Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Estatística
Disciplina: ESTATISTICA APLICADA A ENGENHARIA I
Professora: Kalline Fabiana Silveira
Aluna: Raquel Lopes de Oliveira

Lista - Segunda Unidade

Lista Variáveis aleatórias

1. Determine a probabilidade de obtermos exatamente 3 caras em 6 lances de uma moeda.
A = probabilidade de ser cara
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(A)^c = \frac{1}{2}$
Usa-se a distribuição binomial:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(3) &= \frac{6!}{3!(6-3)!}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^{6-3}\\ &= \frac{720}{36} \times 0.125 \times 0.125\\ &= 20 \times 0.015625\\ &= 0.3125\end{aligned}$$

2. Jogando-se um dado três vezes, determine a probabilidade de se obter um múltiplo de 3 duas vezes.
$\Omega = \{3, 6\}$
Y = ser um múltiplo de 3
Z = não é multilo de 3
Y'= Ser múltiplo de 3 duas vez
$\mathbb{P}(Y) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(Z) = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y') &= \frac{3!}{2!(3-2)!}(\frac{1}{3})^2 \times (\frac{2}{3})^1\\ &= 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}\\ &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

3. Dois times de futebol, A e B, jogam entre si 6 vezes. Encontre a probabilidade do time A.
A = time A ganhar um jogo
Supondo que num jogo A possa ou ganhar ou perder ou empatar, temos que: $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$

a. ganhar dois ou três jogos
B = ganhar dois jogos
C = ganhar três jogos

D = ganhar dois ou tres jogos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= (\frac{1}{3})^2 \times (\frac{2}{3})^4 \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{16}{81} \\ &= \frac{16}{729} \\ &= 0.0219\end{aligned}$$

Se a ordem importar então: $\mathbb{P}(B) = C_2^6 \times 0.0219 = 15 \times 0.0219 = 0.329$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= (\frac{1}{3})^3 \times (\frac{2}{3})^3 \\ &= \frac{1}{27} \times \frac{8}{27} \\ &= \frac{8}{729} \\ &= 0.0109\end{aligned}$$

Se a ordem importar então: $\mathbb{P}(C) = C_3^6 \times 0.0109 = 20 \times 0.0109 = 0.2194$
Sendo assim:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &= 0.0219 + 0.0109 && \text{ordem nao importa} \\ &= 0.0328 \\ &ou \\ &= 0.329 + 0.2194 && \text{ordem importa} \\ &= 0.5484\end{aligned}$$

b. ganhar pelo menos um jogo.
A probabilidade de ganhar pelo menos um jogo corresponde a todas as possibilidades possíveis com exceção dele perder todos os jogos:
E = ganhar pelo menos um jogo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= 1 - C_0^6 \times (\frac{1}{3})^0 \times (\frac{2}{3})^6 \\ &= 1 - \frac{64}{729} \\ &= \frac{665}{729} \\ &= 0.912\end{aligned}$$

4. A probabilidade de um atirador acertar o alvo é 2/3. Se ele atirar 5 vezes, qual a probabilidade de acertar exatamente 2 tiros?
A = acertar dois tipos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= C_2^5 \times (\frac{2}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^3 \\ &= 10 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{27} \\ &= \frac{40}{243} \\ &= 0.164\end{aligned}$$

5. Seis parafusos são escolhidos ao acaso da produção de certa máquina, que apresenta 10% de peças defeituosas. Qual a probabilidade de serem defeituosos dois deles?
Tendo 10% como a probabilidade de um parafuso ser defeituoso, então:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2) &= C_2^6 \times (\frac{1}{10})^2 \times (\frac{9}{10})^4 \\ &= \frac{15 \times 6561}{1000000} \\ &= 0.0984\end{aligned}$$

6. No fichário de um hospital, estão arquivados os prontuários dos de 20 pacientes, que deram entrada no PS apresentando algum problema cardíaco. Destes 5 sofreram infarto. Retirando-se uma amostra ao acaso de 3 destes prontuários, qual a probabilidade de que dois deles sejam de pacientes que sofreram infarto? Calcule o Valor esperado e a variância.
N = número de itens da população= 20
M = numero de itens da populacao que sao considerados como "sucesso"= 5
n = numero de itens na amostra = 3
k = 2 (para as combinacoes)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \frac{C_k^M C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N} \\ \mathbb{P}(2) &= \frac{C_2^5 C_1^{15}}{C_3^{20}} \\ &= \frac{10 \times 15}{1140} \\ &= 0.131578\end{aligned}$$

O valor esperado é: $\mathbb{E}(x) = \frac{m \times n}{N} = \frac{5 \times 3}{20} = 0.75$
A variância é:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= M \times p \times q \times \frac{N-n}{N-1} \\ &= 5 \times \frac{5}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{17}{19} \\ &= \frac{6375}{7600} \\ &= 08388\end{aligned}$$

7. Suponha que selecionemos aleatoriamente 5 cartas baralho sem reposição de um de um maço ordinário de jogo de baralho. Qual é a probabilidade de obter exatamente 2 cartas de baralho vermelhas (isto é, copas ou ouros)?

Para essa questão estou considerando o baralho lusófono que possui 52 cartas sendo 13 de cada naipe. Sendo assim, as cartas vermelhas são 26 dentre as 52.

N = número de itens da população= 52

M = numero de itens da populacao que sao considerados como "sucesso"= 26

n = numero de itens na amostra = 5

k = 2 (para as combinacoes)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \frac{C_k^M C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N} \\ \mathbb{P}(2) &= \frac{C_2^{26} C_3^{26}}{C_5^{52}} \\ &= \frac{325 \times 2600}{2598960} \\ &= 0.32513\end{aligned}$$

8. Numa Loteria, um apostador escolhe 6 números de 1 a 54. Qual a probabilidade dele acertar 5 números?

N = número de itens da população= 54

M = numero de itens da populacao que sao considerados como "sucesso"= 6

n = numero de itens na amostra = 6

k = 5 (para as combinacoes)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \frac{C_k^M C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N} \\ \mathbb{P}(2) &= \frac{C_5^{6} C_1^{48}}{C_6^{54}} \\ &= \frac{6 \times 48}{25827165} \\ &= \frac{288}{25827165} \\ &= 0.000011151\end{aligned}$$

9. Suponha-se que haja 50 pessoas, dos quais 34 são MULHERES e o restante são HOMENS. Extrai-se uma amostra aleatória de 15 pessoas, sem reposição. Qual a probabilidade de exatamente 5 pessoas serem do sexo FEMININO?

N = número de itens da população= 50

M = numero de itens da populacao que sao considerados como "sucesso"= 34

n = numero de itens na amostra = 15

k = 5 (para as combinacoes)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \frac{C_k^M C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N} \\ \mathbb{P}(5) &= \frac{C_5^{34} C_{10}^{16}}{C_{15}^{50}}\end{aligned}$$

10. Uma caixa contém 12 lâmpadas das quais 5 estão queimadas. São escolhidas 6 lâmpadas ao acaso.

N = número de itens da população= 12

M_1 = numero de itens da populacao que sao considerados como "sucesso"(queimada) = 5

M_2 = numero de itens da populacao que sao considerados como "sucesso"(não queimada) = 7

n = numero de itens na amostra = 6

Qual a probabilidade de que

a. Exatamente duas estejam queimadas?

k= 2

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \frac{C_k^{M_1} C_{n-k}^{N-M_1}}{C_n^N} \\ \mathbb{P}(2) &= \frac{C_2^5 C_4^7}{C_6^{12}} \\ &= \frac{5!}{2!3!} \times \frac{7!}{4!3!} \times \frac{6!6!}{12!} \\ &= 0.37878\end{aligned}$$

b. Pelo menos uma esteja boa?

A probabilidade de ter pelo menos uma boa, são todas as probabilidades exceto a que nenhuma esteja boa, ou seja, todas queimadas.

G = todas as lampadas estao queimadas

$\mathbb{P}(G) = 0$, pois há apenas 5 queimadas, não há como selecionar 6 queimadas. Logo, a probabilidade de pelo menos uma estar boa é de:

$$\mathbb{P}(b) = 1 - \mathbb{P}(G) = 1 - 0 = 1$$

c. Pelo menos duas estejam queimadas?

A probabilidade de ter pelo menos duas queimadas($\mathbb{P}(C)$), são todas as probabilidades exceto a que nenhuma esteja queimada($\mathbb{P}(H)$ e a probabilidade de que tenha apenas uma queimada($\mathbb{P}(I)$).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H) &= \frac{C_k^{M_2} C_{n-k}^{N-M_2}}{C_n^N} \\ &= \frac{C_6^7 C_{6-6}^{12-7}}{C_6^{12}} \\ &= \frac{7!}{6!1!} \times \frac{5!}{0!5!} \times \frac{6!6!}{12!} \\ &= 7 \times 1 \times \frac{518400}{479001600} \\ &= 0.00845258\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H) &= \frac{C_k^{M_1} C_{n-k}^{N-M_1}}{C_n^N} \\ &= \frac{C_0^5 C_{6-0}^{12-5}}{C_6^{12}} \\ &= \frac{5!}{0!5!} \times \frac{7!}{6!1!} \times \frac{6!6!}{12!} \\ &= 1 \times 7 \times \frac{518400}{479001600} \\ &= 0.00845258\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I) &= \frac{C_k^{M_1} C_{n-k}^{N-M_1}}{C_n^N} \\ &= \frac{C_1^5 C_{6-1}^{12-5}}{C_6^{12}} \\ &= \frac{5!}{1!4!} \times \frac{7!}{5!2!} \times \frac{6!6!}{12!} \\ &= 0.113636\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= 1 - (\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(I)) \\ &= 1 - 0.00845 - 0.113636 \\ &= 0.877914\end{aligned}$$

d. O número esperado de lâmpadas queimadas?

O valor esperado é:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x) &= \frac{m_1 \times n}{N} \\ &= \frac{5 \times 6}{12} \\ &= 2.5\end{aligned}$$

e. A variância do número de lâmpadas queimadas?

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= M_1 \times p \times q \times \frac{N-n}{N-1} \\ &= 5 \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \\ &= \frac{1050}{1584} \\ &= 0.662878\end{aligned}$$

Distribuição Normal

1. Sejam X_1 e X_2 as v.a.'s que representam, respectivamente, os diâmetros do eixo e do soquete. Então $X_1 \sim \mathcal{N}(3,42; 0,012)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(3,47; 0,022)$. Seja $Y = X_2 – X_1$. Suponha que, para efeitos de montagem, as componentes das peças são selecionadas ao acaso, e que eles só se encaixam se a folga estiver entre 0,025 cm e 0,100 cm. Qual a probabilidade do eixo se encaixar no soquete?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1) \\ &= 3.47 - 3.42 \\ &= 0.05\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(X_2) + \mathbb{V}(X_1) \\ &= 0.022 + 0.012 \\ &= 0.034\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y &\sim \mathbb{N}(\mathbb{E}(Y), \mathbb{V}(Y)) \\ &\sim \mathbb{N}(0.05; 0.034)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{0.025 - 0.05}{\sqrt{0.034}} \\ &= -0.14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_2 &= \frac{0.1 - 0.05}{\sqrt{0.034}} \\ &= 0.27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0.025 < y < 0.1) &= \mathbb{P}(0 < Z < 0.14) + \mathbb{P}(0 < Z < 0.27) \\ &= 0.056 + 0.106 \\ &= 0.162\end{aligned}$$

2. A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representada por uma distribuição Normal, com média 5 kg e desvio padrão 0,9 kg. Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso do seguinte modo: 15% dos mais leves como pequenos, os 50% seguintes como médios, os 20% seguintes como grandes e os 15% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classificação?

X = peso de um coelho criado de uma granja

$X \sim \mathbb{N}(5; 0,9^2)$

X_1(pequenos) = 15% mais leves que os demais

X_2(pequenos e médios) = 65% mais leves que os demais

X_3(pequenos, médios e grandes) = 85% mais leves que os demais

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < x_1) &= 0.15 \\ \mathbb{P}(Z < \frac{x_1 - 5}{0.9}) &= 0.15 \\ \frac{x_1 - 5}{0.9} &= -1.04 \\ x_1 &= -1.04 \times 0.9 + 5 \\ &= 4.064\end{aligned}$$

Ou seja, os coelhos que possuem um peso inferior a 4.064kg são considerados como pequenos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < x_2) &= 0.65 \\
\mathbb{P}(Z < \frac{x_1 - 5}{0.9}) &= 0.65 \\
\frac{x_1 - 5}{0.9} &= 0.39 \\
x_1 &= 0.39 \times 0.9 + 5 \\
&= 5.351
\end{aligned}$$

Ou seja, os coelhos que possuem um peso inferior a 5.351Kg e superior a 4.064kg são considerados como médios

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < x_1) &= 0.85 \\
\mathbb{P}(Z < \frac{x_1 - 5}{0.9}) &= 0.85 \\
\frac{x_1 - 5}{0.9} &= 1.04 \\
x_1 &= 1.04 \times 0.9 + 5 \\
&= 5.936
\end{aligned}$$

Ou seja, os coelhos que possuem um peso inferior a 5.936Kg e superior a 5.351kg são considerados como grandes. E os superiores a 5.936Kg como extras.

3. Sejam as variáveis normalmente distribuídas e independentes: $X_1 :\sim \mathcal{N}(100, 20)$ $X_2 :\sim \mathcal{N}(100, 30)$ e $X_3 :\sim \mathcal{N}(160, 40)$. Seja a variável Y calculada como sendo: $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= 2\mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) + 3\mathbb{E}(X_3) \\
&= 2 \times 100 - 100 + 3 \times 160 \\
&= 100 + 480 \\
&= 580
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= 2^2\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + 3^2\mathbb{V}(X_3) \\
&= 80 + 30 + 360 \\
&= 470
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y &\sim \mathbb{N}(\mathbb{E}(Y), \mathbb{V}(Y)) \\
&\sim \mathbb{N}(580; 470)
\end{aligned}$$

Calcule:

a) $\mathbb{P}(Y > 590)$

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{590 - 580}{\sqrt{470}} \\
&= 0.461265604
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y > 590) &= \mathbb{P}(Z > 0.461) \\
&= 0,5 - \mathbb{P}(0 \leq Z < 0.461) \\
&= 0,5 - 0.1772 \\
&= 0.3228
\end{aligned}
$$

b) $\mathbb{P}(Y < 616)$

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{616 - 580}{\sqrt{470}} \\
&= 1.660556174
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y < 616) &= \mathbb{P}(Z < 1.66) \\
&= 0.5 + \mathbb{P}(0 \leq Z < 1.66) \\
&= 0.5 + 0.4515 \\
&= 0.9515
\end{aligned}
$$

c) $\mathbb{P}(550 < Y < 570)$

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{550 - 580}{\sqrt{470}} \\
&= -1.383796812
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{570 - 580}{\sqrt{470}} \\
&= -0.461265604
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(550 < Y < 570) &= \mathbb{P}(-1.383 < Z < -0.4612) \\
&= \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1.383) - \mathbb{P}(0 \leq Z < -0.4612) \\
&= 0.4162 - 0.1772 \\
&= 0.239
\end{aligned}
$$

4. Considere 100 doadores escolhidos aleatoriamente de uma população onde a probabilidade de tipo A é 0,40? Qual a probabilidade de pelo menos 43 doadores terem sangue do tipo A?

n = 100
$p = 0.4$
Pelo TLC $n \geq 30$, aproximo para distribuição normal.
$\mathbb{E}(X) = n \times p = 100 \times 0.4 = 40$
$\mathbb{V}(X) = n \times p(1 - p) = 100 \times 0.4 \times 0.6 = 24$
$X \sim \mathbb{N}(\mu, \mathbb{V}(X)) \simeq X \sim \mathbb{N}(40; 24)$
$Z = \frac{43-40}{\sqrt{24}} = \frac{3}{4.89} = 0.613$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \geq 43) &= \mathbb{P}(Z \geq 0.613) \\
&= 0.5 - \mathbb{P}(0 \leq Z < 0.613) \\
&= 0.5 - 0.2291 \\
&= 0.2709
\end{aligned}
$$

5. A taxa de desemprego em certa cidade é de 10%. É obtida uma amostra aleatória de 100 pessoas. Qual a probabilidade de uma amostra ter, pelo menos, 15 pessoas desempregadas.

n = 100
p = 0.1
$\mathbb{E}(X) = n \times p = 100 \times 0.1 = 10$
$\mathbb{V}(X) = n \times p(1-p) = 100 \times 0.1 \times 0.9 = 9$
$X \sim \mathbb{N}(\mu, \mathbb{V}(X)) \simeq X \sim \mathbb{N}(10; 9)$
$Z = \frac{15-10}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} = 1.66$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \geq 15) &= \mathbb{P}(Z \geq 1.66)\\ &= 0.5 - \mathbb{P}(0 \leq Z < 1.66)\\ &= 0.5 - 0.4515\\ &= 0.0485\end{aligned}$$

6. Numa população, o peso dos indivíduos é uma variável aleatória X que segundo estudos anteriores segue o modelo normal com média 78 kg e desvio-padrão 10 kg. Uma pessoa é escolhida ao acaso nessa população. Determine a probabilidade de que seu peso:
$X \sim \mathbb{N}(78; 10^2)$

a) Seja maior que 60 kg;

$$\begin{aligned}Z &= \frac{60-78}{10}\\ &= -1.8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 60) &= \mathbb{P}(Z > -1.8)\\ &= 0.5 + \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1.8)\\ &= 0.5 + 0.4641\\ &= 0.9641\end{aligned}$$

b) Esteja entre 62kg e 72 kg

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{62-78}{10}\\ &= -1.6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_2 &= \frac{72-78}{10}\\ &= -0.6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(62 < X < 72) &= \mathbb{P}(-1.6 < Z < -0.6)\\ &= \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1.6) - \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 0.6)\\ &= 0.4452 - 0.2257\\ &= 0.2195\end{aligned}$$

c) Seja inferior a 90 kg

$$\begin{aligned} Z &= \frac{90 - 78}{10} \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 90) &= \mathbb{P}(Z < 1.2) \\ &= 0.5 + \mathbb{P}(0 \leq Z < 1.2) \\ &= 0.5 + 0.3849 \\ &= 0.8849 \end{aligned}$$

d) Seja superior a 90 kg

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 90) &= \mathbb{P}(Z > 1.2) \\ &= 0.5 - \mathbb{P}(0 \leq Z < 1.2) \\ &= 0.5 - 0.3849 \\ &= 0.1151 \end{aligned}$$