Unidade I - Fundamentos do Cálculo de Probabilidade

- Revisão de Conceitos e Definições.
- Axiomas e Teoremas Básicos.
- Probabilidade condicionada e eventos independentes.

UnB – Universidade de Brasília
FGA – Faculdade UnB Gama
Graduação – ciclo básico

Probabilidade e Estatística aplicada à Engenharia

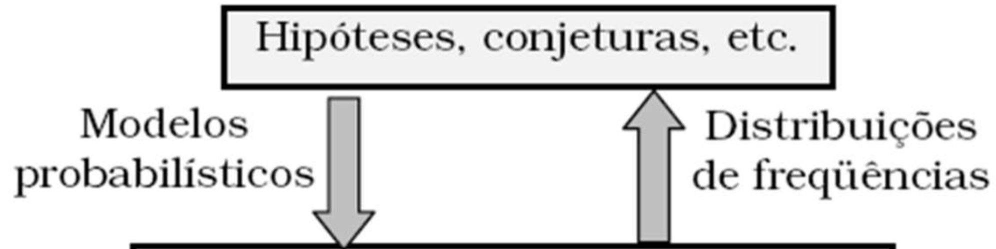
Profa. Marília Miranda

- Experimento aleatório
- Espaço amostral
- Eventos
- Probabilidade

INTRODUÇÃO

- Supondo que 60% das famílias de um bairro em Betim/MG usam programas de alimentação popular, o que se pode deduzir sobre a percentagem de famílias que usam esses programas, numa amostra aleatória simples de dez famílias?

INTRODUÇÃO



- dependendo das dez famílias selecionadas na amostra, teremos resultados diferentes;

- precisamos apresentar quais são os possíveis resultados e como eles poderão ocorrer → *modelos probabilísticos.*

Resultados ou dados observados

PEDRO A. BARBETTA – Estatística Aplicada às Ciências Sociais 6ed. Editora da UFSC, 2006.

MODELOS DE PROBABILIDADE

- Os *modelos probabilísticos* são construídos a partir de certas hipóteses ou conjecturas sobre o problema em questão e constituem-se de duas partes:

  (1) dos possíveis resultados; e

  (2) de uma certa lei que nos diz quão provável é cada resultado (ou grupos de resultados).

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- Um **experimento aleatório** ou **experiência aleatória** – ε – é qualquer experimento que, repetido inúmeras vezes, não se sabe, a *priori*, qual o resultado de uma realização específica;
- **Espaço amostral** ou **espaço amostra** é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório e é denotado por Ω ou S;

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- Um **evento** é uma coleção de resultados de um experimento aleatório, ou seja, é qualquer conjunto de resultados possíveis;

  → obs. 1: evento pode ser considerado como um subconjunto do espaço amostral;

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- Exemplo 1:

✓ o arremesso de um dado é um *experimento*;

✓ o *espaço amostral* é dado por Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

1, 3, 5}

✓ Eventos que poderão ocorrer:

- ocorrer o número 3

- ocorrer um número par {2, 4, 6}

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- Exemplo 2:

- Selecionar uma pessoa ao acaso e observar se é homem ou mulher.
- Resultados possíveis: homem, mulher
- Espaço amostral = {homem, mulher}

PROBABILIDADE

- **Probabilidade** é um valor entre 0 (zero) e 1 (um). A soma das probabilidades de todos os resultados possíveis do experimento deve ser igual a 1 (um).

- Qual a probabilidade de homem e de mulher?
- P(homem) = 0,5
- P(mulher) = 0,5

PROBABILIDADE

- Voltando para o exemplo do dado...

  - Experimento aleatório: lançar um dado e observar a face voltada para cima. Suponha que o dado seja perfeitamente equilibrado e o lançamento imparcial.

PRINCÍPIO DA EQUIPROBABILIDADE

- **Princípio da equiprobabilidade**: quando as características do experimento sugerem N resultados possíveis, todos com igual probabilidade de ocorrência, a probabilidade de um certo evento A, contendo N_A resultados, pode ser definida por:

- Espaço amostral = Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

- Probabilidades: P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

PRINCÍPIO DA EQUIPROBABILIDADE

- Usando o **princípio da equiprobabilidade**, podemos alocar probabilidades aos eventos, baseados num lançamento imparcial de um dado perfeitamente equilibrado;
- Uma forma mais geral de alocar probabilidades a esses eventos é somando as probabilidades dos resultados que compõem o evento.

PRINCÍPIO DA EQUIPROBABILIDADE

- No exemplo do dado:

→ *Evento: A* = ocorrer um número par

Probabilidade de ocorrer A:

P(A) = P(2) + P(4) + P(6)

= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = ½

→ *Evento B* = ocorrer um número menor que 3

Probabilidade de ocorrer B:

P(B) = P(1) + P(2)

= 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3

PRINCÍPIO DA EQUIPROBABILIDADE

→ *Evento C* = ocorrer o número 6

Probabilidade de ocorrer C:

P(C) = P(6) = 1/6

→ *Evento D* = ocorrer um número maior que 6

EVENTO CERTO

- **Evento certo**: ocorre quando um evento coincide com o espaço amostral → P(Ω) = 1

- No exemplo do dado...

Seja o evento A = ocorrência de um número menor que 7 e maior que zero.

Probabilidade de ocorrer D:

P(D) = 0/6 = 0

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} → Portanto A = Ω , logo o evento é certo e P(A) = P(Ω) = 1

EVENTO IMPOSSÍVEL

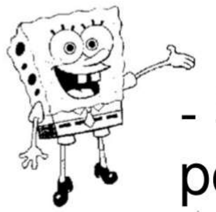
- **Evento impossível**: ocorre quando um evento é vazio → P(∅) = 0

  - No exemplo do dado...

  Seja o evento B = ocorrência de um número maior que 6.

  B = ∅ → Não existe número maior que 6 no dado, portanto o evento é impossível e P(B) = P(∅) = 0

ATENÇÃO!



- Tome nota!

- Seja dois eventos A e B pertencentes a um mesmo espaço amostral Ω:

(1) Quando pelo menos um dos eventos ocorre (*A ou B*) chamamos de *união* de A e B e é representado por $A \cup B$;

(2) Quando *A e B* ocorrem simultaneamente chamamos de *intersecção* de A e B e é representado por $A \cap B$

EVENTOS DISJUNTOS OU MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

- **Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos**: dois eventos, A e B, dizem-se mutuamente exclusivos ou disjuntos se não podem ocorrer simultaneamente, ou seja, se A ocorre, então B não ocorre e vice-versa.

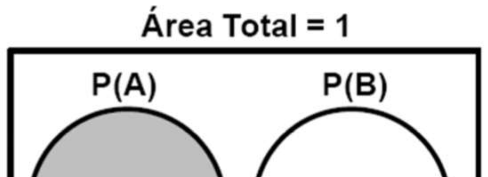
  - Neste caso: $A \cap B = \varnothing$ e $P(A \cap B) = 0$

  - Exemplo do dado:

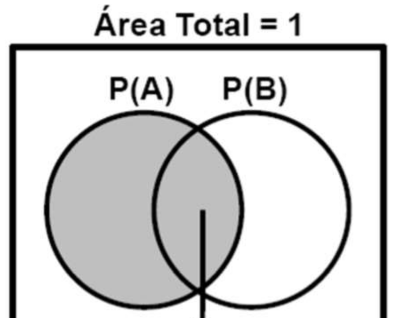
EVENTOS DISJUNTOS OU MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

- Diagrama de Venn:

Eventos mutuamente exclusivos ou disjuntos



Eventos não-disjuntos

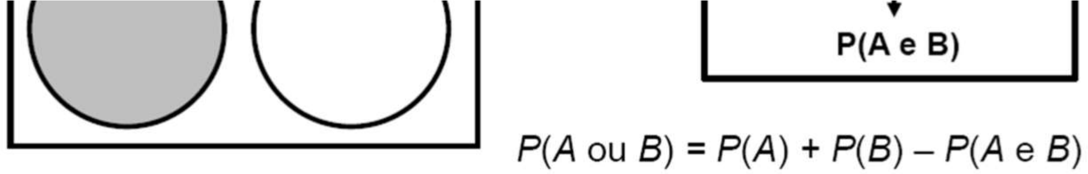


- Exemplo do dado:

Evento A: ocorrência de um número par → A = {2, 4, 6}

Evento B: ocorrência de um número ímpar → B = {1, 3, 5}

Aqui $A \cap B = \varnothing$ → $P(A \cap B) = 0$



P(A ou B) = P(A) + P(B) – P(A e B)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

REGRA DA ADIÇÃO

- **Regra da adição (probabilidade da união de dois eventos)**:

  - Seja A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral Ω

  - A probabilidade de ocorrência de A, ou de B, ou de ambos, é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

REGRA DA ADIÇÃO

- *Exemplo*:

  No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter o número 4 ou um número par?

  Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  Evento A: ocorrer o número 4 → A = {4}

  Evento B: ocorrer um número par → B = {2, 4, 6}

REGRA DA ADIÇÃO

- *Exemplo*:

  $A \cap B = \{4\} \cap \{2, 4, 6\} = \{4\}$

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

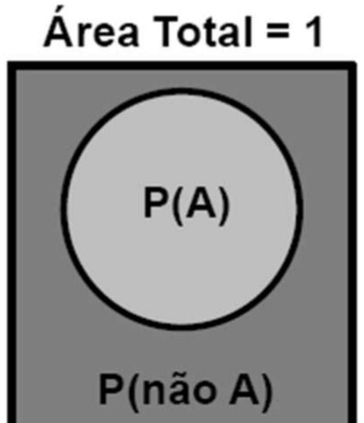
  $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$

PROBABILIDADE DE EVENTOS COMPLEMENTARES

- **Eventos complementares**:

  - eventualmente precisamos determinar a probabilidade de um evento A *não* ocorrer;

  - o complemento de um evento A, denotado por $\overline{A}$, consiste em todos os



P(A ∪ B) = $\frac{3}{6}$

resultados em que o evento A *não* ocorre.

PROBABILIDADE DE EVENTOS COMPLEMENTARES

- Nestas condições temos:

$$A \cup \overline{A} = \Omega \text{ e } A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$P(\Omega) = P(A \cup \overline{A})$$

Então: $1 = P(A) + P(\overline{A})$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- **Probabilidade condicional** de um evento: é usada quando a probabilidade é afetada pelo conhecimento de outras circunstâncias, ou seja, é a probabilidade obtida com a informação adicional de que algum outro evento já ocorreu.
- *P(B|A)* representa a probabilidade condicional da ocorrência do evento B, dado que o evento A já ocorreu:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- **Regra da multiplicação**: é usada para se encontrar P(A ∩ B), a probabilidade de o evento A acontecer em uma primeira prova e o evento B ocorrer em uma segunda prova:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- *Exemplo*:

Curso de graduação	Sexo		
	Homens	Mulheres	Total
Matemática	85	55	140
Estatística	10	20	30
Computação	20	10	30
Total	115	85	200

Fonte: Bussab & Morettin (2002)

Dado que um estudante, escolhido ao acaso, esteja matriculado no curso de

Estatística, qual a probabilidade de que seja mulher?

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- *Solução*:

  - Evento A: estar matriculado no curso de Estatística

  - Evento B: ser mulher, dado que está matriculado no curso de estatística

  - $A \cap B = 20$; $A = 30$ e $n = 200$

$$\Rightarrow P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{200}}{\frac{30}{200}} = \frac{2}{3}$$

EVENTOS INDEPENDENTES E DEPENDENTES

- Importante:

  - Dois eventos A e B são **independentes** se a ocorrência de um não afeta a ocorrência do outro (com reposição):

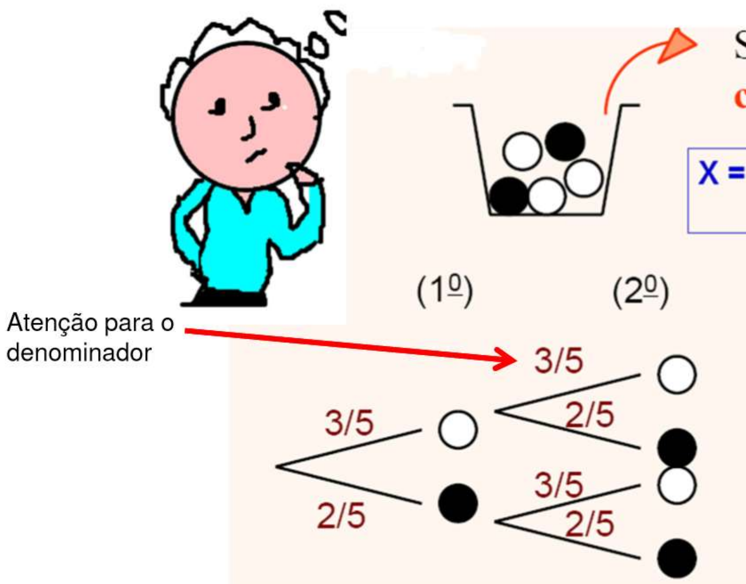
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

  - Se a ocorrência de B depende da ocorrência de A, estes eventos são **dependentes** (sem reposição):

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

EVENTOS INDEPENDENTES E DEPENDENTES

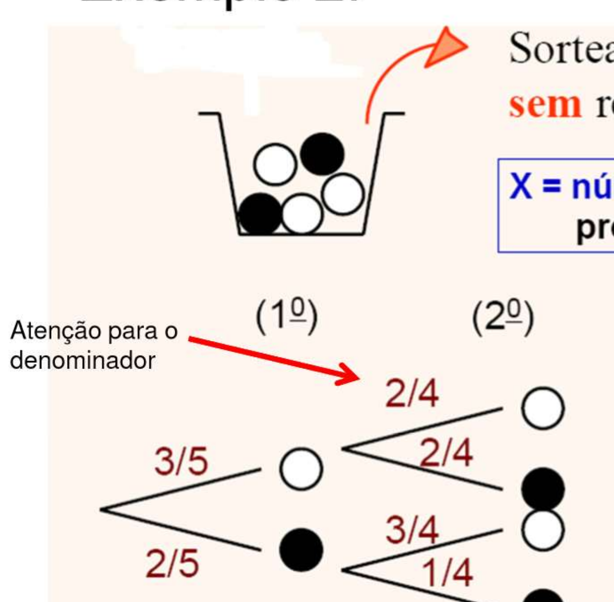
- Exemplo 1:



x	p(x)
0	9/25 (0,36)
1	12/25 (0,48)
2	4/25 (0,16)

EVENTOS INDEPENDENTES E DEPENDENTES

- Exemplo 2:



x	p(x)
0	6/20 (0,30)
1	12/20 (0,60)
2	2/20 (0,10)

PEDRO A. BARBETTA – Estatística Aplicada às Ciências Sociais 6ed. Editora da UFSC, 2006.

EVENTOS INDEPENDENTES E DEPENDENTES

Sortear n = **2** bolas

X = número de bolas pretas na amostra

Distrib. de X **com** reposição

x	p(x)
0	0,36
1	0,48
2	0,16

Distrib. de X **sem** reposição

x	p(x)
0	0,30
1	0,60
2	0,10

→ independência

PEDRO A. BARBETTA – Estatística Aplicada às Ciências Sociais 6ed. Editora da UFSC, 2006.