# Algoritmica Grafurilor - Cursul 12



10 ianuarie 2020

## Cuprins

Fie $G = (V, E)$ un graf şi $\mathcal{S}$ o suprafaţă (e.g., plan, sferă) din $\mathbb{R}^3$. O **reprezentare** a lui $G$ pe $\mathcal{S}$ este un graf $G' = (V', E')$ astfel încât:

a) $G \cong G'$;

b) $V'$ este o mulţime puncte distincte ale lui $\mathcal{S}$;

c) Orice muchie $e' \in E'$ este o curbă simplă (arc Jordan) conţinută în $\mathcal{S}$ unindu-i extremităţile;

d) Orice punct din $\mathcal{S}$ este fie un nod al lui $G'$ fie este conţinut în cel mult o muchie a lui $G'$.

Dacă $\mathcal{S}$ este un plan, atunci $G$ este un **graf planar** şi $G'$ este o **reprezentare planară** a lui $G$.

Dacă $\mathcal{S}$ este un plan şi $G'$ este un graf satisfăcând constrângerile b), c) şi d) de mai sus, atunci $G'$ se numeşte **graf plan**.

**Lemă**

Un graf este planar dacă şi numai dacă are o reprezentare pe o sferă.

**Demonstraţie.** Dacă $G$ este planar, fie $G'$ o reprezentare planară a lui $G$ în planul $\pi$. Luăm un punct $x$ în $\pi$ şi considerăm o sferă $\mathcal{S}$ tangentă la $\pi$ în $x$. Fie $y$ punctul diametral opus lui $x$ în $\mathcal{S}$. Considerăm $\varphi : \pi \to \mathcal{S} \setminus \{y\}$ dată prin $\varphi(M) =$ punctul diferit de $y$ în care dreapta $My$ intersectează sfera, $\forall M \in \pi$. $\varphi$ este o bijecţie şi astfel $\varphi(G')$ este o reprezentare a lui $G$ pe $\mathcal{S}$.
Reciproc, dacă $G$ are o reprezentare pe o sferă $\mathcal{S}$: luăm un punct $y$ în $\mathcal{S}$[a], considerăm $x$, punctul diametral opus lui $y$ pe $\mathcal{S}$, construim un plan tangent $\pi$ la $\mathcal{S}$ în $x$, şi definim $\psi : \mathcal{S} \to \pi$ by $\psi(M) =$ punctul în care dreapta $yM$ intersectează planul $\pi$, pentru orice $M \in \mathcal{S}$. Imaginea prin $\psi$ a reprezentării lui $G$ pe sferă, $\psi(G)$, este reprezentarea planară dorită a lui $G$. $\square$

[a] $y$ se alege a. î. să nu se afle pe vreo muchie sau în vreun nod al lui $G$.

# Grafuri planare - Proprietăţi elementare - Feţe



Fie $G$ un **graf plan**. Dacă ştergem punctele lui $G$ din plan (nodurile şi muchiile sale), acesta este descompus într-o reuniune finită de **regiuni conexe** maximale din plan (oricare două puncte pot fi unite printr-o curbă simplă conţinută în acea regiune), care sunt numite **feţele** lui $G$.

Exact una dintre aceste feţe este nemărginită şi este numită faţa **exterioară**.

Fiecare faţă este caracterizată de mulţimea muchiilor care-i formează **frontiera**. Fiecare circuit al lui $G$ împarte planul în exact două regiuni conexe, astfel fiecare muchie a unui circuit aparţine la exact două frontiere (la exact două feţe).

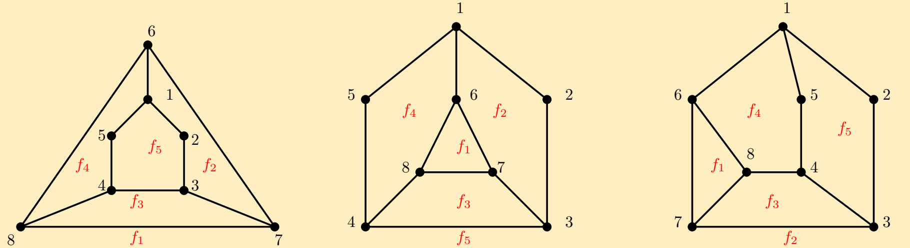
Un graf planar poate avea diferite reprezentări planare.

**Lemă**

*Orice reprezentare planară a unui graf planar poate fi transformată într-o reprezentare planară diferită în care o faţă fixată a primei reprezentări să devină faţa exterioară a celei de-a doua.*



**Demonstraţie.** Fie $G'$ o reprezentare planară a lui $G$ şi $F$ o faţă a lui $G'$. Fie $G^0$ o reprezentare a lui $G'$ pe o sferă şi $F^0$ faţa a lui $G^0$ corespunzând lui $F$. Alegem un punct $y$ în interiorul lui $F^0$, $x$ punctul său diametral opus pe sferă, şi $\pi$ planul tangent în $x$ la sferă.
$G'' = \psi(G^0)$ este o reprezentare a lui $G$ în planul $\pi$ având ca faţă exterioară $\psi(F^0)$. $\square$






### Teoremă

**(Formula lui Euler)** Fie $G = (V, E)$ un graf conex plan cu $n$ noduri, $m$ muchii şi $f$ feţe. Atunci,

$$\mathbf{f = m - n + 2}.$$



**Demonstraţie.** Inducţie după $f$.

**Demonstraţie (continuare).** Dacă $f = 1$, atunci $G$ nu are circuite şi, deoarece este conex, este un arbore. Urmează că $m = n - 1$ şi teorema este adevărată.

În pasul inductiv să presupunem că teorema are loc pentru orice graf conex plan cu mai puţin de $f(\geqslant 2)$ feţe. Fie $e$ o muchie de pe un circuit al lui $G$ (există un astfel de circuit, deoarece $f \geqslant 2$). Atunci $e$ aparţine frontierei a exact două feţe a lui $G$. Urmează că $G_1 = G - e$ este un graf conex plan cu $n$ noduri, $m - 1$ muchii şi $f - 1$ feţe. Teorema are loc pentru $G_1$, deci $f - 1 = m - 1 - n + 2$, i. e., $f = m - n + 2$. $\square$



**Remarcă**

Din punct de vedere algoritmic, teorema de mai sus implică (vezi următoarele două corolarii) că orice planar graf este rar: dacă $m$ este numărul de muchii şi $n$ este numărul de noduri, atunci $m = \mathcal{O}(n)$.

## Corolarul 1

Fie $G = (V, E)$ un graf conex planar cu $n \geqslant 3$ noduri şi $m$ muchii. Atunci,

$$\mathbf{m \leqslant 3n - 6}.$$



**Demonstraţie.** Fie $G'$ o reprezentare planară a lui $G$. Dacă $G'$ are doar o faţă, atunci $G$ este un arbore, $m = n - 1$, şi pentru $n \geqslant 3$ inegalitatea are loc.

Dacă $G'$ are cel puţin două feţe, atunci fiecare faţă $F$ a lui $G'$ are în frontiera sa muchiile unui circuit $C_F$, şi fiecare astfel de muchie aparţine la exact două feţe. Orice circuit al lui $G'$ are cel puţin trei muchii, astfel

$$2m \geqslant \sum_{F \text{ faţă a lui } G'} length(C_F) \geqslant \sum_{F \text{ faţă a lui } G'} 3 = 3f = 3(m-n+2),$$

Adică inegalitatea dorită. $\square$

**Remarcă**

Graful $K_5$ nu este planar (numărul său de noduri este $n = 5$, numărul său de muchii este $m = 10$ şi $10 > 3 \cdot 5 - 6$).

**Corolarul 2**

Fie $G = (V, E)$ un graf bipartit, planar şi conex cu $n \geqslant 3$ noduri şi $m \geqslant 3$ muchii. Atunci,

$$\mathbf{m \leqslant 2n - 4.}$$

**Demonstraţie.** Aceeaşi demonstraţie ca pentru Corolarul 1, dar folosind faptul că orice circuit al lui $G'$ are cel puţin patru muchii. □

**Remarcă**

Graful $K_{3,3}$ nu este planar (numărul său de noduri este $n = 6$, numărul său de muchii este $m = 9$ şi $9 > 2 \cdot 6 - 4$).

**Corolarul 3**

Dacă $G = (V, E)$ este un graf conex planar, atunci există $v_0 \in V$ astfel încât

$$\mathbf{d_G(v_0) \leqslant 5}.$$



**Demonstraţie.** Putem să presupunem că $G$ are cel puţin două muchii (altfel e banal). Fie $G'$ o reprezentare planară a lui $G$ cu $n$ noduri şi $m$ muchii. Dacă notăm cu $n_i$ numărul de noduri de grad $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ atunci

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot n_i = 2m \leqslant 2(3n-6) = 6\left(\sum_i n_i\right) - 12 \Rightarrow \sum_i (i-6)n_i + 12 \leqslant 0.$$

Dacă am avea $i \geqslant 6$, pentru orice $i$, toţi termenii din această sumă sunt $\geqslant 0$, deci există $i_0 \leqslant 5$ astfel încât $n_{i_0} > 0$. $\square$

Fie $G = (V, E)$ un graf şi $v \in V$ astfel încât $d_G(v) = 2$ şi $vw_1, vw_2 \in E$, $w_1 \neq w_2$.
Fie $h(G) = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{vw_1, vw_2\} \cup \{w_1w_2\})$.

**Lemă**

*$G$ este planar dacă şi numai dacă $h(G)$ este planar.*

**Demonstraţie.** "$\Leftarrow$" Presupunem că $h(G)$ e planar.
Dacă $w_1w_2 \notin E$, atunci pe curba simplă care uneşte punctele corespunzând lui $w_1$ şi $w_2$ într-o reprezentare planară a lui $h(G)$ inserăm un punct nou corespunzând lui $v$; dacă $w_1w_2 \in E$ considerăm un punct nou corespunzând lui $v$ "destul de aproape" de curba reprezentând $w_1w_2$ pe una dintre feţele reprezentării planare a lui $h(G)$ şi "unim" acest punct nou cu punctele corespunzând lui $w_1$ şi $w_2$ prin curbe simple care nu le intersectează pe cele deja existente.

**Demonstraţie (continuare)** "$\Rightarrow$" Reciproc, presupunem că $G$ este planar.

În reprezentarea sa planară, ştergem punctul corespunzând lui $v$ şi cele două curbe corespunzând muchiilor $vw_1$ şi $vw_2$ sunt înlocuite cu reuniunea lor; dacă $w_1w_2 \in E$, atunci curba simplă care-i corespunde este ştearsă. $\square$

Notăm cu $h^*(G)$ graful obţinut din $G$ prin aplicarea repetată a transformării $h$ până se obţine un graf fără noduri de grad 2.

Urmează că $G$ este planar dacă şi numai dacă $h^*(G)$ este planar.

Două grafuri $G_1$ şi $G_2$ sunt **homeomorfe** dacă $h^*(G_1) \cong h^*(G_2)$.



**Teoremă**

**(Kuratowski, 1930)** Un graf este planar dacă şi numai dacă nu conţine subgrafuri homeomorfe cu $K_5$ sau cu $K_{3,3}$.

**Teoremă**

**(Fary, 1948, independent Wagner & Stein)** Orice graf planar are o reprezentare planară cu toate muchiile segmente de dreaptă (**reprezentare Fary**).



**Problemă:** Să se determine o reprezentare Fary cu punctele reprezentând nodurile de coordonate întregi şi aria suprafeţei ocupată de reprezentare polinomială în $n$, numărul de noduri.



**Teoremă**

**(Fraysseix, Pach, Pollack, 1988)** Orice graf planar $G$ cu $n$ noduri are o reprezentare planară cu noduri în puncte cu coordonate întregi din $[0, 2n-4] \times [0, n-2]$ şi cu toate muchiile segmente de dreaptă.

**Demonstraţie algoritmică.** Vom schiţa o desenare în $\mathcal{O}(n \log n)$. Fără a restrânge generalitatea, vom presupune că $G$ este **maximal planar**: $\forall e \in E(G)$, $G + e$ nu este planar (adăugăm muchii la $G$ pentru a-l face maximal planar şi când aceste muchii (segmente) vor fi desenate le facem invizibile). Observăm că orice faţă a unui graf maximal planar este un triunghi şi are $3n - 6$ muchii, unde $n$ este numărul său de noduri.

**Lema 1**

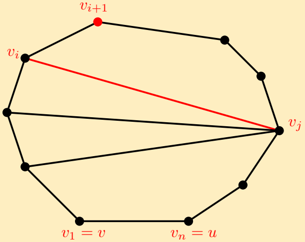
Fie $G$ un graf planar şi $G'$ o reprezentare planară a lui $G$. Dacă $C'$ este un circuit al lui $G'$ care trece prin muchia $uv \in E(G')$, atunci există $w \in V(C')$ astfel încât $w \neq u, v$ şi nu există nicio coardă interioară a lui $C'$ cu o extremitate în $w$.

**Demonstraţie.** Fie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nodurile lui $C'$ întâlnite într-o parcurgere de la $u$ la $v$ ($v = v_1$, $u = v_n$).

**Demonstraţie (continuare).** Dacă $C'$ nu are corzi interioare, atunci lemma este adevărată. Altfel, alegem o pereche $(i, j)$ astfel încât $v_i v_j$ este o coardă interioară a lui $C'$ şi

$$j-i = \min\{k - l \,:\, k > l + 1, v_k v_l \in E(G'), v_k v_l \text{ coardă interioară a lui } C$$

Atunci, $w = v_{i+1}$ nu este incident cu o coardă interioară: $v_{i+1}v_p$ cu $i + 1 < p < j$ nu poate fi o coardă interioară - din modul de alegere a perechii $(i, j)$, şi $v_{i+1}v_l$ cu $l < i$ sau $l > j$ nu este o coardă interioară deoarece ar trebui să intersecteze $v_i v_j$. □



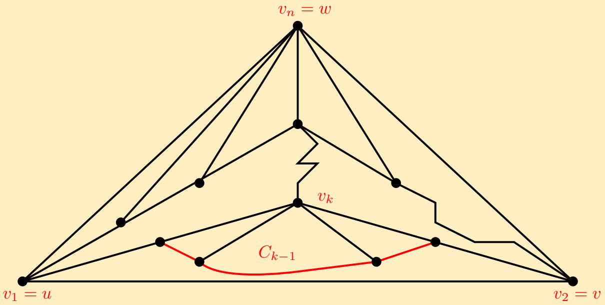
**Lema 2**

Fie $G$ un graf maximal planar cu $n \geqslant 4$ noduri şi $G'$ o reprezentare planară a lui $G$ având faţa exterioară triunghiul $u, v, w$. Atunci, există o etichetare $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a nodurilor lui $G'$ astfel încât $v_1 = u$, $v_2 = v$, $v_n = w$ şi, pentru fiecare $k \in \{4, \ldots, n\}$, avem:

(i) Subgraful indus $G'_{k-1} = [\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}]_G$ este 2-conex şi faţa sa exterioară este determinată de circuitul $C'_{k-1}$ conţinând $uv$.

(ii) În subgraful indus $G'_k$ nodul $v_k$ este în faţa exterioară a lui $G'_{k-1}$ şi $N_{G'_k}(v_k) \cap \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ este un drum de lungime $\geqslant 1$ pe circuitul $C'_{k-1} - uv$.

**Demonstraţie.** Fie $v_1 = u$, $v_2 = v$, $v_n = w$, $G'_n = G$, $G'_{n-1} = G - v_n$.




**Demonstraţie (continuare).** Observăm că $N_{G'_n}(w)$ este un circuit conţinând $uv$ (după o sortare a lui $N_{G'_n}(w)$ pe coordonata $x$ şi folosind planaritatea maximală). Urmează că i) şi ii) au loc pentru $k = n$.

Dacă $v_k$ a fost deja ales ($k \leqslant n$) atunci în $G'_{k-1} = G' - \{v_n, \ldots, v_k\}$, vecinii lui $v_k$ determină un circuit $C'_{k-1}$ conţinând $uv$ şi formând frontiera feţei exterioare a lui $G'_{k-1}$.

**Demonstraţie (continuare).** Din Lema 1, există $v_{k-1}$ pe $C'_{k-1}$ astfel încât $v_{k-1}$ nu este extremitatea vreunei corzi interioare a lui $C'_{k-1}$. Prin construcţie, $v_{k-1}$ nu este incident cu vreo coardă externă a lui $C'_{k-1}$ (din planaritatea maximală). Urmează că $G'_{k-2}$ conţine un circuit $C'_{k-2}$ cu proprietăţile (i) şi (ii). $\square$

**Demonstraţia Teoremei (Fraysseix, Pach, Pollack).** Fie $G$ un graf maximal planar cu $n$ noduri, $G'$ o reprezentare planară cu nodurile etichetate $v_1, \ldots, v_n$ ca în Lema 2, şi $u, v, w$ faţa sa exterioară.

Vom construi o reprezentare Fary a lui $G$ având nodurile puncte de coordonate întregi.

Presupunem că în pasul $k$ ($\geqslant 3$) al construcţiei avem o astfel de reprezentare a lui $G_k$ şi sunt îndeplinite următoarele trei condiţii:

**Demonstraţie (continuare).**

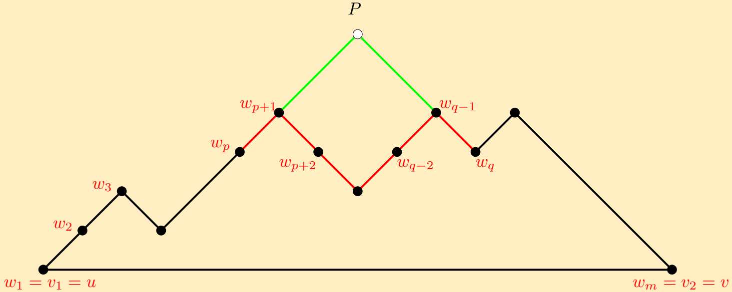
(1) $v_1$ are coordonatele $(0, 0)$; $v_2$ are coordonatele $(i, 0)$, $i \leqslant 2k - 4$.

(2) Dacă $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sunt nodurile circuitului care corespunde feţei exterioare a lui $G_k$, într-o parcurgere de la $v_1$ la $v_2$ ($w_1 = v_1$, $w_m = v_2$), atunci
$$x_{w_1} < x_{w_2} < \ldots < x_{w_m}.$$

(3) Muchiile $w_1w_2, w_2w_3, \ldots, w_{m-1}w_m$ sunt segmente de dreaptă paralele cu una dintre cele două bisectoare ale axelor de coordonate.

Condiţia (3) implică faptul că $\forall i < j$, paralela prin $w_i$ la prima bisectoare intersectează paralela prin $w_j$ la cea de-a doua bisectoare într-un un punct de coordonate întregi ($w_i$ şi $w_j$ au coordonate întregi).

**Construcţia lui $G'_{k+1}$.** Fie $w_p, w_{p+1}, \ldots, w_q$ vecinii din $G'_k$ ai lui $v_{k+1}$ în $G'_{k+1}$ $(1 \leqslant p < q \leqslant m)$.




**Demonstraţie (continuare)** Paralela prin $w_p$ la prima bisectoare intersectează paralela prin $w_q$ la cea de-a doua bisectoare în punctul $P$. Dacă din $P$ putem trasa segmentele $Pw_i$, $p \leqslant i \leqslant q$ astfel încât toare sunt distincte, atunci putem lua $v_{k+1} = P$ pentru a obţine o reprezentarea Fary a lui $G_{k+1}$ cu toate noduri de coordonate întregi, satisfăcând condiţiile (1) - (3).

Dacă segmentul $w_p w_{p+1}$ este paralel cu prima bisectoare, atunci translatăm către dreapta cu 1 toate nodurile lui $G_k$ care au $x \geqslant x_{w_{p+1}}$. Facem o altă translaţie la dreapta cu 1 a tuturor nodurilor lui $G_k$ având coordonata $x \geqslant x_{w_q}$.

Acum, toate segmentele $P' w_i$, cu $p \leqslant i \leqslant q$, sunt distincte, segmentele $w_i w_{i+1}$ cu $i = \overline{q, m-1}$ au pantele $\pm 1$ şi de asemenea $w_p P'$ şi $P' w_q$ au pantele $\pm 1$ (unde $P'$ este intersecţia paralelei la prima bisectoare prin $w_p$ cu paralela la cea de-a doua bisectoare prin $w_q$).

Luăm $v_{k+1} = P'$ şi pasul $k$ al construcţiei este terminat. $\square$

Algoritmul poate fi implementat în $\mathcal{O}(n \log n)$.

**Teoremă**

**(Tarjan & Lipton, 1979)** *Fie $G$ un graf planar cu $n$ noduri. Există o partiţie $(A, B, S)$ a lui $V(G)$ astfel încât:*

- *$S$ separă $A$ de $B$ în $G$: $G - S$ nu conţine muchii de la $A$ la $B$,*
- $|A| \leqslant (2/3)n$, $|B| \leqslant (2/3)n$,
- $|S| \leqslant 4\sqrt{n}$.

*Această partiţie poate fi găsită în $\mathcal{O}(n)$.*



**Ideea demonstraţiei.** Fie $G$ un graf conex plan. Executăm o parcurgere **bfs** dintr-un nod oarecare $s$, etichetând fiecare nod $v$ cu nivelul corespunzător din arborele bfs obţinut. Fie $L(t)$, mulţimea tuturor nodurilor de pe nivelul $t$, pentru $0 \leqslant t \leqslant l + 1$. Ultimul nivel $L(l + 1)$ este - din raţiuni tehnice - vid (ultimul nivel este în fapt $l$).

**Demonstraţie (continuare).** Fiecare nivel intern este un separator în $G$ (avem muchii doar între nivele consecutive). Fie $t_1$ nivelul de mijloc, adică nivelul care conţine cel de-al $\lfloor n/2 \rfloor$-lea nod întâlnit în timpul parcurgerii. Mulţimea $L(t_1)$ satisface:

$$\left| \bigcup_{t<t_1} L(T) \right| < \frac{n}{2} \text{ şi } \left| \bigcup_{t>t_1} L(T) \right| < \frac{n}{2}.$$

Dacă $|L(t_1)| \leqslant 4\sqrt{n}$, teorema este demonstrată.



**Lemă**

*Există nivelele $t_0 \leqslant t_1$ şi $t_2 \geqslant t_1$ astfel încât $|L(t_0)| \leqslant \sqrt{n}$, $|L(t_2)| \leqslant \sqrt{n}$ şi $t_2 - t_0 \leqslant \sqrt{n}$ .*

**Demonstraţie.** Considerăm $t_0$ cel mai mare întreg care satisface $t \leqslant t_1$ şi $|L(t)| \leqslant \sqrt{n}$ (există un astfel de nivel deoarece $|L(0)| = 1$). Există $t_2$ un cel mai mic întreg care satisface $t > t_1$ şi $|L(t_2)| \leqslant \sqrt{n}$ (se observă că $|L(l+1)| = 0$).
Orice nivel dintre $t_0$ şi $t_2$ are mai mult de $\sqrt{n}$ noduri, deci numărul acestor nivele nu poate depăşi $\sqrt{n}$ (altfel, numărul de noduri ar fi $> n$).
□

**Demonstraţie (continuare la Teorema separatorilor).** Fie

$$C = \bigcup_{t<t_0} L(t), D = \bigcup_{t_0<t<t_2} L(t), E = \bigcup_{t>t_2} L(t).$$

- $|D| \leqslant (2/3)n$. Teorema are loc cu $S = L(t_0) \cup L(t_2)$, $A$ mulţimea de cardinal maxim dintre $C$, $D$ şi $E$, iar $B$ reuniunea celor două mulţimi rămase ($C$ şi $E$ au cel mult $n/2$ elemente).

**Demonstraţie (continuare la Teorema separatorilor).**

- $n_1 = |D| > (2/3)n$. Dacă putem găsi un separator de tipul $1/3 \leftrightarrow 2/3$ pentru $D$ cu cel mult $2\sqrt{n}$ noduri, atunci îl adăugăm la $L(t_0) \cup L(t_2)$ pentru a obţine un separator de cardinal cel mult $4\sqrt{n}$, pentru $A$ luăm reuniunea mulţimii de cardinal maxim dintre $C$ şi $E$ cu partea mai mică rămasă din $D$, şi pentru $B$ luăm reuniunea celor două mulţimi rămase.

Separatorul pentru (graful indus de) $D$ poate fi construit astfel: ştergem toate nodurile lui $G$ care nu sunt din $D$ mai puţin $s$ care este unit cu toate nodurile de pe nivelul $t_0 + 1$. Graful obţinut se notează cu $D$ şi este planar şi conex. Are un arbore parţial de diametru cel mult $2\sqrt{n}$ (orice nod este accesibil din $s$ pe un drum de lungime cel mult $\sqrt{n}$, după cum am demonstrat în Lema de mai sus). Acest arbore este parcurs dfs pentru a obţine separatorul dorit. Detaliile (foarte interesante) sunt omise. $\square$

Considerăm problema de a decide dacă un graf planar dat are o 3-colorare (a nodurilor), care este o problemă **NP**-completă.

În cazul unui un graf $G$ cu număr mic de noduri (pentru o constant $c$, putem verifica toate cele $\mathcal{O}(3^c) = \mathcal{O}(1)$ funcţii de la $V(G)$ la $\{1, 2, 3\}$) putem decide dacă există o 3-colorare.

Pentru grafuri planare cu $n > c$ noduri construim în timp liniar, $\mathcal{O}(n)$, partiţia $(A, B, C)$ a nodurilor sale, cu $|A|, |B| \leqslant (2n/3)$ şi $|C| \leqslant \sqrt{n}$.

Se testează fiecare $3^{|C|} = 2^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}$ funcţie posibilă de la $C$ la $\{1, 2, 3\}$ dacă este o 3-colorare a subgrafului indus de $C$ şi dacă această colorare poate fi extinsă la o 3-colorare a subgrafului indus de $A \cup C$ în $G$ şi de asemeni la o 3-colorare a subgrafului indus de $B \cup C$ în $G$ (recursiv).

Timpul de execuţie, $T(n)$, al acestui algoritm, satisface recursia

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(1), & \text{dacă } n \leqslant c, \\ \mathcal{O}(n) + 2^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}\left(\mathcal{O}(\sqrt{n}) + 2T(2n/3)\right), & \text{dacă } n > c. \end{cases}$$

Urmează că $T(n) = 2^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}$ (este posibil ca acele constante din spatele notaţiei $\mathcal{O}(\cdot)$ să fie foarte mari).