Algoritmica grafurilor - Cursul 2

11 octombrie 2019

Cuprins

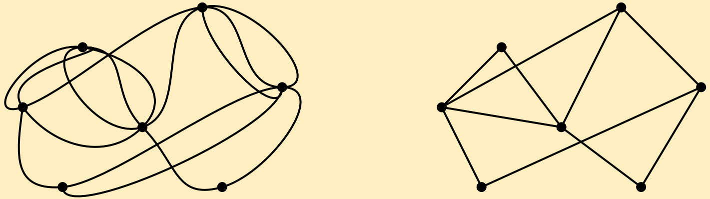
Multigraf: $G = (V, E)$, unde V este o mulţime nevidă (de noduri), şi E este un multiset (de muchii) pe V, i. e., există o funcţie $m : \binom{V}{2} \rightarrow \mathbb{N}$.

$e \in \binom{V}{2}$, cu $m(e) > 0$ este o muchie a multigrafului G; dacă $m(e) = 1$, atunci e este o muchie simplă, altfel este o muchie multiplă cu multiplicitatea $m(e)$.

Graful suport al unui graf, G, este graful obţinut din G prin înlocuirea fiecărei muchii multiple printr-una simplă.

Exemplu

Un multigraf şi graful său suport:



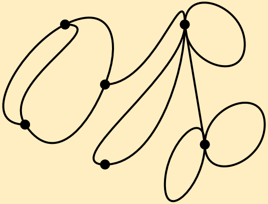
Pseudograf (**graf general**): $G = (V, E)$, unde V este o mulţime (de noduri), şi E este un multiset (de muchii) peste $V \cup \binom{V}{2}$, i. e., există o funcţie $m : V \cup \begin{pmatrix} V \\ 2 \end{pmatrix} \to \mathbb{N}$.

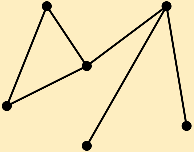
$e \in E \cap V$ (i. e., $|e| = 1$) este numită buclă.

Graful suport al unui pseudograf G este graful obţinut din G prin înlocuirea fiecărei muchii multiple printr-una simplă şi prin ştergerea buclelor.

Exemplu

Un pseudograf şi graful său suport:





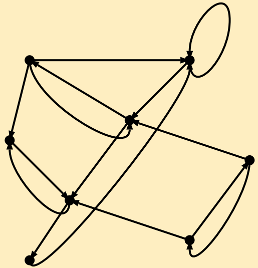
Digraf: $D = (V(D), E(D))$, unde $V(D)$ este o mulţime (de noduri), şi $E(D) \subseteq V(D) \times V(D)$ este o mulţime de arce (sau muchii orientate).

Dacă $e \in E$ atunci $e = (u, v)$ (sau simplu $e = uv$) este un arc orientat de la u către v şi spunem că:

- u este extremitatea iniţială of e, v este extremitatea finală ale lui e;
- u şi v sunt adiacente;
- e este incident din u şi către v;
- v este a sucesor al lui u şi u este a predecesor al lui v etc.

Exemplu

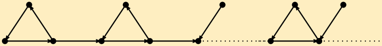
Un digraf:



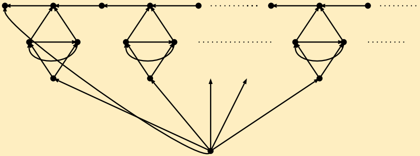
- Pereche simetrică de arce: (uv, vu). uv este numit inversul lui vu.
- Inversul unui digraf D: se înlocuieşte fiecare arc din D cu inversul său.
- Graful suport al unui digraf D, $M(D)$, se înlocuieşte fiecare arc din D cu mulţimea corespunzătoare de două noduri. $M(D)$ este un multigraf.
- Dacă $M(D)$ este un graf (simplu), atunci D este numit graf orientat.
- Digraf complet simetric: orice două noduri (distincte) sunt unite printr-o pereche simetrică de arce.
- Turneu: un graf orientat complet (orice două noduri (distincte) sunt unite exact printr-un arc).

(Di)grafuri infinite: mulţimea nodurilor şi/sau mulţimea muchiilor (arcelor) este numărabil infinită.

Un graf infinit este local finit dacă $N(v)$ este o mulţime finită, pentru orice nod v.



The Danaids barrel

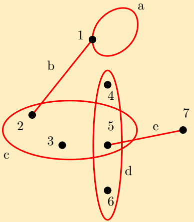


The sisyphus graph

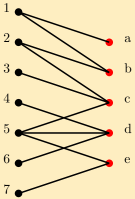
Hipergrafuri (Sisteme de mulţimi finite)

- Muchiile, numite acum hipermuchii, nu mai sunt restricţionate să fie submulţimi cu două elemente ale mulţimii de noduri. O hipermuchie este submulţime a mulţimii de noduri.
- Hipergrafuri k-uniforme: fiecare muchie are cardinalul k.

Fiecare hypergraf poate fi representat ca un graf bipartit:



Hypergraph H



Bipartite graph associated with H

Fie $G = (V, E)$ un graf şi $v \in V$.

- Gradul unui nod v: $d_G(v) =$ numărul de muchii incidente cu v.
- v este un nod izolat dacă $d_G(v) = 0$ şi pendant (sau frunză) dacă $d_G(v) = 1$.

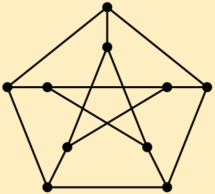
$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

- Gradul maxim $\Delta(G)$ şi gradul minim $\delta(G)$:

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v), \ \ \delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v).$$

- Dacă $\Delta(G) = \delta(G) = k$, atunci G este k-regulat.
- Graf nul: un graf 0-regulat .

Un graf 3-regulat (cubic): graful lui Petersen



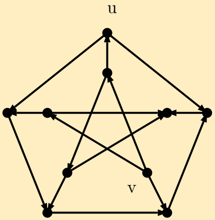
Fie $G = (V, E)$ un digraf şi $v \in V$.

- Gradul interior al unui nod v: $d_G^-(v) =$ numărul de arce incidente spre v.
- Gradul exterior al unui nod v: $d_G^+(v) =$ numărul de arce incidente din v.

$$\sum_{v \in V} d_G^+(v) = \sum_{v \in V} d_G^-(v) = |E|.$$

Exemplu

$d_G^+(u) = 2$, $d_G^-(u) = 1$; $d_G^+(v) = 3$, $d_G^-(v) = 0$

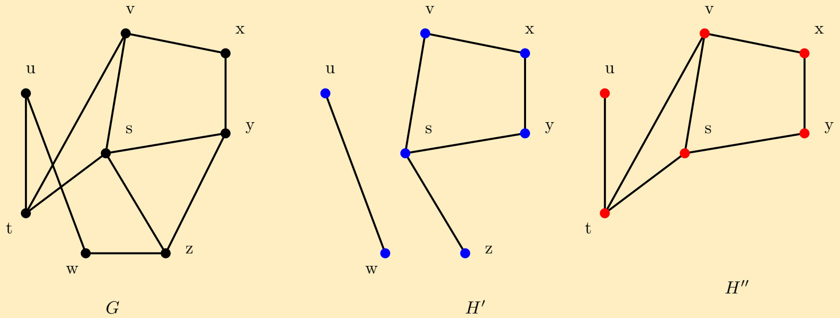


Fie $G = (V(G), E(G))$ un graf.

- Subgraf al lui G: un graf $H = (V(H), E(H))$ aşa încât $V(H) \subseteq V(G)$ şi $E(H) \subseteq E(G)$.
- Graf parţial al lui G: un subgraf H al lui G astfel ca $V(H) = V(G)$.
- Subgraf generat de $B \subseteq E(G)$ în G: un subgraf al lui G, $H = (V(H), E(H))$, astfel că $E(H) = B$ şi $V(H) = \cup_{uv \in B}\{u, v\}$. Se notează prin by $\langle B \rangle_G$.
- Subgraf indus: un subgraf H al lui G aşa încât $E(H) = \binom{V(H)}{2} \cap E(G)$. Dacă $A \subseteq V(G)$, subgraful indus de A în G este notat cu $[A]_G$ sau $G[A]$.

Exemplu

Un graf G, un subgraf H' al lui G, şi un subgraf indus al lui G: $H'' = G[\{u, v, x, y, s, t\}]$.

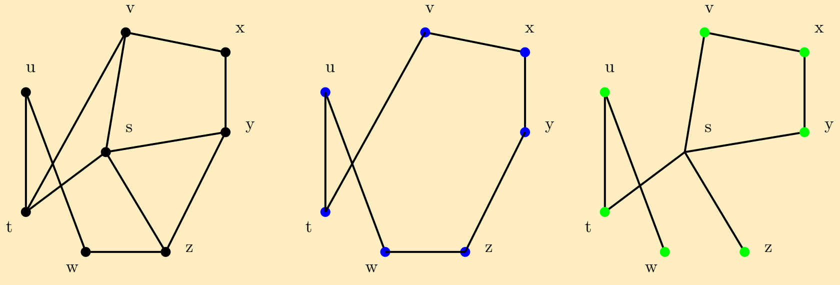


Fie $G = (V(G), E(G))$ un graf.

- Dacă $A \subseteq V(G)$, atunci subgraful $[V(G) \setminus A]_G$, notat prin $G - A$, este subgraful obţinut din G prin ştergerea nodurilor lui A. $G - \{u\}$ este numit subgraf de ştergere şi se notează, simplu cu $G - u$.
- Dacă $B \subseteq E(G)$, atunci subgraful $\langle E(G) \setminus B \rangle_G$, notat prin $G - B$, este subgraful obţinut din G prin ştergerea tuturor muchiilor lui B. $G - \{e\}$ se notează $G - e$.
- Definiţiii şi notaţii similare pentru digrafuri, multigrafuri etc.

Exemplu

Un graf G, $G - s$, şi $G - \{vt, wz, zy\}$.

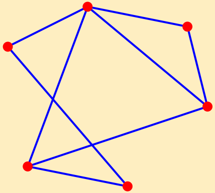


G $\quad$ $G - s$ $\quad$ $G - \{vt, wz, zy\}$

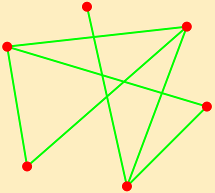
Operaţie unară: $G = (V(G), E(G))$

- **Complementul** unui graf G: un graf $\overline{G}$, cu $V(\overline{G}) = V(G)$ şi

$$E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G).$$



G

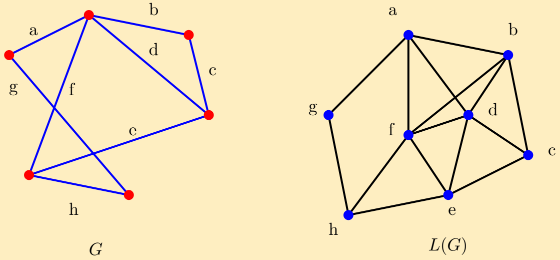


$\overline{G}$

Operaţie unară: $G = (V(G), E(G))$

- **Graful reprezentativ al muchiilor** (**line-graful**) lui G: un graf $L(G)$, cu $V(L(G)) = E(G)$ şi

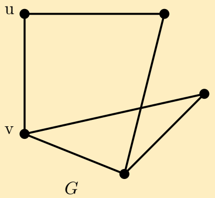
$$E(L(G)) = \{ef \ : \ e, f \in E(G), e \text{ şi } f \text{ sunt adiacente în } G\}.$$

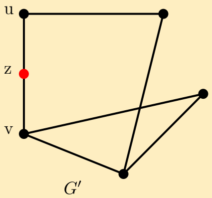


Operaţie unară: $G = (V(G), E(G))$

- **Graful obţinut din G prin inserarea unui nod nou (z) pe o muchie** ($e = uv$): graful G', cu $V(G') = V(G) \cup \{z\}$ şi

$$E(G') = E(G) \setminus \{uv\} \cup \{uz, zv\}.$$



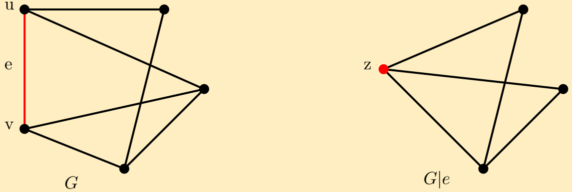


Operaţie unară: $G = (V(G), E(G))$

- **Graful obţinut din G prin contracţia unei muchii** $e = uv \in E(G)$: graful $G|e$ cu

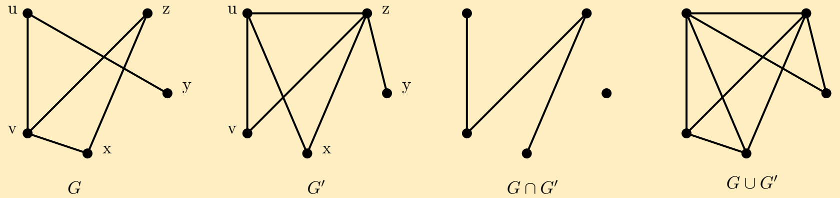
$$V(G|e) = V(G) \setminus \{u, v\} \cup \{z\},$$

$$E(G|e) = E([V(G) \setminus \{u, v\}]_G) \cup \{yz \ : \ yu \text{ sau } yv \in E(G)\}.$$



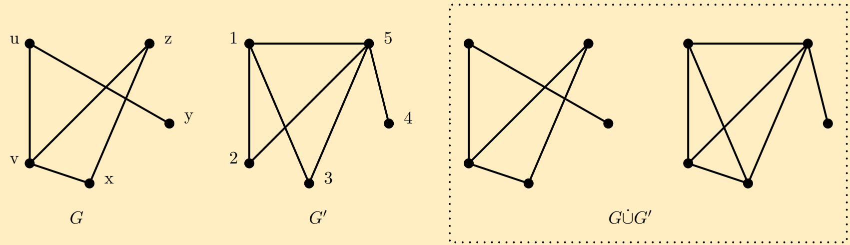
Operaţii binare: G, G' cu $V(G) = V(G')$

- **Intersecţia** $G \cap G' = (V(G), E(G) \cap E(G'))$.
- **Reuniunea** $G \cup G' = (V(G), E(G) \cup E(G'))$.



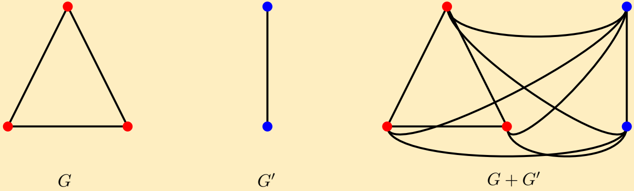
Operaţie binară: G, G' cu $V(G) \cap V(G') = \varnothing$

- **Reuniunea disjunctă** $G \dot\cup G' = (V(G) \cup V(G'), E(G) \cup E(G'))$.



Operaţie binară: G, G' cu $V(G) \cap V(G') = \varnothing$

- **Suma directă (join)** $G + G' = \overline{\overline{G} \dot{\cup} \overline{G'}}$.

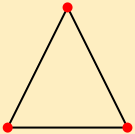


Operaţie binară: G, G' cu $V(G) \cap V(G') = \varnothing$

- **Produsul cartezian** al grafurilor G şi G': graful $G \times G'$ cu

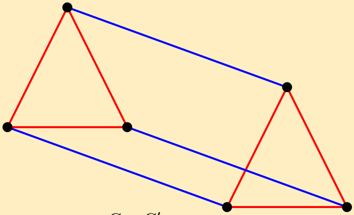
$$V(G \times G') = V(G) \times V(G').$$

$$E(G \times G') = \{(u, u')(v, v') \ : \ u, v \in V(G), u', v' \in V(G'),$$
$$u = v \text{ şi } u'v' \in E(G') \text{ sau } u' = v' \text{ şi } uv \in E(G)\}.$$



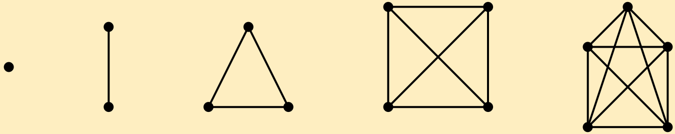
G

G'



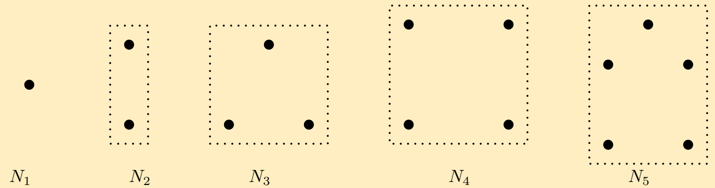
$G \times G'$

Graful complet de ordin n, K_n: $|V(K_n)| = n$ şi $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$.

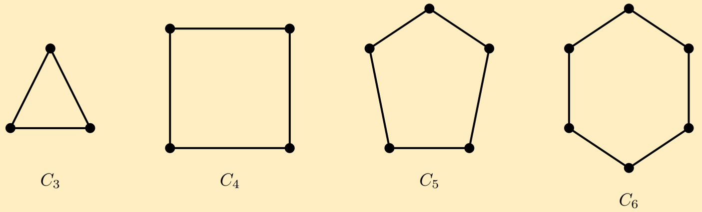


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Graful nul de ordin n, N_n: $|V(K_n)| = n$ şi $E(K_n) = \varnothing$.

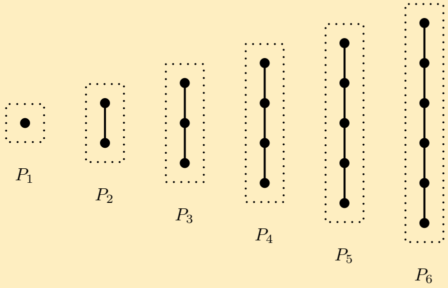


Circuitul de ordin n, C_n: $V(C_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $E(C_n) = \{12, 23, \ldots, n-1n, n1\}$.



Clase de grafuri - Drumurile P_n

Drumul de ordin n, P_n: $V(P_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $E(P_n) = \{12, 23, \ldots, n-1n\}$.

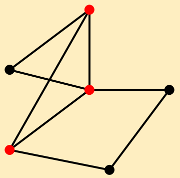


O submulţime de k noduri a graf G care induce un graf complet este numită o **k-clică**.

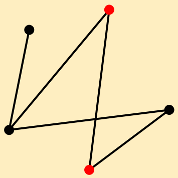
$$\textbf{numărul de clică al lui} G : \omega(G) = \max_{Q \text{ clică în } G} |Q|.$$

Remarcăm că $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

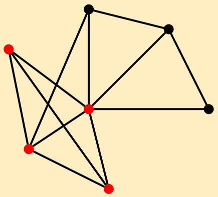
Exemplu



$\omega(G) = 3$



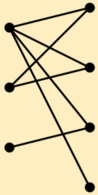
$\omega(G) = 2$



$\omega(G) = 4$

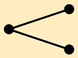
Graf bipartit: un graf G cu proprietatea că $V(G)$ poate fi partiţionat în două clase care sunt mulţimi stabile.
Dacă $V(G) = S \cup T$, $S \cap T = \varnothing$, $S, T \neq \varnothing$, cu S şi T mulţimi stabile în G, atunci G este notat $G = (S, T; E(G))$.
Graf bipartit complet: $G = (S, T; E(G))$, cu $uv \in E(G)$, $\forall u \in S$ şi $\forall v \in T$; se notează cu $K_{s,t}$, unde $s = |S|$, $t = |T|$.

Exemplu

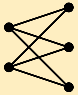


A bipartite graph

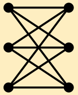
$K_{1,1}$



$K_{1,2}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

Graf planar: un graf care poate fi reprezentat într-un plan astfel ca fiecărui nod să îi corespundă un punct al acelui plan şi fiecărei muchii să îi corespundă o curbă simplă care uneşte punctele corespunzătoare extremităţilor şi aceste curbe se intersectează doar în extremităţile lor. Un graf care nu este planar este numit **graf ne-planar**.

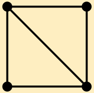
Grafuri planare: **Problemă de decizie**

PLAN	Instanţă:	G graf.
	întrebare:	Este G planar?

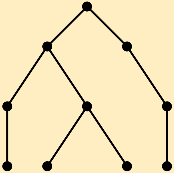
PLAN aparţine clase de complexitate **P** (Hopcroft, Tarjan, 1972, $\mathcal{O}(n+m)$).

Exemplu

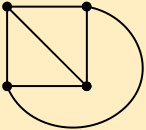
Grafuri planare.



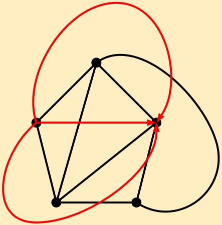
planar graph



planar graph



planar graph



K_5 non-planar graph

Clase de grafuri - Grafuri $\mathcal{F}$-free

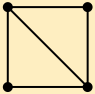
- Aceasta este metoda obişnuită de a defini o clasă de grafuri prin interzicerea unor anumite subgrafuri.
- Dacă $\mathcal{F}$ este o mulţime de grafuri atunci un graf G este **$\mathcal{F}$-free** dacă G nu conţine niciun subgraf indus isomorf cu vreun graf din $\mathcal{F}$.
- Dacă $\mathcal{F}$ este un singleton, $\mathcal{F} = \{H\}$, atunci scriem simplu H-free.

Exemplu

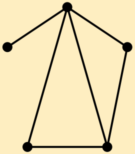
- clasa grafurilor nule este exact clasa grafurilor K_2-free.
- Un graf P_3-free este o reuniune disjunctă de grafuri complete.
- **Grafuri triangulate** (**cordale**): grafurile $(C_k)_{k \geqslant 4}$-free.

Exemplu

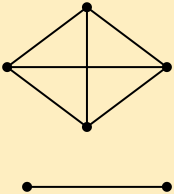
Grafuri $\mathcal{F}$-free.



a $2K_2$-free graph



a C_4-free graph



a P_3-free graph

Fie $G = (V, E)$ un graf.

- Un **mers de lungime r de la u până la v în G**: o secvenţă de noduri şi muchii de forma

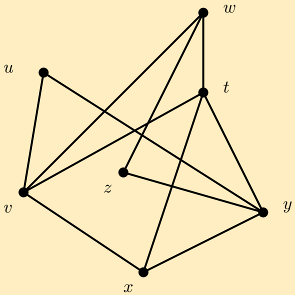
$$(u =)v_0, v_0v_1, v_1, \ldots, v_{r-1}, v_{r-1}v_r, v_r(= v).$$

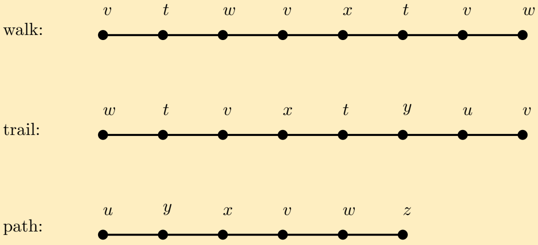
  u şi v sunt extremităţile mersului.

- **Parcurs**: un mers cu muchii distincte.
- **Drum**: un mers cu noduri distincte.
  Un nod este un mers (parcurs, drum) de lungime 0.

Exemplu

Mersuri, parcursuri, drumuri.



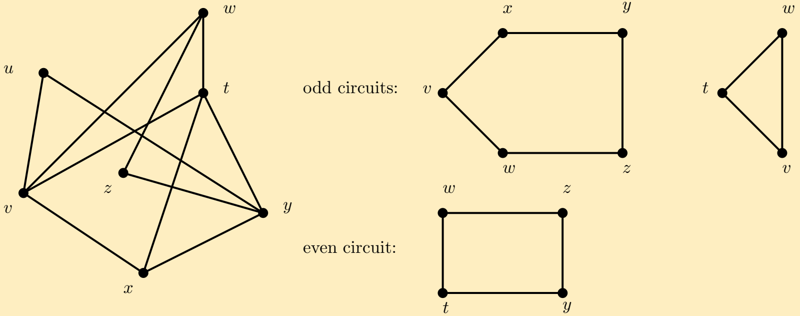


Fie $G = (V, E)$ un graf.

- **Mers închis**: un mers de la u la u.
- **Circuit** (**drum închis**): un mers cu noduri care sunt distincte cu excepţia extremităţilor care coincid.
- Un circuit este par sau impar în funcţie de paritatea lungimii sale.
- Lungimea celui mai scurt circuit (dacă există) este graţia, $g(G)$, lui G.
- Lungimea celui mai lung circuit este circumferinţa, $c(G)$, lui G.

Exemplu

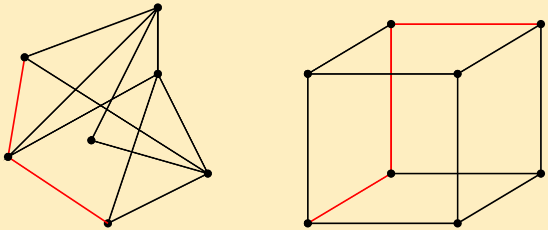
Mersuri închise, circuite.



Fie $G = (V, E)$ un graf.

- **Distanţa în G de la u la v, $d_G(u, v)$** lungimea celui mai scurt drum în G de la u la v (dacă există un astfel de drum).
- **Diametrul unui graf G, $d(G)$**:

$$d(G) = \max_{u,v \in V} d_G(u, v).$$



$d(G) = 2$ $d(G) = 3$

Fie $D = (V, E)$ un digraf.

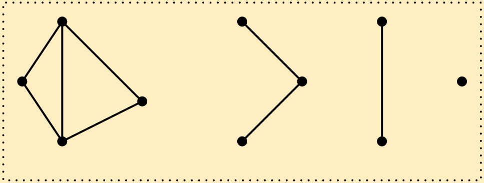
Toate definiţiile de mai sus se păstrează considerând **arce** (**muchii orientate**) în locul muchiilor.

Fie $G = (V, E)$ un graf.

- **Graf conex**: există câte un drum între orice două noduri ale grafului. Altfel graful este **neconex**.
- **Componentă conexă** a unui graf G: un subgraf maximal conex, H, of G (i. e., nu există vreun subgraf conex H' of G, $H' \neq H$, iar H este subgraf al lui H').
- Orice graf poate fi scris ca o reuniune disjunctă a componentelor sale conexe.
- Următoarea relaţie binară este o relaţie de echivalenţă: $\rho \subseteq V \times V$, dată prin $u \rho v$ (i. e., $(u, v) \in \rho$) dacă există un drum în G între u şi v.
- Componentele conexe ale lui G sunt subgrafurile induse de clasele de echivalenţă ale relaţiei ρ.

Drumuri şi circuite - Conexiune

Exemplu

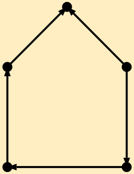


four connected components

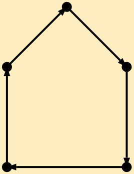
Fie $D = (V, E)$ un digraf.

- **Digraf slab conex** (sau simplu, **conex**) graful său suport $G(D)$ este conex.
- **Digraf unilateral conex**: există un drum de la u la v sau de la v la u, pentru orice două noduri $u, v \in V$.
- **Digraf tare conex**: există un drum de la u la v, pentru orice două noduri $u, v \in V$.

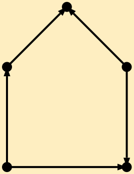
Exemplu



unilaterally connected



strongly connected

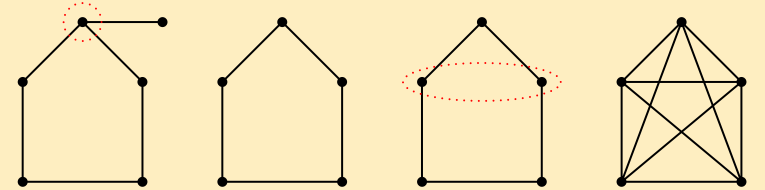


weakly connected

Fie $G = (V, E)$ un graf conex.

- **Punct de articulaţie (cut-vertex)**: un nod $v \in V$ astfel că $G - v$ este neconex.
- **Mulţime de articulaţie (vertex cutset)**: o mulţime of noduri $S \subseteq V$ aşa încât $G - S$ este neconex.
- Un **arbore** este un graf conex fără circuite.
- Un graf ale cărui componente conexe sunt arbori este o **pădure**.

Exemplu

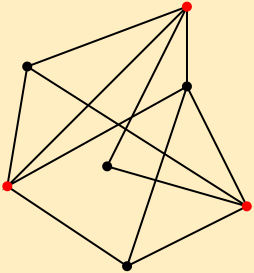


Fie $G = (V, E)$ un graf.

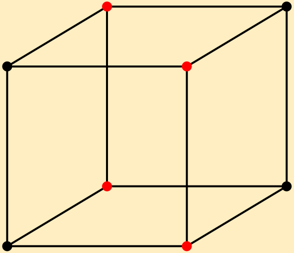
- Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, G este **graf p-conex** dacă
  - $|V| = p$ şi $G = K_p$ sau
  - $|V| \geqslant p + 1$ şi G nu are mulţime de articulaţie de cardinal $< p$ (G nu poate fi deconectat prin ştergerea a mai puţin de p noduri).
- Evident, G este 1-conex dacă şi numai dacă este conex.
- **Numărul de conexiune pe noduri**, $k(G)$, al unui graf G este

$$k(G) = \max\{p \in \mathbb{N}^* \; : \; G \text{ este } p - \text{conex}\}.$$

Exemplu



$k(G) = 3$



$k(G) = 4$

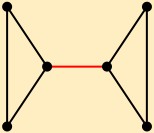
Fie $G = (V, E)$ un graf conex.

- **Punte** (**bridge**): o muchie $e \in E$ astfel că $G - e$ nu este conex.
- **Mulţime de muchii de articulaţie (tăietură sau edge-cutset)**: O submulţime de muchii $S \subseteq E$ aşa încât $G - S$ este neconex.
- Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, G este **graf p-muchie-conex** dacă G nu are o mulţime de muchii de articulaţie de cardinal $< p$ (G nu poate fi deconectat prin ştergerea a mai puţin de p muchii).
- **Numărul de conexiune pe muchii**, $\lambda(G)$, al unui graf G este

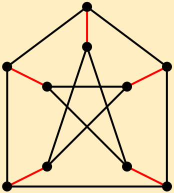
$$\lambda(G) = \max\{p \in \mathbb{N}^* \ : \ G \text{ este } p - \text{muchie-conex}\}.$$

Drumuri şi circuite - Conexiune

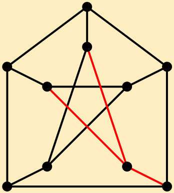
Exemplu



a cut edge



an edge-cutset

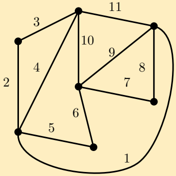


$\lambda(G) = 3$

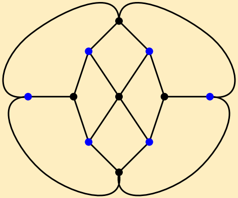
Fie G un (di)graf.

- G este **Eulerian** dacă există un parcurs închis în G care trece prin fiecare muchie a lui G.
- G este **Hamiltonian** dacă există un circuit în G care trece prin fiecare nod al lui G.

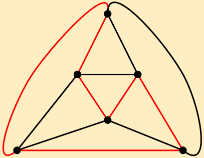
Recunoaşterea (di)grafurilor Euleriene se face în timp polinomial **(Euler, 1736)**.



an Eulerian graph



a non Hamiltonian graph
(bipartite of odd order)



a Hamiltonian graph

Probleme Hamiltoniene

HAM Instanţă: G un graf.
Întrebare: Este G Hamiltonian?

NP-completă **(Karp, 1972)**.

NH Instanţă: G un graf.
Întrebare: Este G ne-Hamiltonian?

NH $\in$ **NP**?

Exerciţiul 1. Fie G_1 şi G_2 două grafuri. Arătaţi că dacă $G_1 \times G_2$ este conex, atunci G_1 şi G_2 sunt conexe.

Exerciţiul 2.

Fie $P(n) =$" În orice graf cu cel puţin n noduri există noduri distincte care sunt două câte două adiacente sau două câte două neadiacente."
Arătaţi că 6 este cea mai mică valoare a lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care $P(n)$ este adevărată.

Exerciţiul 3.

Fie D un turneu conţinând un circuit C de lungime $n \geqslant 4$. Arătaţi că pentru orice nod u al lui C se poate determina, în timpul $\mathcal{O}(n)$, un circuit de lungime 3 care trece prin u.

Exerciţiul 4.

Fie G un graf conex cu $n \geqslant 2$ noduri şi m muchii. Arătaţi că:

a) Dacă G are exact un circuit, atunci $m = n$.

b) Dacă G nu are frunze, atunci $m \geqslant n$.

c) Dacă G este a arbore, atunci are cel puţin două frunze.

Exerciţiul 5

Fie G un graf cu $n \geqslant 2$ noduri. Arătaţi că:

a) Dacă G este conex, atunci conţine cel puţin un nod care nu este punct de articulaţie.

b) Dacă $n \geqslant 3$, atunci G este conex dacă şi numai dacă conţine două noduri care nu sunt puncte de articulaţie.

Exerciţiul 6

Fie G un graf conex care nu conţine două noduri pendante (frunze) cu un vecin în comun. Arătaţi că există două noduri adiacente prin ştergerea cărora G nu se deconectează.

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 7

Fie G un graf şi H graful său reprezentativ al muchiilor ($H = L(G)$). Arătaţi că H este $K_{1,3}$-free.

Exerciţiul 8

Fie G un graf. Arătaţi că:

a) Dacă G are exact două noduri de grad impar, atunci aceste două noduri sunt unite printr-un drum în G.

b) Dacă G este conex cu toate nodurile de grad par, atunci G are o muchie care nu este punte (ştergerea ei nu deconectează graful).

c) Dacă G este conex cu toate nodurile de grad par, atunci nicio muchie a lui G nu este punte.

Exerciţiul 9

Fie G un graf. Arătaţi că

a) Numărul de noduri de grad impar este par.

b) Dacă G este conex şi are k noduri de grad impar, atunci G este o reuniune $[k/2]$ parcursuri disjuncte pe muchii.

Exerciţiul 10

Fie G un graf astfel ca $N_G(u) \cup N_G(v) = V(G)$, $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$. Arătaţi că G este graf complet.

Exerciţiul 11

Fie G un graf cu proprietatea că $d_G(u)+d_G(v) \geqslant |G|-1, \forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$. Arătaţi că diametrul lui $d(G) \leqslant 2$.

Exerciţiul 12

Fie $G = (V, E)$ un graf cu $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ astfel ca $d_G(v_1) \leqslant d_G(v_2) \leqslant \ldots \leqslant d_G(v_n)$. Arătaţi că G este conex dacă $d_G(v_p) \geqslant p$, pentru orice $p \leqslant n - d_G(v_n) - 1$.

Exerciţiul 13

Fie $G = (V, E)$ un graf şi S o mulţime stabilă a lui G. Demonstraţi că S este stabilă de cardinal maxim dacă şi numai dacă pentru orice mulţime stabilă a lui G, $S' \subseteq V \setminus S$, avem

$$|S'| \leqslant |N_G(S') \cap S|.$$