Universidade de Brasília – UnB **Faculdade UnB Gama – FGA**
Cálculo 1 - Prof. Ricardo Fragelli

Resolva os problemas de otimização:

DESAFIO 1

ÁREA MÁXIMA

Quais as dimensões de um retângulo de perímetro igual a 40 de forma que tenha a maior área possível?

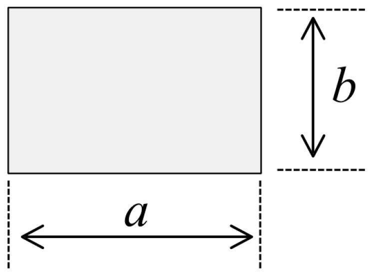


FIGURA 1 Retângulo.

$$\begin{cases} \text{Área} = a.b \ (1) \\ 2a + 2b = 40 \\ a + b = 20 \rightarrow b = 20 - a \ (2) \end{cases}$$

$a \leqslant 0 \leqslant 20$

$(2) \rightarrow (1)$: $A = a(20 - a)$

$A = 20a - a^2$

$A' = 20 - 2a$

$A' = 0 \rightarrow 20 - 2a = 0 \rightarrow 2a = 20 \rightarrow \boxed{a = 10}$

$A = 20.a - a^2$

$A(0) = 20\,0 - 0^2 = 0$

$A(10) = 20.10 - 10^2 = 100$ → Ponto de máximo global absoluto

$A(20) = 20.20 - 20^2 = 0$

Não teria base ou altura
0 e 20

→ O retângulo de área máxima é o quadrado

$a = 10$

$10 + b = 20$

$b = 10$

ÁREA MÁXIMA

Encontre as dimensões de um retângulo inscrito em triângulo isósceles de altura igual a 2 e base 4 para que tenha a maior área possível.

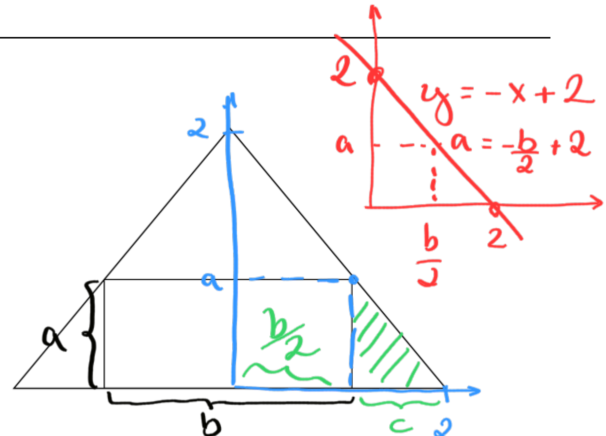
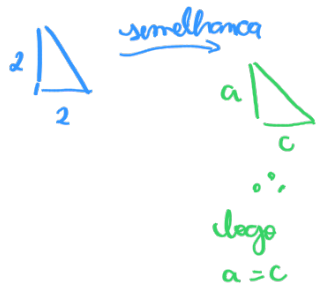


FIGURA 2 Retângulo inscrito.

(1) $A_{\square} = a \cdot b$ → Área maxima

a



$$\frac{b}{2} + c = 2$$

$$\boxed{\frac{b}{2} + a = 2}$$

$$2a + b = 4$$

(2) $\boxed{b = 4 - 2a}$ → variáveis

(2) → (1)

$$A = a \cdot (4 - 2 \cdot a)$$

$$\boxed{A = 4a - 2a^2}$$

$0 \leq a \leq 2$ Candidatos extremo da função

$A' = 4 - 4a$

$A' = 0$ ∴ $4 - 4a = 0$

$\boxed{a = 1}$ Ponto crítico

$$\boxed{A = 4a - 2a^2}$$

$A(0) = 4.0 - 2.0^2 = 0$

$A(1) = 4.1 - 2.1^2 = 2$ → Extremo da função (maior valor)

$A(2) = 4.2 - 2.2^2 = 0$

(3) $a = 1$

(3) → (2)

$b = 4 - 2a$

$b = 4 - 2.1$

$b = 2$

ÁREA MÁXIMA

Encontre as dimensões de um retângulo inscrito em uma circunferência de raio igual a 10 para que sua área seja a maior possível.

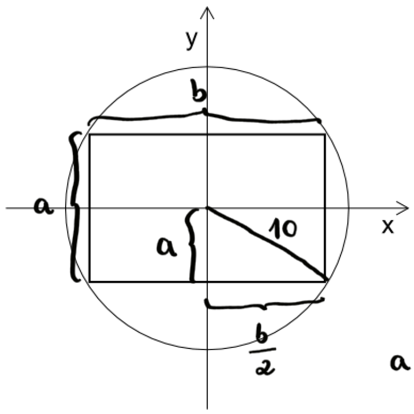


FIGURA 3 Retângulo inscrito.

$$a \cdot \frac{b}{2} = 10$$

$$a \cdot b = 5$$

$$b = \frac{5}{a}$$

(1) $A = a \cdot b$

$$A = a \cdot \frac{5}{a}$$

DESAFIO 4

ÁREA MÁXIMA

Encontre as dimensões de um triângulo isósceles de perímetro igual a 3 para que sua área seja a maior possível.

$$\begin{cases} A = \dfrac{b \cdot h}{2} \\ P = 2a + b \end{cases} \qquad \boxed{b = P - 2a}$$

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

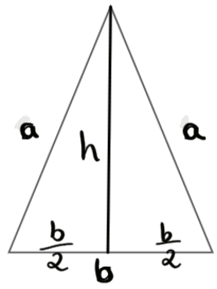


FIGURA 4 Triângulo isósceles.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (P - 2a) \cdot \sqrt{a^2 - \frac{(P-2a)^2}{4}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (P - 2a) \cdot \sqrt{\frac{\cancel{4a^2} - (P^2 - 4Pa + \cancel{4a^2})}{4}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (P - 2a) \cdot \frac{\sqrt{4Pa - P^2}}{2}$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot (P - 2a) \cdot \sqrt{4Pa - P^2}$$

?

$$\frac{dA}{da} = \frac{1}{4} \cdot (-2) \cdot \sqrt{4aP - P^2} + \frac{1}{4} (P - 2a) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{4Pa - P^2}} \right) \cdot 4P = 0$$

$$-\frac{2}{4} \cdot \sqrt{4aP - P^2} + \frac{1}{8} (P - 2a) \cdot \frac{4P}{\sqrt{4Pa - P^2}} = 0$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} \sqrt{4aP - P^2} = \frac{(P - 2a)}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{4}P}{\sqrt{4Pa - P^2}}$$

$$4Pa - P^2 = P^2 - 2Pa$$

$$6Pa = 2P^2$$

$$3Pa = P^2$$

$$3a = P$$

$$\boxed{a = \frac{P}{3}} \quad \therefore \quad \boxed{a = 1} = b$$

O triângulo isosceles de área máxima é o equilátero

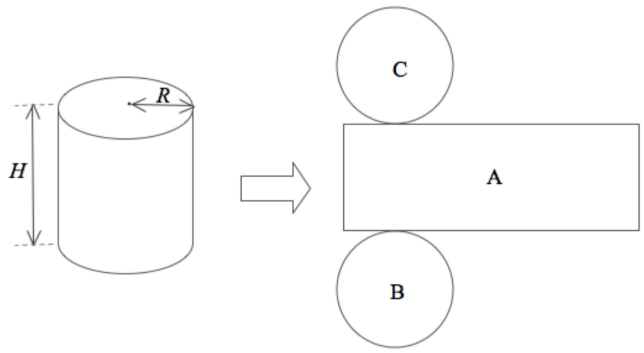
OTIMIZAÇÃO DA LATINHA

O custo da lata de alumínio envolve diversos fatores tais como energia, mão de obra, maquinário, dentre outros. Contudo, considerando apenas a matéria-prima envolvida, simplificaremos a análise em três materiais de custos distintos: lateral da lata, parte superior da lata e parte inferior da lata.

Desse modo, quais são as dimensões de uma lata para que tenha o menor custo de produção? A lata possui formato cilíndrico, volume igual a 350 ml e foram utilizados três materiais A, B e C para a lateral, superfície inferior da lata e superfície superior, respectivamente. Os custos dos materiais são iguais a C_A, C_B e C_C e são dados por R$/m².

FIGURA 5 Lata de alumínio.

O custo de produção da lata é dado por: $C = A_A \cdot C_A + A_B \cdot C_B + A_C \cdot C_C$



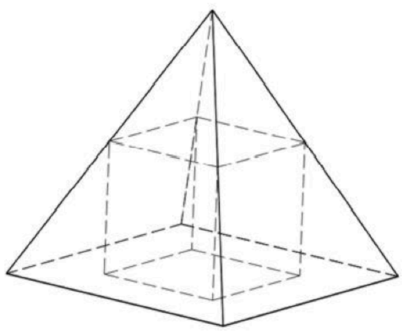
A BOLA QUADRADA

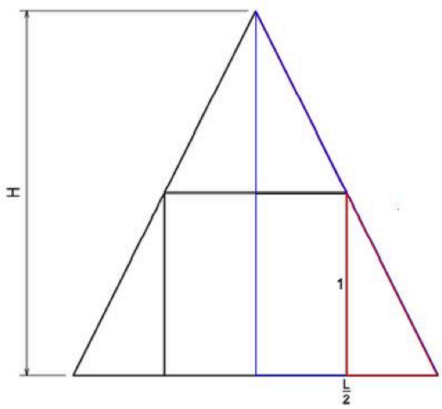
Autores: Paulo Vitor e Rafael Rodrigues

Já faz muito tempo que Kiko vem cobrando do professor Girafales uma bola quadrada. O que ele não sabe é que está prestes a recebê-la! No dia das crianças, em uma tarde normal de pancadas “sem querer querendo” no Senhor Barriga, Seu Madruga fugindo pela janela para não pagar o aluguel e, de alguma forma, ainda conseguindo levar cacetadas da Dona Florinda; todas as crianças ganharam presentes. Chaves ganhou um delicioso sanduíche de presunto, oferecido pela vizinhança; Chiquinha, um pirulito enorme do Seu Madruga, seu papaizinho lindo; e, Kiko, uma inesperada bola quadrada (Figura 1) de seu querido papai... Ops, professor!

Mestre linguiça, como um amante de Cálculo 1, decide propor um desafio para si: Descobrir o menor volume possível de uma embalagem piramidal de base quadrada para conter a bola quadrada (cubo) de Kiko que possui lados iguais a 1m. Dado: $V_{Pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$.

FIGURA 6 A bola quadrada de Kiko.





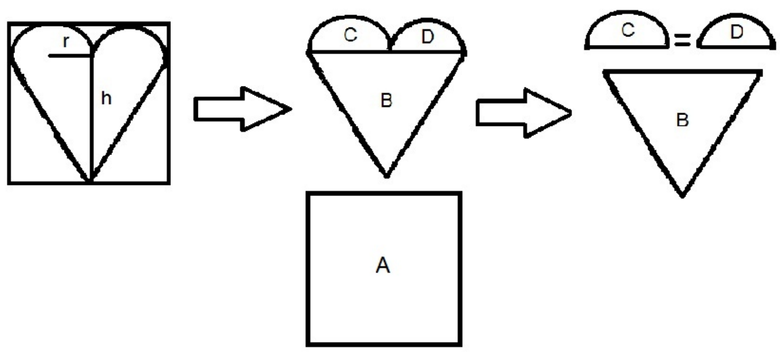
OTIMIZAÇÃO DA PIZZA DO AMOR

Autores: Lucas Brandão Guimarães e Rafael Freitas

Um casal bastante desanimado, em pleno dia dos namorados, resolveu ligar na tele-entrega de uma pizzaria afrodisíaca, para ver se esquentava a relação. Durante a ligação, foi pedida a pizza principal: "La Viagrita", também conhecida como pizza do amor (figura 1). Porém, o atendente alertou que havia apenas 40 cm para fazer as laterais aromáticas da caixa de entrega, que são exclusivas para aquele certo tipo de pizza, mas mesmo assim, o casal manteve o pedido. O que eles não sabiam era que, por engano, tinham ligado para uma drogaria e não para uma pizzaria.

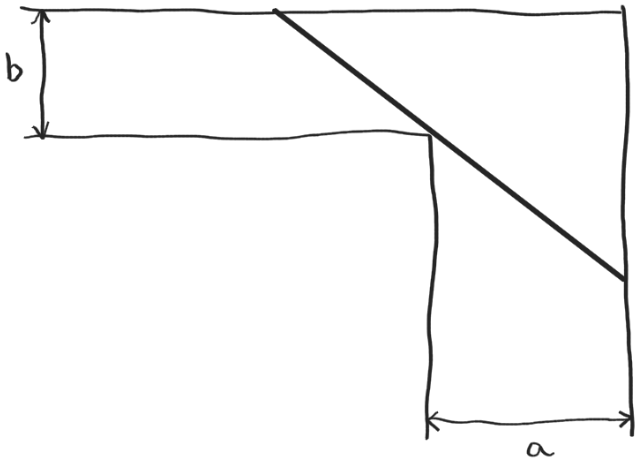
Calcule a área máxima que a pizza poderá atingir dentro da caixa de entrega de base retangular (A), sabendo que seu formato é um coração formado por um triângulo (B) e dois semicírculos iguais (C) e (D).

FIGURA 7 Pizza do amor.



MAIOR ESCADA

Qual a maior escada que passa totalmente de um corredor de largura “a” para outro de largura “b”? Os corredores são perpendiculares entre si conforme mostrado na figura 8.



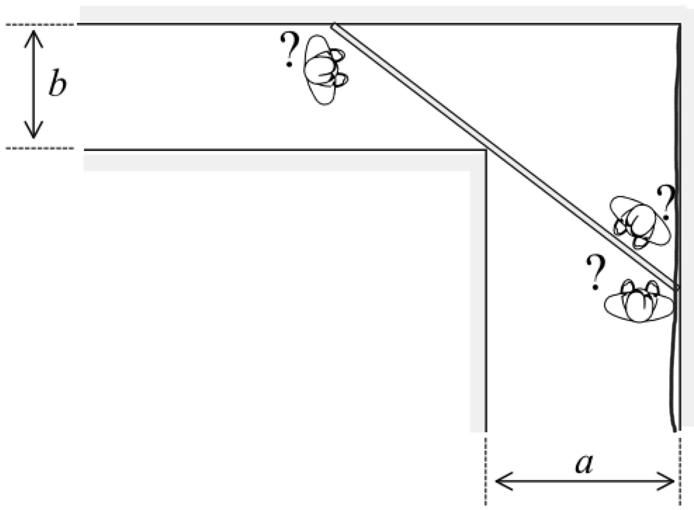


FIGURA 8 Maior escada.