Rendu n°4 - Implémentation d'une solution

Lucas Gonçalves, Fatima Machhouri, Raphael Luciano

Partie 1: premier rendu

> Dans ce premier rendu, nous souhaitons partager notre idée de réponse au problème de la répartition entre un ensemble d'élèves au sein de différents groupes.

Notre problème se base sur le système de notation proposé dans "Le jugement majoritaire" de Michel Balinski et Rida Laraki. Ce système se base sur le principe que chaque participant vote pour chacun des "représentants" disponibles.

1. Enoncé de notre problème:

Dans notre cas, nous souhaitons affecter un ensemble d'élèves sur un ensemble de projets (maximum 18 projets). Si notre groupe d'élèves est composé de plus de 36 élèves, nous devrons constituer des groupes de 3 personnes. Dans notre cas, les données fournies sont constituées de plus de 36 élèves, nous allons donc devoir créer des groupes constitués de trois personnes.

Partie 2: Démonstration de notre idée - deuxième rendu

Chaque étape supprime les arêtes du plus bas niveau atteint.

Idée générale de l'algorithme : L'algorithme améliore à chaque étape la qualité des liens entre les élèves puisqu'on supprime les arêtes en commençant par I (I<P<AR<AB<B<TB). De plus on ne crée un groupe que lorsqu'on ne peut pas faire mieux ie lorsqu'un élève S à un degré entrant <= 2. L'algorithme garantit qu'il ne peut y avoir de meilleur groupe pour l'élève S.

Plus formellement : **Etape i, Arc de niveau a**

A l'initialisation, le niveau a est « I » (Insuffisant). L'algorithme déroule les niveaux selon l'ordre suivant : I, P, AR, AB, B, TB.

Invariant : Au début de l'étape il n'y a aucun sommet ayant un degré entrant <= 2.

On supprime toutes les arêtes de niveau a pour améliorer la qualité de nos liens. Si aucun sommet n'a un degré entrant <=2 on passe alors à l'étape Sinon : on se retrouve avec des sommets ayant un degré <= 2. Il faut alors rétablir l'invariant.

3 cas de figure :

- si un sommet S a un degré entrant = 2, on forme un groupe avec S et les 2 sommets extrémités S1 et S2 des arcs entrants.
- si un sommet S a un degré entrant = 1, on forme un groupe avec S, l'extremité de l'arc entrant S1 et on complète avec un le sommet S2 ayant le degré sortant maximum.
- si un sommet S a un degré entrant = 0, on forme un groupe avec S et les 2 sommets S1 et S2 ayant les degrés sortants maximum. En supprimant les sommets S, S1 et S2 du graphe, on rétablit l'invariant et on peut passer à l'étape ***

*** Ainsi, on a garanti notre invariant à la fin de notre étape. On peut passer à l'étape i+1 en considérant les arcs de niveau a+1 et recommencer.

On s'arrête dès lors que notre graphe ne possède plus aucun sommet. Tous nos groupes auront été alors formé.

Lemme1: Au tour de boucle actuel, il n'existe pas de sommet v appartenant à V tel que degIn(v) <= 2.*

#1 Introduction généralités et notations

Notre problème se base sur le système de notation proposé dans “Le jugement majoritaire” de Michel Balinski et Rida Laraki. Ce système se base sur le principe que chaque participant vote pour chacun des “représentants” disponibles (qui sont ici représentés par les étudiants).

Nous souhaitons affecter un ensemble d'étudiants sur un ensemble de projets (maximum 18 projets). Dans notre cas, chaque étudiant de la promotion note les autres étudiants en lui attribuant l'une des notes suivantes : *AR, I, P, AB, B, TB.*

Si notre groupe d'élèves est composé de plus de 36 élèves, nous devrons constituer des groupes de 3 personnes en plus des binomes. Dans notre cas, les données fournies sont constituées de plus de 36 élèves, nous allons donc devoir créer des groupes constitués de deux et de trois personnes.

2 Méthode MGL

Afin de résoudre le problème demandé, nous souhaitons mettre en place un système d'algorithme en transformant notre problème par un problème de graphe :

Prenons quatre élèves e1, e2, e3, e4:

Donnons les informations suivantes avec les notations suivantes:

- *TB:* : “Très bien”
- *B* : “Bien”
- *AB* : “Assez bien”
- *P* : “Passable”
- *I* : “Insuffisant”
- *AR* : “A rejeter” notation supposée en l’absence d’avis sur l’élève en question.

La valeur -1 est présente sur les diagonales car un élève ne s’évalue pas lui-même

Table 1: exemple d’instanciation de notre matrice de préférences.

Eleves	e1	e2	e3	e4
e1	-1	TB	B	AB
e2	AR	-1	I	I
e3	AR	B	-1	TB
e4	P	B	AB	-1

Nous souhaitons modéliser notre problème par un graphe orienté. **Chaque sommet représente un élève** et **chaque arc représente une notation de l’élève source vers l’élève destination**.

A chaque étape, on supprime toutes les arêtes du plus bas niveau (I<P<AR<AB<B<TB). Pour l’étape 1, on supprimerait par exemple toutes les arêtes qui ont la valeur “I” (I de plus bas niveau à l’étape 1. A l’étape suivante, le niveau le plus bas sera P. . .).

Si un sommet S a un degré entrant < 2 à la fin de cette opération, on conserve les arcs en provenance des sommets vers lesquels l’arc sortant de S est maximum. On forme un groupe avec les sommets ayant un arc de destination S.

Dans l’exemple, si on supprime tous les arcs ayant la valeur “*I*” (qui est la valeur la plus mauvaise dans notre graphe), on remarque que le sommet se retrouve avec un seul arc entrant (l’arc venant de e4). Il a donc un degré entrant <2 (**degIn(e1) = 1**), il faut alors garder un des deux arcs précédemment supprimés pour compléter (on veut un degré entrant = 2). On choisira alors de conserver l’arc allant de *e2* vers *e1*, car *e1* a une préférence supérieure pour *e2*. On considère donc que *e1* est dans le groupe de *e2* et *e4*, car ce sont les deux seul sommets pour lesquels e1 possède un arc entrant. On affecte donc ces 3 sommets dans un groupe et on les retire de notre graphe pour qu’ils ne soient plus pris en compte dans les affectations suivantes.

Table 2: Version de l'instance à la fin de l'étape 1

Eleves	e1	e2	e3	e4
e1	-1	TB	B	AB
e2	I	-1	AR	AR
e3	ø	B	-1	TB
e4	P	B	AB	-1

On a ici créé le groupe $\{e1, e2, e3\}$.

On passe à l'étape suivante et on recommence jusqu'à supprimer toutes les arêtes du graphe. On aura ainsi créé nos groupes en maximisant les préférences.

2.1 Propriétés de la méthode

Notre méthode permet d'augmenter la valeur du minimum en augmentant à chaque étape la qualité des relations entre les élèves. Ainsi, le seuil de satisfaction minimal augmente sans cesse. On cherche à ce que la pire relation soit la meilleure possible.

Propriété mathématique : Etape après étape, la médiane des relations entre les membres ne fait qu'augmenter.

Il est en effet possible de déterminer une médiane pour un ensemble de valeurs qualitatives si on choisit un critère d'ordonnancement de ces valeurs ce qui est le cas ici. [$AR < I < P < AB < B < TB$]

En effet, en supprimant les arêtes les moins bonnes à l'étape i, la médiane à l'étape i+1 ne peut être que plus grande ou égale que celle de l'étape i. Ainsi, l'augmentation de la médiane est la preuve qu'on se rapproche de la meilleure qualité de relation (à savoir TB) et qu'on améliore notre seuil de satisfaction.

2.2 Description détaillée de la méthode (optionnelle)

2.3 Exemples

Prenons neuf élèves e1, e2, e3, e4, . . . , e8, e9:

Donnons les informations suivantes avec les notations suivantes:

- *TB:* : "Très bien"
- *B* : "Bien"
- *AB* : "Assez bien"
- *AR* : "A rejeter" notation supposée en l'absence d'avis sur l'élève en question.

- *P* : “Passable”
- *I* : “Insuffisant”

La valeur -1 est présente sur les diagonales car un élève ne s’évalue pas lui-même

Dans la matrice, chaque arc sort de l’élève en ordonné, et entre dans l’élève en abscisse.

Table 3: initialisation

Eleves	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
e1	-1	TB	B	AB	B	AB	TB	B	AR
e2	I	-1	AR	AR	TB	I	P	TB	AB
e3	AB	B	-1	TB	AB	B	B	AB	TB
e4	P	P	AB	-1	B	I	AB	TB	P
e5	I	B	B	TB	-1	AR	TB	I	B
e6	P	AR	AB	B	B	-1	B	AB	TB
e7	I	B	I	TB	AB	TB	-1	AR	I
e8	P	P	AB	AR	P	B	I	-1	TB
e9	TB	B	AB	B	I	TB	AB	I	-1

Table 4: sans les arcs insuffisants

Eleves	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
e1	-1	TB	B	AB	B	AB	TB	B	AR
e2		-1	AR	AR	TB		P	TB	AB
e3	AB	B	-1	TB	AB	B	B	AB	TB
e4	P	P	AB	-1	B		AB	TB	P
e5		B	B	TB	-1	AR	TB		B
e6	P	AR	AB	B	B	-1	B	AB	TB
e7		B		TB	AB	TB	-1	AR	
e8	P	P	AB	AR	P	B		-1	TB
e9	TB	B	AB	B		TB	AB		-1

A cette étape, nous avons retiré tous les liens notés “insuffisants”. Rien d’autre ne se passe car tous les élèves ont encore un dégré entrant >2.

Table 5: sans les arcs passables

Eleves	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
e1	-1	TB	B	AB	B	AB	TB	B	AR
e2		-1	AR	AR	TB			TB	AB
e3	AB	B	-1	TB	AB	B	B	AB	TB
e4			AB	-1	B		AB	TB	

Eleves	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
e5		B	B	TB	-1	AR	TB		B
e6		AR	AB	B	B	-1	B	AB	TB
e7		B		TB	AB	TB	-1	AR	
e8			AB	AR		B		-1	TB
e9	TB	B	AB	B		TB	AB		-1

A cette étape, nous avons retiré tous les liens notés “passable”. On remarque que l’élève e1 n’a plus que 2 arc entrant. On affecte donc e1 avec e3 et e9, les deux personnes avec lesquelles il s’entendait le mieux donc.

Il faut maintenant enlever tous les arcs qui partent de ces personnes, car elles ne peuvent plus être associées à d’autres élèves:

Table 6: tableau sans les arcs sortants

Eleves	e2	e4	e5	e6	e7	e8
e2	-1	AR	TB			TB
e4		-1	B		AB	TB
e5	B	TB	-1	AR	TB	
e6	AR	B	B	-1	B	AB
e7	B	TB	AB	TB	-1	AR
e8		AR		B		-1

Une fois les élèves retirés, les élèves restant ont encore un degré entrant >2, on peut alors continuer l’algorithme.

Table 7: tableau sans les valeurs à rejeter

Eleves	e2	e4	e5	e6	e7	e8
e2	-1		TB			TB
e4		-1	B		AB	TB
e5	B	TB	-1		TB	
e6		B	B	-1	B	AB
e7	B	TB	AB	TB	-1	
e8				B		-1

A cette étape, nous avons retiré tous les liens notés “à rejeter”. Deux élèves ont un degré entrant <=2 : e2 et e6. On remarque aussi que ces deux élèves devraient être affectés avec e7. Comme e2 est dans la plus “mauvaise” des situations, c’est lui qui aura la priorité pour s’associer avec lui. Le groupe e2, e5, e7 est donc formé. Le groupe restant est alors formé avec les trois élèves restant.

Nous obtenons donc à la fin de notre algorithme les groupes suivants :
- e1, e3, e9 - e2, e5, e7 - e4, e6, e8

3 Algorithme

3.1 Description de l'algorithme

```
 Tant qu'il reste des sommets dans V:
    Pour tout sommet u appartenant E tq u == i  (avec i la valeur que l'on etudie)
      E = E \ v
      Si il existe un sommet e tel que degIn(e) <= 2 alors:
        On associe e avec deux autres sommets dont les valeurs sont maximales
      on incrémente la valeur des relations
    Fin Pour
  Fin tant que
```

function repartitionGroupe(matrice de notes , liste des niveaux, index de la liste des niveaux) : liste d'affectations de groupes

Si tous les somments ont été affecté : on retourne une liste vide

Sinon Si il n'existe pas d'élève avec un degré entrant inférieur ou égal à deux : On supprime les arêtes du niveau correspond au paramètre index On relance repartitionGroupe en augmentant l'index de niveau (appel récursif)

```
Si il existe des élèves avec un degré entrant égal à 0:
  On récupère les élèves pour qui il a attribué les meilleures notes
  On lance notre algorithme sur toutes les combinaisons possible et on récupère la meilleur

Si il existe des élèves avec un degré entrant égal à 1:
  On créé le groupe avec
```

3.2 Preuve de l'algorithme