Polytech Nice Sophia
SI3

Traitement et analyse statistique de données
Monsieur Theo Thonat

Raquel Lopes de Oliveira

TADS - TD1

1 Résolution des exercices

Exercice 5 [CORRIGÉ 2 FÉVRIER]

On tire deux cartes d'un jeu de 52 cartes. Soit A l'événement "les deux cartes ont la même valeur" et B l'événement "les deux cartes ont la même couleur". Etudier l'indépendance des événements A et B dans les cas suivants :

$\forall e \in \Omega \ \mathbb{P}(e) = \frac{1}{|\Omega|}$
A et B sont independent, donc: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

(A) *on remet dans le jeu la première carte avant de tirer la seconde*
$\mathbb{P}(A) = \frac{52\times 4}{52^2} = \frac{1}{13}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{52\times 13}{52^2} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{52\times 1}{52^2} = \frac{1}{52}$

$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13}$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{52} = \mathbb{P}(B)$

(B) *on tire les deux cartes simultanément.*
$\Omega = \{(a, b), a \neq b\}$
$|\Omega| = 52 \times 51$
$\mathbb{P}(A) = \frac{52\times 3}{52\times 51} = \frac{3}{51}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{52\times 12}{52\times 51} = \frac{12}{51}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{\}) = 0$ Donc, don independants

Exercice 8 [CORRIGÉ 9 FÉVRIER]

On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard. On expose une face au hasard. Elle est rouge. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ? Pour vous aider dans votre choix :

- *Déterminer l'espace de probabilité.*

$$\Omega = \{\{\mathbf{r}, b\}, \{r, \mathbf{b}\}, \{\mathbf{r}, r\}, \{r, \mathbf{r}\}\{\mathbf{b}, b\}, \{b, \mathbf{b}\}\}$$

- *Calculer la probabilité que la face cachée soit blanche sachant que la face visible est rouge.*
  A = La face cachée est blanch
  B = La face visible est rouge

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Exercice 10 [CORRIGÉ 26 FÉVRIER]

Le joueur A possède deux dés à six faces, et le joueur B possède un dé à douze faces (un dodécaèdre). Le joueur qui fait le plus grand score remporte la mise (match nul si égalité). Le jeu est-il équitable ? On calculera la probabilité que A gagne et la probabilité d'avoir un match nul.
XA :2 dés à 6 faces
XB: dé à 12 faces
XA = $X_1 + X_2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_B = i) &= \frac{1}{12} | i \leq i \leq 12 \\
\mathbb{P}(X_A = i) &= \mathbb{P}((X_1 + X_2 = i) \text{ ou } (X_1 = 2, X_2 = i - 2)...) \\
&= \sum_{k=1}^{i} \mathbb{P}(X_1 = k_i, X_2 = i - k)
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{6} | 1 \leq i \leq 6$

X_1, X_2 : independants

$$\sum_{k=1}^{i}[\mathbb{P}(X_2 = k) \times \mathbb{P}(X_2 = i - k)]$$

$$1 \leq k \leq 6 \rightarrow k \leq max(i, 6)$$
$$(1 \leq i - k \leq 6 \rightarrow h + + \leq i \leq h + 6 \qquad\qquad h \geq i - 6)$$

$$= \sum_{max(1,i-6}^{min(1,6)}[\mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}(X_2 = i - k)]$$
$$= \frac{1}{36} \sum_{max(1,i-6)}^{min(i,6)} 1$$

Soit (f):$2 \leq i \leq 7 \Rightarrow min(i, 6) = i$ et $max(i, i - 6) = 1$

Soit (r):$7 \leq i \leq 12 \Rightarrow min(i, 6) = 6$ et $max(i, i - 6) = i = 6$

$$(f) : \frac{1}{36} \sum_{2}^{i} 1 = \frac{i - 1}{36}$$
$$(r) : \frac{1}{36} \sum_{i-6}^{12} 1 = \frac{13 - i}{36}$$
$$\mathbb{P}(X_A = i) = \begin{cases} \frac{i-1}{36} \text{ si } 2 \leq i \leq 7 \\ \frac{13-i}{36} \text{ si } 7 \leq i \leq 12 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_A > X_B) &= \mathbb{P}((X_B = 1 \text{ et } x_A > 1) \text{ ou } (X_B = 2 \text{ et } x_A > 2)....) \\
&= \sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(X_B < i \text{ et } X_2 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(X_A = i) \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(X_B = k) \\
&= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(X_A = i) \sum_{k=1}^{i-1} 1 \\
&= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} (i-1)\mathbb{P}(X_A = i) \\
&= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} i\mathbb{P}(X_A = i) - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(X_A = i) = 1 \\
&= \frac{E(X_A)}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_A > x_B) &= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(X_A = x_B) &= \frac{1}{12} \\
\mathbb{P}(X_A < x_B) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

Exercice 14

On jette n fois une pièce de monnaie et on note f_n le nombre de cas possibles où deux piles n'apparaissent pas successivement.

(A) *Combien valent f_1 et f_2*

$\Omega = \{\{p\}, \{f\}\}$
$f_1 = 2$

$\Omega = \{\{p, f\}, \{f, p\}, \{f, f\}, \{p, p\}\}$
$(f_2) = 3$

(B) *Montrer que* $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
Suit recurrent lineaire: $I = f_3 = f_2 + f_2$
$\alpha^2 = \alpha + 1$
$\Delta = 5$
$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(C) *Calculer* f_n *et la probabilité pour que sur n lancers il y ait au moins deux piles successifs.*

$\mathbb{P}(p \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(p < 1) = 1 - \sum_{i=0}^{0}$ je sais pas

Exercice 21 [CORRIGÉ 10 FÉVRIER]

On suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.
P = 0.5
$\Omega = \{\{F, G\}, \{G, G\}, \{F, F\}, \{G, F\}\}$

(A) *Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?*
A: au moins un garçon.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$$

(B) *Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant que l'aînée est une fille ?*
B: l'aînée est un fille

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}_B(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(C) *Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?*
C: Au moins un fille

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \frac{3}{4} \\
\mathbb{P}(A \cap C) &= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}_C(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(D) *Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Vous savez que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille décroche le téléphone avec la probabilité p, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?*
D: une fille decroché

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(F,G)}(D) &= \frac{\mathbb{P}(D \cap \{F, G\})}{\mathbb{P}(\{F, G\})} \\
&= p \\
\mathbb{P}(D \cap \{F, F\}) &= p \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{p}{4} \\
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}((D \cap \{F, F\}) \cup (D \cap \{G, G\}) \cup (D \cap \{F, G\}) \cup (D \cap \{G, F\}))
\end{aligned}$$

(E) *Vous sonnez à la porte de votre voisin. Une fille ou- vre la porte. Sachant que l'aîné(e) ouvre la porte avec probabilité p, et ce indépendamment de la réparti- tion de la famille, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?*
E: Une fille ouvre la porte

$$\mathbb{P}_E(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)}$$

Exercice 27 [CORRIGÉ 10 FÉVRIER]

Supposons que la probabilité qu'un enfant soit de sexe féminin est 0.4. Quelle est la probabilité d'avoir, parmi 5 enfants, au moins un garcon et au moins une fille ?

X: le nb de filles

X ˜B(5; 0.4)

$\mathbb{P}(X = i) = \begin{pmatrix} 5 \\ i \end{pmatrix} \times p^i \times (1-)^{5-i}$

A = Avoir au moins une fille ⇔ x ≥ 1

B = Avoir au moin un garçon ⇔ 5 - x ≥ 1 ⇔ x ≤ 4

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A \cap B) \\ \mathbb{P}(1 \leq X \leq 4) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0 \text{ou} X = 5) \\ &= 1 - (\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0.4^0 (1 - 0.4)^{5-0}) + (\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} 0.4^5 (1 - 0.4)^{5-5})) \\ &= ((1 \times 1 \times 0.6^5) + (1 \times 0.4^5 \times 1)) \\ &= 1 - (0.6^5 + 0.4^5) \\ &= 1 - 0.088 \\ &= 0.912 \end{aligned}$$

Exercice 29

Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non- truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition. Le joueur suit les règles suivantes:

- *Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points (A)*
- *Si les deux dès donnent deux numéros de parités dif- férentes alors il perd 5 points (B)*
- *Dans les autres cas il gagne 15 points.(C)*

$$\text{Donc, le universe est: } \Omega = \{(d_1, d_2) \mid d_1 \in (1, 6] d_2 \in (1, 6]\}$$
$$\mid \Omega \mid = 6 \times 6$$

(A) *Le joueur joue une partie et on note X la variable alèatoire correspondant au nombre de points obtenus. Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X.*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6 \times 1}{36} = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{6 \times 3}{36} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(C) = 1 - (\frac{1}{6} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_w X(w)\mathbb{P}(w) \\ &= \sum_i i \times \mathbb{P}(X = i) \\ &= 15 \times \mathbb{P}(X = 15) - 5 \times \mathbb{P}(X = -5) - 10 \times \mathbb{P}(x = -10) \\ &= \frac{2}{6} \times 15 - \frac{3}{6} \times 5 - \frac{1}{6} \times 10 \\ &= \frac{30}{6} - \frac{15}{6} - \frac{10}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

(B) *Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points. Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y ? Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ? Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points ?*

n: 10 parties

y: a nombre de fois que C arrive

y $\tilde{}B(n,p)$ p $= \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(y \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(y = 0) \\ &= 1 - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} p^0 (1-p)^{10-0} \\ &= 1 - 1 \times 1 \times (\frac{2}{3})^1 0 \\ &\simeq 0,98 \end{aligned}$$

$$E(y) = n \times p = \frac{10}{3} \simeq 3,33$$
$$0,999 = 1 - 10^{-4}$$

$$B(n,p) : \mathbb{P}(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} and \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(y \geq 1) &= 1 - \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} p^0 (1-p)^n \\
&= 1 - (\frac{2}{3})^n \geq 1 - 10^4 \\
&\Leftrightarrow (\frac{2}{3})^n \geq 10^{-4} \mid \text{-2} \geq 3 \text{ and } 2 \leq 3 \\
&\Leftrightarrow e^{nln(\frac{2}{3})} \leq e^{-kln(10)} \\
&\Leftrightarrow n \frac{ln\frac{2}{3}}{< 0} \leq -kln(10) \\
&\Leftrightarrow n \geq -4 \frac{ln10}{ln\frac{2}{3}} = \frac{4ln10}{ln\frac{3}{2}} \\
n &\geq 23 \text{parties}
\end{aligned}$$

(C) *Le joueur joue n parties de suite. Quelle est la prob- abilité qu'il gagne au moins une fois 15 points ? A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gag- ner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?*

Exercice 34

Un central téléphonique possède L lignes. On estime à 1200 le nombre de personnes susceptibles d'appeler le standard sur une journée de 8 heures, la durée des ap- pels étant de deux minutes en moyenne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de per- sonnes en train de téléphoner à un instant donné. On suppose L = 3, calculer la probabilité d'encombre- ment à un instant donné, à savoir $\mathbb{P}(X > L)$*. Quelle doit être la valeur minimale de L* *pour qu'à un in- stant donné, la probabilité d'encombrement ne dépasse pas 0,1.*

$$\begin{aligned}
\text{L lignes} &= 3 \\
\text{1200 appels sur 8h} & \\
\text{duréé} &= \text{2min} \\
n &= 120(\text{2min}) \\
X &= \text{personnes téléphonats} \\
\mathbb{P}(X) &= 3600 = 1200 \times 3 \\
\text{Appels par seconde } &= \frac{1200}{8 \times 60 \times 60} = \frac{1}{8 \times 3} = \frac{1}{24} = P \\
\text{On a bien n grad, p petit} \Rightarrow \lambda n \times p = \frac{120}{24} &= 5 \\
\mathbb{P}(X > L) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq L) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X = 0 \cup X = 1 ... X = L)) \\
&\simeq 0,875
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > L) < 0,1. & \\
\mathbb{P}(X > L) &= 1 - e^{-\lambda}(1 + 5 + \frac{5^2}{25} + \frac{5^3}{35} + ... + \frac{5^L}{L!}) \\
l = 3 \rightarrow 0,8 + 5 & \\
L = \rightarrow 70,13 & \\
L = 8 \rightarrow 0,068 &
\end{aligned}$$