Material auxiliar

universidade anhembi morumbi

Probabilidade

Luiz Carlos Terra

Nesta aula, você conhecerá os conceitos básicos de probabilidade que é a base de toda inferência estatística, ou seja, a estimativa de parâmetros populacionais com base em dados amostrais.

(Luiz Carlos Terra)

Objetivo

Nesta aula, você conhecerá os conceitos básicos de probabilidade que é a base de toda inferência estatística, ou seja, a estimativa de parâmetros populacionais com base em dados amostrais.

Tópicos

1 – Noções de probabilidade.

2 – Cálculos de probabilidade.

3 – Eventos complementares.

Material auxiliar

Probabilidade e Modelos Probabilísticos

Conceitos básicos, variáveis aleatórias

Incerteza e Probabilidade

- Tomar decisões:
  - Curso mais provável de ação:
    - Se desejamos passear de barco e não sabemos nadar, devemos usar um salva-vidas.
    - Se não confiamos na continuidade do fornecimento de energia elétrica, devemos ter lanternas (e pilhas) ou velas (e fósforos) em casa.
  - Incerteza:
    - Por mais medo que se tenha, ou por mais revolto que esteja o mar, pode não acontecer nada no seu passeio de barco.
    - Por pior que seja a concessionária de energia elétrica pode não faltar energia...

Incerteza e Probabilidade

- Como QUANTIFICAR a incerteza?
- Um dos métodos disponíveis: PROBABILIDADE
- Mas apenas para fenômenos (experimentos) ALEATÓRIOS.

Experimentos aleatórios

- Experimentos aleatórios são aqueles nos quais:
  - ANTES do experimento ocorrer não se pode definir qual será o seu resultado.
  - Quando é realizado um grande número de vezes, ele apresenta uma <u>regularidade</u>, que possibilita construir um modelo para prever seus resultados.
- Exemplos
  - Consumo de energia elétrica em uma cidade em um dia.
  - Resultados de jogos que envolvam sorteio (não viciados).
  - Número de pessoas que chegarão em um banco nas próximas 2 horas.

Modelos probabilísticos

Definição do experimento

↓

Definição dos resultados possíveis do experimento — Espaço Amostral

↓

Definição de uma regra que obtenha a probabilidade de cada resultado ocorrer.

Espaço amostral

- Ω, S: TODOS os resultados possíveis.
- Discreto:
  - Finito Ω: {possíveis resultados de sorteio}
  - Infinito numerável Ω: {0, 1, 2, ...}
- Contínuo:
  - Infinito Ω: {Energia/Potência ≥ 0 (MWh ou MW)}

Operações entre eventos

4 – Eventos independentes.

5 – Eventos mutuamente exclusivos.

6 – Saiba mais.

7 – Bibliografia.

1 – Noções de probabilidade

Apresentaremos aqui os conceitos básicos da teoria da probabilidade que julgamos necessários para que você compreenda as técnicas de estimação de valores, tópico que será abordado em outra aula.

Definição - As probabilidades são medidas estatísticas que medem o grau de incerteza da ocorrência de um de determinado fenômeno. Exemplos: ao jogarmos uma moeda para o ar, não sabemos se cairá cara ou coroa. O que se pode fazer é calcular a probabilidade de sair cara ou coroa. Da mesma forma, ao se lançar um produto novo no mercado, não se tem certeza do grau de sua aceitabilidade. Pode-se, entretanto, baseado em pesquisas, calcular a probabilidade do produto ser aceito.

Fenômeno aleatório - Na teoria das probabilidades, qualquer acontecimento cujo resultado é incerto denomina-se fenômeno aleatório, ou seja, depende do acaso.

Espaço amostral - Trata-se do conjunto de todos os resultados possíveis de um fenômeno aleatório. Pode ser representado pela letra S. Por exemplo: no lançamento de um dado, o espaço amostral é formado pelos números 1, 2, 3, 4, 5, e 6, assim caracterizado:

S = (1, 2, 3, 4, 5, 6)

No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é S = (cara, coroa).

Ao se fazer uma pesquisa de mercado, a quantidade de pessoas ouvidas para opinar sobre a aceitação de um novo produto seria o espaço amostral.

Eventos - Um conjunto qualquer de resultados de um fenômeno aleatório. Por exemplo, no lançamento de um dado, um evento poderia ser a saída de um número par. Se o espaço amostral é representado por S, o evento pode ser representado por A.

Então: espaço amostral S = (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Evento = sair um número par = A = (2, 4, 6).

Por analogia, podemos dizer que no espaço amostral = número de pessoas ouvidas para opinar sobre um novo produto, o evento poderia ser = número de pessoas que responderam afirmativamente.

2 – Cálculo de probabilidades

Chamamos de probabilidade de um evento A: $\mathbf{P(A)} = \dfrac{n(a_i)}{n}$

$n(a_i)$ = ocorrência de certo número de resultados favoráveis;

n = número total de resultados que podem ocorrer em um determinado experimento.

Exemplo: a partir do lançamento de um dado, calcula-se a probabilidade de sair um número par. O total de possibilidades é formado pelos seis números (1, 2, 3, 4, 5, 6) e os resultados que são favoráveis são os números pares (2, 4, 6). Então, a probabilidade de sair um número par é resultado da divisão, no numerador, dos casos que são favoráveis pelo total de possibilidades, no denominador: P(A) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou 0,5 ou 50%.

E se o evento for a saída do número quatro, a probabilidade é de:

P (C) = $\frac{1}{6}$ =, pois só existe um evento favorável dentro de seis possibilidades.

Nessa definição de probabilidade, está implícito o enfoque clássico, ou seja, há a pressuposição de que todos os resultados são igualmente possíveis.

No exemplo do lançamento de um novo produto, o enfoque é diferente, pois nesse caso o cálculo de probabilidade está baseado no conceito de freqüência relativa, ou seja, se das cem pessoas ouvidas, trinta disseram aceitar o novo produto, a probabilidade de aceitação é de 30 sobre 100 – (30 / 100) = 30%.

Outro exemplo baseado em freqüência relativa:

Em uma pequena loja de calçados, dos cem pares vendidos no último mês, quinze foram

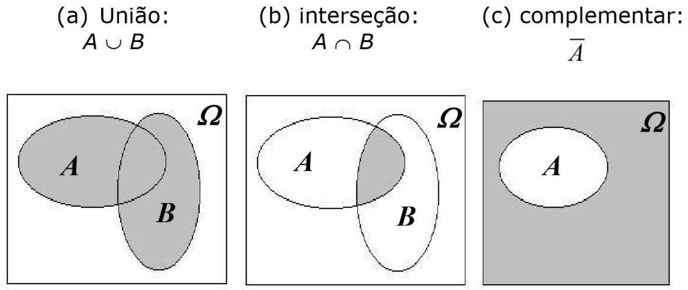
Evento

- Evento = conjunto de resultados possíveis
- Espaço amostral = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Eventos: A = número par,

  B = número menor que 3

  A = {2, 4, 6}   B = {1, 2}

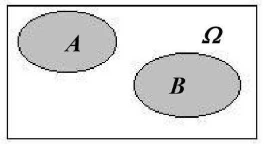
7



8

Eventos mutuamente exclusivos

- Eventos são ditos **mutuamente exclusivos** se e só se eles não puderem ocorrer simultaneamente.
- A e B são *mutuamente exclusivos* $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$



Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos **equiprováveis**

Definição clássica: $P(A) = \dfrac{n_A}{n}$

- sendo:
  - n resultados *igualmente prováveis*,
  - n_A destes resultados pertencem a um certo evento A

10

Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos
- Se $A \subseteq \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$, então:

$$P(A) = \sum_{i:\varpi_i \in A} P(\omega_i)$$

11

Probabilidade de eventos

- Alocação de probabilidades em função de observações passadas (abordagem frequencista):

$$\mathrm{f(A)} = \frac{\mathrm{n_A}}{\mathrm{n}} \quad \text{Frequência relativa}$$

$$\mathrm{P(A)} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{f(A)} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{n_A}}{\mathrm{n}}$$

Axiomas da Probabilidade

- Seja um experimento aleatório com um espaço amostral Ω associado a ele, e seja E_i (i= 1, 2, ...n) um evento genérico.

Propriedades

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$

comprados por consumidores que calçavam números superiores a 43.

Quanto se espera vender de sapatos de tamanho superior a 43 no próximo mês, ou seja, qual é a probabilidade de vendas de pares de sapatos de tamanho superior a 43 no próximo mês?

A solução é baseada no conceito de freqüência relativa. Se de cem pares vendidos, quinze eram de números superiores a 43, 15% do total era dessa numeração. No próximo mês, há a probabilidade de que, do total a ser vendido, 15% sejam de calçados com numeração superior a 43.

3 – Eventos complementares

A probabilidade de ocorrência de um evento é dada por um número que pode variar entre 0 a 1,00. O menor valor de probabilidade é zero (indicando que o evento é impossível) e o maior valor é um (indicando que o evento certamente ocorrerá).

$0 \leq P(A) \leq 1$.

Só para exemplificar, ao se lançar um dado, a probabilidade de sair qualquer número é 100% e a de sair o número sete é zero.

A probabilidade de não ocorrência de um evento, P(A'), é 1,00 menos a probabilidade de sua ocorrência.

1,00 – P(A) = P(A'), que é o evento complementar.

4 – Eventos independentes

Dizemos que **dois eventos** são **independentes** quando a realização ou a não realização de um dos eventos não afeta a probabilidade da realização do outro e vice-versa.

Por exemplo, quando lançamos dois dados, o resultado obtido em um deles independe do resultado obtido no outro.

Se dois eventos são independentes, a probabilidade de que eles se realizem **simultaneamente** é igual ao **produto das probabilidades** de realização dos dois eventos.

$P(A) = P(A_1) . P(A_2)$

Exemplo: lançamento de dois dados.

A probabilidade de obtermos um no primeiro dado é: $P(A_1) = \frac{1}{6}$.

A probabilidade de obtermos cinco no segundo dado é: $P(A_2) = \frac{1}{6}$.

Logo, a probabilidade de obtermos, simultaneamente, um no primeiro e cinco no segundo é:

$P(A) = P(A_1) . P(A_2)$ '! $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

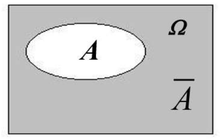
5 – Eventos mutualmente exclusivos

Dois ou mais eventos são **mutuamente** exclusivos quando a realização de um exclui a

- A probabilidade de ocorrência de E_i será um número real tal que:
  - $0 \leq P(E_i) \leq 1$
  - $P(\Omega) = 1$
  - Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são eventos mutuamente exclusivos, então $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \Sigma P(E_i)$

- Probabilidade do evento complementar

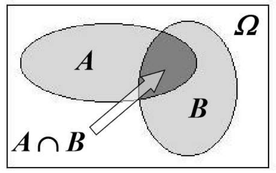
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



Propriedades

- Regra da soma das probabilidades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



"Novo" espaço amostral

Condição do peso	Tipo do leite B (*B*)	C (*C*)	UHT (*U*)	Total
dentro das especificações (*D*)	500	4500	1500	6500
fora das especificações (*F*)	30	270	50	350
Total	530	4770	1550	6850

$$P(F) = \frac{350}{6850} = 0{,}051$$

Qual é a probabilidade que esteja fora das especificações, sabendo-se que é leite do tipo UHT?

$$P(F \mid U) = \frac{50}{1550} = 0{,}032 \qquad P(F \mid U) = \frac{50}{1550} = \frac{50/6850}{1550/6850} = \frac{P(F \cap U)}{P(U)}$$

Probabilidade condicional

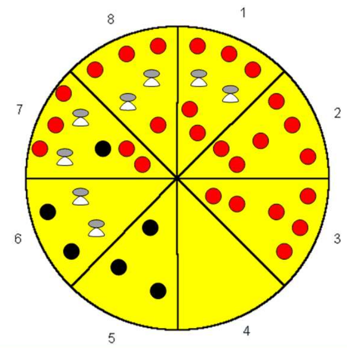
- Sejam *A* e *B* eventos quaisquer, sendo $P(B) > 0$. Definimos a *probabilidade condicional de A dado B* por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Sejam *A* e *B* eventos quaisquer, sendo $P(A) > 0$. Definimos a *probabilidade condicional de B dado A* por

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade condicional



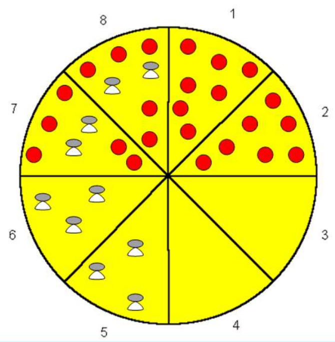
Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com champignon supondo que houvesse calabresa nele?

Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com calabresa supondo que houvesse champignon nele?

$$P(Champignon \mid Calabresa) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Calabresa)} = \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5}$$

$$P(Calabresa \mid Champignon) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Champignon)} = \frac{3/8}{4/8} = \frac{3}{4}$$

Probabilidade Condicional



Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com champignon supondo que houvesse calabresa nele?

Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com calabresa supondo que houvesse champignon nele?

$$P(Champignon \mid Calabresa) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Calabresa)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{2}{4}$$

$$P(Calabresa \mid Champignon) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{} = \frac{2/8}{} = \frac{2}{}$$

Regra do produto

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

ou

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

realização dos outros. Assim, no lançamento de uma moeda, o evento "tirar cara" e o evento "tirar coroa" são mutuamente exclusivos, já que, ao realizar um deles, o outro não se realiza. Se dois eventos são mutuamente exclusivos, a probabilidade de que um ou outro se realize é igual a soma das probabilidades de que cada um deles se realize:

$P(A) = P(A_1) + P(A_2)$

Exemplo – No lançamento de um dado, a probabilidade de se tirar o três **ou** o cinco é:

$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, pois, como vimos, os dois eventos são mutuamente exclusivos.

saiba mais

Em cálculos de probabilidades, é interessante conhecer o princípio fundamental da contagem para que se possa determinar o número de formas em que dois ou mais eventos podem ocorrer.

- Se um evento pode ocorrer de **m** maneiras e um segundo evento de **n** maneiras, o número de maneiras em que os dois eventos podem ocorrer em seqüência é **m** x **n.** Essa regra pode ser estendida para um número qualquer de eventos que ocorram em seqüência. Veja um exemplo: na compra de um carro novo, você deve decidir por três fábricas, dois tamanhos e quatro cores. Então, você terá 24 opções, ou seja, 3 x 2 x 4.

Dentro desse princípio de contagem, existem aplicações importantes, como as formas de arranjar dados, conhecidas como PERMUTAÇÕES, ARRANJOS e COMBINAÇÕES.

PERMUTAÇÃO: uma permutação é um arranjo ordenado de objetos. O número de permutações diferentes de n objetos é n!

A expressão n! é denominada n fatorial e assim definida:

N fatorial - n! = n x (n-1)x(n-2)x(n-3)x 3x2x1

3! = 3 x 2 x 1

4! = 4 x3 x 2 x 1

2! = 2 x 1 e assim por diante.

Exemplo: com a palavra mel, pode-se fazer seis permutações = 3! = 3 x 2 x 1 = 6

Mel mle lem lme eml elm

ARRANJOS : é o número de permutações de n objetos distintos, tomando r a cada vez. O número de n objetos r a cada vez é assim calculado:

A = n!/(n-r)!

Exemplificando, como determinar o número de códigos com três dígitos, um diferente do outro São dez dígitos, de 0 a 10, então n = 10 e cada código deve ter três dígitos, r = 3.

A 10,3 = Arranjo de dez números, tomados 3 a 3.

Pela fórmula = 10!/(10-3)!. Assim: 10x9x8x7x6x5x4x3x2x1 dividido por 7x6x5x4x3x2x1 = 720 códigos diferentes.

COMBINAÇÃO: uma combinação é uma seleção de r objetos de um grupo de n objetos, sem que a ordem tenha importância. A fórmula para seu cálculo é:

Cn,r = combinação de n elementos, r a r é : n!/(n-r)!r!.

Nesse tipo de combinação de elementos, enquadra-se o número de possibilidades que um sorteio da mega-sena pode gerar. São sessenta dezenas, combinadas de seis em seis, cujos resultados independem da ordem do sorteio. Então, o número de possibilidades é de:

60! Dividido por (60 – 6)! X 6! que, fazendo as contas, dá 50.063.660 possibilidades.

$P(Champignon)$ 4/8 4

Eventos independentes

- Dois ou mais eventos são **independentes** quando a ocorrência de um dos eventos não influencia a probabilidade da ocorrência dos outros. Nesse caso:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

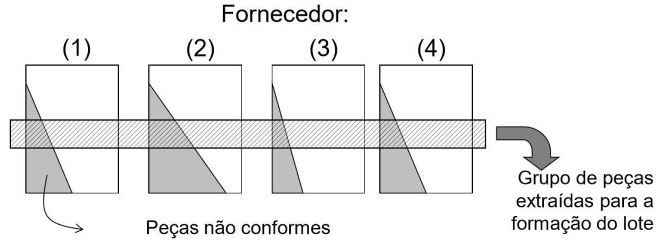
A e B são independentes

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

21

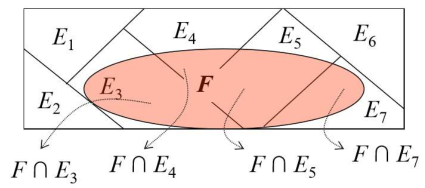
Teorema da probabilidade total

- Ilustração da formação de um lote de peças provindas de 4 fornecedores



22

Teorema da probabilidade total



Eventos Ei M.E.

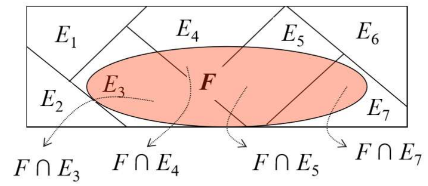
$$F = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)$$

$$P(F) = P[(F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)] = $$
$$= P(F \cap E_1) + P(F \cap E_2) + \ldots + P(F \cap E_k)$$

$$P(F) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \cdot P(F \mid E_i)$$

23

Teorema de Bayes



$$P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)}$$

$$P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i) \cdot P(F \mid E_i)}{P(F)}$$

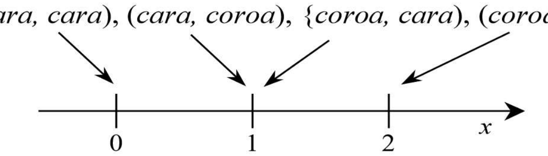
24

Variável aleatória

- "Uma variável aleatória é uma função com valores **numéricos**, cujo valor é determinado por fatores de chance." Associa números aos eventos do espaço amostral.
- **X** = número de coroas em 2 lançamentos de uma moeda;

$\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), \{coroa, cara), (coroa, coroa)\}$

X:



25

Exemplos de variáveis aleatórias

- Vida útil (em horas) de um televisor.
- Número de peças com defeito em um lote produzido.
- Número de acidentes registrados durante um mês na BR.101.
- Na *internet*, o tempo (em segundos) para que uma determinada mensagem chega ao seu destino.
- Se uma mensagem chega (X = 1), ou não (X = 0), ao seu destino

26

Variáveis aleatórias

Variável aleatória discreta

- Pares x_i e $P(X = x_i)$.
- Cada $P(X = x_i) \geq 0$, $\Sigma P(X = x_i) = 1{,}0$

saiba mai

Fazendo apenas um jogo, ou seja, apostando apenas em uma série de seis dezenas, a probabilidade de ganho é (sem desânimo!) de 1 dividido por 50.063.860, que significa 0,000002%.

Anotações:

bibliografia

Básica

SPIEGEL, Murray R. – Estatística – Editora McGraw-Hill.

Lopes, Paulo Afonso – Probabilidades e Estatística – Reichmann e Affonso Editores.

Complementar

Kasmier Leonard J. – Estatística Aplicada à Economia e Administração – Ed. Makron Books.

Stevenson, William – Estatística Aplicada à Administração – Editora Harbra.

discreta

os possíveis resultados estão contidos em um conjunto finito ou enumerável

0 1 2 3 4 ...

número de defeitos em ...

contínua

os possíveis resultados abrangem todo um intervalo de números reais

0

tempo de resposta de ...

$X = x_i$	$P(X = x_i)$	$F(X) = P(X \le x_i)$
x_1	$P(X = x_1)$	$F(x_1) = P(X \le x_1)$
x_2	$P(X = x_2)$	$F(x_2) = P(X \le x_2)$
...	...	
x_n	$P(X = x_n)$	$F(x_n) = P(X \le x_n) = 1$

Variável aleatória discreta

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

- Variância

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$onde\ \ E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \times P(X = x_i)$$

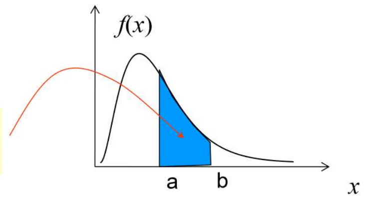
Variável aleatória contínua

- **Função densidade de probabilidade** $f(x)$:

$f(x) \ge 0, \quad \forall x \in \Re \quad e \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = 1$

Se $A = [a, b]$, então

$$P(A) = \int_a^b f(x)d(x)$$



$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds, \quad \forall x \in \Re$$

Variável aleatória contínua

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x)dx$$

- Variância

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$onde\ \ E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x)dx$$

Propriedades do valor esperado e variância

a) $E(c) = c$	a) $V(c) = 0$
b) $E(X + c) = E(X) + c$	b) $V(X + c) = V(X)$
c) $E(cX) = cE(X)$	c) $V(cX) = c^2V(X)$
d) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	d) $DP(cX) = \|c\|DP(X)$
e) $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$	

Se X e Y INDEPENDENTES:

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$