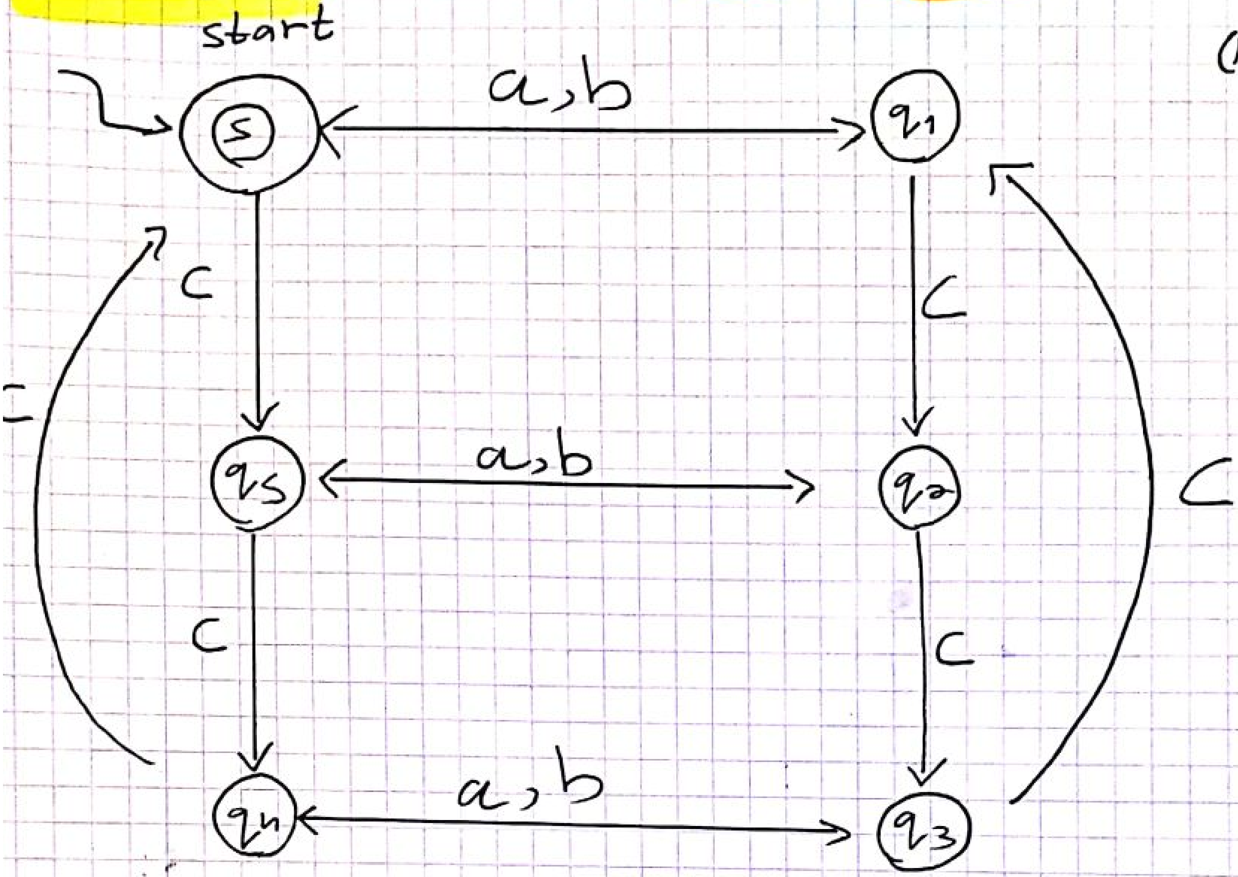
דביר הרטל: 204881239
ברק רפקי: 315309666

# עבודה מספר 2

1.

א)




$Q = \{s, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$s$ – מצב התחלתי

$A = \{s\}$

$$\delta: Q \times \Sigma \to Q = \begin{cases} (s,c) \to q_5 \\ (s,a) \to q_1 & (q_4,c) \to s \\ (s,b) \to q_1 & (q_4,a) \to q_3 \\ (q_1,c) \to q_2 & (q_4,b) \to q_3 \\ (q_1,a) \to s & (q_5,c) \to q_4 \\ (q_1,b) \to s & (q_5,a) \to q_2 \\ (q_2,c) \to q_3 & (q_5,b) \to q_2 \\ (q_2,a) \to q_5 \\ (q_2,b) \to q_5 \\ (q_3,c) \to q_1 \\ (q_3,a) \to q_4 \\ (q_3,b) \to q_4 \end{cases}$$

הסבר:

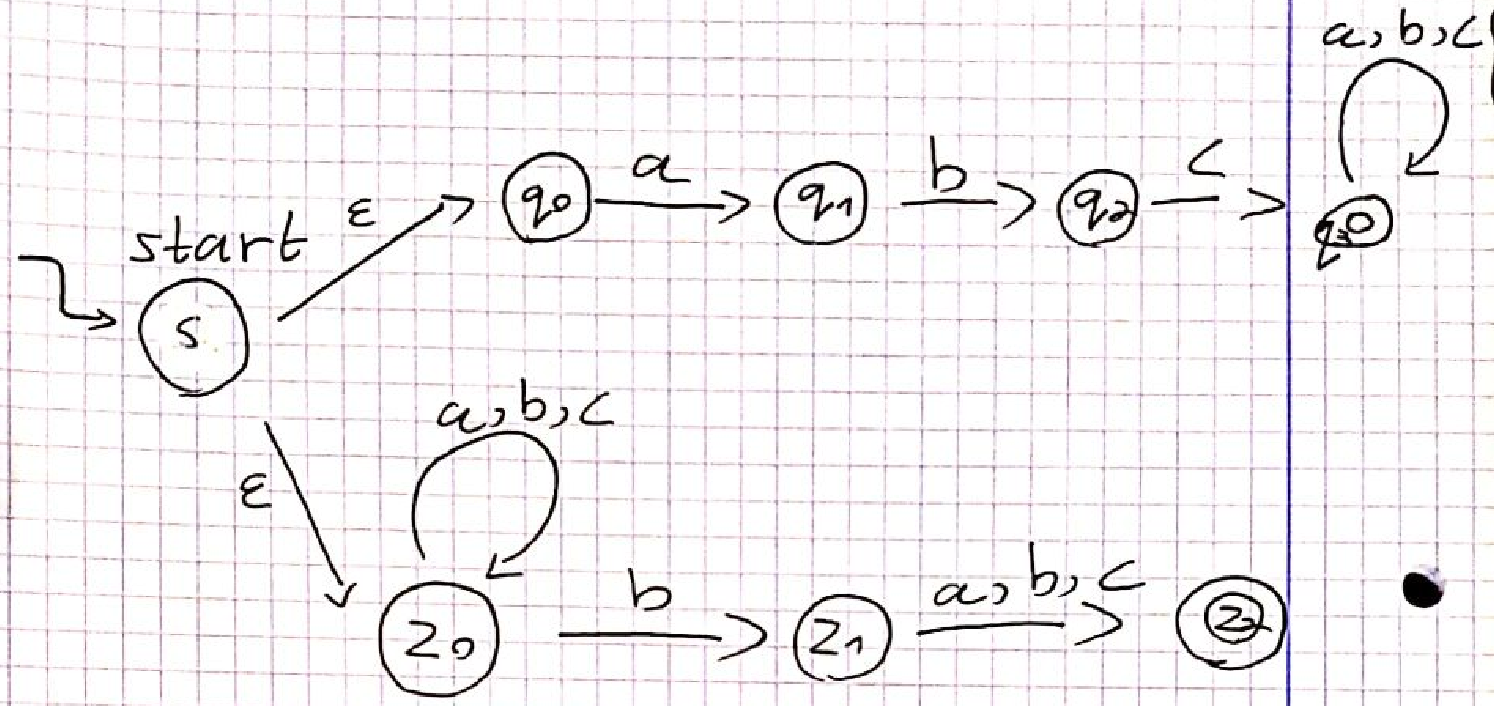
שפת האוטומט, היא שפת כל המילים שבהן הסכום של מספר המופעים של אותיות שאינן c זוגי, ומספר המופעים של האות c מתחלק ב-3.

זאת מכיוון שכפי שניתן לראות מאיור האוטומט אם מתחילים באיזשהי אות a או b, אחר כך נהייה חייבים לעבור בדרך ל-s (בנקודה כלשהי) דרך מצב שממנו יוצא חץ למצב אחר המקבל a או b. כלומר מספר המופע של אותיות שאינן c בהכרח יהיה זוגי.

אם מתחילים ב-c, אז שנהייה חייבים לעבור ב-3 חצים שמקבלים רק c עד שנגיע למצב s, או שנעבור ב-3 חצים שמקבלים רק c ובזוג של חצים שמקבלים a או b. ובכך גם נעמוד בתנאי של השפה הנדרשת.

* יש לציין כי אם לא קיבלנו אף אות, כלומר המצב s המוגדר כהתחלתי, עדיין עומד בתנאי השפה ולכן מצב מקבל.

ג)




$Q = \{S, q_0, q_1, q_2, q_3, z_0, z_1, z_2\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$S$ - מצב התחלתי

$A = \{q_3, z_2\}$

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) = \begin{cases} (S, \varepsilon) = \{q_0, z_0\} \\ (q_0, a) = q_1 \\ (q_1, b) = q_2 \\ (q_2, c) = q_3 \\ (z_0, a) = z_0 \\ (z_0, b) = \{z_0, z_1\} \\ (z_0, c) = z_0 \end{cases}$$

$(z_1, a) = z_2$

$(z_1, b) = z_2$

$(z_1, c) = z_2$

3

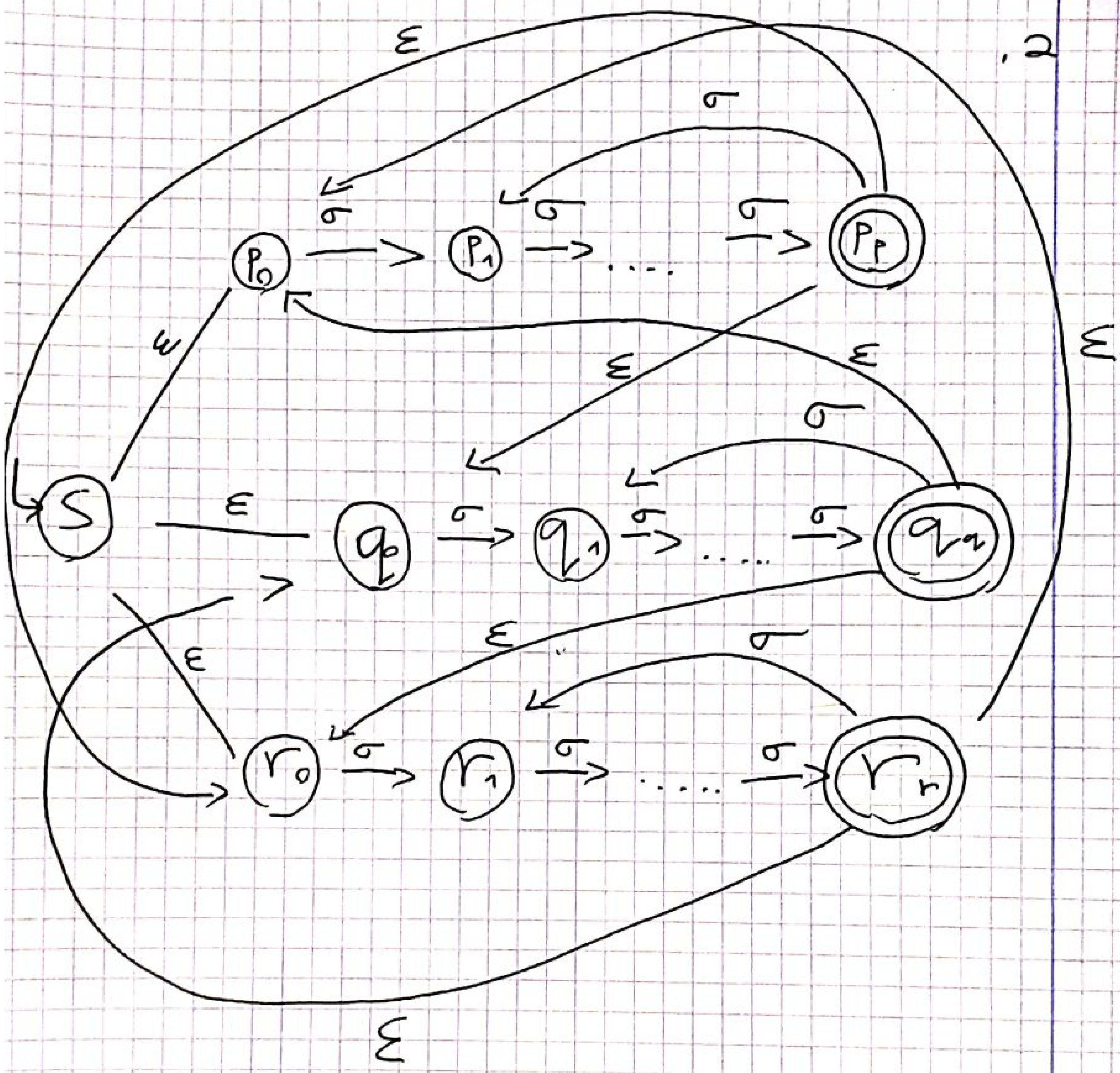
Scanned with CamScanner

הסבר:

שפת האוטומט היא שפת כל המילים המתחילות ב-abc או שהאות לפני האחרונה היא b.

תחילה, $\varepsilon$ מוביל אותנו למצבים $q_0$ ו-$z_0$. במידה ואנו מקבלים את האות a ואחריה את האות b ואחריה את האות c אנו מגיעים למצב $q_3$ שמוגדר כמצב מקבל. מ-$q_3$ לא משנה איזה אות נקרא אנו נחזור ל-$q_3$ מכיוון שאנו צריכים את שפת כל המילים המתחילות ב-abc. במידה ואנו מקבלים רצף של אותיות כאשר האות לפני האחרונה היא b, אנו נגיע למצב $z_2$ שגם הוא מוגדר מצב מקבל. ולכן תנאי השפה הנדרשת מתקיימים באוטומט הלא דטרמיניסטי הנ"ל.

2.




$Q = \{s, p_0, p_1 \ldots p_p, q_0, q_1 \ldots q_q, r_0, r_1 \ldots r_r\}$

$\Sigma = \{\sigma\}$

$s$ מצב התחלתי

$A = \{p_p, q_q, r_r\}$

$$\delta: Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\}) = \begin{cases} (S,\varepsilon) = \{P_0, q_0, r_0\} \\ (P_i,\sigma) = P_{i+1} & : 0\le i<p \\ (P_p,\sigma) = P_1 \\ (P_p,\varepsilon) = \{q_0, r_0\} \\ (q_i,\sigma) = q_{i+1} & : 0\le i<q \\ (q_q,\sigma) = q_1 \\ (q_q,\varepsilon) = \{P_0, r_0\} \\ (r_i,\sigma) = r_{i+1} & : 0\le i\le r \\ (r_r,\sigma) = r_1 \\ (r_r,\varepsilon) = \{P_0, q_0\} \end{cases}$$

הסבר:

שפת האוטומט היא שפת כל המילים שאורכן הוא קומבינציה לינארית חיובית של $r,q,p$. אורך המילה $w$

$$|w| = a*p + b*q + c*r \quad : \quad a,b,c\in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

מה״י:

$$a+b+c>0$$

$$p,q,r\geq 2$$

בפרט מכיוון שלאחר מעבר ה-$\varepsilon$ מ-$S$ ל-$\{P_0,q_0,\cancel{q_0},r_0\}$
נגיע ל-$P_p$.

במידה וקיבלנו $p$ פעמים את $\sigma$ אזי ש-$a=1$
והתקבלה מילה בשפה המקיימת את הקומבינציה הלינארית.

אותו דבר יקרה אם נקבל $q$ פעמים את $\sigma$ ואז
כאשר $b=1$
נגיע למצב המקבל $q_q$ ונראה כי התקבלה מילה בשפה!

בנוסף לכך אם נקבל $r$ פעמים את $\sigma$ נגיע ל-$r_r$
שהוא גם מצב מקבל ונראה כי גם כה התקבלה מילה

בשפה נכונה וכו׳. הדבר יתקיים במעבר לולאה
עקב המחזוריות שקורות על ידי כך שאנו מחזירים
את $p_p$ ל- $p_1$ בקבלת σ, ואת $q_q$ ל- $q_1$
בקבלת σ ואת $r_r$ ל- $r_1$ בקבלת σ. בנוסף אנו
שולחים חץ ε מכל מצב מקבל ל- 2 "המצבים
ההתחלתיים" של השפות האחרות. כעת כדי לאפשר
כל קומבינציה לינארית ביניהם נוסיף לולאה יכולים
להיות כל מספר טבעי כולל 0.

$L_{\frac{1}{2}} = \{ \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5 \cdots \sigma_{2k-1} : \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{2k} \in L \}$

הוכח L רגולרית $\Rightarrow$ $L_{\frac{1}{2}}$ רגולרית

הוכחה:

נראה שלכל שפה רגולרית L קיים ביטוי רגולרי המתאר את השפה $L_{\frac{1}{2}}$ ומכאן ש- $L_{\frac{1}{2}}$ רגולרית.

מאחר ו- L רגולרית קיים ביטוי רגולרי r כך ש- $L=L(r)$.

נוכיח באינדוקציה שלמה על $|r|$ כי קיים ביטוי רגולרי r' כך ש- $L_{\frac{1}{2}}=L(r')$.

טענת האינדוקציה:

לכל $|r| \le n$ מתקיים:

אם r ביטוי רגולרי באורך n כך ש- $L=L(r)$, אזי קיים ביטוי רגולרי r' כך ש $L_{\frac{1}{2}}=L(r')$

מקרה בסיס:

$|r|=1$, ויש שני מקרים אפשריים:

א) $r=\emptyset$. לכן $L=L(\emptyset)=\emptyset$ ולפי ההגדרה של $L_{\frac{1}{2}}$ אז $L_{\frac{1}{2}}(\emptyset)=\emptyset$ ולכן קיים ביטוי רגולרי $r'=\emptyset$ כך ש- $L_{\frac{1}{2}}=L(\emptyset)$.

ב) $r=\sigma$. לכן $L=L(\sigma)$ ולפי ההגדרה של $L_{\frac{1}{2}}$ אז $L_{\frac{1}{2}} = \sigma$. ולכן קיים ביטוי רגולרי $r'=\sigma$ כך ש- $L_{\frac{1}{2}}=L(\sigma)$.

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $1\le m<n$ מתקיים:

אם $r$ ביטוי רגולרי באורך $m$ כך ש $L=L(r)$,

אזי קיים ביטוי רגולרי $r'$ כך ש- $L_{\frac{1}{2}}=L(r')$

צעד:

יהי $r$ ביטוי רגולרי כך ש- $|r|=n$

כיוון ש- $|r|=n$ וכן קיימים ביטויים רגולריים $r_1$ ו-$r_2$

כך שמתקיים אחד מהשוויונים הבאים:

סימונים

$L_{\frac{1}{2}}(L_1)=\{\sigma_1\sigma_3\sigma_5\ldots\sigma_{2k-1}:\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{2k}\in L_1\}$

א) $r=r_1\cup r_2$

ב) $r=r_1\cdot r_2$

ג) $r=r_1^*$

$L_{\frac{1}{2}}(L_2)=\{\sigma_1\sigma_3\sigma_5\ldots\sigma_{2k-1}:\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{2k}\in L_2\}$

מקרה א: $r=(r_1)\cup(r_2)$ לכן $L=L_1\cup L_2$

לפי הגדרת $L_{\frac{1}{2}}$ מתקיים:

$$L_{\frac{1}{2}}\cancel{(L)}=\{\sigma_1\sigma_3\sigma_5\ldots\sigma_{2k-1}:\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_{2k}\in L_1\cup L_2\}$$

$$=\{\sigma_1\sigma_3\sigma_5\ldots\sigma_{2k-1}:\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_{2k}\in L_1 \text{ or } \sigma_1\sigma_3\sigma_5\ldots\sigma_{2k-1}:\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_{2k}\in L_2\}$$

$$=L_{\frac{1}{2}}(L_1)\cup L_{\frac{1}{2}}(L_2)=L(r_1')\cup L(r_2')$$

$$=L((r_1')\cup(r_2'))$$

לכן קיים ביטוי רגולרי $r'=(r_1')\cup(r_2')$ שעבורו מתקיים

כי $L_{\frac{1}{2}}(L)=L(r')$

מקרה ב: $r = r_1 \cdot r_2$ ולכן $L = L_1 L_2$

לפי הגדרת $L_{\frac{1}{2}}$ מתקיים:

$$L_{\frac{1}{2}} = \{ \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5 \dots \sigma_{2k-1} : \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_{2k} \in L_1 L_2 \}$$

$$= \begin{cases} w = w_1 w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2 & , \varepsilon \notin L_1 \\ w = w_1 w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2 \text{ or } w \in L_2 & \varepsilon \in L_1 \\ w = w_1 w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2 \text{ or } w \in L_1 & \varepsilon \in L_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L_{\frac{1}{2}}(L_1 L_2) & \\ L_{\frac{1}{2}}(L_1) L_2 \cup L_{\frac{1}{2}}(L_2) & \varepsilon \in L_1 \\ L_{\frac{1}{2}}(L_2) L_1 \cup L_{\frac{1}{2}}(L_1) & \varepsilon \in L_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L(r_1') L(r_2) & \\ L(r_1') L(r_2) \cup L(r_2') & \varepsilon \in L_1 \\ L(r_1') L(r_2) \cup L(r_1') & \varepsilon \in L_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L((r_1')(r_2)) & \\ L((r_1')(r_2) \cup (r_2')) & \varepsilon \in L_1 \\ L((r_1')(r_2) \cup (r_1')) & \varepsilon \in L_2 \end{cases}$$

ונגדיר

$$r' = \begin{cases} (r_1') \cdot (r_2) & \\ ((r_1') \cdot (r_2) \cup (r_2')) & \varepsilon \in L_1 \\ ((r_1') \cdot (r_2) \cup (r_1')) & \varepsilon \in L_2 \end{cases}$$

ובכל אחד מהמקרים יתקיים עבור $r'$ שנבנה ש- $L_{\frac{1}{2}}(L_1 L_2) = L(r')$

מקרה 3: $r=(r_1^*)$ ולכן $L=L_1^*$

$$L_{\frac{1}{2}}(L_1^*) = \{\sigma_1\sigma_3\sigma_5\ldots\sigma_{2k-1} : \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\ldots\sigma_{2k}\in L_1^*\}$$

$$=\{w=w_1w_2 : w_1\in L_1,\ w_2\in L_1^*\}$$

$$= L_{\frac{1}{2}}(L_1)\,L_1^* = L(r_1')\,L((r_1)^*) = L((r_1')((r_1)^*))$$

ולכן עבור הביטוי $r'=(r_1')((r_1)^*)$ מתקיים

$L_{\frac{1}{2}}(L) = L(r')$, הראינו כי בכל מקרה הטענה מתקיימת ■

ב)

נוכיח ש $L_2=\{\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2...\sigma_n\sigma_n : \sigma_1\sigma_2...\sigma_n \in L\}$

היא רגולרית ונוכיח על ידי אינדוקציה שלמה על

n שהוא האורך של הביטוי הרגולרי r.

מקרה בסיס: $n=1$

ישנם 2 מקרים:

1) $L(\emptyset)=\emptyset$ ולכן $L_2=\emptyset$ ומכאן ש $L_2$ רגולרית

2) $L=L(\sigma)=\{\sigma\}$, עבור $\sigma\in\Sigma$ ומכאן

ש- $L_2=\{\sigma\sigma\}=L(\sigma\sigma)$ ולכן $L_2$ רגולרית.

הנחה: נניח כי הטענה נכונה לכל $m<n$.

צעד: $L=L(r)$ ו- r ביטוי רגולרי באורך n.

ישנם 3 מקרים:

1) $r=r_1\cup r_2$

2) $r=r_1\cdot r_2$

3) $r=(r_1)^*$

אם $r=r_1\cup r_2$ אז $L(r)=L_1\cup L_2$ כך

שהשפות $L_1$ ו- $L_2$ מוגדרות ע"י הביטויים הרגולרים

$r_1$ ו- $r_2$ בהתאמה. על פי הנחת האינדוקציה

$$L(r_1')=\{\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2...\sigma_n\sigma_n : \sigma_1\sigma_2...\sigma_n\in L_1\}$$

$$L(r_2')=\{\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2...\sigma_n\sigma_n : \sigma_1\sigma_2...\sigma_n\in L_2\}$$

יהי $x\in L(r_1'\cup r_2')$. מכיוון שמתקיים כי

$L(r_1'\cup r_2')=L(r_1')\cup L(r_2')$ אז בה"כ $x\in L(r_1')$

ולכן $x=\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\ldots\sigma_n\sigma_n$ עבור $w=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\in L_1$

כלשהו. $L_1\subseteq L$ ו- $w\in L$, מהגדרת $L_3$

נובע כי $x\in L_2$ ולכן $L_2\subseteq L(r_1'\cup r_3')$

יהא $x\in L_2$ אז $x=\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\ldots\sigma_n\sigma_n$

עבור $w=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\in L$. מכיוון ש $L=L_1\cup L_3$

אז $w\in L_1\cup L_3$. בה"כ $w\in L_1$, במקרה זה

$x\in L(r_1')$ ולכן $x\in L(r_1')\cup L(r_3')=L(r_1'\cup r_3')$

ולכן $L(r_1'\cup r_3')\subseteq L_2$

אם $r=r_1\cdot r_3$ אז $L(r)=L(r_1)L(r_3)$

כש- $L_1$ ו- $L_3$ מוגדרות ע"י הביטויים $r_1$ ו- $r_3$. בדומה

למקודם קיימים ביטויים $r_1', r_3'$ כך ש:

$$L(r_1')=\{\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\ldots\sigma_n\sigma_n : \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\in L_1\}$$

$$L(r_3')=\{\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\ldots\sigma_n\sigma_n : \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\in L_3\}.$$

אם $x\in L_3$ אז $x=\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\ldots\sigma_n\sigma_n$ עבור

$w=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\in L$, קיימות מילים $u_1\in L_1, u_3\in L_3$

כך ש $u_1u_3=w$. $u_1=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_l$

$u_3=\sigma_{l+1}\ldots\sigma_n$. בפרט קיימות $x_1\in L(r_1')$

ו- $x_3\in L(r_3')$ כך ש $x_1=\sigma_1\sigma_1\ldots\sigma_l\sigma_l$

ו- $x_3=\sigma_{l+1}\sigma_{l+1}\ldots\sigma_n\sigma_n$, ולכן

$x=x_1x_3\in L(r_1')L(r_3')=L(r_1'r_3')$.

אם $x \in L(r_1' r_3') = L(r_1') L(r_3')$ , אזי

$x = x_1 x_3$ כך ש $x_1 \in L(r_1')$ ו- $x_3 \in L(r_3')$.

לכן $x_1 = \sigma_1\sigma_1 \ldots \sigma_l\sigma_l$ עבור $u_1 = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_l \in L_1$

וכן גם $x_3 = \sigma_{l+1}\sigma_{l+1}\ldots\sigma_n\sigma_n$ עבור $u_3 = \sigma_{l+1}\ldots\sigma_n \in L_3$

$w = u_1u_3 \in L_1L_3 = L$ . ולכן $x = x_1x_3 = \sigma_1\sigma_1\ldots\sigma_n\sigma_n \in L_2$

אם $r = (r_1)^*$ אזי $L(r) = L((r_1)^*)$ כש $L_1$

מוגדרת ע"י הביטוי הרגולרי $r_1$, ולפי הנחת ה

האינדוקציה קיים ביטוי $r_1'$ כך ש:

$L(r_1') = \{\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\ldots\sigma_n\sigma_n : \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n \in L_1\}$.

יהי $x \in L_2$ .

במידה ו- $x = \varepsilon$ אז $\varepsilon \in L((r_1')^*)$ וסיימנו.

אחרת $x = \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\ldots\sigma_n\sigma_n$ עבור $w = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n \in L$

ונסמן ש- $w \in L((r_1)^*)$ . קיים $l > 0$ כך

ש $w \in (L(r_1))^l$ . כלומר $w = u_1u_2\ldots u_l$

עבור $u_i \in L(r_1)$ כאשר $1 \le i \le l$,

נסמן $u_i = \sigma_{i,1}\sigma_{i,2}\ldots\sigma_{i,t_i}$ .

כאשר $x_i = \sigma_{i,1}\sigma_{i,1}\ldots\sigma_{i,t_i}\sigma_{i,t_i} \in L(r_1')$ $1 \le i \le l$

לכן $x_1x_2\ldots x_l = x \in L((r_1')^*)$ .

יהי $x \in L((r_1')^*)$

אם $x = \varepsilon$ אזי $\varepsilon \in L((r_1)^*) = L$ ולכן

גם $\varepsilon \in L_2$ . אחרת קיים $n>0$ עבור

$x \in (L(r_1'))^n$ כלומר $x = x_1x_2\ldots x_n$ כך ש $x_i \in L(r_1')$

לכן $x_i = \sigma_{i,1}\sigma_{i,1}\sigma_{i,2}\sigma_{i,2}\ldots\sigma_{i,t_i}\sigma_{i,t_i}$ . ונסמן $n$ שקיימת

$u_i = \sigma_{i,1}\sigma_{i,2}\ldots\sigma_{i,t_i}$ כך ש $u_i \in L(r_1)$ כלומר $w = u_1u_2\ldots u_n \in (L(r_1))^n \subseteq L((r_1)^*)$ ולכן $x \in L_2$.

א) השפה המתקבלת על ידי האוטומט, היא שפת כל המספרים הבינאריים המתחלקים ב-3.

ב) הביטוי הרגולרי של השפה הוא:

$$r = 0^*(1(01^*0)^*1)^*0^*$$

על פי איור האוטומט, ניתן לראות כי בהתחלה אנו יכולים לקבל מספר אפסים לא מוגבל, ולאחר מכן ~~אנו יכולים~~ מביע השרשור את הביטוי $(1(01^*0)^*1)^*$ כאשר הוא מייצג את כל האופציות של הדרכים ל חזרה למצב ההתחלתי והמקבל $q_0$. בסוף אנו יכולים להמשיך ולקבל מספר אפסים לא מוגבל.

ג)

$$T(i,j,k+1) = T(i,j,k) \cup T(i,k+1,k)\cdot(T(k+1,k+1,k))^* \cdot T(k+1,j,k)$$

$T(1,1,0) = \varepsilon \cup 0$ $\quad T(1,2,0)=1$ $\quad T(1,3,0)=\emptyset$

$T(2,1,0)=1$ $\quad T(2,2,0)=\varepsilon$ $\quad T(2,3,0)=0$

$T(3,1,0)=\emptyset$ $\quad T(3,2,0)=0$ $\quad T(3,3,0)=\varepsilon \cup 1$

$$T(1,1,1) = T(1,1,0) \cup T(1,1,0)\cdot(T(1,1,0))^* \cdot T(1,1,0)$$
$$= (\varepsilon \cup 0) \cup (\varepsilon \cup 0)\cdot(0)^* \cdot(\varepsilon \cup 0)$$

$$T(2,2,1) = T(2,2,0) \cup T(2,1,0)\cdot(T(1,1,0))^* \cdot T(1,2,0)$$
$$= \varepsilon \cup 1\cdot(0)^* \cdot 1$$

$T(2,3,1) = T(2,3,0) \cup T(2,1,0) \cdot (T(1,1,0))^* \cdot T(1,3,0)$

$= 0 \cup 1 \cdot (0)^* \cdot \emptyset = 0$

$T(1,1,2) = T(1,1,1) \cup T(1,2,1) \cdot (T(2,2,1))^* \cdot T(2,1,1)$

$= ((\varepsilon \cup 0) \cup (\varepsilon \cup 0) \cdot (0)^* \cdot (\varepsilon \cup 0)) \cup (1 \cup (\varepsilon \cup 0) \cdot (0)^* \cdot 1)$

$\cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)$

$T(1,2,2) = T(1,2,1) \cup T(1,2,1) \cdot (T(2,2,1))^* \cdot T(2,2,1)$

$= (1 \cup (\varepsilon \cup 0) \cdot (0)^* \cdot 1) \cup (1 \cup (\varepsilon \cup 0) \cdot (0)^* \cdot 1)$

$\cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)$

$T(1,3,2) = T(1,3,1) \cup T(1,2,1) \cdot (T(2,2,1))^* \cdot T(2,3,1)$

$= \emptyset \cup (1 \cup (\varepsilon \cup 0) \cdot (0)^* \cdot 1) \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (0)$

$T(3,1,1) = T(3,1,0) \cup T(3,1,0) \cdot (T(1,1,0))^* \cdot T(1,1,0)$

$= \emptyset \cup \emptyset \cdot (0)^* \cdot (\varepsilon \cup 0) = \emptyset$

$T(3,2,1) = T(3,2,0) \cup T(3,1,0) \cdot (T(1,1,0))^*$

$\cdot T(1,2,0) = 0 \cup \emptyset \cdot (0)^* \cdot 1 = 0$

$T(3,3,1) = T(3,3,0) \cup T(3,1,0) \cdot (T(1,1,0))^* \cdot T(1,3,0)$

$= (\varepsilon \cup 1) \cup (0)^* \cdot \emptyset = \varepsilon \cup 1$

$T(2,1,2) = T(2,1,1) \cup T(2,2,1) \cdot (T(2,2,1))^* \cdot T(2,1,1)$

$= (1 \cup 1 \cdot (0)^* \cdot (\varepsilon \cup 0)) \cup (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1) \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^*$

$\cdot (1 \cup 1 \cdot (0)^* \cdot (\varepsilon \cup 0))$

$T(2,2,2) = T(2,2,1) \cup T(2,2,1) \cdot (T(2,2,1))^* \cdot T(2,2,1)$

$= (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1) \cup (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1) \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^*$

$\cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)$

$T(2,3,2) = T(2,3,1) \cup T(2,2,1) \cdot (T(2,2,1))^* \cdot T(2,3,1)$

$= (0) \cup (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1) \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (0)$

$T(3,1,2) = T(3,1,1) \cup T(3,2,1) \cdot (T(2,2,1))^* \cdot T(2,1,1)$

$= (\emptyset) \cup 0 \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (1 \cup 1 \cdot (0)^* \cdot (\varepsilon \cup 0))$

$T(3,2,2) = T(3,2,1) \cup T(3,2,1) \cdot (T(2,2,1))^*$

$\cdot T(2,2,1) = 0 \cup 0 \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)$

$T(3,3,2) = T(3,3,1) \cup T(3,2,1) \cdot (T(2,2,1))^* \cdot T(2,3,1)$

$= (\varepsilon \cup 1) \cup 0 \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (0)$

תשובה סופית

$T(1,1,3) = T(1,1,2) \cup T(1,3,2) \cdot (T(3,3,2))^* \cdot T(3,1,2)$

$= (((\varepsilon \cup 0) \cup (\varepsilon \cup 0) \cdot (0)^* \cdot (\varepsilon \cup 0)) \cup (1 \cup (\varepsilon \cup 0) \cdot (0)^* \cdot 1)$

$\cdot (1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)) \cup (\emptyset \cup (1 \cup (\varepsilon \cup 0) \cdot (0)^* \cdot 1)$

$\cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (0)) \cdot ((\varepsilon \cup 1) \cup 0 \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^*$

$\cdot (0))^* \cdot ((\emptyset) \cup 0 \cdot (\varepsilon \cup 1 \cdot (0)^* \cdot 1)^* \cdot (1 \cup 1 \cdot (0)^* \cdot (\varepsilon \cup 0)))$

**שאלה 5:**

א)

$L0=\{w: |w| \bmod 4 \neq 0 \wedge |w| \bmod 5 \neq 0 \wedge |w|>0\}$

$L1=\{w: (|w| \bmod 4 = 0 \text{ xor } |w| \bmod 5 = 0) \wedge |w|>0\}$

$L2=\{w: |w| \bmod 4 = 0 \wedge |w| \bmod 5 = 0 \wedge |w|>0\}$

$L3=\{w: |w|=0\}$

$L4=\emptyset$

ב) נוכיח שעבור כל אוטומט אי דטרמיניסטי $M$ מתקיים: $L_N(M) \in \mathcal{L}_{DFA}$.

יהי $M=\langle Q,\Sigma,\Delta,s,A\rangle$ אוטומט אי דטרמיניסטי, ויהי $N\in\mathbb{N}$.

לכל $q\in Q$ נגדיר סגירת אפסילון של $q$ במובן הבא: $E(q)=\{p\in Q:(q,\varepsilon)\vdash^*(p,\varepsilon)\}$.

עבור כל $R\subseteq Q$ נגדיר: $E(R)=\bigcup_{q\in R}E(q)$, כמו כן נגדיר: $R_A=\{q\in R \mid q\in A\}$.

כלומר, $R_A$ יהיה תת קבוצה של המצבים $R$ המכילה רק את המצבים שב-$R$ וגם בקבוצת מצבים מקבלים באוטומט $M$.

נגדיר אוטומט חדש $M'$ שהוא דטרמיניסטי, $M'=\langle Q',\Sigma,\delta,s',A'\rangle$ שמקיים את התנאים:

1) $\forall R\in Q', \sigma\in\Sigma$

2) $A'=\{R\in Q': |R_A|=N\}$ $\delta(R,\sigma)=\bigcup_{r\in R}E(\Delta(r,\sigma))$

3) $Q'=\{R \mid R\subseteq Q\}$, $s'=E(s)$

והאוטומט $M'$ שהגדרנו יהיה דטרמיניסטי מכיוון שעבור כל אות ומצב פונקציית המעברים מתאימה מצב אחד ויחיד ב-$Q'$, ולכן מתקיים: $L(M')\in\mathcal{L}_{DFA}$.

אם נראה שמתקיים: $L(M')=L_N(M)$ אז נוכל להסיק ש-$L_N(M)\in\mathcal{L}_{DFA}$.

<u>טענה</u>

$L(M')=L_N(M)$

<u>טענת עזר</u>

אם $(s',w)\vdash^*_{M'}(R,\varepsilon)$, אז: $R=\{q\in Q:(s,w)\vdash^*_{M}(q,\varepsilon)\}$.

(הוכחה עבור מ״נה כמו ראינו בהרצאה).

## הוכחה

$\subseteq$: יהי $w\in L(M')$, מהגדרת $M'$ נובע: $(s',w)\mapsto^*_{M'}(R,\varepsilon)$ כך ש: $R\in A'$.
בשילוב עם טענת העזר קיבלנו כי: $R=\{q\in Q:(s,w)\mapsto^*_M(q,\varepsilon)\}$.
נובע מכך שכל המצבים $q\in Q$ שאפשר להגיע דרך האוטומט המקורי בריצה מסוימת עם מילה $w$ מקיימים ש: $q\in R$.
בנוסף, מהגדרת $A'$, $R_A$ של $R$ מקיימת: $|R_A|=N$.
מכל המצבים שניתן להגיע אליהם באוטומט המקורי עם המילה $w$ בריצה מסוימת יש בדיוק $N$ מצבים מקבלים שבהם יכולים לסיים את הריצה.
קיבלנו כי מתקיים: $N=|\{q\in A:(s,w)\mapsto^*_M(q,\varepsilon)\}|$.
זאת בדיוק ההגדרה של $L_N(M)$, ולכן $w\in L_N(M)$.

$\supseteq$: נעשה הוכחה באמצעות השלילה.
יהי $w\notin L(M')$, מהגדרת $M'$ מתקיים כי: $(s',w)\mapsto^*_{M'}(R,\varepsilon)$ כך ש- $R\in A'$.
בשילוב עם טענת העזר נקבל: $R=\{q\in Q:(s,w)\mapsto^*_M(q,\varepsilon)\}$.
נובע מכך שכל המצבים $q\in Q$ שאפשר להגיע אליהם דרך האוטומט המקורי בריצה מסוימת עם המילה $w$ מקיימים $q\in R$.
בנוסף, מהגדרת $A'$, $R_A$ של $R$ מקיימת $|R_A|\neq N$.
מכל המצבים שניתן להגיע אליהם באוטומט המקורי עם המילה $w$ בריצה מסוימת, אין בדיוק $N$ מצבים מקבלים שבהם נוכל לסיים את הריצה.
קיבלנו כי מתקיים: $N\neq|\{q\in A:(s,w)\mapsto^*_M(q,\varepsilon)\}|$.
מהגדרת $L_N(M)$ קיבלנו: $w\notin L_N(M)$.

הראינו ש: $L(M')=L_N(M)$.
$L(M')\in\mathcal{L}_{DFA}$.
לכן מתקיים: $L_N(M)\in\mathcal{L}_{DFA}$ כנדרש.