Semana 2

SÉRIES

→ Soma infinita de potências

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

↳ Termo geral

$n \rightarrow$

$m \downarrow$

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_m = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m = \sum_{n=0}^{m} a_m$

$\vdots$

$$\lim_{m \to \infty} = S_m = \underbrace{a_0 + a_1 + \dots a_n + \dots}_{\text{Série de } a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

➡ = Somatório $\in \mathbb{R}$ ⇝ CONVERGE

➡ $= \pm\infty$ ⇝ $\nexists$ ⇝ DIVERGE

Exemplos

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$ ⇝ Converge ($\in \mathbb{R}$)

2) $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$ ⇝ Diverge

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \dots = \nexists$ ⇝ Diverge

PROP.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ⇝ Converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

↳ Se a parcela dá um número o somatório também dá.

TESTE DE DIVERGÊNCIA

↳ Olhando para as parcelas, sem somar

↳ Se não estiver indo para zero, diverge

↳ As parcelas vão ficando pequenas o suficiente para poderem ser somadas.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} \neq 0 & \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \text{divergente} \\ = 0 & \rightsquigarrow \text{Inconclusivo} \end{cases}$$

SÉRIE HARMÔNICA

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$ diverge

↳ Não viram parcelas pequenas o suficiente para dar um número inteiro → VAI PARA ∞

$\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \dots$

$\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8} \dots$

$\boxed{\frac{1}{n} > \frac{1}{2^n}}$

SÉRIES TELESCÓPICAS

$\underbrace{r_0 - r_1}_{a_0}, \underbrace{r_1 - r_2}_{a_1}, \underbrace{r_2 - r_3}_{a_2}, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n - r_{n+1} = \boxed{r_0 - \lim_{m\to\infty} r_{m+n}}$$

↳ $r_0 - \cancel{r_1} + \cancel{r_1} - \cancel{r_2} + \cancel{\dots} + r_n$
$= r_0 - r_n$

(*) Só é possível aplicar a regra do limite da soma para calcular o limite de "S_m"

↳ É preciso simplificar o S_m.

SÉRIES GEOMÉTRICAS

Razão $= x$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$

$$\lim_{n\to\infty} x^n \begin{cases} \neq 0, & |x| \geq 1 \\ = 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

Exemplos

$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$

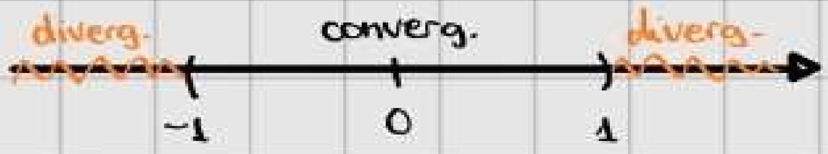
$$\left.\begin{array}{l} 1 + x \\ 1 + x + x^2 \\ 1 + x + x^2 + \dots + x^m = ? \\ \vdots \\ 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \end{array}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$S_m = 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} \dots + \cancel{x^m}$ (x)

$x \cdot S_m = \cancel{x} + \cancel{x^2} + \dots + x^{m+1}$

$S_m - x \cdot S_m = 1 - x^{m+1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \begin{cases} \text{divergente}, & |x| \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x}, & |x| < 1 \end{cases}$$



$$S_m (1-x) = 1 - x$$

$$S_m = \frac{1 - x^{m+1}}{1-x}$$

$$\downarrow$$

$|x| < 1$

$$\lim_{m \to \infty} S_m = \lim \frac{1 - x^{m+1}}{1-x} = \frac{1-0}{1-x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \rightarrow x^{m+1} = \frac{1}{2^{m+1}} \rightarrow 0 \\ x = -3 \rightarrow x^{m+1} = (-3)^{m+1} \end{array}}$$

OPERAÇÕES COM SÉRIES

Soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n}_{\text{Quando convergente}}$$

Constante

$$\sum_{n=0}^{\infty} C a_n = C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Exemplos

- $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n + d_n)\, x^n$
- $x^k \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^k$

OPERAÇÕES COM SÉRIES

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = C_0 + C_1 x + \cdots$$

$C_0 = C_1 = \cdots = 1 \rightsquigarrow$ Geométrica