EDO 2 – s3 e 4

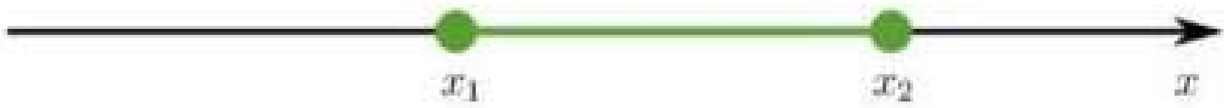
segunda-feira, 27 de fevereiro de 2023 21:27

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 1 – Lista 5

1) A descrição quântica dos fenômenos subatômicos é probabilística. Considere um oscilador harmônico quântico unidimensional, onde partícula subatômica de massa m se movimenta no eixo x sob a ação de um potencial da forma $V(x) = m\omega^2 x^2/2$, que é o potencial do sistema massa-mola com frequência ω.



A probabilidade de encontrarmos a partícula no intervalo (x_1, x_2) é proporcional à integral

$$\int_{x_1}^{x_2} X(x)^2 \, dx$$

onde a função $X(x)$ satisfaz a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} X''(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 X(x) = E X(x)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π e E é a energia do oscilador. Por simplicidade, vamos supor que $m = \hbar = \omega = 1$ de modo que

$$X''(x) + (2E - x^2) X(x) = 0$$

a) Escrevendo $X(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} y(x)$, mostre que $y(x)$ satisfaz $y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0$, conhecida como equação de Hermite, onde $\lambda = E - 1/2$.

b) Escrevendo a solução como o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n do polinômio $-2xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$. Use a equação de Hermite para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

c) Para $\lambda = 6$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

d) Para $\lambda = 7$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

2) Pelo Exercício 5, para descrever a posição do elétron no átomo de hidrogênio, precisamos resolver a equação de Laguerre

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + (\nu + \lambda)y(x) = 0$$

O objetivo desse exercício é investigar as soluções dessa equação usando séries de potências.

a) Escrevendo a solução como o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n e q_n dos polinômios $(1 - x)y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e também $xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

b) Use o item anterior e a equação de Laguerre para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

c) Verifique que, quando $\nu + \lambda$ é um inteiro, então $y(x)$ é um polinômio de grau $\nu + \lambda$.

d) Supondo $y(0) = 1$ e $\nu + \lambda = 1$, determine $y(x)$.

e) Supondo $y(0) = 6$ e $\nu + \lambda = 3$, determine $y(x)$.

3) Pelo Exercício 6, para descrever a posição do elétron no átomo de hidrogênio, precisamos resolver a equação de Legendre

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda(\lambda+1)y(x) = 0$$

O objetivo desse exercício é investigar as soluções dessa equação usando séries de potências.

a) Escrevendo a solução como o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n e q_n dos polinômios $-2xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e também $(1-x^2)y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

b) Use o item anterior e a equação de Legendre para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

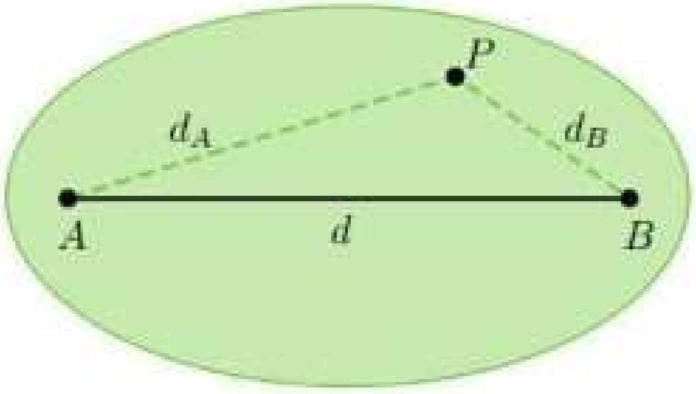
c) Para $\lambda = 6$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

d) Para $\lambda = 7$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

4) A temperatura de equilíbrio $T(P)$ em um ponto P de uma chapa elíptica feita com um material uniforme pode ser escrita em função das coordenadas elípticas confocais (x, t) de P dadas por

$$x = \frac{d_A - d_B}{d} \qquad t = \frac{d_A + d_B}{d},$$

onde d é a distância entre os focos A e B da elipse, d_A é a distância entre P e A e d_B é a distância entre P e B.



Temos que x varia em $[-1, 1]$ e que t varia em $[1, 2R/d]$, onde R é o raio maior da elipse. Note que o conjunto dos pontos tais que t é constante formam uma elipse. Escrevendo a temperatura em P como produto de duas funções $T(P) = y(x)z(t)$, é possível mostrar que as funções $y(x)$ e $z(t)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\frac{(1-x^2)y''(x) - xy'(x)}{-y(x)} = \lambda^2 = \frac{(1-t^2)z''(t) - rz'(t)}{-z(t)}$$

onde λ é um inteiro positivo. Segue que $y(x)$ satisfaz a equação Tchebychev

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \lambda^2 y(x) = 0$$

a) Escrevendo a solução como o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n e q_n dos polinômios $-xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e também $(1-x^2)y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

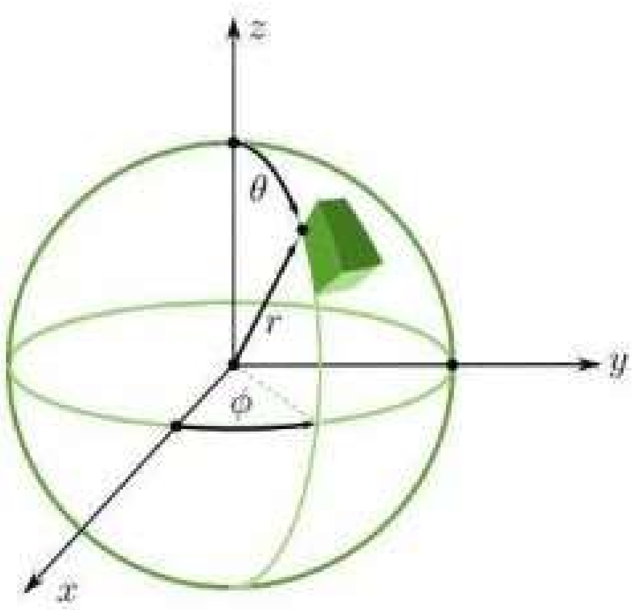
b) Use o item anterior e a equação de Tchebychev para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

c) Para $\lambda = 6$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

d) Para $\lambda = 7$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

5) **(Desafio)** No átomo de hidrogênio, a posição do elétron é dada em coordenadas esféricas por (r, θ, ϕ), onde r é a distância do elétron ao núcleo, θ é o ângulo polar e ϕ é o ângulo azimutal. A probabilidade do elétron estar na região de coordenadas (r, θ, ϕ) com $r \in (r_1, r_2)$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ e $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ é proporcional a

$$\int_{r_1}^{r_2} R(r)^2\,dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta(\theta)^2\,d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \Phi(\phi)^2\,d\phi$$



onde $R(r)$ satisfaz a equação

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2 R'(r)\right)' - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} - E\right) = \lambda(\lambda+1)$$

onde m é a massa do elétron, $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π, e é a carga elétrica do próton, ϵ_0 é a permissividade no vácuo, $E < 0$ é a energia do elétron e λ é um inteiro denominado número quântico orbital. O objetivo desse exercício é mostrar que $R(r)$ é determinada pela equação de Laguerre, que será resolvida por séries de potências no próximo exercício.

a) Seja $S(x)$ solução da equação

$$x^2 S''(x) + 2xS'(x) + \left(2\nu x - x^2 - \lambda(\lambda+1)\right) S(x) = 0$$

Mostre que $R(r) = S(\kappa r)$ é solução da equação do enunciado, onde

$$\kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \qquad \text{e} \qquad \nu = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}$$

b) Seja $z(x)$ solução da equação de Laguerre associada

$$xz''(x) - 2(\lambda - x + 1)z'(x) + 2(\nu - \lambda - 1)z(x) = 0$$

Mostre que $S(x) = x^\lambda e^{-x} z(x)$ é solução da equação do item anterior.

c) Mostre que

$$(xy'' + (1-x)y' + py)^{(q)} = xy^{(q+2)} + (1 - x + q)y^{(q+1)} + (p-q)y^{(q)}$$

onde p é uma constante, q é um inteiro positivo e $y^{(q)}$ é a derivada q-ésima de $y(x)$.

d) Seja $y(x)$ solução da equação de Laguerre

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + (\nu+\lambda)y(x) = 0$$

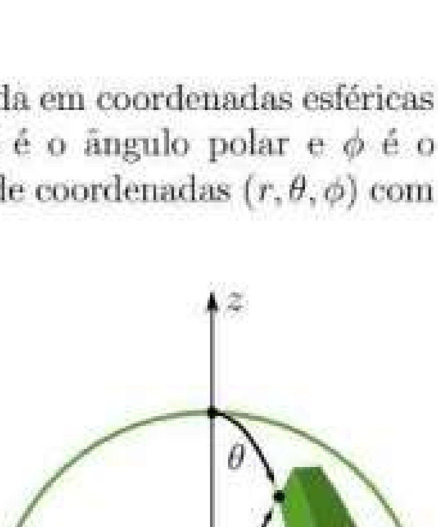
Use o item anterior com $p = \nu + \lambda$ e $q = 2\lambda + 1$, para mostrar que

$$z(x) = y^{(2\lambda+1)}(2x)$$

é solução da equação de Laguerre associada.

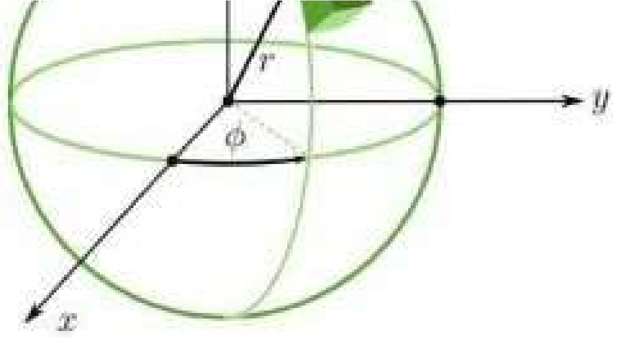
6) **(Desafio)** No átomo de hidrogênio, a posição do elétron é dada em coordenadas esféricas por (r, θ, ϕ), onde r é a distância do elétron ao núcleo, θ é o ângulo polar e ϕ é o ângulo azimutal. A probabilidade do elétron estar na região de coordenadas (r, θ, ϕ) com $r \in (r_1, r_2)$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ e $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ é proporcional a

$$\int_{r_1}^{r_2} R(r)^2\,dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta(\theta)^2\,d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \Phi(\phi)^2\,d\phi$$



Temos que $\Theta(\theta)$ satisfaz a equação

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\left(\ \mathrm{sen}(\theta)\left(\ \mathrm{sen}(\theta)\Theta'(\theta)\ \right)'\ \right) + \lambda(\lambda+1)\,\mathrm{sen}^2(\theta) = \mu^2$$



onde λ e μ são inteiros denominados números quânticos, respectivamente, orbital e magnético.
O objetivo desse exercício é mostrar que $\Theta(\theta)$ é determinada pela equação de Legendre, que será resolvida por séries de potências no próximo exercício.

a) Desenvolva a equação do enunciado e obtenha que

$$\Theta''(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}\Theta'(\theta) + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{\mathrm{sen}^2(\theta)}\right)\Theta(\theta) = 0$$

b) Seja $z(x)$ solução da equação de Legendre associada

$$(1-x^2)z''(x) - 2xz'(x) + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right)z(x) = 0$$

Mostre que $\Theta(\theta) = z(x)$, onde $x = \cos(\theta)$, é solução da equação do item anterior.

c) Seja $y(x)$ solução da equação de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$$

Mostre que

$$(1-x^2)y^{(\mu+2)} - 2(\mu+1)xy^{(\mu+1)} + (\lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1))y^{(\mu)} = 0$$

d) Seja $y(x)$ solução da equação de Legendre. Use o item anterior para mostrar que

$$z(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu)}(x)$$

é solução da equação de Legendre associada.

② $x \cdot y''(x) + (1-x)\, y'(x) + (\nu+\lambda)\, y(x) = 0$

a) $(1-x)\, y'(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1) \cdot x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -x^1 \cdot C_{n+1}(n+1) \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -C_{n+1}(n+1) \cdot x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -C_n(n) \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+1}(n+1) - C_n(n)\right) \cdot x^n$$

$$x\, y''(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1)\, x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1)\, x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1)\, n \cdot x^n$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(C_{n+1}(n+1)(n)\right) + \left(C_{n+1}(n+1)\right) - \left(C_n(n)\right) + (\nu+\lambda) \cdot C_n\right) \cdot \left(x^n\right)\right) = 0$

$$C_{n+1}(n+1)(n) + C_{n+1}(n+1) - C_n(n) + (\nu+\lambda)\, C_n = 0$$

$$C_{n+1}(n+1)(n+1) = C_n(n) - (\nu+\lambda)\, C_n$$

$$C_{n+1}(n+1)^2 = C_n\,(n - (\nu+\lambda)$$

$$C_{n+1} = \frac{n - (\nu-\lambda)}{(n+1)^2} \cdot C_n$$

c) $\nu + \lambda$ = inteiro

Zera quando . . .

$$C_{(\nu+\lambda)+1} = \overbrace{\nu+\lambda - (\nu+\lambda)}^{=0}\; C_{\ldots} = 0$$

$$C_{(v+\lambda)+1} = \frac{\ldots}{(v+\lambda+1)^2} \cdot C_{v+\lambda} = \ldots$$

$$C_{(v+\lambda)+2} = \frac{v+\lambda-(v-\lambda)}{(v+\lambda+2)^2} \cdot C_{v+\lambda}$$

$$\vdots$$

$$y(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 \cdot x^3 + \ldots + C_{v+\lambda} \cdot x^{v+\lambda}$$

d) $y(0) = 1$ e $v+\lambda = 1$, $y(x)$

$C_0 = 1$

$$C_{0+1} = \frac{(n-1)}{(n+1)^2} \cdot C_0 \rightarrow \frac{(0-1)}{(0+1)^2} \cdot 1 = \underline{-1}$$

$$C_{1+1} = \frac{\overbrace{(1-1)}^{0}}{(1+1)^2} \cdot C_1 \qquad \therefore \boxed{y(x) = 1 - x}$$

e) $y(0) = 6$ e $v+\lambda = 3$

$$C_{n+1} = \frac{n-(v-\lambda)}{(n+1)^2} \cdot C_n$$

$C_0 = 6$

$$C_1 = C_{0+1} = \frac{(n-3)}{(0+1)^2} \cdot C_0 \rightarrow \frac{-3 \cdot 6}{1} = -18$$

$$\boxed{y(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3}$$

$$C_2 = C_{1+1} = \frac{(1-3)}{(1+1)^2} \cdot -18 = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{4}} \cdot \cancel{-18}^{\,9} = 9$$

$$C_3 = C_{2+1} = \frac{(2-3)}{(2+1)^2} \cdot 9 = \frac{-1}{9} \cdot 9 = -1$$

$$C_4 = C_{3+1} = 0$$

3 $(1-x^2)\, y''(x) - 2x\, y'(x) + \lambda(\lambda+1) \cdot y(x) = 0$

a) $$\lambda(\lambda+1) \cdot y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(\lambda+1) C_n \cdot x^n$$

$$-2x\, y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -2 \cdot x^1 \cdot C_n \cdot (n) \cdot x^{n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} -2\, C_n (n) \cdot x^n$$

$$(1-x)^2\, y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^2 \cdot C_{n+2}(n+2)(n+1)\, x^n$$

$$= \sum^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1)\, x^n + \sum^{\infty} -C_{n+2}(n+2)(n+1)\, x^{n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1) \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -C_{n+2}(n+2)(n+1)\, x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1) \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -C_n \cdot (n)(n-1) \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+2}(n+2)(n+1) - C_n(n)(n-1) \right) x^n$$

b) $\lambda(\lambda+1) C_n - 2 \cdot C_n(n) + C_{n+2}(n+2)(n+1) - C_n(n)(n-1) = 0$

$$C_{n+2} = \frac{2C_n(n) + C_n(n)(n-1) - \lambda(\lambda+1) C_n}{(n+2)(n+1)}$$

$$C_{n+2} = \frac{\cancel{2}n + n^2 \cancel{-n} - \lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)} \cdot C_n$$

$$C_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)} \cdot C_n$$

c) $\lambda = 6$

$$C_{n+2} = \frac{n(n+1) - 6(6+1)}{(n+2)(n+1)} \rightarrow C_{n+2} = \frac{n(n+1) - 6 \cdot 7}{(n+2)(n+1)} \cdot C_n$$

$y_1(x) = 1 + 0 + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 + \dots$

$C_0 = 1 \rightarrow C_2 = -21,\ C_4 = 63,\ C_6 = -231/5,\ C_8 = 0 \dots 0$

$C_1 = 0 \rightarrow C_3 = 0 \dots$

$$\boxed{y_1(x) = 1 - 21x^2 + 63x^4 - \frac{231}{5}x^6}$$ $\rightarrow$ Polinômio
Função par

$$C_2 = C_{0+2} = \frac{n(n+1) - 6 \cdot 7}{(n+2)(n+1)} \cdot C_0 \rightarrow \frac{0 - \overset{3}{\cancel{6} \cdot 7}}{\cancel{(2)}(1)} \cdot 1 \rightarrow -21$$

$$C_4 = C_{2+2} = \frac{2(2+1) - 6 \cdot 7}{(4)(3)} \cdot -21 \rightarrow \frac{(6-42)}{12}(-21) \rightarrow -3 \cdot -21 = \underline{63}$$

$$C_6 = C_{4+2} = \frac{4(4+1) - 42}{(6)(5)} \cdot (-21) \rightarrow \frac{\overbrace{20-42}^{22}}{30} \cdot 63 \rightarrow \frac{-11}{5} \cdot 21 = \boxed{\frac{-231}{5}}$$

$$C_8 = C_{6+2} = \frac{\overbrace{6(7) - 42}^{0}}{(8)(7)} \cdot \frac{-231}{5} \rightarrow 0$$

$y_2(x) = 0 + 1 + C_2x^2 + C_3 \cdot x^3 + \dots$

$C_0 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \ \dots \ 0$

$C_1 = 1 \rightarrow$

$C_3 = C_{1+2} = \frac{n(n+1) - 6 \cdot 7}{(n+2)(n+1)} C_1 \rightarrow \frac{2 - 42}{6} \cdot 1 \rightarrow \frac{-40}{6} = \frac{-20}{3}$

$\left.\begin{matrix} 3(4) \\ 5(6) \\ 7(8) \end{matrix}\right\}$ Não zera $\therefore$ $\boxed{y_2(x) \text{ NÃO É POLINÔMIO}}$

d) $\lambda = 7$ $\qquad C_{n+2} = \frac{n(n+1) - 7 \cdot 8}{(n+2)(n+1)} \cdot C_n$

$C_0 = 1$
$C_1 = 0$
PAR

$\left.\begin{matrix} 2(3) \\ 4(5) \\ 6(7) \\ 8(9) \end{matrix}\right| \neq 0$ $\qquad$ $y_1(x)$ NÃO É POLINÔMIO

FUNÇÃO ÍMPAR

$y_2(x) = 0 +$
$C_0 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \ \dots$
$C_1 = 1$

$$\boxed{y_2(x) = x - 9x^3 + \frac{99}{5} \cdot x^5 - \frac{429}{35} x^7}$$

$C_3 = C_{1+2} = \frac{n(n+1) - 7 \cdot 8}{(n+2)(n+1)} \cdot C_1 \rightarrow \frac{2 - 56}{3 \cdot 2} \cdot 1 \rightarrow -\frac{54}{(3)(2)} = -\frac{27}{3} = -9$

$C_5 = C_{3+2} = \frac{3(4) - 7 \cdot 8}{(5)(4)} \cdot C_3 \rightarrow \frac{\overbrace{12 - 56}^{44}}{20} \cdot (-9) = -\frac{11}{5} \cdot -9 = \frac{99}{5}$

$C_7 = C_{5+2} = \frac{5(6) - 7 \cdot 8}{(7)(6)} \cdot C_5 \rightarrow \frac{30 - 56}{7 \cdot 6} \cdot \frac{99}{5} \rightarrow \frac{-\cancel{26}^{13}}{7 \cdot \cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{99}^{33}}{5} = \frac{429}{35}$

$C_9 = C_{7+2} = \frac{7(8 - 7 \cdot 8}{(9)(8)} \cdot C_7 = 0 \ \dots$

④ $(1-x^2)\, y''(x) - x\, y'(x) + \lambda^2\, y(x) = 0$

$$\lambda^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^2 C_n \cdot x^n$$

$$-x \cdot y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -C_n \cdot (n)\, x^n$$

$$(1-x^2)\, y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1) \cdot x^n - C_n(n-1)(n)\, x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+2}(n+2)(n+1) - C_n(n)(n-1) \right) x^n$$

b) $C_{n+2}(n+2)(n+1) - C_n(n)(n-1) - C_n(n) + \lambda^2 C_n = 0$

$$C_{n+2} = \frac{n^2 - \lambda^2}{(n+2)(n+1)} \cdot C_n$$

c) $\lambda = 6$

$C_{n+2} = \dfrac{n^2 - 36}{(n+2)(n+1)}\, C_n \to n = 6 \to$ zera

$y_1(x)$

$C_0 = 1$

$C_1 = 0 \to C_3 = 0 \ldots$

C

$\vdots$