1. Noções elementares de conjuntos

Notação e convenções: o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, é definido por alguns autores incluindo o zero, e por outros começando pelo um. Nesta disciplina optaremos pela primeira definição:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Representamos por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e por $\mathbb{R}$ o dos números reais.

Dizemos que um conjunto X está contido num conjunto Y, e representamos por $X \subseteq Y$, se todos os elementos de X pertencem a Y. O conjunto das partes de um conjunto A é o conjunto de todos os seus subconjuntos:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Por exemplo, se $A = \{3, 7\}$, temos

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}\big(\{3, 7\}\big) = \big\{\emptyset, \{3\}, \{7\}, \{3, 7\}\big\}.$$

Um número natural é *primo* se tiver exactamente dois divisores, o 1 e ele próprio.

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Dizemos que f é *injectiva* se a objectos diferentes correspondem imagens diferentes, ou seja, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$, se $f(a_1) = f(a_2)$ então $a_1 = a_2$. Dizemos que f é *sobrejectiva* se o contradomínio (conjunto de todas as imagens) for B, ou seja, se para cada elemento $b \in B$ existe um objecto $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Dizemos que f é *bijectiva* se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Exercícios e problemas

1. Enumere cinco elementos de cada um dos seguintes conjuntos.

   (a) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisível por } 5\}$;

   (b) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisor de } 36\}$;

   (c) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é múltiplo de } 7\}$;

   (d) $\{2m + 1 : m \in \mathbb{N} \wedge m > 0\}$;

   (e) $\mathcal{P}\big(\{1, 2, 3, 4, 5\}\big)$;

   (f) $\mathcal{P}\big(\{a, b, c\}\big)$;

   (g) $\{2^t : t \in \mathbb{N}\}$;

   (h) $\{t^2 : t \in \mathbb{N}\}$;

   (i) $\big\{\frac{1}{s} : s \in \mathbb{N} \wedge s > 0\big\}$;

   (j) $\{r \in \mathbb{Q} : 0 < r < 1\}$;

   (k) $\{n \in \mathbb{N} : n + 1 \text{ é primo}\}$.

2. Enumere todos os elementos de cada um dos seguintes conjuntos.

   (a) $\big\{\frac{1}{b} : b \in \{1, 2, 3, 4\}\big\}$;

   (b) $\big\{n^2 - n : n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\big\}$;

   (c) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisor de } 75\}$;

   (d) $\big\{\frac{1}{c^2} : c \in \mathbb{N} \wedge 0 < c < 11\big\}$;

   (e) $\mathcal{P}\big(\{a, b, c, d\}\big)$;

   (f) $\{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$.

3. Quantos elementos há em cada um dos seguintes conjuntos?

   (a) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 9\}$;

   (b) $\{n \in \mathbb{Z} : n^2 = 25\}$;

   (c) $\big\{n \in \mathbb{Q} : n^2 = \frac{4}{49}\big\}$;

   (d) $\{n \in \mathbb{Q} : n^2 = 2\}$;

   (e) $\{n \in \mathbb{R} : n^2 = 2\}$;

   (f) $\{n \in \mathbb{R} : n^2 = -2\}$;

   (g) $\{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 73\}$;

   (h) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \leq |n| \leq 73\}$;

   (i) $\{p \in \mathbb{Z} : 5 < p < 73\}$;

   (j) $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ é par e } |n| \leq 73\}$;

   (k) $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 73\}$;

   (l) $\{x \in \mathbb{R} : 0.99 < x < 1\}$;

   (m) $\mathcal{P}\big(\{1, 2, 3\}\big)$;

   (n) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$;

   (o) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\}$;

   (p) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo}\}$;

   (q) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par e primo}\}$;

   (r) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par ou primo}\}$.

4. Considere os conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\};$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo}\};$$
$$C = \{4n + 3 : n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\};$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 = 0\}.$$

   Quais destes conjuntos são subconjuntos de quais? Considere as 16 possibilidades.

5. Considere os conjuntos:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\};$$
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\};$$
$$B = \{2, 3, 5, 7, 11\};$$
$$C = \{2, 3, 6, 12\};$$
$$D = \{2, 4, 8\}.$$

   (a) Determine os conjuntos:
      i. $A \cup B$;
      ii. $A \cap C$;
      iii. $(A \cup B) \cap (U \setminus C)$;
      iv. $A \setminus B$;
      v. $C \setminus D$.

   (b) Quantos subconjuntos de C existem?

   (c) Das seguintes afirmações, quais são verdadeiras?

$$0 \in A; \quad 3 \in A; \quad \{5\} \in B;$$
$$5 \in B; \quad \{4\} \subseteq D; \quad \{3, 6\} \in \mathcal{P}(C);$$
$$\emptyset \in A; \quad \emptyset \subseteq A.$$

6. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer contidos num conjunto U. Das seguintes afirmações, diga quais são verdadeiras e quais são falsas (para as falsas apresente um contraexemplo):

   (a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
   (b) Se $A \cup B \subseteq A \cap B$, então $A = B$.
   (c) Se $A \cap B \subseteq A \cup B$, então $A = B$.
   (d) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$.
   (e) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ sempre que $A \subseteq B$.
   (f) $A \cap B = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.

7. Demonstre as seguintes afirmações:

   (a) Para quaisquer conjuntos A e B, $A \cap B \subseteq A$ e $A \subseteq A \cup B$.
   (b) Se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $A \subseteq B \cap C$.
   (c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ se } x \geq 1; \\ x, \text{ se } 0 \leq x < 1; \\ -x^3 \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Calcule $f(3)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ e $f(-3)$.
   (b) Esboce o gráfico de f.
   (c) Determine o contradomínio de f.

9. Sejam $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $T = \{a, b, c, d\}$. Responda justificando a cada uma das seguintes perguntas (no caso de a resposta ser positiva, dê um exemplo):

   (a) Existem funções injectivas de S para T?
   (b) Existem funções injectivas de T para S?
   (c) Existem funções sobrejectivas de S para T?
   (d) Existem funções sobrejectivas de T para S?
   (e) Existem funções bijectivas de T para S?

10. Seja $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(m, n) = 2^m 3^n$.

   (a) Calcule $g(m, n)$, para cinco valores distintos de (m, n).
   (b) Mostre que g é injectiva, utilizando o seguinte resultado:

      Todo o número natural positivo admite uma única factorização em números primos (a menos de permutação de factores).

   (c) g é sobrejectiva?
   (d) Seja $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $h(m, n) = 2^m 4^n$. Mostre que h não é injectiva.