Equações Lineares

sábado, 12 de março de 2022 23:15

Parte 1

Vou explicar um método prático e simples para resolver problemas de análise combinatória.

Vamos começar com o seguinte problema:

- Determine a quantidade de soluções possíveis para a seguinte equação:

$$x_1+x_2=5$$

assumindo que $x_1>0$ e $x_2>0$, ou seja, x_1 e x_2 são números positivos diferente de zero.

Resposta:
Nós conseguimos resolver manualmente o problema acima, pois a equação é bem pequena.
As soluções possíveis seriam:

1 + 4
4 + 1
2 + 3
3 + 2
Logo, temos 4 soluções possível para a equação.

Porém, o problema fica difícil quando aumentamos o tamanho da equação, veja o exemplo:

- Determine a quantidade de soluções possíveis da seguinte equação:

$$x1 + x2 + x3 + \ldots + xr = m$$

assumindo que $xi > 0$, para i = 1, 2, 3 ... r . Ou seja, nenhum xi da equação acima pode ter valor zero.

Se r (que é a quantidade de variáveis) for muito grande, será impossível calcular manualmente as soluções da equação.

Porém, existe uma fórmula matemática bem simples que dá a solução para este problema.
Essa fórmula é a seguinte:

$$C_{m-1,r-1} = \binom{m-1}{r-1}$$

onde r é quantidade de variáveis da equação e m é a igualdade da equação.

*UMA DICA IMPORTANTE: decorem essa fórmula!

>> Pra quem tiver curiosidade, no livro sobre Análise Combinatória (no capitulo 3) tem a explicação de como foi obtida essa fórmula matemática

****

Vamos resolver o seguinte exercício aplicando a fórmula acima:

Determine a quantidade de soluções positivas das equações abaixo tal que os valores de x não podem ser 0 (zero):

a) $x_1+x_2+x_3=7$

Neste exemplo temos **m** = 7 e **r** = 3.

Parte 2

Considere o seguinte problema:

- Determine a quantidade de soluções possíveis da seguinte equação:

$$x_1+x_2=5$$

assumindo que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ ou seja, x_1 e x_2 são valores positivos e podem ser zero.

Resposta:

Atenção: veja que neste problema as variáveis podem ter valores iguais a zero! Portanto, este problema é diferente do problema do tópico anterior.

A equação é bem pequena, então conseguimos resolver manualmente.
As soluções para a equação seriam os valores:
0 + 5

1 + 4
4 + 1
2 + 3
3 + 2
5 + 0
Logo, temos 6 soluções possíveis

******

Agora vamos aumentar o tamanho da equação...

Determine a quantidade de soluções possíveis da seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = m$$

assumindo que $x_i \geq 0$, para i = 1, 2, 3 ... r.

A fórmula pronta que resolve este problema é a seguinte:

$$C_{(m+r-1),m} = \binom{m+r-1}{m}$$

onde r é quantidade de variáveis e m é a igualdade da equação.

*IMPORTANTE: decorar a fórmula acima. Cuidado para não se confundir com a fórmula do tópico anterior.

****

Vamos resolver o seguinte exercício:

Determine a quantidade de soluções positivas das equações abaixo considerando que os valores de x podem ser iguais a zero:

a) $x_1+x_2+x_3=7$

Neste exemplo temos m = 7 e r = 3.

Resumo

A quantidade de soluções possíveis da seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = \text{m}$$

Assumindo que $x_i > 0$ para i = 1, 2, 3... r

É dado por: $C_{m-1,r-1}$

A quantidade de soluções possíveis da seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = \text{m}$$

Assumindo que $x_i \geq 0$ para i = 1, 2, 3, 4, ... r

É dado por: $C_{m+r-1,\, m}$

Então, a resposta será:

$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!.(6-2)!} = 15$

$b)$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$

Neste exemplo temos **m** = 9 e **r** = 5.
Então, a resposta será:

$C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!.(8-4)!} = 70$

De quantos modos diferentes podemos distribuir 10 bombons iguais em 4 caixas sendo que nenhuma caixa pode ficar vazia?

Esse problema pode ser modelado através da seguinte equação:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

Cada x_i da equação acima representa uma caixa e a soma de bombons nas 4 caixas precisa ser 10.

A solução da equação acima é a seguinte:
Temos m = 10 e r = 4. Logo,

$C_{9,3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!.(9-3)!} = 84$

***

Então, a resposta será:

$C_{(7+3-1),7} = C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!.(9-7)!} = 36$

$b)$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$

Neste exemplo temos m = 9 e r = 5.
Então, a resposta será:

$C_{(9+5-1),9} = C_{13,9} = \binom{13}{9} = \frac{13!}{9!.(13-9)!} = 715$

****

Exemplo prático:
De quantos modos diferentes podemos distribuir 10 bombons iguais em 4 caixas?

Observe que no enunciado deste exercício não há restrição na quantidade de bombons em cada caixa. Isso significa que algumas caixas podem ficar vazias!

Esse problema pode ser modelado através da seguinte equação:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

Cada x_i da equação acima representa uma caixa e a soma de bombons nas 4 caixas precisa ser 10. Algumas caixas podem ficar vazias.

A solução da equação acima é a seguinte:
Temos m = 10 e r = 4. Logo,

$C_{(10+4-1),10} = C_{13,10} = \binom{13}{10} = \frac{13!}{10!.(13-10)!} = 286$