INSTITUTO FEDERAL
Ceará
Campus
Fortaleza

Bacharelado de Engenharia da Computação

Raquel Maciel Coelho de Sousa

Cálculo II

Terceiro Trabalho

Dezembro 2022

Departamento de Telemática

Capítulo 1

12.4 MUDANÇA DE VARIÁVEL

1.1 1° Questão - Item A

$$\int \sqrt{1 - 4x^2} dx \tag{1.1}$$

1.1.1 Relação Fundamental da Trigonometria

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \tag{1.2}$$

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2 \tag{1.3}$$

1.1.2 Substituição de Variável

Pela equação 1.2 temos que:

1 - $\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$

Então se:

$\sin(\theta) = 2x$

$\Rightarrow \cos^2(\theta) = 1 - (2x)^2$

$\Rightarrow \cos^2(\theta) = 1 - 4x^2$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \sqrt{1 - 4x^2} \tag{1.4}$$

Além disso temos que:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sin(\theta) \tag{1.5}$$

$$\sin(\theta) = 2x \tag{1.6}$$

$$\theta = \arcsin(2x) \tag{1.7}$$

$\Rightarrow \frac{d(\sin(\theta))}{dx} = \frac{d(2x)}{dx}$

$\Rightarrow \frac{d(\theta)}{dx} \cdot \cos(\theta) = 2$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cdot \cos(\theta) \cdot d(\theta) \tag{1.8}$$

Aplicando 1.4 e 1.8 na equação 1.1:

$\int \sqrt{1 - 4x^2} dx$

$= \int \cos(\theta) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\theta) \cdot d(\theta)$

$= \frac{1}{2} \cdot \int \cos^2(\theta) d(\theta)$

1.1.3 Integral de $\cos(\theta)$ elevado a n $(n \geq 2)$

$$\boxed{\int \cos^n(\theta) d(\theta) = \frac{1}{n} \cdot \cos^{n-1}(\theta) \sin(\theta) + \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2}(\theta) d(\theta)} \tag{1.9}$$

Com $n = 2$:

$\Rightarrow \int \cos^2(\theta) d(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \cos^{2-1}(\theta) \sin(\theta) + \frac{2-1}{2} \cdot \int \cos^{2-2}(\theta) d(\theta)$

$\Rightarrow \int \cos^2(\theta) d(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{1}{2} \cdot \int d(\theta)$

$\Rightarrow \int \cos^2(\theta) d(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{1}{2} \cdot \theta$

1.1.4 Aplicação na integral

$\int \sqrt{1 - 4x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \cos^2(\theta) d(\theta)$

$\Rightarrow \int \sqrt{1 - 4x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{1}{2} \cdot \theta\right)$

$\Rightarrow \int \sqrt{1 - 4x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot (cos(\theta) \sin(\theta) + \theta)$

1.1.5 Retornando a variável x com as equações 1.4, 1.6, 1.7

$\int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{4} \cdot (cos(\theta)\sin(\theta) + \theta)$

$\Rightarrow \int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{1-4x^2} \cdot 2x + \arcsin(2x)\right) + K$

Capítulo 2

12.5 INTEGRAIS INDEFINIDAS DO TIPO $\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx$

2.1 1° Questão

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx \tag{2.1}$$

2.1.1 Frações Parciais - Caso 1

No caso 1 temos no numerador uma equação de primeiro grau e no denominador uma de segundo grau que é capaz de ser separada em dois fatores:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \tag{2.2}$$

$$A = \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta} \tag{2.3}$$

$$B = \frac{m\beta+n}{\beta-\alpha} \tag{2.4}$$

2.1.2 Encontrando A e B

Temos que pela 2.1:

$\int \frac{1}{x^2-4}dx == \int \frac{1}{x^2-2^2}dx = \int \frac{0x+1}{(x-2)(x+2)}dx = \int \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}dx$

$m = 0$

$n = 1$

$\alpha = 2$

$\beta = -2$

Pelas equações 2.3 e 2.4:

$\Rightarrow A = \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta} = \frac{0\cdot2+1}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow B = \frac{m\beta+n}{\beta-\alpha} = \frac{0\cdot(-2)+1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$

2.1.3 Aplicando na equação

$\int \frac{1}{x^2-4}dx$

$= \int \frac{A}{(x-2)}dx + \int \frac{B}{(x+2)}dx$

$= A \cdot \int \frac{1}{(x-2)}dx + B \cdot \int \frac{1}{(x+2)}dx$

$= \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{(x-2)}dx - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{(x+2)}dx$

$= \frac{1}{4} \cdot \ln|x-2| - \frac{1}{4} \cdot \ln|x+2|$

$= \frac{1}{4} \cdot (\ln|x-2| - \ln|x+2|)$

$= \frac{1}{4} \cdot \ln|\frac{x-2}{x+2}| + K$

Capítulo 3

12.6 PRIMITIVAS DE FUNÇÕES RACIONAIS COM DENOMINADORES DO TIPO $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

3.1 1° Questão - Item B

$$\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}dx \tag{3.1}$$

3.1.1 Frações Parciais - Caso 3

No caso 3 temos no numerador uma equação de segundo grau e no denominador uma de terceiro grau que é capaz de ser separada em três fatores:

$$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} \tag{3.2}$$

$$A = \frac{m\alpha^2+n\alpha+p}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \tag{3.3}$$

$$B = \frac{m\beta^2+n\beta+p}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \tag{3.4}$$

$$C = \frac{m\gamma^2 + n\gamma + p}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \tag{3.5}$$

3.1.2 Encontrando A, B e C

Temos que pela equação 3.1:

$\int \frac{0x^2+x+1}{x(x-2)(x+3)}dx = \int \frac{A}{(x-0)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+3)}dx$

$m = 0$

$n = 1$

$p = 1$

$\alpha = 0$

$\beta = 2$

$\gamma = -3$

Pelas equações 3.3, 3.4 e 3.5:

$\Rightarrow A = \frac{m\alpha^2+n\alpha+p}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = \frac{0\cdot 0^2+1\cdot 0+1}{(0-2)(0-(-3))} = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow B = \frac{m\beta^2+n\beta+p}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} = \frac{0\cdot 2^2+1\cdot 2+1}{(2-0)(2-(-3))} = \frac{3}{10}$

$\Rightarrow C = \frac{m\gamma^2+n\gamma+p}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = \frac{0\cdot(-3)^2+1\cdot(-3)+1}{((-3)-0)((-3)-2)} = -\frac{2}{15}$

3.1.3 Aplicando na equação

$\int \frac{0x^2+x+1}{x(x-2)(x+3)}dx$

$= \int \frac{A}{(x-0)}dx + \int \frac{B}{(x-2)}dx + \int \frac{C}{(x+3)}dx$

$= A \cdot \int \frac{1}{(x-0)}dx + B \cdot \int \frac{1}{(x-2)}dx + C \cdot \int \frac{1}{(x+3)}dx$

$= -\frac{1}{6} \cdot \ln|x| + \frac{3}{10} \cdot \ln|x-2| - \frac{2}{15} \cdot \ln|x+3| + K$

Capítulo 4

12.7 PRIMITIVAS DE FUNÇÕES RACIONAIS CUJOS DENOMINADORES APRESENTAM FATORES IRREDUTÍVEIS DO 2.º GRAU

4.1 1° Questão

$$\int \frac{4x^2 + 17x + 13}{(x-1)(x^2+6x+10)} dx \tag{4.1}$$

4.1.1 Frações Parciais - Caso 5

No caso 5 temos no numerador uma equação de segundo grau e no denominador uma de terceiro grau na qual tem raízes complexas:

$$\frac{mx^2 + nx + p}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \tag{4.2}$$

$$aA + B = m \tag{4.3}$$

$$bA - \alpha B + C = n \tag{4.4}$$

$$cA - \alpha C = p \tag{4.5}$$

4.1.2 Encontrando A, B e C

$\int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = \int \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+6x+10)}dx$

$m = 4$

$n = 17$

$p = 13$

$\alpha = 1$

$a = 1$

$b = 6$

$c = 10$

Pela equação 4.3, 4.4 e 4.5:

aA + B = m $\Rightarrow A + B = 4 \Rightarrow A = 4 - B$

$bA - \alpha B + C = n \Rightarrow 6A - B + C = 17$

$cA - \alpha C = p \Rightarrow 10A - C = 13$

$\Rightarrow A = 4 - B$

$\Rightarrow 6(4 - B) - B + C = 17 \Rightarrow 24 - 6B - B + C = 17 \Rightarrow C = 7B - 7$

$\Rightarrow 10(4 - B) - (7B - 7) = 13 \Rightarrow 40 - 10B - 7B + 7 = 13 \Rightarrow 34 = 17B \Rightarrow B = 2$

$\Rightarrow A = 4 - 2 \Rightarrow A = 2$

$\Rightarrow 10 \cdot 2 - C = 13 \Rightarrow 20 - C = 13 \Rightarrow C = 7$

4.1.3 Aplicando na equação

$\int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = \int \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+6x+10)}dx$

$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = A \cdot \int \frac{1}{(x-1)}dx + \int \frac{Bx+C}{(x^2+6x+10)}dx$

$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2 \cdot \ln|x-1| + \int \frac{2x+7}{(x^2+6x+10)}dx$

$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2 \cdot \ln|x-1| + \int \frac{2x+7}{(x+3)^2+1}dx$

4.1.4 Substituição de variável

Se $x+3=u$

$$\Rightarrow x = u - 3 \tag{4.6}$$

$$\Rightarrow dx = du \tag{4.7}$$

$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2\cdot\ln|x-1| + \int \frac{2(u-3)+7}{u^2+1}du$
$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2\cdot\ln|x-1| + \int \frac{2u+1}{u^2+1}du$
$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2\cdot\ln|x-1| + 2\cdot\int \frac{u}{u^2+1}du + \int \frac{1}{u^2+1}du$

4.1.5 Substituição de variável novamente

Se $u^2+1=z$:

$$u = \sqrt{z-1} \tag{4.8}$$

$\Rightarrow \frac{d(u^2+1)}{du} = \frac{dz}{du}$
$\Rightarrow 2u = \frac{dz}{du}$
$\Rightarrow dz = 2udu$

$$du = \frac{dz}{2\sqrt{z-1}} \tag{4.9}$$

$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2\cdot\ln|x-1| + 2\cdot\int \frac{\sqrt{z-1}}{z}\cdot\frac{dz}{2\sqrt{z-1}} + \int \frac{1}{u^2+1}du$
$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2\cdot\ln|x-1| + \int \frac{1}{z}\cdot dz + \int \frac{1}{u^2+1}du$
$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2\cdot\ln|x-1| + ln|z| + \arctan(u)$
$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2\cdot\ln|x-1| + ln|u^2+1| + \arctan(u)$
$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2\cdot\ln|x-1| + ln|(x+3)^2+1| + \arctan(x+3)$
$\Rightarrow \int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx = 2\cdot\ln|x-1| + ln|x^2+6x+10| + \arctan(x+3) + K$