דביר הראל וברק רפקי

עבודה מספר 1

.1

.i נניח כי מתקיים $L_1 \subseteq L_2$. צ"ל: $L_1^* \subseteq L_2^*$

$$x \in L_1^* \Rightarrow \exists n \geq 0 \quad x \in L_1^n$$

if $n=0$ then $x=\varepsilon$ and $x \in L_2^*$

else $x = y_1 \cdots y_n$, $\forall i \ y_i \in L_1$

and $L_1 \subseteq L_2$ וזאת לפי ההנחה

ולכן $y_i \in L_2$ $\forall i$ ומכאן ש:

$$x = y_1 \cdots y_n \in L_2^*$$

וזאת לפי ההנחה והגדרת $L_2^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_2^n$

* כעת נראה דוגמא לכך שהגרירה ההפוכה לא בהכרח מתקיימת.

$$L_1 = \{0, 1, 01\} \quad L_2 = \{0, 1\}$$

ניתן לראות ש- $L_1^* \subseteq L_2^*$

שכן האיבר היחיד שנמצא ב- L_1 שאינו ב-L_2 הוא 01. אך איבר זה ניתן להרכיב משרשור 0 ו-1. ולכן $L_1^* \subseteq L_2^*$. אך למרות זאת ניתן לראות כי $L_1 \nsubseteq L_2$ שכן $01 \in L_1$ וגם $01 \notin L_2$. ולכן מצאנו דוגמא לכך ~~ש~~ שהגרירה ההפוכה לא בהכרח מתקיימת.

דבורה הרשל וברק רפקי

iii. שתי שפות L_1 ו-L_2 כך שאף אחת לא מכילה את השנייה

המקיימות $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$:

$$L_1 = \{0, 1, 01\} \quad L_2 = \{0, 1, 10\}$$

2.

$$r = 0^*1000^* \cup 0^*0010^* \cup 0^*0100^* \cup 000^*$$

3.

i) $r = 0(0^*10^*)0$

שתי מילים בשפה:

00100

010

שתי מילים שלא בשפה:

10

110

ii) $r = 1^*(0 \cup 10)^*1^*$

שתי מילים בשפה:

10101

010

שתי מילים שלא בשפה:

010110

0101100

גביר.הרבול וברק רפק

iii) $r = (0 \cup 1^*) 0^* 1^*$

שתי מילים בשפה:	שתי מילים שלא בשפה:
01	010
001	0010

ח,

i) מילה השייכת לשתי השפות: 1010

ii) מילה השייכת ל-r_1 ולא ל-r_2: 0101

iii) מילה השייכת ל-r_2 ולא ל-r_1: 1000

iv) מילה שלא שייכת לשתי השפות: 0110

5) תהי L השפה הרגולרית הנתונה בשאלה ויהי r ביטוי רגולרי כלשהו המגדיר אותה.
נוכיח שלשפה $\bar{L}$ קיים ביטוי רגולרי r' כך שמתקיים: $L(r')=\bar{L}$ ומכאן ינבע ש-$\bar{L}$ רגולרית.

הוכחה: באינדוקציה על $n=|r|$.

מקרה בסיס: $|r|=1$

אם L ריקה אז $\bar{L}$ ריקה, אחרת $L=L(a)=\{a\}$ עבור $a\in\Sigma$, ולכן $\bar{L}=\{a^{n_0}aa^{n_1}\}=L\{a^{n_0}aa^{n_1}\}$.

מכך נובע כי גם $\bar{L}$ רגולרית.

צעד

נניח את נכונות הטענה עבור $n<m$, ויהי r ביטוי רגולרי באורך n.

תהי $L=L(r)$, מהגדרת בניית ביטויים רגולריים r מתקיים אחד מהבאים:

א. $r=(r_1)\cdot(r_2)$

ב. $r=(r_1)\cup(r_2)$

ג. $r=(r_1)^*$

מקרה ראשון: $r=(r_1)\cdot(r_2)$

נבחין כי r_1, r_2 לפחות באורך אחד, לכן: $|r_1|,|r_2|<n$.

לפי ה"א קיימים r_1', r_2' ביטויים רגולריים אשר מתקיים עבורם:

$$L(r_i')=\{a^{n_0}a_1a^{n_1}a_2a^{n_2}\dots a^{n_{k-1}}a_ka^{n_k} \mid a_1a_2\dots a_k\in L_i\}$$

נוכיח כי: $L(r_1'\cdot r_2')=\bar{L}$.

$$w'\in\bar{L} \iff w'=a^{n_0}a_1a^{n_1}a_2\dots a_ka^{n_k} \iff w=a_1a_2\dots a_k \iff$$

$$w\in L(r)=L((r_1)\cdot(r_2)) \iff w\in L(r_1)\cdot L(r_2) \iff w=w_1\cdot w_2,\ w_1\in L(r_1)\wedge w_2\in L(r_2)$$

$$\iff w'=w_1'w_2',\ w_1'\in L(r_1'),\ w_2'\in L(r_2') \iff w'\in L(r_1')\cdot L(r_2')=L(r_1'\cdot r_2').$$

מקרה שני: $r=(r_1)\cup(r_2)$

נשים לב כי r_1, r_2 לפחות באורך אחד, ומכאן: $|r_1|,|r_2|<n$.

לפי ה"א קיימים r_1', r_2' ביטויים רגולריים עבורם מתקיים:

$$L(r_i')=\{a^{n_0}a_1a^{n_1}a_2a^{n_2}\dots a^{n_{k-1}}a_ka^{n_k} \mid a_1a_2\dots a_k\in L_i\}.$$

נוכיח כי: $L(r_1'\cup r_2')=L'$.

$w' \in L' \Leftrightarrow w' = a^{n_0} a_1 a^{n_1} a_2 \ldots a_k a^{n_k} \Leftrightarrow w = a_1 a_2 \ldots a_k \Leftrightarrow w \in L(r) = L((r_1) \cup (r_2)) \Leftrightarrow$

$w \in L(r_1) \cup L(r_2) \Leftrightarrow w \in L(r_1) \vee w \in L(r_2) \Leftrightarrow w' \in L(r_1') \vee w' \in L(r_2') \Leftrightarrow$

$w' \in L(r_1') \cup L(r_2') = L((r_1') \cup (r_2')) = L(r_1' \cup r_2')$.

<u>מקרה 3: $r=(r_1)^*$</u>

נשים לב כי r מכיל אורך קטן ממש r_1 ולכן: $|r_1|<n$.

לפי הנ"א קיים r_1' ביטוי רגולרי שעבורו מתקיים התנאי:

$$L(r_1') = \{a^{n_0} a_1 a^{n_1} a_2 a^{n_2} \ldots a^{n_{k-1}} a_k a^{n_k} \mid a_1 a_2 \ldots a_k \in L_1\}$$

נוכיח כי: $L((r_1')^*) = L'$.

$w' \in L' \Leftrightarrow w' = a^{n_0} a_1 a^{n_1} a_2 \ldots a_k a^{n_k} \Leftrightarrow w = a_1 a_2 \ldots a_k \Leftrightarrow w \in L(r) = L((r_1)^*) =$

$(L(r_1))^* \Leftrightarrow w = \varepsilon \vee w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k,\ k>0,\ \forall i = 1 \ldots k,\ w_i \in L(r_1) \Leftrightarrow$

$w' = \varepsilon \vee w' = w_1' \cdot w_2' \cdot \ldots \cdot w_k',\ k>0,\ \forall i = 1 \ldots k \Leftrightarrow$

$w_i = a^{n_0} a_1 a^{n_1} a_2 \ldots a_i a^{n_i},\ w_i' \in L(r_1') \Leftrightarrow w \in (L(r_1'))^* = L((r_1')^*)$

6) אוסף השפות L היא אוסף של שפות אינסופיות המורכבות מ-1^*.

בשביל כל מילה בשפה L, נוכל להתאים מספר טבעי כלשהו לפי אורך המילה.

עבור שרשור מילים נתייחס כפעולת חיבור ונקבל פונקציה חד חד ערכית

שעבור כל מילה בשפה מתאימה מספר טבעי.

הפונקציה חח"ע ולכן עוצמת קבוצת כל השפות המקיימות $L=L^*$ שווה לעוצמת כל

תתי הקבוצות של המספרים הטבעיים אשר סגורות תחת חיבור.

נראה שעוצמת כל תתי הקבוצות הנ"ל הינה $\aleph_0$.

<u>הוכחה</u>

תהי S קבוצת מספרים טבעיים הסגורה לחיבור, נוכיח כי עוצמתה היא $\aleph_0$.

<u>חלוקה למקרים:</u>

א. ב-S קיימים p,q זרים זה לזה, מהרמז שקיבלנו קיים מספר טבעי n כלשהו

כך שכל מספר שגדול ממנו ניתן לביטוי כקומבינציה לינארית של p,q עם מקדמים לא

שליליים, זאת אומרת שכל $y\in S$ כך ש: $n<y$ מתקיים: $y=rp+sq$ עבור $0\le s,r$.

לכל $n<y$ ו-$x\in[0,n]$ ניתן לתאר את עוצמת S בצורה הבאה: $|S|=|X|+|Y|$ כך ש:

$x=|X|$, $y=|Y|$, כלומר: $|S|=x+y$, כיוון ש-n קבוע, מספר האפשרויות לבחירת הקבוצה

X היא 2^n ולכן הקבוצה X היא בת מניה, כמו כן: $y\in(n,\infty]$ ולכן: $|\mathbb{N}|=|Y|=|y|=\aleph_0$.

חיבור קבוצות בנות מניה היא בת מניה ולכן: $\aleph_0=|S|$.

ב. לא קיימים ב-S שני מספרים הזרים זה לזה, כלומר ה-gcd של הקבוצה

S גדול מ-1.

נתבונן בקבוצה: $\{s\in S \mid s/\gcd S\}=S'$, $|S'|=|S|$ מכיוון שכמות האיברים

היא זהה.

חזרנו למקרה ה-1 כיוון שיש 2 מספרים זרים זה לזה.