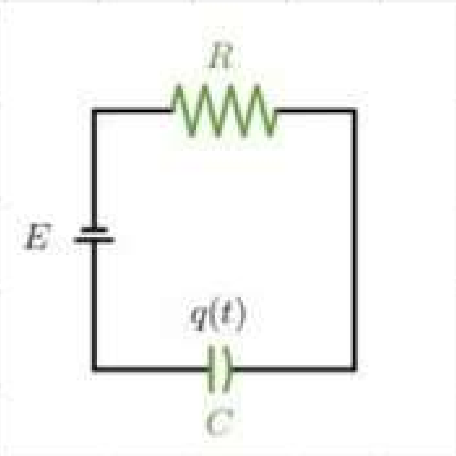
EDO 1 – s1 e 2

segunda-feira, 27 de fevereiro de 2023 21:27

Lista 2 - EDO linear

1) Considere um circuito RC onde a força eletromotriz é uma constante E, a capacitância é uma constante C e a resistência aumenta linearmente, de modo que $R = R_0 + at$. Temos que as quedas de tensão no capacitor e na resistência são dadas, respectivamente, por $Cq(t)$ e $Rq'(t)$ onde $q(t)$ é a carga no capacitor. A segunda Lei de Kirchoff diz que a soma das quedas de tensão num circuito é igual à força eletromotriz.



a) Mostre que a carga $q(t)$ satisfaz uma equação da forma $q'(t) + p(t)q(t) = g(t)$. Mostre também que a carga constante $q(t) = \frac{E}{C}$ é uma solução, conhecida como *carga estacionária.*

Para os próximos itens considere $E = 12$, $C = 6$, $R_0 = 1$, $a = 2$.

$$R\,q'(t) + C\cdot q(t) = E$$

$$q'(t) + \underbrace{\frac{C}{R_0+at}}_{p(t)}\cdot q(t) = \overbrace{\frac{E}{R_0+at}}^{g(t)}$$

$$q(t) = \frac{E}{C} \rightsquigarrow q'(t) = 0$$

$$q'(t) + p(t)\cdot q(t) = \frac{C}{R_0+at}\cdot\frac{E}{C} = 0 = g(t)$$

b) Encontre uma primitiva $P(t)$ de $p(t)$ e determine $e^{P(t)}$ e também $e^{-P(t)}$.

$$p(t) = \frac{C}{R_0+at}$$

$$p(t) = \frac{6}{1+2t}$$

$$P(t) = \int \frac{6}{1+2t}\,dt$$

$u = 1+2t$

$du = 2$

$$P(t) = \int \frac{3}{u}\,du$$

$$P(t) = 3\ln|1+2t| + A$$

$$P(t) = \ln|1+2t|^3 + A$$

$$e^{P(t)} = e^{\ln|1+2t|^3} = (1+2t)^3$$

$$e^{-P(t)} = (1+2t)^{-3}$$

c) Obtenha a solução geral $q(t)$ da equação determinada no primeiro item.

$$c(t) = \int g(t) \cdot e^{p(t) \cdot dt}$$

$$c(t) = \int \frac{E}{Ro + at} \cdot (1 + 2t)^3 \cdot dt$$

$$c(t) = \int \frac{12}{1+2t} \cdot (1 + 2t)^3 \cdot dt$$

$$c(t) = 6 \int u^2 \cdot du$$

$$c(t) = 6 \cdot \frac{u^3}{3} + A \rightarrow c(t) = 2(1+2t)^3 + A$$

$$q(t) = c(t) \cdot e^{-P(t)}$$

$$q(t) = (2(1+2t)^3 + B) \cdot (1+2t)^{-3}$$

$$\boxed{q(t) = 2 + B(1+2t)^{-3}}$$

d) Determine a solução com carga inicial $q(0) = q_0$. Mostre que, para qualquer carga inicial, após muito tempo decorrido a carga $q(t)$ se aproxima da carga estacionária, isto é, mostre que $\lim_{t \to \infty} q(t) = \frac{E}{C} = 2$.

$$t = 0 \mid q(0) = q_0$$

$$q_0 = 2 + B(1 + 2 \cdot 0)^{-3}$$

$$q_0 = 2 + B \cdot 1$$

$$B = q_0 - 2$$

$$\lim_{t \to \infty} (1 + 2t)^{-3} = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} 2 + (q_0 - 2)$$

?

0

$$q(t) = 2 + (q_0 - 2)(1 + 2t)^{-3}$$

2) Considere um circuito RC onde a força eletromotriz é alternada, de modo que $E = E_0 \cos(t)$, a capacitância é uma constante C e a resistência aumenta linearmente, de modo que $R = R_0 + at$. Temos que as quedas de tensão no capacitor e na resistência são dadas, respectivamente, por $Cq(t)$ e $Rq'(t)$, onde $q(t)$ é a carga no capacitor. A segunda Lei de Kirchoff diz que a soma das quedas de tensão num circuito é igual à força eletromotriz.

a) Mostre que a carga $q(t)$ satisfaz uma equação da forma $q'(t) + p(t)q(t) = g(t)$.

Para os próximos itens considere $E_0 = 220$, $C = 2$, $R_0 = 1$, $a = 2$.

$$R\, q'(t) + C q(t) = E$$

$$(R_0 + at)\, q'(t) + C \cdot q(t) = E_0 \cdot \cos(t)$$

$$q'(t) + \frac{C}{} \cdot q(t) = \frac{E_0 \cdot \cos(t)}{}$$

b) Encontre uma primitiva $P(t)$ de $p(t)$ e determine $e^{P(t)}$ e também $e^{-P(t)}$.

$$P(t) = \int \frac{C}{R_0 + at}\, dt$$

$$= \int \frac{2}{1+2t}\, dt = \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln(1+2t) + A$$

$Ro + at$ $\qquad$ $Ro + at$

$u = 1+2t$
$du = 2$

$e^{P(t)} = e^{\ln(1+2t)} = 1+2t$

$e^{-P(t)} = \dfrac{1}{1+2t}$

c) Obtenha a solução geral $q(t)$ da equação determinada no primeiro item.

$c(t) = \int g(t) \cdot e^{P(t)} dt$

$c(t) = \int \dfrac{E_0 \cdot \cos(t)}{Ro + at} \cdot 1+2t$

$= \int \dfrac{220 \cdot \cos(t)}{\cancel{1+2t}} \cdot \cancel{1+2t}$

$= 220 \int \cos(t)$

$= 220 \operatorname{sen}(t) + B$

$q(t) = c(t) \cdot e^{-P(t)} dt$

$q(t) = 220 \cdot \operatorname{sen}(t) \cdot \dfrac{1}{1+2t}$

$\boxed{q(t) = \dfrac{220 \cdot \operatorname{sen}(t) + B}{1+2t}}$

d) Determine a solução com carga inicial $q(0) = q_0$. Mostre que $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$, mostrando que esse limite não depende da carga inicial q_0.

$t = 0 \mid q(0) = q_0$

$q_0 = \dfrac{220 \cdot \operatorname{sen}(0) + B}{1 + 2 \cdot (0)}$

$q_0 = 0 + B \rightarrow \boxed{B = q_0}$

$q(t) = \dfrac{220 + \operatorname{sen}(t) + q_0}{1+2t}$

$\lim_{t\to\infty} \dfrac{220 + \operatorname{sen}(t) + q_0}{1+2t} = 0$

3) Considere um circuito RC onde a força eletromotriz é uma constante $E = 12$, a capacitância é dada por $C = \cos(t) + 2$ e a resistência é dada por $R = \operatorname{sen}(t) + 2t + 1$. Temos que as quedas de tensão no capacitor e na resistência são dadas, respectivamente, por $Cq(t)$ e $Rq'(t)$, onde $q(t)$ é a carga no capacitor. A segunda Lei de Kirchoff diz que a soma das quedas de tensão num circuito é igual à força eletromotriz.

a) Mostre que a carga $q(t)$ satisfaz uma equação da forma $q'(t) + p(t)q(t) = g(t)$.

$R \cdot q'(t) + C \cdot p(t) = g(t)$

$\operatorname{sen}(t) + 2t + 1 \cdot q'(t) + \cos(t) + 2 \cdot q(t) = E$

$q'(t) + \dfrac{\cos(t) + 2}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1} \cdot q(t) = \dfrac{12}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$

b) Encontre uma primitiva $P(t)$ de $p(t)$ e determine $e^{P(t)}$ e também $e^{-P(t)}$.

$P(t) = \int \dfrac{\cos(t) + 2 \, dt}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1} = \int \dfrac{du}{u} = \ln(\operatorname{sen}(t) + 2t + 1) + A$

$u = \operatorname{sen}(t) + 2t + 1$
$du = \cos(t) + 2$

$e^{P(t)} = e^{\ln(\operatorname{sen}(t) + 2t + 1)} = \operatorname{sen}(t) + 2t + 1$

$e^{-P(t)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$

c) Obtenha a solução geral $q(t)$ da equação determinada no primeiro item.

$c(t) = \int g(t) \cdot e^{P(t)} dt$

$q(t) = c(t) \cdot e^{-P(t)}$

$$c(t) = \int \frac{12}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1} \cdot (\operatorname{sen}(t) + 2t + 1) \cdot dt \qquad q(t) = \frac{12t + C}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$$

$$c(t) = \int 12 \, dt = \underline{12t + C}, \qquad q(t) = \frac{12t + C}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$$

d) Determine a solução com carga inicial $q(0) = q_0$. Mostre que $\lim_{t \to \infty} q(t) = 6$, mostrando que esse limite não depende da carga inicial q_0.

$t_0 = 0 \qquad q(t) = \frac{12t + C}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{12t + q_0}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1} \frac{\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{12}{6} = 6$$

$$q_0 = \frac{12t + C}{\operatorname{sen}(0) + 2 \cdot 0 + 1}$$

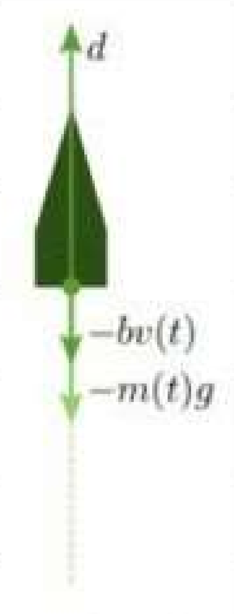
$$\boxed{q_0 = C = q(0)}$$

$$q(t) = \frac{12t + q_0}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$$

4) Num foguete, se o empuxo é uma constante d, a taxa de variação de sua massa é constante, de modo que $m(t) = m_0 - at$. Se o foguete não atinge uma altura muito elevada, podemos supor que gravidade é uma constante g e que a força de arraste do ar é dada por $-bv(t)$, proporcional à velocidade $v(t)$ do foguete. Segue que a força que atua no foguete é dada por

$$F = -m(t)g - bv(t) + d.$$

Neste caso, a segunda Lei de Newton é dada por $(m(t)v(t))' = F$.



a) Mostre que $v(t)$ satisfaz uma equação da forma $v'(t) + p(t)v(t) = g(t)$.

Para os próximos itens considere $g = 10$, $b = 1$, $d = 100$, $m_0 = 1$, $a = 2$.

$$(m(t) \cdot v(t))' = m'(t) \cdot v(t) + m(t) \cdot v'(t) = -av(t) + (m_0 - at) v'(t)$$

$$F = -m(t) \cdot g - bv(t) + d = -(m_0 - at) \cdot g - bv(t) + d$$

$$-av(t) + (m_0 - at) v'(t) = -(m_0 - at) g - bv(t) + d$$

$$(m_0 - at) \cdot v'(t) + (b - a) v(t) = -(m_0 - at) g + d$$

$$v'(t) + \frac{(b - a)}{(m_0 - at)} \cdot v(t) = -g + \frac{d}{m_0 - at}$$

b) Encontre uma primitiva $P(t)$ de $p(t)$ e determine $e^{P(t)}$ e também $e^{-P(t)}$.

$$p(t) = \int \frac{(b-a)}{(m_0 - a.t)}\, dt \to \int \frac{1-2}{1-2t}\, dt \to \int -\frac{1}{1-2t}\, dt \to \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2}$$

$$u = 1-2t \qquad du = -2 \qquad \to \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u} \to \boxed{\frac{1}{2} \cdot \ln(1-2t) + A}$$

$$e^{p(t)} = e^{\frac{1}{2} \cdot \ln(1-2t)} = e^{\ln(1-2t)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{1-2t}$$

$$e^{-p(t)} = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

c) Obtenha a solução geral $v(t)$ da equação determinada no primeiro item.

$$c(t) = \int g(t) \cdot e^{p(t)} . dt$$

$$c(t) = \int -g + \frac{d}{m_0 - 2t} . (1-2t)^{\frac{1}{2}} . dt$$

$$u = 1-2t$$

$$c(t) = \int -10 + \frac{100}{1-2t} . (1-2t)^{\frac{1}{2}} . dt =$$

$$= \int -10(1-2t)^{\frac{1}{2}} . dt + \int 100 . \frac{1}{1-2t} (1-2t)^{\frac{1}{2}} . dt$$

$$= -10 \int (1-2t)^{\frac{1}{2}} . dt + 100 \int \frac{1}{1-2t^{\frac{1}{2}}} . dt$$

$$u = 1-2t \qquad du = 2$$

$$\to -10 \int u^{\frac{1}{2}} . \frac{du}{2} + 100 \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} . \frac{du}{2}$$

$$-5 . \frac{u^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} + 50 . \frac{u^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}$$

$$-5 . \frac{2}{3} . u^{\frac{3}{2}} + 50 . 2 . u^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{10}{3} . (1-2t)^{\frac{3}{2}} + 100 . (1-2t)^{\frac{1}{2}} + B$$

$$v(t) = c(t) . e^{-p(t)}$$

$$v(t) = \left(-\frac{10}{3} . (1-2t)^{\frac{3}{2}} + 100 . (1-2t)^{\frac{1}{2}} + B\right)\left(\frac{1}{1-2t^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$v(t) = -\frac{10}{3} . (1-2t) + 100 + B . \frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$v(t) = 100 - \frac{10}{3} . (1-2t) + B(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

d) Determine a solução $v(t)$ com velocidade inicial $v(0) = 0$. Para que valores de $t \geq 0$ a velocidade $v(t)$ está definida?

$$0 = 100 - \frac{10}{3} . \overbrace{(1-2.0)}^{1} + B(\overbrace{1-2.0}^{1})^{-\frac{1}{2}}$$

$$0 = 100 - \frac{10}{3} + B$$

$$B = \frac{10}{3} - \frac{100}{1}$$

$$B = \frac{10-300}{3} \to B = -\frac{290}{3}$$

$$v(t) = 100 - \frac{10}{3} . (1-2t) - \frac{290}{3} (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$