II Prova - Cálculo I

Raquel Maciel Coelho de Sousa

25 de Abril 2022

1 Questão:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{4x}$$

1.1 Aplicar x_0 na função

$$f(x_0) = f(0)$$
$$f(0) = \frac{sin3 \cdot 0}{4 \cdot 0}$$
$$f(0) = \frac{0}{0}$$

(Indeterminado)

1.2 Para encontrar essa indeterminação

1.2.1 Propriedade que o limite do produto é o produto dos limites

$$\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{4x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{sin3x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{x}$$

1.2.2 Propriedade do limite da constante

$$\lim_{x\to x_0} c = c$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{x}$$

1.2.3 Multiplica o numerador e denominador por 3

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin3x \cdot 3}{3x}$$

1.2.4 Propriedade que o limite do produto é o produto dos limites

$$\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} 3$$

1.2.5 Propriedade do limite da constante

$\lim_{x \to x_0} c = c$

$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sin3x}{3x} \cdot 3$

1.2.6 Teorema da Troca

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$

$f(x) = g(x)$

1.2.7 Substituição de variável

$3x = t$

$x \to 0$

$t \to 0$

$= \frac{3}{4} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sin(t)}{t}$

1.2.8 Teorema do Confronto (Sanduíche) e Limite Trigonométrico Fundamental

$cos(t) \leq \frac{sin(t)}{t} \leq 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{sin(t)}{t} = 1$

1.3 Finalização

$= \frac{3}{4} \cdot 1$

$= \frac{3}{4}$

2 Questão:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - cos10x}$$

2.1 Aplicar x_0 na função

$$f(x_0) = f(0)$$

$$f(0) = \frac{0^2}{1 - cos10 \cdot 0}$$

$$f(0) = \frac{0}{1 - 1}$$

$$f(0) = \frac{0}{0}$$

(Indeterminado)

2.2 Para encontrar essa indeterminação

2.2.1 Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - cos10x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2) \cdot (1 + cos10x)}{(1 - cos10x) \cdot (1 + cos10x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2) \cdot (1 + cos10x)}{(1^2 - cos^2(10x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2) \cdot (1 + cos10x)}{(1 - cos^2(10x))}$$

2.2.2 Utilizando a substituição pela Relação fundamental da trigonometria

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2) \cdot (1 + cos10x)}{sen^2(10x)}$$

2.2.3 Separação pelo produto dos quocientes

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)}{sen^2(10x)} \cdot \frac{1 + cos10x}{1}$$

2.2.4 Propriedade que o limite do produto é o produto dos limites

$$\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)}{sen^2(10x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 + cos10x}{1}$$

2.2.5 Pondo o expoente comum do numerador e denominador como o expoente do quociente completo e o tornando negativo para inverter a fração

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{sen10x}{x}\right)^{-2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 + cos10x}{1}$$

2.2.6 Propriedade em que o limite da potência é a potência do limite

$$\lim_{x \to x_0} (a^b) = \left(\lim_{x \to x_0} a \right)^b$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{sen10x}{x} \right)^{-2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 + cos10x}{1}$$

2.2.7 Propriedade derivada do Limite Trigonométrico Fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(k \cdot t)}{t} = k$$

$$= 10^{-2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 + cos10x}{1}$$

2.3 Finalização

$$= 10^{-2} \cdot \frac{1 + cos(10 \cdot 0)}{1}$$
$$= 10^{-2} \cdot \frac{1 + 1}{1}$$
$$= \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{1}$$
$$= \frac{1}{50}$$

3 Questão:

$$\lim_{x\to 0} 3^{\frac{1-sec^2(20x)}{sec^2(10x)-1}}$$

3.1 Aplicar x_0 na função

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(0) \\ f(0) &= 3^{\frac{1-sec^2(20\cdot 0)}{sec^2(10\cdot 0)-1}} \\ f(0) &= 3^{\frac{1-\frac{1}{cos^2(0)}}{\frac{1}{cos^2(0)}-1}} \\ f(0) &= 3^{\frac{1-\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}-1}} \\ f(0) &= 3^{\frac{0}{0}} \end{aligned} \tag{1}$$

(Indeterminado)

3.2 Para encontrar essa indeterminação

3.2.1 Propriedade em que o limite da potência é a base elevada ao limite do expoente

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(a^b) = a^{\lim_{x\to x_0} b}}$$

$$\lim_{x\to 0} 3^{\frac{1-sec^2(20x)}{sec^2(10x)-1}}$$
$$= 3^{\lim_{x\to 0} \frac{1-sec^2(20x)}{sec^2(10x)-1}}$$

3.2.2 Pondo o -1 em evidência

$$= 3^{\lim_{x\to 0} \frac{-(sec^2(20x)-1)}{sec^2(10x)-1}}$$
$$= 3^{\lim_{x\to 0} -1\cdot\frac{sec^2(20x)-1}{sec^2(10x)-1}}$$

3.2.3 Propriedade que o limite do produto é o produto dos limites

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

$$= 3^{\lim_{x\to 0} -1\cdot\lim_{x\to 0} \frac{sec^2(20x)-1}{sec^2(10x)-1}}$$

3.2.4 Propriedade do limite da constante

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} c = c}$$

$$= 3^{-1\cdot\lim_{x\to 0} \frac{sec^2(20x)-1}{sec^2(10x)-1}}$$
$$= 3^{-\lim_{x\to 0} \frac{sec^2(20x)-1}{sec^2(10x)-1}}$$

3.2.5 Utilizando a substituição pela Relação da tangente com a secante

$$\boxed{sec^2(x) - tg^2(x) = 1}$$

$tg^2(x) = sec^2(x) - 1$

$= 3^{-\lim_{x\to 0}\frac{tg^2(20x)}{tg^2(10x)}}$

3.2.6 Pondo o expoente comum do numerador e denominador como o expoente do quociente completo

$= 3^{-\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(20x)}{tg(10x)}\right)^2}$

3.2.7 Propriedade em que o limite da potência é a potência do limite

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(a^b) = \left(\lim_{x\to x_0} a\right)^b}$$

$= 3^{-\left(\lim_{x\to 0}\frac{tg(20x)}{tg(10x)}\right)^2}$

3.2.8 Propriedade do limite do quociente das tangentes

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tg(k\cdot x)}{tg(q\cdot x)} = \frac{k}{q}}$$

$= 3^{-\left(\lim_{x\to 0}\frac{20}{10}\right)^2}$

3.3 Finalização

$= 3^{-\left(\frac{20}{10}\right)^2}$

$= 3^{-(2)^2}$

$= 3^{-4}$

$= \dfrac{1}{81}$

4 Questão:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{3}{5x} \right)^{2x} \right)$$

4.1 Aplicar x_0 na função

Por se tratar de operações aritméticas entre inifnitos então é considerado Indeterminado.

4.2 Para encontrar essa indeterminação

4.2.1 Propriedade em que o limite do log é o log do limite

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (\log a) = \log \left(\lim_{x \to x_0} a \right)}$$

$$\ln \left(\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{5x} \right)^{2x} \right)$$

4.2.2 Teorema da Troca

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)}$$

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

4.2.3 Substituição de Variável

$$\frac{3}{5x} = \frac{1}{t}$$

$$t = \frac{5x}{3}$$

$$x = \frac{3t}{5}$$

$$x \to \infty$$

$$t \to \infty$$

$$\ln \left(\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2 \cdot \frac{3t}{5}} \right)$$

$$\ln \left(\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\frac{6t}{5}} \right)$$

4.2.4 Separação da multiplicação dos expoentes

$$\ln \left(\lim_{t \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t} \right)^{t} \right)^{\frac{6}{5}} \right)$$

4.2.5 Propriedade o limite do expoente é o expoente do limite

$$\ln \left(\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{t} \right)^{\frac{6}{5}}$$

4.2.6 Limite Exponencial / Limite de Euler

$$\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$= \ln(e)^{\frac{6}{5}}$

4.2.7 Propriedade Logarítmica em que o expoente do Logaritmando vira o Fator do Logaritmo

$= \dfrac{6}{5} \cdot \ln(e)$

4.3 Finalização

$= \dfrac{6}{5} \cdot 1$

$= \dfrac{6}{5}$

5 Questão:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 6^x}{10^x - 20^x}$$

5.1 Aplicar x_0 na função

$$f(x_0) = f(0)$$
$$f(0) = \frac{2^0 - 6^0}{10^0 - 20^0}$$
$$f(0) = \frac{1 - 1}{1 - 1}$$
$$f(0) = \frac{0}{0}$$

(Indeterminado)

5.2 Para encontrar essa indeterminação

5.2.1 Adicionando um e diminuindo um de ambos membros da fração

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1 - 6^x + 1}{10^x - 1 - 20^x + 1}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2^x - 1) - (6^x - 1)}{(10^x - 1) - (20^x - 1)}$$

5.2.2 Divindo ambos membros da fração por x

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(2^x-1)-(6^x-1)}{x}}{\frac{(10^x-1)-(20^x-1)}{x}}$$

5.2.3 Transformando ambos membros da fração em Subtrações

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2^x-1}{x} - \frac{6^x-1}{x}}{\frac{10^x-1}{x} - \frac{20^x-1}{x}}$$

5.2.4 O limite do quociente é o quociente dos limites

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \frac{2^x-1}{x} - \frac{6^x-1}{x}}{\lim_{x \to 0} \frac{10^x-1}{x} - \frac{20^x-1}{x}}$$

5.2.5 Propriedade em que o limite da diferença é a diferença dos limites

$$\lim_{x \to x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \frac{2^x-1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{6^x-1}{x}}{\lim_{x \to 0} \frac{10^x-1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{20^x-1}{x}}$$

5.2.6 Limite do Logaritmo Natural de X

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a = lna$$

$$= \frac{ln2 - ln6}{ln10 - ln20}$$

5.2.7 Propriedade Logarítmica em que a diferença dos Logaritmos é o Logaritmo do quociente dos logaritmandos

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$= \frac{ln\frac{2}{6}}{ln\frac{10}{20}}$$
$$= \frac{ln\frac{1}{3}}{ln\frac{1}{2}}$$

5.2.8 Revertendo a propriedade usada depois da fração ter sido simplificada

$$= \frac{ln1 - ln3}{ln1 - ln2}$$

5.2.9 Propriedade logarítmica onde o logaritmando é 1

$$\log_a 1 = 0$$

$$= \frac{0 - ln3}{0 - ln2}$$

5.2.10 Propriedade logarítmica da substituição de base através de uma razão

$$\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$$

5.3 Finalização

$$= \frac{ln3}{ln2}$$
$$= \log_2 3$$

6 Questão: Analise a continuidade de

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, & \text{se } x < 1 \\ 3x^4 - 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

6.1 Variável x_0

Atribuindo uma variável x_0 a x de modo que $x = x_0 \in D(f)$ iremos analizar sua continuidade.

6.2 Condições da continuidade de função

6.2.1 Se $f(x_0)$ está definido

$$f(x) = f(x_0) = \begin{cases} x_0 + (x_0)^2, & \text{se } x_0 < 1 \\ 3(x_0)^4 - 1, & \text{se } x_0 \geq 1 \end{cases}$$

6.2.2 Se $\lim_{x \to x_0}$ existe

$$\lim_{x \to x_0} = \begin{cases} x_0 + (x_0)^2, & \text{se } x_0 < 1 \\ 3(x_0)^4 - 1, & \text{se } x_0 \geq 1 \end{cases}$$

6.2.3 Se $\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$

$$\text{se } x_0 < 1 \begin{cases} f(x_0) = x_0 + (x_0)^2 \\ \lim_{x \to x_0} = x_0 + (x_0)^2 \\ \\ f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \end{cases}$$

$$\text{se } x_0 \geq 1 \begin{cases} f(x_0) = 3(x_0)^4 - 1 \\ \lim_{x \to x_0} = 3(x_0)^4 - 1 \\ \\ f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \end{cases}$$

6.3 Finalização

Assim provamos que a função f(x) polinomial é contínua.