Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

MAT0309 – Álgebra Linear para Computação – Turma 1

Prof. Marcelo Ferreira Siqueira

Lista de Exercícios 2A

Aquecimento

1. Determine se as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são operadores lineares em $\mathbb{R}^2$:

   (a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $L\boldsymbol{x} = \langle x_1 + x_2, x_1 \rangle$, para todo $\boldsymbol{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2$.

   (b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $L\boldsymbol{x} = \langle x_1 x_2, x_1 \rangle$, para todo $\boldsymbol{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja L um operador linear em $\mathbb{R}^2$ e sejam

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

   Dado que

$$L\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

   encontre

$$L\boldsymbol{v}_3 .$$

3. Seja L o operador linear em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$L\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix},$$

   para todo $\boldsymbol{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$ e seja $S = \mathcal{L}(\{\langle 1, 0, 1 \rangle\})$. Então, determine $Nuc(L)$ e $L(S)$.

4. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por

$$T\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

   para todo $\boldsymbol{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2$. Determine $Im(T)$; isto é, faça uma descrição detalhada de $Im(T)$.

5. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por

$$T\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_2 + x_1 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, \quad \forall \boldsymbol{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2 .$$

   Encontre a representação matricial de T com respeito às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

6. Seja L o operador linear em $\mathbb{R}^2$ que gira um vetor por um ângulo de 30 graus no sentido anti-horário e, em seguida, reflete o vetor resultante em relação ao eixo Y. Então, encontre a representação matricial $A\left(L, (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2), (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\right)$ de L em relação à base canônica $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

7. Seja L a aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida por $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, em que

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} .$$

   A aplicação L é conhecida como *translação*. Mostre que L **não** é uma transformação linear.

8. Sejam

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   e seja L o operador linear que gira vetores em $\mathbb{R}^2$ por um ângulo de 45 graus no sentido anti-horário em relação a um sistema OXY de eixos ortogonais tal que os eixos X e Y estão orientados positivamente nas direções e sentidos dos vetores $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$, respectivamente, da base canônica de $\mathbb{R}^2$. Encontre a representação matricial de L em relação à base $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

9. Sejam

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   e

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   e seja L um operador linear em $\mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine a matriz de mudança de base da base $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ para a base $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$.

   (b) Encontre a representação matricial do operador L em relação à base $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

Verdadeiro ou falso?

Para cada afirmação que se segue, responda *verdadeiro* se ela é sempre verdadeiro e responda *falso* caso contrário. No caso de você responder verdadeiro, forneça uma demonstração da veracidade da afirmação. No caso de você responder falso, forneça um contraexemplo para a afirmação.

1. Seja
$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
um operador linear. Se $L(\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{y})$, para dois vetores quaisquer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, então $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

2. Se L_1 e L_2 são ambos operadores lineares em um espaço vetorial V, então $L_1 + L_2$ também é um operador linear em V, em que $L_1 + L_2$ é a transformação linear $(L_1 + L_2) : V \to V$ tal que
$$(L_1 + L_2)(\boldsymbol{v}) = L_1(\boldsymbol{v}) + L_2(\boldsymbol{v}) \,,$$
para todo $\boldsymbol{v} \in V$.

3. Sejam
$$L : V \to V$$
um operador linear e $\boldsymbol{x}$ um vetor de V em $Nuc(L)$. Então, $L(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{v})$, para todo $\boldsymbol{v} \in V$.

4. Se L_1 é uma transformação linear que gira cada vetor $\boldsymbol{x}$ em $\mathbb{R}^2$ por um ângulo de 60º no sentido anti-horário e então reflete o vetor resultante em relação ao eixo X, e se L_2 é uma transformação linear que efetua as mesmas operações, mas em ordem inversa, então $L_1 = L_2$.

5. Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear, e seja A a representação matricial padrão de L, isto é, a representação matricial de L em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Seja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por $H(\boldsymbol{v}) = L(L(\boldsymbol{v}))$, para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$. Então, a aplicação H é linear e sua representação matricial padrão (i.e, com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$) é dada por A^2.

6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja E uma base para V. Sejam L_1 e L_2 dois operadores lineares sobre V cujas matrizes associadas com respeito à base são iguais. Então,
$$L_1 = L_2 \,.$$

7. Seja
$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
um operador linear. Se A é a representação matricial padrão de L, então uma matriz B em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ também será uma representação matricial de L se, e somente se, A e B são similares.

8. Sejam $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se A, B (resp. B, C) são similares. Então, A e C são similares.

Problemas de programação

1. Use `Scilab` para gerar uma matriz W e um vetor $\boldsymbol{x}$ fazendo

   ```
   W = triu( ones( 5 , 5 ) ) ; x = [ 1 : 5 ]'
   ```

   As colunas de W podem ser usadas para formar uma base $F = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5)$. Seja

   $$L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$$

   um operador linear tal que

   $$L\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2\,, \quad L\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3\,, \quad L\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_4\,,$$

   $$L\boldsymbol{w}_4 = 4\boldsymbol{w}_1 + 3\boldsymbol{w}_2 + 2\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_4$$

   e

   $$L\boldsymbol{w}_5 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3 + 3\boldsymbol{w}_4 + \boldsymbol{w}_5\,.$$

   (a) Determine a matriz A associada a L em relação a F e entre com os dados em `Scilab`.

   (b) Use `Scilab` para criar o vetor de coordenadas $\boldsymbol{y} = W^{-1}\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{x}$ em relação a F.

   (c) Use A para calcular o vetor $\boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x}$ na base F.

   (d) A matriz W é a matriz de mudança de base da base F para a base canônica de $\mathbb{R}^5$. Use W para calcular o vetor de coordenadas de $L\boldsymbol{x}$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^5$.

2. Faça

   ```
   A = triu( ones( 5 , 5 ) ) * tril( ones( 5 , 5 ) )
   ```

   Se L denota o operador linear definido por $L\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$, então A é matriz associada a L com relação à base canônica de $\mathbb{R}^5$. Construa uma matriz $U \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ fazendo

   ```
   C1 = ones( 5 , 1 ) ;
   R1 = [ 1 : 5 ] ;
   COV1 = [ matrix( C1 , 1 , -1 ), matrix( R1( 2 : $ ), 1 , -1 ) ] ;
   U = hank( 5 , 5 , COV1 )
   ```

   Use a função `rank` do `Scilab` para verificar que os vetores colunas de U são linearmente independentes. Portanto, $E = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5)$ é uma base para $\mathbb{R}^5$. A matriz U é a matriz de mudança de base da base E para a base canônica.

   (a) Use `Scilab` para calcular a matriz B representando L em relação a E. A matriz B deve ser calculada em função de A, U e U^{-1}.

   (b) Gere outra matriz fazendo

```
V = toeplitz( [ 1 , 0 , 1 , 1 , 1 ] )
```

Use Scilab para verificar que V não é singular. Segue-se que o conjunto formado pelos vetores colunas de V são linearmente independentes e, portanto, formam uma base F de $\mathbb{R}^5$. Use Scilab para calcular a matriz C que representa L em relação a F. A matriz C deve ser calculada em função de B, V e V^{-1}.

(c) As matrizes B e C dos itens $2a$ e $2b$ devem ser similares. Por quê? Use Scilab para calcular uma matriz de transição S de F para E. Calcule a matriz C em função de B, S e S^{-1}. Compare o resultado com aquele que você obteve para o item 2b.

3. Sejam

```
A = toeplitz( 1 : 7 ) ;
p = poly( ones( 8 ,1 ) , 's' , 'c')
S = companion( p ) ;
```

e faça $B = S^{-1}AS$. As matrizes A e B são similares. Use Scilab para verificar que as seguintes propriedades são válidas para estas duas matrizes:

(a) $\det(B) = \det(A)$

(b) $B^T = S^T A^T (S^T)^{-1}$

(c) $B^{-1} = S^{-1}AS$

(d) $B^9 = S^{-1}A^9 S$

(e) $B - 3I_7 = S^{-1}(A - 3I_7)S$

(f) $\det(B - 3I_7) = \det(A - 3I_7)$

(g) $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$, em que $\mathrm{tr}(A)$ (resp. $\mathrm{tr}(B)$) denota o traço da matriz A (resp. B). Este número pode ser calculado com a função trace do Scilab.

Instruções para a Resolução da Lista

A lista deve ser resolvida em equipe, preferencialmente a mesma equipe dos projetos. No entanto, caso se deseje, pode-se resolver a lista em equipes distintas daquelas dos projetos, mas com, no máximo, 3 discentes. A troca de idéias por membros de uma mesma equipe é recomendável, mas a troca de idéias entre equipes é proibida. As soluções para os problemas da lista deverão ser entregues até **27 de outubro de 2014**, em sala de aula. As soluções podem ser escritas à mão, mas seria muito bom que elas fossem entregues em um arquivo PDF gerado em LaTeX. Entregue apenas as respostas para os problemas da seção "Verdadeiro ou falso?" e da seção "Problemas de programação". Você pode enviar suas respostas pelo SIGAA, se você preferir.