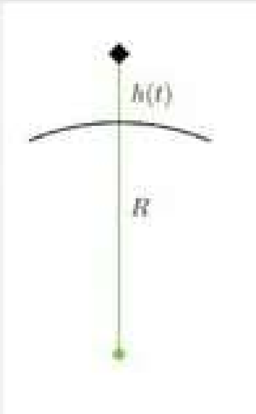
EDO 1 – s1 e 2

segunda-feira, 27 de fevereiro de 2023 21:27

Lista 1 - Módulo 1

1) Nem tudo o que sobe desce. De fato, podemos imaginar que uma pedra seja lançada de um estilingue com uma velocidade tão grande que acabe escapando da atração gravitacional da Terra. Para ver que isso pode ocorrer e para se ter uma idéia dessa velocidade, denote por v_0 a velocidade inicial, por m a massa e por $x(t)$ a distância da pedra até o centro da terra no instante t. Desconsiderando a resistência do ar, o corpo está sujeito apenas à força gravitacional $F = -mMG/x^2$, em que G é constante, M é a massa da Terra e R seu raio. Pela segunda lei de Newton, temos que



Resultante das forças que atuam no corpo

força gravitacional

$$(*)\ \underbrace{m}_{\text{massa}}\underbrace{x''(t)}_{\text{aceleração}} = -\overbrace{\frac{mMG}{x(t)^2}}.$$

x(t) = Posição

x'(t) = velocidade

$$x''(t) = -\frac{MG}{x(t)^2}$$

a) Cancelando a massa m e multiplicando a equação $(*)$ por $x'(t)$, obtemos que $x'(t)x''(t) = -MGx'(t)/x(t)^2$. Integre ambos os lados dessa equação e use as condições iniciais $x(0) = R$ e $x'(0) = v_0$ para obter uma equação diferencial de primeira ordem para $x(t)$.

$$\int x'(t)\cdot x''(t)\,dt = \int \frac{-MG\,x'(t)}{x(t)^2}$$

$$\int v\,dv = -MG\int w^{-2}\,dw$$

$$\frac{v^2}{2}+K_1 = -MG\,\frac{w^{-1}}{-1}+K_2$$

$$\frac{x'(t)^2}{2}+A = \frac{MG}{x(t)}+K_2$$

$$x'(t)^2 = \frac{2MG}{x(t)} + \overbrace{K_2-K_1}^{K}$$

$$\frac{x'(t)^2}{2} = \frac{MG}{x(t)} + K$$

t = 0

$x(0) = R$ e $x'(0) = v_0$

$$v_0^2 = \frac{2MG}{R} + K$$

isolando a constante

$$K = v_0^2 - \frac{2MG}{R}$$

$$x'(t)^2 = \frac{2MG}{R} + v_0^2 - \frac{2MG}{R}$$

b) Mostre que, se $v_0 \geq v_e = \sqrt{\frac{2MG}{R}}$, então a velocidade $x'(t)$ é sempre positiva. A constante v_e é denominada a velocidade de escape da Terra.

$$v_0 \geq v_e \to v_0^2 - \frac{2MG}{R} \geq 0$$

$$x'(t)^2 = \frac{2MG}{R} + \boxed{v_0^2 - \frac{2MG}{R}} \geq 0$$

Não diminui

Não se anula

c) Quando $v_0 = v_e$, mostre que $x(t)$ satisfaz uma equação diferencial separável. Resolva essa equação e determine $x(t)$ usando que a posição inicial é $x(0) = R$.

$$x'(t)^2 = \frac{2MG}{x(t)}$$

1 $x(t) = 0$

$$\frac{2MG}{x(t)} = 0$$

ñ possui x_{eq}

2 $x'(t)^2 \cdot x(t) = 2MG$

$x(t) > 0$

$$x'(t)\sqrt{x(t)} = \sqrt{2MG}$$

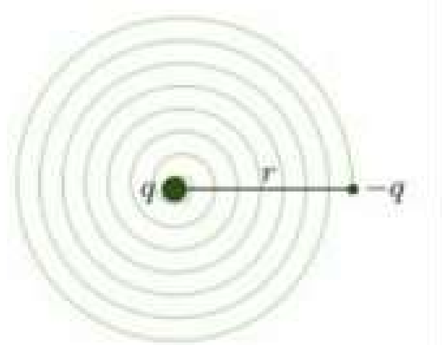
3 $\int v^{\frac{1}{2}}\,dv = \int \sqrt{2MG}\,dt$

$$\frac{2}{3}\,v^{\frac{3}{2}} + K_1 = \sqrt{2MG}\,t + K_2$$

$$x(t)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2MG}\,t + K$$

4 $$\boxed{x(t) = \left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2MG}\,t + K\right)^{\frac{2}{3}}}$$

2) Um dos primeiros desafios da física atômica foi explicar a longa vida do átomo mais simples: o átomo de hidrogênio. Segundo experiências iniciais conduzidas por Rutherford entre 1909 e 1911, o átomo de hidrogênio consiste de um életron de carga $-q$ e massa pequena orbitando por atração eletromagnética ao redor de um núcleo de carga q e massa grande. De acordo com o eletromagnetismo clássico, uma carga acelerada irradia energia: esse é o princípio do funcionamento de antenas. Desse modo, se o elétron orbitasse ao redor do núcleo segundo as leis da física clássica, ele perderia energia à cada revolução e, num movimento espiral, eventualmente colidiria com o núcleo.



O átomo de hidrogênio poderia ser compreendido dessa maneira se esse tempo de colisão fosse grande o suficiente para ser compatível com a longa vida do átomo de hidrogênio observada na natureza: a chamada estabilidade do átomo de hidrogênio. O propósito desse exercício é mostrar que esse tempo de colisão seria muito pequeno, mostrando que a física clássica não explica o movimento do elétron ao redor do núcleo do átomo de hidrogênio nem sua estabilidade.

Seja $r(t)$ a distância entre o elétron e o núcleo, onde t é medido em segundos. Em unidades adequadas, a energia mecânica do elétron é

$$E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{q^2}{r(t)}$$

onde m é a massa do elétron e $-q^2/r(t)$ é o potencial da força de Coulumb entre entre as cargas $-q$ e q. Aproximando cada revolução da órbita espiral do elétron por uma órbita circular de raio $r(t)$, temos que o elétron possui aceleração centrípeta dada por

$$a(t) = \frac{v(t)^2}{r(t)}$$

Igualando a força centrípeta $ma(t)$ com a força de Coulumb entre as cargas $-q$ e q obtemos que

$$(*) \quad ma(t) = m\frac{v(t)^2}{r(t)} = \frac{q^2}{r(t)^2}$$

---

a) Substitua $(*)$ na energia $E(t)$ e mostre que a energia mecânica do elétron é dada por $E(t) = -\dfrac{q^2}{2}\dfrac{1}{r(t)}$. A partir disso, obtenha a taxa $E'(t)$ em que o elétron perde energia.

$$\cancel{a(t)}\cdot\frac{m\cdot v(t)^2}{\cancel{R(t)}} = \frac{q^2}{R(t)^2}\cdot\cancel{R(t)} \rightarrow m\cdot v(t)^2 = \frac{q^2}{r(t)} \rightarrow E(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{r(t)}$$

$$E(t) = \frac{q^2}{2r(t)} - \frac{q^2}{r(t)} = \frac{q^2}{r(t)}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{q^2}{r(t)}\cdot\frac{1}{2} \therefore$$

$$E'(t) = -\frac{q^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{r(t)}\right)'$$

$$E'(t) = -\frac{q^2}{2}\cdot -\frac{1}{r(t)^2}\cdot r'(t)$$

$$\boxed{E'(t) = \frac{q^2}{2}\cdot\frac{r'(t)}{r(t)^2}}$$

b) Uma carga q com aceleração $a(t)$ irradia energia à taxa dada pela Lei de Lamour do eletromagnetismo clássico

$$P(t) = -\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}a(t)^2$$

onde c é a velocidade da luz. Substituindo $(*)$ em $P(t)$ obtenha a taxa com que o elétron perde energia em função do raio $r(t)$ da órbita do elétron. Igualando isso com $E'(t)$ do item anterior obtenha uma EDO para $r(t)$.

$$a(t) = \frac{q^2}{m\cdot R(t)^2} \quad \Bigg| \quad P(t) = \frac{-2}{3}\cdot\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{q^2}{m\cdot R(t)^2}\right)^2 = \frac{-2}{3}\cdot\frac{q^6}{c^3}\cdot\frac{1}{m^2\cdot R(t)^4}$$

$$\frac{q^2}{2}\cdot\frac{r'(t)}{r(t)^2} = \frac{-2}{3}\cdot\frac{q^6}{c^3}\cdot\frac{1}{m^2\cdot R(t)^4}$$

$$r'(t) = \frac{-2}{3}\cdot\frac{q^6}{c^3}\cdot\frac{r(t)^2}{m^2\cdot r(t)^4}\cdot\frac{2}{q^2}$$

$$r'(t) = \frac{-4}{3}\cdot\frac{q^4}{c^3}\cdot\frac{1}{m^2\cdot r(t)^2} \rightarrow \boxed{r'(t) = \frac{-4q^4}{3c^3\cdot m^2}\cdot\frac{1}{r(t)^2}}$$

c) Mostre que a EDO do item anterior é separável e obtenha a solução $r(t)$ com condição inicial $r(0) = r_0$

inicial $s(0) = r_0$.

$3 \cdot C(A+B)$

① $\frac{-4q^4}{3c^3 \cdot m^2} \cdot \frac{1}{r(t)^2} = 0$ não existe

② $r'(t) \cdot r(t)^2 = \frac{-4}{3} \cdot \frac{q^4}{c^3 \cdot m^2}$

③ $\int r^2 \cdot dr = \int -\frac{4}{3} \cdot \frac{q^4}{c^3 \cdot m^2}\, dt$

$\frac{r^3}{3} + A = \frac{-4}{3} \cdot \frac{q^4}{c^3 \cdot m^2} \cdot t + B$

$\frac{r(t)^3}{3} + = \frac{-4}{3} \cdot \frac{q^4}{c^3 \cdot m^2} \cdot t + \underbrace{C}_{A+B}$

④ $r(t) = \sqrt[3]{-4 \cdot \frac{q^4}{c^3 \cdot m^2} \cdot t + \underbrace{D}}$

$t = 0 \to \sqrt[3]{D} = R_0$

$\to R_0^3 = D$

$$\boxed{r(t) = \sqrt[3]{R_0^3 - 4 \cdot \frac{q^4}{c^3 \cdot m^2} \cdot t}}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 2 \\ \hline 54 \end{array}$$

d) Encontre o instante t tal que $r(t) = 0$, que é o tempo de colisão entre o elétron clássico e o núcleo. Usando as ordens de grandeza das constantes nas unidades adotadas

$$m = 10^{-27} \quad c = 10^{10} \quad q = 10^{-10} \quad r_0 = 10^{-9}$$

mostre que a ordem de grandeza de t é de $10^{-11}/4$ segundos.

$$\left(\sqrt[3]{R_0^3 - 4 \cdot \frac{q^4}{c^3 \cdot m^2} \cdot t}\right)^3 = (0)^3$$

$R_0^3 = \frac{4 \cdot q^4}{c^3 \cdot m^2} \cdot t$

$-27 + 30 - 54 + 40 =$
$3 - 14 = -11$

$\frac{R_0^3 \cdot c^3 \cdot m^2}{4 \cdot q^4} = t \to \frac{10^{-27} \cdot 10^{30} \cdot 10^{-54}}{4 \cdot 10^{-40}} = t$

$$\to \boxed{t = \frac{10^{-11}}{4}}$$

3) Numa reação química do tipo $X + Y \to Z$, a taxa de crescimento da concentração de Z é proporcional ao produto das concentrações de X e Y. Como a massa total do sistema se conserva, essas concentrações são proporcionais às respectivas quantidades, de modo que a taxa de formação de Z é proporcional ao produto das quantidades remanescentes de X e Y. Supondo que 1g de X combina com 3g de Y para formar 4g de Z e denotando por $q(t)$ a quantidade de Z no instante t, temos que $q(t)/4$ corresponde à quantidade consumida de X e $3q(t)/4$ corresponde à quantidade consumida de Y. Supondo que existem inicialmente 50 g de X e 33 g de Y, as quantidades remanescentes de X e Y após t segundos são, respectivamente, $\boxed{50 - q(t)/4 \text{ e } 33 - 3q(t)/4}$. Com essas considerações, temos que a taxa de formação do composto Z é dada por

$$q'(t) = k\left(50 - \frac{q(t)}{4}\right)\left(33 - \frac{3q(t)}{4}\right) = K(200 - q(t))(44 - q(t))$$

onde k e K são constantes positivas.

a) Determine $q(t)$ usando que a quantidade inicial de Z é $q(0) = 0$.

1

$q' = 0$

$200 - q(t) = 0$

$q(t) = 200$

$44 - q(t) = 0$

$q(t) = 44$

2

$q'(t) = K(200 - q(t))(44 - q(t))$

$$\frac{q'(t)}{(200-q(t))(44-q(t))} = K$$

3

a) $\displaystyle\int \frac{q'(t)}{(200-q(t))(44-q(t))}\,dt =$ b) $\displaystyle\int K\,dt$

$K t + R$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(200-q)(44-q)}\,dq$

$$\frac{1}{(200-q)(44-q)} = \frac{A}{(200-q)} + \frac{B}{(44-q)} \rightarrow \frac{A(44-q)}{(200-q)(44-q)} + \frac{B(200-q)}{(200-q)(44-q)}$$

$0 = -A - B$

$1 = A(44-q) + B(200-q)$

$0q + 1 = (-B-A)q + 44A + 200B$

$B = \frac{1}{156}$

$1 = 44A + \cancel{200B}$

$0 = -A - \cancel{B}\ (\times 200)$

$1 = -156A \rightarrow A = \frac{-1}{156}$

$$\int \frac{A}{(200-q)} + \frac{B}{(44-q)}\,dq = \int \frac{-1}{156}\cdot\frac{1}{(200-q)}\,dq + \int \frac{1}{156}\cdot\frac{1}{(44-q)}\,dq$$

$$\frac{-1}{156}\int \frac{1}{(200-q)} + \frac{1}{156}\int\frac{1}{44-q}\,dq$$

troca o sinal

$$\frac{1}{156}\ln|200-q| - \frac{1}{156}\ln|44-q| + R$$

$$\frac{1}{156}\ln|200-q| + \frac{1}{156}\ln\left|\frac{1}{44-q}\right| + R$$

$$\frac{1}{156}\ln\left|\frac{200-q}{44-q}\right| + R$$

$$\frac{1}{156}\ln\left|\frac{200-q}{44-q}\right| + S = Kt + R$$

$$\frac{1}{156}\ln\left|\frac{200-q(t)}{44-q(t)}\right| = Kt + R + S$$

4

$$\ln\left|\frac{200-q(t)}{44-q(t)}\right| = 156Kt + \overbrace{C}^{156(R+S)}$$

$$\frac{200-q(t)}{44-q(t)} = e^{156Kt + C}$$

$t(0)$

$q(0)$

$D = \frac{200}{44}$

$$\frac{200-q(t)}{44-q(t)} = e^{156Kt} + \overbrace{e^{C}}^{D}$$

$$\frac{200-q(t)}{44-q(t)} = \frac{200}{44}e^{156Kt}$$

$44(200-q(t)) = (200(44-q(t))) \cdot e^{156Kt}$

$8800 - 44q(t) = (8800 - 200q(t)) \cdot e^{156Kt}$

$+200q(t)\cdot e^{156Kt} - 44q(t) = 8800e^{156Kt} - 8800$

$q(t)(+200\cdot e^{156Kt} - 44) =$ "

$$\boxed{q(t) = \frac{8800e^{156Kt} - 8800}{200e^{156Kt} - 44}}$$

b) Determine o que acontece com a quantidade $q(t)$ após muito tempo decorrido, calculando o limite $\lim_{t\to\infty} q(t)$. Sobrará algum reagente após muito tempo decorrido?

?

$\frac{\infty}{\infty}$ L.H

$$\lim_{t\to\infty} \frac{8800e^{156Kt} - 8800}{200e^{156Kt} - 44}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{8800(e^{156Kt}\cdot 156K)}{200(e^{156Kt}\cdot 156K)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{5800}{266} = \boxed{44}$$

4) Podemos modelar a produção de iogurte através do modelo logístico, onde uma população $p(t)$ de bactérias cresce transformando uma quantidade $L(t)$ de leite em iogurte. Segundo esse modelo, a taxa de reprodução da população por bactéria $p'(t)/p(t)$ é proporcional à taxa de consumo de leite por bactéria $-L'(t)/p(t)$, que é proporcional à concentração de leite, que por sua vez é proporcional a $L(t)$, uma vez que a massa total do sistema se conserva. Deste modo, existem constantes positivas a e b tais que

$$(*) \qquad \frac{p'(t)}{p(t)} = -a\frac{L'(t)}{p(t)} = bL(t)$$

a) Utilizando a equação $(*)$, verifique que $L'(t) = -\frac{1}{a}p'(t)$. Integrando essa equação e utilizando as condições iniciais $p(0) = p_0$ e $L(0) = L_0$, mostre que $L(t) = \frac{1}{a}(c - p(t))$, onde $c = aL_0 + p_0$.

$$\frac{p'(t)}{\cancel{p(t)}} = -a\,\frac{L'(t)}{\cancel{p(t)}} \to \int L'(t) = \int \frac{-1}{a}\cdot p'(t)$$

$$L(t) = \frac{-1}{a}\cdot p(t) + C$$

$p(0) = p_0 \qquad L(0) = L_0$

$L(0) = -\frac{1}{a}\cdot p(0) + C$

$\boxed{C = L_0 + \frac{1}{a} p_0} \quad \times a$

$$L(t) = \frac{1}{a}(c - p(t))$$

$\boxed{c = L_0 \cdot a + p_0}$

$$L(t) = \frac{c - p(t)}{a} \longrightarrow L(t)\,a = c - p(t)$$

$\boxed{c = L(t)\,a - p(t)}$

$(=)$

b) Substituindo a expressão de $L(t)$ obtida no item anterior na equação $(*)$, verifique que $p'(t) = \dfrac{b}{a}p(t)(c - p(t))$, denominada <u>*equação logística*</u>.

$$\left.\begin{aligned} \frac{p'(t)}{p(t)} &= bL(t) \\ L(t) &= \frac{1}{a}(c - p(t)) \end{aligned}\right\} \quad \frac{(t)}{p(t)} = \frac{b}{a}(c - p(t))$$

$$p'(t) = \frac{b}{a}\cdot p(t)\cdot(c - p(t))$$

c) Determine $p(t)$ usando que a população inicial é $p(0) = p_0$.

$$\frac{b}{a}\, p(t)\cdot(c - p(t)) = 0$$

① $\frac{b}{a} = 0 \;\Big|\; p(t) = 0 \;\Big|\; (c - p(t)) = 0$, $p(t) = c$

② $$\frac{p'}{p(t)\cdot(c - p(t))} = \frac{b}{a}$$

a) $$\int \frac{1}{p\cdot(c-p)}\,dp = \int \frac{b}{a}\,dt$$

a) $$\frac{1}{p(c-p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{c-p} = \frac{A(c-p)}{p(c-p)} + \frac{B(p)}{p(c-p)} = \frac{1}{p(c-p)}$$

$1 = A(c-p) + Bp$

$0p + 1 = (B - A)p + Ac$

$Ac = 1 \qquad B - (1/c) = 0$

$A = 1/c \qquad B = 1/c$

$$\frac{1}{c}\int \frac{1}{p}\,dp + \frac{1}{c}\int \frac{1}{c-p}\,dp$$

$$\frac{1}{c}\ln|p| + \frac{1}{c}\ln\left|\frac{1}{c-p}\right| + R \to \frac{1}{c}\ln\left|\frac{p}{c-p}\right| + R$$

$$\to \frac{1}{c}\ln\left|\frac{p(t)}{c - p(t)}\right| + R = \frac{b}{a}t + S$$

④ $$\frac{p(t)}{c - p(t)} = e^{c\cdot\frac{b}{a}\cdot t} + \underbrace{e^{\frac{c(R+S)}{c}}}_{D}$$

$$\frac{p_0}{c - p_0} = 1\cdot D$$

$$\frac{p(t)}{c - p(t)} = e^{\frac{cb}{a}t}\cdot\frac{p_0}{c - p_0}$$

$p(t)\cdot(c - p_0) = (c - p(t))\,p_0\cdot e^{w}$

$p(t)\cdot c - p_0\cdot p(t) = p_0\cdot c\cdot e^{w} - p(t)\cdot p_0\cdot e^{w}$

$p(t)\cdot c - p_0\cdot p(t) + p(t)\cdot p_0\cdot e^{w} = p_0\cdot c\cdot e^{w}$

$p(t)(c - p_0 + p_0\cdot e^{w}) = p_0\cdot c\cdot e^{w}$

$$\boxed{p(t) = \frac{p_0\cdot c\cdot e^{\frac{cb}{a}t}}{c - p_0 + p_0\cdot e^{\frac{cb}{a}t}}}$$

① Lista de fixação

$\operatorname{sen}(0) = 0$

$\cos(0) = 1$

ENCONTRE OS LIMITES

$u = 2^x \to du = 2^x\cdot\ln(2)$

① a) $$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1)'}{(x^3)'} \to \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3x^2} = \infty$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1 - \cos(x))'}{(x^2)'} \to \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}(x))'}{(2x)'} \to \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x^2} \to \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x^2} \quad \frac{0}{1} \to -\infty$$

1^∞ indeterminação

d) $$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{\frac{2x}{x+1}} \to \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}} \to \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\log\frac{2x}{x+1}} \to e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\frac{2x}{x+1}}{x}} \to e^0 = 1$$

$\frac{2}{\infty} \to 0$

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{x!}{2^x} \to \infty$

DETERMINE A INTEGRAÇÃO

2 a) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx \to \int \frac{dy}{y} \to \int \frac{1}{y} \cdot dy \to \ln|y| + C \to \ln|f(x)| + C$

b) $\int -(3x^2 + 6) \cdot \operatorname{sen}(x^3 + 6x) \cdot dx \to \int - \operatorname{sen}(u) \cdot du \xrightarrow{-(-\cos)} \cos(u) \, u' + C$

$\frac{3x^3}{3} + 6x = (x^3 + 6x)'$

$\cos x^3 + 6x + C$

c) $\int \frac{6x^2}{4 + x^3} \, dx \to 2 \int \frac{3x^2}{4 + x^3} \cdot dx \to 2 \int \frac{1}{u} \cdot du \to 2 \ln|u| + C$

$\to 2 \ln|4 + x^3| + C$

$u = 4 + x^3$

d) $\int e^{e^x} \cdot e^x \cdot dx \to \int e^u \cdot du \to e^u = e^{e^x} + C$

e) $\int x \sqrt{x - 1} \cdot dx \to \int (u + 1) \sqrt{u}^{\,\nearrow \frac{1}{2}} \cdot du \to \int u^{\frac{3}{2}} du + \int u^{\frac{1}{2}} du$

$u = x - 1$

$\to \frac{2}{3} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \to \frac{2}{3} (x - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$

UTILIZANDO O MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS, RESOLVA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL PROPOSTA

3 a) $y'(t) - by(t) = 0$

$y'(t) = b \cdot y(t)$

① $b \cdot y(t) = 0$

$y(t) = 0$

② $\frac{y'(t)}{y(t)} = b$

③ $\int \frac{dy}{y} = \int b$

$\ln|y(t)| = b \cdot t + C$

④ $y(t) = e^{b \cdot t + C}$

$y(t) = e^{b \cdot t} \cdot e^{C}$

$y(t) = D \cdot e^{b t}_{,\, C \neq 0}$ → SEPARADA

$\{ D \cdot e^{bt}, 0 \}$ → ORIGINAL

b) $y'(t) = \frac{t^2}{y(t)}$

① $\frac{t^2}{y(t)} = 0$ eq ñ existe

② $y'(t) \cdot y(t) = t^2$

③ $\int y \cdot dy = \int t^2 \, dt$

$\frac{y^2}{2} = \frac{t^3}{3} + C$

③ $\frac{y(t)^2}{2} = \frac{t^3}{3} + C$

$y(t) = \pm \sqrt{\frac{2t^3}{3} + C}$

c) $y'(t) + y(t) \cdot \operatorname{sen}(t) = 0$

$\to y'(t) = -\operatorname{sen}(t) \cdot y(t)$

① $-\operatorname{sen}(t) \cdot y(t) = 0 \to y(t) = 0$

② $\frac{y'(t)}{y(t)} = -\operatorname{sen}(t)$

③ $\int \frac{dy}{y} = \int -\operatorname{sen}(t) \, dt$

$\ln|y(t)| = -\cos(t) + C$

④ $y(t) = C \cdot e^{-\cos(t)}, A \neq 0$

$\{ A \cdot e^{-\cos(t)}, 0 \}$

$= C e^{-\cos(t)}$

d) $y'(t) - t^2 y(t) = 0 \rightsquigarrow y'(t) = t^2 \cdot y(t)$

① $t^2 \cdot y(t) = 0 \rightarrow y(t) = 0$ eq ✓

② $\frac{y'(t)}{y(t)} = t^2$

③ $\int \frac{dy}{y} = \int t^2 \, dt$

$\ln|y(t)| = \frac{t^3}{3} + C$

④ $y(t) = D e^{\frac{t^3}{3}}, \; D \neq 0$

$\left\{ D \cdot e^{\frac{t^3}{3}}, 0 \right\} = C e^{\frac{t^3}{3}}$

e) $y'(t) - t^2 \cdot y(t)^2 = 0$

$y'(t) = t^2 \cdot y(t)^2$

① $t^2 \cdot y(t)^2 = 0 \rightarrow y(t) = 0$

② $\frac{y'(t)}{y(t)^2} = t^2$

③ $\int \frac{dy}{y^2} = \int t^2 \cdot dt$

$\int y^{-2} \cdot dy = \frac{t^3}{3} + C$

$\frac{y^{-1}}{-1} \cdot dy = \frac{t^3}{3} + C$

$\frac{-1}{y(t)} = \left(\frac{t^3}{3} + C \right)$

④ $y(t) = \frac{-1}{\frac{t^3}{3} + C}$

$y(t) = \frac{-3}{t^3 + C}$

$\left\{ \frac{-3}{t^3 + C}, 0 \right\}$

RESPOSTAS

1) (a) ∞
   (b) $\frac{1}{2}$
   (c) $-\infty$
   (d) 1
   (e) ∞

2) (a) $ln|f(x)| + C$
   (b) $cos(x^3 + 6x) + C$
   (c) $2ln|4 + x^3| + C$
   (d) $e^{e^x} + C$
   (e) $\frac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

3) (a) $y(t) = \{Ae^{kt}(A \neq 0), 0\} = Ce^{kt}$
   (b) $y(t) = \pm\sqrt{\frac{2t^3 + C}{3}}$
   (c) $y(t) = \{Ae^{cos(t)}(A \neq 0), 0\} = Ce^{cos(t)}$
   (d) $y(t) = \left\{Ae^{\frac{t^3}{3}}(A \neq 0), 0\right\} = C^{\frac{t^3}{3}}$
   (e) $y(t) = \left\{-\frac{3}{t^3 + C}, 0\right\}$

Ex: $(t^2 + 1)\, y'(t) + t \cdot y(t) = 0$

$y'(t) + \underbrace{\frac{t}{t^2 + 1}}_{p(t)} \cdot y(t) = \underbrace{0}_{g(t)}$

① $P(t) = \int p(t) \cdot dt$

$= \int \frac{t}{t^2 + 1} \, dt$

$u = t^2 + 1 \quad du = 2t$

$= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \ln|u| + C$

$= \frac{1}{2} \ln|t^2 + 1| + C$

② $c(t) = \int g(t) \cdot e^{P(t) \cdot dt}$

$$= \int 0 \, dt$$

$$= c_1$$

③ $y(t) = c(t) \cdot e^{-p(t)}$

$$= c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln |t^2+1|}$$

$$= c_1 \cdot e^{\ln \left[(t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \right]}$$

$$= c_1 \cdot (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= c_1 \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{c_1}{\sqrt{t^2+1}}}$$