EDO 1 – s1 e 2

segunda-feira, 27 de fevereiro de 2023 21:27

Módulo 1 - Aula 1.0 - Panorama do Cálculo → Revisão do cálculo 1

Cálculo 2 ← Cálculo 1
↳ Matemática do movimento

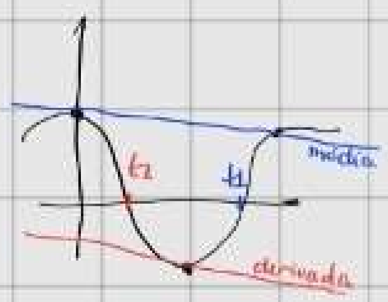
e no instante? → tende a zero

$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ → veloc. média

↓

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t)$

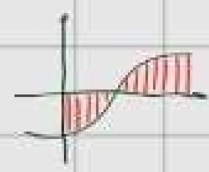
posição $s(t)$ $\xrightarrow{\text{derivada}}$ velocidade $v(t)$; $\xleftarrow{\text{integral}}$



T.V.M

Momento q a velocidade média = a velocidade instantânea

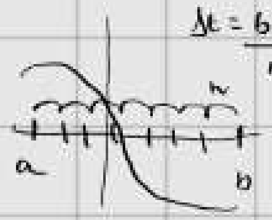
$\frac{s(b)-s(a)}{b-a} = v(t)\cdot(b-a)$



integral ⇝ ÁREA

$= \int_a^b v(t)\,dt$

$\Delta t = \frac{b-a}{n}$



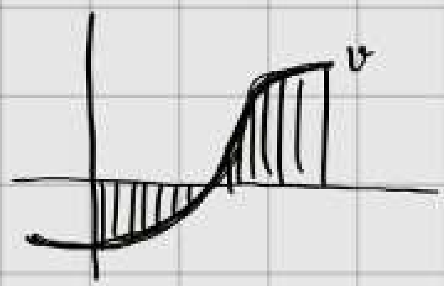
$= \underbrace{s(b) - s(c)}\overbrace{+ s(c)}^{\text{metade}} \underbrace{- s(a)} = v(t_1)\cdot(b-c) + v(t_2)\cdot(c-a)$

$= v(t_1)\cdot\Delta t + v(t_2)\Delta t + \dots + v(t_{n-1})\cdot\Delta t$

Cálculo 2

Movimento $v(t)$ ⇣ $s(t)$

$s(b)-s(a) = \int_a^b v(t)\,dt$



Por quê estudar matemática?

- Aplicações
- liberdade atrás da verdade

- Surgiu c/ os gregos: além das opiniões
  ↳ dedução: lógica
  ↳ o que é a verdade? → AXIOMAS
  ↳ enxergar: estético

Módulo 1 - Aula 1.01 - EDOs e EDPs → parciais ↳ vários variáveis

Equações diferenciais ordinárias ↳ 1 variável

Movimento

Equações diferenciais EDO

2ª LN → $m.a = F$

* O que C2 quer? dada a equação diferencial queremos chegar na incógnita

velocidade: $v(t)$ ⇐ → $m.\underbrace{v'(t)} = F$ → 1ª ordem (')

função incógnita ⟷ eq. diferencial (tem derivada)

⇐ RESOLVER EXPLICITAMENTE

velocidade: $s(t)$ → $m.s''(t) = F$ → 2ª ordem ('')

Exemplo **Queda livre**

$v(t) = ?$

EDO: $\cancel{m}.v'(t) = -\cancel{m}.g$

↓

$v'(t) = -g$

→ $s(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0 . t + D$ ← integral da velocidade ; 2 constantes arbitrárias

$t_0 \begin{cases} s(0) = D = s_0 \\ s'(0) = v_0 \end{cases}$ → condição inicial

$$\int v'(t)\,dt = \int -g\,dt$$

$$v(t) + A = -g\cdot t + B$$

$$v(t) = -g\cdot t + B - A = -g\cdot t + \underbrace{C}_{\text{constante}} =$$

$$= -g\cdot t + \underbrace{v_0}_{\text{constante arbitrária}}$$

$t=0 \quad v(0) = C = v_0$

→ Solução geral = infinitas soluções

Exemplos **Queda livre com atrito**

$$v(t) = ?$$

$$m\cdot v'(t) = -m\cdot g + F_{ar}$$

$$\cancel{m}\cdot v'(t) = -\cancel{m}\cdot g \underbrace{- b\cdot v(t)}_{\text{atrito}}$$

$$v'(t) = -g - c\cdot v(t)$$

$$\int v'(t) = \int -g - c\cdot v(t)$$

$$v(t) = -gt + A - C\cdot \underbrace{\int v(t)}_{S(t)=?}$$

$$v(t) = ?$$

Não dá para resolver desse jeito

Módulo 1 - Aula 1.02 → Simplificando a queda livre com atrito

- Edo: função incógnita, derivadas ordinárias (ordem)
- Solução: uma solução que satisfaz a equação
- Resolver: todas as funções que satisfazem = SOLUÇÃO GERAL = CONJUNTO DE SOLUÇÕES

  - Ex: $y'(t) = f(t) \rightarrow y(t) = \int f(t)\,dt \rightarrow \{y(t) : y'(t) = f(t)\}$

    edo — solução geral

    $= \{F(t) : F'(t) = f(t)\}$

    $= F(t) + c$

- Soluções especiais:
  - Equilíbrio → solução constante

    Ex: $v'(t) = -g$ — Tem sol. $v(t) = cte$? $0 = -g$ — não tem solução

    $v'(t) = -g \rightarrow v(t) = -gt + v_0$

Ex **Queda livre com atrito**

$$v(t) = ?$$

$$m\cdot v'(t) = -m\cdot g + F_{ar}$$

$$\cancel{m}\cdot v'(t) = -\cancel{m}\cdot g \underbrace{- b\cdot v(t)}_{\text{atrito}}$$

$$v'(t) = -g - c\cdot v(t)$$ → Tem solução de equilíbrio?

$$= -c\left(\frac{g}{c} + v(t)\right) \qquad \frac{g}{c} = -v_{eq}$$

$$= -c\left(-v_{eq} + v(t)\right)$$

$$v'(t) = -c\,\big(\underbrace{v(t) - v_{eq}}_{y(t)}\big)$$

$$y'(t) = -c\cdot y(t)$$

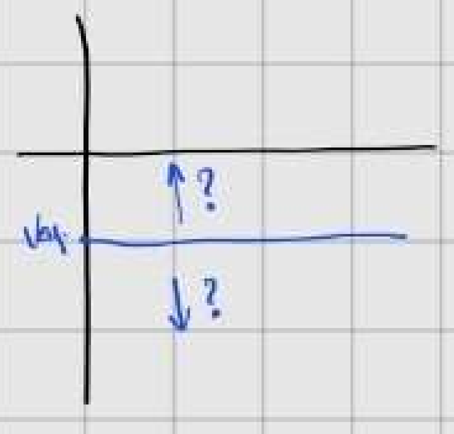
Solução de equilíbrio $v(t) = v_{eq}$? $= 0$

↳ $0 = -g - c\cdot v(t)$ — SIM

$0 = -c\left(\frac{g}{c} + v(t)\right)$ → Se $v_{eq} = \frac{-g}{c}$

$0 = -c\left(\frac{g}{c} + \left(\frac{-g}{c}\right)\right)$

$0 = 0$



Ex: $y'(t) = a \cdot y(t) \longrightarrow y(t) = ?$

a) $y(t) = e^{at}$ → e^{at} é solução

$(e^{at})' = a e^{at}$

b) $e^{at} + c$?

$(e^{at} + c)' = e^{at}$ + c faltou

c) $y_{eq} = 0$

$0 = a \cdot y_{eq} \therefore y_{eq} = 0$

d) $5e^{at}$?

$(5e^{at})' = 5a \cdot e^{at} = a(5e^{at})$ (multiplo é solução)

$y'(t) = -c\, y(t)$

multiplos

$\Rightarrow y(t) = A e^{-ct} = v(t) - v_{eq}$

$\Rightarrow v(t) = v_{eq} + A e^{-ct}$

$$\boxed{\Rightarrow v(t) = \frac{-g}{c} + A e^{-ct}}$$

Solução geral

Módulo 1 - Aula 1.03 → Explorando a queda livre com atrito

ORIGINAL $\boxed{y'(t) = a\, y(t)}$

SEPARADO $\boxed{\frac{y'(t)}{y(t)} = a}$

$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int a\, dt$ → $at + D$

↳ substituição

$y = y(t)$, $dy = y'(t) \cdot dt$

$\int \frac{1}{y} \cdot du$

$\rightsquigarrow \int \frac{1}{y} \cdot dy = at + D$

$\ln|y| + D = at + D$

$|y| = e^{at+D}$

$|y| = e^{at} \cdot e^{D}$ >0

$y = \underbrace{\pm e^{D}}_{\neq 0} e^{at}$

$$\boxed{y = C \cdot e^{at},\ C \neq 0}$$

Solução geral separada (2)

$\therefore$ solução geral da original (1) é

(1) $y = \{C \cdot e^{at}\ (C \neq 0), 0\}$

$= \boxed{C \cdot e^{at}}$ geral

solução de equilíbrio some, pois dividimos por zero

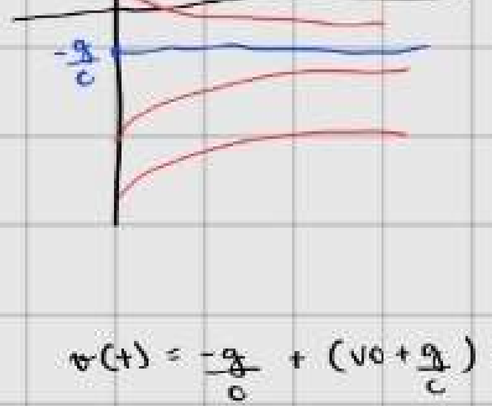
descobre ela antes de fazer isso

$\frac{y'(t)}{g(t)}$

Módulo 1 - Aula 1.04 → Resolvendo a queda livre com atrito

$$\boxed{v(t) = \frac{-g}{c} + A e^{ct}}$$

$\lim_{t \to \infty} v(t) =$



$\frac{-g}{c}$ = velocidade terminal

$t = 0$: $\underbrace{v(0)}_{v_0} = \frac{-g}{c} + A$ → $\boxed{A = v_0 - v_{eq}. \quad A = v_0 + \frac{g}{c}}$

condição inicial

constante arbitrária

$v(t) = \frac{-g}{c} + (v_0 + \frac{g}{c})\, e^{-ct}$; $v(t)_{\text{sem atrito}} = -gt + v_0$

A

$$= \lim_{c\to 0} \frac{-g}{c} + \left(v_0 + \frac{g}{c}\right) e^{-ct}$$

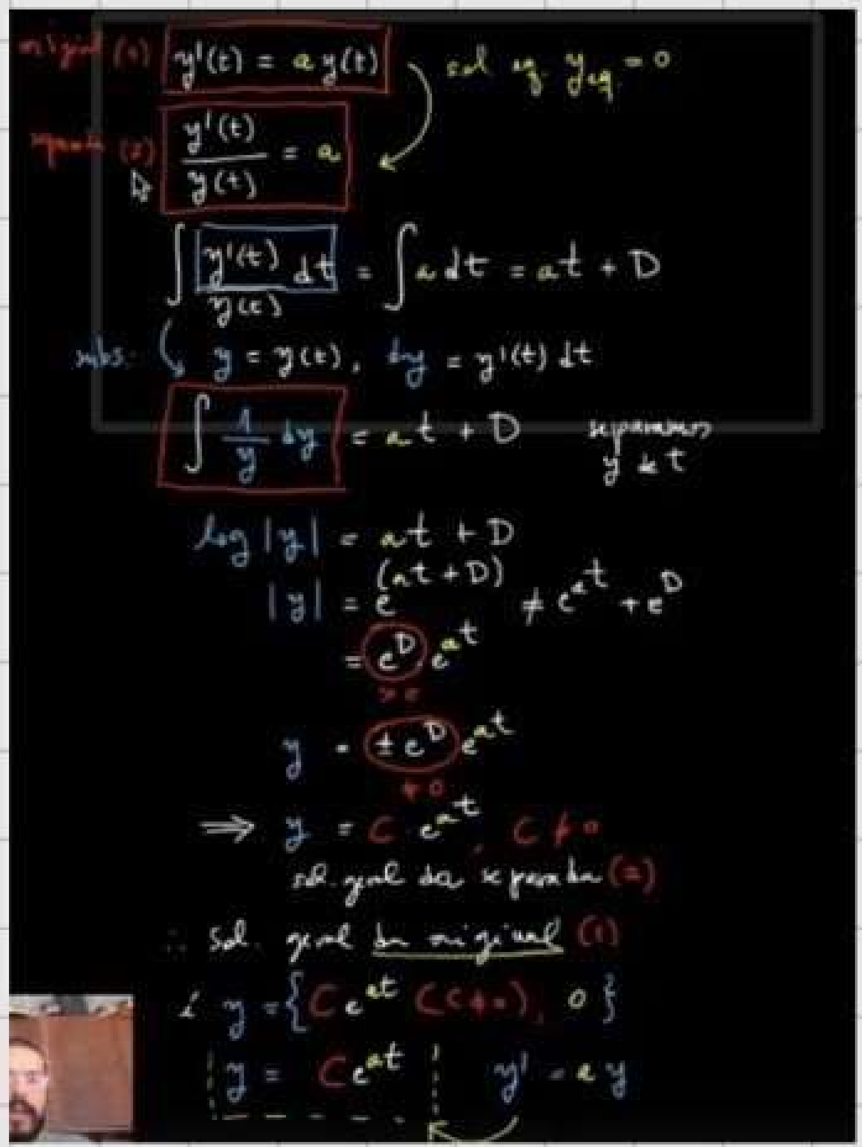
$$= \lim_{c\to 0} v_0 \cdot e^{-ct} + \frac{g}{c}\left(e^{-ct} - 1\right)$$ (derivada → l'Hôpital)

$$= v_0 + g \cdot \lim_{c\to 0} \left(\frac{e^{-ct} - 1}{c}\right)^{\frac{0}{0}}$$

$$= v_0 + g \cdot \lim_{c\to 0} \frac{-t \cdot e^{-ct}}{1} \rightarrow v_0 - gt$$

SEM ATRITO

Módulo 1 - Aula 1.05 → EDOs separáveis



EDOs 1ª ordem separáveis

1) Obter a solução de equilíbrio ⇝ $\boxed{f(y_{eq.}) = 0}$
y constante

2) Obter a solução geral da separada

$y'(t) = f(y(t))\, g(t)$ → ORIGINAL

$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t)$ → SEPARADA

$(g \neq 0)$

$$\int \frac{y'(t)\, dt}{f(y(t))} = \int g(t)\, dt$$

$$= \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)\, dt$$

$H(y) = g(t) + C$ } resolve isolando o y

$\boxed{y = \dots (g(t) + C)}$ sol. geral sep.

3) Obter a solução geral da original

⇝ junta solução geral separada + solução de equilíbrio

EDOs

lineares

- $y' = a \cdot y$
- $v' = -g - c \cdot v = -c(v - v_{eq.})$

$$\frac{v'}{v - v_{eq.}} = -c \qquad v_{eq.} = \frac{-g}{c}$$

$$\int \frac{dv}{v - v_{eq}} = -c \cdot t + A$$

$$\ln|v - v_{eq}| = -ct + A$$

$$|v - v_{eq}| = e^{-ct+A} = e^{-ct} \cdot e^{A} > 0$$

$$v - v_{eq.} = \pm e^{A} \cdot e^{-ct}, \quad \neq 0$$

$$\{v = v_{eq} + B \cdot e^{-ct},\ B \neq 0\}$$ SOLUÇÃO GERAL SEPARADA

$$\therefore \{v = v_{eq} + B\, e^{-ct}\}$$ ORIGINAL

Módulo 1 - Aula 1.06 → Exemplo: Decaimento Radioativo e Dinâmica Populacional

Decaimento radioativo $m(t) = m_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t}$

$\boxed{m'(t) \sim m(t) \rightarrow -\gamma\, m(t)}$, $\gamma > 0$

→ meia vida

$t^*: m(t^*) = \frac{1}{2} m(0)$

$m_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t^*} = \frac{1}{2} m_0$

$-\gamma \cdot t^* = \ln(1/2)$

$-\gamma \cdot t^* = -\ln(2)$

$\gamma = \dfrac{\log(2)}{t^*}$

Dinâmica Populacional

$p(t) = ?$

· crescimento malthusiano →

$p'(t) \sim p(t)$

→ relacionado a tx. de natalidade

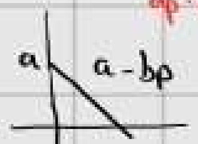
$p'(t) = a \cdot p(t)$

$p(t) = p_0 e^{at}$

↓ a VARIANDO

Logístico

$p'(t) = a(p) \cdot p(t)$



$p'(t) = (a - bp)p$

$p'(t) = ap - bp^2$

∴ não linear, mas separável

$\dfrac{p'}{(a-bp)p} = 1$

* ACHANDO A SOLUÇÃO GERAL

$a = b = 1 \qquad p' = (1-p)p \qquad p(t) = ?$

1) $(1-p)p = 0$

eq. $= \underline{p = 0;\ p = 1}$

$p = p(t)$

$dp = p'(t)\,dt$

integrando e substituindo

2) $\dfrac{p'}{(1-p)p} = 1$

$\displaystyle\int \underbrace{\frac{1}{(1-p)p}\,dp}_{\text{frações parciais}} = \int 1\,dt = t + c$

$\dfrac{1}{(1-p)p}dp = \dfrac{A}{1-p} + \dfrac{B}{p} = \dfrac{Ap + B(1-p)}{(1-p)p} \rightarrow 1 = Ap + B - Bp$

$1 = (\overset{0}{A - B})p + B \Rightarrow B = 1 = A$

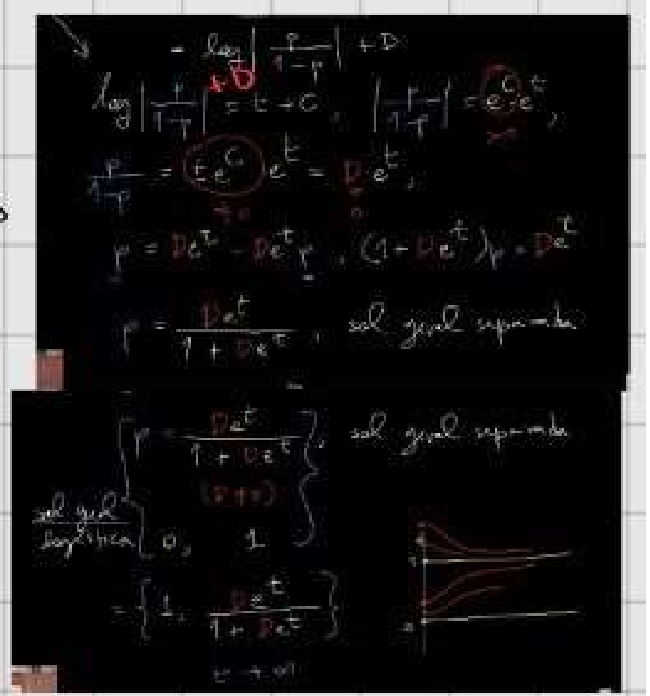
$\displaystyle\int \frac{1}{(1-p)p}dp = \int \frac{1}{1-p}dp + \int \frac{1}{p}dp$

$\displaystyle\int \frac{1}{(1-p)p}dp = -\ln|1-p| + \ln|p| + D$

$= \ln\left|\dfrac{1}{1-p}\right| + \ln|p| + D$

$= \ln\left|\dfrac{p}{1-p}\right| + D$

$\ln\left|\dfrac{p}{1-p}\right| + \overset{?}{D} = t + c$



Exercício

$\begin{cases} p' = (1-p)p \\ p(0) = p_0 \end{cases}$ + geogebra Calculator

Dexp(x)/(1+Dexp(x))

Aula de dúvida → 20/01

teste: equações de 1ª ordem → 1ª SEMANA
" " " lineares → 2ª SEMANA

Revisão Teórica

EDO separável de 1ª Ordem

$\boxed{y'(t) = F(t) \cdot G(y(t))}$

↳ precisa escrever como produto

1) Soluções constantes (sol equilíbrio)
↳ pode existir ou não

$y(t) = c \Rightarrow \boxed{0 = F(t) \cdot G(c)}$

· Não existe:

EDO linear de 1ª ordem

$a_1(t)\, y'(t) + a_2(t)\, y(t) = f(t)$

$\boxed{y'(t) + p(t) \cdot y(t) = g(t)}$

SOLUÇÃO GERAL

$y(t) = c(t)\, e^{-P(t)}$

2) Separar

$$\frac{y'(t)}{G(y(t))} = F(t)$$

3) Integrar

$$\int \frac{y'}{G(y(t))}\,dt = \int F(t)\,dt$$

4) Isolar

Equação algébrica

$$C(t) = \int g(t)\, e^{P(t)}\,dt$$

$$P(t) = \int p(t)\,dt \quad \text{SEM CONSTANTE}$$

(*) CONSTANTE

$y' = t^3 \cdot e^y$

$t^3 \cdot e^y = 0$

↳ ñ existe valor 0

∴ C zero não existe nesse caso

Equações separáveis (EX)

✓ • $y' - t^3 y(t)^2 =$

$y' = t^3 \cdot y^2$

• $y' - t^3 \cdot y(t)^2 = t^2$

$y' = t^2 + t^3 \cdot y^2$

$y' = t^2 (t \cdot y^2)$ ✗

✓ • $y'(t) - t^3 y(t)^2 = t^3$

$y' = t^3 + t^3 y^2$

$y' = t^3 (1 + y^2)$

Exemplo resolvendo:

$$y' = t^3 \cdot y^2$$

① CONSTANTE

$y(c)' = 0$

∴

$t^3 \cdot y(c) = 0$

$t^3 \cdot 0 = \boxed{0}$

② SEPARAR

$$\frac{y'}{y^2} = t^3$$

③ INTEGRAR

$$\int \frac{y(t)'}{y(t)^2}\,dt = \int t^3\,dt$$

$$\int \frac{y(t)'}{y(t)^2}\,dt = \frac{t^4}{4} + A$$

$y = u$
$y' = du$

$$\int \frac{du}{u^2} = \frac{t^4}{4} + A$$

$$\int u^{-2}\,du$$

$$\frac{u^{-1}}{-1} + B = \frac{t^4}{4} + A$$

$$-\frac{y(t)^{-1}}{1}\, B = \frac{t^4}{4} + A$$

$$-\frac{1}{y(t)} + B = \frac{t^4}{4} + D$$ equação algébrica ↳ s/ derivada

④ ISOLAR

$$-\frac{1}{y(t)} + B = \frac{t^4}{4} + A$$

$$-\frac{1}{y(t)} = \frac{t^4}{4} + \overbrace{A - B}^{c}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{t^4/4 + C}}$$

infinitas soluções

Revisão Teórica

EDO Separável de 1ª Ordem

$\boxed{y'(t) = F(t)\,G(y(t))}$

1) Soluções constantes

$y(t) \overset{?}{=} c \overset{EDO}{\Rightarrow} 0 = F(t)\,G(c)$

2) Separar: $\dfrac{y'(t)}{G(y(t))} = F(t)$

3) Integrar $\displaystyle\int \frac{y'(t)\,dt}{G(y(t))} = \int F(t)\,dt$

4) Isolar Eq Algébrica

EDO Linear de 1ª Ordem

$a_1(t)\, y'(t) + a_2(t)\, y(t) = f(t)$

$\boxed{y'(t) + p(t)\, y(t) = g(t)}$

$y(t) = c(t)\, e^{-P(t)}$ sol geral

$c(t) = \int g(t)\, e^{P(t)}\,dt$

$P(t) = \int p(t)\,dt$ SEM CONST

Revisão Teórica

1 única variável

EDO Separável de 1ª Ordem

$\boxed{y'(t) = F(t) \cdot G(y(t))}$ ① ①

1) Soluções constantes

$y(t) \overset{?}{=} c \overset{EDO}{\Rightarrow} 0 = F(t)\,G(c)$

2) Separar $\dfrac{y'(t)}{G(y(t))} = F(t)$

3) Integrar $\displaystyle\int \frac{y'(t)\,dt}{G(y(t))} = \int F(t)\,dt$

4) Isolar Eq Algébrica

* Como saber que é separável?
  ↳ Ao isolar o y' da incógnita é possível separar as funções por produto.
  ↳ Uma função dependente da incógnita (y) e de (t).

1) Solução de equilíbrio = função constante = Derivada de constante = 0
  ↳ Achar os "c" que zeram a função
  ↳ $0 = F(t) \cdot G(t)$

(EX) F(t) G(t)

$y' = t^3 \cdot y^2$

$y(t) = c \rightarrow y'(t) = 0$

$0 = t^3 \cdot c^2 \rightarrow \boxed{c = 0}$

2) Separar: $y' = t^3 \cdot y^2 \rightarrow \boxed{\dfrac{y'}{y^2} = t^3}$

3) Integrar: $\displaystyle\int \frac{y'}{y^2}\,dt = \int t^3\,dt$

subs

$$= \frac{t^4}{4} + A$$

→ EDO é onde a incógnita é uma função ① e a derivada da função ②

→ Derivada em relação ao tempo = tx. de variação instantânea

Questão 3

d) $y'(t) - t^2 \cdot y(t) = 0$

$y'(t) = t^2 \cdot y(t)$

① $y'(c) = 0$

$t^2 \cdot y(c) = 0$

$t^2 \cdot 0 = 0$

$\boxed{\text{sol. eq} = 0}$

② $\frac{y'}{y} = t^2$

③ $\int \frac{y'}{y} dt = \int t^2 \cdot dt$

$\int u^{-1} du = \frac{t^3}{3} + A$

$\int t^a \cdot dt = \frac{t^{a+1}}{a+1} + A$, $a \neq -1$

ou $\log|t| + A$, $a = -1$

$\log|y(t)| + B = \frac{t^3}{3} + A$

④ $\log|y(t)| = \frac{t^3}{3} + C$

$|y(t)| = e^{\frac{t^3}{3} + C}$

$y(t) = \pm e^{\frac{t^3}{3}} \cdot e^C$ → $K = \pm e^C$

$\boxed{y(t) = \pm K \cdot e^{\frac{t^3}{3}}}$ → SOLUÇÃO GERAL SEPARADA

$\begin{cases} y(t) = \pm K \cdot e^{\frac{t^3}{3}} \\ y(t) = 0 \end{cases}$

$\boxed{y(t) = K \cdot e^{\frac{t^3}{3}}}$ → SOLUÇÃO GERAL ORIGINAL

Questão 1

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$ → indeterminação $\frac{0}{0}$ → LH

$= \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x^3)'} = \frac{e^x}{3x^2} = \infty$ → $\frac{1}{0}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ → $\frac{0}{0}$ LH

$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos)'}{(x^2)'}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}'}{2x'} = \frac{\cos}{2} = \frac{1}{2}$

c) L.H.

d) $\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{\frac{2x}{x+1}}$ → $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ indeterminação

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{2x}{x-1}\right)}$

$e^{\lim_{x \to \infty} \frac{\log\left(\frac{2x}{x-1}\right)}{x}}$ → $\log \frac{2}{\infty} \to 0$

$\boxed{e^0}$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{e^{P(t)}} \int g(t)\, e^{P(t)} dt}$$

$\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C$

$P(t) + 5$

$\int \text{sen}(t) dt = -\cos(t) + C$

$y(t) = \frac{1}{e^{P(t)+5}} \int g(t) e^{P(t)+5} dt$

$\int \cos(t) dt = \text{sen}(t) + C$

$= \frac{1}{e^{P(t)} \cancel{e^5}} \int g(t) e^{P(t)} \cancel{e^5} dt$

$\int t^a dt = \frac{t^{a+1}}{a+1} + C$, $a \neq -1$

$= \frac{1}{e^{P(t)}} \int g(t) e^{P(t)} dt$

$\int t^{-1} dt = \int \frac{1}{t} = \log(t) + C$

$p(t) = \frac{\cos(t) + 2}{\text{sen}(t) + 2t + 1}$

$P(t) \Rightarrow \int p(t)\, dt$

$\int \frac{\overbrace{\cos(t) + 2}^{du}}{\underbrace{\text{sen}(t) + 2t + 1}_{u}} dt$

$P(t) = \log(\text{sen}(t) + 2t + 1)$

$e^{P(t)} = \text{sen}(t) + 2t + 1$

$c(t) = \int \frac{12}{\cancel{\text{sen}(t) + 2t + 1}} \cancel{(\text{sen}(t) + 2t + 1)} dt$

$= \int 12\, dt$

$$u = (\mathrm{sen}(t) + 2t + 1)$$
$$\frac{du}{dt} = \cos(t) + 2$$
$$= 12t + C$$
$$du = (\cos(t) + 2)\,dt$$
$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u}\,du = \log(u) + C$$

Substituição

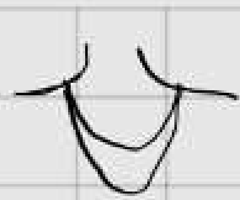
$$\int f(\underbrace{g(t)}_{u})\,\underbrace{g'(t)\,dt}_{du} =$$
$$\boxed{\begin{aligned} u &= g(t) \\ \frac{du}{dt} &= g'(t)\end{aligned}} \qquad = F(g(t)) + C$$
$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

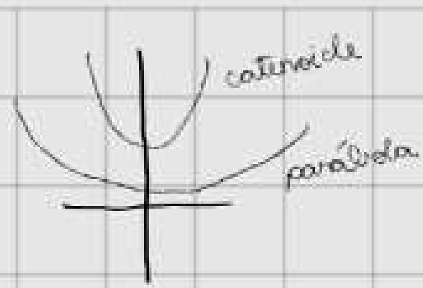
Frações parciais

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx$$
$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$
$$1 = A(x-b) + B(x-a)$$
$$0x + \underbrace{1} = \underbrace{(A+B)}x \underbrace{- Ab - Ba}$$
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -Ab - Ba = 1 \end{cases}$$

Aula 1.08 - catenária - modelagem

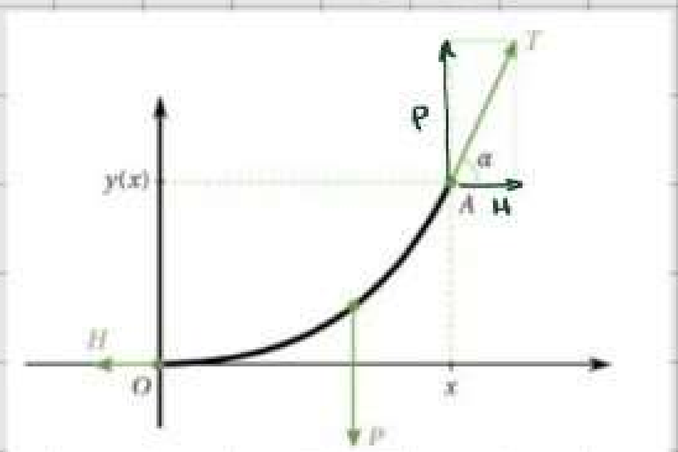
Cabo suspenso
↳ Formato → CATENOIDE
↳ cede ao próprio peso



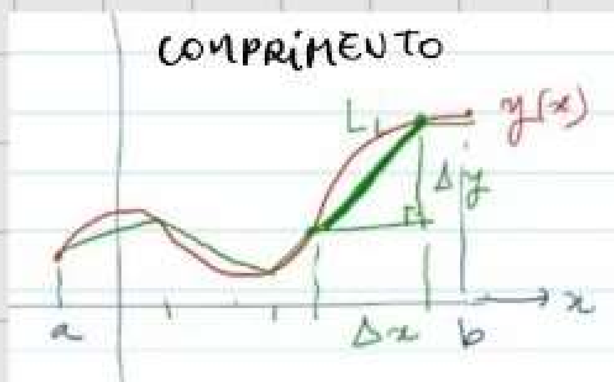


→ Curva dada por um pedaço do gráfico da função cosseno hiperbólica

$$\boxed{\cosh(t) = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}} \overset{\text{derivada}}{\rightleftarrows} \boxed{\mathrm{senh}(t) = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}}$$



$$\cosh'(t) = \mathrm{senh}(t)$$
$$\cosh^2(t) - \mathrm{senh}^2(t) = 1$$
$$x^2 - y^2 = 1$$



$$L_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot \Delta x$$
$$\underset{L}{\sum L_i} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \underset{L}{\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx}$$

EDO

$$T.\,\mathrm{sen}(\alpha) = P$$
$$T.\,\cos(\alpha) = H$$
$$\rightarrow \boxed{\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{P}{H}} = y'(x)$$
$$P = g.\rho.L$$

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\,.dt$$

$$y'(x) = \frac{g.\rho}{H} \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\,.dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$y''(x) = \frac{g\rho}{H} \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$$ ⇝ EDO de 2ª ordem

$$z(x) = y'(x) \quad \therefore \quad \boxed{z'(x) = \frac{g\rho}{H} \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}}$$ EDO de 1ª ordem

$$z(0) = y'(0) = 0$$

SEPARÁVEL

① $\sqrt{1+z^2} = 0$ ⇝ ñ existe z que satisfaz

2) **Separar:** Essa EDO pode ser colocada na forma separada

$$\frac{1}{\sqrt{1+z(x)^2}} z'(x) = \frac{g\rho}{H}$$

3) **Integrar:** Integrando a equação acima

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z(x)^2}} z'(x)\, \underline{dx} = \int \frac{g\rho}{H}\, dx$$

temos, pela substituição $z = z(x)$, que ela é equivalente a

$$\left(\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\, dz\right)_{z=z(x)} = \int \frac{g\rho}{H}\, dx$$

onde

$$\int \frac{g\rho}{H}\, dx = \frac{g\rho}{H} x + A$$

A determinação da integral

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - x^2$$
$$\int \frac{1}{y} \cdots$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\, dz}$$

$$x = \cosh(t), \quad y = \operatorname{senh}(t)$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 = 1 + y^2$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdots$$

Aula de dúvida → 20/01

teste: equações de 1ª ordem → 1ª semana
" " " lineares → 2ª semana

Revisão Teórica

EDO separável de 1ª Ordem

$$\boxed{y'(t) = F(t) \cdot G(y(t))}$$

↳ precisa escrever como produto

1) Soluções constantes (Sol. equilíbrio)

↳ pode existir ou não

$y(t) = c \Rightarrow 0 = F(t) \cdot G(c)$

• Não existe: $\frac{y'}{y} \neq \frac{y'}{a}$

2) Separar

EDO linear de 1ª ordem

⇝ ñ pode ter elevado a potências maiores do que 1

↳ funções conhecidas

$$a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = f(t)$$

$$\boxed{y'(t) + p(t) \cdot y(t) = g(t)}$$

① Dividir a EDO pela função que multiplica a derivada da incógnita

$$\frac{a_0}{a_1} = p(t) \qquad \frac{f(t)}{a_1} = g(t)$$

SOLUÇÃO GERAL

$$y(t) = c(t)\, e^{-P(t)}$$

$$c(t) = \int g(t)\, e^{P(t)}\, dt$$

$$\frac{y'(t)}{G(y(t))} = F(t)$$

3) Integrar

$$\int \frac{y'}{G(y(t))}\,dt = \int F(t)\,dt$$

4) Isolar

Equação algébrica

$$P(t) = \int p(t)\,dt \quad \text{SEM CONSTANTE}$$

(*) CONSTANTE

$$y' = t^3 \cdot e^y$$

$$t^3 \cdot e^y = 0$$

↳ ñ existe valor 0

∴ C zero não existe nesse caso

Equações separáveis (EX)

- $y' - t^3 y(t)^2 =$
  $y' = t^3 \cdot y^2$
- $y' - t^3 \cdot y(t)^2 = t^2$
  $y' = t^2 + t^3 \cdot y^2$
  $y' = t^2(t \cdot y^2)$ ✗
- $y'(t) - t^3 y(t)^2 = t^3$
  $y' = t^3 + t^3 y^2$
  $y' = t^3 (1 + y^2)$

Exemplo resolvendo:

$$y' = t^3 \cdot y^2$$

① constante

$y(c)' = 0$

∴

$t^3 \cdot y(c) = 0$

$t^3 \cdot 0 = \boxed{0}$

② separar

$$\frac{y'}{y^2} = t^3$$

③ integrar

$$\int \frac{y(t)'}{y(t)^2}\,dt = \int t^3\,dt$$

$$\int \frac{y(t)'}{y(t)^2}\,dt = \frac{t^4}{4} + A$$

$y = u$

$y' = du$

$$\int \frac{du}{u^2} = \frac{t^4}{4} + A$$

$$\int u^{-2}\,du$$

$$\frac{u^{-1}}{-1} + B = \frac{t^4}{4} + A$$

$$-\frac{y(t)^{-1}}{1} + B = \frac{t^4}{4} + A$$

$$-\frac{1}{y(t)} + B = \frac{t^4}{4} + D$$

} equação algébrica ↳ s/ derivada

④ isolar

$$-\frac{1}{y(t)} + B = \frac{t^4}{4} + A$$

$$-\frac{1}{y(t)} = \frac{t^4}{4} + \overbrace{A - B}^{C}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{t^4/4 + C}}$$

infinitas soluções

Revisão Teórica

EDO Separável de 1ª Ordem

$$\boxed{y'(t) = F(t)\,G(y(t))}$$

1) Soluções constantes

$y(t) \overset{?}{=} c \overset{EDO}{\Rightarrow} 0 = F(t)\,G(c)$

2) Separar $\frac{y'(t)}{G(y(t))} = F(t)$

3) Integrar $\int \frac{y'(t)\,dt}{G(y(t))} = \int F(t)\,dt$

4) Isolar Eq Algébrica

EDO Linear de 1ª Ordem

$$a_1(t)\,y'(t) + a_2(t)\,y(t) = f(t)$$

$$\boxed{y'(t) + p(t)\,y(t) = g(t)}$$

$y(t) = c(t)\,e^{-P(t)}$ SOL GERAL

$c(t) = \int g(t)\,e^{P(t)}\,dt$

$P(t) = \int p(t)\,dt$ SEM CONST

EDO Linear de 1ª Ordem

$$a_1(t)\,y'(t) + a_2(t)\,y(t) = f(t)$$

$$\boxed{y'(t) + p(t)\,y(t) = g(t)}$$

$y(t) = c(t)\,e^{-P(t)}$ SOL GERAL

$c(t) = \int g(t)\,e^{P(t)}\,dt$

$P(t) = \int p(t)\,dt$ SEM CONST

EDO linear: 1ª ordem

EDO linear de 1ª ordem

→ funções conhecidas

$$a_1(t)\,y'(t) + a_0(t)\,y(t) = f(t)$$

$$\boxed{y'(t) + p(t) \cdot y(t) = g(t)}$$

SOLUÇÃO GERAL

③ $y(t) = c(t)\,e^{-P(t)}$

② $c(t) = \int g(t)\,e^{P(t)\cdot dt}$

① $P(t) = \int p(t)\,dt$ SEM CONSTANTE

$$y(t) = \frac{1}{e^{P(t)}} \int g(t) \cdot e^{P(t)}\,dt$$

Ex: $(t^2 + 1)\,y'(t) + t \cdot y(t) = 0$

$$y'(t) + \underbrace{\frac{t}{t^2+1}}_{p(t)} \cdot y(t) = \underbrace{0}_{g(t)}$$

① $P(t) = \int p(t)\,dt$

② $c(t) = \int g(t) \cdot e^{P(t)\cdot dt}$

③ $y(t) = c(t) \cdot e^{-P(t)}$

$e^{-\frac{1}{2}\ln|t^2+1|}$

$= \int \frac{t}{t^2+1}\,dt$

$u = t^2+1 \quad du = 2t$

$= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \ln|u| + c$

$= \frac{1}{2} \ln|t^2+1| + c$

$= \int 0 \,. dt$

$= C_1$

$= C_1 \,. e^{\ln\left[(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]}$

$= C_1 \,. (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$= C_1 \,. \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{C_1}{\sqrt{t^2+1}}}$