Somatório, PA, PG, Fatorial e Números Binomiais

terça-feira, 1 de fevereiro de 2022 16:10

Somatórios

a) $\sum_{i=0}^{50} 2 \rightsquigarrow \underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{51} = 51 \cdot 2 = \boxed{102}$

b) $\sum_{i=2}^{5} 2^i \rightsquigarrow 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \boxed{60}$

$4 + 8 + 16 + 32$

c) $\sum_{i=0}^{50} i \rightsquigarrow 0 + 1 + 2 + \ldots + 50 = \boxed{1275}$

$\rightsquigarrow 50 + 49 + 48 + \ldots + 0 +$

$\underbrace{50 + 50 + 50 + \ldots + 50}_{51 \text{ índice}}$

$\therefore \frac{51 \cdot 50}{2} = \boxed{1275}$

d) $\sum_{i=0}^{n} i \rightsquigarrow 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \boxed{\frac{(n+1)i}{2}}$

$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 0$

$\underbrace{n + n + n + \cdots + n}_{n+1}$

$\therefore \frac{(n+1)i}{2}$

c) $\sum_{i=0}^{n} \underbrace{2+i}_{x} = \sum_{i=0}^{n} 2 + \sum_{i=0}^{n} i \rightsquigarrow \frac{(n+1)2}{2} + \frac{(n+1)i}{2}$

$\frac{(n+1)x}{2}$

$\frac{2(n+1) + (n+1)i}{2}$

$\boxed{\frac{(n+1)(2+i)}{2}}$

constante

c) $\sum_{i=0}^{n} 2.i \rightsquigarrow 2\,0 + 2\,1 + 2\,2 + \ldots + 2.n = \boxed{(n+1)n}$

$2(0 + 1 + 2 + \ldots + n)$

$2.\sum_{i=0}^{n} i = 2 . \frac{(n+1)n}{2} = (n+1)n$

(2) Escreva as sentenças abaixo usando um somatório

a) 2+4+ 8+16+32+64 $\rightsquigarrow$ pares

1 2 3 4 5 6 termos

6

1 2 3 4 5 6

PA

A progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica em que cada termo (a partir do segundo) corresponde à soma do anterior com um valor chamado razão (r).

Exemplos de PA:

S = (1,2,3,4,5,...n) *<< essa é uma PA de razão r = 1*

S = (2,5,8,11,14,....n) *<< essa é uma PA de razão r = 3*

A soma de uma PA é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

[Equação]

Na fórmula acima, o n é a quantidade de elementos, **a1** é o primeiro elemento da PA e **an** é o último elemento da PA.

Por exemplo, considere o seguinte somatório:

$$\sum_{i=3}^{n} (i+2)$$

Esse somatório corresponde à uma PA de razão r = 1 e esse somatório tem (n-2) elementos. Então a formula fechada desse somatório será:

$$S = \frac{(n-2).(5+(n+2))}{2}$$
$$= \frac{(n-2).(n+7)}{2}$$

OBS: re-veja o vídeo que eu gravei resolvendo Somatórios. Lá eu expliquei um macete para encontrar a soma de uma PA sem precisar decorar a fórmula acima.

****

PG

A progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo (a partir do segundo) corresponde à multiplicação do anterior com um valor chamado razão (q).

Exemplo:

S = (3,9,27,81....n) *<< essa é uma PG de razão q = 3*

S = (2,4,8,16,32,...n) *<< essa é uma PG de razão q = 2*

A soma de uma PG é dada pela fórmula:

$$S = \frac{a_1.(q^X - 1)}{q-1}$$

em que X é a quantidade de elementos da PG, $a1$ é o primeiro elemento e q é a razão da PG

Por exemplo, considere o seguinte somatório:

Fatorial e Números Binomiais

Fatorial

Fatorial é um número natural inteiro positivo, o qual é representado por n!

O fatorial de um número é calculado pela multiplicação desse número por todos os seus antecessores até chegar ao número 1. Note que nesses produtos, o zero (0) é excluído.

O fatorial é representado por:

n! = n . (n – 1) . (n – 2) . (n – 3)!

Exemplo:

5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

10! = 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4. 3 . 2 . 1 = 3.628.800

Obs: O número fatorial também pode ser representado da seguinte maneira:

5!
5 . 4!
5 . 4 . 3!
5 . 4 . 3 . 2!

Operações com Fatoriais

Adição

3! + 2!
(3 . 2 . 1) + (2 . 1)
6 + 2 = 8

Subtração

5! - 3!
(5 . 4 . 3 . 2 . 1) – (3 . 2 . 1)
120 – 6 = 114

Multiplicação

0! . 6!
1 . (6 . 5. 4 . 3 . 2 . 1)
1 . 720 = 720

Divisão

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5.4 = 20$$

Simplificação de Fatorial

Na divisão de números fatoriais o processo de simplificação é um dos mais importantes:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10.9.8.\cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10.9.8 = 720$$

****

Números Binomiais

Chamamos de coeficiente binomial ou número binomial a relação estabelecida entre dois números naturais n e p, tais que n ≥ p, indicada por

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\sum_{i=1} 2 \rightsquigarrow 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =$$

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

b) $\overset{+2}{1}+3+5+\ldots+29$ → termos $= \frac{x-1}{2}$

$$\sum_{i=0}^{14} 1 + 2i \rightsquigarrow 1 + 2.0 + 1 + 2.1 + \ldots 1 + 2.14$$

$$1 + 3 + \ldots 29$$

$$\sum_{i=2}^{n} 3^i$$

Esse somatório corresponde à uma PG de razão r = 3 e esse somatório tem (n-1) elementos. Então a formula fechada desse somatório será:

$$S = \frac{9(3^{(n-1)} - 1)}{2}$$

Vejamos alguns exemplos de números binomiais:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{2.1.\cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\,(10-6)!} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10.9.8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}.4.3.2.1} = \frac{5040}{24} = 210$$