Álgebra das Proposições

sábado, 16 de abril de 2022 21:34

Nós podemos manipular sentenças lógicas igual manipulamos sentenças matemáticas.

Por exemplo, na matemática quando temos $x + 0 = y$, sabemos que o 0 não tem valor. Por isso, podemos simplificar a expressão retirando o zero e escrevê-la apenas como $x = y$.

Assim como expressões matemáticas, as expressões lógicas também podem ser simplificadas (ou reescritas de outra maneira).

O objetivo de estudar Álgebra das Proposições é simplificar expressões lógicas.

Abaixo vou mostrar cinco situações em que podemos aplicar a álgebra das proposições.

Situação #1

Negar a mesma proposição duas vezes $\sim(\sim P)$ é redundante. Logo podemos simplificar a expressão e reescrevê-la retirando as duas negações. Vocês conseguem entender o motivo? Vou explicar.
Imagine que P seja verdadeiro, negar duas vezes uma proposição verdadeira irá resultar em verdadeiro!
Imagine que P seja falso, negar duas vezes uma proposição falsa irá resultado em falso!
Ou seja, negar duas vezes a mesma proposição é redundante!

Na prática temos o seguinte. Suponha a frase: "*Não é verdade que não chove*". Essa sentença pode ser escrita em linguagem proposicional da seguinte forma: $\sim(\sim P)$, onde P é a proposição "*chove*".
Essa expressão $\sim(\sim P)$ é a mesma coisa que dizer P, ou seja, "*chove*", que é uma frase muito mais curta e simples, concordam?

****

Situação #2

Considere a seguinte proposição: $P \wedge Q$

- Se Q for *verdadeiro*, qual seria o valor lógico da proposição $P \wedge Q$?

Infelizmente não dá pra saber, pois vai depender do valor lógico de P: se P for falso, então a proposição composta $P \wedge Q$ será falsa, porém se P for verdade, então a proposição composta $P \wedge Q$ será verdade.
Ou seja, observe que a expressão $P \wedge$ "*alguma coisa que é verdade*" pode ser simplificada como apenas P.

- Agora suponha que Q seja *falso*.

Se Q for falso, então não me interessa qual é o valor lógico de P, pois a proposição composta $P \wedge Q$ já será falsa, pois na Tabela-Verdade do "$\wedge$" as duas proposições precisam ser verdadeiras para a toda proposição composta $P \wedge Q$ também ser verdade. Se eu digo que Q é falso, então a proposição $P \wedge Q$ já é totalmente falsa, mesmo se P for verdadeiro.

Em linguagem natural seria o seguinte: "*Ana é baixa e inteligente*". Se eu disser que é verdade que Ana é baixa, então podemos simplificar essa sentença dizendo apenas: "*Ana é inteligente*". Porém, se eu disser que é falso que Ana é baixa, isso significa que não me interessa se Ana é inteligente, já sabemos que toda a sentença será falsa.

****

Situação #3

Considere a seguinte proposição composta $P \vee Q$

- Se Q for verdade, então não me interessa o valor de P, pois a proposição já é verdade. Na Tabela-Verdade do "ou" basta apenas uma das proposições simples ser verdade que toda a proposição composta também será verdade.
- Porém, se Q for falso a proposição $P \vee Q$ irá depender do valor de P: se P for verdade, então $P \vee Q$ é verdade. Se P for falso, então $P \vee\vee Q$ será falso. Ou seja, nessa situação (quando Q é falso) podemos simplificar a expressão $P \vee\vee Q$ como sendo apenas P

Vejamos um exemplo em linguagem natural:
"*Vou à praia ou ao clube*". Se eu disser que "*não vou ao clube*", essa expressão pode ser simplificada apenas como sendo: "*Vou à praia*". De fato, veja que se eu realmente for à praia, significa que a sentença será verdadeira, mas se eu não for à praia, significa que a sentença é falsa.

****

Situação #4

Outra situação (bastante óbvia) é quando temos a seguinte proposição: $P \wedge P$
Isto é redundante: a conjunção da mesma proposição resulta na mesma proposição.
Ou seja, dizer $P \wedge P$ é a mesma coisa que dizer P.
"*Eu vou à praia e vou à praia*", podemos ser mais simples e dizer: "*Vou à praia*"

Redundante também é dizer $P \vee P$

Simplificando expressões lógicas

Clique o link MD1_simplificação para abrir o recurso.

Forma Normal das Proposições

Dizemos que uma proposição está na forma normal se e somente se a proposição possuir ap
$\sim, \vee, \wedge$

Por exemplo, as proposições abaixo estão na forma normal:

- $\sim p \wedge \sim q$
- $\sim(\sim p \vee \sim q)$
- $(p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$

As proposições abaixo NÃO estão na forma normal:

- $p \rightarrow p \wedge q$
- $p \leftrightarrow q$
- $p \rightarrow (q \vee r)$
- $(\sim p \leftrightarrow q) \wedge r$

****

No entanto, através de manipulações lógicas, todas as proposições que não estiverem na fo
se transformar em proposições na forma normal. Ou seja, qualquer expressão lógica pode s
conectivos $\sim, \vee, \wedge$, inclusive aquelas proposições que contenham os conectivos de implicaç
implicação ($\leftrightarrow$).

Vejamos alguns exemplos

- Exemplo 1) Considere a seguinte proposição $p \rightarrow q$

Na aula da semana passa, vocês viram a *regra condicional*. Lembra dela? Essa regra diz que a
pode ser reescrita como $\sim p \vee q$

Ou seja, através da aplicação direta da *regra condicional* podemos transformar a proposição
forma normal, que é $\sim p \vee q$

****

- Exemplo 2) Considere a seguinte proposição $p \leftrightarrow q$

Essa proposição é a mesma coisa que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Se aplicarmos a *regra condicional* podemos transformar a sentença $p \rightarrow\rightarrow q$ em $\sim p \vee q$ e ta
transformar a sentença $q \rightarrow p$ em $\sim q \vee p$

Juntando tudo, teremos $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

****

- Exemplo 3) Considere a seguinte proposição $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$

Vamos lá.... se eu aplicar a *regra condicional* na expressão dentro do parêntese $\sim p \rightarrow \sim q$ ter

Porém, aprendemos no tópico anterior (Álgebra das Proposições) que uma proposição nega
redundante. Sendo assim, podemos reescrever $\sim\sim p \vee \sim q$ como $p \vee \sim q$.

Então, a expressão $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$ pode ser reescrita como $\sim(p \vee \sim q)$.

Eu poderia parar por aqui, pois já encontramos uma expressão $\sim(p \vee \sim q)$ que está na forma r

Mas eu quero deixar a expressão ainda mais "enxuta".

Se eu aplicar a regra de *De Morgan* na expressão, teremos $\sim p \wedge \sim\sim q$, que é a mesma coisa q

Ou seja, a forma normal da proposição $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$ é $\sim p \wedge q$

A disjunção da mesma proposição resulta na mesma proposição.
Ou seja, dizer $P \vee P$ é a mesma coisa que dizer P.
"*Vou ao cinema ou vou ao cinema*", podemos ser mais simples e dizer: "*Vou ao cinema*"

****

Situação #5

Outra situação bem óbvia é dizer que $P \wedge Q$ é a mesma coisa que **$Q \wedge P$** .
Ou seja, dizer "Vou à praia e vou ao cinema" é a mesma coisa que dizer "Vou ao cinema e vou à praia". A ordem das proposições não altera o resultado.
Essa propriedade é conhecida como comutatividade.

$P \vee Q$ também é a mesma coisa que $Q \vee P$

****

Resumo das propriedades da Álgebra de Proposições

Abaixo eu fiz um compilado das propriedades da Álgebra de Proposições. Muito importante decorá-las.
Lembrando que o símbolo <=> refere-se à equivalência lógica

Propriedades da Conjunção

- Idempotente: $P \wedge P \Leftrightarrow P$
- Comutativa: $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
- Associativa: $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
- Identidade: P ∧ "Verdade" <=> P
  P ∧ "Falso" <=> Falso

Propriedades da Disjunção

- Idempotente: $P \vee P \Leftrightarrow P$
- Comutativa: $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
- Associativa: $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
- Identidade: P v "Verdade" <=> Verdade
  P v "Falso" <=> P

Propriedades da Conjunção e da Disjunção

- Distributivas:
1) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
2) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

IMPORTANTE!

- Absorção
1) $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
2) $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

Dica: Faça a tabela-verdade e veja que de fato é verdade essa propriedade

- Regras de De Morgan
1) $\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$
2) $\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$

Vimos na semana-passada. Repetindo a informação porque essas regras são muito importantes