

## Proposições e Conectivos

Para começarmos a estudar Lógica Proposicional, primeiro precisamos aprender o que é Proposição.

Uma proposição é uma sentença (frase) em que podemos julgar o conteúdo dessa frase como verdadeiro ou falso.

*Atenção: não confunda proposição com preposição!*

Vejamos alguns exemplos de proposições:

- Quatro é maior do que cinco.
- Ela é muito inteligente.
- São Paulo é uma cidade grande
- $3 < 5$

Note que para cada frase acima podemos dizer se o conteúdo é verdade ou mentira. Ou seja, são proposições!

Uma proposição nunca pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo!

Agora veja abaixo alguns exemplos de frases que não são proposições

- Como vai você?
- Como isso pode acontecer?
- Bom dia!

Não dá pra julgar como verdade ou mentira as frases acima.

Pergunta: Quais frases abaixo são proposições?

- ☒ a. João não é casado.
- ☒ b. Zé fuma 2 cigarros por dia.
- ☐ c. Tenha um bom dia.
- ☒ d. Não sei que dia é hoje.
- ☒ e. Maria saiu cedo de casa para trabalhar.
- ☐ f. Faça todos os exercícios.
- ☐ g. Leia isto atentamente.
- ☐ h. Os alunos de MD1.



As proposições podem ser simples ou compostas.

Uma proposição simples não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma

Exemplos de proposições simples:

## Tabela-Verdade dos Operadores Lógicos

É muito importante decorar a tabela-verdade dos operadores lógico que iremos utilizar na disciplina.

Abaixo tem um resumo dessas tabelas-verdade:

- **Tabela-Verdade do Não** (basta apenas inverter o valor lógico da proposição)

P	$\sim P$
F	V
V	F

- **Tabela-Verdade do E**

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Só será verdadeiro se as duas proposições forem verdadeiras

- **Tabela-Verdade do Ou**

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Se a proposição P for Falsa e a proposição Q também for Falsa, então a expressão lógica  $(P \vee Q)$  será também Falsa

- **Tabela-Verdade do Implica**

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Só será falso se P for Verdadeiro e Q for Falso

- Pedro é estudante
- O número 25 é quadrado perfeito

Já as proposições compostas são aquelas formadas pela [combinação](#) de duas ou mais proposições conectadas através de operadores lógicos

Exemplos de proposições compostas:

- Animais são peludos e aves têm penas
- Pedro é estudante ou João é engenheiro
- Se Carlos não é estudante, então Carlos é engenheiro
- Vou ser aprovado, se e somente se tirar acima de 5

Julgue as sentenças abaixo em proposições simples ou compostas

- João é réu por corrupção e peculato composta ✓
- João não pode brincar hoje, mas Maria pode composta ✓
- O céu está cinza simples ✓
- Ou jogo bolo ou faço o dever de casa composta ✓
- Não irei à aula de MD1 hoje simples ✓
- Se alguém reclamar, irei embora composta ✓

As proposições compostas são conectadas por operadores lógicos.

Nesta disciplina iremos utilizar apenas os seguintes operadores lógicos:

- Não
- E
- Ou
- Implica
- Bi-implica

Os símbolos que iremos adotar para cada um dos operadores lógicos acima serão os seguintes:

- Não: ~
- E:  $\wedge$
- Ou:  $\vee$
- Implica:  $\rightarrow$
- Bi-implica:  $\leftrightarrow$

Nessa disciplina, não iremos utilizar os operadores e-exclusivo nem o ou-exclusivo

Ao invés de escrever a seguinte proposição composta:

João é alto e inteligente

Iremos utilizar **letras** para representar a sentença. Sendo assim, a sentença "João é alto e inteligente" poderia ser escrita da seguinte forma:

P  $\wedge$  Q

- Tabela-Verdade do Bi-implica

P	Q	P $\leftrightarrow$ Q
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Só será verdade se as duas proposições forem V ou F simultaneamente

Atenção! Os operadores lógicos tem precedências, assim como operações matemáticas!! A ordem dessa precedência é a seguinte: Não > E > Ou > Implica > Bi-implica.

Por exemplo: a seguinte proposição composta  $\sim p \vee q \wedge \sim r \rightarrow s \leftrightarrow u$  seria lida da seguinte maneira se tivesse parênteses:

$((\sim p) \vee (q \wedge (\sim r))) \rightarrow s) \leftrightarrow u$

## Construindo Tabela Verdade

\*\*\*\*\*

A Tabela-Verdade é uma tabela que mostra todas as combinações possíveis de valores lógicos das proposições.

Lembrando: uma proposição simples nunca pode assumir dois valores lógicos V e F ao mesmo tempo!

Considere a seguinte proposição:

*Não é verdade que eu vou à praia e não irei viajar.*

Essa proposição acima ser traduzida em **linguagem proposicional** pela seguinte sentença:

$\sim(p \wedge \sim q)$

Note que a sentença acima tem duas proposições simples p e q, ou seja, é uma proposição composta.

A Tabela-Verdade da proposição composta acima é dada por:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
F	F	V	F	V
F	V	F	F	V
V	F	V	V	F
V	V	F	F	V

Na tabela acima, as únicas colunas que nos interessam são: a primeira coluna, a segunda coluna e a última coluna.

Na **primeira coluna** e na **segunda coluna** coloquei **todas** as combinações possíveis de valores lógicos que as proposições p e q podem assumir.

*Note que eu comecei a criação da tabela-verdade com (F, F). Isso é diferente do livro, pois eu utilizo a sequência da lógica digital. Na lógica digital o F representa o 0 (zero) e o V representa o 1 (um).*

considerando que  
P = João é alto  
Q = João é inteligente

Qual sentença proposicional abaixo representaria a seguinte frase:  
"Quando crescer, Maria será advogada ou médica"

- ☐ a.  $P \wedge Q$
- ☒ b.  $P \vee Q$
- ☐ c.  $\neg P \vee Q$
- ☐ d.  $P \rightarrow Q$

#####

O que é uma proposição?  
São expressões cujo conteúdo podemos julgar como verdadeiro ou falso

- São exemplos de proposições:
  - Quatro é maior do que cinco.
  - Ela é muito inteligente.
  - São Paulo é uma cidade grande
  - $3 < 5$

- Exemplos que **não** são proposições:
  - Como vai você?
  - Como isso pode acontecer?
  - Bom dia!

Uma proposição nunca pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo!

- Proposições Simples: são proposições que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma  
Exemplo:
  - Pedro é estudante
  - O número 25 é quadrado perfeito

- Proposições Compostas: são aquelas formadas pela combinação de duas ou mais proposições conectadas através de operadores lógicos  
Exemplo:
  - Animais são peludos e aves têm penas
  - Pedro é estudante ou João é engenheiro
  - Se Carlos não é estudante, então Carlos é engenheiro
  - Vou ser aprovado, se e somente se tirar acima de 5

- As proposições compostas são conectadas por operadores lógicos. Nesta disciplina iremos utilizar apenas os seguintes operadores:
  - Não
  - E
  - Ou
  - Implica

Assim, é mais fácil para decorar as combinações: basta seguir a ordem dos números binários.  
F, F representa o número 0 em binário  
F, V representa o número 1 em binário  
V, F representa o número 2 em binário  
V, V representa o número 3 em binário

Eu criei a **terceira e quarta coluna** porque é mais fácil resolver por partes, assim evitamos cometer erros.  
Recomendo que vocês façam o mesmo!

\*\*\*\*

MATERIAL EXTRA

Veja abaixo dois excelente vídeos que encontrei no youtube que mostram a construção de Tabela-Verdade

[Vídeo 1 - RACIOCÍNIO LÓGICO - PROPOSIÇÕES E TABELA VERDADE #1 - Prof Robson Liers Matematicamente](#)  
[Vídeo 2 - Tabela - Verdade](#)

Lembrando que não iremos estudar o e-exclusivo e nem o ou-exclusivo

Para finalizar resolva a seguinte pergunta:

Pergunta: se uma proposição composta contém  $N$  proposições simples, quantas linhas teremos na nossa Tabela-Verdade? Resposta:  **$2^n$**

\*\* fim

## Formalização de sentença

"O argumento não foi feito por Frege ou Russell"

F V R

"O River fez o primeiro gol, mas o Flamengo virou o jogo"

R ^ F

"Se surgir uma mensagem de erro, então se o HD não estiver quebrado, o problema é na placa mãe"

M  $\rightarrow$  ( H  $\rightarrow$  P)

- Bi-implica
- Os símbolos que iremos adotar para cada um dos operadores lógicos acima serão os seguintes:
  - Não:  $\sim$
  - E:  $\wedge$
  - Ou:  $\vee$
  - Implica:  $\rightarrow$
  - Bi-implica:  $\leftrightarrow$
- Não iremos utilizar os operadores e-exclusivo nem o ou-exclusivo nesta disciplina.

## Transformando Linguagem Natural para Linguagem Proposicional

Algumas definições:

- Linguagem natural é a linguagem que nós nos comunicamos, no caso, sentenças em português.
- Linguagem proposicional (ou linguagem notacional) é uma sentença escrita com **letras** e **operadores lógicos**

Algumas vezes não é tão simples traduzir uma expressão em linguagem natural para uma expressão em linguagem proposicional, e vice-versa. Por isso, é importante praticar.

Veja abaixo alguns exemplos de transformações:

Considere que:

**P** seja a proposição "*chove*"

**Q** seja a proposição "*ir ao clube*"

Linguagem Natural	Linguagem Proposicional
Não é verdade que vou ao clube	$\sim Q$
Hoje choveu e fui ao clube	$P \wedge Q$
Não choveu, mas fui ao clube	$\sim P \wedge Q$
Não chove ou vou ao clube	$\sim P \vee Q$
Se chover, então não vou ao clube	$P \rightarrow \sim Q$
Só chove, se e somente se, vou ao clube	$P \leftrightarrow Q$
Se não chover, não vou ao clube	$\sim P \rightarrow \sim Q$

As palavras que marquei em azul são as mais importantes.

Note que o **tempo verbal** (*passado, presente ou futuro*) não é importante na transformação da linguagem natural para linguagem proposicional.

"Se eu for ao mercado e não tiver queijo, eu reclamarei"

$$(M \wedge Q) \rightarrow R$$

"Ou você estuda e é reprovado, ou você não estuda e é reprovado."

$$(E \wedge A) \vee (\sim E \wedge \sim A)$$

#AMBIGUIDADE

"Fulano vai comprar roupas ou comida e bebida."

$$R \vee (C \wedge B)$$

$$(R \vee C) \wedge B$$

P	Q	R	$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

\*\* fim

## Tautologias, Contradições e Contingências

- Sempre que possível, devemos usar parênteses para evitar ambiguidades em expressões lógicas.
- Por exemplo, a expressão:

$$P \wedge Q \rightarrow R \vee S$$

com o uso do parênteses podemos ter diferentes expressões possíveis

$$P \wedge (Q \rightarrow R \vee S)$$

$$(P \wedge (Q \rightarrow R) \vee S)$$

$$P \wedge (Q \rightarrow R) \vee S$$

- Se a expressão não tiver parêntese, utilizaremos a seguinte precedência entre os operadores lógicos:  
Não > E > Ou > Implica > Bi-implica

Vamos resolver alguns exercícios:

Exercício resolvido:

Dada as seguintes proposições abaixo:

- P = *Marcos é alto*
- Q = *Marcos é elegante*

Reescreva as sentenças abaixo usando linguagem notacional:

- a) Marcos é baixo:  
Resposta:  $\sim P$
- b) Marcos é alto e elegante:  
Resposta:  $P \wedge Q$
- c) Marcos é alto, mas não é elegante:  
Resposta:  $P \wedge \sim Q$
- d) Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante:  
Resposta:  $\sim(\sim P \vee Q)$
- e) Marcos não é alto nem elegante:  
Resposta:  $\sim P \wedge \sim Q$
- f) É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante  
Resposta:  $\sim(\sim P \vee \sim Q)$

\*\*\*\*\*

Exercício resolvido:

Considere que P, Q e R são as proposições a seguir.

- P = *Ursos-cinzentos são vistos na área.*
- Q = *Fazer caminhada na trilha é seguro.*
- R = *As bagas estão maduras ao longo da trilha.*

Escreva as proposições a seguir usando as letras P, Q e R e conectivos lógicos:

- a) As bagas estão maduras ao longo da trilha, mas os ursos-cinzentos não são vistos na área.  
Resposta:  $R \wedge \sim P$
- b) Ursos-cinzentos não são vistos na área e fazer caminhada na trilha é seguro, mas as bagas estão maduras ao longo da trilha.  
Resposta:  $\sim P \wedge Q \wedge R$
- c) Não é seguro fazer caminhada na trilha, mas os ursos-cinzentos não são vistos na área e as bagas ao longo da trilha estão maduras.  
Resposta:  $\sim Q \wedge \sim P \wedge R$

\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

Relembrando:

- Proposição é uma sentença que podemos julga-la como Verdadeira ou Falsa. Por exemplo: "*Hoje está nublado*"
- Proposição simples é uma sentença simples sem conectivo. Por exemplo: "*O carro é azul*"
- Proposição composta é uma sentença formada por duas ou mais sentenças simples conectadas através de um conectivo lógico. Por exemplo: "*Hoje está nublado e o carro é azul*"

Algumas definições importantes:

- Tautologia: é toda proposição composta cujo valor lógico é sempre Verdadeiro

Exemplo:  $P \vee \sim P$

Note que, se P for verdadeiro, então a proposição  $(P \vee \sim P)$  será verdadeira.  
Se P for falso, então a proposição  $(P \vee \sim P)$  também será verdadeira.  
Ou seja, independente do valor lógico de P, a proposição  $(P \vee \sim P)$  será sempre verdadeira.

Uma frase em linguagem natural da sentença  $P \vee \sim P$  poderia ser:  
eu vou estudar ou eu não vou estudar

Outro exemplo de tautologia é a expressão  $\sim(P \wedge \sim P)$  que em linguagem natural poderia ser: *não é verdade que eu vou estudar e não vou estudar*

- Contradição: é toda proposição composta cujo valor lógico é sempre Falso

Exemplo:  $P \wedge \sim P$

De fato, não importa se P é verdadeiro ou falso, a proposição composta  $P \wedge \sim P$  nunca será verdadeira.  
Conseguem perceber?

Outro exemplo de proposição contraditória é a sentença  $P \leftrightarrow \sim P$

- Contingência: quando uma proposição não é tautologia e nem contradição

\*\*\*\*\*

Observação: os exemplos acima são bem simples. Para proposições mais complexas, devemos criar a tabela-verdade para determinar se a expressão é uma tautologia, contradição ou contingência.



\*\*\*\*\*

Exemplo: vamos determinar se a expressão  $\sim(p \wedge q) \wedge q \rightarrow \sim p$  é uma tautologia, contradição ou contingência. Para isso, vamos construir a tabela verdade da expressão. Veja abaixo a tabela-verdade:

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q) \wedge q$	$\sim(p \wedge q) \wedge q \rightarrow \sim p$
F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V

Da tabela acima, só nos interessa a primeira, segunda e ultima coluna. As colunas 3, 4, 5 e 6 eu criei só para facilitar nossa construção e evitar erros. Veja que a última coluna só tem valores verdadeiros! Isso significa que nossa expressão é uma **tautologia**, pois para todos os valores lógicos de p e q nossa expressão é sempre verdadeira. Se tivesse alguma linha que fosse Falsa, nossa expressão seria contingência. Se todas as linhas fossem falsas, nossa expressão seria contradição.

Ainda com dúvidas?  
Veja a vídeo-aula abaixo sobre o Tautologia, Contradição e Contingência, mas a combinação de valores lógicos que ele usa é diferente da minha! Eu uso a **sequência binária**, porque é a maneira mais fácil para decorar as combinações e não esquecer de nenhuma combinação.

No [vídeo](#) o professor explica também o que é "Equivalência". Isso nós veremos na semana que vem

\*\*\*\*\*