Algoritmica Grafurilor - Cursul 13

17 ianuarie 2020

1. Tree decomposition
   - Tree width
   - Small tree decompositions
   - Proprietăţi ale tree descompunerilor
   - Tree descompuneri cu rădăcină
   - Aplicaţii

Tree decomposition - Definiţie

Definiţie

O **tree decomposition** a unui graf $G = (V, E)$ este o pereche $\mathcal{T} = (T, \{V_t : t \in T\})$, unde T este un arbore iar $\{V_t : t \in V(T)\}$ este o familie de submulţimi de noduri ale lui G, $V_t \subseteq V, \forall\, t \in T$ astfel ca:

- *(Acoperirea nodurilor)* $V = \bigcup_{t \in V(T)} V_t$;
- *(Acoperirea muchiilor) Pentru orice muchie* $e \in E$, *ambele capete ale lui* e *sunt conţinute într-o mulţime* V_t, *pentru un anumit* $t \in V(T)$.
- *(Coerenţa) Fie* t_1, t_2, t_3 *trei noduri din* T *astfel ca* t_2 *se află pe drumul dintre* t_1 *şi* t_3 *in* T. *Atunci, dacă* $v \in V$ *se află în* V_{t_1} *şi* V_{t_3}, v *se află şi în* V_{t_2}.

Remarci

Proprietatea de coerenţă poate fi reformulată astfel:

- (Coerenţa') Fie $t_1, t_2, t_3 \in V(T)$ aşa încât t_2 aparţine drumului dintre t_1 şi t_2 în T. Atunci $V_{t_1} \cap V_{t_3} \subseteq V_{t_2}$.
- (Coerenţa") Pentru orice $x \in V$, subgraful lui T indus de $\{t \in V(T) : x \in V_t\}$ este (un subarbore al lui T) conex.

Mulţimile V_t ale descompunerii sunt numite **bags**.

Definiţie

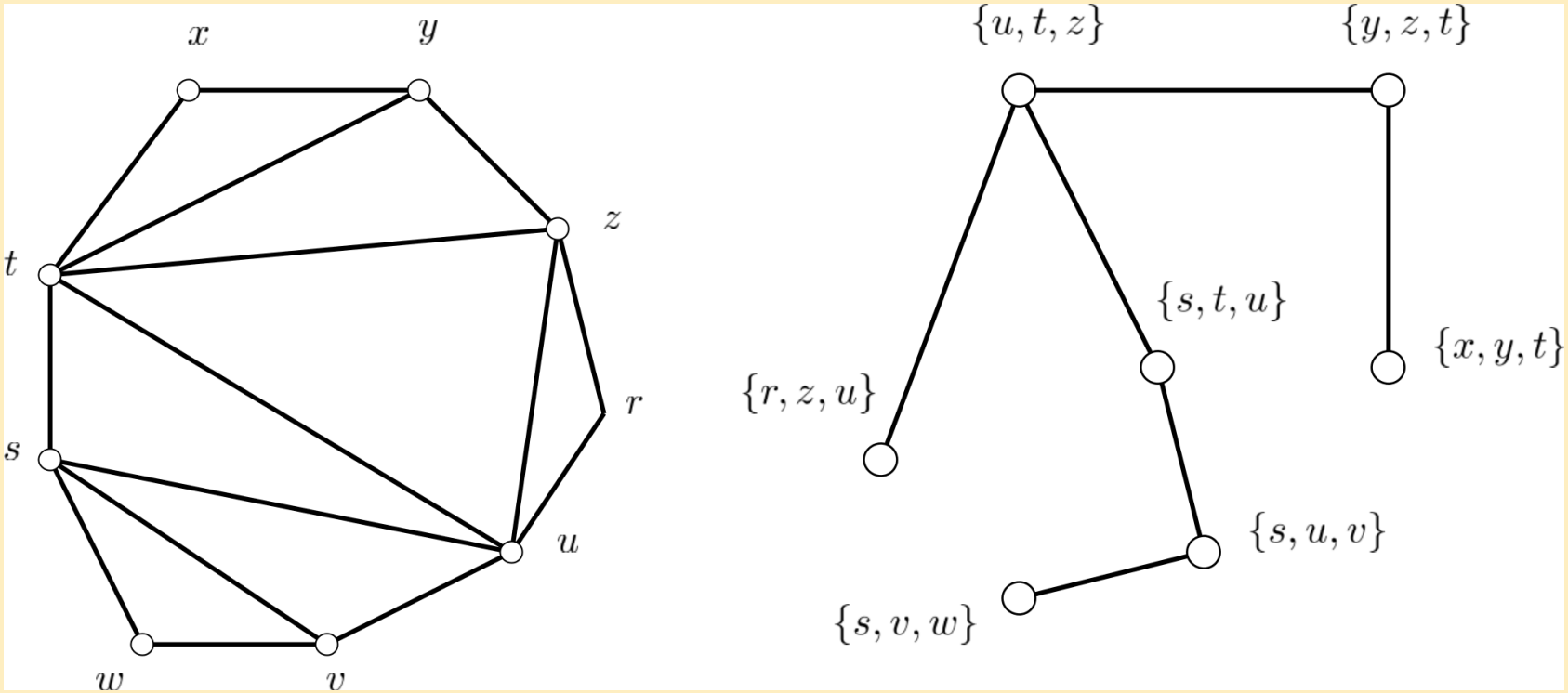
Fie $\mathcal{T} = (T, \{V_t : t \in T\})$ o tree-descompunere a lui G, **lăţimea** *(**width**) lui $\mathcal{T}$ este*

$$width(\mathcal{T}) = \max_{t \in V(T)} (|V_t| - 1).$$

Definiţie

Tree-width *a unui graf G, este cea mai mică lăţime a unei tree-descompuneri a lui G:*

$$tw(G) = \min\{width(\mathcal{T}) \ : \ \mathcal{T} \text{ tree-descompunere a lui } G\}.$$



Remarcă

$tw(G) = 0$ dacă şi numai dacă $E(G) = \varnothing$.

Propoziţie

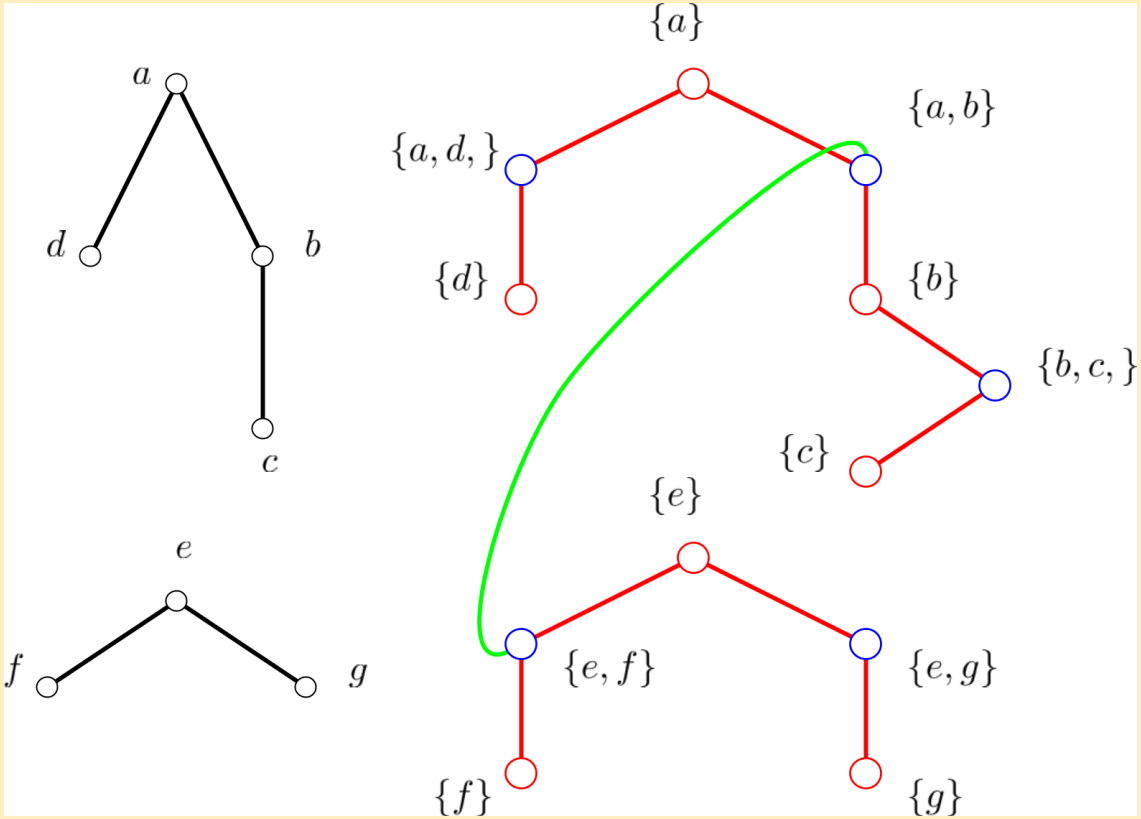
Dacă G este o pădure cu $E(G) \neq \varnothing$, atunci $tw(G) = 1$.

Demonstraţie. Din observaţia de mai sus $tw(G) \geqslant 1$. Dacă G este un arbore, atunci

- fie T obţinut din G prin redenumirea fiecărui nod $v \in V(G)$ prin t_v,
- inserează pe fiecare muchie $t_u t_v$ $(uv \in E(G))$ un vârf nou t_{uv},
- setează $V_{t_u} = \{u\}$ pentru orice t_u asociat lui $u \in V(G)$ şi $V_{t_{uv}} = \{u, v\}$ pentru orice $t_{uv} \in V(T)$ asociat lui $uv \in E(G)$.
- $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ este o tree-descompunere a lui G cu lăţimea 1.

Demonstraţie (continuare). O tree-descompunere a unei păduri cu p componente se poate obţine adăugând arbitrar $p - 1$ muchii la tree-descompunerile componentelor (fără a crea circuite).

□



Small tree decompositions

Definiţie

O tree-descompunere, $\mathcal{T} = (T, \{V_t : t \in V(T)\})$, este **mică** *(***small***) dacă nu există noduri distincte $t_1, t_2 \in V(T)$ astfel ca $V_{t_1} \subseteq V_{t_2}$.*

Propoziţie

Dată o tree-descompunere a lui G, o tree-descompunere small a lui G de aceeaşi lăţime poate fi construitia în timp polinomial.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{T} = (T, \{V_t : t \in V(T)\})$ o tree-descompunere a lui G cu $V_{t_1} \subseteq V_{t_2}$ pentru $t_1, t_2 \in V(T)$, $t_1 \neq t_2$. Putem presupune că $t_1 t_2 \in E(T)$ (altfel, putem determina două noduri adiacente cu această proprietate considerând drumul de la t_1 la t_2).
Contractând $t_1 t_2$ într-un nod nou t_{12} cu $V_{t_{12}} = V_{t_2}$, se obţine o tree-descompunere a lui G mai mică (conţine mai puţine perechi de noduri (t_1', t_2') cu $V_{t_1'} \subseteq V_{t_2'}$).

Demonstraţie (continuare). Repetăm această reducere până se obţine o tree-descompunere small.

□

Propoziţie

Dacă $\mathcal{T} = (T, \{V_t : t \in V(T)\})$ *este o tree-descompunere small a lui* G, *atunci* $|T| \leqslant |G|$.

Demonstraţie. Prin inducţie după $n = |G|$. Dacă $n = 1$, atunci $|T| = 1$.

În pasul inductiv, pentru $n \geqslant 2$, considerăm o frunză t_1 a lui T cu vecinul t_2. $(T - t_1, \{V_t : t \in V(T - t_1)\})$ este o tree-descompunere small a lui $G' = G \setminus (V_{t_1} \setminus V_{t_2})$. Din ipoteza inductivă $|T - t_1| \leqslant |G'|$, astfel

$$|T| = |T - t_1| + 1 \leqslant |G'| + 1 \leqslant |G|.$$

□

Remarci

- dacă graful H se obţine din G prin contractarea unei muchii uv în z, atunci $tw(H) \leqslant tw(G)$: într-o tree-descompunere a lui G, inserăm z în fiecare bag care conţine pe u sau v şi ştergem apoi pe u şi v din orice bag pentru a obţine o tree-descompunere a lui H.
- dacă H este un subgraf al lui G, atunci $tw(H) \leqslant tw(G)$.

Definiţie

H este un minor al unui graf G dacă se poate obţine din G prin ştergerea si contractarea succesivă a unor muchii din G.

Corolar

Dacă H este un minor al grafului G, atunci $tw(H) \leqslant tw(G)$.

Demonstraţie. Folosind observaţiile de mai sus.

□

Fie $TW_k = \{G \ : \ tw(G) \leqslant k\}$.

TW (Tree-Width - versiunea de decizie)
Instanţă: G un graf şi $k \in \mathbb{N}$.
Întrebare: $G \in TW_k$?

Teoremă

Problema Tree-Width (versiunea de decizie) este o problemă **NP**-*completă.*

Demonstraţie. Omisă.

Tree-width este FPT (fixed-parameter tractable)

Lemă

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, TW_k este o familie închisă la minori.

Teoremă

(Bodlaender) Pentru orice k fixat, problema determinării dacă G este în TW_k sau nu poate fi rezolvată în timpul $\mathcal{O}(f(k) \cdot n)$.

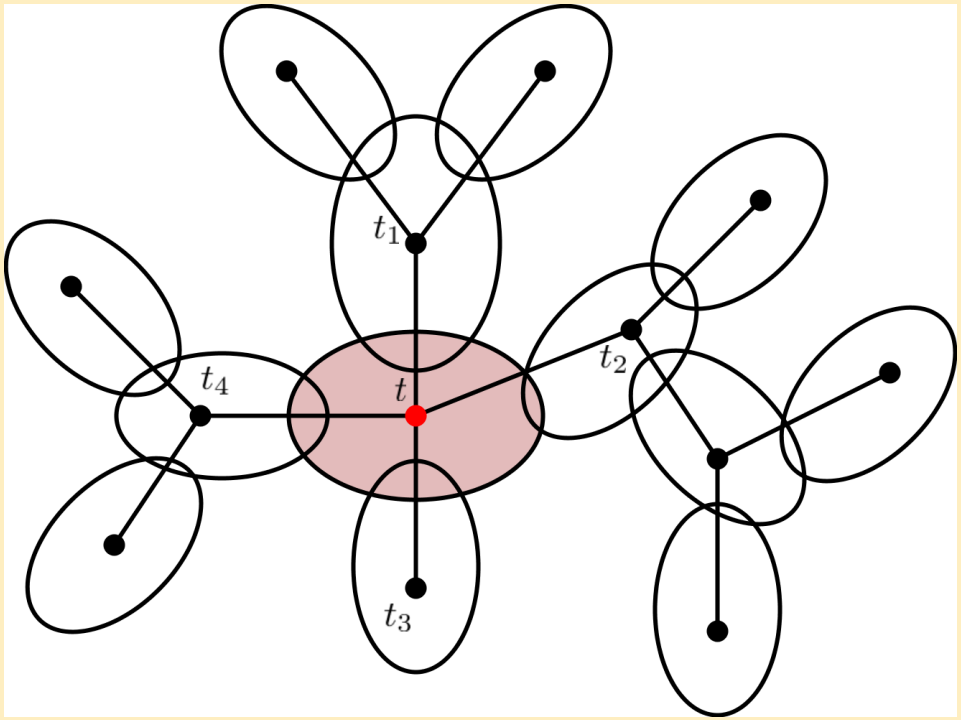
Proofs. Omisă. ($f(k)$ este o funcţie exponenţială în k.)

Notaţie: Fie $\mathcal{T} = (T, \{V_t : t \in V(T)\})$ o tree-descompunere of G. Dacă T' este un subgraf al lui T, $G_{T'}$ este subgraful lui G indus de mulţimea de noduri $\bigcup_{t \in V(T')} V_t$.

Proprietăţi ale tree descompunerilor

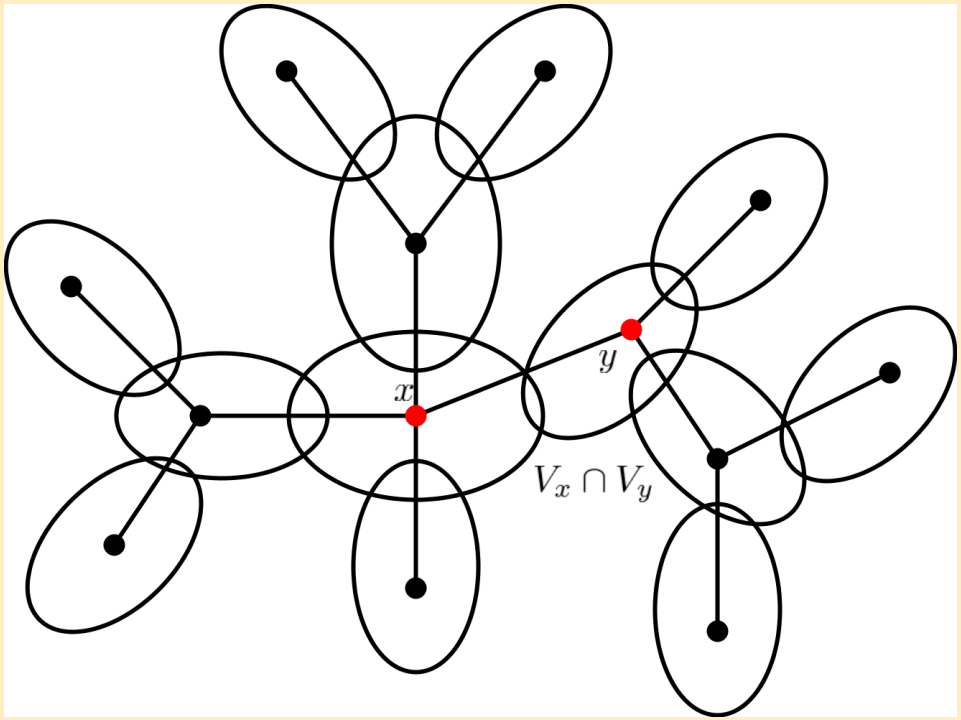
Teoremă

(Proprietatea separării nodurilor.) Presupunem că $T - t$ are componentele conexe $T_1, T_2, \ldots, T_p$. Atunci subgrafurile $G_{T_1} - V_t, G_{T_2} - V_t, \ldots, G_{T_p} - V_t$ nu au noduri în comun şi nici muchii între ele.



Teoremă

(Proprietatea separării muchiilor.) Fie X şi Y componentele conexe ale lui T după ştergerea unei muchii $xy \in E(T)$. Atunci, ştergerea nodurilor din $V_x \cap V_y$ deconectează G în două subgrafuri $H_X = G_X - V_x \cap V_y$ şi $H_Y = G_Y - V_x \cap V_y$. Cu alte cuvinte H_X şi H_Y nu au noduri în comun şi nici muchii între ele.



Alte proprietăţi:

- Fie G un graf conex cu $tw(G) = k$, atunci sau $|G| = k + 1$ sau G are o mulţime separatoare de noduri de cardinal k.
- dacă $tw(G) = 1$, atunci G este o pădure.
- $tw(P_r \times P_s) = \min\{r, s\}$.
- $tw(K_n) = n - 1$.

Tree descompuneri cu rădăcină

Definiţie

O **tree-descompunere cu rădăcină** *a lui G este o tree-descompunere $\mathcal{T} = (T, \{V_t : t \in V(T)\})$ a lui G, în care un anumit nod r al lui T este declarat rădăcină.*

Notaţii: Fie t un nod dintr-o tree-descompunere cu rădăcină $\mathcal{T} = (T, \{V_t : t \in V(T)\})$.

- T_t este subarborele lui T cu rădăcina în t.
- $G[t]$ este subgraful lui G indus de nodurile din $\bigcup_{x \in V(T_t)} V_x$ (i. e., $G[t] = G_{T_t}$).

- Reamintim: o p-colorare a nodurilor unui graf $G = (V, E)$ este o funcţie $c : V \to \{1, 2, \ldots, p\}$ astfel ca $c(u) \neq c(v)$ pentru orice $uv \in E$.
- Fie H' şi H'' două subgrafuri ale lui G, cu p-colorările c' şi c'', respectiv. c'' este c'-compatibilă dacă pentru orice $v \in V(H') \cap V(H'')$ avem $c'(v) = c''(v)$.
- Fie $\mathcal{T} = (T, \{V_t : t \in V(T)\})$ tree-descompunere cu rădăcină a lui G. Pentru orice $t \in T$ şi orice p-colorare c a lui G_t, definim

$$Prev_t(c) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } G[t] \text{ are o } p\text{-colorare } \overline{c}, c\text{-compatibilă} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Propoziţie

$Prev_u(c) = 1$ dacă şi numai dacă pentru orice copil v al lui u, există o colorare $\overline{c}$ a lui G_v, c-compatibilă cu $Prev_v(\overline{c}) = 1$

Demonstraţie. "$\Longrightarrow$" dacă γ este colorare a lui $G[u]$, c-compatibilă, cum G_v este un a subgraf al lui $G[u]$, atunci restricţia lui γ la G_v ne oferă colorarea dorită, $\overline{c}$.

"$\Longleftarrow$" Presupunem că u are exact doi copii v şi w, şi că avem două colorări $\overline{c}'$ şi $\overline{c}''$, c-compatibile, respectiv (demonstraţia este similară pentru mai mulţi copii).

Deoarece $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ este o tree-descompunere, $V(G[v]) \cap V(G[w]) \subseteq V_u$, urmează că $\overline{c}'$ este $\overline{c}''$-compatibilă.

Combinând $\overline{c}'$ şi $\overline{c}''$ obţinem $\overline{c} : V(G[u]) \to \{1, 2, \ldots, p\}$. Cum $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ este o tree-descompunere, nu există muchii $xy \in E(G)$ cu $x \in V(G[v]) - V_u$ şi $y \in V(G[w]) - V_u$, deci $\overline{c}$ este o p-colorare a lui $G[u]$.

□

Teoremă

Dacă G, un graf de ordin n, are o tree-descompunere small $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ cu lăţimea w, atunci putem decide dacă G este p-colorabil în timpul $\mathcal{O}(p^{w+1} \cdot n^{\mathcal{O}(1)})$.

Demonstraţie. Transformăm $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ într-o a tree-descompunere cu rădăcină (r). Pentru orice $v \in V(T)$ şi orice p-colorare c a lui G_v, determinăm $Prev_v(c)$: plecând din frunzele lui T, şi apoi folosind proprietatea de mai sus pentru celelalte noduri, într-o ordine corespunzătoare.
$G = G[r]$ este p-colorabil dacă şi numai dacă $Prev_v(c) = 1$ pentru o colorare c. Testarea dacăc este G_v colorare şi determinarea lui $Prev_v(c)$ pot fi făcute în timpul $\mathcal{O}(n^{\mathcal{O}(1)})$, astfel complexitatea timp totală este dată în principal de numărul de candidaţi pentru c, adică $p^{|V_v|}$.
Complexitate: $|V(T)| \cdot p^{w+1} \cdot n^{\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(p^{w+1} \cdot n^{\mathcal{O}(1)})$.

Teoremă

Dacă G, un graf de ordin n, are o tree-descompunere small $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ cu lăţimea w, cardinalul minim al unei acoperiri cu noduri a lui G poate fi determinată în timpul $\mathcal{O}(2^{w+1} \cdot n^{\mathcal{O}(1)})$.

Teoremă

Dacă G, un grafde ordin n cu ponderi pe noduri, are o tree-descompunere small $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ cu lăţimea w, o mulţime stabila de pondere maximă a lui G poate fi determinată în timpul $\mathcal{O}(4^{w+1} \cdot w \cdot n)$.

Sfârşit!