Sequências e séries

segunda-feira, 27 de fevereiro de 2023 21:27

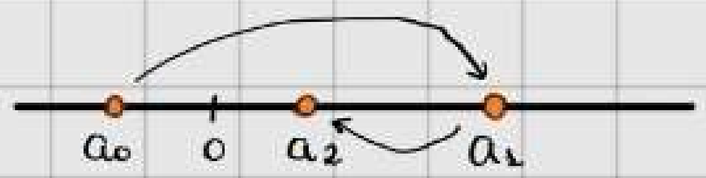
Semana 1

módulo π soma de infinitas potências → série de potências → Número infinito e parcelas

SEQUÊNCIAS

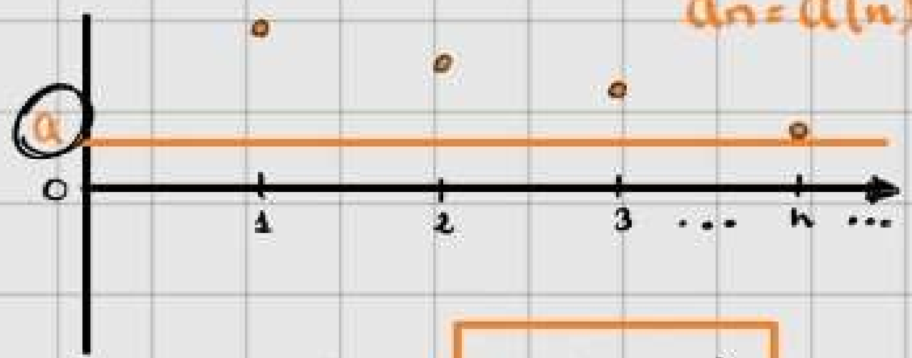
1°) Infinitas parcelas ↳ progressões

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$



função de n

$a_n = a(n)$



$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{a \text{ (limite)}}$$

↳ altura a

* limite tem que ir ao infinito p/ fazer sentido

REGRAS DE LIMITE

$\lim a_n = a, \lim b_n = b$

S) $\lim a_n + b_n = a + b$

P) $\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b$

Q) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ ↳ $b \neq 0$

SANDUÍCHE

$a_n \leq c_n \leq b_n$

$\lim a_n = c = \lim b_n \to \lim c = c$

LIMITE E FUNÇÃO CONTÍNUA

$f(x) \to$ contínua

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

$f(a_0), f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$

$\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

L'Hopital

$\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right)'}$$

Exemplo 1

Sequência de fibonacci $= 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots \infty$

$$\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$$

Razão de fibonacci $= \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots \frac{\infty}{\infty}$

$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ L'H ? → Não → Precisa descobrir o a_n (Expressão)

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n+1}}$

$\underbrace{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}_{r_{n+1}} = 1 + \underbrace{\frac{a_n}{a_{n+1}}}_{\frac{1}{r_n}} \to \boxed{r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}}$

a_n definido

$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ (ver do anterior)

Descobrindo o limite

$\lim_{n\to\infty} r_n = r$?

$\lim r_{n+1} = r$ → Somado 1 desloca o gráfico (←) ∴ $= a_n$

$r_n = r_{n+1}$

$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$

$\lim_{n\to\infty} r_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{r_n}$

$r = 1 + \frac{1}{r}$ $(\times r)$

$r^2 = r + 1$ → 2 soluções ↗ negativa ñ é aceita

$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ = RAZÃO ÁUREA

Exemplo 2

Qual o limite de: $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty$$

→ Manipular e aplicar L.H

$\frac{b}{1/c} \cdot b \cdot c \therefore \frac{b}{x} = b \cdot x^{-1}$

$\exp(x) = e^x$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{n \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}} =$$

$\log(x)' = \frac{1}{x}$

$$e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}} \overset{\text{L.H}}{=} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)'}{(1/n)'}} =$$

$\to 0$

$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ $\to 1+0$

$= \log(1) = 0$

$$e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/n}\left(\frac{-1}{n^2}\right)}{(-1/n^2)}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = e^1 = \boxed{e}$$

$1+0$