Mais $c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ satisfaz a equação, porque
$c_1 r_1^{n+2} + c_2 r_2^{n+2} = c_1 a r_1^{n+1} + c_1 r_1^n + c_2 a r_2^{n+1} + c_2 b_2^n =$
$= c_1 r_1^n (r_1^2 + a r_1 + b) + c_2 r_2^n (r_2^2 + a r_2 + b) = 0$

(Prática)

Ficha nº 4

5 - Números de Bell, B_n: número de partições de $\{1,2,...,n\}$

$B_0 = 1$

$B_1 = 1$, $\{1\}$

$B_2 = 2$, $\{1,2\}$ | partições: $\{1,2\}$, $\{\{1\},\{2\}\}$

$B_3 = 5$, $\{1,2,3\}$ | partições: $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$

$B_4 = 1B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 15$

$B_3 = 1.B_2 + 2B_1 + B_0 = 5$

$B_5 = 1.B_4 + 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1B_0 =$
$15 + 4(5) + 6(2) + 4(1) + 1$

Hipótese de Indução:

$B_{n+1} = 1.B_n + nB_{n-1} + ...$
$= \binom{n}{0} B_n + \binom{n}{1} B_{n-1} + \binom{n}{2} B_{n-2} + ... + \binom{n}{n} B_1 + \binom{n}{n} B_0$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$

O número de possibilidades de escolher k elementos num conjunto de n elementos: $\binom{n}{k}$: coeficiente Binomial

7 -

Equações em diferenças de segunda ordem

Exemplo: $s(n+2) = 2s(n+1) + 3s(n)$

Equação característica:

$1r^2 = 2r + 3 \Rightarrow r^2 - 2r - 3 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 3$
$r_2 = -1$

Há uma infinidade de soluções:

Em particular 3^n e $(-1)^n$

$s(n) = 3^n$, satisfaz a equação: $2s(n+1) + 3s(n) =$
$= 2.3^{n+1} + 3.3^n = 2.3.3^n + 3.3^n = 9.3^n = 3^2.3^n = 3^{n+2} = s(n+2)$

$t(n) = (-1)^n$, satisfaz a equação: $2t(n+1) + 3t(n) =$
$= 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^n = -(-1)^n + 3(-1)^n = 1(-1)^n = (-1)^{n+2} = t(n+2)$

Observe-se que $2.3.3^n + 3.3^n = 3^2.3^n \Rightarrow 3^n(2.3+3) = 3^n(3^2)$

$c_1 3^n$ é também solução, c_1 constante

No mesmo, $c_2(-1)^n$ é solução, c_2 constante

Fazendo a soma: $c_1 3^n + c_2(-1)^n$ é também solução

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, chama-se <u>Solução Geral</u>

Solução com condições iniciais

Exemplo: $s(0) = 1$, $s(1) = 7$

$$\begin{cases} s(0) = c_1 3^0 + c_2(-1)^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ s(1) = c_1 3^1 + c_2(-1)^1 = 3c_1 - c_2 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 3c_1 - c_2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 3 - 3c_2 - c_2 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -4c_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Solução: $s(n) = 2.3^n - (-1)^n$ (solução única)

Observe-se que $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 - c_2 = 7 \end{cases}$ tem determinante de coeficientes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1$$

Para este método funcionar as raízes da equação característica tem de ser diferentes

4 -

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \\ a_0 = 13 \\ a_1 = 17 \end{cases}$$

Equações características: $r^2 = r + 2 \Rightarrow r^2 - r - 2 \Rightarrow (r-2)(r+1) = 0$
, $r_1 = 2$, $r_2 = -1$

Solução geral: $a_n = c_1.2^n + c_2.(-1)^n$

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 13 \\ a_1 = 2c_1 - c_2 = 17 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 10 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Ficha nº 3

11- Mostre que $\sum_{k=n}^{2n-1} (2k+1) = 3n^2$, para $n \geq 1$

Passo de indução → Supor que é verdade

$$\sum_{k=n+1}^{2(n+1)-1} 2k+1 = \sum_{k=n}^{2n-1} 2k+1 + (2(2n)+1) + (2(2n+1)+1) - (2n+1) =$$

$$= 3n^2 + 6n + 3 = 3(n^2+2n+1) = 3(n+1)^2$$

12- $5^n - 4n - 1$ divisível por 16, $n \geq 1$

(i) $n=1$: $5-4-1=0$, divisível por 16

(ii) Passo de indução

$$5^{n+1} - 4(n+1) - 1 = 5^n \cdot 5 - 4(n+1) = 5^n 5 - 4n - 5 =$$
$$= 5 \cdot 5^n - 5 \cdot 4n - 5 \cdot 1 + 16n = 5(5^n - 4n - 1) + 16n$$, que é divisível por 16, logo $16n$ é divisível por 16, e por isso $5^n - 4n - 1$ é divisível por 16.

13- $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k+1}{k}$ ⊛ , $n \geq 1$

(i) $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2} = 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

ii) Passo de indução: Suponha-se que ⊛ verdade

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^{2n+2} \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^{2n+2} \frac{1}{2n+2}$$

(Teórica)

Exemplo de uma partição de $\{1,2,3,4\}$: $\{\{1,4\}, \{2,3\}, \{4\}\}$

Partição de A - Conjunto de subconjuntos de A

(i) Cada elemento de A pertence a um destes conjuntos
(ii) Dois conjuntos da partição tem intersecção vazia

Exercício: Quantos Subconjuntos?

$A=\{1\}$, $A=\{1,2\}$, $A=\{1,2,3\}$, $A=\{\emptyset\}$?

Depois faça uma hipótese

$\# A = n \rightarrow \# P(A) = ?$

Mostre por indução

A	#A	P(A)	#P(A)
$\emptyset$	0	$\{\emptyset\}$	1
$\{1\}$	1	$\{\emptyset, \{1\}\}$	2
$\{1,2\}$	2	$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$	4
$\{1,2,3\}$	3	$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$	8
Hipótese n			2^n

Demonstração através da função característica

. Seja A um conjunto e $B \subseteq A$. A função característica $\chi_B : A \rightarrow \{0,1\}$ é definida por $\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B$

Por consequência $\chi_B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in B$

Exemplo:

$A = \{1,2,3,4\}$, $\chi_{\{1,2\}}(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \text{ ou } x=2 \\ 0, & x=3 \text{ ou } x=4 \end{cases}$

Teorema: $B, C \subseteq A$. Então $B = C \Leftrightarrow \chi_B = \chi_C$

Demonstração:

$\Rightarrow$ Supomos que $B = C$. Então $x \in B \Leftrightarrow x \in C$

Então $\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_C(x) = 1$. Então $\chi_B = \chi_C$

$\Leftarrow$ Suponos que $\chi_B = \chi_C$. Então $\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_C(x) = 1$.
Então $x \in B \Leftrightarrow \chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_C(x) = 1 \Leftrightarrow x \in C$.
Então $B = C$. (Teorema Mostrado)

• Pelo teorema existe uma correspondência bijectiva entre o conjunto de todos os subconjuntos de A e conjunto de todas as funções características para subconjuntos de A.

Então $\# P(A) = \# \{0,1\}^A$

Hipótese $\# \{0,1\}^A = 2^{\# A}$

(i) $A = \emptyset$: $\# P(A) = 1$
$A = \{1\}$: $\{0,1\}^{\{1\}}$, $1 \to 0$, $1 \to 1$.
Duas possibilidades: $\# \{0,1\}^{\{1\}} = 1$

(ii) Suponha-se que $\# \{0,1\}^{\{1,\dots,n\}}$, $\# \{0,1\}^{\{1,2,\dots,n,n+1\}}$

Observe-se que a cada função $f: \{1,\dots,n\} \to \{0,1\}$ podemos associar exatamente duas funções f_0 e f_1 de $\{1,\dots,n,n+1\} \to \{0,1\}$ com as definições $f_0(n+1) = 0$ e $f_1(n+1) = 1$. Então $\# \{0,1\}^{\{1,\dots,n,n+1\}} = 2^{\#} \{0,1\}^{\{1,\dots,n\}}$
Então $\# \{0,1\}^{\{1,\dots,n,n+1\}} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$
Então a propriedade é mostrada por indução

Partições - Números de Bell

• Utiliza os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$

• $A = \{1,\dots,n\}$: O número de partições de A escreve-se B_n

$$B_0 = \emptyset = 1$$

→ Determine os números de Bell se:

1) $A = \{1,2,3\} \to \{\{1\},\{2\},\{3\}\}, \{\{1,2\},\{3\}\}, \{\{1,3\},\{2\}\}, \{\{2,3\},\{1\}\}, \{1,2,3\}$, $B_3 = 5$.

2) $A = \{1,2\} \to \{\{1\},\{2\}\}, \{1,2\}$, $B_2 = 2$

3) $A = \{1\} \to \{\{1\}\}$, $B_1 = 1$

4) $A \neq \emptyset$, $B_0 = 1$

5) $A = \{1,2,3,4\} \to \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}, \{1,2,3,4\}, \{\{1\},\{2,3,4\}\}, \{\{1,2\},\{3,4\}\}, \{\{1,3\},\{2,4\}\}, \{\{1,4\},\{2,3\}\}, \{\{1,2,3\},\{4\}\}$, $\underline{B_4 = 16}$

$\to 1B_0 + 3B_1 + 3B_2 + 1B_3$

$1 \times B_0 + 3 \times B_1 + 3 \times B_2 + 1 \times B_3$
$1 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 5$

Recorrência

$$s(n+1) = a(n)s(n) + b(n); \quad s(n) = c$$

Princípio de indução: $s(n)$ é determinado para cada $n \in \mathbb{N}$
Caso Especial: $s(n+1) = a\,s(n)$, $s(0) = c$
Solução: $s(n) = c \cdot a^n$

Observe-se que:

(i) $s(0) = c \cdot a^0 = c \cdot 1 = c$, satisfaz a condição inicial

(ii) $s(n+1) = c \cdot a^{n+1} = a \cdot c a^n = a\,s(n)$, satisfaz a equação

Equação em diferenças de primeira ordem

Exemplo: $s(n+1) = 3\,s(n)$, $s(0) = 2$
Solução: $s(n) = 2 \cdot 3^n$
Verificação: $s(0) = 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2$
$s(n+1) = 2 \cdot 3^{n+1} = 3 \cdot 2 \cdot 3^n = 3\,s(n)$

Equações em diferenças de segunda ordem

Exemplo: Sucessão de Fibonacci

$$\begin{cases} f(n+2) = f(n+1) + f(n) \\ f(0) = 1, \quad f(1) = 1 \end{cases}$$

Temos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Quociente: $r(n) = \frac{f(n+1)}{f(n)}$: $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}$

→ número de ouro: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\lim_{n\to\infty} r(n)$ existe porque $r(n)$ é limitado por 2

De facto, $r(n) = \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n)+f(n-1)}{f(n)} \leq \frac{f(n)+f(n)}{f(n)} = 2$

Observe-se que $r(n)$ satisfaz a equação $\boxed{r(n+1) = 1 + \frac{1}{r(n)}}$

De facto, $1 + \frac{1}{r(n)} = 1 + \frac{1}{\frac{f(n+1)}{f(n)}} = 1 + \frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{f(n+1)+f(n)}{f(n+1)} =$

$= \frac{f(n+2)}{f(n+1)} = r(n+1)$

Ora, porque todos os termos $f(n)$ são positivos, os quocientes $r(n)$ também são positivos, logo sempre $r(n+1) = 1 + \frac{1}{r(n)} = \frac{r(n)+1}{r(n)}$

Supondo $\lim_{n\to\infty} r(n)$ existe, chamamos a este limite r

Determinação de r

$r = \lim_{n\to\infty} r(n) = \lim_{n\to\infty} r(n+1)$

Temos $r = \lim_{n\to\infty} r(n+1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{r(n)}\right) = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} r(n)} = 1 + \frac{1}{r}$

Resolver: $r = 1 + \frac{1}{r} = \frac{r+1}{r}$, ou $r^2 = r+1$ ou $r^2 - r - 1 = 0$

$r_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-1)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Porque $r > 0$, temos $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Equações em diferenças de segunda ordem, lineares, com coeficientes constantes, homogéneas

$$\begin{cases} s(n+2) = a\,s(n+1) + b\,s(n) \\ s(0),\ s(1) \text{ dados} \end{cases}$$

Método de resolução através da equação característica:

$r^2 = ar + b$ ou $r^2 - ar - b = 0$

Teorema:

(i) duas raízes distintas r_1 e r_2: a solução é da forma
$s(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$
$s(0)$ e $s(1)$ determinam constantes c_1 e c_2

(ii) raízes idênticas, $r_1 = r_2$: Solução é da forma
$s(n) = c_1 r_1^n + c_2 . n . r_1^n$
c_1, c_2 constantes a determinar se $s(0)$ e $s(1)$ são conhecidas

Equação característica para a equação de Fibonacci

$r^2 = r + 1$ ($a = b = c$) ou $r^2 - r - 1 = 0$

Resolver: $r_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Pelo teorema: $f(n) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
Determinar c_1 e c_2

$n=0$: $f(0) = c_1.1 + c_2.1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$
$n=1$: $f(1) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Demonstração: Verificação por substituição

r_1^n satisfaz a equação: $r_1^{n+2} = a r_1^{n+1} + r_1^n$

Então $r_1^2 = a.r_1 + b$ que é verdade porque r_1 é solução da equação característica. Também r_2^n satisfaz a equação.

Porque r_2 satisfaz a equação característica temos $r_2^2 = a r_2 + b$, então $r_2^{n+2} = a r_2^{n+1} + b r_2^n$

(Teórica)

Equações diferenciais de segunda ordem lineares

$\circledast$ $s(n+2) = a\,s(n+1) + b\,s(n)$

Equações característica:

$$\begin{cases} r^2 = ar + b \\ r^2 - ar - b = 0 \end{cases}$$

Propriedade: Se $r = r_1$ é uma raiz, $t(n) = r_1^n$ é solução de $\circledast$

Verificação: $t(n+2) = r_1^{n+2} = r_1^n \cdot r_1^2 = r_1^n (ar_1 + b) =$
$= ar_1^{n+1} + br_1^n = at(n+1) + bt(n)$

1º caso: A equação característica tem duas raízes distintas $r_1 \neq r_2$: $\circledast$ tem soluções $t(n) = r_1^n$ e $u(n) = r_2^n$

2º caso: A equação característica tem raiz dupla r_1: $\circledast$ tem soluções $t(n) = r_1^n$ e $u(n) = n \cdot r_1^n$

Exemplo: $s(n+2) = 6s(n+1) - 9s(n)$

Equação característica: $r^2 = 6r - 9 \Rightarrow r^2 - 6r - 9 = 0$

$\Rightarrow (r-3)^2 = 0$

Raiz dupla - $r_1 = 3$
Já sabemos que $(r_1)^n$ é solução.
Seja $u(n) = n \cdot 3^n$, também é solução

Verificação: $u(n+2) = (n+2)3^{n+2} = (n+2)3^n \cdot 3^2 =$
$= (n+2)3^n(6 \cdot 3 - 9) = (n+2)3^n \cdot 6 \cdot 3 - (n+2)3^n \cdot 9 =$
$= 6(n+2)3^{n+1} - 9(n+2)3^n =$
$= 6(n+1)3^{n+1} - 9n \cdot 3^n + 6\,3^{n+1} - 2 \cdot 9 \cdot 3^n =$
$= 6u(n+1) - 9u(n) + 3^n(6 \cdot 3 - 2 \cdot 9) = 6u(n+1) - 9u(n)$

Verificação do caso 2:
$r^2 - ar - b = (r - r_1)^2 = r^2 - 2r_1 r + r_1^2$

Então: $r_1 = \frac{a}{2}$ e $r_1^2 = -b$

Seja $u(n) = n r_1^n$. Então $u(n+2) = (n+2) r_1^{n+2} =$

$= (n+2) r_1^n \cdot r_1^2 = (n+2) r_1^n (ar_1 + b) =$
$= (n+2) r_1^n \cdot ar_1 + (n+2) r_1^n \cdot b = a(n+2) r_1^{n+1} + b(n+2) r_1^n =$
$= a(n+1) r_1^{n+1} + bn r_1^n + a r_1^{n+1} + 2b r_1^n =$
$= au(n+1) + bu(n) + 2r_1 r^{n+1} - 2r_1 r^{n+1} - 2r_1^2 \cdot r_1^n =$
$= au(n+1) + bu(n) + 2r_1^n - r_1^{n+2} - 2r_1^{n+2} =$
$= au(n+1) + bu(n)$

Propriedades de linearidade

i) Se $t(n)$ é solução de $\circledast$ então $c \cdot t(n)$ é solução, para cada $c \in \mathbb{R}$

ii) Se $t(n)$ e $u(n)$ são soluções de $\circledast$ então $t(n) + u(n)$ é solução

iii) Se $t(n)$ e $u(n)$ são soluções, então $c_1 \cdot t(n) + c_2 \cdot u(n)$ é solução, para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Demonstração:

(i) $c \cdot t(n+2) = c(at(n+1) + bt(n)) = c \cdot at(n+1) + c \cdot b(n) =$
$= a(c \cdot t(n+1)) + b(c \cdot t(n))$.

Então $c \cdot t(n)$ satisfaz $\circledast$

(ii) $t(n+2) + u(n+2) = at(n+1) + bt(n) + au(n+1) + bu(n) =$
$= a(t(n+1) + u(n+1)) + b(t(n) + u(n))$.

Então $t(n) + u(n)$ satisfaz $\circledast$

(iii) Segue de (i) e (ii)

Teorema: Considere a equação ⊛

(i) Se a equação característica tem duas raízes distintas $r_1 \neq r_2$ então $c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ é solução de ⊛ para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) Se a equação característica tem uma raiz dupla r, então $c_1 r_1^n + c_2 n r_1^n$ é solução de ⊛ para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Demonstração: Pelas propriedades precedentes

- O caso em que a equação característica não tem raízes reais, escreve-se as soluções com números complexos e no caso real, com trigonometria

Exemplo: $s(n+2) = -s(n)$
Equação característica: $r^2 = -1$ ou $r^2 + 1 = 0$

$i = \sqrt{-1} = i^2 = -1$, $r = \pm i$

Mostra-se que a solução do real é
$s(n) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Verifique

$\operatorname{sen}\left((n+2)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{2} + \pi\right)$ e regras trigonométricas

Unicidade da solução com condições iniciais

Propriedade: Se $s(0)$ e $s(1)$ são dadas, ⊛ tem solução única, (c_1 e c_2) podem ser determinados
De facto, $s(0)$ e $s(1)$ são conhecidos:
$s(2) = a\,s(1) + b\,s(0)$ é determinado (⊛ para $n=0$),
$s(3) = a\,s(2) + b\,s(1)$, etc

Demonstração da propriedade

(i) $r_1 \neq r_2 \to s(0) = c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 = c_1 + c_2$
$s(1) = c_1 r_1 + c_2 r_2 = c_1 r_1 + c_2 r_2$

Tem solução única: determinante dos coeficientes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_1 - r_2 \neq 0$$

(ii) r_1 raiz dupla:

$s(0) = c_1 r_1^0 + c_2 \cdot 0 \cdot r_1^0 = c_1$
$s(1) = c_1 r_1^1 + c_2 \cdot 1 \cdot r_2 = c_1 r_1 + c_2 r_2$

$$\begin{cases} c_1 = s(0) \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = s(1) \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = s(0) \\ c_2 r_2 = s(0) - s(0)\, r_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = s(0) \\ c_2 = s(0)\left(\frac{1 - r_1}{r_1}\right) \end{cases}$$

$r_1 \neq 0 \to$ Que se passa se $r_1 = 0$?
$0 = r_1^2 = a r_1 + b = 0 + b = b$

A equação ⊛ tem $s(n+2) = a\,s(n+1)$, isto é uma equação de 1ª ordem

Grafos

V: Conjunto de pontos: vértices $v_1, v_2, v_3, \ldots$
A: Conjunto de linhas que unem elementos de V, arestas

$\{v_1, v_2\}$ aresta que liga v_1 e v_2 $\quad v_1 \text{———} v_2$

$\{v_1, v_2\} = \{v_2, v_1\}$

$v_1 \longrightarrow v_2$ Digrafos - grafos com direcções (setas)

$(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$

Caminho: $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ de modo que

$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}$ arestas