דביר הראל
ברק נפקי

# עבודה מספר 5 - מודלים חישוביים

1. מודל זה שקול בכוחו למכונת טיורינג בעלת סרט אינסופי לשני הכיוונים.

נסתכל כיצד לבנות מכונת טיורינג בעלת סרט אינסופי לשני הכיוונים על מכונת טיורינג עם קלטת אינסופית לכיוון אחד.

נחתוך את הקלטת האינסופית הכפולה לשניים כך שיהיו לנו 2 קלטות אינסופיות כאחת שמאלה ואחרת ימינה. אותן בפועל נדבק נמצא. נצא מנקודת הנחה שיש מכשיר המכונה מקרה, כך שכאשר המכונה השמאלית מנסה לעבור מעבר לקצה הימני של הקלטת שלה היא מעבירה את הסרט למכונה הימנית בהיקף הקלטת השמאלי בכיוון שלה, ולהפך כשמנסים להעביר את הקצה השמאלי של הקלטת הימנית.

בעת כל מנת שנוכל להבדיל בין המכונה השמאלית והימנית נשנה את השמות ל- LL ו- RR בהתאמה.

נשנה בהתאם את המעברים של שתי המכונות כך שהם יעבדו כמו קודם. כעת אנו מוכנים לאחד את 2 הקלטות לאחת על ידי קיפול הימני לשמאל השמאלי. נעביר את תאי הקלטת המקוריים ונקרא לשניהם בהתאם את המעברים, תוך החלפת ימין לשמאל ושמאל לימין. לאחר מכן נמצא את 2 הקלטות החיצוניות לקלטת אחת. נשנה שוב את המעברים של שתי המכונות כך שהמעברים השמאליים משתמשים ומשנים רק את החלקים של הזוגות בקלטת. נמצא את השליטה בשתי המכונות על ידי איחוד מוצר פשוט בהתאמה למצביות ולמעברים.

ג.

אז נשתמש במכונת טיורינג בעלת שני סרטים כאשר אחד לקלט והשני בשביל לכתוב את איברי סדרת פיבונאצ'י.

שלב א': זהו שלב האתחול. נכתוב על הסרט הראשון את הקלט. על הסרט השני נכתוב את שני המספרים הראשונים של הסדרה מופרדים ע"י # בצורה הבאה

1#1#⊔⊔⊔⊔... הראש יצביע על התא הראשון של סרט הסדרה ובתא הראשון של סרט הקלט.

שלב ב': זהו שלב הדפסת האיבר הבא של הסדרה. המכונה תקרא איבר משמאל לימין. אם היא תקרא את התו "1" היא תלך לתו החופשי שכתוב עליו ⊔ ותכתוב במקומו "1".
אם היא תקרא # בפעם הראשונה היא פשוט תמשיך לקרוא הלאה, בפעם השנייה שהיא תקרא # היא תדפיס ב-⊔ הבא # ותחזור אחורה לתו הראשון שאינו #. המכונה תבדיל בין הפעם הראשונה שתקרא # לפעם השנייה באמצעות על ידי מצב מיוחד שיתפוס אחרי הפעם השנייה.

שלב ג': המכונה תבדוק האם הקלט שווה למספר האחרון שהודפס בסרט הסדרה, ויצאת על ידי כך שתבדוק תא תא ותשווה בין הספרות. אם הם שווים נחזיר כן.
* אם הם שונים וגודל הקלט גדול מגודל המספר האחרון שהודפס המכונה תחזור אחורה עד שתפגוש בפעם השנייה # (בעזרתו של המצב המיוחד) ותלך לתו הבא שאינו ⊔ - #, המכונה תחזור שוב לשלב ב.
* אם הם לא שווים והקלט קטן מהמספר המודפס, המכונה תחזיר ~~לא~~ ובכך תסיים.

ב. נתאר את מכונת הטיורינג הבאה:

המכונה תכיל 2 סרטים - סרט עבודה וסרט פלט.
נאתחל את סרט העבודה בשלושה תווים 1,$,1
ונפעל באופן הבא:

א. המכונה תעבור על התווים בסרט העבודה ותפעל כך:
* אם התו הנקרא הוא 1 נכתוב בסרט ההדפסה 1 ונזוז ימינה בסרט העבודה.
* אם התו הנקרא הוא $ נכתוב בסרט ההדפסה + ונזוז ימינה בסרט העבודה.
* אם התו הנקרא הוא ␣ נעבור לסעיף ב

ב. כאשר אנו נקרא את התו ␣, נבדוק את התו הנמצא 2 מקומות שמאלה בסרט העבודה ונפעל כך:

* אם התו הנקרא הוא $, אז נכתוב 1 במקום ␣, נכתוב 1 במקום $, ונזיז את הראש הקורא לתו השני בסרט העבודה ושם נכתוב $.
* אחרת: נמצא את המיקום של $ בסרט העבודה ונזיז אותו מקום אחד ימינה. ונרשום במקום המקורי של $ 1.
נרשום בסרט הפלט #

ג. ונחזיר את ראש הקורא לתחילת הסרט ונמשיך לסעיף א.

הסבר:
סרט העבודה תמיד מייצג את הסכום אותו אנו רוצים לפרק לכל תרגילי החיבור האפשריים, כאשר $ מייצג את ההפרדה בין שני המחוברים, לכן נתחיל מהסכום הקטן ביותר שהוא 1+1.

כאשר נגיע לתו Б נבדוק האם התו $ נמצא 2 מקומות שמאלה, במידה וכן נגיע שאומרת שסיימנו לבדוק את כל הקומבינציות עבור הסכום הנל ולכן נוסיף עוד 1 לסכום ונחזיר את $ למקום השני כלומר נתחיל מההתחלה. במידה ולא, יש לנו עוד קומבינציות לבדוק עבור הסכום הנ"ל ולכן נזיז את $ מקום אחד ימינה וזאת על מנת לבדוק את הקומבינציה הבאה.

3.

א. הטענה :

$$L_1 \in R,\ L_2 \in RE \rightarrow L_1 \setminus L_2 \in RE$$

איננה נכונה.

ניקח את שפת כל השפות להיות השפה $L_1$, ידוע כי שפת כל השפות שייכת ל- $R$

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

ניקח את השפה $L_{acc}$ להיות השפה $L_2$. ידוע כי השפה $L_{acc}$ שייכת ל- $RE$.

מכאן ש:

$$L_1 \cap \overline{L_2} = \text{שפת כל השפות} \cap \overline{L_{acc}} = \overline{L_{acc}}$$

ואנו יודעים כי $\overline{L_{acc}} \notin RE$.

ומכאן שהגענו לסתירה לטענה.

ב. הטענה $L_1 \in R, L_2 \in RE \longrightarrow L_2 \setminus L_1 \in RE$

~~לא~~ נכונה.

נשים לב כי $L_2 \setminus L_1 = L_2 \cap \overline{L_1}$

$L_1 \in R$, ולפי העובדה שבמידה ו- $L \in R$

אזי $\overline{L} \in R$ אנחנו יכולים להסיק כי

$\overline{L_1} \in R \subseteq RE$. בנוסף לכך, הסגירות של RE

לחיתוך, בהינתן $\overline{L_1}, L_2 \in RE$ מקיימת $\overline{L_1} \cap L_2 \in RE$.

∎

ב.

הטענה:

$L_1, L_2 \in CO\text{-}RE \to L_1 \cap L_2 \in CO\text{-}RE$

נכונה.

<u>הוכחה:</u>

אם $L_1, L_2 \in CO\text{-}RE$ אזי ש- $\overline{L_1}, \overline{L_2} \in RE$
וזאת לפי הגדרת המחלקה $CO\text{-}RE$.

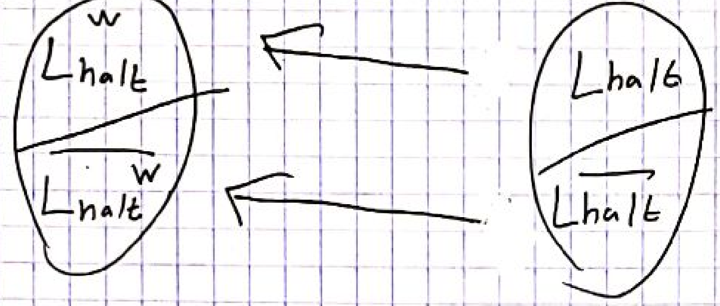
אזי מתקיים כי
$\overline{L_1} \cap \overline{L_2} \in RE$
וזאת לפי הוכחה ש- $RE$ סגורה תחת חיתוך.

ושוב לפי הגדרת המחלקה $CO\text{-}RE$,
מכיוון ש- $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} \in RE$ אזי
ש- $L_1 \cap L_2 \in CO\text{-}RE$.

ב. תהי מילה w ושפה $L_{halt}^{w} = \{\langle M\rangle : M \text{ halts on } w\}$

נראה ש- $L_{halt} \le L_{halt}^{w}$, לשם כך עלינו לבנות

פונקציית רדוקציה ביניהן, כלומר שתקיים:




נגדיר

$$F(\langle M\rangle\langle w\rangle) = \langle M\rangle\langle w\rangle$$

אם $\langle M\rangle\langle w\rangle \in L_{halt}$ אז $X = \langle M\rangle\langle w\rangle$

זה M עוצרת על המילה w.

אזי $F(\langle M\rangle\langle w\rangle) = \langle M\rangle\langle w\rangle$

$\langle M\rangle\langle w\rangle \in L_{halt}^{w}$ מהגדרת $L_{halt}^{w}$.

כלומר $F(\langle M\rangle\langle w\rangle) \in L_{halt}^{w}$

אם $\langle M\rangle\langle w\rangle \notin L_{halt}$ אז $X = \langle M\rangle\langle w\rangle$

וכך M לא עוצרת על המילה w.

אזי $F(x) = x = \langle M\rangle\langle w\rangle \notin L_{halt}^{w}$

כלומר $F(x) \in \overline{L_{halt}^{w}}$.

ב)

$L = \{ \langle M \rangle : \text{some } w \text{ is accepted by } M \text{ within } |w| \cdot 86 \text{ steps} \}$

אנו צריכים להוכיח כי $L \notin co\text{-}RE$

מהגדרת המחלקה $co\text{-}RE$ נובע כי עבור

שפה $L \in co\text{-}RE$ אז $\bar{L} \in RE$ ולכן

נובע כי אם $L \notin co\text{-}RE$ אז $\bar{L} \in RE$.

אנו יודעים כי $L_{acc} \in RE-R$ ולכן

$\overline{L_{acc}} \notin RE$.

אם נראה את הרדוקציה הבאה:

$\overline{L_{acc}} \le \bar{L}$ ולכן וכו' כך

נקבל ממשפט הרדוקציה ש- $\bar{L} \notin RE$.

נבנה את הרדוקציה הבאה. לשם הדבר

$f: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ שמוגדרת כך:

לכל $x = \langle M \rangle \langle w \rangle$, $f(x) = M_w$.

$M_w$ תפעל בצורה הבאה:

* במידה ו-$M$ לא עוצרת על המילה $w$ אז $M_w$ לא עוצרת על כל קלט.

* במידה ו-$M$ עוצרת על המילה $w$ אז המכונה $M_w$ כן עוצרת על כל קלט.

הוכחה:

נראה ש- F חשיבה תקנה ומלאה.

F חשיבה משום שבהינתן קלט $\langle M\rangle\langle W\rangle$, F
מקודדת את M ו- W ומשלבת את הרצת
M, ניתן לבצע באמצעות מכונת טיורינג.

F מלאה ויכולה לפעול על כל המחרוזות
מהצורה $\langle M\rangle\langle W\rangle$

F תקפה. נראה זאת.

אם $\langle M\rangle\langle W\rangle \in \overline{L_{acc}}$ אז $w \notin L(M)$
ולכן כי הבנייה F, $M_w$ לא תקבל
אף מילה. לא קיימת מילה $w'$ שהמכונה
$M_w$ תקבל לאחר $|w'|\cdot 86$ צעדים לכל היותר.

ומכאן ש- $\langle M_w\rangle \in \overline{L}$.

אם $\langle M\rangle\langle W\rangle \notin \overline{L_{acc}}$, $w \in L(M)$. לכן כי
הבנייה F, $M_w$ מקבלת את כל המילים.

נראה כי $\langle M_w\rangle \notin \overline{L}$, נראה כי קיימת מילה
כלשהי $w'$ שמתקבלת תוך $|w'|\cdot 86$ צעדים
לכל היותר.

המכונה $M_w$ בגישה לעצב מקבל לאחר מספר
צעדים קבוע. נסמנו ב- z.

ישנה מילה $w'$ כך שגודלה לפחות $\frac{z}{86}$,

כל המילים מתקבלות ע"י המכונה $M_w$
ושייכות לפי הגדרת הפונקציה $F$.
לכן גם $w$ מתקבלת ע"י המכונה.
$M_w$ תקבל את $w$ לאחר $z$ צעדים.

$$\langle M_w \rangle \in L \longleftarrow |w| \cdot 86 > \left(\frac{z}{86}\right)$$

הוכחנו כי הפונקציה $F$ תקפה כנדרש

$\blacksquare$

$L=\{\langle M,q\rangle : \text{regardless of the input, } M \text{ never reaches state } q\}$

צ"ל: $L\in co\text{-}RE - RE$

טענה 1: $L\in coRE$

**הוכחה:** על מנת להראות ש- $L\in co\text{-}RE$ אז מהגדרת $co\text{-}RE$ מספיק להראות כי $\bar{L}\in RE$

כלומר, מספיק להראות כי קיימת מ"ט המקבלת את $\bar{L}$. נבנה את מ"ט $M$ המקבלת בקלט $x=\langle M',q\rangle$, מסמלצת את $M'$ על כל המילים ב- $\Sigma^*$ עד שמוצאת מילה המביאה למצב $q$. אם $M'$ מצאה מילה כזאת, $M$ תקבל את $x$. ראינו בכיתה כי קיימת מכונת טיורינג הפועלת באופן הנ"ל.

נוכיח $L(M)=\bar{L}$.

$\Rightarrow$ יהי קידוד $\langle M',q\rangle\in L(M)$ אז מהגדרת $M$ קיימת מילה $w$ כך שבהרצת $M'$ על $w$ המכונה תגיע למצב $q$. לכן, מהגדרת $\bar{L}$ נקבל כי $\langle M',q\rangle\in\bar{L}$ (מכיוון והיא כן עוברת),

$\Leftarrow$ יהי $\langle M',q\rangle\in\bar{L}$ אז קיימת מילה $w$ כך שהמכונה $M'$ תגיע למצב $q$. לכן בשלב מסוים בסימולציה כל המילים של $M'$, היא תגיע למצב $q$.

ולכן על כי בניית M כהיותו תקבל את w.
מכיוון ש- $\langle M', q\rangle \in L(M)$.

כעת נראה כי $L \notin RE$:
ניעזר בעובדה:

$$L_{empty} = \{\langle M\rangle : L(M) \text{ is empty}\}$$

אינה שייכת ל- RE (קל להוכיח באמצעות
משפט רייס כי $P_{empty}$ לא תכונה
טריוויאלית כי קיימות שפות שמקיימות אותה
וכאלה שלא ובנוסף $\emptyset \in P_{empty}$ ולכן $L_{empty} \notin RE$).

נבצע את הרדוקציה $L_{empty} \le L$ ובמידה
ואנו נצליח אז $L \in RE$.

בהינתן קלט $\langle M\rangle$ עבור $L_{empty}$ נתאר
את פונקציית הרדוקציה הבאה: $F(\langle M\rangle) = \langle M, q_{acc}\rangle$

נרצה כעת להוכיח $\langle M\rangle \in L_{empty}$ אם"ם
$F(\langle M\rangle) = \langle M, q_{acc}\rangle \in L$.

תהי $\langle M\rangle \in L_{empty}$ אזי $L(M) = \emptyset$, אם
לכל $w \in \Sigma^*$ M לא תגיע למצב מקבל
$q_{acc}$ ולכן שבהכרח $\langle M, q\rangle \in L$ כנדרש.

תהי $\langle M\rangle \notin L_{empty}$ לכן $L(M)\neq\emptyset$.

ומכאן שבהכרח קיימת $w$ אשר $M$ תקבל אותה

אז תהי $w$ כך ש"ה $w\in L(M)$, אז

במהלך הריצה של $M$ על $w$ היא בהכרח תגיע

למצב $q_{acc}$ - אחרת $w$ לא תתקבל.

אז קיים קלט $w$ כך ש- $M$ מגיעה למצב

$q_{acc}$ ומכאן ש- $\langle M, q_{acc}\rangle \notin L$.

סיכום:

הראנו כי $L\in co\text{-}RE$

הראנו כי $L\notin RE$

ומכאן שהוכחנו כי $L\in co\text{-}RE\setminus RE$

$\blacksquare$