EDO 2 – s3 e 4

segunda-feira, 27 de fevereiro de 2023 21:27

SEMANA 3

MAURO

EDO linear de segunda ordem

$$a_2(t)\,y''(t) + a_1(t)\,y'(t) + a_0(t)\,y(t) = f(t)$$

↳ divide tudo por a_2

$$\boxed{\begin{aligned} y''(t) + q(t)\,y'(t) + p(t)\,y(t) &= g(t) \\ y''(t) + q(t)\,y'(t) + p(t)\,y(t) &= 0 \end{aligned}}$$

↳ homogênea associada → 1ª a ser analisada

Solução geral da original → $\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$

Solução geral da homogênea → $\boxed{y_h(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}$ ($y_h(t)$)

C_1 e C_2 → constante arbitrária

y_1 e y_2 ñ múltiplos

Fórmula de Abel

$$\underbrace{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}_{W(y_1,\,y_2)} = C \cdot e^{-Q(t)}$$

→ $Q(t)$ é primitiva do $q(t)$ (integral)

→ $=0$ quando y_1 e y_2 são múltiplos

A) $W(y_1(t_0), y_2(t_0)) \neq 0$

B) $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$

C) y_1 e y_2 fundamentais

$W(t)' + q(t)\cdot W(t) = 0$ ⇝ EDO 1ºO

$$\boxed{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2}}$$

↳ dá p/ achar outras soluções

Método da variação dos parâmetros

$$y_h(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= C_1(t)\,y_1(t) + C_2(t)\,y_2(t) \\ C_1(t) &= \int \frac{-y_2(t)\cdot g(t)}{W(t)}\,dt \\ C_2(t) &= \int \frac{y_1(t)\cdot g(t)}{W(t)}\,dt \end{aligned}}$$

Exemplo:

1) É EDO 2ºO linear
2) X por funções conhec.
3) $\div a_2$
4) Troca o lado direito por 0

$$t^2\cdot y''(t) + 2t\cdot y'(t) - 2y(t) = t^5$$

$$y''(t) + \frac{2t\cdot y'(t)}{t^2} - \frac{2y(t)}{t^2} = \frac{t^5}{t^2}$$

$$y''(t) + \underbrace{\frac{2}{t}}_{q(t)}\cdot y'(t) - \frac{2y(t)}{t^2} = 0$$

$\boxed{y_1(t) = t}$ ✓

$$t'' + \frac{2}{t}\cdot t' - \frac{2t}{t^2} = 0$$

$$0 + \cancel{\frac{2}{t}} - \cancel{\frac{2}{t}} = 0$$

$\boxed{0 = 0}$ ⇝ É SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA

$\boxed{y_2(t) = t^2}$ X

$$(t^2)'' + \frac{2}{t}\cdot(t^2)' - \frac{2t^2}{t^2} = 0$$

$$\cancel{2} + \frac{2}{t}\cdot 2t - \cancel{2} = 0$$

$\boxed{4 = 0}$ Não é solução da homogênea

$\boxed{y_2(t) = t^{-2}}$ ✓

$$(t^{-2})'' + \frac{2}{t}(t^{-2})' - \frac{2t^{-2}}{t^2} = 0 \rightarrow 6\cdot t^{-4} - \frac{4t^{-3}}{t} - 2t^{-4} = \boxed{0}$$

É SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA

Achando a solução geral homogênea

$$\therefore \boxed{y_h(t) = C_1 t + C_2\cdot t^{-2}}$$

$\frac{t}{1/t^2} = t^3$ ⇝ Não é constante

$$\begin{vmatrix} t & t^{-2} \\ t' & (t^{-2})' \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} t & t^{-2} \\ 1 & -2t^{-3} \end{vmatrix} \rightarrow -2t^{-2} - t^{-2} \rightarrow \boxed{-3t^{-2}}$$

$=$

$$C\cdot e^{-Q(t)} \rightarrow C\, e^{-2\cdot\log(t)} \rightarrow C\cdot e^{\log(t^{-2})} \rightarrow \boxed{C\cdot t^{-2}}$$

$$Q(t) = \text{Primitiva de } \underbrace{q(t)}_{\frac{2}{t}} = 2\cdot\log(t)$$

função t^{-2} depende apenas do $q(t)$

SEMANA 4

Coeficientes constantes ⇝ Equação característica

$$\boxed{a_2\cdot r^2 + a_1\cdot r + a_0 = 0}$$

⇝ Reduz a um problema de eq. de 2º grau

$\Delta > 0$ → $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y_1(t) = e^{r_1 t},\quad y_2(t) = e^{r_2 t}}$$

$\Delta = 0$ → $r \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y_1(t) = e^{rt},\quad y_2(t) = t.e^{rt}}$$

$\Delta < 0$ → $r_1, r_2 = a \pm ib$

$$\boxed{y(t) = e^{at}\cdot\cos(bt),\quad y_2(t) = e^{at}\cdot\operatorname{sen}(bt)}$$

Achando y_1 e y_2 joga nas fórmulas anteriores

Coeficientes variáveis

↳ Observa a eq. homogênea

↳ E usando a variável x

$$a_2(x)\,y''(x) + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = 0$$

$$\begin{aligned} y(x) &= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots \\ y'(x) &= 0 + C_1 + C_2\,2x + \dots \\ y''(x) &= 0 + 0 + C_2\,2 + \dots \end{aligned}$$

Joga p/ esquerda, aí fica x com x, x^2 com x^2, x^0 c/ x^0

$$1y''(x) - 2x\,y'(x) + 8y(x) = 0$$

$$\begin{aligned} 8y(x) &= 8C_0 + 8C_1 x + 8C_2 x^2 + \dots \\ -2x\,y'(x) &= 0 + (-2x C_1) + (-2x\,C_2\,2x) + \dots \quad (-4x^2 C_2) \\ 0 + 0 &: 2C_2 + 6xC_3 + 12x^2 C_4 + \dots \\ y''(x) &= 0 + 0 + C_2\,2x + \dots \end{aligned}$$

$$= \overbrace{\begin{matrix} 8C_0 \\ +2C_2 \end{matrix}}^{=0} + \overbrace{\begin{pmatrix} 8C_1 \\ -2C_1 \\ +6C_3 \end{pmatrix}}^{=0} x + \overbrace{\begin{pmatrix} 8C_2 \\ -4C_2 \\ +12C_4 \end{pmatrix}}^{=0} x^2$$

... **Escrevendo como somatório:**

$$8y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 8\,C_n x^n$$

derivada

$$-2x\,y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -2x^1\,C_n\cdot n\cdot x^{n-1}$$

derivada

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\cdot n(n-1)\cdot x^{n-2}$$

$$0 = ?$$

$$y''(x) = \sum_{n=-2}^{\infty} C_{n+2}\,(n+2)(n+1)\cdot x^n$$

$$\left.\begin{aligned} &C_{-2+2}\,(-2+2)(-2+1)\,x^{-2} \\ &C_{-1+2}\,(-1+2)(-1+1)\,x^{-1} \end{aligned}\right\} = 0$$

fica as potências de mesmo grau

traz duas posições p/ esquerda

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\begin{pmatrix} 8n \\ -2n\,C_n \\ +C_{n+2}(n+2)(n+1) \end{pmatrix}}^{=0} x^n$$

Igualdade de polinômios

$$8C_n - 2\cdot n\cdot C_n + C_{n+2}\,(n+2)(n+1) = 0 \quad \rightarrow \text{p/ todo } n \geq 0$$

→ Isolar

Equação de recorrência

$$\boxed{C_{n+2} = \frac{(2n-8)\,C_n}{(n+2)(n+1)}} \quad n \geq 0$$

→ Condições iniciais

$$\begin{cases} y(0) = C_0 \\ y'(0) = C_1 \end{cases}$$

Soluções canônicas

$y_1(x)$, $y_2(x)$

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases} \qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Determinar $y_1(x)$

$C_0 = 1 \rightarrow C_2 = -4 \rightarrow C_4 = 16/12$

$C_1 = 0 \rightarrow C_3 = 0 \rightarrow C_6 = 0$

$$\boxed{y_1(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4}$$

$y_1 = t$ → Usando a fórmula de abel p/ achar y_2

$$\left(\frac{y^2}{y^1}\right)' = \frac{C \cdot e^{-Q(t)}}{(y_1)^2} \rightarrow \left(\frac{y_2}{t}\right)' = \frac{C \cdot e^{-2\log(t)}}{t^2}$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{y_2}{t}\right)' = \int C \cdot t^{-4} \rightarrow \frac{y_2}{t} = C \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + K \rightarrow y_2 = \frac{C\, t^{-2}}{-3} + K t$$

$$\rightarrow \boxed{y_2 = t^{-2}}$$

Achando a solução geral original

$y_1 = t \mid y_2 = t^{-2} \mid w(t) = \mid -3t^{-2} \mid g(t) = t^3$

$$C_1 = \int \frac{-y_2 \cdot g(t)}{w(t)} \cdot dt \rightarrow \int \frac{-\cancel{t^{-2}}\, t^3}{\cancel{3t^{-2}}} \cdot dt \rightarrow \frac{1}{3}\int t^3 \cdot dt$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^4}{4} + C_1 = \frac{t^4}{12} + C_1$$

$$C_2 = \int \frac{y_1 \cdot g(t)}{w(t)} \cdot dt \rightarrow \int \frac{t \cdot t^3}{-3t^{-2}} \cdot dt \rightarrow -\frac{1}{3}\int t^6 \cdot dt \rightarrow -\frac{t^7}{21} + C_2$$

$$\therefore \frac{t^4}{12} + C_1 \cdot t - \frac{t^7}{21} + C \cdot t^{-2} = \left(\frac{t^5}{12} - \frac{t^5}{21}\right) + C_1 t + C_2 \cdot t^{-2}$$

$$= \frac{21t^5 - 12t^5}{252}$$

$$= \frac{9t^5}{252}$$

$$= \underbrace{\frac{t^5}{28}}_{y_p(t)} + \underbrace{C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^{-2}}_{y_h(t)}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$\boxed{y(t) = C_1 t + C_2 t^{-2} + \frac{t^5}{28}}$$

Verificando

$$\begin{cases} y''(t) + \frac{2}{t} \cdot y'(t) - \frac{2}{t^2} \cdot y(t) = t^3 \\ y(t) = \frac{t^5}{28} \end{cases}$$

$$\left(\frac{t^5}{28}\right)'' + \frac{2}{t} \cdot \left(\frac{t^5}{28}\right)' - \frac{\cancel{2}}{\cancel{t^2}} \cdot \frac{\cancel{t^5}^{\,3}}{\cancel{28}_{14}} = t^3$$

$$\frac{{}^{10}\cancel{20}\, t^3}{\cancel{28}_{14}} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{t}} \cdot \frac{5\cancel{t^4}^{\,3}}{\cancel{28}_{14}} - \frac{t^3}{14} = t^3$$

$$\frac{10t^4}{14} + \frac{5t^3}{14} - \frac{t^3}{14} = t^3$$

$$\frac{14}{14} \cdot t^3 = t^3$$

$\boxed{t^3 = t^3}$ É SOLUÇÃO

y_1 e y_2 PARA AS PRÓXIMAS SEMANAS ...

Determinar $y_1(x)$

$C_0 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \ldots$ (Pares)

$C_1 = 1 \rightarrow C_3 \neq 0 \ldots$

↳ ñ é um polinômio

$$\boxed{y_1(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4}$$

Resumo $\quad a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(0) = 0$

$$a_0(x)\,y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$a_1(x)\,y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$a_2(x)\,y''(x) = \sum_{n=-2}^{\infty}$$

lista 4

1 a) $y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 0$

→ coeficientes constantes

1) Equação característica

$r^2 + 3r - 4 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$r = \frac{-3 \pm 5}{2}$ → $r_1 = -4$, $r_2 = 1$

2) Substitui

$y_1 = e^{-4t}$, $y_2 = e^t$

$$\boxed{y_h(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{t}}$$