TERCEIRA AVALIAÇÃO DE INTRODUÇÃO À ALGEBRA LINEAR

TURMA MAT003 – T02A - Prof Luiza Yoko Taneguti – 27/10/2021

Raquel Temóteo Eucaria Pereira da Costa / 202045268

ORIENTAÇÕES IMPORTANTES:

1. Esta avaliação é **individual e remota.**
2. Nesta avaliação só será verificado a **resposta final**(nas questões 03 a 05) e a resposta completa (questões 01 e 02).
3. Esta avaliação terá a duração de 1:50h no máximo. Ao concluir envie uma foto PDF de volta no ambiente do Moodle.
4. A presença nesta avaliação será dada pelo ENVIO DA SOLUÇÃO DA MESMA.
5. Caso dê problema no envio do seu documento ou no equipamento ou na internet ou algum problema de saúde no momento da execução desta avaliação, a sua participação fica como sendo AUSENTE e você deverá realizar a prova REPOSITIVA(03/11/2021).

Nesta parte subjetiva, questões 01 e 02, faça TODOS OS CÁLCULOS E OS ESCREVA PASSO A PASSO, para que seja validado a correção. Não será admitido APENAS a resposta final.

<u>Questão 01(4,0)</u>:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $e\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrizes inversíveis

a) (0,5) Calcule AB e BA
b) (1,0) Calcule os autovalores de AB e BA, conclua sobre o resultado
c) (1,5) Calcule os autovetores de AB e BA, conclua sobre o resultado
d) (1,0) Mostre que se λ é um autovalor de AB com autovetor $\vec{v}$, então λ é autovalor de BA com autovetor $B\vec{v}$ e da mesma forma que se γ é um autovalor de BA com autovetor $\vec{w}$, então γ é autovalor de AB com autovetor $A\vec{w}$

<u>Questão 02(3,0)</u>: " esta questão é para quem faltou no dia 03/07/2019"

Consideremos o espaço vetorial P_2, conhecido como *Polinômios de Legendre*, com

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t) dt$$

a) (1,5) Prove que $\langle p, q \rangle$ é um produto interno do subespaço gerado por *{1,1- t}*.
b) (1,5) Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base canônica *{ 1, 1-t, t^2}* de P_2 numa base ortogonal.

1

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1+0+0 & 3+4+0 & 1+0+3 \\ 0+0+0 & 0-2+0 & 0+0+3 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1+0+0 & 2-3+0 & 1+3-1 \\ 0+0+0 & 0-2+0 & 0+2+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

b) A.B

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \left\| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 7 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0 \rightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -2$
$\lambda_3 = -3$

Autovalores distintos ∴ diagonalizavel

Autovalores de A.B e B.A são os mesmos

B.A

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \left\| \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0 \rightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -2$
$\lambda_3 = -3$

c) A.B

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

x qualquer

$$\begin{cases} \cancel{x} + 7y + 3z - \cancel{x} = 0 \rightarrow 7y + 3z = 0 \\ -2y + 3z - y = 0 \rightarrow -3y + 3z = 0 \rightarrow \boxed{y = 0} \\ -3z - z = 0 \rightarrow -4z = 0 \rightarrow \boxed{z = 0} \end{cases}$$

$V_1 = (x, 0, 0)$

$\lambda_2 = -2$

$$\begin{cases} x + 7y + 3z + 2x = 0 \rightarrow 3x + 7y = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{-7y}{3}} \\ -2y + 3z + 2y = 0 \rightarrow 0y = 0 \therefore y \text{ qualquer} \\ -3z + 2z = 0 \rightarrow -z = 0 \rightarrow \boxed{z = 0} \end{cases}$$

$V_2 = (-\frac{7}{3}y, y, 0)$

$\lambda_3 = -3$

$$\begin{cases} x + 7y + 3z + 3x \rightarrow 4x + 7y + 3z = 0 \\ -2y + 3z + 3y = 0 \rightarrow y + 3z = 0 \rightarrow \boxed{y = -3z} \\ -3z + 3z = 0 \rightarrow 0z = 0 \end{cases}$$

z qualquer

$4x + \underbrace{7(-3z)}_{-21z} + 3z = 0$
$4x - 18z \rightarrow \boxed{x = \frac{18z}{4}}$

$V_3 = (\frac{18}{4}z, -3z, z)$

Autovetores de A.B e B.A com $\lambda_1 = 1$ são iguais os demais são diferentes.

V_1 tem x qualquer
$V_2 \rightarrow$ y qualquer
$V_3 \rightarrow$ z qualquer
} em A.B e B.A

1) c) B.A

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

x qualquer

$$\begin{cases} \cancel{x} - y + 3z - \cancel{x} = 0 \rightarrow -y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0} \\ -2y + 2z - y = 0 \\ -3z - z = 0 \rightarrow \boxed{z = 0} \end{cases}$$

$V_1 = (x, 0, 0)$

$\lambda_2 = -2$

y qualquer

$$\begin{cases} x - y + 3z + 2x = 0 \rightarrow 3x - y = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{y}{3}} \\ -\cancel{2y} + 2z + \cancel{2y} = 0 \rightarrow z = 0 \\ -3z + 2y = 0 \end{cases}$$

$V_2 = (1/3\,y, y, 0)$

$\lambda_3 = -3$

$$\begin{cases} x - y + 3z + 3x = 0 \rightarrow 4x + 2z + 3z = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{5z}{4}} \\ -2y + 2z + 3y = 0 \rightarrow \boxed{y = -2z} \\ -3z + 3z = 0 \rightarrow 0z = 0 \end{cases}$$

z qualquer

$V_3 = (5/4\,z, -2z, z)$

d)

Não deu tempo

2 a) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$

Base $\{1, 1-t\}$ de P2

i) ✓ $\langle v, v \rangle \geq 0$

$\langle p, p \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt = t \Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1) = \underline{2}$

$\langle q, q \rangle = \int_{-1}^{1} (1-t)(1-t)\, dt = \int_{-1}^{1} (1 - 2t + t^2)\, dt = t - t^2 + \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^{1}$

$= 1 - (1)^2 + \frac{(1)^3}{3} - \left(-1 - (-1)^2 - \frac{(1)^3}{3}\right) = \frac{1}{3} + 2 = \boxed{\frac{8}{3}}$

ii) ✓ $\langle \alpha p, q \rangle = \int_{-1}^{1} \alpha \cdot 1 \cdot (1-t)\, dt \longrightarrow \alpha \int_{-1}^{1} \overbrace{1(1-t)\, dt}^{\langle p, q \rangle} \longrightarrow \underline{\alpha \langle p, q \rangle}$

iii) ✓ Seja $r = t^2 \in P2$:

$\langle p+q, r \rangle = \langle 1 + (1-t), t^2 \rangle = \int_{-1}^{1} [1 + (1-t)] \cdot t^2\, dt =$

$\underbrace{\int_{-1}^{1} (1-t) \cdot t^2\, dt}_{\langle (1-t), t^2 \rangle} + \underbrace{\int_{-1}^{1} (1 \cdot t^2\, dt}_{\langle 1, t^2 \rangle} = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle$

iv) ✓ $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot (1-t)\, dt = \int_{-1}^{1} (1-t) \cdot 1\, dt \therefore \langle q, p \rangle$

É um produto interno, pois se encaixa nas 4 propriedades

b) $\beta = \{ \underbrace{1}_{u_1}, \underbrace{1-t}_{u_2}, \underbrace{t^2}_{u_3} \} \longrightarrow$ ortogonal

$$v_1 = \boxed{u_1 = 1}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 = 1 - t - \frac{\overbrace{\langle (1-t), 1 \rangle}^{\text{prop. i)} = 2}}{\underbrace{\sqrt{\langle 1, 1 \rangle}}_{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dt = t \big|_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2}^{\,2}} \cdot 1 = 1 - t - 1$$

$$\boxed{v_2 = -t}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 = t^2 - \frac{\overbrace{\langle t^2, 1 \rangle}^{\int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1 \, dt = \frac{t^3}{3}\big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}}}{2} \cdot 1 - \frac{\overbrace{\langle t^2, (1-t) \rangle}^{\int_{-1}^{1} t^2(1-t)\,dt = \frac{2}{3}}}{\underbrace{\sqrt{\langle (1-t), (1-t) \rangle}}_{\text{prop i)} = \frac{8}{3}}^{\,2}} \cdot (-t)$$

$$= t^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot (-t) \longrightarrow t^2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{8} t$$

$$\boxed{v_3 = t^2 - \frac{1}{3} + \frac{t}{4}}$$

Base ortogonal é $\left\{ 1, -t, \left(t^2 - 1/3 + t/4\right) \right\}$

Nessas questões objetivas de 03 a 05, marque APENAS UMA ALTERNATIVA. Insira a alternativa escolhida para cada questão num canto de sua avaliação.

QUESTÃO 03(1,0):

Analise as expressões abaixo, dê valores Correta (**C**) ou Errada (**E**) e assinale a alternativa que representa a sequência correspondente, de cima para baixo

(E) Se $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ então $\lambda = 0$

(E) Se $\vec{v} \perp \vec{w}$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{w}$ 90°

(E) Se o ângulo entre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é 180º então $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ (produto interno usual)

* (C) Se a $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ =1, para qualquer $\vec{v}$, (produto interno usual)

(C) um dos autovalores de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ é a

A sequência correta é:

a) C – C – E – E – E
b) E – E – C – E - C
c) E – E – E – C - E
d) E – E – E – E - C
e) C – E – E – C – C
~~**f)**~~ Nenhuma das anteriores

QUESTÃO 04 (1,0): *Questão de concurso público – CESPE - Petrobrás - Engenheiro de Petróleo*

É correto afirmar que a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) não é diagonalizável. ✗
b) possui apenas um auto-valor real. ✗
c) possui 2 auto-valores reais iguais. ✗
d) não possui auto-valores reais. ✗
~~**e)**~~ possui 3 auto-valores reais distintos.
f) nenhuma das anteriores

Autovalores

$A - \lambda \cdot I = 0$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$

$\left\| \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0$

$(-1-\lambda)(-4-\lambda)(1-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = -4$
$\lambda_3 = 1$

QUESTÃO 05 (1,0):

Quais os valores de a e b as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ abaixo são diagonalizáveis?

i. *a=1, b=1*
ii. *a=1, b=0*
iii. *a≠1, b=1*
~~**iv.**~~ *a≠1, b=0*
v. nenhuma das alternativas

$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \left\| \begin{bmatrix} 1-\lambda & b \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0 \rightarrow (1-\lambda)^2 = 0$

$\lambda = 1$

$\lambda = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x + b = x \rightarrow \boxed{b = 0} \\ y = y \rightarrow y = 0 \quad x \text{ qualquer} \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \left\| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & a-\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0$

$(1-\lambda)(a-\lambda) = 0 \therefore \lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = a$

$\lambda_1 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

$\begin{cases} x + y - x = 0 \rightarrow y = 0 \\ ay - y = 0 \quad x \text{ qualquer} \end{cases}$

$v_1 = (x, 0)$

$\lambda_2 = a$

$\begin{cases} x + y - ax = 0 \\ ay - ay = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = ax - x \rightarrow y = x(a-1) \\ 0\,ay = 0 \end{cases}$ $y \neq 0$, $x = 1$

$0 \neq a - 1$

$\boxed{a \neq 1}$