MÓDULO 3 : OPERADORES E PRODUTO INTERNO

AULA 1

DEFINIÇÃO 01: AUTOVALORES E AUTOVETORES
Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Se existirem $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \lambda \in \mathbb{R}$ tais que
$\mathbf{Tv} = \lambda\mathbf{v}$, λ é um auto valor de T e $\mathbf{v}$ um autovetor de T associado à λ

DEFINIÇÃO 02: AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ
Dada uma matriz quadrada A de ordem n, o AUTOVALOR e AUTOVETOR de A são aqueles que satisfazem
$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ou $A\mathbf{v} = (\lambda I)\mathbf{v}$ ou ainda $(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Exemplos:

1. $T: R^2 \rightarrow R^2$
$\vec{v} \longmapsto 2\vec{v}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\left| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow P(\lambda) = (2-\lambda)^2$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ $\boxed{\lambda_2 = 2}$ Autovalores

$T\vec{v} = \lambda.\vec{v} \longrightarrow$ Se $T(x,y) = 2(x,y)$ e $T\vec{v} = 2\vec{v}$
então $[A]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

λ_1 e $\lambda_2 = 2 \rightarrow T(x,y) = \overset{\lambda}{2}(x,y)$

$\therefore$ Autovetor $\rightarrow \boxed{\vec{v} = (x,y)}$

2. $T: R^2 \rightarrow R^2$
$(x,y) \longmapsto (x,-y)$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \Big[$

MATLAB / OCTAVE
1)

```
>> a=[-3 4;-1 2];
>> [v,va]=eig(a) % função eig calcula os autovetores e autovalores de a

v =

   -2112/2177      -985/1393
    -528/2177      -985/1393

va =

   -2                0
```

$\rightarrow x = 4y$

$528 \times 4 = 2112$

$\rightarrow x = y$

2)

```
octave:1> a = [3 0 -4;0 3 5;0 0 -1]
a =

   3   0  -4
   0   3   5
   0   0  -1

octave:2> [v,va]=eig(a)
v =

   1.0000        0   0.5298
        0   1.0000  -0.6623
        0        0   0.5298

va =

Diagonal Matrix

   3   0   0
   0   3   0
   0   0  -1
```

Exemplo:

definição 01 e 02

$$\boxed{\begin{array}{l} A\vec{v} = \lambda.\vec{v} \\ A.\vec{v} = (\lambda.I)\,\vec{v} \\ (A-\lambda.I)\,\vec{v} = \vec{0} \quad \vec{v}\neq 0 \\ A - \lambda I = 0 \\ \det(A-\lambda I) = 0 \\ \therefore \boxed{P(\lambda)=0} \end{array}}$$

1 $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Autovalores

$A - \lambda I$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 4 = 0$$

$$= -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$\therefore$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\boxed{\lambda_1 = -2} \\ \boxed{\lambda_2 = 1}\end{array}\right\} P(\lambda)$$

Autovetores

$\lambda_1 = -2 \longrightarrow A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x+4y \\ -1x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + 4y = -2x \\ -x + 2y = -2y \end{cases} = \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 4y$$

$\therefore$

$$\boxed{\vec{v} = (4y, y) \text{ ou } \vec{v} = \left(x, \frac{x}{4}\right)}$$

$y = 1$ $\quad$ $x = 1$

$\vec{v} = (4,1)$ $\quad$ $\vec{v} = \left(1, \frac{1}{4}\right)$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = x \\ -x + 2y = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \therefore x = y$$

$$\boxed{\vec{v} = (x, x) \text{ ou } \vec{v} = (y, y)}$$

2 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Autovalores

$P(\lambda)$

$\rightarrow (3-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

$\therefore$

$(3-\lambda) = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_1 = 3}$ (x2 - repete)

$(-1-\lambda) = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_2 = -1}$

Autovetores

λ_1 e $\lambda_3 = 3 \rightarrow A\vec{v} = \lambda.\vec{v}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{3x} - 4z = \cancel{3x} \\ \cancel{3y} + 5z = \cancel{3y} \\ -z = 3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4z = 0 \rightarrow z = 0 \\ 5z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases}$$

Solução $z = 0$ e x, y são quaisquer

$$\boxed{\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$x = 1, y = 0 \longrightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x = 0, y = 1 \longrightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - 4z = -x \\ 3y + 5z = -y \\ -z = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \rightarrow 4x = 4z \rightarrow x = z \\ 4y + 5z = 0 \rightarrow 4y = 5z \rightarrow y = \frac{5}{4}z \\ 0z = 0 \rightarrow z \in \text{um valor qualquer } (z\forall) \end{cases}$$

Solução:

$$\boxed{\vec{v} = \begin{bmatrix} z \\ 5/4\, z \\ z \end{bmatrix}}$$

AULA 2

DEFINIÇÃO 03:
Seja T: V → V uma transformação linear. Seja β uma base de V, então temos as equivalências:
$\mathbf{Tv} = \lambda\mathbf{v}$ ou $Det\left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right) = 0$

TEOREMA 1 :
Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes

COROLÁRIO 1 :
Se V é um Espaço Vetorial e T: V → V é um operador linear que possui autovalores distintos, então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T

COROLÁRIO 1

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$t(x,y) = (-3x+4y, -x+2y)$

$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Encontre a base β de autovetores:

Solução: $t(x,y) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$= \left|\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$

$= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$= (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 = 0$

Autovalores

$\boxed{\lambda_1 = 1}, \boxed{\lambda_2 = 2}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

A transformação é diagonalizável ∴

se tem autovalores distintos → tem uma base de autovetores

Pelo corolário 1 então $\mathbb{R}^2$ possui uma base de autovetores

$\lambda_1 = 1$

$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -3x + 4y = x \\ -x + 2y = y \end{cases}$

$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \therefore \boxed{x = y}$

$\vec{v_1} = (x, x)$ ou

$\vec{v_1} = (y, y)$ Autovetor

$\lambda_2 = 2$

$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -3x + 4y = 2x \\ -x + 2y = 2y \end{cases}$

$\begin{cases} -5x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \therefore \boxed{x = 4y}$

$\vec{v_2} = (x, x/4)$

$\vec{v_2} = (4y, y)$ Autovetor

BASE DE AUTOVETORES

Se $y = 1$

$\vec{v_1} = (1,1)$ e $\vec{v_2} = (4,1)$

$\boxed{\beta = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$

- $\vec{v_1} = (1,1)$

$T(\vec{v_1}) = T(1,1) = (-3+4, -1+2) = (1,1) = 1\vec{v_1} + 0\vec{v_2}$

- $\vec{v_2} = (4,1)$

$T(\vec{v_2}) = T(4,1) = (-12+4, -4+2) = (-8,2) = -2\underbrace{(4,1)}_{v_2} \therefore 0.\vec{v_1} - 2.\vec{v_2}$

$-3.4 \quad 4.1 \quad -1.4 \quad 2.1$

$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

λ_1 e λ_2 (Autovalores)

2) VA =
MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

```
octave:4>  a = [0 2;1 0];
 [v,va]=eig(a)
v =

   0.8165  -0.8165
   0.5774   0.5774

va =

Diagonal Matrix

   1.4142        0
        0  -1.4142
```

```
octave:12> % det(v) != 0 -> Conjunto de v é LI
det(v)
ans = 1121/1189
```

3)

```
octave:41> a=[1 1;2 1]
[v,va]=eig(a)
det(v)
a =

         1         1
         2         1
```

OU... (DEIXANDO EM FRAÇÃO)

```
octave:6> format rat
[v,va]=eig(a)
v =

   881/1079  -881/1079
   780/1351   780/1351

va =

Diagonal Matrix

   1393/985          0
          0  -1393/985
```

```
v =

   780/1351  -780/1351
   881/1079   881/1079

va =

Diagonal Matrix

   2378/985          0
          0  -985/2378

ans = 1121/1189
```

4)

```
octave:58> b=[1 1 0;1 -1 2;2 1 -1]
[v,va]=eig(b)
det(v)
b =

         1         1         0
         1        -1         2
         2         1        -1

v =

  -780/1351  -769/1762   379/1257
```

```
  -780/1351     769/881    -379/419
  -780/1351    769/3524    379/1257

va =

Diagonal Matrix

         2           0           0
         0          -1           0
         0           0          -2

ans = -3515/7711
```

DEFINIÇÃO 04:

Seja T: V → V uma transformação linear. Seja β uma base de V, onde $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ formada por autovetores de T então a matriz $[T]_\beta^\beta$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO 05:

Seja T: V → V uma transformação linear. Dizemos que T é um operador DIAGONALIZÁVEL se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T.

EXEMPLOS:

1

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

α = base canônica

$\left|[T]_\alpha^\alpha - \lambda I\right| = 0$

$\left|\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$

$\left|\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0$

$(3-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$

$\begin{cases} (3-\lambda)^2 = 0 \to \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \\ \qquad \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-4.9}}{2} \\ (-1-\lambda) = 0 \end{cases}$

$\boxed{\lambda_3 = -1}$ $\quad$ $\boxed{\lambda_1 = 3}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\quad$ $\lambda_2 = 3$

$\lambda_1 = 3$

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 3x - 4z = 3x \\ 3y + 5z = 3y \\ -z = 3z \end{cases}$

$\begin{cases} -4z = 0 \\ 5z = 0 \\ -4z = 0 \to z = 0 \end{cases}$

$\vec{v} = (x, y, 0)$

$\vec{v} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + 0(0,0,0)$

$\vec{v} = x(1,0,0) + y(0,1,0)$

$\vec{v_1} = (1,0,0)$

$\vec{v_2} = (0,1,0)$

$\therefore$ $\boxed{\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$

$\begin{array}{ccc} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \end{array}$

$\lambda_2 = 1$

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 3x - 4z = -x \\ 3y + 5z = -y \\ -z = -z \end{cases}$

$\begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \\ 0z = 0 \text{ (qualquer)} \end{cases} \to \begin{cases} x = z \\ y = -z \cdot 5/4 \\ z = z \end{cases}$

$\vec{v_3} = (z, -5/4 z, z)$

Se $z = 4$, então:

$\vec{v_3} = (4, -5, 4)$

$\beta = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$

$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

λ_1, λ_2 e λ_3

[T] é um operador diagonalizazel, pois existem autovalores distintos formando uma base de T composta de autovetores LI. e sua base matriz de transformação dada como diagonal os elementos sendo os autovetores de T.

2

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

tal que $T(x,y) = (2y, x)$

$T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

→ Autovalores distintos

→ Base de autovetores β

→ $[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ T é diagonalizável

3

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

tal que $T(x,y) = (x+y,\ 2x+y)$

$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\therefore$ T é diagonalizável

4

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \mapsto (x+y,\ x-y+2z,\ 2x+y-z)$

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\therefore$ T é diagonalizável

$$T(1,1,1) = (1+1,\ 1-1+2,\ 2+1-1)$$
$$= (2,\ 2,\ 2)$$
$$= 2\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{v_1}} \to 2\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + 0\vec{v_3}$$

AULA 3

Aula : https://www.youtube.com/watch?v=xDBR2VV1HaQ

MÓDULO 3 : OPERADORES E PRODUTO INTERNO

POLINÔMIO MINIMAL

DEFINIÇÃO 06: Polinômio de matrizes

Seja $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada, então P(A) é a matriz:

$$P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

Quando P(A)=0 dizemos que o polinômio anula a matriz

Exemplo 1 :

Sejam $p(x) = x^2 - 9$, $q(x) = 2x + 3$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Quais polinômios anulam a matriz? 1- Substitui x pela matriz A
2- Multiplica os independentes pela I.

$P(A) = A^2 - 9I = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ P(A) anula A

$Q(A) = 2 \cdot A + 3I = 2\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\neq$ nula

$\therefore$ Q(A) não anula A

DEFINIÇÃO 07: Polinômio Minimal

Seja A uma matriz quadrada. O polinômio minimal de A é um polinômio:

$$m(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Tal que

i) m(A)=0 isto é m(x0 anula a matriz A

ii) m(x) é o polinômio de **menor grau** entre aqueles que anulam A

TEOREMA 2 :

Seja $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear. Seja α uma base de V. Então T é diagonalizável se e somente se, o polinômio minimal de $[T]_\alpha^\alpha$ é da forma

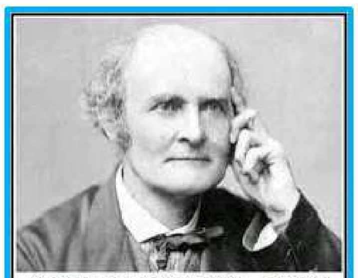
$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$$

Com $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ distintos

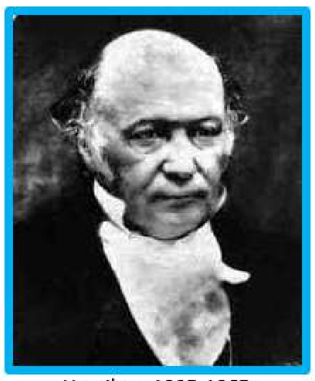
TEOREMA 3 : Cayley -Hamilton

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear e α uma base de V e p(x) o polinômio característico de T, então

$$p([T]_\alpha^\alpha) = 0$$



Arthur Cayley (1821 - 1895)



Hamilton 1805-1865

PROVA 3

Seja $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Então o polinômio característico é :

$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \right| = (a-\lambda)(d-\lambda) - b.c$

$\therefore$

$p(\lambda) = (a-\lambda)(d-\lambda) - b.c$ (É PRECISO VER SE DA ZERO) $\therefore$

$p([T]_\alpha^\alpha) = (a.I - [T]_\alpha^\alpha) \cdot (dI - [T]_\alpha^\alpha) - bc\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \cdot \left(d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) - bc\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \cdot \left(\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & a-d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d-a & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+bc & 0+0 \\ \underset{-cd+ca-ca+cd}{-c(d-a)-c(a-d)} & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

TEOREMA 4:

As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes do polinômio característico

TEOREMA 5 :

Sejam $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear T. Então T será diagonalizável se, e somente se o polinômio

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_r)$$

Anular a matriz de T.

PROVA 4 e 5

O operador linear $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$T(x,y,z,t) = (3x-4z,\ 3y+5z,\ -z,\ -t)$ é diagonalizável?

Tenho como conseguir uma base de T?
Tal que a base é formada pelos autovetores dessa transformação!
Conseguindo o polinômio característico, conseguimos o polinômio minimal
Se o minimal zerar a matriz de transformação
↓
transformação é diagonalizável

SOLUÇÃO:

Seja $\alpha = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \in \mathbb{R}^4$

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \text{Matriz de transformação}$$

- Polinômio característico: $P(\lambda) = \left| [T]^{\alpha}_{\alpha} - \lambda . I \right|$

$$P(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \rightarrow \left| \begin{matrix} 3-\lambda & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{matrix} \right| \rightarrow \text{Pivô}$$

$$= (-1-\lambda)(-1)^8 \left| \begin{matrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{matrix} \right| \rightarrow (-1-\lambda)\cdot\left[(3-\lambda)^2\cdot(-1-\lambda)\right] \rightarrow \boxed{P(\lambda) = (-1-\lambda)^2(3-\lambda)^2}$$

Polinômio característico

- Possibilidades dos polinômios (TEOREMA 4) $P([T]^{\alpha}_{\alpha}) = 0$?

$P(x) = (-1-x)^2(3-x)^2$: Possibilidades onde as raízes são as mesmas

menor grau

$P_1(x) = (-1-x)(3-x) \longrightarrow P_1([T]^{\alpha}_{\alpha}) = (-1I - [T]^{\alpha}_{\alpha})\cdot(3I - [T]^{\alpha}_{\alpha})$

$P_2(x) = (-1-x)^2(3-x)$

$P_3(x) = (-1-x)(3-x)^2$

$P_4(x) = (-1-x)^2(3-x)^2$

Pois anula a matriz?

$$= \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -16+16 & 0 \\ 0 & 0 & 20-20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ NULO}$$

Como $P_1[T]^{\alpha}_{\alpha} = 0$ e é de menor grau que anula $[T]^{\alpha}_{\alpha}$

↓ Então...

Ele é o polinômio minimal

e anula a matriz de transformação

(TEOREMA 5)

Portanto T é diagonalizável, isto é, existe uma base β de autovalores e nesta base temos a matriz transformação

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

AULA 3

Aula : https://www.youtube.com/watch?v=xDBR2VV1HaQ

MÓDULO 3 : OPERADORES E PRODUTO INTERNO

POLINÔMIO MINIMAL

DEFINIÇÃO 06: Polinômio de matrizes

Seja $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada, então P(A) é a matriz:

$$P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

Quando P(A)=0 dizemos que o polinômio anula a matriz

Exemplo 1 :

Sejam $p(x) = x^2 - 9$, $q(x) = 2x + 3$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Quais polinômios anulam a matriz? 1- Substitui x pela matriz A
2- Multiplica os idependentes pela I.

$P(A) = A^2 - 9I = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ P(A) anula A

$Q(A) = 2 \cdot A + 3I = 2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\neq$ nula

$\therefore$ Q(A) <u>não</u> anulo A

DEFINIÇÃO 07: Polinômio Minimal

Seja A uma matriz quadrada. O polinômio minimal de A é um polinômio:

$$m(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Tal que

i) m(A)=0 isto é m(x0 anula a matriz A
ii) m(x) é o polinômio de **menor grau** entre aqueles que anulam A

TEOREMA 2 :

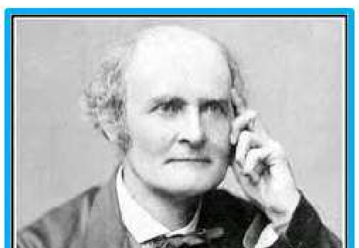
Seja $T: V \to V$ uma transformação linear. Seja α uma base de V. Então T é diagonalizável se e somente se, o polinômio minimal de $[T]_\alpha^\alpha$ é da forma

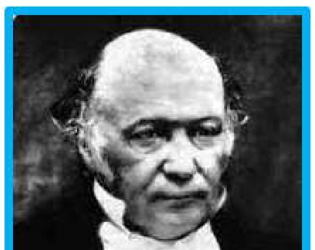
$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$$

Com $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ distintos

TEOREMA 3 : Cayley -Hamilton

Seja $T: V \to V$ um operador linear e α uma base de V e p(x) o polinômio característico de T, então





$$p([\mathrm{T}]_\alpha^\alpha) = 0$$

Arthur Cayley (1821 - 1895)

Hamilton 1805-1865

PROVA 3

Seja $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Então o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \right| = (a-\lambda)(d-\lambda) - b.c$$

$\therefore$

$p(\lambda) = (a-\lambda)(d-\lambda) - b.c$ (É PRECISO VER SE DÁ ZERO) $\therefore$

$$p([T]_\alpha^\alpha) = (a.I - [T]_\alpha^\alpha)\cdot(dI - [T]_\alpha^\alpha) - bc\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\cdot\left(d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) - bc\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & a-d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d-a & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+bc & 0+0 \\ \underbrace{-c(d-a) - c(a-d)}_{-cd+ca\ -ca+cd} & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

TEOREMA 4:

As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes do polinômio característico

TEOREMA 5 :

Sejam $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear T.
Então T será diagonalizável se, e somente se o polinômio

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_r)$$

Anular a matriz de T.

PROVA 4 e 5

O operador linear $T: R^4 \to R^4$

$T(x,y,z,t) = (3x - 4z,\ 3y + 5z,\ -z,\ -t)$ é diagonalizável?

Tenho como conseguir uma base de T?
↳ Tal que a base é formada pelos autovetores dessa transformação!
↳ Conseguindo o polinômio característico, conseguimos o polinômio minimal
↳ Se o minimal zerar a matriz de transformação
↓
transformação é diagonalizável

SOLUÇÃO:

Seja $\alpha = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ e R^4

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \to \text{Matriz de transformação}$$

- Polinômio característico: $P(\lambda) = |[T]_\alpha^\alpha - \lambda . I|$

$$P(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \to \left| \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right| \to \text{Pivô}$$

$$= (-1-\lambda)(-1)^8 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \to (-1-\lambda)\cdot[(3-\lambda)^2\cdot(-1-\lambda)] \to \boxed{P(\lambda) = (-1-\lambda)^2(3-\lambda)^2}$$

Polinômio característico

Possibilidades dos polinômios (TEOREMA 4) $p([T]_\alpha^\alpha) = 0$?

$p(x) = (-1-x)^2(3-x)^2$: Possibilidades onde as raízes são as mesmas

menor grau

$$\begin{cases} p_1(x) = (-1-x)(3-x) \\ p_2(x) = (-1-x)^2(3-x) \\ p_3(x) = (-1-x)(3-x)^2 \\ p_4(x) = (-1-x)^2(3-x)^2 \end{cases}$$

P(x) anula a matriz?

$$p_1([T]_\alpha^\alpha) = (-1I - [T]_\alpha^\alpha)\cdot(3I - [T]_\alpha^\alpha)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -16+16 & 0 \\ 0 & 0 & 20-20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ NULO}$$

Como $p_1[T]_\alpha^\alpha = 0$ e é de menor grau que anula $[T]_\alpha^\alpha$

Então ...

Ele é o polinômio minimal

e anula a matriz de transformação

(TEOREMA 5)

Portanto T é diagonalizável, isto é, existe uma base β de autovalores e nesta base temos a matriz transformação

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

AULA 4

AULA PRODUTO INTERNO

PRODUTO INTERNO

DEFINIÇÃO 08: PRODUTO INTERNO

Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função que a cada par de vetores $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ associa um número real denotado $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ satisfazendo as propriedades:

i) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ para todo $\boldsymbol{v}$ e $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{0}$ se e somente se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

ii) $\langle \propto \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \propto \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\forall \propto$

iii) $\langle \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle + \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$

iv) $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle$

exemplos

DEFINIÇÃO 09:

Seja V um espaço vetorial, diz-se que dois vetores $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{w}$ de V são ortogonais se

$$\langle \boldsymbol{v}, w \rangle = 0$$

Notação: $\boldsymbol{v} \perp \mathbf{w}$

Propriedades:

a) $\mathbf{0} \perp \boldsymbol{v}$ para todo $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$

b) $\boldsymbol{v} \perp \mathbf{w}$ implica que $\boldsymbol{w} \perp \mathbf{v}$

c) Se $\boldsymbol{v} \perp \mathbf{w}$ para todo $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ então $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

d) Se $\boldsymbol{v_1} \perp \mathbf{w}$ e $\boldsymbol{v_2} \perp \mathbf{w}$ então $(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) \perp \mathbf{w}$

e) Se $\boldsymbol{v} \perp \mathbf{w}$ e $\propto$ é um escalar então $\propto \boldsymbol{v} \perp \mathbf{w}$

TEOREMA 6 :

TEOREMA 6:

Sejam $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ um conjunto de vetores não nulos, dois a dois ortogonais, isto é

$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ então $\langle \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ é Linearmente Independente

DEFINIÇÃO 10:

Diz-se que uma base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V é Base ortogonal se $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, isto é os vetores são dois a dois ortogonais

DEFINIÇÃO 11:

Seja V um espaço com produto interno. Definimos a NORMA ou COMPRIMENTO de um vetor $\boldsymbol{v}$ por

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$$

Se $\|\boldsymbol{v}\| = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{v}$ é chamado de vetor unitário e $\boldsymbol{v}$ está normalizado

PROPRIEDADES DA NORMA:

i) $\|\boldsymbol{v}\| \geq \mathbf{0}$ e $\|\boldsymbol{v}\| = \mathbf{0}$ se e somente se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

ii) $\|\propto \boldsymbol{v}\| = |\propto| \, \|\boldsymbol{v}\|$

iii) $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle| \leq \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|$ DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHUWARZ

iv) $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$ DESIGUALDADE TRIANGULAR

Schuwarz

Cauchy

DEFINIÇÃO 12:

Seja V um espaço vetorial, e dois vetores $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{w}$ de V. O ângulo entre $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{w}$ será

$$\boldsymbol{cos\theta} = \left| \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|} \right|$$

DEFINIÇÃO 13:

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Diz-se que uma base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V é ortonormal se for ortogonal e cada vetor for unitário, isto é:

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \begin{cases} 0, se \ i \neq j \\ 1, se \ i = j \end{cases}$$

Definição 8

Ex: O produto escalar usual de vetores do espaço R^3

$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{w} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{u} = (z_1, z_2, z_3) \in R^3$, α: constante

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \overbrace{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}^{\vec{v} \cdot \vec{w}} \Big\} \text{ Produto interno}$$

i) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = x_1 . x_1 + x_2 . x_2 + x_3 . x_3 \rightarrow \geq 0$ pois estão ao quadrado

ii) $< \alpha\vec{v}, \vec{w} > = < \alpha(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >$

$= \alpha x_1 \cdot y_1 + \alpha x_2 \cdot y_2 + \alpha x_3 \cdot y_3$

$= \alpha (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3)$

$= \alpha < \vec{v}, \vec{w} >$ OK

OK

iii) $< \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} > = <(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)>$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), (z_1, z_2, z_3)$

$= (z_1(x_1 + y_1) + z_2(x_2 + y_2) + z_3(x_3 + y_3))$

$= (\underline{z_1 \cdot x_1} + z_1 \cdot y_1 + \underline{z_2 \cdot x_2} + z_2 \cdot y_2 + \underline{z_3 \cdot x_3} + z_3 \cdot y_3)$

$= (\underbrace{(z_1 \cdot x_1 + z_2 \cdot x_2 + z_3 \cdot x_3)} + \underbrace{(z_1 \cdot y_1 + z_2 \cdot y_2 + z_3 \cdot y_3)})$

$= < (x_1, x_2, x_3), (z_1, z_2, z_3) > + <(y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)>$

$= < \vec{v}, \vec{u} > + < \vec{w}, \vec{u} >$ OK

iv) ...

Ex: Norma de um produto escalar

$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$

NORMA DE $\vec{v}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{<\vec{v}, \vec{v}>} = \sqrt{<(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)>}$

$= \sqrt{x_1 x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3}$

$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

PROPRIEDADE

ii) $\|\alpha \vec{v}\| = \sqrt{<\alpha\vec{v}, \alpha\vec{v}>}$

$= \sqrt{(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3), (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)}$

$= \sqrt{\alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 + \alpha x_3^2}$

$= |\alpha| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |\alpha| \|\vec{v}\|$

Ex: A base $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortogonal?

$u_1 = (0, 1, 0) \quad u_2 = (1, 0, 1) \quad u_3 = (1, 0, -1)$

1) Ortogonais 2 a 2

$\|\vec{u_1}\| = \sqrt{<u_1, u_1>} = \sqrt{(0,1,0),(0,1,0)} = \sqrt{0 + 1^2 + 0} = 1$

$\|\vec{u_2}\| = \sqrt{<u_2, u_2>} = \sqrt{1^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\|\vec{u_3}\| = \sqrt{<u_3, u_3>} = \sqrt{1^2 + 0 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

2) Normalização

vetor unitári

$\vec{v_1} = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(0,1,0)}{1} = (0,1,0) \therefore \|\vec{v_1}\| = \sqrt{0+1^2+0} = 1$ ✓

$\vec{v_2} = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \therefore \|\vec{v_2}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ ✓

$\vec{v_3} = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \therefore \|\vec{v_3}\| = 1$ ✓

3) Ortogonais entre si

$\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = \langle (0,1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = 0 \therefore$ v1 é ortogonal a v2.

$\langle \vec{v_1}, \vec{v_3} \rangle = \langle (0,1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}) \rangle = 0 \therefore$ v1 é ortogonal a v3

$\langle \vec{v_2}, \vec{v_3} \rangle = \langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}) \rangle = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0 \therefore$ v2 é ortogonal a v3

AULA 5

https://www.youtube.com/watch?v=qBswq4XnZZA

exercícios

Processo de Gram-Schmidt

Para converter uma base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ numa base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, efetue as seguintes contas.

Passo 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$

Passo 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

Passo 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

Passo 4. $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$

⋮

(continue até r passos)

Passo opcional. Para converter a base ortogonal numa base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_r\}$, normalize os vetores da base ortogonal.

Considere o espaço vetorial R^3 com o produto interno euclidiano. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar os vetores de base

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$$

em uma base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e, depois, normalize os vetores da base ortogonal para obter uma base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$.

Solução

Passo 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$

Passo 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

Assim,

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Passo 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

formam uma base ortogonal de R^3. As normas desses vetores são

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de modo que uma base ortonormal de R^3 é

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ ◀

Ex 12) Boldrini, pg 248

12. Seja $\mathbf{P}_2$ o espaço das funções polinomiais reais de grau menor ou igual a dois. Definimos em $\mathbf{P}_2$

$$<f, g> = \int_{-1}^{1} f(t)\cdot g(t)\,dt$$

Considere W o subespaço de $\mathbf{P}_2$ gerado pelos vetores $p(t) = 1$ e $q(t) = 1 - t$.

a) $<f, g>$ é um produto interno?

b) Se a resposta de (*a*) for afirmativa determine uma base ortogonal para W.

$$V_1 = U_1 = \boxed{(1,1,1)}$$

$$V_2 = U_2 - \frac{<U_2, V_1>}{\|V_1\|^2}\cdot V_1$$

$$= (0,1,1) - \frac{<(0,1,1),(1,1,1)>}{(\sqrt{1^2+1^2+1^2})^2}\cdot(1,1,1)$$

$$= (0,1,1) - \frac{(0+1+1)}{3}\cdot(1,1,1)$$

$$= (0,1,1) - \frac{2}{3}\cdot(1,1,1)$$

$$= \boxed{\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$$

$$V_3 = U_3 - \frac{<u_3, V_1>}{\|V_3\|^3}\cdot V_1 - \frac{<u_3, V_2>}{\|V_2\|^2}\cdot V_2$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= (0,0,1) - \frac{\overbrace{<(0,0,1),(1,1,1)>}^{(0+0+1)}}{3}\cdot(1,1,1) - \frac{\overbrace{<(0,0,1),\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)>}^{(0+0+\frac{1}{3})}}{\underbrace{\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}_{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= (0,0,1) - \left(\overset{\frac{2}{6}}{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{-2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= (0,0,1) - \left(0, \frac{3}{6}, \frac{3}{6}\right)$$

$$\left(\ldots, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \boxed{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

ORTO
NORMALIZAÇÃO

$$Q_1 = \frac{(1,1,1)}{\|V_1\|} \longrightarrow \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$3\sqrt{2/3} = \sqrt{9 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{6}$$

$$Q_2 = \frac{\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\|V_2\|} \longrightarrow \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2/3}} \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$Q_3 = \frac{\left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\|V_3\|} \longrightarrow \frac{\left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\searrow \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\searrow$$

$$2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

iii) Seja $h = t^2 \in P_2$ $\quad : \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_2, v_3\rangle$

$$\langle f+g, h\rangle = \langle 1 + (1-t); t^2\rangle = \int_{-1}^{1} [1+(1-t)] \cdot t^2\, dt = \underbrace{\int_{-1}^{1} 1 \cdot t^2\, dt}_{\langle 1, t^2\rangle} + \int_{-1}^{1} (1-t) t^2\, dt = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$$

$$\langle 1, t^2\rangle + \langle (1-t), t^2\rangle$$

OK

IV) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot (1-t)\, dt = \int_{-1}^{1} (1-t) \cdot 1\, dt \therefore \langle g, f\rangle$

$\therefore$ é um produto interno, 4 propriedades OK

b) $\beta = \{1, 1-t\}$ (Base de polinomio)

$$1 - \frac{1}{2} - \left(-1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

PASSO 1 $\rightarrow$ $v_1 = u_1 = \boxed{1}$

$$\int_{-1}^{1} (1-t) \cdot 1\, dt = t - \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 2$$

PASSO 2 $\rightarrow$ $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 = 1 - t - \frac{\langle 1-t, 1\rangle}{\left(\sqrt{\langle 1, 1\rangle}\right)^2} \cdot 1 = 1 - t - \frac{2}{2} \cdot 1 = 1 - t - 1 = \boxed{-t}$

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt = t\Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2$$

$\therefore$ a base ortogonal é

$$\{1, -t\}$$

BASE
ORTO NORMAL :

$$Q_1 = \frac{\vec{V_1}}{\|\vec{V_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{-t}{\sqrt{2/3}} \right\}$$

$$Q_2 = \frac{\vec{V_2}}{\|V_2\|} = \frac{-t}{\sqrt{\langle -t, -t \rangle}} = \frac{-t}{\sqrt{2/3}}$$

$$\hookrightarrow \int_{-1}^{1} -t \cdot -t \, dt = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Módulo 3

Autovalores e Autovetores

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{2}_{\text{auto valor}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\text{auto vetor}}$$

2 é um auto valor de um auto vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{1}_{\text{auto valor}} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\text{auto vetor}}$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um auto vetor associado ao auto valor 1.

$\boxed{Ab = \lambda b}$ ↝ Se verdadeiro ∴ b é um auto vetor associado a λ.

A → Matriz quadrada

λ = Auto valor

b → vetor ñ nulo q pertence ao domínio de A. → Auto vetor associada a λ

PROVA : $\boxed{A \cdot b = \lambda \cdot b}$ e $\boxed{b \neq 0}$

Propriedades (observações)

- Matriz A precisa ser quadrada
- Autovalores e autovetores estão sempre juntos ♡
- Cada autovetor só pode estar associado a um autovalor
- λ pode ser 0, mas b NÃO!
- Autovalores podem estar associados a mais de um autovetor
  ↳ multiplicidade (n) ↝ vai ser a dimensão dos auto espaços que o autovetor vai estar associados
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ → Autovetores LI

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ → Autovetores LI

Exemplos → $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

1° Achando os autovalores (λ)

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↝ precisa transformar em matriz
↓
multiplica pela identidade

2° Achando os autovetores

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 4-x & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 2}$$

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{matrix} x = y \\ (1,1), (2,2), \dots \end{matrix}$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{matrix} 2x = 3y \\ (3,2), (1, 2/3) \end{matrix}$$