4. Recorrência

Uma forma bastante útil de definir algumas sucessões é a *recorrência*. São dados os primeiros termos da sucessão e uma regra para determinar cada termo a partir dos anteriores. Por exemplo, a sucessão dos factoriais dos números naturais pode ser definida directamente

$$n! = n(n-1)\cdots 1 = \prod_{i=1}^{n} i,$$

com a convenção $0! = 1$, ou por recorrência

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)\cdot n! \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Mais geralmente, podemos definir por recorrência expressões que dependem de mais de uma variável, como é o caso das combinações. Convencionamos que $\binom{n}{k} = 0$, para o caso $n < 0 \vee k < 0 \vee n < k$ e definimos

$$\begin{cases} \binom{0}{0} = 1; \\ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n+1. \end{cases}$$

Exercícios e problemas

1. Para cada $n \geq 1$, seja a_n o número de regiões do plano que são determinadas por n rectas, tais que não haja pontos de intersecção de mais de duas rectas e não haja duas rectas paralelas. Para $n = 1$, temos que uma recta divide o plano em duas regiões. Para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, o plano divide-se em quatro, sete e onze regiões, respectivamente.

   (a) Descreva o raciocínio seguido para obter o número de regiões determinadas por quatro rectas a partir do número de regiões determinadas por três. Obtenha desta forma a regra de recorrência geral que descreve a_n.

   (b) Encontre uma expressão geral para a_n. (Lembre-se de que $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.)

2. As torres de Hanoi. Os monges dum mosteiro de Hanoi, para medir o tempo que falta até o fim do mundo contam com três agulhas feitas de diamante. Numa delas empilham-se, dispostos segundo o seu tamanho, sessenta e quatro discos de ouro. Os monges devem mudar um disco de uma agulha para outra a cada segundo que passa. O fim do mundo chegará quando consigam mudar os discos todos de agulha. No processo nunca podem colocar um disco sobre outro de diâmetro mais pequeno.

   Generalizemos o problema: tomemos n discos e chamemos a_n ao número mínimo de movimentos para transportar n discos de uma agulha para outra.

   (a) Calcule o valor de a_1, a_2 e a_3.

   (b) Tente generalizar o procedimento utilizado no caso $n = 3$.

   (c) Resolva a equação de recorrência obtida na alinea anterior. (Lembre-se de que $\sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$.)

   (d) Segundo esta lenda, quanto tempo falta para o fim do mundo?

3. Considere o integral

   $$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt, \text{ para cada } n \geq 0.$$

   (a) Calcule $\Gamma(0)$.

   (b) Calcule $\Gamma(n+1)$, utilizando a integração por partes, de modo a obter uma definição de $\Gamma(n)$ por recorrência.

   (c) Calcule $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$, e $\Gamma(5)$.

   (d) Encontre outra expressão geral para $\Gamma(n)$.

4. Considere as sucessões definidas por recorrência da seguinte forma:

   $$\begin{cases} a_0 = 13; \\ a_1 = 17; \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} b_0 = 5; \\ b_1 = 3; \\ b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Mostre por indução que todos os termos das sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são ímpares.

5. **Números de Bell.** Uma *partição* de um conjunto não vazio A é um conjunto de subconjuntos não vazios de A, disjuntos dois a dois, cuja união é A. Ou seja, é um conjunto $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que $\emptyset \notin P$ e para quaisquer $X, Y \in P$, $X \cap Y = \emptyset$ e, por outro lado, $\bigcup_{X\in P} X = A$. Por convenção, a única partição do conjunto vazio é o conjunto $\{\emptyset\}$. Chamamos *número de Bell* de ordem n ao número de partições de um conjunto de n elementos. Denotamos este número por B_n.

   (a) Calcule B_3, encontrando explicitamente todas as partições do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

   (b) Calcule B_4, encontrando explicitamente todas as partições do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

   (c) Quanto é B_0, B_1 e B_2?

   (d) Comparando as respostas anteriores, encontre relação entre o número de Bell B_4 e os números anterioes, e estabeleça uma regra para obter o número de Bell B_{n+1} a partir de $B_0, \ldots, B_n$.

   (e) Defina a sucessão $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por recorrência.

6. Uma *partição* de um número natural $n > 0$ é uma sequência de naturais $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tal que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$; chamamos a k o número de *partes* da partição λ. Para cada $n, k > 0$, denotamos por $\Pi(n)$ o número de partições do número n, e denotamos por $\Pi(n, k)$ o número de partições do número n em k partes. Uma relação imediata entre estas duas expressões é

$$\Pi(n) = \sum_{k=1}^{n} \Pi(n, k).$$

   (a) Calcule $\Pi(5)$ e $\Pi(6)$, encontrando explicitamente todas as partições dos números 5 e 6.

   (b) Calcule $\Pi(10, 4)$, encontrando explicitamente todas as partições do número 10 em 4 partes.

   (c) Apresente uma explicação informal para a igualdade

$$\Pi(n) = \Pi(2n, n).$$

   Sugestão: repare que $\Pi(n)$ é o número de maneiras de colocar n bolas iguais em n caixas iguais.

   (d) Observe que $\Pi(n, k)$ é o número de maneiras de colocar n bolas iguais em k caixas iguais de tal modo que nenhuma caixa fica vazia. Com base nisto, tendo em conta que podemos contar separadamente os casos em que há uma caixa com exactamente uma bola e os casos em que todas as caixas têm pelo menos duas bolas, mostre que podemos obter a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} &\Pi(n, k) = 0, \text{ se } k > n; \\ &\Pi(n, n) = \Pi(n, 1) = 1; \\ &\Pi(n, k) = \Pi(n-1, k-1) + \Pi(n-k, n). \end{aligned}$$

   (e) Explique a igualdade

$$\Pi(n, k) = \sum_{k=1}^{n} \Pi(n-k, k).$$

7. Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão definida por recorrência tal que os primeiros dois termos s_0 e s_1 são dados e os seguintes se obtêm a partir de

$$s_{n+2} = as_{n+1} + bs_n,$$

para $n \in \mathbb{N}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Então, se $r_1 \neq r_2$, uma expressão geral para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é da forma

$$s_n = c_1{r_1}^n + c_2{r_2}^n,$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Caso $r_1 = r_2$, uma expressão geral para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é da forma

$$s_n = c{r_1}^n + c_2 n {r_1}^n,$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Calcule expressões gerais para as sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas no exercício 4.