Recorrência

segunda-feira, 7 de fevereiro de 2022 10:30

Recorrências

Definições e tipos

Conjuntos:

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 3, 3, 2\}$

$A = B$

→ A ordem dos elementos ñ é relevante

Sequências

$A = (1, 2, 3) \rightarrow a_0 = 1 \,/\, a_1 =$

$B = (1, 3, 2, 2) \rightarrow B_0 = 1 \,/\, B_1 = 3 \,/\, B$

$A \neq B$

↳ ordem importa

Recorrência

É uma relação que determina cada termo de uma sequência a partir dos term

anteriores

Ex: $a_0 = 1$ ~ condição de parada

$a_n = a_{n-1} + 3$ ~ recursividade

$a_1 = a_0 + 3 \rightarrow a_1 = 1 + 3 = 4$

$a_2 = a_1 + 3 \rightarrow a_2 = 4 + 3 = 7$

$a_3 = a_2 + 3 \rightarrow a_3 = 7 + 3 = 10$

Recorrências lineares: O expoente do termo recursivo é

Ex: a) $\left.\begin{array}{l} a_0 = 7 \\ a_n = a_{n-1}^{1} + 3 \end{array}\right\}$ linear

b) $\left.\begin{array}{l} a_0 = 7 \\ a_n = a_{n-1}^{2} + 3 \end{array}\right\}$ X → não linear

Tipos de Recorrências

1 Homogênea

2 Não-homogênea

Solução de Recorrências

Consiste em encontrar uma expressão fechada da expressão recursiva da recorrência

Recorrências lineares homogêneas

Resolvendo recorrências lineares homogêneas de 1° ordem

$a_0 = x$

$a_n = y a_{n-1}$ → $a_n = a_0 y^n$

Exemplo: a) $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 = 2a_{n-1} \end{cases}$

$a_n = 5 \cdot 2^n$

b) $\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_n = 4a_{n-1} \end{cases}$

$a_n = 7 \cdot 4^n$

Resolvendo recorrências lineares homogêneas de 2° ordem

a_0

a_1

$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2}$

1° passo: encontrar r_1 e r_2 que são as raízes da equação: $y^2 - Ay - B = 0$

2° passo: encontrar x_1 e x_2 que são as soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_0 \\ x_1 r_1 + x_2 r_2 = a_1 \end{cases}$$

3° passo: a solução final é dada por:

$a_n = x_1 {r_1}^n + x_2 {r_2}^n$

Exemplo: a) $a_0 = 1$

$a_1 = 5$

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

1) $y^2 - 5 + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = -5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$

$\Delta = 1$

$r = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ → $r_1 = 3$, $r_2 = 2$

$r_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \;/\; r_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = a_0 \\ x_1 r_1 + x_2 r_2 = a_1 \end{cases}$ → $3 + x_2 = 1$

$x_2 = -2$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \quad (-2) \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$

$x_1 = 3$

3) $\boxed{a_n = 3 \cdot 3^n + (-2) \cdot 2^n}$

Ex:

1ª ordem

$a_0 = 4$

$a_1 = 2a_{n-1}$

↳ 1 elemento

2ª ordem

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

↳ 2 elementos

$a_0 = 4$

$a_n = 2a_{n-1} + 3$

b) $a_0 = 1$ / $a_1 = 2$ / $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$

1) $y^2 - 4y - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = -4^2 - 4.1.-5$

$\Delta = 16 + 20$

$\Delta = 36$

$r = \frac{-b \pm \sqrt{36}}{2.a}$

$r_1 = \frac{4+6}{2} = 5$

$r_2 = \frac{4-6}{2} = -1$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = a_0 \\ x_1.r_1 + x_2.r_2 = a_1 \end{cases}$ $\rightarrow \frac{1}{2} + x_2 = 1$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

$6x_1 = 3$

$x_1 = \frac{1}{2}$

3) $a_n = x_1.r_1^n + x_2.r_2^n$

$\boxed{a_n = \frac{1}{2}.5^n + \frac{1}{2}.(-1)^n}$

IMPORTANTE:

Como evem ser respondidas as questões sobre recorrências?

As questões envolvendo solução de recorrências deverão ser respondidas em linguagem Python. Não se preocupe, que ninguém precisa ser *expert* em Python.

As respostas serão da seguinte forma:

Considere a seguinte recorrência:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2$$
$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

Primeiramente, o aluno deverá encontrar a solução fechada da recorrência. Para o exemplo acima, a solução fechada é a seguinte:

$$a_n = \frac{1}{2}.5^n + \frac{1}{2}.(-1)^n$$

Em seguida, o aluno deverá escrever o código em Python apenas da parte que está de vermelho na expressão acima.

Para o exemplo acima, o código em Python da expressão matemática ficaria da seguinte forma:

(1/2)*(5**n)+(1/2)*((-1)**n)

A multiplicação em Python é dada pelo símbolo * (asterisco).
A potenciação em Python é dada por ** (dois asteriscos). Cuidado, para não se confundir!

Cuidado também com os parênteses e com os sinais das variáveis!

*****

Cada questão virá com o seguinte código "semi-pronto":

Recorrências lineares homogêneas

Constante fixa:

$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_n = 2a_{n-1} - 5 \end{cases}$

Constante variável:

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n \end{cases}$

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3^{2n} \end{cases}$

Resolvendo recorrências lineares não-homogêneas de constante fixa

Se a recorrência for do tipo:

$\begin{cases} a_0 \\ a_n = Aa_{n-1} + B \end{cases}$ ➡ $a_n = A^n.a_0 + \frac{B.(A^n - 1)}{A-1}$

Exemplo:

a) $a_0 = 3$

$a_n = 2a_{n-1} + 1$

$\rightarrow a_n = 2^n.3 + \frac{1(2^n - 1)}{2-1}$

$\rightarrow a_n = 2^n.3 + 2^n - 1$

$\rightarrow \boxed{a_n = 4.2^n - 1}$

```
def f(n):
    return int ( COLOQUE_SUA_EXPRESSÃO_AQUI )
```

O aluno deverá apenas copiar o código da expressão e colar na área indicada.

*****

Para ilustrar, a resposta final da recorrência acima ficaria da seguinte forma:

```
def f(n):
    return int ( (1/2)*(5**n)+(1/2)*((-1)**n) )
```

Atenção: NUNCA RETIRE O CAST int( ) DO CÓDIGO

Pronto. Em seguida clique no botão VERIFICAR, o sistema irá executar alguns casos de testes. Se todos estiverem corretos, irá aparecer a cor verde. Senão, irá aparecer a cor vermelha.

Não será permitido:
- escrever mais de 2 linhas de código
- usar laços
- usar recursividade
- alterar o código semi-pronto

b) $a_0 = 2$

$a_n = 5a_{n-1} + 3$ $\rightarrow$ $a_n = 5^n \cdot 2 + \dfrac{3(5^n - 1)}{5-1}$

$= 5^n \cdot 2 + \dfrac{3 5^n - 3}{4}$

$= \dfrac{8 5^n + 3 . 5^n - 3}{4}$

$\boxed{a_n = \dfrac{11 . 5^n - 3}{4}}$

Resolvendo recorrências lineares não-homogêneas de constante variável

Se a recorrência for do tipo: $\begin{cases} a_0 \\ a_n = Aa_{n-1} + g(n) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $a_n = A^{n-1} . a_1 + \sum_{i=2}^{n} A^{n-i} g(i)$

Exemplo:

a) $a_0 = 2$

$a_n = 3a_{n-1} + 3^n$ $\rightarrow$ $a_n = 3^{n-1} . 9 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} 3^{n-i} . 3^i}$

$a_1 = 3 . a_0 + 3^1$

$= 3 . 2 + 3$

$a_1 = 9$

$\sum_{i=2}^{n} \dfrac{3^n}{\cancel{3^i}} . \cancel{3^i} \rightarrow \underbrace{\sum_{i=2}^{n} 3^n}_{\underbrace{3^n + 3^n + \dots + 3^n}_{(n-1) \text{ termos}}} = (n-1) . 3^n$

($i=2$ … $i=n$)

$\therefore$ $\boxed{a_n = 3^{n-1} . 9 + (n-1) . 3^n}$

b) $a_0 = 1$ $\qquad$ $a_1 = 1 . a_0 + 1$

$a_n = a_{n-1} + n$ $\qquad$ $= 1 . 1 + 1 = 2$

$a_n = 1^{n-1} . 2 + \sum_{i=2}^{n} 1^{n-i} . i$

$1^{n-i} = 1$

$\sum_{i=2}^{n} i \rightarrow \underbrace{2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n}_{n-1} = \dfrac{(n-1) \cdot (n+2)}{2}$

$\boxed{a_n = 1^{n-1} . 2 + \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}}$

c) $a_0 = 4$

$a_n = a_{n-1} + 5^{(n+1)}$

$$a_1 = 1 \cdot a_0 + 5^{(1+1)}$$
$$= 1.4 + 25$$
$$= 29$$

$$a_n = \overset{1}{1^{n-1}} \cdot 29 + \sum_{i=2}^{n} \overset{1}{1^{n-1}} \cdot 5^{(i+1)}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

$$a_n = 29 + \sum_{i=2}^{n} 5^{(i+1)} \longrightarrow 5^3 \overset{\times 5}{+} 5^4 + 5^5 + \dots 5^{n+1} \Big\} \text{P.G.}$$

$$\frac{5^3 \cdot (5^{n-1} - 1)}{5-1} = \frac{5^{n+2} - 5^3}{4}$$

$$\boxed{a_n = 29 + \frac{5^{n+2} - 5^3}{4}}$$