Prova Cálculo I

Engenharia da Computação 2022.1

Aluna: Raquel Maciel Coelho de Sousa

1° Questão:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-2}+\frac{x^9-1}{x^3-1}\right)$$

1.1 - Aplicar x_0 na função:

$$f(x_0) = f(1)$$

$$f(1) = \left(\frac{1^2-1}{1-2}+\frac{1^9-1}{1^3-1}\right)$$

$$f(1) = \left(\frac{0}{-1}+\frac{0}{0}\right)$$

(Indeterminado)

1.2 - Para encontrar essa indeterminação:

1.2.1 - Propriedade Limite da soma é a soma dos limites:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(a+b)(x) = \lim_{x\to x_0} a(x) + \lim_{x\to x_0} b(x)}$$

1.2.2 - Propriedade aplicada no limite:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right) + \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^9-1}{x^3-1}\right)$$

1.2.3 - Calculando primeiro limite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right) = f(x_0) = f(1) = \frac{1^2-1}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

1.2.4 - Calculando segundo limite pela propriedade utilizada quando x tende a 1:

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x^m-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{n}{m}\right)}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^9-1}{x^3-1}\right) = \frac{9}{3}$$

1.2.5 - Finalização:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 + 3 = 3$$

2° Questão:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[6]{x}-1}{1-\sqrt[5]{x}}\right)$$

2.1 - Aplicar x_0 na função:

$$f(x_0) = f(1)$$

$$f(1) = \left(\frac{\sqrt[6]{x}-1}{1-\sqrt[5]{x}}\right) = \left(\frac{\sqrt[6]{1}-1}{1-\sqrt[5]{1}}\right)$$

$$\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

(Indeterminação)

2.2 Para encontrar essa indeterminação:

2.2.1 - Teorema da Troca:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)}$$

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

2.2.2 - Substituição em g(x):

Substituição de variável para desenvolvimento da função:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = y^{30} \\ se \quad x \to 1 \quad então \quad y \to 1 \end{array}}$$

$$f(x) = g(x) = \left(\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{1 - \sqrt[5]{x}} \right)$$

$$g(x) = \frac{\sqrt[6]{y^{30}} - 1}{1 - \sqrt[5]{y^{30}}} = \frac{\pm y^5 - 1}{1 - y^6}$$

2.2.3 - Finalização:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{y^5 - 1}{1 - y^6} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{y^5 - 1}{y^6 - 1} \cdot \frac{1}{-1} \right)$$

Propriedade o limite do produto é o do produto dos limites:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (a \cdot b) = \lim_{x \to x_0} (a) \cdot \lim_{x \to x_0} (b)}$$

$$\lim_{x\to 1}(-1) \cdot \lim_{x\to 1}\left(\frac{y^5-1}{y^6-1}\right)$$

Propriedade do limite constante:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(c) = c}$$

$$-1 \cdot \lim_{x\to 1}\left(\frac{y^5-1}{y^6-1}\right)$$

Propriedade utilizada quando x tende a 1:

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{n}\right)}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = -1 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{5}{6}$$

3° Questão

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{|x-5|}{x-5}\right)$$

3.1 - Aplicar x_0 na função:

$$f(x_0) = f(5) = \left(\frac{|x-5|}{x-5}\right)$$

$$\frac{|5-5|}{5-5} = \frac{0}{0}$$

(Indeterminado)

3.2 - Para encontrar essa indeterminação:

3.2.1 - Limites Laterais

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{|x-5|}{x-5}\right)$$

$$\begin{array}{llll} Se & x-5>0 \;\; ou \;\; x>5 & f(x) = & +1 \\ Se & x-5<0 \;\; ou \;\; x<5 & f(x) = & -1 \end{array}$$

Logo limite a esquerda:

$$\lim_{x\to 5^-}\left(\frac{|x-5|}{x-5}\right) = -1$$

Limite a direita:

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{|x-5|}{x-5}\right) = +1$$

E limite em com x tendendo a 5 é indeterminado pois os limites laterais diferem entre si.

4° Questão

$$\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{x^2-1}{x^2-7x+12}\right)$$

4.1 - Aplicar x_0 na função:

$$f(x_0) = f(4) = \left(\frac{4^2-1}{4^2-7\cdot 4+12}\right) = \frac{15}{16-28+12} = \frac{15}{0}$$

Propriedade de limite infinito:

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{k}{0} = \infty}$$

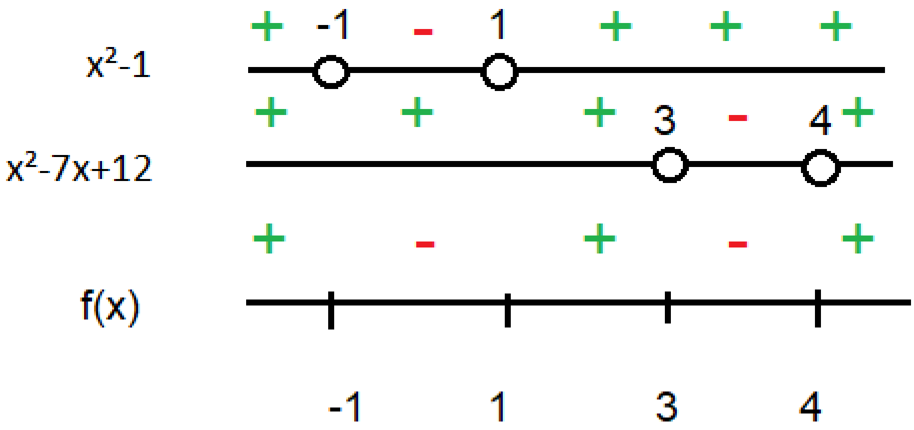
onde k pertence aos R*

Logo seria infinito, mas vamos analisar o sinal deste.

4.2 - Analisar sinal do limite:

4.2.1 - Limites laterais

Análise de sinal



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$
$$quando \; x \to 3^+ \; ou \; x \to 4^-$$

5° Questão

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[2]{x^2 + x} - x} \right)$$

5.1 - Aplicar x_0 na função:

(Indeterminado)

5.2 - Para encontrar essa indeterminação:

5.2.1 - Produtos Notáveis da diferença dos quadrados aplicada:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \right)$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}\ +x}{x^2+x-x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ +x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ +x}{x}\right)$$

Como x tende ao infinito negativo, logo o módulo de x deverá ser tratado como -x.

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ -(-x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\ -1\right)}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-1\ \cdot\ \sqrt{1+\frac{1}{x}}\ -1\right)$$

Utilizando a propriedade que o limite dos produtos é o produto dos limites.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(a\cdot b) = \lim_{x\to x_0}(a)\cdot \lim_{x\to x_0}(b)}$$

$$\lim_{x\to -\infty}(-1)\ \cdot\ \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\ -1\right)$$

Usando propriedade que o limite da constante é a própria constante.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(c) = c}$$

$$-1 \cdot \lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right)$$

$$-\lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right)$$

Propriedade de que a divisão com denominador x quando x tende ao infinito fica zerado.

$$-\lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{1 + \overset{\text{zera}}{\cancel{\frac{1}{x}}}} - 1\right)$$

$$-\lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{1} - 1\right)$$

$$-\lim_{x \to -\infty}\left(0\right)$$

5.2.2 Finalização:

Usando propriedade que o limite da constante é a própria constante.

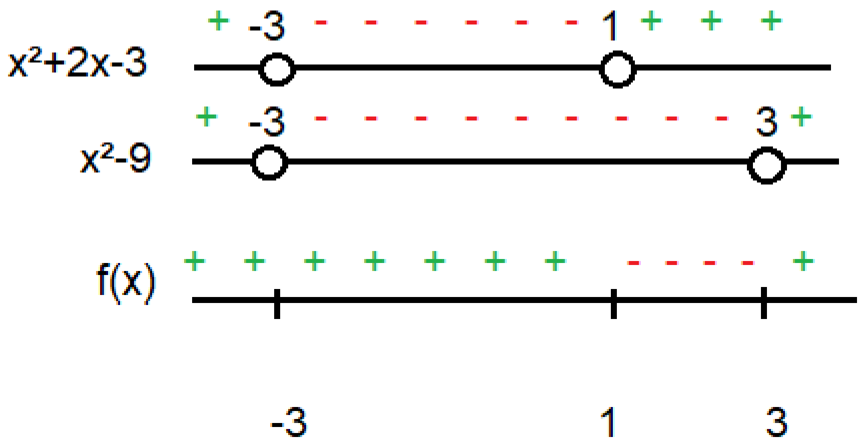
$$\boxed{\lim_{x \to x_0}(c) = c}$$

$$-\lim_{x \to -\infty}(0) = 0$$

6° Questão

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}$$

6.1 - Estudo dos sinais que zeram a função



6.2 - x tendendo ao infinito (assíntota horizontal)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}\right)$$

6.2.1- Aplicando x_0 na função

Propriedade que pode se utilizar quando x tende ao infinito, permanecendo o monômio de maior expoente.

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(P(x)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(AnX^n\right)}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)} \right)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \to \pm \infty} (1)$$

Propriedade que o limite da constante é a própria constante.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (c) = c}$$

$$\lim_{x \to \pm \infty} (1) = 1$$

6.3 - y tendendo ao infinito (assíntota vertical)

Para y tender ao infinito iremos seguir a propriedade de limite infinito:

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{k}{0} = \infty}$$

onde k pertence aos R*

Sendo assim temos que zerar o denominador e não zerar o numerador de f(x).

6.3.1- Fatorando função

Teorema de D'Alembert fala que se um dado polinômio **P** for zerado quando aplicado a um certo **a**, ou seja P(a) = 0, então aquele polinômio é divisível por (x-a). O numerador e denominador são divisíveis por -3. Logo iremos dividir o numerador e o denominador por (x-(-3)) ou (x+3):

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}}{\frac{x^2 - 9}{x + 3}} \right)$$

A partir disso tomamos conhecimento que x não pode ser igual a -3 para evitar uma divisão de denominador zero. Após serem feitas as divisões dos polinômios obtemos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x-1)}{(x-3)}$$

Assim chegamos a conclusão que o número que zeraria o denominador e não o numerador seria 3.

$$\begin{aligned} &Para\, f(x) = \infty \\ &então\, x = 3 \end{aligned}$$

6.4 - Finalização

Assíntota horizontal de f(x)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

Assíntota vertical de f(x)

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \pm\infty$$