2. Noções elementares de conjuntos (continuação)

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função e seja C um conjunto qualquer. A *imagem de C por f* é o conjunto

$$f(C) = \{y : \exists x \in A : f(x) = y\}.$$

A *imagem recíproca de C por f* é o conjunto

$$f^{\leftarrow}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}.$$

Dados dois números inteiros n e k, chamamos combinações de n k a k ao número

$$\tbinom{n}{k} = \tfrac{n!}{k!(n-k)!},$$

convencionando que $\binom{n}{k} = 0$ caso algum dos números n, k, ou $n-k$ seja negativo.

Exercícios e problemas

1. Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ e $h(x) = x - 2$. Calcule as expressões de
   (a) $f \circ g$;
   (b) $f \circ g \circ h$;
   (c) $f \circ h \circ g$;
   (d) $h \circ g \circ f$;
   (e) $g \circ g$;
   (f) $h \circ h$;
   (g) $h \circ g$;
   (h) $g \circ h$.

2. Calcule a função inversa de cada uma das seguintes funções reais de variável real.
   (a) $k(x) = 2x + 3$;
   (b) $l(x) = x^3 - 2$;
   (c) $m(x) = (x - 2)^3$;
   (d) $n(x) = \sqrt[3]{x} + 7$.

3. Considere a função $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ defimnida por $p(x) = (x-3)^2 - 1$. Calcule os seguintes conjuntos (faça um esboço do gráfico se ajudar):
   (a) $p\big(\{2, 3, 4, 5\}\big)$;
   (b) $p\big([5, 7[\big)$;
   (c) $p\big([-1, 4[\big)$;
   (d) $p^{\leftarrow}\big(\{3, 15\}\big)$;
   (e) $p^{\leftarrow}\big(\{-2, -1, 0\}\big)$;
   (f) $p^{\leftarrow}\big([0, 8[\big)$;
   (g) $p^{\leftarrow}\big([-5, 3[\big)$;
   (h) $p^{\leftarrow}\big([-7, -2[\big)$.

4. Seja $f : S \longrightarrow T$.
   (a) Mostre que $f\big(f^{\leftarrow}(B)\big) \subseteq B$, para qualquer $B \subseteq T$.
   (b) Mostre que $A \subseteq f^{\leftarrow}\big(f(A)\big)$, para qualquer $A \subseteq S$.
   (c) Mostre que
   $$f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)),$$
   para quaisquer $B_1, B_2 \subseteq T$.
   (d) Em que condições se dá a igualdade na alínea (4a)?

5. Seja $f : S \longrightarrow T$. Das seguintes afirmações, diga quais são verdadeiras. Para estas, apresente uma demonstração. Para as falsas, apresente um contraexemplo.
   (a) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, para quaisquer $A_1, A_2 \subseteq S$.
   (b) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, para quaisquer $A_1, A_2 \subseteq S$.
   (c) Se $f(A_1) = f(A_2)$, então $A_1 = A_2$.

6. Considere a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.
   (a) Calcule os seis primeiros termos da sucessão.
   (b) Calcule $a_{n+1} - a_n$, para $0 \leq n \leq 4$.
   (c) Mostre que $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

7. Construa as primeiras 11 linhas do triâmngulo de Pascal e assinale os números ímpares. Construíndo mais linhas se necessário, tente encontrar um padrão conhecido.

8. Calcule:

   (a) $\frac{7!}{5!}$;

   (b) $\frac{10!}{6!4!}$;

   (c) $\frac{9!}{9!0!}$;

   (d) $\frac{8!}{4!}$;

   (e) $\frac{1111!}{1110!}$;

   (f) $\sum_{s=0}^{5} s!$;

   (g) $\sum_{i=1}^{10}(-1)^i$;

   (h) $\sum_{i=7}^{101}(-1)^i$;

   (i) $\sum_{l=0}^{3}(l^2+1)$;

   (j) $\left(\sum_{l=0}^{3} l^2\right)+1$;

   (k) $\prod_{r=1}^{n}(r-3)$, para $n=2$, $n=3$, $n=4$ e $n=77$;

   (l) $\prod_{m=1}^{n}\frac{m+1}{m}$, para $n=2$, $n=3$, $n=4$ e $n=77$;

   (m) $\prod_{t=6}^{6} t$.

   (n) $\binom{7}{6}$.

   (o) $\binom{7}{1}$.

   (p) $\binom{444}{443}$.

   (q) $\binom{444}{120}-\binom{444}{324}$.

9. Simplifique:

   (a) $\frac{n!}{(n-1)!}$;

   (b) $\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$.

10. Mostre que para quaisquer naturais a, b,

$$\binom{a}{b}+\binom{a}{b+1}=\binom{a+1}{b+1}.$$