Polytech Nice Sophia
SI3
Traitement et analyse statistique de données
Monsieur Theo Thonat

Raquel Lopes de Oliveira

TADS - TD1

1 Résolution des exercices

Exercice 5 [CORRIGÉ 2 FÉVRIER]

On tire deux cartes d'un jeu de 52 cartes. Soit A l'événement "les deux cartes ont la même valeur" et B l'événement "les deux cartes ont la même couleur". Etudier l'indépendance des événements A et B dans les cas suivants :

$\forall e \in \Omega\ \mathbb{P}(e) = \frac{1}{|\Omega|}$
A et B sont independent, donc: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

(A) *on remet dans le jeu la première carte avant de tirer la seconde*
$\mathbb{P}(A) = \frac{52\times4}{52^2} = \frac{1}{13}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{52\times13}{52^2} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{52\times1}{52^2} = \frac{1}{52}$

$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13}$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{52} = \mathbb{P}(B)$

(B) *on tire les deux cartes simultanément.*
$\Omega = \{(a, b), a \neq b\}$
$|\Omega| = 52 \times 51$
$\mathbb{P}(A) = \frac{52\times3}{52\times51} = \frac{3}{51}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{52\times12}{52\times51} = \frac{12}{51}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{\}) = 0$ Donc, don independants

Exercice 8 [CORRIGÉ 9 FÉVRIER]

On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard. On expose une face au hasard. Elle est rouge. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ? Pour vous aider dans votre choix :

- *Déterminer l'espace de probabilité.*

$$\Omega = \{\{\mathbf{r}, b\}, \{r, \mathbf{b}\}, \{\mathbf{r}, r\}, \{r, \mathbf{r}\}\{\mathbf{b}, b\}, \{b, \mathbf{b}\}\}$$

- *Calculer la probabilité que la face cachée soit blanche sachant que la face visible est rouge.*
  A = La face cachée est blanch
  B = La face visible est rouge

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Exercice 14

On jette n fois une pièce de monnaie et on note f_n le nombre de cas possibles où deux piles n'apparaissent pas successivement.

(A) *Combien valent f_1 et f_2*

$\Omega = \{\{p\}, \{f\}\}$
$f_1 = 2$

$\Omega = \{\{p, f\}, \{f, p\}, \{f, f\}, \{p, p\}\}$
$(f_2) = 3$

(B) *Montrer que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$*
Suit recurrent lineaire: $I = f_3 = f_2 + f_2$

$\alpha^2 = \alpha + 1$
$\Delta = 5$
$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(C) *Calculer f_n et la probabilité pour que sur n lancers il y ait au moins deux piles successifs.*

$\mathbb{P}(p \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(p < 1) = 1 - \sum_{i=0}^{0}$ je sais pas

Exercice 17 [CORRIGÉ 10 FÉVRIER]

Au poker, on utilise un jeu de 52 cartes avec 4 couleurs de cartes (pique, trèfle, carreau, cœur). Une main comprend 5 cartes. Pour les différentes combinaisons, caLculer la probabilité de l'obtenir : Une paire, une double paire, un brelan, un full, un carré, une quinte, une couleur, une quinte flush.
Definitions:
1 paire: exatement 2 cartes de m valeurs
1 double paire: extement dux fois deux cartes de m valeurs avec 2 valeus different.
1 brelan: exatement 3 cartes de m valeurs 1 full: 3 cartes de une valeur e 2 caeres d'une autre valeur
1 carré: exatement 4 cartes de m valeurs
1 quinte:5 cartes dant les valeurs se suivent (1-2-3-4-5-...-10-v-d-r-1)
1 couler: 5 cartes de meme coleurs.
1 quinte flush: 5 cartes de meme couler qui formment une suite.
1 quinte flush royale: 10-v-d-r-1 meme colour
1 jeu de 52 cartes, 13 valeurs(1...10, V, D, R), 4 couleurs.
Un taie 5 cartes au hasard.

$$|\Omega| = \begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{51!}{5!(52-5)!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5!} = 10 \text{valeurs de suite possibles}$$

Probabilité de obtenir un Color:

$$\mathbb{P}(Co) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{33}{16660} = 0,19\%$$

Probabilité de obtenir un Pair:

$$\mathbb{P}(P) = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{13 \times 4 \times 12 \times 4 \times 11 \times 4 \times 10 \times 4}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$= 42\%$$

Probabilité de obtenir un Double Pair:

$$\mathbb{P}(Dp) = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \times 4}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{13 \times \frac{4!}{2!2!} \times 12 \times \frac{4!}{2!2!} \times 11 \times 4}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1336 \times 12 \times 11 \times 4}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$= 4.75\%$$

Probabilité de obtenir un Brelan:
$\mathbb{P}(B) =$ [3 cartes de meme valeur] $\times$ [4eme carte] $\times$ [5eme carte]

$\mathbb{P}(B) = [][][]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{11}{1} \times \binom{4}{1} \\
&= \frac{13 \times 4 \times 12 \times 4 \times 11 \times 4}{\binom{52}{5}} \\
&= 2.11\%
\end{aligned}$$

Probabilité de obtenir un Full:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F) = \binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{1} \times \binom{4}{2} &= \frac{13!}{1!12!} \qquad \times \frac{4!}{1!} \times \frac{12!}{11!} \quad \times \frac{4!}{2!2!} \\
&= 13 \qquad \times \frac{4!}{1!} \times 12 \quad \times \frac{4!}{2!2!} \\
&= \frac{13 \times 12 \times (4!)^2}{4} \\
&= 13(4!)^2 \\
&= \frac{13 \times 3 \times (4!)^2}{\binom{52}{5}}
\end{aligned}$$

Probabilité de obtenir un Carré:

$$\mathbb{P}(Ca) = \frac{\binom{13}{1} \times \binom{12}{1} \times 4}{\binom{52}{3}} = \frac{13 \times 12 \times 4}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{4165} = *0.024\%$$

Probabilité de obtenir un Quinte:

$$\mathbb{P}(Q) = \frac{10 \times 4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{128}{32487} = 0.39\%$$

Probabilité de obtenir un Quinte Flush:

$$\mathbb{P}(Qf) = \frac{10 \times \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{64970} = 0.015\%$$

Probabilité de obtenir un Quinte Flush Royale:

$$\mathbb{P}(Qfr) = \frac{4 \times 1}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{1}{649740} = 0.00015\%$$

Probabilité de obtenir AU MOINS un pair:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(J) &= 1 - \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}^5}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} \\
&= 1 - \frac{\frac{13!}{5!8!} \times 4^5}{\frac{52!}{5!47!}} \\
&= 1 - \frac{\frac{13!}{8!} \times 4^5 \times 47!}{52!} \\
&= 1 - \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 1}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \times 4^5
\end{aligned}$$

Exercice 21 [CORRIGÉ 10 FÉVRIER]

On suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

P = 0.5

$\Omega = \{\{F, G\}, \{G, G\}, \{F, F\}, \{G, F\}\}$

(A) *Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?*

A: au moins un garçon.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$$

(B) *Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant que l'aînée est une fille ?*

B: l'aînée est un fille

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}_B(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(C) *Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?*
C: Au moins un fille

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \frac{3}{4} \\
\mathbb{P}(A \cap C) &= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}_C(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(D) *Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Vous savez que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille décroche le téléphone avec la probabilité p, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?*
D: une fille decroché

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(F,G)}(D) &= \frac{\mathbb{P}(D \cap \{F,G\})}{\mathbb{P}(\{F,G\})} \\
&= p \\
\mathbb{P}(D \cap \{F,F\}) &= p \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{p}{4} \\
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}((D \cap \{F,F\}) \cup (D \cap \{G,G\}) \cup (D \cap \{F,G\}) \cup (D \cap \{G,F\}))
\end{aligned}$$

(E) *Vous sonnez à la porte de votre voisin. Une fille ou- vre la porte. Sachant que l'aîné(e) ouvre la porte avec probabilité p, et ce indépendamment de la réparti- tion de la famille, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?*
E: Une fille ouvre la porte

$$\mathbb{P}_E(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)}$$

Exercice 27 [CORRIGÉ 10 FÉVRIER]

Supposons que la probabilité qu'un enfant soit de sexe féminin est 0.4. Quelle est la probabilité d'avoir, parmi 5 enfants, au moins un garcon et au moins une fille ?
X: le nb de filles
X ˜B(5; 0.4)
$\mathbb{P}(X = i) = \begin{pmatrix} 5 \\ i \end{pmatrix} \times p^i \times (1-)^{5-i}$
A = Avoir au moins une fille ⇔ x ≥ 1
B = Avoir au moin un garçon ⇔ 5 - x ≥ 1 ⇔ x ≤ 4

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cap B) \\
\mathbb{P}(1 \leq X \leq 4) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0 \text{ou} X = 5) \\
&= 1 - (\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0.4^0 (1 - 0.4)^{5-0}) + (\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} 0.4^5 (1 - 0.4)^{5-5})) \\
&= ((1 \times 1 \times 0.6^5) + (1 \times 0.4^5 \times 1)) \\
&= 1 - (0.6^5 + 0.4^5) \\
&= 1 - 0.088 \\
&= 0.912
\end{aligned}$$