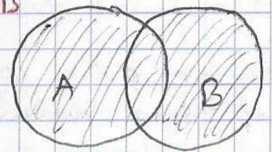
"Ou" é considerado inclusivo.
Também são elementos de $A \cup B$ os elementos que pertencem ambos a A e B.

Diagramas de Venn
(representação de conjuntos por superfícies, discos, etc

. $A \cup B$

$x \in A$
$x \notin B$

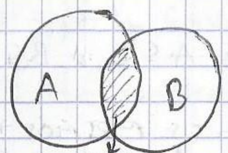


$x \in B$
$x \notin A$

$A \cup B$, $x \in A$, $x \in B$

Exemplo: $(-\infty, 1] \cup [-1, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

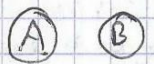
. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$



$A \cap B$

Exemplo: $(-\infty, 1] \cap [-1, +\infty) = [-1, 1]$

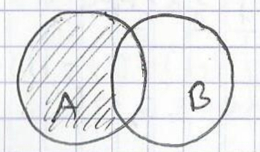
- A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$



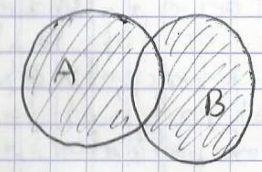
- Temos $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$

- Se A e B são disjuntos $\emptyset \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq B$, em concordância com a propriedade que $\emptyset$ está contida em cada conjunto

. $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$
Complemento de B em A



. $A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$
Diferença simétrica
$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



(Prática)
Ficha nº1
1- elementos
a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é divisível por } 5\} = 5, 10, 15, 20, 25$

b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é divisor de } 36\} = 6, 3, 12, 18, 9$

c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 7\} = 1, 7, 14, 21, 28$

d) $\{2m+1 \mid m \in \mathbb{N} \wedge m > 0\} = 3, 5, 7, 9, 11$

e) $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) = \emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}, \{1,3,5\}$

f) $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \emptyset, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a\}, \{a,c\}$

g) $\{2^t : t \in \mathbb{N}\} = 1, 2, 4, 16, 32$

h) $\{t^2 : t \in \mathbb{N}\} = 1, 4, 9, 16, 25$

i) $\{\frac{1}{s} : s \in \mathbb{N} \wedge s > 0\} = 1,$

j) $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\} = \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}$

k) $\{n \in \mathbb{N} \mid n+1 \text{ é primo}\} = 1, 2, 4, 6, 10, 12$

2 -

a) $\{\frac{1}{b} : b \in \{1,2,3,4\}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$

b) $\{n^2 - n : n \in \{0,1,2,3,4\}\} = \{0, 2, 6, 12\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisor de } 75\} = \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$

d) $\{\frac{1}{c^2} \mid c \in \mathbb{N} \land 0 < c < 11\} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100}\}$

e) $\mathbb{P}(\{a,b,c,d\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,a\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,a\}, \{c,b\}, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}\}$

f) $\{2+(-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3\}$

3 -

a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 9\} = \{3\}$, 1 elemento

b) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 25\} = \{-5, 5\}$, 2 elementos

c) $\{n \in \mathbb{Q} : n^2 = \frac{4}{49}\} = \{-\frac{2}{7}, \frac{2}{7}\}$, 2 elementos

d) $\{n \in \mathbb{Q} \mid n^2 = 2\}$ = 0 elementos

e) $\{n \in \mathbb{R} \mid n^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, 2 elementos

f) $\{n \in \mathbb{R} : n^2 = -2\}$ = 0 elementos

g) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 73\}$ = 74 elementos

h) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 5 \leq |n| \leq 73\}$ = 138 elementos

i) $\{p \in \mathbb{Z} \mid 5 < p < 73\}$ = 68 elementos

j) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ é par e } |n| \leq 73\}$ = 66 elementos

k) $\{n \in \mathbb{Q} : 0 \leq n \leq 73\}$ = ∞ elementos

l) $\{n \in \mathbb{R} : 0{,}99 < n < 1\}$ = ∞ elementos

m) $\mathbb{P}(\{1,2,3\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset\}$
8 elementos

n) $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ = ∞ elementos

o) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$ = ∞ elementos

p) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é primo}\}$ = ∞ elementos

q) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par e primo}\} = \{2\}$, 2 elementos

r) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par ou primo}\}$ = ∞ elementos

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} \\ \frac{1}{2} & \cancel{\frac{2}{2}} & \frac{3}{2} & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{1}{4} & & & \end{array} \}$$

→ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis
→ $\mathbb{R}$ não é enumerável

4 -

$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é impar}\}$
$B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo}$
$C = \{3n+3 \mid n \in \mathbb{N} \land n > 0\}$
$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 = 0\} = \{3, 5\}$ $(3 \times 5 = 15,\ 3+5 = 8)$

$C \subset A$, $D \subset A$, $D \subset B$, $D \subset A$, $C \subset A$, $D \subset B$
$C \subset R$ não é porque $15 \in C$, $15 \notin D$

5-

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
$A = \{1,3,5,7,9,11\}$
$B = \{2,3,5,7,11\}$
$C = \{2,3,6,12\}$
$D = \{2,4,8\}$

a)

i) $A \cup B = \{1,2,3,5,7,9,11\}$

ii) $A \cap C = \{3\}$

iii) $(A \cup B) \cap (U \setminus C) = \{1,5,7,9,11\}$
$(U \setminus C = \{1,4,5,7,8,9,10,11\})$

iv) $A \setminus B = \{1,9\}$

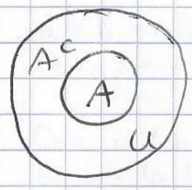
v) $C \setminus D = \{3,6,12\}$

c) $0 \in A$ - Falso
$3 \in A$ - Verdadeiro
$\{5\} \in B$ - Falso
$5 \in B$ - Verdadeiro
$\{4\} \subseteq D$ - Verdadeiro
$\emptyset \in A$ - Falso
$\emptyset \subseteq A$ - Verdadeiro
$\{3,6\} \in \mathbb{P}(C)$ - Verdadeiro

(Teórica)

$A = \{x \in U \mid P(x)\}$

U, universo. P só utiliza o símbolo $\in$ e símbolos lógicos, isto é, se em P ocorrerem outros símbolos deve ser possível traduzir estes símbolos para $\in$



- $A^c = \{x \in U \mid x \in$
- $A = B$ se $\{x \mid x \in A\} = \{x \mid x \in B\}$
- $A = B \rightarrow A^c = A^B$
- $A^c = B^c \rightarrow A = B$

Exemplo: $\mathbb{N}$ números naturais.
P números pares
I números impares

- I é o complemento de P em $\mathbb{N}$

Regras para operações de conjuntos:

1) Comutatividade:
$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

2) Associatividade:
i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3) Distributividade:
i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) Idempotência:
$A \cup A = A$, $A \cap A = A$

5) Identidade:
$A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$
$A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$

6) Complemento duplo:
$(A^c)^c = A$

7) $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$

8) $U^c = \emptyset$, $\emptyset^c = U$

Definição de uma função f

$f: X \to Y$ X, Y conjuntos

$X = D_f$, Y = co-domínio de f

$f = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$

(1) para cada $x \in A$ existe $y \in f$ tal que $(x,y) \in f$
(2) se $(x,y) \in f$ e $(x,z) \in f$

(Prática)
Ficha 1
6 -

a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ - Verdadeiro

b) Se $A \cup B \subseteq A \cap B$, então $A = B$ - Verdadeiro

c) $A \cap B \subseteq A \cup B$, então $A = B$ - Falso
é sempre verdade se $x \in A$ e $x \in B$ então $x \in A$ ou $x \in B$
Exemplo: $A = \{2\}$, $B = \{3\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{2,3\}$

d) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$ - Verdadeiro, $\emptyset \cup B = B$

e) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ se $A \subseteq B$ - Verdadeiro
$A \cap B = A$ se $A \subseteq B$

f) $A \cap B = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$ - Falso
$A \cap B = (A^c \cup B^c)$

7 -

a) $A \cap B \subseteq A$ e $A \subseteq A \cup B$
Seja $x \in A \cap B$. Então $x \in A$ e $x \in B$.
Então $x \in A$
Seja $x \in A$, então $x \in A$ ou $x \in B$. Então $x \in A \cup B$

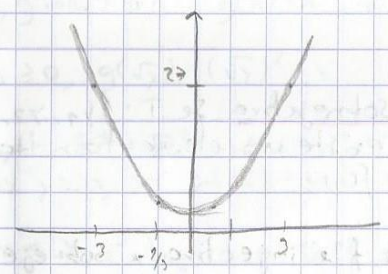
b) Se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $A \subseteq B \cap C$
Seja $x \in A$. Então $x \in B$ e $x \in C$. Então $x \in B \cap C$. Então $A \subseteq B \cap C$

c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$
Seja $x \in A \cup B$. Então $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$, então $x \in C$ (caso 1). Se $x \in B$ então $x \in C$ (caso 2)
Então $x \in C$, logo $A \cup B \subseteq C$

8 -

a) $f(3) = 3^3 = 27$
$f(\frac{1}{3}) = 1/3$
$f(-1/3) = -(1/3)^3 = -1/27$
$f(-3) = -(-3)^3 = 27$

b)



c) $D' =]-\frac{1}{27}, +\infty)$

9 -

a) Não
b) Sim
c) Sim
d) Não
e) Não

Funções: $f: S \to T$

1) Para todo $x \in S$ $\exists y \in T$ tal que $y = f(x)$
2) Este y é único: se $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$, então $y_1 = y_2$.

Condições de existência da função inversa

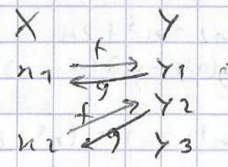
Exemplo:

Não existe inversa g, temos $g(y) = x_1$ e $g(y) = x_2$, com $x_1 \neq x_2$ em contradição com a propriedade que uma função associa um elemento a um elemento.

→ Condição 1

$f(x_1) = y$ e $f(x_2) = y$ tem que implicar que $x_1 = x_2$

Então $f: X \to Y$ tem que ser injectiva
Exemplo:



Seja g tal que $g(y_1) = x_1$ e $g(y_2) = x_2$
Ora g não é uma função de Y em X, porque g não é definida para y_3

→ Condição 2

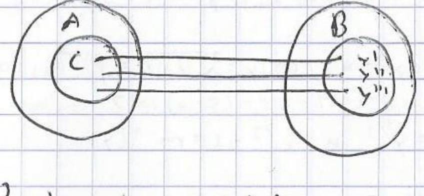
$f: X \to Y$ tem que ser sobrejectiva

Teorema: Seja $f: X \to Y$ uma função. f tem uma inversa $f^{-1}: Y \to X$ se e somente se f é bijectiva.
Já mostrámos que se f é bijectiva então existe uma inversa f^{-1}

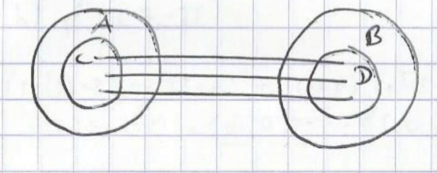
Por outro lado, suponha-se que f tem uma inversa.
Então $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in X$. Então f^{-1} é definida para todos os elementos $y \in Y$, quer dizer para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ (para ser $x = f^{-1}(y)$). Então f é sobrejectiva

Seja $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$
Ora $x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$

$f: A \to B$, $f(x) = y$



$\{y \mid \text{existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\} = f(C)$
imagem de C por f , abuso de imagem



$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid \text{existe } y \in D \text{ tal que } f(x) = y\} = f^{-1}(D)$
imagem recíproca, pré-imagem

(Prática)
Ficha 2
1-

$f(x) = x^3 - 4x$
$g(x) = 1/x$
$h(x) = x - 2$

a) $f \circ g(x) = \underline{f(g(x))} = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x}$

b) $f \circ g \circ h(x) = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x^3+4x} = \frac{1}{(x-2)^3} - \frac{4}{x-2}$

c) $f \circ h \circ g(x) = h(g(x)) = \frac{1}{x} - 2 = f(\frac{1}{x} - 2) = (\frac{1}{x})^3 - 4x - 8$

d) $h \circ g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^3 - 4x} = x^3 - 4x - 2$

e) $g \circ g(x) = g(g(x)) = \frac{1}{1/x} = x$

f) $h \circ h(x) = h(h(x)) = x - 2 - 2 = x - 4$

g) $h \circ g(x) = h(g(x)) = \frac{1}{x} - 2$

h) $g \circ h(x) = g(h(x)) = \frac{1}{x-2}$

2 -

a) $y = 2x+3 \Leftrightarrow x = 2y+3 \Leftrightarrow 2y = x-3 \Leftrightarrow y = \frac{x-3}{2} = f^{-1}(x)$

b) $y = x^3 - 2 \Leftrightarrow x = y^3 - 2 \Leftrightarrow y^3 = x+2 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x+2} = f^{-1}(x)$

c) $y = (x-2)^3 \Leftrightarrow y \Rightarrow x-2 = y^{1/3},\ x = y^{1/3}+2 = m^{-1}(y)$

d) $y = \sqrt[3]{x} + 7 \Leftrightarrow y - 7 = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow y = (x-7)^3 = f^{-1}(x)$

3 -

$p(x) = (x-3)^2 - 1$

a) $p(\{2,3,4,5\}) = \{(2-3)^2-1, (3-3)^2-1, (4-3)^2-1, (5-3)^2-1\} = \{0,-1,0,3\} = \boxed{\{-1,0,3\}}$

b) $p([5,7[) = \{(5-3)^2-1, (7-3)^2-1\} = \{3,15\}$

d) $p^{\leftarrow}\{3,15\}$

Primeiro, por $p(x) = 3 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = 3 \Rightarrow (x-3)^2 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow p^{-1}(3) = \{1,5\} \Leftarrow$

Segundo, $p(x) = 15 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = 15 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-3 = 4 \vee x-3 = -4 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = -1$

$p^{-1}(15) = \{-1,7\} \Leftarrow$

$p^{-1}\{3,15\} = \{-1,1,5,7\}$

e) $p^{\leftarrow}\{(-2,-1,0)\}$

$p(x) = -2 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow (x-3)^2 = -1 \Rightarrow x-3 = \sqrt{-1}$ Impossível

$p(x) = -1 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = -1 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$p(x) = 0 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$

$p^{-1}\{-2,-1,0\} = \{2,3,4\}$

f) $p^{\leftarrow}([0,8[)$

$p(x) = 0 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$

$p(x) = 8 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = 8 \Rightarrow (x-3)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x-3=3 \\ x-3=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=0 \end{cases}$

$p^{\leftarrow}[0,8[= [0,2] \cup [4,6]$

g) $p^{\leftarrow}([-5,3[)$

$p(x) = -5 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = -5 \Leftrightarrow (x-3)^2 = -4 \Leftrightarrow x-3 = -\sqrt{4}$ Impossível

$p(x) = 3 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = 3 \Rightarrow (x-3)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases}$

h) $p^{\leftarrow}([-7,-2[)$

$p(x) = -7 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = -7 \Rightarrow (x-3)^2 = 6$, Impossível

$p(x) = -2 \Rightarrow (x-3)^2 - 1 = -2 \Rightarrow (x-3)^2 = -1$, Impossível

(Teórica)

Sucessões

Definição: Seja A um conjunto. Uma sucessão é uma função $a: \mathbb{N} \to A$. Normalmente escreve-se a_n em vez de $a(n)$. Se a é sobrejectiva, a sucessão chama-se uma enumeração. Se a também é injectiva, falamos numa enumeração sem repetições. No último caso a função é bijectiva. Em vez de $a: \mathbb{N} \to A$, escreve-se $(a_n)_n \in \mathbb{N}$

$a: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$
$a(n) = 2n$ (Ex: enumeração sem repetições)

$a: \mathbb{N} \to \{-1,1\}$ definida por $a(n) = (-1)^n$

Sucessões especiais

Seja $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ uma sucessão:

Somatório: $\sum_{0 \leq k \leq n} a_k \quad a_0 + a_1 + \dots + a_n = S_n$ é sucessão

Ex: $a_n = n$

$\sum_{0 \leq k \leq n} k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1)$

Temos para $n \geq 1$: $n \leq n.n \leq n.n.n \leq n.n.n.n$ porque sempre multiplicamos por um número maior do que ou igual a 1.
Se $\sqrt{n} > n$, então $n > n^2$, contradição. Então $\sqrt{n} \leq n$.
(as outras mostram-se de modo semelhante)

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $n < 2^n$, e tem-se $n \leq 2^{n-1}$

$n = 0$: $0 < 2^0 = 1$, e $0 \leq 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

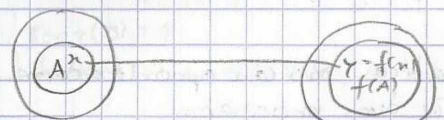
$n > 0$: $n = 1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} < 2.2.2 \ldots 2 = 2^n$

O produto da esquerda tem sempre factores < 2 (com uma excepção $= 2$) e o produto da direita tem sempre factores igual a 2, então este é o maior

(Prática)
Ficha 2
4.

$f: S \to T \qquad A \subseteq S \qquad f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

$B \subseteq T \quad f^{\leftarrow}(B) = \{y \in B \mid f(x) = y$ para certo $x \in S\}$



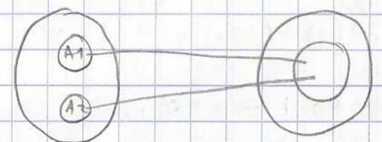
a) $f(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B$
Seja $y \in f(f^{\leftarrow}(B))$. Então existe $x \in f^{\rightarrow}(B)$ tal que $y = f(x)$, $x \in f^{\leftarrow}(B)$ implica que $f(x) \in B$. Então $y \in B$. Então $f(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B$.
Observe-se que se $B \neq \emptyset$, mas $f(x) \notin B$ para todo $x \in S$, então $f^{\leftarrow}(B) = A(\emptyset) = \emptyset$. Então $f(f^{\leftarrow}(B)) \subsetneq B$

a) Condição para que $f(f^{\leftarrow}B) = B$: f é sobrejectiva

b) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
Seja $x \in A$, então $f(x) \in f(A)$. Então $f^{-1}(f(x)) \in A$. Então $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Condição para que $A = f^{-1}(f(A))$? f é injectiva

c) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
Seja $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Então $f(x) \in B_1 \cap B_2$. Então $f(x) \in B_1$ e $f(x) \in B_2$. Então $x \in f^{-1}(B_1)$ e $x \in f^{-1}(B_2)$. Então $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Então $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
Assim mostramos que $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cap B_2)$
Segue que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Seria $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$?



$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset \quad , \quad f(A_1) \cap f(A_2) \neq \emptyset$
pode acontecer que f não seja injectiva

6 -

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

$a_1 = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 \quad ; \quad a_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

$a_3 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_4 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$

$a_5 = \frac{5-1}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad ; \quad a_6 = \frac{6-1}{6+1} = \frac{5}{7}$

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1-1}{n+1+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+2}_{(n+1)} - \frac{n-1}{n+1}_{(n+2)} =$

$= \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + n - n^2 - 2n + n + 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

8 -

a) $\frac{7!}{5!} = \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}\times 6\times 7}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}} = \frac{5040}{120} = 42$

b) $\frac{10!}{6!\,4!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times1\times2\times3\times4} = \frac{5040}{24} = 210$

c) $\frac{9!}{9!\,0!} = 1$

d) $\frac{8!}{4!} = \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times5\times6\times7\times8}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}} = 1680$

e) $\frac{1111!}{1110!} = 1111$

f) $\sum_{j=0}^{5} j! = 0!+1!+2!+3!+4!+5! = 154$

g) $\sum_{i=1}^{10} (-1)^i = -1+1-1+1-1+1-1+1-1+1 = 0$

h) $\sum_{i=1}^{101} (-1)^i = -1$

i) $\sum_{l=0}^{3} (l^2+1) = (0^2+1)+(1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1) = 18$

j) $\left(\sum_{l=0}^{3} l^2\right)+1 = (0^2+1^2+2^2+3^2)+1 = 15$

k) $\prod_{r=1}^{n} (r-3)$

$\to n=2 - (1-3)(2-3) = 2$

$\to n=3 - (1-3)(2-3)(3-3) = 0$

$\to n=4 - (1-3)(2-3)(3-3)(4-3) = 0$

$\to n=77 - (1-3)\ldots(77-3) = 0$

l) $\prod_{m=1}^{n} \frac{m+1}{m}$

$\to n=2 - \left(\frac{1+1}{1}\right)\left(\frac{2+1}{2}\right) = 2(3/2) = \frac{6}{2} = 3$

$\to n=3 - \left(\frac{1+1}{1}\right)\left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right) = 2(3/2)(4/3) = 24/6 = 4$

$\to n=4 - \left(\frac{1+1}{1}\right)\left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)\left(\frac{4+1}{4}\right) = 2(3/2)(4/3)(5/4) = 5$

$\to n=77 - 78$

m) $\prod_{t=6}^{6} t = 6$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n) $\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!(7-6)!} = \frac{7!}{6!} = 7$

o) $\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!(7-1)!} = \frac{7!}{6!} = 7$

p) $\binom{444}{443} = \frac{444!}{443!(444-443)!} = \frac{444!}{443!} = 444$

q) $\binom{444}{120} - \binom{444}{324} = \frac{444!}{120!(444-120)!} - \frac{444!}{324!(444-324)!} =$
$= \frac{444!}{120!\,324!} - \frac{444!}{324!\,120!} = 0$

7 -

1
1 1
1 3 1
1 4 4 1
1 5 8 5 1
1 6 13 13 6 1
1 7 19 26 19 7 1
1 8 26 45 45 26 8 1
1 9 34 71 90 71 34 9 1
1 10 43 105 161 161 105 43 10 1
1 11 53 148 266 322 266 148 53 11 1

(Teorica)

$\log n < n^{\frac{1}{m}} < n^{\frac{1}{4}} < n^{\frac{1}{3}} < n^{\frac{1}{2}} < n < n^2 < n^3 < n^4 < \ldots < n^m <$
$\ldots < \ldots < 2^n < n! < n^n$

Todas estas desigualdades estão verificadas a partir de um outro numero $A > 0$

Definição: Sejam $f(n)$ e $g(n)$ sucessões. Diz-se que $f(n) = O\,g(n)$ para $n \to +\infty$. Se existem constantes A e K tal que $f(n) \leq K g(n)$ para todos $n \geq A$. Nos exemplos referidos podemos tomar $K = 1$

$n = O(n^2)$, $n^2 = O(n^3)$, $n^m = O(2^n)$, etc

A definição estende-se sem problemas a funções f e g da variável n, com $n \geq 0$. Já mostramos $n < 2^n$ se $n \geq 0$.

Fórmulas

- $(n+1)! = n!(n+1)$
- $0! = 1$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

10 -

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{n!(n-k)!} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-(k+1))!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-(k+1))!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-(k+1))!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-(k+1))!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n!}{k!(n-(k+1))!}\left(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}\right) =$$

$$= \frac{n!(1+n)}{k!(n-(k+1))!(n-(k+1))(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1)!-(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

——— " ———

$\binom{1}{1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$ $\qquad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2$

$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!(2-0)!} = \frac{2}{1 \cdot 2} = 1$ $\qquad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1$

$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1$ $\qquad \binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1$

$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{6}{2} = 3$ $\qquad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$

$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1$ $\qquad \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1$

			$\binom{3}{3}$
		$\binom{2}{2}$	
	$\binom{1}{1}$		$\binom{3}{2}$
$\binom{0}{0}$		$\binom{2}{1}$	
	$\binom{1}{0}$		$\binom{3}{1}$
		$\binom{2}{0}$	
			$\binom{3}{0}$

			1	
		1		4
	1		3	
1		2		6
	1		3	
		1		4
			1	

Ficha nº 3

1 -

a) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \frac{(n+1)(n+1)+1}{2}$

Demonstração:

i) Mostramos a propriedade para

$n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} 0 = 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$

ii) Suponhamos que a fórmula já esteja mostrada para o número n. (Hipótese de Indução 1)

Assim $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Mostramos a fórmula para $n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1)}{2}$$

Por indução matemática, a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

"Verificação":

- Verdade para 0: por (i)
- Verdade para 1: porque é verdade logo para o número seguinte 1, por (ii)
- Verdade para 2: porque é verdade para 1, logo para o sucessor 2

Hipótese de indução: Verdade para 11: Repetindo, verdade para verdade 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, logo para 11

Continuando é verdade para todos os números que nós sabemos contar.

b) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

i) $i = 0$: $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ - Verificação feita

ii) Suponhamos que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ - Hipótese de indução

Então a conclusão vai ser:

$A(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$.

Exemplo de utilização

$A(n)$: n é produto de números primos ($n \geq 1$)

(i) $A(1)$: 1 é produto de números primos: $1 = 1$

(ii) Suponha-se que m é produto de números primos para todo $1 \leq m \leq n$. Mostramos que é verdade para $1 \leq m \leq n+1$

Caso 1 - $n+1$ é primo.

Então $n+1 = 1(n+1)$ - Verdade

Caso 2 $n+1$ não é primo

Então $n+1 = p \cdot q$ com $p \leq n$ e $q \leq n$.

Pela hipótese de indução p e q são produtos de números primos. Então $n+1$ é produto de números primos.

Pelo princípio de indução $A(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

(Prática)

Ficha nº 3

c) Se $n \geq 3$ então $\sum_{l=3}^{n} (4l - 11) = 2n^2 - 9n + 10$

(i) $n = 3$: $\sum_{l=3}^{3} (4l-11) = 2(3)^2 - 9(3) + 10 = 1$ Verificação feita

(ii) Passo de indução: Suponha-se que

$\sum_{l=3}^{n} (4l-11) = 2n^2 - 9n + 10$

Então $\sum_{l=3}^{n+1} (4l-11) = \sum_{l=3}^{n} (4l-11) + 4(n+1) - 11 =$

$= 2n^2 - 9n + 10 + 4(n+1) - 11 = 2n^2 - 9n + 10 + 4n + 4 - 11 =$

$= 2n^2 - 5n + 3 = 2n^2 + 4n + 2 - 9n - 9 + 10 = 2(n+1)^2 - 9(n+1) + 10$

d) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(i) $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} i^2 = \frac{0(0+1)(2n+1)}{6} = \frac{0}{6} = 0$

(ii) $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$

$= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6(n+1)^2}{6} =$

$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6(n^2 + 2n + 1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} =$

$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$

e) Se $n \geq 1$, então $\sum_{m=1}^{n} (2m-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(i) $n = 1$: $\sum_{m=1}^{1} (2m-1)^2 = \frac{1(2(1)-1)(2(1)+1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$

(ii) Supomos que $\sum_{m=1}^{n} (2m-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

$\sum_{m=1}^{n+1} (2m-1)^2 = \sum_{m=1}^{n} (2m-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 =$

$= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(2n+1)^2}{3} =$

$= \frac{(2n+1)(n(2n-1) + 3(2n+1))}{3} = \frac{(2n+1)(2n^2 - n + 6n + 3)}{3}$

A mostrar $\sum_{m=1}^{n+1} (2m-1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} =$

$= \frac{2n+1}{3}(2n^2 + 3n + 2n + 3)$

g) Se $n \geq 1$, então $\sum_{j=1}^{n} (6j - 2) = n(3n+1)$

(i) $n = 1$: $\sum_{j=1}^{1} (6j-2) = 1(3(1)+1) = 4$

(ii) $\sum_{j=1}^{n+1} (6j-2) = \sum_{j=1}^{n} (6j-2) + 6(n+1) - 2 = n(3n+1) + 6(n+1) - 2 =$

$= 3n^2 + n + 6n + 6 - 2 = 3n^2 + 7n + 4 \quad (= (n+1)(3(n+1)+1))$

h) $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

(i) $n=0$: $\sum_{i=0}^{0} i^3 = \left(\frac{(0+1)(0+2)}{2}\right)^2 = 0$

(ii) $\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$

$= \frac{((n+1)(n+2))^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{((n+1)(n+2))^2 + 4(n+1)^3}{4} =$

$= \frac{(n^2+2n+n+2)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n^2+3n+2)^2 + \cancel{4}(n+1)^3}{\cancel{4}} =$

$= (n^2+3n+2)^2 + (n+1)^3$

j) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Da $\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\right) = 1$

n+1 elementos, o elemento se tem probabilidade $\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}$.

Distribuição binomial, lei binomial

Demonstração utiliza $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, mudança de variavel

(i) $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1$

(ii) Passo de indução: Suponha-se que

$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p+1} =$

$= 1 + \sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}\right) = 1 + 2^n + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p+1} =$

$= 1 + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{0} = 2^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$

$= 2^n + 2^n$

Assim o passo de indução está verificado.

Pelo princípio de indução matemática, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

4-

a) $11^n - 4^n$, multipo 7, $n \geq 1$

(i) $n=1$: $11-4=7$

(ii) Suponha-se que $11^n - 4^n$ é múltiplo de 7

$11^{n+1} - 4^{n+1} = 11^n - 4^n \cdot 4 = (11^n - 4^n) \cdot 11 + 4^n \cdot 7$

b) $13^t - 8^t$, multiplo 5, $t \geq 1$

(i) $t=1$: $13-8=5$

(ii) Suponha-se que $13^t - 8^t$ é multiplo de 7

$13^{t+1} - 8^{t+1} = 13^t \cdot 13 - 8^t \cdot 8 = (13^t - 8^t)\,13 + 8^t \cdot 7$

c) $a-b=c$, $a^m - b^m$, $m \geq 1$, multiplo de c

(i) $m=1$: $a-b=c$

(ii) Suponha-se que $a^m - b^m$ é multiplo de c

$a^{m+1} - b^{m+1} = a^m \cdot a - b^m \cdot b = (a^m - b^m)a + b^m(a-b)$

Cada termo é multiplo de c (utiliza hipótese de indução)

A soma é também multiplo de c

10-

a) $p(n) = n^2 + 5n + 1$ é par

(ii) n^2+5n+1 é par $\rightarrow (n+1)^2 + 5(n+1) + 1 =$

$= n^2+2n+1+5n+5+1 = \underbrace{n^2+5n+1}_{par} + \underbrace{2n+6}_{par}$

(i) $p(0)$: $0^2+5 \cdot 0+1 = 1$ - impar

$p(5)$: $5^2+5 \times 5+1 = 51$ - impar

Falso, a indução não pode ser aplicada

Ficha nº3

11 - Mostre que $\sum_{k=n}^{2n-1}(2k+1) = 3n^2$, para $n \geq 1$

Passo de indução → Supon que é verdade

$\sum_{k=n+1}^{2(n+1)-1} 2k+1 = \sum_{k=n}^{2n-1} 2k+1 + (2(2n)+1) + (2(2n+1)+1) - (2n+1) =$

$= 3n^2+6n+3 = 3(n^2+2n+1) = 3(n+1)^2$

12 - $5^n - 4n - 1$ divisível por 16, $n \geq 1$

(i) $n=1$: $5-4-1 = 0$, divisível por 16

(ii) Passo de indução

$5^{n+1} - 4(n+1) - 1 = 5^n \cdot 5 - 4(n+1) = 5^n \cdot 5 - 4n - 5 =$

$= 5\cdot 5^n - 5\cdot 4n - 5\cdot 1 + 16n = 5(5^n - 4n - 1) + 16n$, que é divisível por 16, logo $16n$ é divisível por 16, e por isso $5^n - 4n - 1$ é divisível por 16.

13 - $\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ⊛ , $n \geq 1$

(i) $n=1$: $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{2} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2} = 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

ii) Passo de indução: Suponha-se que ⊛ verdade

$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} =$

$= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} =$

$= \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+2}$

(Teórica)

Exemplo de uma partição de $\{1,2,3,4\}$: $\{\{1,4\},\{2,3\},\{4\}\}$

Partição de A - Conjunto de subconjuntos de A

(i) Cada elemento de A pertence a um destes conjuntos

(ii) Dois conjuntos da partição tem intersecção vazia

Exercício: Quantos Subconjuntos?

$A=\{1\}$, $A=\{1,2\}$, $A=\{1,2,3\}$, $A=\{\emptyset\}$?

Depois faça uma hipótese

$\#A = n \to \#P(A) = ?$

Mostre por indução

A	#A	P(A)	#P(A)
$\emptyset$	0	$\{\emptyset\}$	1
$\{1\}$	1	$\{\emptyset, \{1\}\}$	2
$\{1,2\}$	2	$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$	4
$\{1,2,3\}$	3	$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$	8
Hipótese n			2^n

Demonstração através da função característica

. Seja A um conjunto e $B \subseteq A$. A função característica $\chi_B : A \to \{0,1\}$ é definida por $\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B$

Por consequência $\chi_B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in B$

Exemplo:

$A = \{1,2,3,4\}$, $\chi_{\{1,2\}}(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \text{ ou } x=2 \\ 0, & x=3 \text{ ou } x=4 \end{cases}$

Teorema: $B, C \subseteq A$. Então $B = C \Leftrightarrow \chi_B = \chi_C$

Demonstração:

$\Rightarrow$ Suponos que $B=C$. Então $x \in B \Leftrightarrow x \in C$

Então $\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_C(x) = 1$. Então $\chi_B = \chi_C$