0.37557807511304991, 0.37214306393252455]
Stumps Ernors: [0.42980939279238327, 0.35537137175411243, 0.2795685564708322, 0.254179964412712, 0.2615169854506338]
Fold 5
Creating boosting class for 767 samples and 5 stubs
Chosen Stumps [0.4299593927032327], 0.35537137175441243, 0.2795685564708322, 0.2541799644512712, 0.2615169854506338]
Fold 5
Creating boosting class for 767 samples and 5 stubs
Chosen Stumps [0.4299639322013, 0.37997471235527574, 0.36374713663211106, 0.37557807511304991, 0.37214306393252455]
Stumps Alphas: [0.4094651081081622, 0.27712791347242055, 0.267735015617564, 0.277273970590545, 0.2747300417370866]
He final Caccuracy of boost that this week classifiers is : 0.46705308565674, 0.2772739705509545, 0.2747300417370866]
```

Figure 3: Resultado da escolha de 5 stumps e 5-fold analise do programa main.py

Já o main_step_by_step.py, ele apresentará os resultados parciais de cada escolha de stump, como pode ser visto na Figura. 4

Vale a pena atentar para o fato de que os resultados do *Adaboost* com 1 ou 2 stumps são exatamente os mesmos, como mostrado na Figura. 4. Este comportamento específico é esperado pois para cada novo stump escolhido o alpha associado a ele tende a ser menor que o anterior. Logo, no caso de uma combinação de dois classificadores fracos, a classificação sempre será a mesma da da pelo primeiro classificador fraco pois seu alpha é maior que o alpha do segundo,

Machine Learning Boosting Algorithm: A study case with Tic Tac Toe

```
Evaluating Adaboost with 5-folds algorithm
  reating boosting class for 767 samples and 1 stubs
Chosen Stumps order: [27]
Stumps Errors: [0.30508474576271277]
Stumps Alphas: [0.4116001544040694]
Fold 2
  reating boosting class for 767 samples and 1 stubs
 hosen Stumps order: [27]
tumps Errors: [0.29335071707953131]
 Stumps Alphas: [0.4395827996176115]
Fold 3
 reating boosting class for 767 samples and 1 stubs
Chosen Stumps order: [27]
Stumps Errors: [0.30769230769230865]
 tumps Alphas: [0.4054651081081622]
 reating boosting class for 767 samples and 1 stubs
  nosen Stumps order: [27]
 tumps Errors: [0.28813559322033955]
Stumps Alphas: [0.4522281371135747]

Fold 5
 reating boosting class for 767 samples and 1 stubs
hosen Stumps order: [27]
 tumps Errors: [0.30769230769230865]
 tumps Alphas: [0.4054651081081622]
  ne final accuracy of boost with 1 weak classifiers is : 0.6984293<u>1</u>93717279
 valuating Adaboost with 5-folds algorithm
Fold 1
 reating boosting class for 767 samples and 2 stubs
 Chosen Stumps order: [27, 3]
Stumps Errors: [0.30508474576271277, 0.36647904940587994]
Stumps Alphas: [0.4116001544040694, 0.27367585733583266]
 old 2
  reating boosting class for 767 samples and 2 stubs
Chosen Stumps order: [27, 3]
Stumps Errors: [0.29335071707953131, 0.37184091840918232]
Stumps Alphas: [0.4395827996176115, 0.26216366244993494]
Fold 3
 reating boosting class for 767 samples and 2 stubs
 hosen Stumps order: [27, 39]
Stumps Errors: [0.30769230769230865, 0.36534839924670515]
 Stumps Alphas: [0.4054651081081622, 0.276112385644515]
 reating boosting class for 767 samples and 2 stubs
 Chosen Stumps order: [27, 15]
Stumps Errors: [0.28813559322033955, 0.35811247575953359]
Stumps Alphas: [0.4522281371135747, 0.2917829886489466]
Fold 5
 reating boosting class for 767 samples and 2 stubs
 hosen Stumps order: [27, 39]
 tumps Errors: [0.30769230769230865, 0.36817325800376732]
  cumps Alphas: [0.4054651081081622, 0.27003078849315615]
  e final accuracy of boost with 2 weak classifiers is :
                                                                          0.6984293193717279
```

Figure 4: Resultado da escolha de 2 stumps e 5-fold analise do programa main_step_by_step.py

logo a soma do produto da classificação dos dois pelos seus alphas (Algoritimo 1, passo 3) sempre terá o sinal do primeiro classificador fraco.

3.4 Decisões

Durante a implementação do algoritmo, algumas decisões importantes foram feitas:

- Conforme a especificação original do *Adaboost*, foi permitido que stumps previamente escolhidos pudessem ser escolhidos novamente no futuro.
- O base do logaritmo utilizado no calculo dos alphas (Pseudocódigo 1) foi a natural *e*
- No calculo de novos pesos de cada observação (Pseudocódigo 1) a equação original foi expandida e separada

UFMG 2017, June 2017, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil

em dois casos: quando o stump escolhido acerta e quando ele erra.

4 ANALISE

Todas as analises foram feitas baseadas em calculo de erro simples e utilizando o algoritmo de validação cruzada com 5 partições. Nestas análises não foram variadas o número de partições por acreditar que este trabalho prático é voltado para o algoritmo de *boosting* e não de validação cruzada.

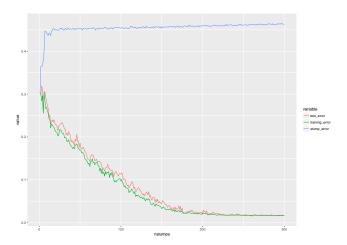


Figure 5: Adaboost erros por quantidade de weak classifiers

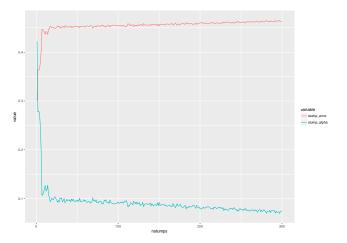


Figure 6: Adaboost stumps escolhidos em cada iteração com seus alphas e errors associados

5 DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

conclusão

0 0 positive 1 0 x positive 2 0 b positive 3 0 0 negative 4 0 x negative 5 0 b negative 6 1 0 positive 7 1 x positive 8 1 b positive 9 1 0 negative 10 1 x negative 11 1 b negative 12 2 2 positive 13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 0 negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 0 positive 19 3 x positive	Stump_ID	Variável	Valor	Predição
2			О	_
3 0 0 negative 4 0 x negative 5 0 b negative 6 1 0 positive 7 1 x positive 8 1 b positive 9 1 0 negative 10 1 x negative 10 1 x negative 11 1 b negative 12 2 o positive 12 2 o positive 13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 o negative 16 2 x negative 16 2 x negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 o positive		0	X	positive
4 0 x negative 5 0 b negative 6 1 0 positive 7 1 x positive 8 1 b positive 9 1 0 negative 10 1 x negative 10 1 x negative 11 1 b negative 12 2 o positive 12 2 o positive 13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 o negative 16 2 x negative 16 2 x negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 o positive 19 3 x positive	2	0	b	positive
5 0 b negative 6 1 0 positive 7 1 x positive 8 1 b positive 9 1 0 negative 10 1 x negative 10 1 x negative 11 1 b negative 12 2 0 positive 12 2 0 positive 14 2 b positive 15 2 0 negative 16 2 x negative 16 2 x negative 18 3 0 positive 19 3 x positive 20 3 b positive 21 3 0 negative 22 3 x negative 23 3 b negative	3	0	О	negative
6	4	0	X	negative
7 1 x positive 8 1 b positive 9 1 0 negative 10 1 x negative 11 1 b negative 12 2 0 positive 12 2 0 positive 13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 0 negative 16 2 x negative 16 2 x negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 o positive 19 3 x positive 20 3 b positive 21 3 x negative 22 3 x negative 23 3 b negative <td>5</td> <td>0</td> <td>b</td> <td>negative</td>	5	0	b	negative
8 1 b positive 9 1 o negative 10 1 x negative 11 1 b negative 12 2 o positive 13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 o negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 o positive 19 3 x positive 20 3 b positive 21 3 x negative 22 3 x negative </td <td>6</td> <td>1</td> <td>O</td> <td>positive</td>	6	1	O	positive
9	7	1	X	positive
10 1 x negative 11 1 b negative 12 2 0 positive 13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 0 negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 0 positive 19 3 x positive 20 3 b positive 20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 29 4 b negative	8	1	b	positive
11 1 b negative 12 2 0 positive 13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 o negative 16 2 x negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 o positive 19 3 x positive 20 3 b positive 20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x negative 26 4 b positive 27 4 o negative 29 4 b negative	9	1	o	negative
12 2 0 positive 13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 0 negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 0 positive 19 3 x positive 20 3 b positive 20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive	10	1	X	negative
12 2 x positive 13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 o negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 o positive 19 3 x positive 20 3 b positive 20 3 b positive 20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative	11	1	b	negative
13 2 x positive 14 2 b positive 15 2 o negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 o positive 19 3 x positive 20 3 b positive 20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x negative	12	2	o	
14 2 b positive 15 2 o negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 o positive 19 3 x positive 20 3 b positive 20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive	13	2	X	
15 2 0 negative 16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 0 positive 19 3 x positive 20 3 b positive 21 3 0 negative 22 3 x negative 23 3 b negative 23 3 b negative 24 4 0 positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 35 5 x negative	14	2	b	
16 2 x negative 17 2 b negative 18 3 o positive 19 3 x positive 20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 35 5 x negative	15	2	o	_
17 2 b negative 18 3 0 positive 19 3 x positive 20 3 b positive 21 3 0 negative 22 3 x negative 23 3 b negative 23 3 b negative 24 4 0 positive 25 4 x positive 26 4 b positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 35 5 x negative	16	2	X	-
18 3 o positive 19 3 x positive 20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive	17	2	b	-
19 3 x positive 20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x positive 26 4 b positive 26 4 x positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x negative	18		O	
20 3 b positive 21 3 o negative 22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 o positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 40 6 x negative	19	3	x	
21 3 0 negative 22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 0 positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 0 negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 0 positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 0 negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 0 positive 37 6 x positive 39 6 x negative 40 6 x negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7<	20		b	
22 3 x negative 23 3 b negative 24 4 0 positive 25 4 x positive 26 4 b positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7<		3	O	-
23 3 b negative 24 4 0 positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 0 negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 0 positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 36 6 o positive 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b negative 45 7<	22	3	x	-
24 4 0 positive 25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 0 negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 0 positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 36 6 o positive 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 45 7 o negative 46 7<			b	-
25 4 x positive 26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 b<	24	4	O	
26 4 b positive 27 4 o negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8<	25	4		-
27 4 0 negative 28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 0 positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 0 negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 0 positive 37 6 x positive 38 6 b positive 40 6 x negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8<	26	4	b	_
28 4 x negative 29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 40 6 x negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 50 8<	27	4	O	_
29 4 b negative 30 5 o positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 50 8 b positive 50 8 b positive 51 8<	28	4	x	_
30 5 0 positive 31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 50 8 b positive	29	4	b	-
31 5 x positive 32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	30	5	o	
32 5 b positive 33 5 o negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 50 8 b positive 50 8 b positive 50 8 b positive	31	5	x	
33 5 0 negative 34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 0 positive 37 6 x positive 38 6 b positive 39 6 0 negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 0 positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 0 negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	32		b	
34 5 x negative 35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	33	5	o	
35 5 b negative 36 6 o positive 37 6 x positive 38 6 b positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	34	5	X	-
36 6 0 positive 37 6 x positive 38 6 b positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	35	5	b	
37 6 x positive 38 6 b positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	36	6	o	
38 6 b positive 39 6 o negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	37	6	X	
39 6 0 negative 40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	38	6	b	
40 6 x negative 41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	39	6	o	
41 6 b negative 42 7 o positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	40		X	_
42 7 0 positive 43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	41	6	b	
43 7 x positive 44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	42	7	o	
44 7 b positive 45 7 o negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	43	7	X	
45 7 0 negative 46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 0 positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 0 negative 52 8 x negative	44	7	b	
46 7 x negative 47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	45	7	O	
47 7 b negative 48 8 o positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative			x	
48 8 0 positive 49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	47	7	b	
49 8 x positive 50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative				
50 8 b positive 51 8 o negative 52 8 x negative	49			
51 8 o negative 52 8 x negative				
52 8 x negative	51		o	
	52			
	53	8	b	

8 b nega
Table 2: Stumps Disponíveis