Eq. Lineares - mais complexas

domingo, 13 de março de 2022 12:03

Parte 1

Vamos resolver o seguinte problema:

Determine o número de soluções positivas e não-nulas da equação abaixo:

$$x_1+x_2+x_3=20$$

[Equação] $x_2 > 5$

Resposta:

O exercício acima pede soluções positivas e não-nulas, ou seja, os valores de x_1,x_2 e x_3 precisam ser maiores que zero.
Porém, temos uma condição extra que é $x_2 > 5$

Vou mostrar um "*macete*" para resolver esse problema.

Vamos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$x_1 + (x_2 + 5) + x_3 = 20$$

[Equação] +5 logo após o x_2. Por que eu fiz isso? Pois se eu tiver a garantia de que nenhuma variável seja zero, então x_2 nunca será menor que 5.

Agora vamos passar o +5 para o lado direito da equação, assim:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20 - 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 15 \longleftarrow \text{Equação final}$$

com a condição de que as variáveis x_1, x_2 e x_3 não possam ter valor zero.

ATENÇÃO: para resolver a equação acima, vamos ter que usar a fórmula $C_{m-1,r-1}$.

Mas... professor, por que não podemos utilizar a fórmula $C_{m+r-1,m}$??? Pois a fórmula $C_{m+r-1,m}$ só poderia ser utilizada se as variáveis pudessem ter valor zero. Porém, o enunciado do exercício está falando que nenhuma variável pode ser zero, então não podemos utilizar a fórmula $C_{m+r-1,m}$.

Sendo assim, vamos resolver a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 15$

Temos m = 15 e r= 3 então, usando a fórmula $C_{m-1,r-1}$ obteremos:

$$C_{14,2} = \binom{14}{2} = \frac{14!}{2!.(14-2)!} = 91$$

A resposta do exercício é 91 soluções.

****

Outro exemplo

Determine o número de soluções positivas e não-nulas da equação abaixo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 210$$

[Equação] $x_1 > 7$ e $x_2 \geq 16$

Resposta:

Usaremos o mesmo "macete" do exemplo anterior.

Porém, ATENÇÃO para a seguinte restrição $x_2 \geq 16$(maior igual)

Similar ao "macete" do exercício anterior, vamos reescrever a equação acima da seguinte forma:

Parte 2

**nesta disciplina vamos considerar que um número x é positivo se $x \geq 0$*

Vamos resolver o seguinte problema:

Determine o número de soluções positivas da equação abaixo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

[Equação] $x_2 > 5$

Resposta:

ATENÇÃO COM O ENUNCIADO DO EXERCÍCIO!! Veja que o enunciado deste exercício não é igual ao exercício que resolvemos no tópico anterior.

O enunciado deste exercício está pedindo soluções positivas. Isso significa que x_1, x_2 e x_3 podem ter valores iguais a zero.

Porém, veja que temos uma condição extra que é $x_2 > 5$

Para resolver este problema, vamos usar o mesmo "*macete*" que eu mostrei no tópico anterior.

Porém, ao invés de somar +5, nós teremos que somar +6 pois x_2 poderá ser zero.

Então, vamos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$x_1 + (x_2 + 6) + x_3 = 20$$

[Equação]

Passando o +6 para o lado direito da equação temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20 - 6$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \longleftarrow \text{Equação final}$$

com a condição de que x_1, x_2 e x_3 possam ter valor zero.

Para resolver a equação acima devemos usar a fórmula $C_{(m+r-1),m}$, pois essa fórmula permite que as variáveis possam ter valor zero.

Então, solução da equação acima (que permite valores zero) é a seguinte:

$$C_{(14+3-1),14} = \binom{16}{14} = \frac{16!}{14!.(16-14)!} = 120$$

[Equação]

****

Outro exemplo

Determine o número de soluções positivas da equação abaixo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 210$$

em que $x_1 > 7$ e $x_2 \geq 16$

Resposta:

Usaremos o mesmo "macete" do exemplo anterior. Atenção para o $x_2 \geq 16$

Vamos reescrever a equação acima da seguinte forma:

Exercício resolvido

Pessoal, vou mostrar a resolução de um exercício. Este é um dos exercícios que os alunos mais erram.

Tenho 51 balas do mesmo sabor e quero distribui-las para 3 crianças de modo que cada uma receba pelo menos 5 balas. De quantas maneiras podemos fazer essa distribuição?

Resolução:

Primeiro, vamos construir uma equação que modela esse problema. Essa equação seria a seguinte:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 51$$

[Equação] x na equação acima representa uma criança.

A partir da equação acima, eu lhe pergunto: *como você resolveria esse problema?*

Existem 2 (duas) maneiras diferentes de resolver o problema:

Solução n° 1) Podemos usar a fórmula $C_{m+r-1,m}$

Porém, se você quiser utilizar esta fórmula, você irá precisar somar +5 ao lado de cada variável, assim:

$$x_1 + 5 + x_2 + 5 + x_3 + 5 = 51$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 51 - 5 - 5 - 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 36$$
$$C_{36+3-1,36} = C_{38,36} = 703$$

Por que somei +5? A fórmula $C_{m+r-1,m}$ é utilizada apenas quando as variáveis podem ter valor 0 (zero). Sendo assim, para que cada criança tenha no mínimo 5 balas, precisamos somar +5 ao lado de cada variável.

Solução n° 2) Podemos usar a fórmula $C_{m-1,r-1}$

Para usar essa fórmula, precisamos somar +4 ao lado de cada variável, assim:

$$x_1 + 4 + x_2 + 4 + x_3 + 4 = 51$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 51 - 4 - 4 - 4$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 39$$
$$C_{39-1,3-1} = C_{38,2} = 703$$

[Equação]

Por que somar +4? A fórmula $C_{m-1,r-1}$ é utilizada apenas quando as variáveis não podem ter valores iguais a 0 (zero), ou seja, o menor valor que as variáveis poderão assumir será 1 (um). Então, para que cada criança tenha no mínimo 5 balas, precisamos somar +4 ao lado de cada variável. Se somarmos +5, cada criança terá no mínimo 6 balas, o que não pode!

Note que ambas soluções irão chegar no mesmo resultado. Apenas a modelagem é diferente, dependendo da fórmula que você deseja utilizar.

Conseguiram entender a diferença entre as fórmulas? Muito cuidado na escolha da fórmula!

$$x_1 + 7 + x_2 + 15 + x_3 = 210$$

Note que somei +7 logo após o $x1x1$ e somei +15 logo após o $x2x2$.
Mas... professor por que não somou +16 após o $x2x2$?
Se eu somasse +16, a variável $x2x2$ nunca teria valor igual a 16.

Assim eu garanto que o $x1x1$ nunca seja menor que 7 e que $x2x2$ nunca seja menor que 15 (se eu tiver a garantia de que nenhuma variável tenha valor zero)

Passando o +7 e o +15 para o lado direito da equação teremos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 210 - 7 - 15$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 188$$

$com\ a\ condição\ de\ que:\ x1,x2x1,x2$ e $x3x3$ não possam ter valor zero.

A solução da equação acima é a seguinte (é a mesma fórmula do exercício anterior):

$$C_{187,2} = \binom{187}{2} = \frac{187!}{2!.(187-2)!} = 17391$$

A resposta do exercício é 17391 soluções.

****

Exemplo prático:

De quantas maneiras podemos colocar 20 bolas da mesma cor em 5 caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia e que 2 caixas tenham no mínimo 2 bolas?

Resposta:

A modelagem desse problema é a seguinte equação

$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 20$

$A\ ordem\ das\ caixas\ n$ão é $relevante,\ ent$ão $posso\ assumir\ que\ x1>1$ e $x2>1$

Vamos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 - 1 - 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$$

[Equação]

$A\ solução\ da\ equação\ acima\ é:$

$$C_{17,4} = \binom{17}{4} = \frac{17!}{4!.(17-4)!} = 2380$$

$$x_1 + 8 + x_2 + 16 + x_3 = 210$$

[Equação]

Passando o 8 e 16 para o lado direito da equação temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 210 - 8 - 16$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 186$$

[Equação]

A solução da equação acima é a seguinte:

$$C_{(186+3-1),186} = \binom{188}{186} = \frac{188!}{186!.(188-186)!} = 17578$$

****

Exemplo prático:

De quantas maneiras podemos colocar 20 bolas da mesma cor em 5 caixas de modo que 2 caixas tenham no mínimo 2 bolas?

Resposta:

ATENÇÃO: veja que neste problema nós podemos ter caixas vazias.

A modelagem desse problema é a seguinte equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$
assumindo que $x_1 > 1$ e $x_2 > 1$

[Equação]

Vamos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$x_1 + 2 + x_2 + 2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 - 2 - 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$$

A solução da equação acima é:
$$C_{(16+5-1),16} = \binom{20}{16} = \frac{20!}{16!.(20-16)!} = 4845$$

[Equação]