EDO 2 – s3 e 4

segunda-feira, 27 de fevereiro de 2023 21:27

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 2

Lista de Fixação - Semana 05 - Módulo 01

Temas abordados: Soluções Polinomiais e Equação de Recorrência

Soluções canônicas são as soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ as quais:
(a) Para $y_1(x)$ temos que: $y_1(0) = 1 = c_0$ e $y_1'(0) = 0 = c_1$
(b) Para $y_2(x)$ temos que: $y_2(0) = 0 = c_0$ e $y_2'(0) = 1 = c_1$

1) Seja

$$c_{n+2} = \frac{(n-3)}{(n+1)(n+4)} c_n$$

a equação de recorrência de uma EDO. Verifique se as soluções cânonicas são polinômios.

2) Considere o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e determine os coeficientes d_n do polinômio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = y''(x) - 2xy'(x) + \frac{1}{2} y(x)$$

3) Encontre a equação de recorrência da equação de Hermite

$$y''(x) - 2xy'(x) + \frac{1}{2} y(x) = 0$$

e verifique se as soluções canônicas são polinômios.

4) Mostre que a equação de recorrência da equação de Airy:

$$y''(x) = xy(x)$$

é dada por:

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} c_{n-1}$$

E verifique se as soluções canônicas são polinômios.

① $C_{n+2} = \frac{(n-3)C_n}{(n+1)(n+4)}$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

$y(1)$: $C_2 = C_{0+2} = \frac{(0-3)C_0^{=1}}{(0+1)(0+4)} = \frac{-3}{5} \rightarrow C_4 = \frac{1}{30}$

$C_6 = \frac{1}{400}$

$C_3 = C_{1+2} = \frac{-2C_1^{=0}}{(2\times5)} = 0$

$y_1(0) = 1 = C_0$
$y_1'(0) = 0 = C_1$

$y_1(x) = 1 + 0 + C_2 x^2 + C_3 . x^3 + \dots$

$C_0 = 1 \quad = \quad -3/5 + \dots + 1/30 + \dots$

$C_1 = 0 \quad 1 + 0 + \dots + 0 + 0 + \dots$

$y_2(0) = 0 = C_0$

$y_2'(0) = 1 = C_1$

$\underline{y_1(x)} = 1 + 0 + -\frac{3}{5} x^2 + \frac{1}{30} x^4 + \frac{1}{400} x^6 \dots$ não é poli.

$y_2(x) = 0 + 1 + C_2 x^2 + C_3 . x^3 + \dots$

$C_0 = 0 \to 0 + 1 + 0 + C_3 x^3 + 0 + \dots$

$C_1 = 1 \to 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + \dots$

$C_3 = C_{1+2} = \frac{(\overset{=0}{3-3}) C_1}{(4)(7)} = 0$

$\underline{y_2(x) = 1x} \rightsquigarrow$ É polinômio

(2) **2)** Considere o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e determine os coeficientes d_n do polinômio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = y''(x) - 2xy'(x) + \tfrac{1}{2} y(x)$$

$y''(x) - 2x y'(x) + 1/2\, y(x) = 0$

$\frac{1}{2} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} C_n x^n$

$-2 y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -2(n) . C_n x^n$

$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) . x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -2(n) C_n . x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} C_n x^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+2} \cdot (n+2)(n+1) . x^n - 2.(n) C_n . x^n + \frac{1}{2} C_n . x^n \right) = 0$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+2} . (n+2)(n+1) - 2(n) C_n + \frac{1}{2} C_n \right) x^n = 0}$$

igualdade de polinômios $\to C_{n+2} \cdot (n+2)(n+1) - 2(n) . C_n + \frac{1}{2} . C_n = 0, \ \forall n \geq 0$

(3) $C_{n+2} = \frac{2(n) C_n - 1/2\, C_n}{(n+2)(n+1)} \to C_{n+2} = \frac{C_n (2n - 1/2)}{(n+2)(n+1)}$

$y_1(x) = 1 + 0 + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$

$C_0 = 1 \to 1 + 0x + -1/4\, x^2 +$

$C_1 = 0 \to 1 + 0x + -1/4 x^2 + 0 + \quad + 0$

$C_2 = C_{0+2} = \dfrac{(2.0 - 1/2) C_n}{(2)(1)} = \dfrac{-1}{4} \to$ não zera c/ número inteiro

$y_1(x) \rightsquigarrow$ Não é polinômio

$C_0 = 0 \quad y_1(x) = 0 + 1 + C_2 . x^2 + C_3 x^2$ $\qquad y_2(x) \to$ Ñ é polinômio

$C_2 = 0 \qquad C_3 = \dfrac{(2.1 - 1/2)\, 1}{(3)(2)}$ não zera

$C_{n+2} = \dfrac{1 . C_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$

(4) $y_1(x) = 1 + 0 + C_2 . x^2 + C_3 . x^3 + \ldots$

$C_0 = 1 \to 1 + 0 + 0 + 0$

$C_1 = 0 \to 1 + 0 + 0 + 0$

$C_2 = \dfrac{1}{(4)(3)} . C_1 = 0 \qquad y_1(x) = 1 \rightsquigarrow$ Não é polinômio

$C_3 = \dfrac{1}{(5)(4)} . C_2 = 0$

$y_2(x) = 0 + 1 + C_2 . x^2 + C_3 . x^3$

$C_0 = 0 \to$

$C_1 = 1 \to \qquad y_2(x)$ não é polinômio

$C_2 = \dfrac{1}{4.3} . C_1 = \dfrac{1}{12} \quad \Big| \quad C_3 = \dfrac{1}{20} . C_2 = \dfrac{1}{240}$

∴ não zera c/ inteiro

RESPOSTAS

1) $y_1(x)$ é um polinômio, $y_2(x)$ não é um polinômio.

2) $d_n = (n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \frac{c_n}{2}$

3) $c_{n+2} = \frac{(2n - \frac{1}{2})}{(n+1)(n+2)} c_n$, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não são polinômios.

4) $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não são polinômios.