Introdução à Álgebra Linear

(IAL)

3 módulos :

Matrizes e sistemas lineares
Espaços vetoriais e Transformações
Operadores e produto interno

Vetores no plano e no espaço

~ Conjunto de vetor

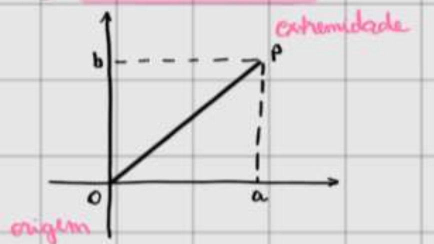
na prática

~ Tamanho, direção e sentido

→ esfera tridimensional que sofre a ação de forças externas
→ Conjunto de vetores formando um campo vetorial

DEFINIÇÕES

1 Vetor no plano



Cap. 4 → boldrini 97

$\overrightarrow{OP}$ = vetor

$P(a.b)$ ou $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

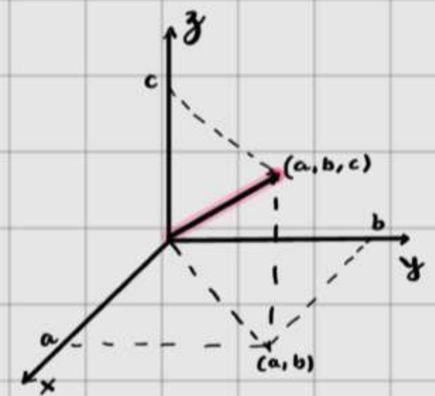
$\vec{v} = (a,b)$

2 Vetor Oposto

- $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ ~ oposto = $\vec{w} = OQ$
- $\vec{w}$ tem mesmo comprimento e direção oposta
- $\vec{v} = (a,b)$ ~ $\vec{w} = (-a,b)$ ou $\vec{w} = -\vec{v}$

3 Vetores no espaço

- $\vec{v} = (a,b,c)$
- $\vec{w} = (d,e,f)$
- $\vec{v} + \vec{w} = (a+d,\ b+e,\ c+f)$
- $K \cdot \vec{v} = K \cdot (a,b,c) = (Ka, Kb, Kc)$



OPERAÇÕES

① **Multiplicação**

- Por uma constante :

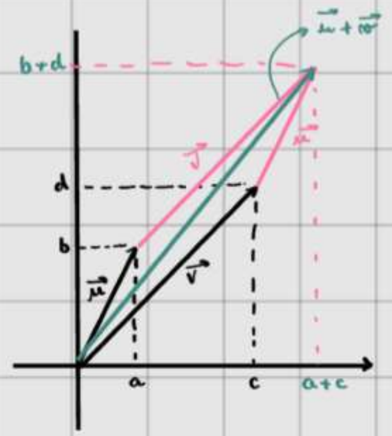
$\vec{v} = (a,b)$

$\vec{w} = 3(a,b) = (3a, 3b)$

② **Adição**

- Regra do paralelogramo
- Sejam $\vec{u} = (a,b)$; $\vec{v} = (c,d)$

$\vec{u} + \vec{v} = (a,b) + (c,d) = (a+c\ ,\ b+d)$



PROPRIEDADES

① $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

① e ② vale para plano e espaço

- Sejam $\vec{u} = (a,b)$; $\vec{v} = (c,d)$ e $\vec{w} = (e,f)$ } 3 vetores do plano
- $(\vec{u} + \vec{v}) = (a,b) + (c,d) = (a+c\ ,\ b+d)$

$(a+c\ ,\ b+d) + \vec{w} \rightarrow (a+c, b+d) + (e,f) = \boxed{(a+c+e\ ,\ b+d+f)}$

- $(\vec{v} + \vec{w}) \rightarrow (c,d) + (e,f) = (c+e\ ,\ d+f)$

$(c+e\ ,\ d+f) + \vec{u} \rightarrow (c+e\ ,\ d+f) + (a,b) = \boxed{(c+e+a\ ,\ d+f+b)}$

São iguais

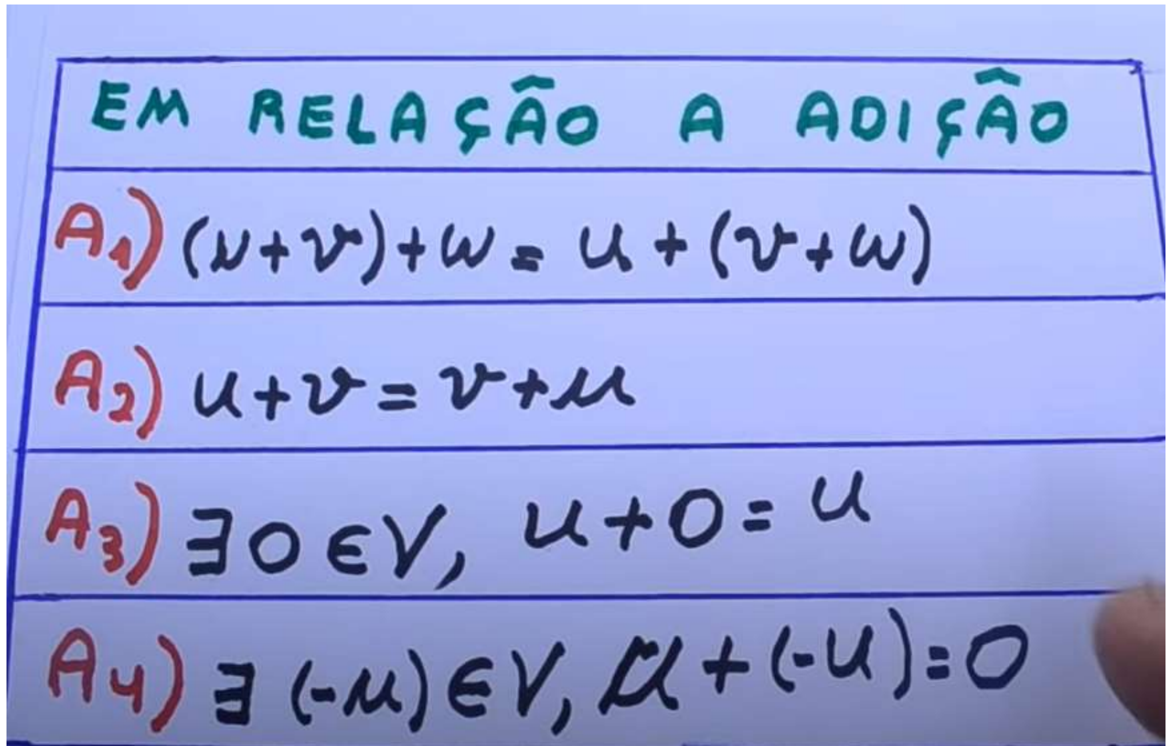
② $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutatibilidade)

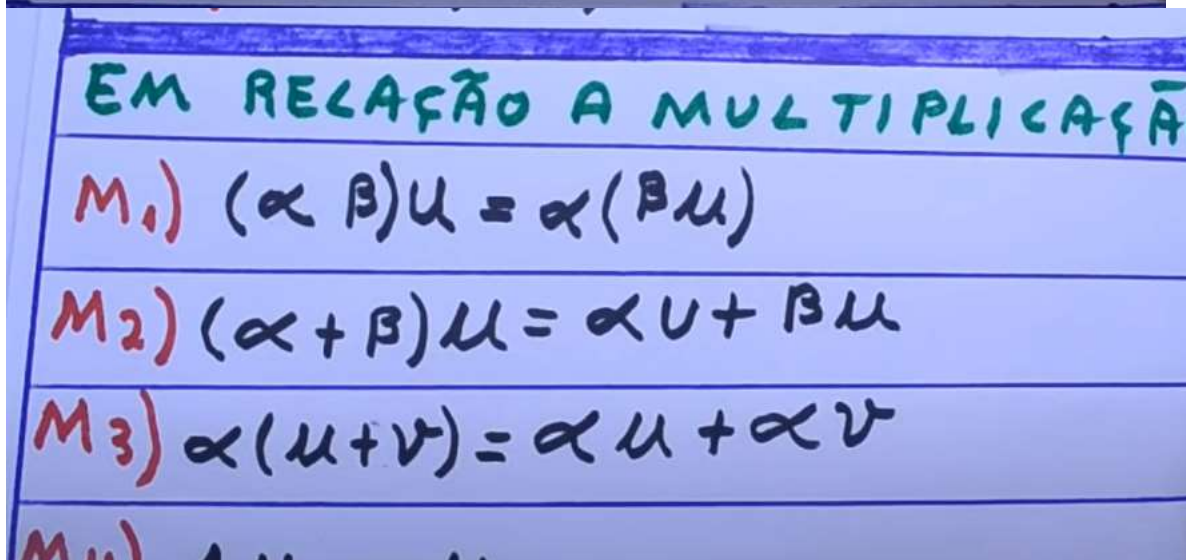
- Sejam $\vec{u} = (a,b)$ e $\vec{v} = (c,d)$
- $\vec{u} + \vec{v} \longrightarrow (a,b) + (c,d) = \boxed{(a+c\ ,\ b+d)}$
- $\vec{v} + \vec{u} \longrightarrow (c,d) + (a,b) = \boxed{(c+a\ ,\ d+b)} = (a+c\ ,\ b+d)$ ⤳ Vale a comutatibilidade de números

③ $\exists\ \vec{0}\ e\ V = \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

- Existe um vetor nulo $(\vec{0})$ pertencente a um conjunto V, no espaço, tal que $\boxed{\vec{u} + \vec{0} = u}$
- Sejam $\vec{u} = (a,b,c)$ e $\vec{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$
- Então, $\vec{u} + \vec{0} = (a,b,c) + (0,0,0) = (a+0, b+0, c+0)$ ⤳ (a,b,c)

④ $\exists\ -u\ e\ V = \mathbb{R}^2 e\ \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$





- Sejam $\vec{u} = (a,b,c)$ e $-\vec{u} = (-a,-b,-c)$ $\in$ V, então
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = (a,b,c) + (-a,-b,-c) = (a-a,\ b-b,\ c-c) = (0,0,0) = \vec{0}$

⑤ $a(\vec{u}+\vec{v}) \rightarrow a.\vec{u} + a.\vec{v}$

- Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ $\in \mathbb{R}$, então
- $a(\vec{u}+\vec{v}) = a((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2))$
  $= a(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$
  $= (a(x_1+x_2),\ a(y_1+y_2),\ a(z_1+z_2))$
  $= (ax_1+ax_2,\ ay_1+ay_2,\ az_1+az_2)$
- $a.\vec{u} + a.\vec{v} = a(x_1,y_1,z_1) + a(x_2,y_2,z_2)$
  $= (a.x_1, ay_1, az_1) + (ax_2 + ay_2 + az_2)$
  $(a.x_1+ax_2,\ ay_1+ay_2,\ az_1+az_2)$

iguais

⑦ $(a.b)\vec{v} = a(b.\vec{v})$

⑧ $1.\vec{u} = \vec{u}$

(M4) $1u = u$

⑥ $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b.\vec{v}$

- seja $\vec{v} = (x_1, y_1)$, então
- $(a+b)(x_1,y_1) \rightarrow (a.x_1, a.y_1) + (b.x_1, b.y_1) = (a.x_1 + bx_1,\ a.x_2 + b.x_2)$
- $a.(x_1,y_1) + b.(x_1,y_1) \rightarrow (a.x_1,\ a.y_1) + (b.x_1,\ b.y_1) = (a.x_1 + b.x_1,\ a.y_1 + b.y_1)$

⑦ $(a.b)\vec{v} = a(b.\vec{v})$

- Seja $\vec{v} = (x_1, y_1)$, então
- $(a.b)\vec{v} \rightarrow (a.b)(x_1,y_1) = (a.b.x_1,\ a.b.y_1)$
- $a(b.(x_1,y_1)) \rightarrow a.(b.x_1,\ b.y_1) = (a.b.x_1,\ a.b.y_1)$

⑧ $1.\vec{u} = \vec{u}$

- Seja $\vec{u} = (a, b)$, então
- $1.(a,b) = (1a,\ 1b) = (a,b)$
- (a,b)

Espaços Vetoriais

DEFINIÇÃO

→ conjunto cujos os elementos são chamados de vetores

- Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações: $\underbrace{\text{duas operações}}_{\text{OPERAÇÕES USUAIS}}$

  soma $(u + v \xrightarrow{+} V)$

  multiplicação por escalar $(\mathbb{R} \times v \xrightarrow{*} V)$
- Tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, as propriedades 1 a 8 sejam satisfatórias.
- Ex: Espaço vetorial das matrizes 2×2

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

V: u, v, w $\mathbb{R}$: a, b

$$a.\vec{u} = a.\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.u_{11} & a.u_{12} \\ a.u_{21} & a.u_{22} \end{bmatrix}$$

① $(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})$ ⇝ Associatividade

② $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + u$ ⇝ Comutatividade

SEJAM

③ $\exists\ 0$ que $\vec{u} + 0 = \vec{u}$, onde $0 = [0\ 0]$ ⇝ Elemento neutro

④ $\exists\ (-u) \in V$, $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}-u_{11} & u_{12}-u_{12} \\ u_{21}-u_{21} & u_{22}-u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

⑤ $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ ⇝ Multiplicação por escalar

⑥ $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

$$(a+b)\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)U_{11} & (a+b)U_{12} \\ (a+b)U_{21} & (a+b)U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.U_{11}+b.U_{11} & aU_{12}+b.U_{12} \\ a.U_{21}+b.U_{21} & aU_{22}+bU_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aU_{11} & aU_{12} \\ a_{21} & aU_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bU_{11} & bU_{12} \\ bU_{21} & bU_{22} \end{bmatrix}$$

$$= a.\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} U_{12} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

$$= a.\vec{u} + b.\vec{v}$$

⑦ $(a.b).\vec{v} = a(b\vec{v})$

$$ab\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.b\,v_{11} & ab\,v_{12} \\ a.b\,v_{21} & ab\,v_{22} \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} bv_{11} & bv_{12} \\ bv_{21} & bv_{22} \end{bmatrix}$$

$$= a\left(b.\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\right) = a(b.\vec{v})$$

⑧ $1.\vec{u} = \vec{u}$ ⇝ $1.\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.u_{11} & 1.u_{12} \\ 1.u_{21} & 1.u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \vec{u}$

$$\boxed{V = M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ a,b,c,d \in R \right\}}$$

Espaços das matrizes 2 por 2, que é igual matrizes que tem 4 elementos dispostos em 2 linhas e duas colunas, com elementos a, b, c, d que pertence aos reais, realmente é um espaço vetorial

pois verificou as 8 propriedades

Subespaço Vetorial

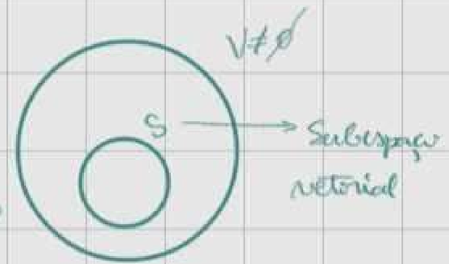
⇝ É um espaço vetorial dentro de outro espaço vetorial

Dado um espaço vetorial V, um subconjunto S, não vazio, será um subespaço vetorial de V, se: ⊛ $\vec{0} \in S$

① Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{u}$ tivermos $\vec{u} + \vec{v} \in S$

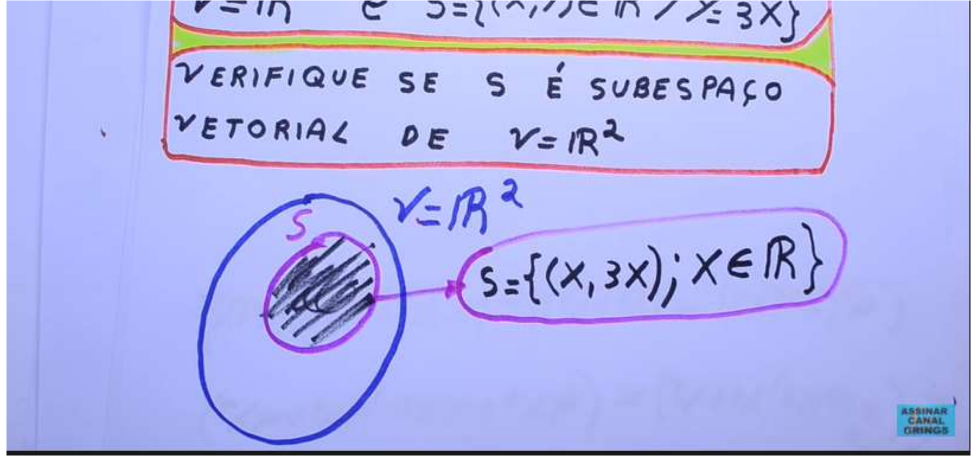
② $a \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in S$, tivermos $a.\vec{u} \in S$

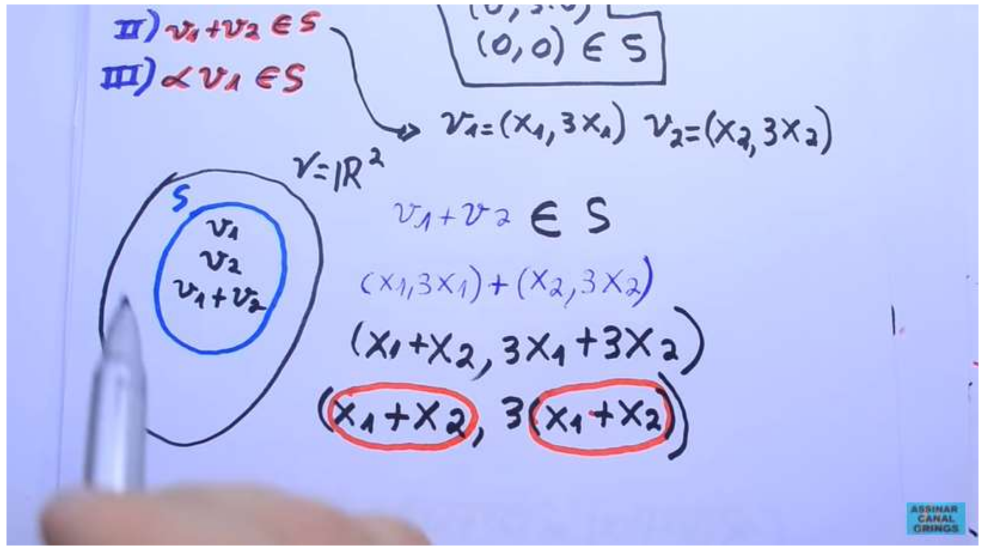
↳ da um novo elemento dentro de S

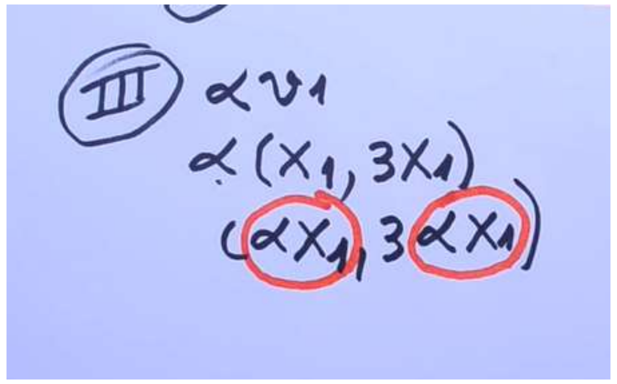


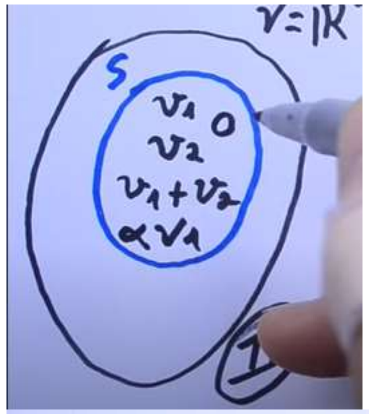
Exemplos:

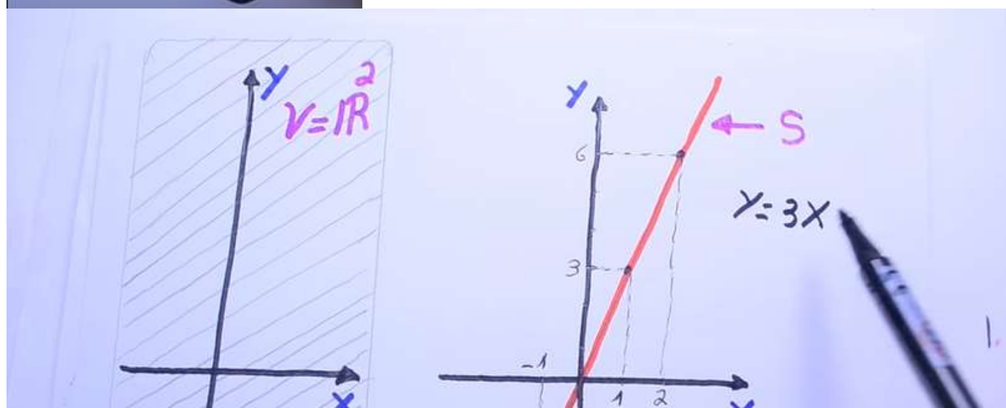
1 | $V = \mathbb{R}$ $w = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_i \in \mathbb{R}\}$ (elemento nulo) Dados $\vec{u}, \vec{v} \in w$ ⟶ $\{\vec{u} + \vec{v} \in w$











$a \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\{ a \cdot \vec{u} \in W$

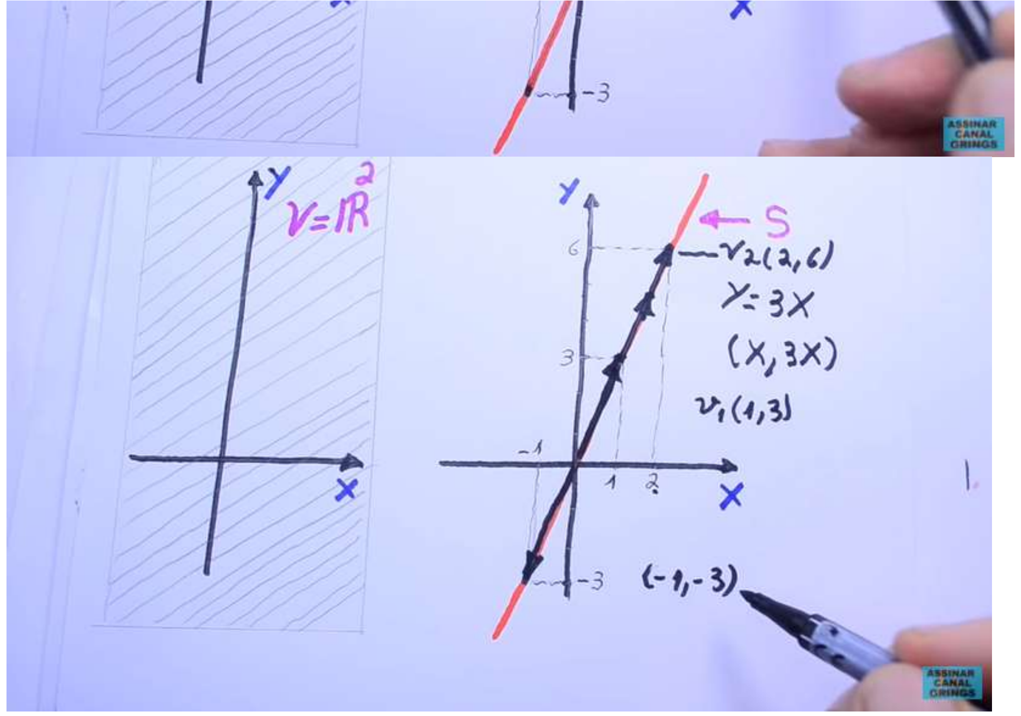
i) Dados $\vec{u} = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $\vec{v} = (0, y_2, y_3, y_4, y_5)$ $\rightsquigarrow \in W$

$$\vec{u} + \vec{v} = (0, x_2, x_3, x_4, x_5) + (0, y_2, y_3, y_4, y_5) = \underline{(0, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4, x_5+y_5)}$$

ii) $K \cdot \vec{u} = K(0, x_2, x_3, x_4, x_5) = \underbrace{(0, Kx_2, Kx_3, Kx_4, Kx_5)}_{\in W}$

também pertence a W
- 1º elemento nulo
- 5 elementos que pertencem a W

$\therefore$ $\boxed{W \text{ é um subespaço vetorial de } V.}$



2 $\to V = \mathbb{R}^2 \quad W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$

$\to$ Sejam $\vec{u} = (1,1)$ $\quad \vec{v} = (2,4)$

i) $\vec{u} + \vec{v} \in W \rightsquigarrow (1,1) + (2,4) = (3,5) \notin W$

$(1,1)$ $\quad$ $(2,4)$ $\quad$ $3^2 \neq 5$

$1^2 =$ $\quad$ $2^2 =$

era para ser 9

} Ñ usar exemplo numérico na prova

números que o multiplicam são iguais a $\underline{0}$.

(*) Todo espaço vetorial V admite pelo menos 2 subespaços

$0 \to \{0\}$, V (ele mesmo) } subespaços triviais

subespaços próprios de V. $\{ 0_0 \}$

3 $\to V = \mathbb{R}^2 \quad W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$

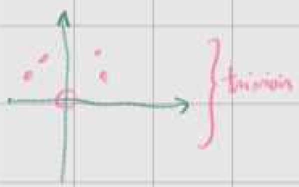
$\to$ Sejam $\vec{u} = (a, a^2)$ $\quad \vec{v} = (b, b^2)$

i) $\vec{u} + \vec{v} \in W \rightsquigarrow (a, a^2) + (b, b^2) = (a+b,\ a^2+b^2) \notin W$

$\therefore$ W não é subespaço vetorial

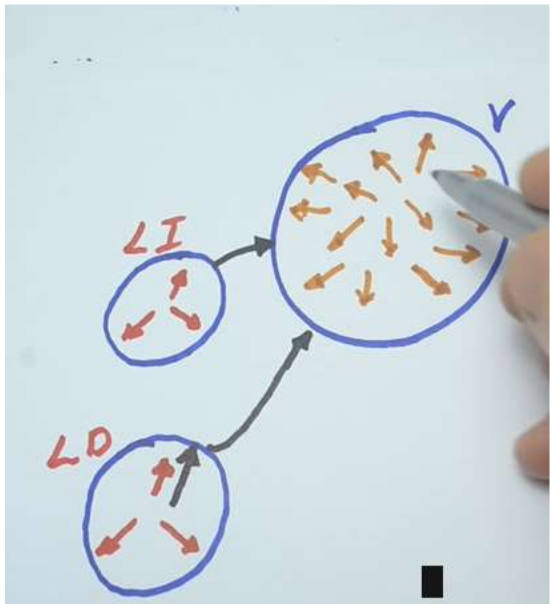
era para ser:

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a b + b^2$



Base de um espaço vetorial

Combinação linear



- Sejam V um espaço vetorial, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ (Vs são elementos de V) e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (constantes). Então o vetor:

$$\boxed{\vec{v} = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \ldots + a_n \cdot v_n}$$

- É um elemento de V e o chamamos de combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Dependência e independência linear

- Sejam V um espaço vetorial, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$
- Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (LI) ou que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LI se a equação:

↳ CONSTANTES NULAS

$$\boxed{a_1 . v_1 + a_2 . v_2 + \dots + a_n . v_n = \vec{0}}$$

- Implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

↳ Se existir algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_3\}$ é linearmente dependente (LD)

↳ CONSTANTES $\neq 0$

Teorema:

$\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é LD se e somente se um destes vetores for combinação linear dos outros

↳ linhas múltiplas na matriz / combinados / multiplicados (combinação)

Subespaço vetorial gerado

- Um subespaço vetorial S se diz gerado por $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ou se diz que, os vetores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ são geradores do subespaços vetoriais

Exemplos

1 $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

Combinados com constantes quaisquer da um vetor nulo($\vec{0}$)

Vetores Canônicos, $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ são LI?

$a_1 . \vec{v_1} + a_2 . \vec{v_2} = \vec{0}$

$a_1 . (1,0) + a_2 . (0,1) = (0,0) \longrightarrow (a_1, 0) + (0, a_2) = (0,0)$

$= (a_1 + 0, 0 + a_2) = (0,0)$

$= (a_1, a_2) = (0,0) \therefore a_1 = 0, \; a_2 = 0$

2 Os vetores $\vec{e_1} = (1,0)$ e $\vec{e_2} = (0,1)$ geram o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ (subespaço)

Seja $(x,y) = x . \vec{e_1} + y . \vec{e_2}$

$= x(1,0) + y(0,1)$

$= (x,0) + (0,y)$

$= (x+0, 0+y) \therefore \boxed{(x,y)}$

3 $\vec{e_1} = (1,0,0)$ e $\vec{e_2} = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$, geram o subespaço $S = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 / x\, y \in \mathbb{R}\}$

Seja $(x,y,0) = x . \vec{e_1} + y . \vec{e_2}$

$= x(1,0,0) + y(0,1,0)$

Prova de que $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ geram o subespaço S.

$= (x, 0, 0) + (0, y, 0)$

$= (x+0, 0+y, 0+0) \longrightarrow \boxed{(x, y, 0)} \in S$

4 Determine se $\vec{v_1} = (1, 2, 2, 1)$, $\vec{v_2} = (2, 3, 4, 1)$, $\vec{v_3} = (3, 8, 7, 5)$ de $\mathbb{R}^4$ são LI.

$a_1 . \vec{v_1} + a_2 . \vec{v_2} + a_3 . \vec{v_3} = \vec{0}$

$= a_1 (1, 2, 2, 1) + a_2 (2, 3, 4, 1) + a_3 (3, 8, 7, 5) = (0, 0, 0, 0)$

$= (a_1, 2a_1, 2a_1, a_1) + (2a_2, 3a_2, 4a_2, a_2) + (3a_3, 8a_3, 7a_3, 5a_3) = (0, 0, 0, 0)$

$(x, x) + (0, y-x)$

$(x+0, x+y-x) \rightarrow (x, y)$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 + 8a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 + 7a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases} \quad \ldots \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_2 - 2a_3 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

matriz aumentada do tipo escada

$\therefore$ Assim os vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ são LI

Base de um espaço vetorial

- Um conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores de V será uma BASE DE V se:

i) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI → constantes nulas

ii) $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$ ou seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ geram V →

Exemplos

1 O conjunto $\{(1,1), (0,1)\}$ é base de $V = \mathbb{R}^2$?

i) $a \vec{v_1} + b \vec{v_2} = \vec{0}$

$a(1,1) + b.(0,1) = (0,0)$

$(a, a) + (0, b) = (0,0)$

$(a+0, a+b) = (0,0)$

$(a, a+b) = (0,0) \longrightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a+b=0 \rightarrow \boxed{b=0} \end{cases}$

ii) $(x,y) = a \vec{v_1} + b . \vec{v_2}$

$(x,y) = a.(1,1) + b(0,1)$

$(x,y) = (a,a) + (0,b)$

$(x,y) = (a, a+b) \longrightarrow \begin{cases} \boxed{a=x} \\ a+b=y \rightarrow \boxed{b=y-x} \end{cases}$

$\exists\ a = x,\ b = y-x$ que combinados com $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ geram $\mathbb{R}^2$ $\therefore$ $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ geram $V = \mathbb{R}^2$.

$\therefore \{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$

então $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$

PROPRIEDADES RELATIVAS À BASE E DIMENSÃO (demonstrações no slide seguinte)

I) Qualquer conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço por ele gerado.

II) Se B= $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for base de um espaço vetorial V, todo conjunto com mais de n vetores de V é LD.

III) Duas bases quaisquer de um espaço vetorial tem o mesmo número de vetores

IV) Se B= $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, qualquer vetor $v \in V$ se exprime de maneira única como combinação linear dos vetores de B

V) Se V é um espaço vetorial tal que Dim V = n e S é um subespaço vetorial de V, então Dim S ≤ n

Ex1 Considere A = {E...

B = {(1,3), (1,-2)} bases

que $v_A = (5,0)$, calcular

$(5,0) = 5(1,0) + 0(0,1)$

$v_B = M v_A \qquad M = B^{-1}$

2 $\vec{v_1} = (1,2,1)$, $\vec{v_2} = (2,9,0)$, $\vec{v_3} = (3,3,4)$. $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$?

i) $a \cdot \vec{v_1} + b \cdot \vec{v_2} + c \cdot \vec{v_3} = \vec{0}$

$a(1,2,1) + b(2,9,0) + c(3,3,4) = (0,0,0)$

$(a, 2a, a) + (2b, 9b, 0) + (3c, 3c, 4c) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \to -4c + 2b + 3c = 0 \to 2b = c \to b = c/2 \rightsquigarrow \boxed{0} \\ 2a + 9b + 3c = 0 \to 2(-4c) + 9(\frac{c}{2}) + 3c = 0 \ (\times 2) \to -16c + 9c + 6c = 0 \to -c = 0 \to \boxed{c = 0} \\ a + 0 + 4c = 0 \rightsquigarrow a = -4c \rightsquigarrow \boxed{0} \end{cases}$$

$\therefore \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ é LI

ii) $(x,y,z) = a(1,2,1) + b(2,9,0) + c(3,3,4)$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x \to (z - 4c) + 2b + 3c = x \to c = 2b + z - x \\ 2a + 9b + 3c = y \to 2(z - 4(2b + z - x)) + 9b + 3(2b + z - x) = y \to 2(z - 8b - 4z + 4x) + 9b + 6b + 3z - 3x = y \\ a + 4c = z \to a = z - 4c \end{cases}$$

$c = 2(5x - 3z - y) + z - x \to 10x - 6z - 2y + z - x$

$\to \boxed{9x - 5z - 2y = c}$

$2z - 16b - 8z + 8x) + 15b + 3z - 3x = y$

$-b - 3z + 5x = y$

$\boxed{b = 5x - 3z - y}$

$\hookrightarrow a = z - 4(9x - 5z - 2y)$

$a = z - 36x + 20z + 8y$

$\boxed{a = 21z + 8y - 36x}$

$\therefore \boxed{(x,y,z) = (8y - 36x + 21z)(1,2,1) + (5x - 3z - y)(2,9,0) + (9x - 5z - 2y = c)(3,3,4)}$

$\therefore \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ geram $\mathbb{R}^3$ $\therefore \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ formam uma base p/ $\mathbb{R}^3$

Mudança de base

Dimensão de um espaço vetorial

Se V é um espaço vetorial e possui uma base com n vetores, V tem dimensão n.

A dimensão de V se indica por $\text{Dim}V = n$

Exemplos: Base canônica de $V = \mathbb{R}^2 = \{(1,0),(0,1)\}$, $\text{Dim } V = 2$

PROPRIEDADES

I Qualquer conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço por ele gerado.

II Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ for base de um espaço vetorial V, todo conjunto com mais de n vetores de V é LD.

III Duas bases quaisquer de um espaço vetorial tem o mesmo número de vetores

IV Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, qualquer vetor $v \in V$ se exprime de maneira única como

VI) A Dimensão de um subespaço vetorial pode ser determinada pelo número de variáveis livres de seu vetor genérico

MUDANÇA DE BASE

Sejam duas bases de V: $A = \{v_1, v_2\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$

Podemos escrever: $A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

Seja também um vetor $v \in V$:

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ (combinação linear dos vetores da base A) (1)

$v = y_1 w_1 + y_2 w_2$ (combinação linear dos vetores da base B) (*)

Que podemos reescrever: $v_A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $v_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Mas os vetores da base A podem ser escritos em relação à base B:

$$v_1 = a_{11} w_1 + a_{21} w_2$$
$$v_2 = a_{21} w_1 + a_{22} w_2 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) $v = x_1(a_{11} w_1 + a_{21} w_2) + x_2(a_{21} w_1 + a_{22} w_2)$

$$v = x_1(a_{11} w_1 + a_{12} w_2) + x_2(a_{21} w_1 + a_{22} w_2)$$

Que rearranjando os termos produz:

$v = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)w_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)w_2$ (**)

Que comparando * com **

$$v = y_1 w_1 + y_2 w_2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)w_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)w_2$$

Resulta:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *então* $\boxed{v_B = M v_A}$ onde M é a matriz Mudança de Base de A para B

A finalidade de M é transformar os componentes de um vetor v na base

A em componentes do mesmo vetor v na base B.

Se quiser transformar v_A em v_B então

$$\boxed{v_A = M^{-1} v_B}$$

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ MUDANÇA DE BASE

As duas bases de V: $A = \{v_1, v_2)\} = \{(x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})\}$ e $B = \{w_1, w_2\} = \{(y_{11}, y_{12}), (y_{21}, y_{22})\}\{$ é da forma :

$$v_1 = a_{11} w_1 + a_{21} w_2$$
$$v_2 = a_{21} w_1 + a_{22} w_2$$

Ou $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ (***)

Substituindo as definições de Base acima (***) fica:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

Mas

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = A^T, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = M^T, \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = B^T$$

$\Big\} \ \boldsymbol{A^T = M^T B^T}$

$$\boldsymbol{A^T = M^T B^T}$$

$\boldsymbol{A = BM}$ (propriedade da transposta)

$$\boxed{\boldsymbol{M = B^{-1} A}}$$

M = Matriz mudança de Base de A para B

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ B^{-1}?

$$\begin{array}{c} \quad B \qquad\qquad I \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{3} & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \end{array}$$

$L_2 = L_2 - 3L_1$

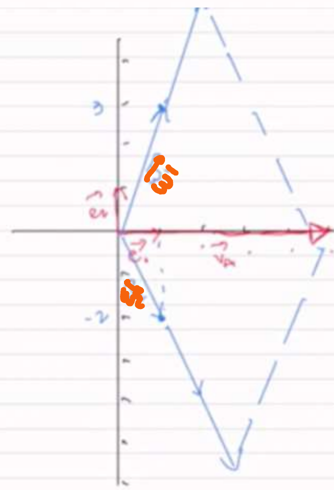
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & -1/5 \end{array}\right] \sim$$

$L_1 = L_1 - L_2$

$v_B = B^{-1} v_A = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2/5 \cdot 5 + \\ 3/5 \cdot 5 + (- \end{bmatrix}$

$\boxed{v_A = (5,0) = 2(1,3) + 3}$



Ex2) $A = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ (1,0) (0,1)

bases do $\mathbb{R}^2$, dado v_A

$v_B = M v_A$ $v_B = B^{-1} v_A$

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ B^{-1}

$v_B = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} =$

$(4,7) = 4(1,0) + 7(0,$

$(4,7) = 3(2,1) + 2(1,$

combinação linear dos vetores de B.

V Se V é um espaço vetorial tal que $\dim V = n$ e S é um subespaço vetorial de V, então $\dim S \leq n$.

VI A dimensão de um subespaço vetorial pode ser determinada pelo nº de variáveis livres de seu vetor genérico.

Mudança de base

Sejam duas bases de V: $A = \{v_1, v_2\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$. Podemos escrever: $A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

Seja também um vetor $v \in V$:

$v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2$ (combinação linear dos vetores da base A) (1)

$v = y_1 \cdot w_1 + y_2 \cdot w_2$ (combinação linear dos vetores da base B) (2)

Que podemos reescrever: $v_A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $v_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Mas os vetores da base A podem ser escritos em relação à base B:

$v_1 = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2$

$v_2 = a_{21} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2$

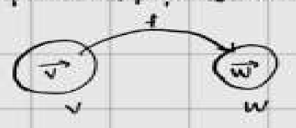
Substituindo (2) em (1) $v = x_1 (a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2) + x_2 (a_{21} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2)$

Transformações lineares

f é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W.

$f: V \to W$

$\therefore w = f(v)$



Ex 1) Uma transformação $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ associa vetores $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $\vec{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

lei que define: $a = 3x$, $b = -2y$, $c = x - y$

$\underbrace{f(x,y)}_{\text{DOMÍNIO}} = \underbrace{(3x, -2y, x-y)}_{\text{CONTRA DOMÍNIO}}$

Se $(x,y) = (2,1)$

$\vec{w} = f(2,1) = (3 \cdot 2, -2 \cdot 1, 2 - 1) = (6, -2, 1)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (3x, -2y, x-y)$ é linear? ?

PROVA: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

1) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= 3(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$

$= (3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$

$= (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2)$

$= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$

$= f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

II) $f(K\vec{u}) \to f(K(x_1, y_1)) = f(Kx_1, Ky_1) = (3Kx_1, -2Ky_1, K(x_1 - y_1))$

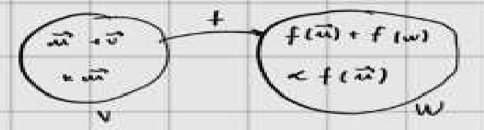
$= K(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) \therefore K \cdot f(\vec{u})$

Definição

01) Transformação linear

→ Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $f: V \to W$ é chamada uma transformação linear se

$$\left.\begin{array}{l} i)\ f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ ii)\ f(K\vec{u}) = K \cdot f(\vec{u}) \end{array}\right\} \forall\ u, v \in V,\ \forall K \in \mathbb{R}$$



02) Ex2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (-3x + y, 2x + 3y)$

I) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

II) $f(K\vec{u}) = K f(\vec{u})$

I) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ dados $u, v \in \mathbb{R}^2$

tal que $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$f(x,y) = (-3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2))$

$= (-3x_1 - 3x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2 + 3y_1 + 3y_2)$

$= (-3x_1 + y_1, 2x_1 + 3y_1) + (-3x_2 + y_2, 2x_2 + 3y_2)$

$= f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ CQD

II) $f(K\vec{u}) = f(K(x_1, y_1)) = f(K x_1, K y_1)$

$= (-3Kx_1 + Ky_1, 2Kx_1 + 3Ky_1)$

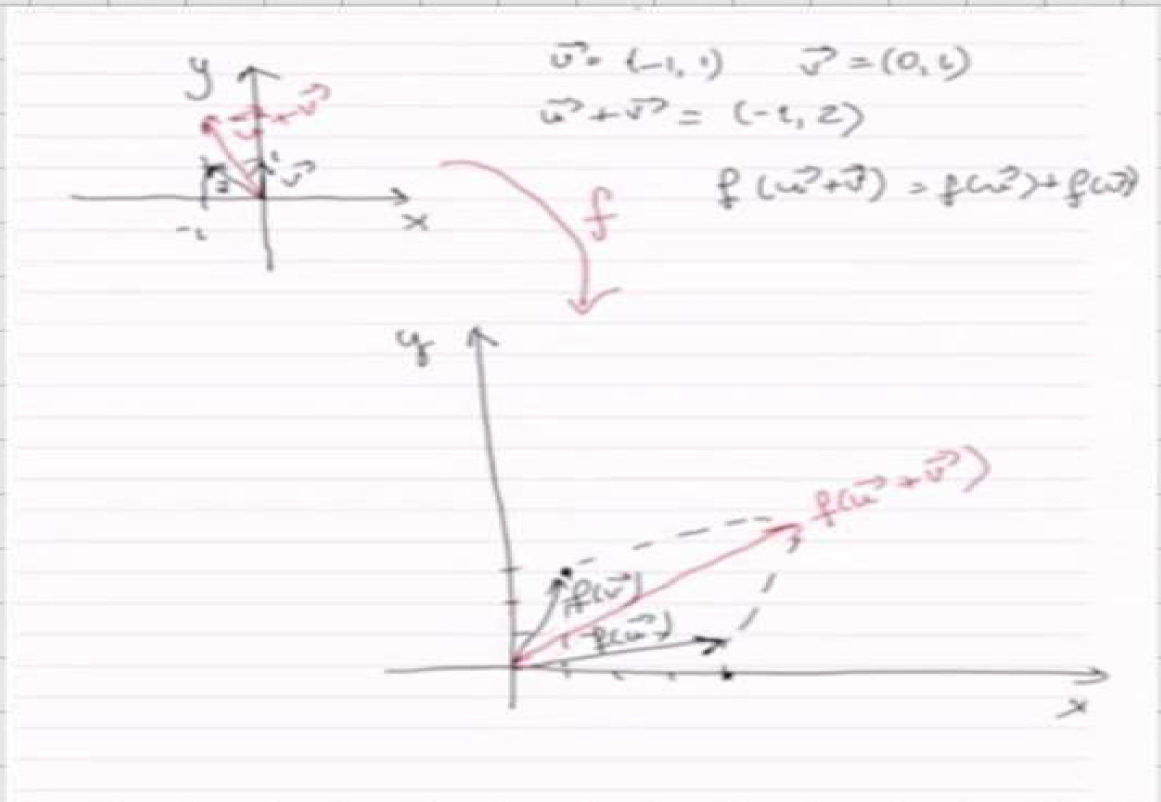
$= K(-3x_1 + y_1, 2x_1 + 3y_1)$

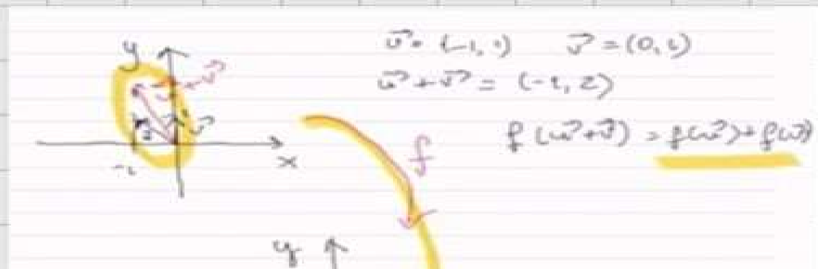
$= K \cdot f(x_1, y_1) = K \cdot f(\vec{u})$ CQD

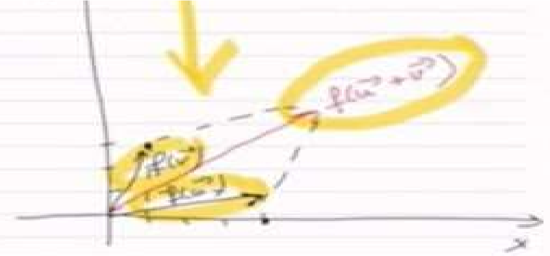
Se $\vec{u} = (-1, 1)$ $\vec{v} = (0, 1)$

$f(\vec{u}) = f(-1, 1) = (-3 \cdot (-1) + 1, 2(-1) + 3 \cdot 1) = (4, 1)$

$f(\vec{v}) = f(0, 1) = (-3 \cdot 0 + 1, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1) = (1, 3)$







13/09

Transformações lineares

Domínio e imagem = Espaço vetorial

- $R^2 \to R^2$
- $R^3 \to R^3$
- $R^2 \to R^3$

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $f: V \to W$ é chamada Transformação linear de V em W, se:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I} \quad f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ \\ \text{II} \quad f(K\vec{u}) = K \cdot f(u) \end{array}\right\} \forall u, v \in V \text{ e } \forall K \in R$$

Núcleo

Núcleo de uma transformação linear

→ $f: V \to W$ ao conjunto de todos $v \in V$ que são transformados em $0 \in W$.

→ Indica-se por $N(f)$ ou $Ker(f)$

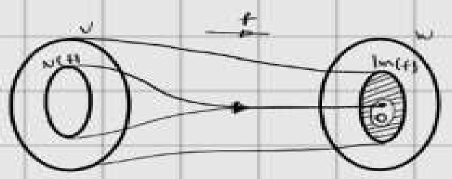
$N(f) = \{v \in V \text{ tal que } f(v) = 0\}$

Imagem

Imagem de uma transformação linear

→ Chama-se Núcleo de uma transformação linear $f: V \to W$ ao conjunto de todos os vetores $w \in W$ que são imagens de vetores $v \in V$. Indica-se por $Im(f)$ ou $f(V)$:

$Im(f) = \{w \in W \text{ tal que } f(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$



Injetora

Dada uma Aplicação ou Transformação LinearT: V → W dizemos que T é **injetora** se dados **u** e $\boldsymbol{v} \in V, com\ T(u) = T(v)$ tivermos $\mathbf{u} = \boldsymbol{v}$
Ou equivalentemente, T é injetora se dados **u** e $\boldsymbol{v} \in V, \mathbf{u} \neq \boldsymbol{v}$ então $T(u) \neq T(v)$

Ex1) $T: R \to R^2$
$x \mapsto (x, 0) \quad T(x) = (x, 0)$

Vamos provar se T é injetora ou não

$\forall x \in R \to T(x) = (x, 0)$

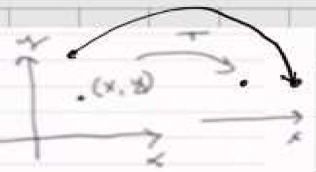
$\forall y \in R \to T(y) = (y, 0)$

$T(x) = T(y) \Rightarrow (x, 0) = (y, 0) \to \boxed{x = y}$

$\therefore$ T é injetora

Ex2) $T: R^2 \to R$
$(x, y) \to x + y$

$T(x, y) = x + y$



T é injetora?

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$T(\vec{u}) = T(x_1, y_1) = x_1 + y_1$

$T(\vec{v}) = T(x_2, y_2) = x_2 + y_2$

$T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \to x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

Contra-exemplo $\quad \vec{u} = \vec{v}$?

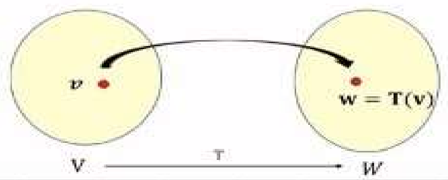
Sejam $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1)$

$T(\vec{u}) = \underbrace{1+0}_{1} \qquad T(\vec{v}) = \underbrace{0+1}_{1}$

$\therefore$ T não é injetora

Sobrejetora

Dada uma Aplicação ou Transformação Linear T:V→W dizemos que T é Sobrejetora se a imagem de T coincidir com W, ou seja T(v) = w

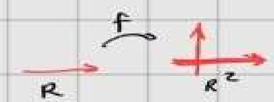


Ex 1) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$x \mapsto (x, 0) \qquad T(x) = (x, 0)$

Vamos provar se T é injetora ou não

T é sobrejetora?

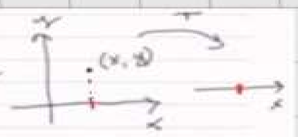
$\forall x,\ T(x) = (x, 0)$



$\therefore$ Não é sobrejetora, pois $\mathbb{R}^2 = \{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ e no caso R leva apenas o $\underline{x}$.

Ex 2) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, y) \to x + y$

$T(x, y) = x + y$



$\forall\ \vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ T(\vec{u}) = x + y = \mathbb{R}$

$\therefore$ T é sobrejetora

TEOREMAS DO NÚCLEO E DA IMAGEM :

i. O núcleo de uma Transformação linear T: V → W é um subespaço vetorial de V

ii. A imagem de uma transformação linear T: V → W é um subespaço vetorial de W

iii. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e T: V → W é uma transformação linear, então

$$\text{Dim}[N(T)] = Dim[\text{Im}(T)] = DimV$$

iv. Seja T: V → W uma aplicação linear, então $Ker(T) = \{0\}$ se e somente se T é INJETORA

v. Seja T: V → W , se $DimV = DimW$ então T é INJETORA se e somente se T é SOBREJETORA

vi. Quando uma transformação linear for INJETORA e SOBREJETORA, ao mesmo tempo, dá-se o nome de ISOMORFISMO

Ex 3 Dada a transformação $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x, y, z) = (x + 2y - z,\ y + 2z,\ x + 3y + z)$

a) Determinar o núcleo de T, a dimensão do Núcleo e uma de suas bases

$N(T) = \ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (0,0,0)\}$

ou seja

$(x + 2y - z,\ y + 2z,\ x + 3y + z) = (0,0,0)$

$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \to x = z - 2(-2z) & \boxed{x = 5z} \\ y + 2z = 0 \to \boxed{y = -2z} \end{cases}$

b) Determinar a imagem de T, a dimensão da imagem e uma de suas bases

$x + 3y + z = 0 \longrightarrow 5z + 3(-2z) + z = 0$

$0z = 0$

Logo a solução é $(5z, -2z, z)$

$z \in \mathbb{R}$, logo $N(t) = \{(5z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{N(t) = z(5, -2, 1), z \in \mathbb{R}\}}$

$\boxed{N(t) = \{(5, -2, 1)\}}$

Como a única variável livre é z, então $\text{Dim}\{N(t)\} = 1$, fazendo $z = 1$ obtém-se $\{(5, -2, 1)\}$ sendo uma base de $N(t)$

$Im(t) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(x,y,z) = (a,b,c)\}$

isto é, existe $(a,b,c) \in Im(T)$ se existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (a,b,c)$

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \rightarrow x = a - z - 2(b - 2z) & \boxed{x = a + 5z - 2b} \\ y + 2z = b \longrightarrow \boxed{y = b - 2z} \\ x + 3y + z = c \end{cases}$$

$(a + 5z - 2b) + 3(b - 2z) + z = c$

$0z = c - a - b$

$c - a - b = 0 \quad \boxed{c = a + b}$

logo $Im(t) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 0\}$

Como são 2 variáveis livres tem-se que $\text{Dim}\{Im(t)\} = 2$

Fazendo $c = a + b$

$a = 1, b = 0 \rightarrow c = 1 \rightarrow \vec{v_1} = (1, 0, 1)$

$a = 0, b = 1 \rightarrow c = 1 \rightarrow \vec{v_2} = (0, 1, 1)$

O conjunto $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$ é uma base de $Im(t)$

c) t é injetora?

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ então $t(\vec{u}) = (x_1 + 2y_1 - z_1, y_1 + 2z_1, x_1 + 3y_1 + z_1)$

$T(\vec{v}) = (x_2 + 2y_2 - z_2, y_2 + 2z_2, x_2 + 3y_2 + z_2)$

$t(\vec{u}) = t(\vec{v})$

Contra-exemplo:

$\vec{u} = (-5, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, -2, 1)$ $\quad \vec{u} \neq \vec{v}$

$T(\vec{u}) = (-5 + 0 - 0, 0, -5 + 0 + 0) = (-5, 0, -5)$

$T(\vec{v}) = (0 + 2(-2) - 1, -2 + 2.1, 0 + 3(-2) + 1)$

$= (-5, 0, -5)$

mas $t(\vec{u}) = t(\vec{v})$ $\quad \therefore t$ não é injetora

d) t é sobrejetora?

$\forall \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t(\vec{v}) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$

$= \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

$\therefore T$ é sobrejetora

$\therefore t$ não é isomorfismo

Matriz de uma transformação linear de Base em Base

(1) $A = \{v_1, v_2\}$ e $B = \{w_1, w_2, w_3\}$

$\quad\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$

$v = \{x_1, x_2\} \qquad T(v)_B = \{y_1, y_2, y_3\}$ $\longrightarrow$ TRANSFORMAÇÃO LINEAR

(2) $T(v) = T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2) = x_1 \cdot T(v_1) + x_2\, T(v_2)$

$T(v_1)$ e $T(v_2)$ são vetores combinações lineares dos vetores B

(3) $T(v_1) = a_{11}\, w_1 + a_{21} \cdot w_2 + a_{31} \cdot w_3$

(4) $T(v_2) = a_{12}\, w_1 + a_{22} \cdot w_2 + a_{32} \cdot w_3$

Substituindo (3) e (4) em (2) vem:

$T(v) = x_1\,(a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} \cdot w_3) + x_2\,(a_{12} w_1 + a_{22}\, w_2 + a_{32} w_3) =$

(5) $T(v) = (a_{11} \cdot x_1 + a_{12}\, x_2)\, w_1 + (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2)\, w_2 + (a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2)\, w_3 =$

(5) em (1)

Matriz de T em relação às bases A e B

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ y_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \\ y_3 = a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [T]^A_B\, v_A$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ T(v_1) & T(v_2) \end{array}$$

Exemplo 1

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(x, y, z) = (2x - y + z,\ 3x + y - 2z)$

Bases $A = \{\overbrace{(1, 1, 1)}^{v_1}, \overbrace{(0, 1, 1)}^{v_2}, \overbrace{(0, 0, 1)}^{v_3}\}$

$B = \{(2, 1), (5, 3)\}$

a) $[f]^{A \to 3}_{B \to 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 5 & +3 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T(\vec{v_1}) & T(\vec{v_2}) & T(\vec{v_3}) \end{array}$$

$T(\vec{v_1}) = T(1, 1, 1) = (2x - y + z,\ 3x + y - 2z)$
$= (2 \cdot 1 - 1 + 1,\ 3 \cdot 1 + 1 - 2 \cdot 1)$
$= (2, 2)$

$T(\vec{v_1}) = a_{11} \cdot (2, 1) + a_{21}\,(5, 3)$
$= (2a_{11},\ a_{11}) + (5a_{21},\ 3a_{21}) = (2a_{11} + 5a_{21},\ a_{11} + 3a_{21})$

OCTAVE

$a = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$ mldivide (a, b)

$\therefore$

$\begin{cases} 2a_{11} + 5a_{21} = 2 \\ a_{11} + 3a_{21} = 2 \end{cases} \longrightarrow \underline{a_{11} = -4}$

$\underline{a_{21} = 2}$

$T(\vec{v_2}) = T(0, 1, 1) = (0 - 1 + 1,\ 0 + 1 - 2)$ $\qquad$ $T(\vec{v_3}) = T(0, 0, 1) = (0 - 0 + 1,\ 0 + 0 - 2)$

$= (0, -1)$ $\qquad\qquad$ $= (1, -2)$

$T(\vec{v_2}) = a_{12}(2,1) + a_{22}(5,3)$

$= (2a_{12}, a_{12}) + (5a_{22}, 3a_{22})$

$= (2a_{12} + 5a_{22}, a_{12} + 3a_{22})$

$\therefore$

$$\begin{cases} 2a_{12} + 5a_{22} = 0 \\ a_{12} + 3a_{22} = -1 \end{cases} \longrightarrow \underline{a_{12} = 5} \quad \underline{a_{22} = -2}$$

$T(\vec{v_3}) = a_{13}(2,1) + a_{23}(5,3)$

$= (2a_{13}, a_{13}) + (5a_{23}, 3a_{23})$

$= (2a_{13} + 5a_{23}, a_{13} + 3a_{23})$

$\therefore$

$$\begin{cases} 2a_{13} + 5a_{23} = 1 \\ a_{13} + 3a_{23} = -2 \end{cases} \therefore \underline{a_{13} = 13} \quad \underline{a_{23} = -5}$$

b) $\vec{v} = (3,-4,2)$ $\qquad T(\vec{v})_B = [f]^A_B \, v_A = ?$ $\longrightarrow$ $T(\vec{v})_B = \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}} = \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 33 \\ -10 \end{bmatrix}}$

$\vec{v} = a\cdot\vec{v_1} + b\cdot\vec{v_2} + c\cdot\vec{v_3}$

$(3,-4,2) = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1)$

$(3,-4,2) = (a,a,a) + (0,b,b) + (0,0,c)$

$(3,-4,2) = (a, a+b, a+b+c)$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a+b = -4 \rightarrow b = -7 \\ a+b+c = 2 \rightarrow c = 6 \end{cases} \therefore \; v_A = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 $\quad$ 23. Boldrini

$\alpha = \{\overset{v_1}{(0,2)}, \overset{v_2}{(2,-1)}\}$

$\beta = \{\overset{w_1}{(1,1,0)}, \overset{w_2}{(0,0,-1)}, \overset{w_3}{(1,0,1)}\}$

$[S]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, $\quad \underline{S(x,y) = ?}$

$T(\vec{v_1}) \quad T(\vec{v_2})$

$S(\vec{v_1}) = \underline{S(0,2)} = 2(1,1,0) + 4(0,0,-1) + 0(1,0,1)$

$S(0,2) = (2,2,0) + (0,0,-4) + (0,0,0)$

$\underline{S(0,2) = (2,2,-4)}$

$S(\vec{v_2}) = \underline{S(2,-1)} = 0(1,1,0) + 0(0,0,-1) + (-4)(1,0,1)$

$S(2,-1) = (0,0,0) + (0,0,0) + (-4,0,-4)$

$\underline{S(2,-1) = (-4,0,-4)}$

$\vec{v} = a\cdot\vec{v_1} + b\cdot\vec{v_2}$

$(x,y) = a(0,2) + b(2,-1)$

$(x,y) = (0,2a) + (2b,-b)$

$(x,y) = (2b, 2a-b)$

$$\begin{cases} x = 2b \rightarrow \boxed{b = \frac{x}{2}} \\ y = 2a - b \rightarrow \boxed{a = \frac{x+2y}{4}} \end{cases}$$

$(x,y) = \frac{x+2y}{4}(0,2) + \frac{x}{2}(2,-1)$

$\left(0, \frac{x+2y}{2}\right) + \left(x, -\frac{x}{2}\right)$

$\left(0+x, \frac{x+2y}{2} - \frac{x}{2}\right)$

(x,y) ✓

$\cancel{\frac{x}{2}} + \frac{2y}{2} - \cancel{\frac{x}{2}}$

BASE CANÔNICA

$\{(1,0),(0,1)\}$

$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

$S(x,y) = S\left[\frac{x+2y}{4}(0,2) + \frac{x}{2}(2,-1)\right]$

$S(x,y) = S\left[\frac{x+2y}{4}(0,2)\right] + S\left[\frac{x}{2}(2,-1)\right]$

$S(x,y) = \frac{x+2y}{4} \cdot \underline{S(0,2)} + \frac{x}{2} \cdot \underline{S(2,-1)}$

$S(x,y) = \frac{x+2y}{4} \cdot (2,2,-4) + \frac{x}{2}(-4,0,-4)$

$= \left(\frac{x+2y}{2}, \frac{x+2y}{2}, -x+2y\right) + (-2x, 0, -2x)$

$S(x,y) = \left(\frac{-3x+2y}{2}, \frac{x+2y}{2}, -3x+2y\right)$

$S(0,2) = \left(\frac{0+2\cdot2}{2}, \frac{2\cdot2}{2}, -2\cdot2\right)$

$= (2,2,-4)$ ✓

Transformações no plano e composta

Transformações do plano para o plano

1) Expansão ou contração uniforme

$T: R^2 \rightarrow R^2$

$\vec{v} \mapsto 2\vec{v}$ $\quad$ ou $\quad$ $T(x,y) = 2(x,y)$

Matricialmente: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$

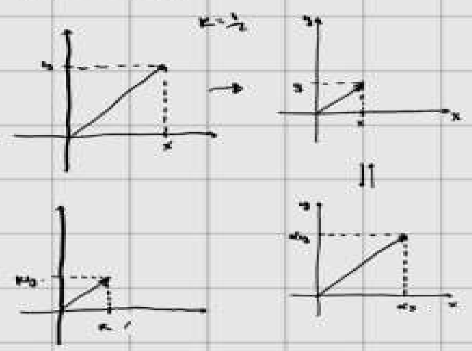
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

matriz canônica $[T]^\alpha_B$ de transformação

Contração $\qquad$ Expansão

$\vec{v} \longrightarrow K.\vec{v}$

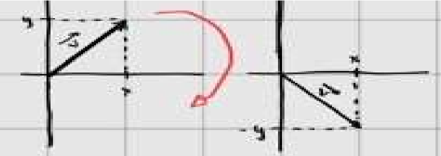
$K = \frac{1}{2}$



2) Reflexão em torno do eixo x

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (x, -y)$

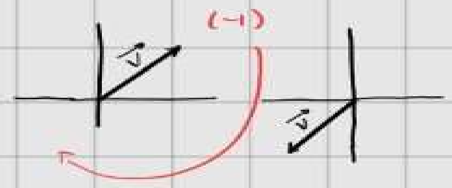


$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

3) Reflexão na origem

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\vec{v} \longmapsto -\vec{v}$



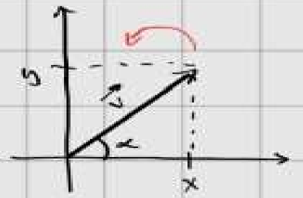
$T(x, y) = (-x, -y)$

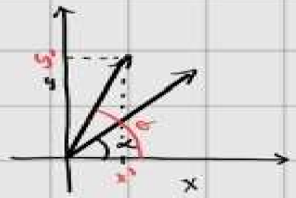
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

4) Rotação de um ângulo θ

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (x', y')$





(descrição pg 149 Boldrini)

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

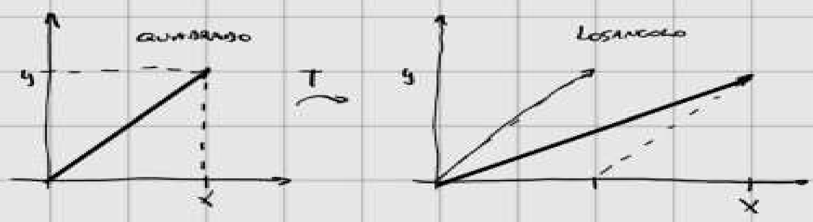
5) Cisalhamento horizontal

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (x + \alpha y, y) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Ex:

$T(x,y) = (x + 2y, y) \quad \Big| \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x+2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$



6) Translação

$(x, y) \longmapsto (x + a, x + b)$

$T(x,y) \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Teorema

Sejam $T_1: V \to W$, $T_2: W \to U$ transformações lineares e α, β, γ bases de V, W e U respectivamente.

Então a composta de T_1 com T_2 $(T_2 \circ T_1): V \to U$ é linear e $[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma} = [T_2]^{\beta}_{\gamma} \, [T_1]^{\alpha}_{\beta}$

$$\begin{tikzcd} & W\ (\beta) \arrow[dr, "T_2"] & \\ (\alpha)\ V \arrow[ur, "T_1"] \arrow[rr, "T_2 \circ T_1"'] & & U\ (\gamma) \end{tikzcd}$$

Ex 1) Seja a expansão em $\mathbb{R}^2$:

$T_1(x,y) = 2(x,y)$ em um cisalhamento

$T_2(x,y) = (x, 2y, y) \quad [T_2 \circ T_1]^A_A$

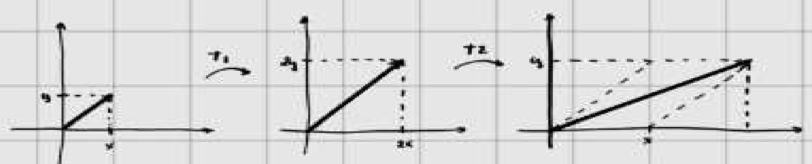
$\left.\begin{matrix} T_1: \\ T_2: \end{matrix}\right\}$ base canônica em $\mathbb{R}^2$, chamo-a de A.

$T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto 2(x,y) \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto (x + 2y, y) \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$



$[T_2 \circ T_1]^A_A = [T_2]^A_A \cdot [T_1]^A_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ //

Ex 2) Questão 13 - Boldrini

$R(x,y) = (2x, x-y, y) \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$S(x,y,z) = (y-z, z-x) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

a) Ache $R \circ S$ C = base canônica

$[R \circ S] = [R] \cdot [S]$

$R(x,y) = (2x, x-y, y)$

$[R]^C_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$S(x,y,z) = (y-z, z-x)$

$[S]^C_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$[R \circ S] = \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [R \circ S] = (x,y,z) = (2y - 2z,\ x + y - 2z,\ -x + z)$

b) Ache $S \circ R$

$[S \circ R] = \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$[S \circ R] = (x - 2y,\ -2x + 1)$

(13) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$

a) Determine uma base do núcleo de T.

$N(T) = \ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

ou seja

$(z, x-y, -z) = (0,0,0)$

$\boxed{x=y}$ e $\boxed{z=0}$

$N(T) = \{(x,x,0);\ x \in \mathbb{R}\}$

$\therefore$ Base $= \{(1,1,0)\}$ $\dim\{N(T)\} = 1$

c) T é sobrejetora? Justifique

Não, pois a dimensão da imagem é diferente da dimensão do contradomínio

b) Dê a dimensão da imagem de T

$\operatorname{Im} T = \{(z, x-y, -z) \in \mathbb{R}^3,\ x,y,z \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{x(0,1,0) + y(0,-1,0) + z(1,0,1);\}$

$= \{(0,1,0), (0,-1,0), (1,0,-1)\}$ (-1)

dimensão $= \cancel{2}\ 1$

d) Faça um esboço de Ker T e Im T.

$T(1,1,1) \quad T(x,y,z) = (1, 0, -1)$

---

(14) a) Seja V o espaço vetorial de matrizes 2×2 com base

$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ / Se $T: V \to \mathbb{R}^2$ é dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+d, b+c)$,

a) Ache $[T]^\beta_\alpha$ onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (1,0)$, $T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,1)$, $T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (0,1)$, $T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (1,0)$

$(1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$

$(0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$

$(0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$

$(1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$

$\leadsto [T]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Se $S: \mathbb{R}^2 \to V$ e $[S]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Ache S e, se for possível (a,b) tal que $S(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ canônica

$(x,y)_\alpha = x(1,0) + y(0,1)$

$S(x,y))_\beta = [S]^\alpha_\beta \left[(x,y)\right]_\alpha$

$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \\ -x \quad 0 \\ 0 \quad -y \end{bmatrix}$

$S(x,y) = (2x+y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (x-y)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2x+y & x-y \\ -x & y \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2x+y & x-y \\ -x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$2x + y = 1 \rightarrow 2.0 + 1 = 1$

$x - y = 1 \rightarrow X$

$\left.\begin{matrix} \boxed{-x = 0} \\ \boxed{y = 1} \end{matrix}\right\} 0 - 1 = -1$

Não é possível