Introdução à Álgebra Linear
(IAL)

3 módulos:

Matrizes e sistemas lineares
Espaços vetoriais e Transformações
Operadores e produto interno

NOTAS

Matrizes

pg. 1 a 28

01

Definição: Representa-se uma matriz de m linhas e n colunas por:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\underbrace{a_{ij}}]_{m\times n}$$

discrimina o elemento da matriz

exemplos

$$A_{3X2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{1X4} = [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3]$$

$$C_{3X3} = \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_{1X1} = [\sqrt{41}]$$

(3x3) matriz quadrada

02

Definição: Igualdade de Matrizes

Linhas, colunas e elementos iguais

Tipos Especiais $A_{m\times n}$

1. Quadrada $(m=n)$
2. Nula $(a_{ij}=0)$
3. Coluna $(n=1)$
4. Linha $(m=1)$

quadradas:

5. Diagonal → Matriz quadrada onde $a_{ij}=0$ para $i\neq j$
6. Identidade → Matriz quadrada onde $a_{ij}=1$ e para $i\neq j$ $a_{ij}=0$
7. Triangular Superior → Elementos abaixo da diagonal nulos
8. Triangular Inferior → Elementos acima da diagonal nulos
9. Simétrica → Onde $m=n$ e $a_{ij}=a_{ji}$ → $\begin{bmatrix} e & \pi & \sqrt{2} \\ \pi & 7 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Ex: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ex: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ex: $\begin{bmatrix} e & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $(m=n,\ a_{ij}=0$ para $i>j)$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ $(m=n,\ a_{ij}=0$ para $i<j)$

Operações

Adição → $A+B = [a_{ij}+B_{ij}]_{m\times n}$ → soma de elemento a elemento de matrizes de mesma ordem

- Em teoria ñ é possível a soma de matrizes de ordem ≠ ($A = 4\times 4$ e $B = 1\times 4$)
- Porém no Matlab é possível devido a programação → Soma a coluna B c/ as colunas A/
  ↳ Computacionalmente / prático

Propriedades:

a) $A+B = B+A$ → não importa a ordem

b) $A+(B+C) = (A+B)+C$

c) $A + 0 = A$, 0 é a matriz nula

```
E =

     3     2     3     4
     4     7     6     7
     0     0     2     0
     1     2     3     6

>> F=1:4

F =

     1     2     3     4
```

```
>> G=E+F

G =

     4     4     6     8
     5     9     9    11
     1     2     5     4
     2     4     6    10
```

$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{4\times 4}$ $F = [1\ 2\ 3\ 4]_{1\times 4}$

$e_{21} = 4$ $F_{21} = ?$ $G+F = \cancel{8}$

Ex: $C = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \to C = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 3+(-1) & 4+(-1) \end{bmatrix} \to C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}; B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})

Multiplicação por Escala $\to$ $KA = [Ka_{ij}]_{m\times n}$, K um escalar (constante)

↳ multiplica cada elemento da matriz pela constante

Propriedades:

a) $K(A+B) = KA + KB$

b) $(K_1+K_2)A = K_1A + K_2A$

c) $A0 = 0A = 0$

d) $K_1(K_2A) = K_1K_2A$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \to K(A+B) = K\left(\begin{bmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 3+2 & 4+2 \end{bmatrix}\right) = K\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K2 & K3 \\ K5 & K6 \end{bmatrix}$

$KA + KB \to K\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & K2 \\ K3 & K4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & K \\ K2 & K2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K2 & K3 \\ K5 & K6 \end{bmatrix}$ =

Transposição $\to A'$

$\to$ A matriz transposta faz com que tudo que é linha vire coluna

Propriedades:

a) $A'' = (A')' = A$ — prova

b) $(A+B)' = A' + B'$ — prova

c) $(KA)' = K.A'$, K escalar — prova

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2}$ linha vira coluna $A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$ $A'' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2}$ $A = A''$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to A+B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+1 \\ 1+0 & 1+1 \\ 0+1 & 1+1 \end{bmatrix} = A+B \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2} = (A+B)' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$A' + B' \to A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A'+B' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$ =

c) $(K.A)' \to \left(K.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)' = \begin{bmatrix} K2 & K3 \\ K & K \\ 0 & K \end{bmatrix}'_{3\times2} = \begin{bmatrix} K2 & K & 0 \\ K3 & K & K \end{bmatrix}_{2\times3}$

$K.A' \to K.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K2 & K & 0 \\ K3 & K & K \end{bmatrix}$ =

Multiplicação de matrizes $\to C = A.B = [C_{uv}]_{m\times p}$ onde:

$$C_{uv} = \sum_{K=1}^{n} a_{uK} \cdot B_{K.v} = a_{u1} \cdot B_{1v} + a_{u2} \cdot B_{2v} + \cdots + a_{un} \cdot B_{nv}$$

Propriedades:

a) $A \cdot B \neq B \cdot A$

b) $AI = IA = A$ ↳ identidade

c) $A(B+C) = AB + AC$

d) $(A+B)C = AC + BC$

e) $(AB)C = A(BC)$

f) $(AB)' = B' \cdot A'$

g) $A0 = 0A = 0$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$ $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix}_{1\times2}$ — a multiplicação é possível se o nº de linhas de A for igual ao nº de colunas de B

$C = A \cdot B$ ✗

$C = A \cdot B'$ ✓

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2}$ $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{2\times1} \to AE = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.5 \\ 0.1 + 3.5 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix}_{2\times1}$

AE_{11} linha 1 × coluna 1 (A, E)

AE_{21} linha 2 × coluna 2 (A, E)

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1.2 + 0.3 & 1.1 + 0.4 \\ 5.2 + 1.3 & 5.1 + 1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

≠

$BA = \begin{bmatrix} 2.1 + 1.5 & 2.0 + 1.1 \\ 3.1 + 4.5 & 3.0 + 4.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 23 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} AI = \begin{bmatrix} 1.1 + 0.0 & 1.0 + 0.1 \\ 5.1 + 1.0 & 5.0 + 1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \\ I.A = \begin{bmatrix} 1.1 + 0.5 & 1.0 + 0.1 \\ 0.1 + 1.5 & 0.0 + 1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} A$$

$=$

Sistemas lineares

Definições

- Tendo um conjunto de m equações, n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} + x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = B_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = B_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = B_m \end{cases}$$

$a_{ij} = 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n$

Matriz de coeficientes — Matriz de incógnitas — Matriz de coeficientes (termos) independentes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$Ax = B$

$m \times n \quad n \times 1 \qquad m \times 1$

$\underbrace{m \times n \quad n \times 1}_{m \times 1}$

Exemplos :

① $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

↳ Quando não aparece um termo é pq ele é <u>nulo</u>.

② $\begin{cases} x_1' + x_2' = 1 \\ -x_1' + 3x_2' = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Operações elementares

Permuta

Permuta das i-ésimas e j-ésimas linhas ($L_i \leftrightarrow L_3$)

Ex: $L_2 \rightarrow L_3$ ou $L_3 \rightarrow L_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Multiplicação

Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo K ($L_i \rightarrow K L_i$)

Ex: $L_2 \rightarrow -3L_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Substituição

Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais K vezes a j-ésima linha
$L_i \rightarrow L_i + K \cdot L_j$

Ex: $L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1 \rightarrow \begin{matrix} -3 + 2 \cdot 1 = -1 \\ 5 + 2 \cdot 0 = 5 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

Determinantes

$A = [a_{ij}]$ matriz quadrada $\rightarrow$ det (A) ou $|A|$ ou det $[a_{ij}]$

① det $[a] = |a| = \boxed{a}$ $\longrightarrow$ Ex: $A = [\sqrt{2}]$, $|A| = \sqrt{2}$

② $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$ $\longrightarrow$ Ex: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$|B| = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (2) = 1$

③ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$ $= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$

cópia das duas colunas

Ex: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$

$= (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2$

$- (3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 1) =$

$(-1) + (-2) + 0 - (3 + 2 + 0)$

$-3 - 5 = -8$

Propriedades

prova das propriedades está a partir da pg 68 Boldrini

① Se $\exists$ uma linha ou coluna nula de A então $|A| = 0$

② Det A = det A'

③ Dada matriz A e K = constante.

Se multiplicar uma linha por K $\rightarrow$ K $|A|$

④ O determinante de uma matriz que tem 2 linhas iguais é zero $\rightarrow$ vão se anular

? ⑤ —

⑥ Trocada a posição de 2 linhas o determinante troca de sinal

⑦ O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante

⑧ $\det(AB) = \det$

Desenvolvimento de Laplace

→ Redução do cálculo do determinante

→ Dado A_{ij} ordem 3

$$|A| = \underbrace{a_{11} \cdot \Delta_{11}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{a_{12} \cdot \Delta_{12}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{a_{13} \cdot \Delta_{13}}_{\mathrm{III}}$$

onde $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A_{ij}|$

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

I $a_{11} \cdot \Delta_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 1 \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) +$

II $a_{12} \cdot \Delta_{12} = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot (-1) \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) +$

III $a_{13} \cdot \Delta_{13} = a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot 1 \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \Delta_{12} + 1 \cdot \Delta_{22} - 1 \cdot \Delta_{32}$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow -1 \cdot 4 - 2 = \underline{-2}$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2) - (-6) = \underline{8}$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = \underline{7}$$

$\rightarrow -2 \cdot (-2) + 1 \cdot (8) - 1 \cdot 7 =$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{matrix}$$

$1 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 2 \cdot (-1)$

$-(3 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \cdot 2)$

$4 + 8 - 7 = \boxed{5}$

$2 - 4 - 6 - (-6 + 1 - 8)$

$-8 - (-13) \rightarrow \boxed{5}$

=

4x4

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{elimina 2 elementos 0}} \sim \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \sim 2(-1)^{2+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{muito números negativos}} =$$

$\times(-2) + C_2 \rightarrow$ anula elemento 4

(-1) levar o ⊖ para fora

$$2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 8 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 13 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$L_1 = L_2 + L_1$

$L_3 = L_2 + L_3$

$$-2 \cdot 3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 13 & -1 \end{vmatrix}$$

$= -6 \cdot (-10 - 52) = 372$

Comando no Matlab det(A)

Matriz Inversa

A de ordem $n \rightarrow \boxed{AB = B.A = I_n}$

$B = A^{-1}$

Forma tradicional de calcular A^{-1}

Ex: $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$

$AB = I_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 6a + 2c = 1 & \rightarrow \boxed{c = -11/2} \\ 6b + 2d = 0 & \rightarrow d = -3b \rightarrow \boxed{d = 3} \\ 11a + 4c = 0 & \rightarrow a = -4c/11 \rightarrow \boxed{a = 2} \\ 11b + 4d = 1 & \rightarrow \boxed{b = -1} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6 - 1.11 & 4-4 \\ -11/2.6 + 3.11 & -11/2.2 + 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades

1. Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, $\exists A^{-1}$, $\exists B^{-1}$ então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. Se A é quadrada, $\exists B^{-1}$ tal que $BA = I$ então A é inversível $\exists A^{-1}$ e $B = A^{-1}$. A^{-1} é única.
3. Nem toda matriz tem inversa

Cálculo da inversa por matrizes elementares

$$[A \vdots I] \xrightarrow[\text{elementares}]{\text{operações}} [\quad {}^{-1}]$$

Ex₁: $\begin{bmatrix} 6 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 11 & 4 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & \vdots & 1/6 & 0 \\ 11 & 4 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$

$L_1 = \frac{1}{6} . L_1$ $\qquad$ $L_2 = L_2 + (-11) L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & \vdots & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & \vdots & -11/6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & \vdots & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & -11/2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & -11/2 & 3 \end{bmatrix}$$

$L_2 \to 3 . L_2$ $\qquad$ $L_1 \to L_1 + (-\frac{1}{3}) L_2$ $\qquad$ $\underbrace{\quad}_{I_2}$ $\underbrace{\quad}_{A^{-1}}$

Ex₂ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(second matrix: $\overbrace{\quad}^{A}$ $\overbrace{\quad}^{I_3}$; last matrix: $\underbrace{\quad}_{I_3}$ $\underbrace{\quad}_{A^{-1}}$)

$L_2 = L_2 + (-1) . L_1$ $\qquad$ $L_1 \to L_1 + (-1) . L_3$

$$A . A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [$$

Comando no Matlab: inv(A)

Regra de Cramer

para solução de sistemas

$$SL = \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$Ax = b$

$\rightarrow Ax = B$

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}x = A^{-1} \cdot B$

$I_n \cdot x = A^{-1} \cdot B \longrightarrow \boxed{x = A^{-1} \cdot B}$

REGRA: $$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

EXEMPLO

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

forma matricial: $$\begin{array}{ccc} A & x & & B \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

1. $$\text{Det}(A) = \left|\begin{matrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$0 + 0 + 14 - (12 + 3) = \underline{-1} \neq 0$

2. $$X = \begin{array}{ccc} A & x & & B \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{70 - 6 - 15}{-1} = \boxed{-49}$$

$x =$

3. $$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-10 + 1}{-1} = 9$$

4. $$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2 - 20}{-1} = 1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix}$$ Solução SL

Revisão

$$A \longrightarrow \begin{cases} A.B \neq B.A \\ A.I = IA = A \\ A(B+C) = AB + AC \\ (AB)C = A(BC) \\ (AB)' = B'.A' \\ 0.A = 0 = 0.A = 0 \end{cases}$$

$A + B = B + A$

$I_n \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} \emptyset \end{bmatrix}$

Soluções

$\rightarrow Ax = B$

$\rightarrow$ Operações elementares $\rightarrow$ Matriz escada

1° elemento $= 1$ $\downarrow$ + fácil

$$\begin{bmatrix} \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ & & \otimes & \otimes & \otimes \\ & & & \otimes & \otimes \end{bmatrix}$$

$\otimes \rightarrow$ se transformados em zero fica mais fácil

$\downarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ sistema linear

2 linhas ñ nulas

$$\begin{cases} x - 10z - 2w = -10 \\ y + 7z + w = 4 \\ 0w = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow x = 10z + 2w - 10$

$\rightarrow y = -7z - w + 4$

$m = 3 \qquad n - p = 2 \rightarrow$ 2 incognitas livres

$n = 4$

$\begin{cases} x = 10\lambda_1 + 2\lambda_2 - 10 \end{cases}$

$\hookrightarrow P_A = P_C = 2$

Solução: $\begin{cases} y = -7\lambda_1 - \lambda_2 + 4 \\ z = \lambda_1 \\ w = \lambda_2 \end{cases}$ infinitas soluções

matriz inversa

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \sim \overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}} \overset{x}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$Ax = B \sim \boxed{x = A^{-1} \cdot B}$$

$A \cdot A^{-1} = I$

$A^{-1} \cdot A = I$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(labels above the first matrix: A, I)

$L_1 = \frac{1}{2} \cdot L_1$ $\qquad$ $L_2 = L_2 - L_1$ $\qquad$ $L_2 = \frac{2}{3} \cdot L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$L_1 = L_1 + \frac{3}{2} \cdot L_2$

$L_3 = L_3 - 2 \cdot L_2$

$L_3 = -3 \cdot L_3$

$L_1 = L_1 - 3 \cdot L_3$

$L_2 = L_2 + \frac{1}{3} \cdot L_3$

$X = A^{-1} \cdot B$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -11 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right] \sim X = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 6 & -11 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 6-55+0 \\ -1+10+0 \\ -2+20+0 \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} -49 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$I_3 \qquad A^{-1}$