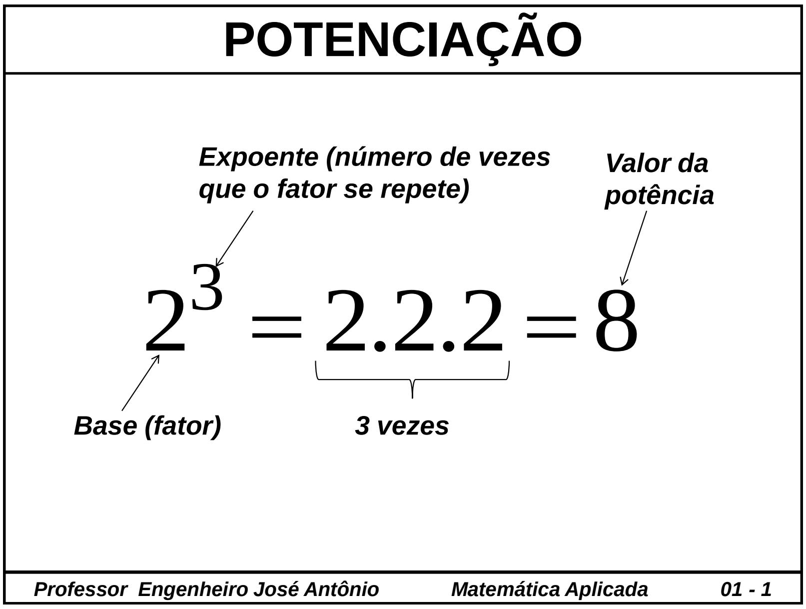
POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

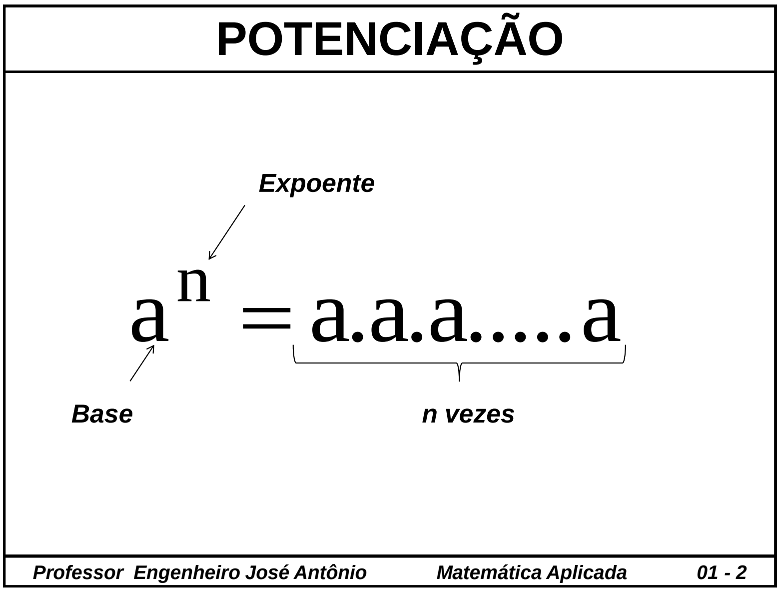
1.1 POTENCIAÇÃO

Na figura 01-1 temos o exemplo de uma potencia **DOIS ELEVADO A TRÊS** ou **DOIS ELEVADO AO CUBO** ou simplesmente **DOIS AO CUBO.**



Sempre que temos um produto onde o fator se repete, podemos escrever esse produto sob a forma de uma potência cuja base é o fator e cujo expoente é o numero de vezes que o fator se repete.

Na figura 01 – 2 temos a fórmula genérica de uma potência de base a elevada a um expoente n.



1.1.1 ALGUMAS PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS

- O número 1 elevado a qualquer potência é sempre igual a 1.
- Qualquer número elevado a 1 é igual ao próprio número.
- Qualquer número elevado a zero é igual a 1.
- O resultado das potências de bases negativas têm sinal negativo se o expoente for impar e sinal positivo se o expoente for par.

A figura 01 – 3 ilustra estas propriedades.

PROPRIEDADES DAS POTENCIAS

$1^6 = 1.1.1.1.1.1 = 1 \Rightarrow 1^n = 1.1.1.......1 = 1;$
$21^1 = 21; \Rightarrow a^1 = a$
$34^0 = 1; \Rightarrow a^0 = a$
$(-1)^6 = (-1). (-1). (-1). (-1). (-1). (-1) = 1;$
$(-1)^5 = (-1). (-1). (-1). (-1). (-1) = -1$

Calcule:

$2^6 =$ 64	$2^1 =$ 2	$2^0 =$ 1
$(-2)^5 =$ 16.2 = −32	$(-3)^1 =$ −3	? $(-5)^0 =$ 1
$(-3)^4 =$ 81	$3^4 =$ 81	? $-6^0 =$ 1
$-2^3 =$ −8	$(-5)^2 =$ 25	$-5^2 =$ 25

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 3*

$^2 16 \times 4 = 64$

$\underbrace{2.2}.\underbrace{2.2}.\underbrace{2.2}$
$\underbrace{4.4}.4$
$\underbrace{16.4}$
64

$\underbrace{3.3}.\underbrace{3.3}$
$\underbrace{9.9}$
81

1.1.2 POTENCIA DE EXPOENTE NEGATIVO

A potência de um número é igual ao inverso da potência do mesmo número com o expoente de sinal trocado.

A potência de expoente negativo de um número é igual ao inverso da potência do mesmo número com o mesmo expoente positivo. → $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

A potência de expoente positivo de um número é igual ao inverso da potência do mesmo número com o mesmo expoente negativo. → $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^{-2}$

ex: $6 \cdot (-3)^{-2} = 6 \cdot \frac{1}{(-3)^2} = 6 \cdot \frac{1}{(-3)(-3)} = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Sendo assim, em uma fração, podemos trocar qualquer potência do numerador para o denominador ou do denominador para o numerador, bastando apenas trocar o sinal do expoente.

A figura 01 – 4 mostra potências de expoente negativo convertidas em potências de expoente positivo.

POTENCIA DE EXPOENTE NEGATVO

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{com } a \neq 0}$$

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{3^3}{4^{-2}} = \boxed{\frac{4^2}{3^{-3}}} = 4^2.3^3 = 16.\overset{27}{\cancel{9}} = \underset{432}{\cancel{144}}$$

$$\frac{4^2}{3^{-3}} = \frac{4^2}{1} \cdot \frac{1}{3^{-3}} = \frac{4^2}{1} \cdot \frac{3^3}{1}$$

$$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} \qquad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$$

Calcule:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32}$$

$$\frac{3^2}{(-3)^{-3}} = 9 \div \frac{1}{-27} \qquad 9 . -27 \qquad 243$$

$$\frac{3^{-2}}{(-2)^2} = \frac{1}{3^2} \div \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{9} . 4 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{3^{-4}}{9^{-2}} = \frac{1}{3^4} \div \frac{1}{9^2} \qquad \frac{1}{81} . 81 = 1$$

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 4*

16/10/2020

1.1.3 PRODUTO E DIVISÃO DE POTÊNCIAS DA MESMA BASE (figura 01 – 5)

O produto de potências com a mesma base é igual a uma potência com a mesma base e expoente igual à soma dos expoentes. $10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$

O quociente de potências com a mesma base é igual a uma potência com a mesma base e expoente igual à subtração dos expoentes. $\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3$

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

$$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

$$3^2 . 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$$

$$4^{-2} . 4^4 = 4^{-2+4} = 4^2 = 16$$

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$$

$$\frac{3^2}{3^{-1}} = 3^{2-(-1)} = 3^{2+1} = 3^3 = 9$$

Calcule:

a) $5^{-3} . 5^3 =$ b) $(-3)^{-1} . (-3)^3 =$

c) $-4^{-4} . 4^3 =$ d) $7^{-5} . 7^3 =$

e) $\dfrac{4^{-5}}{4^3} =$ f) $\dfrac{(-6)^{-5}}{(-6)^{-4}} =$

a) $5^{-3} \cdot 5^3 =$
$5^0 = \boxed{1}$

b) $(-3)^{-1} \cdot (-3)^3 =$
$(-3)^2 = -3^2 = -9$

c) $-4^{-4} \cdot 4^3 =$
$-4^{-1} = -\frac{1}{4}$

d) $7^{-5} \cdot 7^3 = 7^{-2} = \frac{1}{49}$

e) $\frac{4^{-5}}{4^3} = 4^{-8} = \frac{1}{4^8}$

f) $\frac{(-6)^{-5}}{(-6)^{-4}} = (-6)^{-1} = -\frac{1}{6}$

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 5*

1.1.4 PRODUTO E DIVISÃO DE POTÊNCIAS COM O MESMO EXPOENTE

Para multiplicar ou dividir potências com o mesmo expoente multiplicam-se ou dividem-se as bases e dá-se o mesmo expoente.

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

$$\boxed{a^m . b^m = (a.b)^m}$$

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

$$2^4 . 3^4 = (2.3)^4 = 6^4 = 1296$$

$$\frac{9^3}{3^3} = \left(\frac{9}{3}\right)^3 = 3^3 = 27$$

Calcule:

$3^3 . 5^3 =$
$15^3 = \boxed{3.375}$

$\dfrac{12^2}{3^2} =$ $4^2 = \boxed{16}$

$\dfrac{8^{-3}}{4^{-3}} =$ $2^{-3} = \boxed{\frac{1}{8}}$

$\dfrac{(-6)^3}{4^3} =$ $\frac{-3}{2}^{3} = \boxed{-\frac{27}{64}}$

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 6*

1.1.5 POTÊNCIA DE POTÊNCIA

Para calcular a potência de uma potência dá-se a mesma base e multiplicam-se os expoentes.

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m.n}}$$

$$(3^2)^3 = 3^{2.3} = 3^6 = 729 \qquad (-2^2)^3 = -2^{2.3} = -2^6 = -64$$

Calcule:

$(2^3)^4 =$ $2^{12} = 4096$

$((-2)^3)^5 =$ $-2^{15} = 32.768$

$\left(\dfrac{6^2}{3^2}\right)^2 =$ $2^4 = 16$ $(2^2)^2$

$\left(\dfrac{(-8)^3}{2^3}\right)^2 =$ $4^6 = 4.096$ $(4^3)^2$

$\left(\dfrac{(-6)^2}{3^2}\right)^3 =$ $(-2)^6 = 64$

Professor Engenheiro José Antônio ***Matemática Aplicada*** ***01 - 7***

1.2 RADICIAÇÃO

A operação de radiciação é a inversa da de potenciação.

A figura 01 – 8 mostra a simbologia usada na radiciação.

RADICIAÇÃO

Raiz índice n de a ou raiz enésima de a

$$\boxed{\sqrt[n]{a}}$$

$\sqrt{}$ ⇨ *Radical*

a ⇨ *Radicando*

n ⇨ *Índice*

Professor Engenheiro José Antônio ***Matemática Aplicada*** ***01 - 8***

A figura 01 – 9 mostra a definição da raiz de um número.

RADICIAÇÃO

Raiz índice n de um numero a é outro numero X que multiplicado n vezes por si mesmo reproduz o numero a.

$$\sqrt[n]{a} = X \Rightarrow \underbrace{X.X...X}_{n\ vezes} = a$$

$$\sqrt[n]{a} = X \Rightarrow X^n = a$$

$\sqrt[3]{-8} = -2 \longrightarrow -2^3 = -8$

Raiz índice n de um numero a é outro numero X que elevado a n reproduz o numero a.

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 9*

RADICIAÇÃO

$$\sqrt[n]{a} = X \Rightarrow X^n = a$$

$\text{a)}\ \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \; 5^3$

$\text{b)}\ \begin{array}{r|l} 256 & 4 \\ 64 & 4 \\ 16 & 4 \\ 4 & 4 \\ 1 & \end{array} \; 4^4$

Para a raiz índice 2 chamada raiz quadrada não e necessário indicar o expoente 2

$$\sqrt[2]{25} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow 5^2 = 25$$

Calcule:

a) Raiz cúbica de 125 $\rightarrow \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$
b) Raiz quarta de 256 $\rightarrow \sqrt[4]{256} = 4^4$
c) Raiz quinta de 243 $\rightarrow \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3.3.3.3.3} = \sqrt[5]{3^5} = 3$
d) Raiz sexta de 64 $\rightarrow \sqrt[6]{64} = 2$

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 10*

19/10

1.2.1 EXPOENTE FRACIONÁRIO

Toda a raiz de um número pode ser escrita como uma potência de expoente fracionário do mesmo número. (figura 01 – 10).

EXPOENTE FRACIONÁRIO

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

$$\sqrt{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25 \qquad \sqrt[4]{4^2} = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Converta em expoente fracionário e calcule:

$\sqrt[4]{3^4} =$ $3^{\frac{4}{4}} = 3^{\frac{1}{1}} = 3$

$\sqrt[6]{8^2} =$ $8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{7^6} =$ $7^{\frac{6}{3}} = 7^2 = 49$

$\sqrt[15]{32^3} =$ $32^{\frac{3}{15}} = 32^{\frac{1}{5}}$

Professor Engenheiro José Antônio ***Matemática Aplicada*** ***01 - 11***

1.2.2 MULTIPLICAÇÃO / DIVISÃO DE RADICAIS DO MESMO INDICE

121,5
× 6
727,1

100 | 2
50 | 2
25 | 5
5 | 5
1 |

64 | 2
32 | 2
16 | 2
8 | 2
4 | 2
2 | 2
1

2^3
2^3

RAIZES COM O MESMO INDICE

MULTIPLICAÇÃO ⇨ $\boxed{\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}}$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{n}}}_{\text{Converter em expoente fracionário}} \underbrace{= a.b^{\frac{1}{n}}}_{\text{Multiplicar as bases e dar o mesmo expoente}} \underbrace{= \sqrt[n]{a.b}}_{\text{Converter em raiz}}$$

$$\sqrt[4]{9}.\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{9.9} = \sqrt[4]{81} = 3$$

Calcule:

$\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{32} =$ $\sqrt[3]{32.2} = \sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{8} =$ $\sqrt[5]{32}$

$\sqrt{2}.\sqrt{50} =$ $\sqrt[2]{100} = 10$

$\sqrt[6]{6}.\sqrt[6]{121,5} =$ $\sqrt[6]{727,1}$

Professor Engenheiro José Antônio ***Matemática Aplicada*** ***01 - 12***

RAIZES COM O MESMO INDICE

DIVISÃO ⇒ $$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$243 \mid \underline{3}$
81

81	3
27	3
9	3
3	3

Calcule:

$$\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{1} = 1 \qquad \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 13*

Para multiplicar radicais com o mesmo índice, multiplicam-se os radicandos e dá-se o mesmo índice.

A figura 01 – 12 mostra esta propriedade.

Para dividir radicais com o mesmo índice, dividem-se os radicandos e dá-se o mesmo índice.

A figura 01 –13 mostra esta propriedade.

1.2.3 RAIZ DE RAIZ E POTENCIA DE RAIZ

Para calcular uma raiz de outra raiz, multiplicam-se os índices e dá-se o mesmo radicando. Figura 01 – 14.

Para calcular a potência de uma raiz, tanto faz calcular a raiz e em seguida a potência como calcular a potência e em seguida a raiz.

RAIZ DA RAIZ

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3.3]{64} = \sqrt[9]{64}$$

Calcule:

$\sqrt{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[6]{2}$ $\quad$ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[15]{2}$ $\quad$ $\sqrt[4]{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[24]{2}$

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 14*

POTÊNCIA DE RAIZ

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

$$(\sqrt{4})^5 = \sqrt{4^5} = \sqrt{1024}$$

Calcule:

$(\sqrt{3})^3 = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt[2]{9} \cdot 3$ $\quad$ $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ $\quad$ $\left(\sqrt[4]{3+x}\right)^3 = \sqrt[4]{9+x^3}$

$(\sqrt{5})^2 = \sqrt[2]{25} = 5$ $\quad$ $\left(\sqrt[12]{6}\right)^2 = \sqrt[12]{36}$ $\quad$ $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = \sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3^3}$

$= 3.3 = \underline{9}$

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 15*

8
16
24

27
$\times 3$
81
$\times 3$
243
$\times 3$
729

3	3
9	3
27	3
81	3
243	3
729	3

1.2.4 SIMPLIFICAÇÃO DE RAIZES

Multiplicar ou dividir índice e expoente por um mesmo número não altera o resultado. Figura 01 – 16.

MULTIPLICAÇÃO/DIVISÃO DE ÍNDICE

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}}$$

$$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3.3]{5^{2.3}} = \sqrt[9]{5^6} \qquad \sqrt[6]{5^9} = \sqrt[6/3]{5^{9/3}} = \sqrt[2]{5^3}$$

Simplifique:

$$\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25 \qquad \sqrt[8]{5^{12}} = \sqrt[2]{5^3} = 5\sqrt{5} \qquad \sqrt[9]{3^6} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[12]{5^4} = \sqrt[3]{5} \qquad \sqrt[4]{4^6} = \sqrt[2]{4^3} = 4.\sqrt{4} \qquad \sqrt[4]{4^4} = 4$$

$\frac{12}{4}$ 3 $\frac{4}{4}$

Professor Engenheiro José Antônio *Matemática Aplicada* *01 - 16*