M2 Lista1

segunda-feira, 16 de agosto de 2021 22:43

M2 - Lista 1 (pg 129 - 1,6,11,25)

1. *a)* Seja V o espaço vetorial $\mathbf{R}^n$, definido no Exemplo 2 de 4.2.2. Qual é o vetor nulo de V e o que é $-(x_1, x_2, ..., x_n)$? *b)* Seja $\mathbf{W} = M(2, 2)$ (veja 4.2.2 Exemplo 3 *i*)) descreva o vetor nulo e vetor oposto.

Exemplo 2: No lugar de ternas de números reais consideremos como vetores n-uplas de números reais.

$$V = \mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n);\ x_i \in \mathbf{R}\}$$

e se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ e $a \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \quad \text{e} \quad a\mathbf{u} = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$$

Neste caso perdemos, é claro, a visão geométrica de "vetores", pois saímos de um espaço de "dimensão" 3 da geometria e passamos a um espaço de "dimensão" n. Apesar disto, podemos trabalhar com estes espaços da mesma maneira que em $\mathbf{R}^3$.

Subexemplo: $n = 5$; $V = \mathbf{R}^5$
$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): \ x_i \in \mathbf{R}\}$

$$\begin{aligned}
\text{Se} \quad \mathbf{u} &= (1, 0, 2, -3, 4) \\
\text{e} \quad \mathbf{v} &= (0, 1, 1, -2, 5), \\
\text{então } \mathbf{u} - 2\mathbf{v} &= (1, 0, 2, -3, 4) - 2(0, 1, 1, -2, 5) \\
&= (1, 0, 2, -3, 4) - (0, 2, 2, -4, 10) \\
&= (1, -2, 0, 1, -6)
\end{aligned}$$

Observe que, neste caso, o vetor nulo é (0, 0, 0, 0, 0).

As n-uplas de números reais ou, equivalentemente, matrizes-linha $1 \times n$ (ou matrizes-coluna $n \times 1$) aparecem naturalmente na descrição de muitos problemas que envolvem várias variáveis. Como um exemplo para determinar a posição de uma barra no espaço precisamos dar as coordenadas de suas duas extremidades $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Assim, sua coordenada será dada por $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, e estaremos trabalhando com o espaço vetorial $\mathbf{R}^6$.

Exemplo 3: $V = M(m, n)$, o conjunto das matrizes reais $m \times n$ com a soma e produto por escalar usuais.

Subexemplos:

i) $V = M(2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$

Qual é o vetor nulo deste espaço vetorial? (Veja o Exercício 1 da secção 4.8.)

ii) $V = M(1, n) = \{[a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n}]: a_{1i} \in \mathbf{R}\}$.
Observe que este espaço vetorial pode ser identificado com $V = \mathbf{R}^n$ (veja o Exemplo 2 desta seção).

2. Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbf{R}^4$ são subespaços

a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$

b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$

6. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^4$

$$S = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)]$$

a) O vetor $(\frac{2}{\ }, 1, -1, 2)$ pertence a S?

a) O vetor $(\frac{}{3}, 1, -1, 2)$ pertence a S?

b) O vetor $(0, 0, 1, 1)$ pertence a S?

11. Quais são as coordenadas de $x = (1, 0, 0)$ em relação à base $\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$?

15. Seja V o espaço das matrizes 2×2 sobre $\mathbf{R}$, e seja W o subespaço gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma base, e a dimensão de W.

1

a) Vetor neutro $= (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n})$

$-(x_1, x_2, \dots x_n)$ = elemento oposto que somado a V da o vetor nulo.

b) $W = M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$$\vec{w} + (-\vec{w}) = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}}_{\text{oposto}} = \begin{bmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nulo}} = \vec{0}$$

2 a) $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ $\quad$ $x + y = 0$ $\quad$ $z - t = 0$ $\quad$ $\vec{u} = (-y_1, y_1, z_1, z_1)$

$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ $\quad$ $x = -y$ $\quad$ $z = t$ $\quad \therefore \quad$ $\vec{v} = (-y_2, y_2, z_2, z_2)$

$\vec{u} + \vec{v}$

$(-y_1, y_1, z_1, z_1) + (-y_2, y_2, z_2, z_2) = (-y_1 + (-y_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2, z_1 + z_2) = (\overbrace{-y_1 - y_2}^{x}, \overbrace{y_1 + y_2}^{y}, \overbrace{z_1 + z_2}^{z}, \overbrace{z_1 + z_2}^{t})$

$\therefore x + y = (-y_1 - y_2) + (y_1 + y_2) = -(\cancel{y_1 + y_2}) + (\cancel{y_1 + y_2}) = 0$

$\therefore z - t = (z_1 + z_2) - (z_1 + z_2) = 0$ ✓

$a \cdot \vec{u}$

$a(-y_1, y_1, z_1, z_1) = (\overbrace{-a \cdot y_1}^{x}, \overbrace{a \cdot y_1}^{y}, \overbrace{a \cdot z_1}^{z}, \overbrace{a \cdot z_1}^{t})$

$\therefore x + y = (-a \cdot y_1) + (a y_1) = -(a \cdot y_1) + (a y_1) = 0$

$\therefore z - t = (a \cdot z_1) - (a \cdot z_1) = 0$

b) $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ $\quad$ $2x + y - t = 0 \leadsto x = \frac{t - y}{2}$ $\quad$ $\vec{v} = (\frac{t_1 - y_1}{2}, y_1, 0, t_1)$

$\vec{n} = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ $\quad$ $z = 0$ $\quad$ $\vec{n} = (\frac{t_2 - y_2}{2}, y_2, 0, t_2)$

$\vec{v} + \vec{n}$

$(\frac{t_1 - y_1}{2}, y, 0, t_1) + (\frac{t_2 - y_2}{2}, y_2, 0, t_2) = \left(\overbrace{\left(\frac{t_1 - y_1}{2}\right) + \left(\frac{t_2 - y_2}{2}\right)}^{x}, \overbrace{y_1 + y_2}^{y}, \overbrace{0}^{z}, \overbrace{t_1 + t_2}^{t} \right)$

$\therefore z \leadsto 0 + 0 = 0$ ✓

$\therefore 2x + y - t \leadsto \cancel{2}\left(\frac{t_1 - y_1}{\cancel{2}}\right) + \cancel{2}\left(\frac{t_2 - y_2}{\cancel{2}}\right) + y_1 + y_2 - (t_1 + t_2) =$

$t_1 - \cancel{y_1} + t_2 - \cancel{y_2} + \cancel{y_1} + \cancel{y_2} - (t_1 + t_2) = t_1 + t_2 - (t_1 + t_2) = 0$ ✓

$a . \vec{v}$

$$a\left(\frac{t_1 - y_1}{2}, y, 0, t_1\right) = \left(\overbrace{\frac{a.t_1 - a.y_1}{2}}^{x}, a.y_1, 0, a.t_1\right)$$

$\therefore \quad z = a.0 = 0$ ✓

$\therefore \quad 2x + y - t = \cancel{2}\left(\frac{a t_1 - a.y_1}{\cancel{2}}\right) + a.y - a.t_1 = \cancel{at_1} - \cancel{ay_1} + \cancel{ay_1} - \cancel{at_1} = 0$ ✓

b-) W $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right.$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b = c$

sejam $\vec{U} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ e $\vec{V} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}$

$x_2 = x_3 + 1$ e $y_2 = y_3 + 1$

$$\vec{U} + \vec{V} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 + 1 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_3 + 1 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_3 + y_3 + 2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{bmatrix}$$

$\vec{U} + \vec{V}$ não pertence a W então W não é subespaço de $M(2,2)$

6-) a-) O vetor $\left(\frac{2}{3}, 1, -1, 2\right)$ nã

~~não~~ pertence a S pois S está elimi

(1, 4, -4, 9)

b-) o vetor (0, 0, 1, 1) não pertence a S pois S está limitado aos vetores (1, 1, -3, 1), (1, 1, -1, 2) e (1, 4, -

13) $1-t^3$; $(1-t)^2$; $1-t$; 1

$$a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t^1 + a_0t^0 = A(1-t^3) + B(1-t)$$

$$a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t^1 + a_0t^0 = A - At^3 + B(1-2t+t^2) +$$

$$a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t^1 + a_0t^0 = At^0 - At^3 + Bt^0 - 2Bt^1 + Bt^2$$

Logo: $a_3t^3 = -At^3$

$$a_2t^2 = Bt^2$$

$$a_1t^1 = -2Bt^1 - Ct^1 = (-2B - C) \cdot t^1$$

$$a_0t^0 = At^0 + Bt^0 + Ct^0 + D \cdot 1 \cdot t^0 = (A+B+$$

ou seja: $a_3 = -A \Rightarrow \boxed{-a_3 = A}$; $\boxed{a_2 =}$

$\Rightarrow a_1 + 2B = -C \Rightarrow -a_1 - 2B = C \Rightarrow \boxed{-a}$

$a_0 = A + B + C + D \Rightarrow a_0 = -a_3 + a_2 - a_1 - 2a_2 +$

$\Rightarrow a_0 + a_3 + a_1 = -a_2 + D \Rightarrow \boxed{D = a_0 + a_3 + a}$

$\therefore \exists$ combinação linear e os polinômios geram polinômios de grau ≤ 3

25) $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \; ; \; z - t = 0\}$

$$\begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \\ z - t = 0 \Rightarrow z = t \end{cases}$$

(y, t)
$(1, 0)$
$(0, 1)$

Para $y=1, t=0$, temos $x=-1$; $z=0 \Rightarrow (-1,1,0,0)$

Para $y=0; t=1$, temos $x=0$; $z=1 \Rightarrow (0,0,1,1)$

Logo: $W_1 = [(-1,1,0,0),(0,0,1,1)]$

(y,z,t)

$(1,0,0)$

$(0,1,0)$

$(0,0,1)$

$W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z+t=0$

$\{x-y-z+t=0 \Rightarrow x = y+z-t$

Para $y=1; z=0; t=0$, temos $x=1 \Rightarrow (1,1,0,0)$

Para $y=0; z=1, t=0$, temos $x=1 \Rightarrow (1,0,1,0)$

Para $y=0, z=0, t=1$, temos $x=-1 \Rightarrow (-1,0,0,1)$

Logo, temos $W_2 = [(1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)]$

a) $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0; z-t=0, x-y-z+t=0\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ z-t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \to L_1 - L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_2 \to L_2\left(\tfrac{1}{2}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - L_2 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 + \frac{1}{2} L_3 \\ L_2 \to L_2 - \frac{1}{2} L_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo: $x=0$; $y=0$; $z=t$

Para $t=1$, temos: $x=0, y=0, z=1, t=1$

$W_1 \cap W_2 = [(0,0,1,1)]$

b) $[(0,0,1,1)]$

c) $W_1 + W_2 = [(-1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)]$

d) Não pois $\exists\ W_1 \cap W_2$

e) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4 = ?$ sendo: $W_1 + W_2 =$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \to L_1 + L_3 \\ L_4 \to L_1 + L_4 \\ L_5 \to L_1 - L_5 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \to 2L_4 - L_2 \\ L_5 \to 2L_5 - L_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to -1L_1 \\ L_2 \to L_2\left(\frac{1}{2}\right) \\ \\ L_4 \to \frac{1}{2} L_4 \\ L_5 \to -\frac{1}{2} L_5 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \to L_2 + L_1 \\ \\ L_3 \to L_3 - L_5 \\ L_4 \to L_4 - L_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_4 \to -1L_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$\ldots \; 0 \; 0 \; 0 \; 1 \;] \; L_5 \to L_5 - 2L_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$