III Prova - Cálculo I

Raquel Maciel Coelho de Sousa

27 de Maio 2022

1 Questão:

$f(x) = x^2 + x \cdot \cos x + \pi$
$f'(x)$

1.1 Derivada da soma

A derivada da soma é a soma das derivadas

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$

$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x)$

$f'(x) = (x^2)' + (x \cdot \cos x)' + (\pi)'$

1.2 Derivada da base da potência

$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$

$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

$(x^2)' = 2 \cdot x$
$f'(x) = (2x) + (x \cdot \cos x)' + (\pi)'$
$f'(x) = 2x + (x \cdot \cos x)' + (\pi)'$

1.3 Derivada do produto

$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$

$(x \cdot \cos x)' = ((x)' \cdot \cos x) + (x \cdot (\cos x)')$
$f'(x) = 2x + ((x)' \cdot \cos x) + (x \cdot (\cos x)') + (\pi)'$

1.4 Derivada da função identidade

$f(x) = x$

$f'(x) = 1$

$f'(x) = 2x + (1 \cdot \cos x) + (x \cdot (\cos x)') + (\pi)'$
$f'(x) = 2x + \cos x + (x \cdot (\cos x)') + (\pi)'$

1.5 Derivada trigonométrica do cosseno

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$f'(x) = 2x + \cos x + (x \cdot (-\sin x)) + (\pi)'$
$f'(x) = 2x + \cos x - (x \cdot \sin x) + (\pi)'$

1.6 Derivada da constante

$f(x) = c$

$f'(x) = 0$

$f'(x) = 2x + \cos x - (x \cdot \sin x) + 0$

1.7 A derivada da função f(x) em relação à variável x é portanto:

$f'(x) = 2x + \cos x - (x \cdot \sin x)$

2 Questão:

$g(x) = \ln x - \dfrac{3^x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

$g'(x)$

2.1 Derivada da diferença

A derivada da diferença é a diferença das derivadas

$f(x) = f_1(x) - f_2(x) - \cdots - f_n(x)$

$f'(x) = f_1'(x) - f_2'(x) - \cdots - f_n'(x)$

$$g'(x) = (\ln x)' - \left(\frac{3^x}{\sin x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)'$$

2.2 Derivada do logarítmo

$f(x) = \log_a x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln e}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{3^x}{\sin x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)'$$

2.3 Derivada do produto

$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$

$$\left(\frac{3^x}{\sin x}\right)' = (3^x \cdot cossec(x))'$$
$$(3^x \cdot cossec(x))' = ((3^x)' \cdot cossec(x)) + (3^x \cdot (cossec(x))')$$

2.3.1 Derivada trigonométrica da cossecante

$f(x) = cossec(x)$

$f'(x) = -cossec(x)cotg(x)$

$$(3^x \cdot cossec(x))' = ((3^x)' \cdot cossec(x)) + (3^x \cdot (cossec(x))')$$
$$(3^x \cdot cossec(x))' = ((3^x)' \cdot cossec(x)) + (3^x \cdot (-cossec(x)cotg(x)))$$

2.3.2 Derivada do expoente da potência

$f(x) = a^x$

$f'(x) = a^x \cdot \ln a$

$(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3$
$(3^x \cdot cossec(x))' = (3^x \cdot \ln 3 \cdot cossec(x)) + (3^x \cdot -cossec(x) \cdot cotg(x))$

2.3.3 Derivada final do segundo termo

$(3^x \cdot cossec(x))' = 3^x \cdot cossec(x) \cdot \ln 3 - 3^x \cdot cossec(x) \cdot cotg(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - (3^x \cdot cossec(x) \cdot \ln 3 - 3^x \cdot cossec(x) \cdot cotg(x)) - \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 3^x \cdot cossec(x) \cdot \ln 3 + 3^x \cdot cossec(x) \cdot cotg(x) - \left(\frac{1}{x}\right)'$$

2.4 Derivada da base da potência

$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$

$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 3^x \cdot cossec(x) \cdot \ln 3 + 3^x \cdot cossec(x) \cdot cotg(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

2.5 A derivada da função g(x) em relação à variável x é portanto :

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 3^x \cdot cossec(x) \cdot \ln 3 + 3^x \cdot cossec(x) \cdot cotg(x) + \frac{1}{x^2}$$

3 Questão:

$\phi(\theta) = \cosh(\sin e^{\theta}) - \sinh(\cos e^{\theta})$
$\phi'(\theta)$

3.1 Derivada da diferença

A derivada da diferença é a diferença das derivadas

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) - \cdots - f_n(x)$$

$$f'(x) = f_1'(x) - f_2'(x) - \cdots - f_n'(x)$$

$\phi'(\theta) = (\cosh(\sin e^{\theta}))' - (\sinh(\cos e^{\theta}))'$

3.2 Regra da Cadeia aplicada ao primeiro termo

De acordo com a regra da cadeia a derivada de uma função que utiliza de outras seria o produto da derivada de cada uma de suas funções membros.

$$y = u(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$a(\theta) = \cosh(b(\theta))$
$b(\theta) = \sin(c(\theta))$
$c(\theta) = e^{\theta}$
$\frac{da}{d\theta} = \frac{da}{db} \cdot \frac{db}{dc} \cdot \frac{dc}{d\theta}$
$\frac{da}{d\theta} = \frac{d(\cosh b)}{db} \cdot \frac{d(\sin c)}{dc} \cdot \frac{d(e^{\theta})}{d\theta}$

3.2.1 Derivada do cosseno hiperbólico

$$f(x) = \cosh(x)$$

$$f'(x) = \sinh(x)$$

$\frac{da}{d\theta} = \sinh b \cdot \frac{d(\sin c)}{dc} \cdot \frac{d(e^{\theta})}{d\theta}$

3.2.2 Derivada trigonométrica do seno

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$\frac{da}{d\theta} = \sinh b \cdot \cos c \cdot \frac{d(e^{\theta})}{d\theta}$

3.2.3 Derivada do expoente da potência

$f(x) = a^x$

$f'(x) = a^x \cdot \ln a$

$$\frac{da}{d\theta} = \sinh b \cdot \cos c \cdot e^\theta \cdot \ln e$$

3.2.4 Derivada do primeiro termo de $\phi'(\theta)$

$$\frac{da}{d\theta} = \sinh(\sin e^\theta) \cdot \cos e^\theta \cdot e^\theta$$

3.3 Regra da Cadeia aplicada ao segundo termo

De acordo com a regra da cadeia a derivada de uma função que utiliza de outras seria o produto da derivada de cada uma de suas funções membros.

$y = u(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$a(\theta) = \sinh(b(\theta))$$
$$b(\theta) = \cos(c(\theta))$$
$$c(\theta) = e^\theta$$
$$\frac{da}{d\theta} = \frac{da}{db} \cdot \frac{db}{dc} \cdot \frac{dc}{d\theta}$$
$$\frac{da}{d\theta} = \frac{d(\sinh b)}{db} \cdot \frac{d(\cos c)}{dc} \cdot \frac{d(e^\theta)}{d\theta}$$

3.3.1 Derivada do seno hiperbólico

$f(x) = \sinh(x)$

$f'(x) = \cosh(x)$

$$\frac{da}{d\theta} = \cosh b \cdot \frac{d(\cos c)}{dc} \cdot \frac{d(e^\theta)}{d\theta}$$

3.3.2 Derivada trigonométrica do cosseno

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$$\frac{da}{d\theta} = \cosh b \cdot (-\sin c) \cdot \frac{d(e^\theta)}{d\theta}$$

3.3.3 Derivada do expoente da potência

$f(x) = a^x$

$f'(x) = a^x \cdot \ln a$

$$\frac{da}{d\theta} = \cosh b \cdot (-\sin c) \cdot e^\theta \cdot \ln e$$

3.3.4 Derivada do segundo termo de $\phi'(\theta)$

$$\frac{da}{d\theta} = \cosh(\cos e^{\theta}) \cdot (-\sin e^{\theta}) \cdot e^{\theta}$$

3.4 A derivada da função $\phi(\theta)$ em relação à variável θ é portanto:

$$\phi'(\theta) = (\sinh(\sin e^{\theta}) \cdot \cos e^{\theta} \cdot e^{\theta}) - (\cosh(\cos e^{\theta}) \cdot (-\sin e^{\theta}) \cdot e^{\theta})$$
$$\phi'(\theta) = (\sinh(\sin e^{\theta}) \cdot \cos e^{\theta} \cdot e^{\theta}) + (\cosh(\cos e^{\theta}) \cdot \sin e^{\theta} \cdot e^{\theta})$$

4 Questão:

$y = x^{72} + \cos x + e^x$

$\frac{d^{72}y}{dx^{72}}$

4.1 Derivada de Ordem Superior

4.1.1 Derivada da soma

A derivada da soma é a soma das derivadas

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$

$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x)$

$y = x^{72} + \cos x + e^x$

$\frac{d^{72}y}{dx^{72}} = \frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} + \frac{d^{72}(\cos x)}{dx^{72}} + \frac{d^{72}(e^x)}{dx^{72}}$

4.2 Padrões de Comportamento

Para analisarmos esta derivada de 72° Ordem Superior iremos analisar se esta tem padrões de repetições na derivação de seus termos membros.

4.2.1 Comportamento da derivada da variável como base de potência

Vamos observar o padrão de comportamento em derivadas de bases em uma potência

$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$

$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

$f''(x) = a \cdot (a-1) \cdot x^{a-2}$

$f'''(x) = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot x^{a-3}$

$f^{(4)}(x) = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3) \cdot x^{a-4}$

$\ldots$

$f^{(n)}(x) = \frac{a!}{(a-n)!} \cdot x^{a-n}$

isto se $n \leq a$ e $a \in \mathbb{R}$

Logo podemos concluir que:

$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = \frac{72!}{(72-72)!} \cdot x^{72-72}$

$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = \frac{72!}{0!} \cdot x^0$

$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = \frac{72!}{1} \cdot 1$

$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = 72!$

4.2.2 Comportamento recursivo na derivada trigonométrica seno ou cosseno

$(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$

$f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = \cos(x)$
$f''(x) = -\sin(x)$
$f'''(x) = -\cos(x)$
$f^{(4)}(x) = \sin(x) \to$ início do loop novamente
$\ldots$

Percebemos aqui que temos um laço repetitivo de casos de derivada, a única condição para saber qual valor que a derivada de ordem superior n receberá é justamente o seu resto pela divisão do total de casos possíveis (4 casos possíveis).

resto $0 \to f(x) = \sin(x)$
resto $1 \to f'(x) = \cos(x)$
resto $2 \to f''(x) = -\sin(x)$
resto $3 \to f'''(x) = -\cos(x)$
resto $4 \to f^{(4)}(x) = \sin(x) \to$ início do loop novamente
$\ldots$

Este mapeamento de cada resto de divisão com cada valor respectivo depende unicamente do valor da função original, as outras serão alinhadas a partir desta, mas sempre seguindo esta ordem de loop. Logo podemos concluir que como a função original é cosx este será o primeiro item do loop:

resto $0 \to f(x) = \cos(x)$
resto $1 \to f'(x) = -\sin(x)$
resto $2 \to f''(x) = -\cos(x)$
resto $3 \to f'''(x) = \sin(x)$
resto $4 \to f^{(4)}(x) = \cos(x) \to$ início do loop novamente

A Ordem Superior de número 72 nos indica uma ordem de número que é divisível por 4, logo seu resto é 0 tendo então seu valor referente ao que inicia o loop novamente, ou seja, ele mesmo.

$$\frac{d^{72}(\cos x)}{dx^{72}} = \cos x$$

4.2.3 Comportamento de Idempotência

$f(x) = a^x$

$f'(x) = a^x \cdot \ln a$

$(e^x)' = (e^x) \cdot \ln e$
$(e^x)' = (e^x)$

O comportamento analisado neste caso é o da idempotência de e^x onde a derivada de Ordem Superior n sempre irá resultar nele mesmo. Então:

$$\frac{d^{72}(e^x)}{dx^{72}} = (e^x)$$

4.3 A derivada de 72° ordem da função y em relação à variável x é portanto:

$$\frac{d^{72}y}{dx^{72}} = \frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} + \frac{d^{72}(\cos x)}{dx^{72}} + \frac{d^{72}(e^x)}{dx^{72}}$$

$$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = 72!$$

$$\frac{d^{72}(\cos x)}{dx^{72}} = \cos x$$

$$\frac{d^{72}(e^x)}{dx^{72}} = (e^x)$$

$$\frac{d^{72}y}{dx^{72}} = 72! + \cos x + e^x$$

5 Questão:

$y - x^2y^2 - \cos xy = 4$

$\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dy}$

5.1 Derivadas Implícitas em relação à variável x

Pela função não dispor as variáveis de forma a permitir o isolamento claro destas podemos tratá-la como implícita, calculando então a derivada de seus membros da igualdade individualmente.

$y - x^2y^2 - \cos xy = 4$

$\frac{d(y - x^2y^2 - \cos xy)}{dx} = \frac{d(4)}{dx}$

5.2 Derivada da diferença

A derivada da diferença é a diferença das derivadas

$f(x) = f_1(x) - f_2(x) - \cdots - f_n(x)$

$f'(x) = f_1'(x) - f_2'(x) - \cdots - f_n'(x)$

$\frac{dy}{dx} - \frac{d(x^2y^2)}{dx} - \frac{d(\cos xy)}{dx} = \frac{d(4)}{dx}$

5.3 Derivada da constante

$f(x) = c$

$f'(x) = 0$

$\frac{dy}{dx} - \frac{d(x^2y^2)}{dx} - \frac{d(\cos xy)}{dx} = 0$

5.4 Derivada do produto

$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$

$\frac{dy}{dx} - \left(\left(\frac{d(x^2)}{dx} \cdot y^2\right) + \left(x^2 \cdot \frac{d(y^2)}{dx}\right)\right) - \frac{d(\cos xy)}{dx} = 0$

5.5 Derivada da base da potência

$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$

$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

$\frac{dy}{dx} - \left((2x \cdot y^2) + \left(x^2 \cdot \frac{d(y^2)}{dx}\right)\right) - \frac{d(\cos xy)}{dx} = 0$

5.6 Regra da Cadeia

De acordo com a regra da cadeia, a derivada de uma função que é composta de outras funções resulta no produto da derivada de cada uma de suas funções membros. Como y é uma função, além de realizar a derivação da base da potência também iremos multiplicar pela sua derivada com relação à variável x.

$y = u(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$\frac{d(y^2)}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} - \left((2x \cdot y^2) + \left(x^2 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} \right) \right) - \frac{d(\cos xy)}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} - \left((2xy^2) + \left(2x^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \right) \right) - \frac{d(\cos xy)}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} - 2xy^2 - 2x^2 y \frac{dy}{dx} - \frac{d(\cos xy)}{dx} = 0$$

5.7 Regra da Cadeia

De acordo com a regra da cadeia, a derivada de uma função que é composta de outras funções resulta no produto da derivada de cada uma de suas funções membros.

$y = u(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$a(x) = \cos b(x)$$
$$b(x) = x \cdot y(x)$$
$$\frac{da}{dx} = \frac{da}{db} \cdot \frac{db}{dx}$$
$$\frac{d(\cos xy)}{dx} = \frac{d(cosb)}{db} \cdot \frac{d(xy)}{dx}$$
$$\frac{d(\cos xy)}{dx} = -\sin b \cdot \frac{d(xy)}{dx}$$
$$\frac{d(\cos xy)}{dx} = -\sin xy \cdot \frac{d(xy)}{dx}$$

Aplicando na função completa:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy^2 - 2x^2 y \frac{dy}{dx} - \left(-\sin xy \cdot \frac{d(xy)}{dx} \right) = 0$$

5.8 Derivada do produto

$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy^2 - 2x^2 y \frac{dy}{dx} - \left(-\sin xy \cdot \left(\frac{dx}{dx} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} \right) \right) = 0$$

5.9 Derivada da função identidade

$f(x) = x$

$f'(x) = 1$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy^2 - 2x^2y\frac{dy}{dx} - \left(-\sin xy \cdot \left(1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right)\right) = 0$$
$$\frac{dy}{dx} - 2xy^2 - 2x^2y\frac{dy}{dx} - \left(-\sin xy \cdot \left(y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right)\right) = 0$$
$$\frac{dy}{dx} - 2xy^2 - 2x^2y\frac{dy}{dx} - \left(-y\sin xy - x\sin xy\frac{dy}{dx}\right) = 0$$
$$\frac{dy}{dx} - 2xy^2 - 2x^2y\frac{dy}{dx} + y\sin xy + x\sin xy\frac{dy}{dx} = 0$$

5.10 A derivada implícita da função y em relação à variável x é portanto:

$$\frac{dy}{dx}\left(1 - 2x^2y + x\sin xy\right) - 2xy^2 + y\sin xy = 0$$
$$\frac{dy}{dx}\left(1 - 2x^2y + x\sin xy\right) = 2xy^2 - y\sin xy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2 - y\sin xy}{1 - 2x^2y + x\sin xy}$$

5.11 Derivada da inversa é a inversa da derivada

$(f(x)^{-1})' = \dfrac{1}{f'(x)}$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1 - 2x^2y + x\sin xy}{2xy^2 - y\sin xy}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x^2y - x\sin xy - 1}{2xy^2 - y\sin xy}$$

6 Questão:

Encontre uma equação da reta tangente e uma da reta normal à curva $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ no ponto de abscissa $x = 1$.

6.1 Descobrindo o Ponto

Para descobrirmos a reta que tangencia nossa função y iremos primeiramente analisar o ponto pertencente a imagem da função na qual também pertencerá a reta tangente. A abscissa analisada é 1, logo podemos descobrir sua ordenada aplicarmos a função ao x.

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$$
$$f(1) = \sqrt{1} + \frac{1}{1^2}$$
$$f(1) = 2$$

As coordenadas do nosso ponto P são P(1, 2).

6.2 Análise da Reta secante e tangente

Visto que uma reta secante seria aquela que intercepta dois pontos da função e podemos calcular seu coeficiente angular através da razão entre a variação das ordenadas dos pontos sobre a variação das abscissas, podemos utilizar isso para descobrir o coeficiente angular da tangente, pois uma reta tangente nada mais é do que uma secante onde os dois pontos pertencentes estão no mesmo lugar e são o mesmo ponto, ou seja, sua variação de x tende a zero.

6.3 Coeficiente angular da reta secante e tangente

$$m_{secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$m_{tangente} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$y_1 = f(x_1)$$
$$y_2 = f(x_2) = f(x_1 + \Delta x)$$
$$m_{tangente} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(\Delta x)}{\Delta x}$$

Sendo assim portanto podemos descobrir o coeficiente angular da reta tangente no Ponto P se aplicarmos a abscissa de P na derivada da função y. Achando a derivada:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$$
$$f'(x) = (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$
$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{-2})'$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-3}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$$

Aplicando x de P:

$m_{tangente} = f'(1)$

$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{2}{1^3}$

$f'(1) = \frac{1}{2} - 2$

$f'(1) = -\frac{3}{2}$

$f'(1) = -\frac{3}{2}$

$m_{tangente} = -\frac{3}{2}$

6.4 Equação da Reta

$(y - y_0) = m \cdot (x - x_0)$

6.5 Equação da Reta Tangente

$(y - 2) = -\frac{3}{2} \cdot (x - 1)$

6.6 Coeficiente Angular da Reta Normal

$m_{normal} = -\frac{1}{m_{reta}}$

6.7 Equação da Reta Normal

$(y - 2) = \frac{2}{3} \cdot (x - 1)$