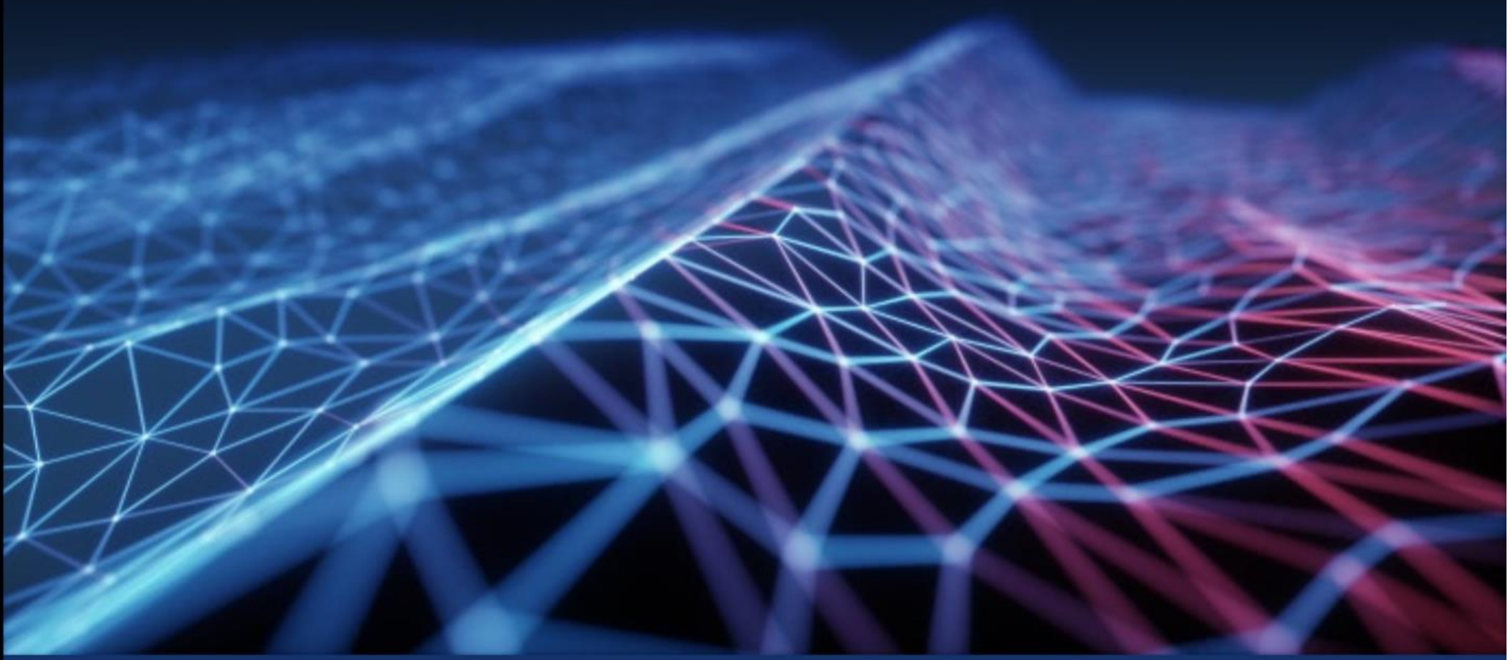
# METODE NUMERIK

## TEORI, KASUS, DAN APLIKASI



Retno Tri Vulandari, S.Si, M.Si

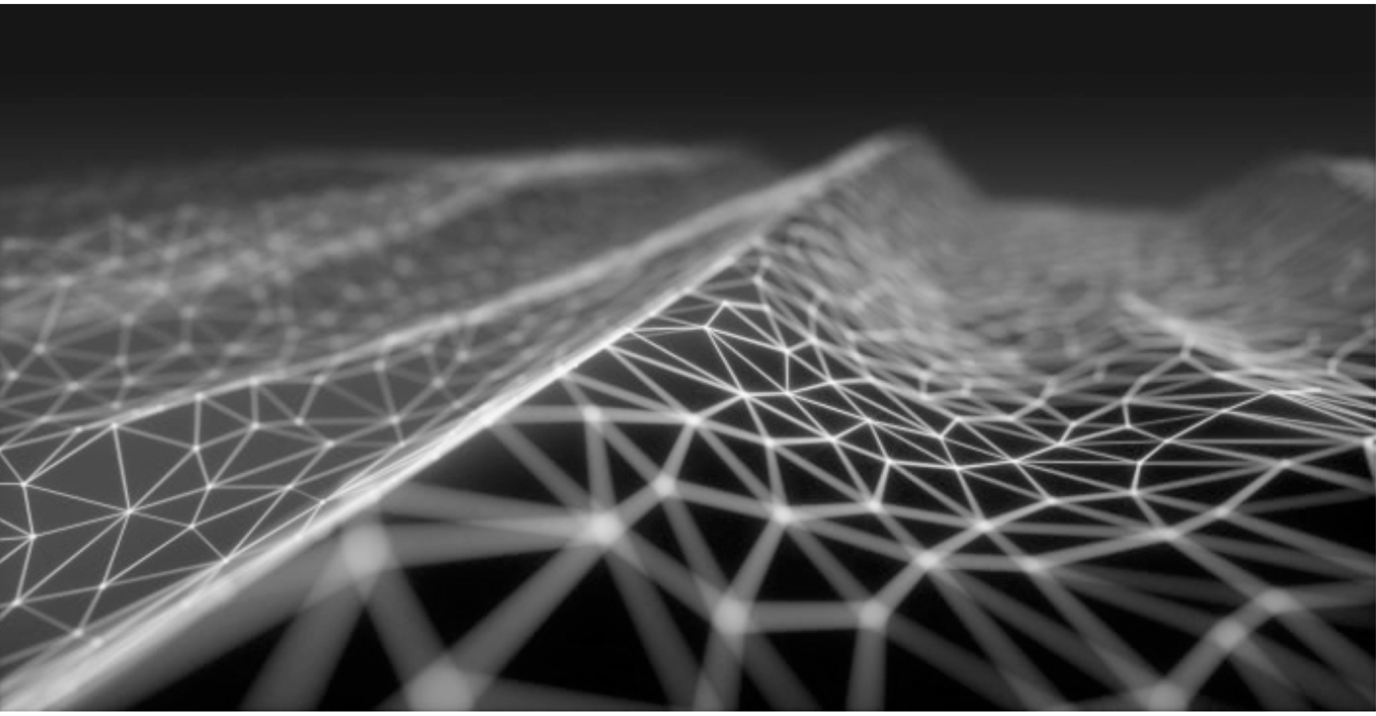
MAVENDRA

METODE NUMERIK - TEORI, KASUS, DAN APLIKASI
Retno Tri Vulandari

# METODE NUMERIK

**TEORI, KASUS, DAN APLIKASI**

**Retno Tri Vulandari, S.Si, M.Si**



MAVENDRA

# METODE NUMERIK
## TEORI, KASUS, DAN APLIKASI

**Penulis:**
Retno Tri Vulandari, S.Si., M.Si.

**Editor:**
Himmatul Mursyidah

**Penyunting:**
Sandha Soemantri

**Desain sampul dan Tata letak:**
Sandha Soemantri

**Diterbitkan oleh:**
Mavendra Pers

**Alamat Redaksi:**
Jalan Sutorejo No. 59, Mulyorejo, Surabaya, Jawa Timur
Telp./Hp. (031) 381 1966 / 0821 4343 1986
e-mail: mavendrapers@gmail.com

Cetakan Pertama, Agustus 2017

Ukuran: 18,2 x 25,7 cm
Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)
jumlah: viii + 87 halaman

**ISBN:** 9 786026 059888

# KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah memberikan rahmatNya sehingga modul kuliah **Metode Numerik** ini dapat terselesaikan dengan baik. Buku ini disusun sebagai media pembelajaran sehingga mahasiswa mampu memahami materi dengan lebih mudah dan dapat dimanfaatkan sebagai penunjang kelancaran pembelajaran. Buku ini terdiri dari 6 bab yang dimaksudkan untuk dua belas pertemuan.

Buku ini berisikan mengenai ringkasan-ringkasan dari mulai materi pengenalan metode numerik secara umum, penyelesaian persamaan non-linier, penyelesaian persamaan linier simultan, interpolasi, integrasi numerik, dan studi kasus mengenai metode numerik di bidang teknik informatika Selain materi, buku ini juga memberikan contoh soal dan soal latihan sebagai bahan latihan sehingga dapat membantu mahasiswa menguasai materi.

Akhir kata penulis mengharapkan koreksi dan saran yang membangun dari semua pihak demi kesempurnaan modul ini. Penulis berharap semoga **Metode Numerik** ini dapat berguna dan bermanfaat bagi para pembaca.

.

Surakarta, 2017

Penulis

# METODE NUMERIK

**TEORI, KASUS, DAN APLIKASI**

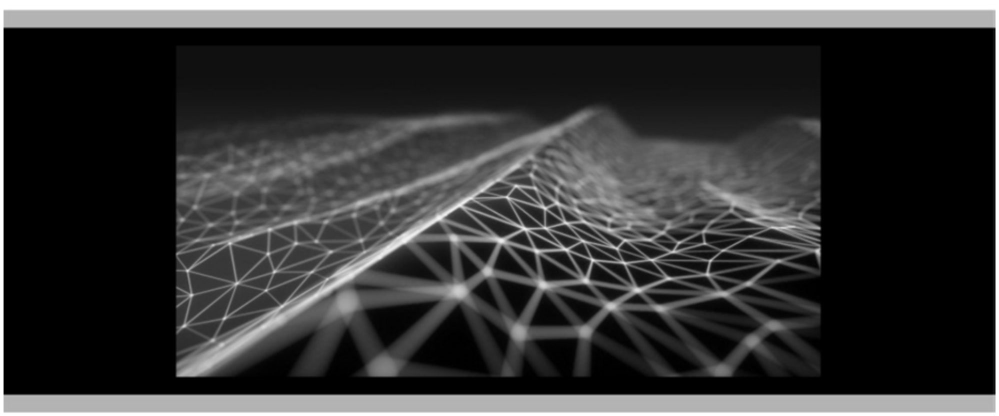
# DAFTAR ISI

## TINJAUAN UMUM

Analisis numerik adalah studi algoritma untuk memecahkan masalah dalam matematika kontinu (sebagaimana dibedakan dengan matematika diskret) Salah satu tulisan matematika terdini adalah tablet Babilonia YBC 7289, yang memberikan hampiran numerik seksagesimal dari $\sqrt{2}$ , panjang diagonal dari persegi satuan. Kemampuan untuk dapat menghitung sisi segitiga (dan berarti mampu menghitung akar kuadrat) sangatlah penting, misalnya, dalam pertukangan kayu dan konstruksi. Analisis numerik melanjutkan tradisi panjang perhitungan praktis matematika ini. Seperti hampiran orang Babilonia terhadap $\sqrt{2}$, analisis numerik modern tidak mencari jawaban eksak, karena jawaban eksak dalam praktiknya tidak mungkin diperoleh. Sebagai gantinya, kebanyakan analisis numerik memperhatikan bagaimana memperoleh pemecahan hampiran, dalam batas galat yang beralasan. Analisis numerik secara alami diterapkan di semua bidang rekayasa dan ilmu-ilmu fisis, namun pada abad ke-21, ilmu-ilmu hayati dan seni mulai mengadopsi unsur-unsur komputasi ilmiah. Persamaan diferensial biasa muncul dalam pergerakan benda langit (planet, bintang dan galaksi. Optimisasi muncul dalam pengelolaan portofolio. Aljabar linear numerik sangat penting dalam psikologi kuantitatif. Persamaan diferensial stokastik dan rantai Markov penting dalam mensimulasikan sel hidup dalam kedokteran dan biologi Sebelum munculnya komputer modern metode numerik kerap kali tergantung pada interpolasi menggunakan pada tabel besar yang dicetak. Sejak pertengahan abad ke-20, sebagai gantinya, komputer menghitung fungsi yang diperlukan. Namun algoritma interpolasi mungkin masih digunakan sebagai bagian dari peranti lunak untuk memecahkan persamaan diferensial.

# BAB 1

## PENGENALAN METODE NUMERIK



# BAB 1
# PENGENALAN METODE NUMERIK

| | |
|---|---|
| Capaian Pembelajaran : | memahami pendekatan penyelesaian masalah numeric |
| Kemampuan Akhir Pembelajaran : | 1. Menyebutkan pendekatan penyelesaian masalah dengan menggunakan grafik maupun metode numerik<br>2. Menjelaskan jenis utama kesalahan numerik, baik pembulatan ataupun pemotongan<br>3. Menjelaskan angka signifikan, kesalahan relatif, dan kesalahan absolut |

## A. LANDASAN TEORI

Metode analitik atau eksak merupakan cara penyelesaian yang memberikan hasil sejati atau sesungguhnya. Metode analitik memiliki galat/eror sama dengan nol.

**Contoh.**

1. $\int_{-1}^{1}\left(4-x^2\right)dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=4-\frac{1}{3}+4-\frac{1}{3}=8-\frac{2}{3}=\frac{22}{3}$

2. $\int_{0}^{1}\left(2x+3x^2\right)dx=\left[x^2+x^3\right]_{0}^{1}=1+1=2$

3. $\int_{-1}^{1}\left(x+x^2\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan aritmatika biasa atau cara berhitung dengan menggunakan angka-angka. Perbedaan metode numerik dan metode analitik adalah sebagai berikut.

- Metode analitik biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik dan dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka**.**
- Metode numerik menghasilkan solusi mendekati solusi sebenarnya sehingga disebut dengan solusi pendekatan tetapi solusi ini dapat diperoleh seteliti yang diharapkan. Solusi pendekatan tidak tepat dengan solusi sebenarnya, sehingga terdapat selisih disebut galat atau eror

Metode numerik adalah teknik-teknik yang digunakan untuk memformulasikan masalah matematis agar mereka dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan. Adapun manfaat mempelajari metode numerik adalah sebagai berikut

- Mampu menangani sistem persamaan besar, ketaklinieran dan geometri yang rumit, yang dalam masalah rekayasa tidak mungkin dipecahkan secara analitis.
- Mengetahui secara singkat dan jelas teori matematika yang mendasari paket program.
- Mampu merancang program sendiri sesuai permasalahan yang dihadapi pada masalah rekayasa.
- Metode numerik cocok untuk menggambarkan ketangguhan dan keterbatasan komputer dalam menangani masalah rekayasa yang tidak dapat ditangani secara analitis.
- Menangani galat (error) suatu nilai hampiran (aproksimasi) dari masalah rekayasa yang merupakan bagian dari paket program yang bersekala besar.
- Menyediakan sarana memperkuat pengertian matematika pembaca. Karena salah satu kegunaannya adalah menyederhanakan matematika yang lebih tinggi menjadi operasi-operasi matematika yang mendasar.

Berikut adalah tahapan pemecahan masalah secara numerik:

1. Pemodelan, Masalah dimodelkan dalam persamaan matematika
2. Penyederhaan model, Model rumit di buat sederhana
3. Formulasi Numerik, Setelah model matematik sederhana diperoleh selanjutnya memformulasi secara numerik
4. Pemrograman, Menerjemahkan algoritma ke program komputer
5. Operasional, Program computer di jalankan dengan data uji coba
6. Evaluasi, Analisis hasil run dibandingkan dengan prinsip dasar dan hasil empiris

**Nilai Signifikan**

Nilai signifikan adalah suatu nilai dimana jumlah angka ditentukan sebagai batas nilai tersebut diterima atau tidak. Sebagai contoh perhatikan nilai pada penggaris. Angka Signifikan (AS) akan memberikan kriteria untuk merinci seberapa keyakinan kita mengenai hasil pendekatan dalam metode numerik. Angka signifikan memberikan pengabaian dari angka signifikan sisa utk besaran-besaran yang spesifik yang tidak bisa dinyatakan secara eksak karena jumlah digit yang terbatas disebut kesalahan pembulatan atau *round-off-error*.

**Akurasi dan Presisi**

Presisi adalah jumlah angka signifikan yang menyatakan suatu besaran. Penyebaran dalam bacaan berulang dari sebuah alat yg mengukur suatu perilaku fisik tertentu. Akurasi adalah dekatnya sebuah angka pendekatan atau pengukuran terhadap harga sebenarnya yang hendak dinyatakan Inakurasi (Tidak akurat). Simpangan sistematis dari kebenaran. Kesalahan mewakili dua hal yaitu tidak akurat dan tidak presisi dari ramalan yang dilakukan. Kesalahan numerik terjadi sehingga diperoleh hasil berupa aproksimasi.

**Kesalahan Pembulatan**

Kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang disebabkan oleh pembulatan, misalnya pembulatan pada komputer yang hanya dapat menyatakan besaran-besaran dalam sejumlah digit berhingga. Kesalahan ini berhubungan dengan angka signifikansi. Pembulatan ke satuan ukuran terdekat. Pembulatan ke banyaknya angka-angka desimal. Angka signifikansi adalah banyaknya angka dengan digit tertentu dan dapat dipakai dalam memberikan/mendekati suatu nilai.

**Contoh**

1. Contoh pembulatan ke satuan ukuran terdekat
   101,12 m = 101,1 m; dibulatkan ke persepuluh meter terdekat.
   15431 $m^2$ = 15430 $m^2$; dibulatkan ke puluhan meter persegi terdekat.
2. Contoh pembulatan ke banyaknya angka-angka desimal
   8,47571 = 8,4757 dibulatkan sampai empat tempat desimal.
   8,47571 = 8,476 dibulatkan sampai tiga tempat desimal.
   8,47571 = 8,48 dibulatkan sampai dua tempat desimal.
   8,47571 = 8,5 dibulatkan sampai satu tempat desimal.
3. Contoh dengan angka signifikan
   30,5 mempunyai 3 angka signifikan.
   0,3011 mempunyai 4 angka signifikan.
4. Misalkan nilai $\pi$ = 3.1415926535 dikalikan dengan 25
   Cara pemenggalan : $\pi$ = 3.141592 dengan
   Error yang didapat : Ea = 0.00000065
   Hasil dari 3.141592 x 25 = 78.5398

Cara pembulatan : $\pi$ = 3.141593 dengan
Error yang didapat : Ea = 0.00000035
Hasil dari 3.141593 x 25 = 78.539825
Sehingga kesalahan totalnya 0.000025

**Kesalahan Pemotongan (error pemotongan)**

Kesalahan Pemotongan adalah Kesalahan yang disebabkan adanya pemotongan pembatasan pada prosedur matematis yang tidak berhingga (*infinite mathemathics*) menjadi berhingga (*finite mathemathics*)

**Contoh.**

Seorang perakit komputer akan merakit komputer dengan tiga merek yaitu merek Gajah, Harimau, Kelinci. Proses pembuatan melalui tiga tahapan pertama seleksi peralatan(periperal), kedua perakitan, dan (ketiga uji coba dan finising). Untuk merek Gajah tahapan seleksi memerlukan waktu 3 jam, waktu perakitan 5 jam, tahap uji coba dan finising memerlukan waktu 5 jam. Untuk merek harimau seleksi peralatan (periperal), memerlukan waktu 4 jam, perakitan memerlukan waktu 4 jam, uji coba dan finising memerlukan waktu 6 jam. Untuk merek Kelinci seleksi peralatan (periperal) memerlukan waktu 3,5 jam, perakitan memerlukan waktu 4 jam, uji coba dan finising memerlukan waktu 7 jam. Bagian seleksi periperal menyediakan 24 jam per orang perhari, bagian perakitan menyediakan 12 jam per orang perhari dan bagian uji coba dan finising menyediakan 12 jam per orang perhari. Berapa banyak hasil rakitan yang diperoleh setiap hari ?.

| | **Seleksi peralatan** | **Perakitan** | **Uji coba** |
|---|---|---|---|
| **Gajah** | 3 jam | 5 jam | 5 jam |
| **Harimau** | 4 jam | 4 jam | 6 jam |
| **Kelinci** | 3,5 jam | 4 jam | 7 jam |
| **Waktu yang tersedia** | 24 jam | 12 jam | 12 jam |

Berapa banyak hasil rakitan yang diperoleh setiap hari ?.

**Penyelesaian**

Definisi masalah :

Jika diasumsikan bahwa

G : menyatakan banyak komputer merk Gajah yang dihasilkan,

H : menyatakan banyak komputer merk Harimau yang dihasilkan

K : menyatakan banyak komputer merk Kelinci yang dihasilkan maka

- Komputer merek Gajah tahapan seleksi memerlukan waktu 3 jam, perakitan 5 jam, uji coba dan finising memerlukan waktu 5 jam.
- Komputer merek harimau seleksi peralatan(periperal) memerlukan waktu 4 jam, perakitan 4 jam, uji coba dan finising memerlukan waktu 6 jam.
- Komputer merek Kelinci seleksi peralatan(periperal) memerlukan waktu 3,5 jam, perakitan 4 jam, uji coba dan finising 7 jam.

- Waktu yang disediakan masing-masing devisi : periperal menyediakan 24 jam per orang perhari, perakitan menyediakan 12 jam per orang perhari, uji coba dan finising menyediakan 12 jam per orang perhari.
- Berapa banyak hasil rakitan yang diperoleh setiap hari ?.

  Dari permasalahan tersebut diperoleh model matematika sebagai berikut.

**Model Matematika**

Permasalahan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk model matematika berikut:

$3G + 4H + 3.5K = 24 \qquad (1)$

$5G + 4H + 4K = 12 \qquad (2)$

$5G + 6H + 7K = 12 \qquad (3)$

persamaan ke (1) menyatakan pemanfaatan total waktu seleksi periperal, (2) total waktu perakitan dan (3) menyatakan total waktu uji coba dan finising. Apabila ditulis dalam bentuk matrik adalah sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3.5 \\ 5 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

diperoleh hasil numeris G = -2.7692, H = 19.3846 dan K = -12.9231

**Implementasi**

Dari hasil numeris yang pada point 3) dapat diartikan (diimplementasikan ke permasalahan semula) bahwa pada hari yang diinginkan tersebut dirakit tiga unit komputer merk Gajah (G = -2.7692 ) tetapi belum selesai (hasilnya negatif). H = 19.3846 menyatakan banyak komputer merk Harimau dapat dirakit 19 unit dan satu unit belum selesai. Sedangkan Komputer komputer merk Kelinci (K = -12.9231) dirakit tiga belas unit komputer tetapi belum selesai semua.

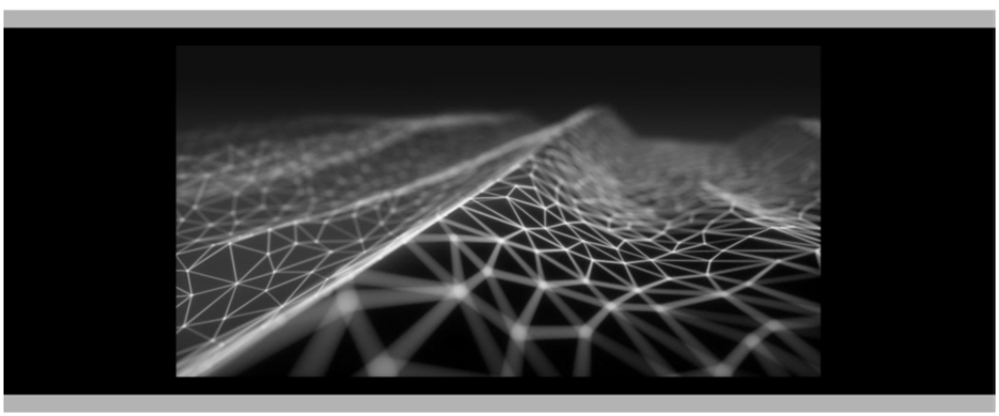
## B. SOAL

**Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar!**

1. Pengukuran jembatan dan pensil memberikan hasil 9999 cm dan 9 cm. Apabila panjang yang benar (eksak) berturut-turut adalah 10.000 cm dan 10 cm, hitung kesalahan absolut dan relatif!
2. Hitung kesalahan yang terjadi dari nilai $e^x$ dengan $x$ = 0,5, apabila hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja. Nilai eksak dari $e^{0,5} = 1,648721271$.
3. Diketahui fungsi $f(x) = 0,25x^3 + 0,5x^2 + 0,25x + 0,5$. Perkiraan turunan pertama (kemiringan kurva) dan turunan kedua dari persamaan tersebut di titik $x$ = 0,5 dengan menggunakan langkah ruang $\Delta x = 0,5$!

# BAB 2

## SOLUSI PERSAMAAN NON LINIER



# BAB 2
# SOLUSI PERSAMAAN NON-LINIER

| | | |
|---|---|---|
| Capaian Pembelajaran : | menjelaskan proses penyelesaian persamaan non-linier | |
| Kemampuan Akhir Pembelajaran : | 1. | menjelaskan apa yang dimaksud dengan solusi persamaan non-linier |
| | 2. | menggunakan metode biseksi untuk menyelesaikan persamaan non-linier |
| | 3. | menggunakan metode regula falsi untuk menyelesaikan persamaan non-linier |
| | 4. | menggunakan metode Newton Raphson untuk menyelesaikan persamaan non-linier |

## A. LANDASAN TEORI

Untuk persamaan polinomial derajat dua, persamaan dapat diselesaikan dengan rumus ABC (misalnya bentuk: $ax^2 + bx + c = 0$, persamaan ini dapat dicari akar-akarnya secara analitis):

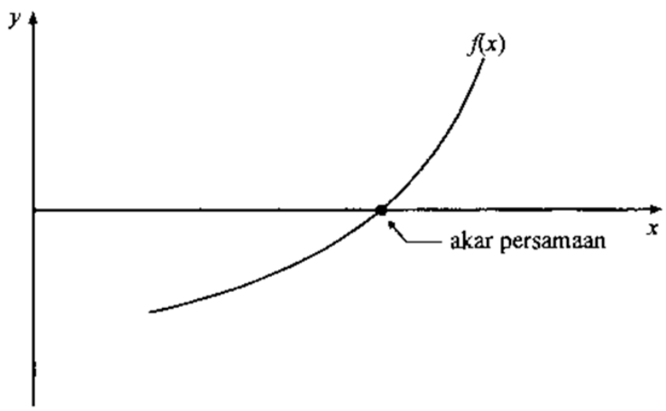
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sedang untuk persamaan polinomial derajat tiga atau empat, rumus-rumus yang ada sangat kompleks dan jarang sekali digunakan, sedang untuk persamaan dengan derajat yang lebih tinggi tidak ada rumus yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya. Bentuk persamaan tersebut misalnya, adalah:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$
$$f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0.$$
$$f(x) = e^x - 3x = 0.$$
$$f(x) = 3x + \sin x - e^x = 0$$

Metode numerik memberikan cara-cara untuk menyelesaikan bentuk persamaan tersebut secara perkiraan hingga didapat hasil yang mendekati penyelesaian secara benar (eksak). Penyelesaian numerik dilakukan dengan perkiraan yang berurutan (iterasi), maka tiap hasil akan lebih teliti dari perkiraan sebelumnya. Dengan berbagai iterasi yang dianggap cukup, akan didapat hasil perkiraan yang mendekati hasil yang benar (eksak) dengan toleransi yang diijinkan.

Salah satu cara yang sederhana untuk penyelesaian perkiraan, yaitu dengan menggambarkan fungsi tersebut lalu dicari titik potongnya dengan sumbu-*x* yang menunjukkan akar dari persamaan tersebut, seperti pada Gambar 2.1. Tapi cara ini hanya memberikan hasil yang sangat kasar, karena sulit untuk menetapkan nilai sampai beberapa digit dibelakang koma, hanya dengan membaca gambar. Cara lain yaitu dengan cara coba banding, yaitu dengan mencoba nilai *x* sembarang kemudian dievaluasi apakah nilai $f(x) = 0$, jika nilai *x* tidak sama dengan nol lalu dicoba nilai *x* yang lain, cara ini diulang terus menerus hingga didapat nilai $f(x) = 0$, untuk suatu nilai *x* tertentu, yang merupakan akar dari persamaan yang diselesaikan.




**Gambar 2.1.** Menentukan akar persamaan secara grafis

Kedua cara tersebut tidak efisien dan tidak sistematis, sehingga ada beberapa metode yang juga merupakan penyelesaian perkiraan, tetapi lebih sistematis untuk menghitung akar-akar persamaan.

### 1. Metode Setengah Interval

Metode ini merupakan bentuk yang paling sederhana diantara metode-metode numerik lainnya dalam menyelesaikan akar-akar persamaan.

Langkah-langkah yang dilakukan pada penyelesaian persamaan dengan metode ini adalah sebagai berikut:

1) Hitung fungsi pada interval yang sama dari *x* hingga ada perubahan tanda dari fungsi $f(x_i)$ dan $f(x_{i+1})$, yaitu bila $f(x_i) \times f(x_{i+1}) < 0$.
2) Perkiraan pertama dari akar $x_t$ dihitung dari rerata nilai $x_i$ dan $x_{i+1}$:

$$x_t = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \tag{2.1}$$

3) Buat evaluasi berikut untuk menentukan di dalam sub-interval mana akar persamaan berada:
   a) jika $f(x_i) \times f(x_t) < 0$, akar persamaan berada pada sub interval pertama, lalu tetapkan $x_{i+1} = x_t$ dan teruskan pada langkah ke 4.
   b) jika $f(x_i) \times f(x_t) > 0$, akar persamaan berada pada sub interval kedua, lalu tetapkan nilai $x_i = x_t$ dan teruskan pada langkah ke 4.
   c) jika $f(x_i) \times f(x_t) = 0$, akar persamaan adalah $x_t$ dan hitungan selesai.
4) Hitung perkiraan baru dari akar dengan menggunakan persamaan (2.1).
5) Apabila perkiraan baru sudah cukup kecil (sesuai dengan batasan yang ditentukan), maka hitungan selesai dan $x_t$ adalah akar persamaan yang dicari, jika belum maka hitungan kembali ke langkah 3.

**Contoh.**

1) Hitung salah satu akar dari persamaan pangkat tiga berikut ini:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

**Penyelesaian:**

Dihitung nilai $f(x)$ pada interval antara dua titik, misalnya $x = 1$ dan $x = 2$.

Untuk $x = 1$; $f(x = 1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 = -4$.

Untuk $x = 2$; $f(x = 2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) - 3 = 3$.

Mengingat fungsi mempunyai bentuk kontinu, maka perubahan tanda dari fungsi antara nilai $x = 1$ dan $x = 2$ akan memotong sumbu $x$ paling tidak satu kali. Titik perpotongan antara sumbu $x$ dan fungsi merupakan akar-akar persamaan.

Dihitung nilai $x_t$, lalu dihitung fungsi $f(x_t)$:

$$x_t = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = 1,5.$$

$$f(x_t = 1,5) = (1,5)^3 + (1,5)^2 - 3(1,5) - 3 = -1,875.$$

Karena fungsi berubah tanda antara $x = 1,5$ dan $x = 2$, maka akar persamaan terletak diantara kedua nilai tersebut.

Dengan menggunakan pemrograman komputer maka hasil hitungan akar persamaan dengan metode setengah interval didapat pada iterasi 13 (lihat Tabel 2.1, yang merupakan keluaran dari program komputer), yaitu sebesar $x_t$ = **1,73206**.

Tabel 2.1. Hasil hitungan metode setengah interval (contoh soal no 1)

| I | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $x_t$ | $f(x_i)$ | $f(x_{i+1})$ | $f(x_t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.50000 | - 4.00000 | 3.00000 | - 1.87500 |
| 2 | 1.50000 | 2.00000 | 1.75000 | - 1.87500 | 3.00000 | 0.17188 |
| 3 | 1.50000 | 1.75000 | 1.62500 | - 1.87500 | 0.17188 | - 0.94336 |
| 4 | 1.62500 | 1.75000 | 1.68750 | - 0.94336 | 0.17188 | - 0.40942 |
| 5 | 1.68750 | 1.75000 | 1.71875 | - 0.40942 | 0.17188 | - 0.12479 |
| 6 | 1.71875 | 1.75000 | 1.73438 | - 0.12479 | 0.17188 | 0.02203 |
| - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - |
| 12 | 1.73193 | 1.73242 | 1.73218 | - 0.00111 | 0.00351 | 0.00120 |
| 13 | 1.73193 | 1.73218 | 1.73206 | - 0.00111 | 0.00120 | 0.00005 |

1) Hitung salah satu akar dari persamaan berikut ini:

$$f(x) = \text{tg } x - x - 1 = 0$$

**Penyelesaian:**

Dihitung nilai $f(x)$ pada interval antara dua titik, misalnya $x = 1$ dan $x = 1{,}5$. Dalam menghitung fungsi tg $x$, nilai $x$ dinyatakan dalam radian seperti dalam hitungan berikut ini.

Untuk $x = 1$;

$$f(1) = tg\left(\frac{x}{\pi}\times 180\right) - x - 1 = tg\left(\frac{1}{\pi}\times 180\right) - 1 - 1 = -0.44259$$

Untuk $x = 1{,}5$;

$$f(1) = tg\left(\frac{x}{\pi}\times 180\right) - x - 1 = tg\left(\frac{1{,}5}{\pi}\times 180\right) - 1{,}5 - 1 = 11.60142$$

Perubahan tanda nilai $f(x)$ menunjukkan bahwa akar persamaan berada antara nilai $x = 1$ dan $x = 1{,}5$. Dihitung nilai $x_t$, lalu hitung fungsi $f(x_t)$:

$$x_t = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 1{,}5}{2} = 1{,}25$$

$$f(1{,}25) = tg\left(\frac{x}{\pi}\times 180\right) - x - 1 = tg\left(\frac{1{,}25}{\pi}\times 180\right) - 1{,}25 - 1 = 0{,}75957.$$

Langkah selanjutnya membuat setengah interval berikutnya, untuk membuat interval yang semakin kecil, di mana akar persamaan berada. Dengan pemakaian program metode setengah interval dimana bentuk persamaan (fungsi) diganti. Untuk soal ini, pertambahan interval (untuk mencari lokasi dimana akar persamaan berada) adalah $\Delta x$ = 0,5. Hasil pemrograman nampak pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2. Hasil hitungan metode setengah interval (contoh soal no 2)

| **i** | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $x_t$ | $f(x_i)$ | $f(x_{i+1})$ | $f(x_t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 1.50000 | 1.25000 | - 0.44259 | 11.60142 | 0.75957 |
| 2 | 1.00000 | 1.25000 | 1.12500 | - 0.44259 | 0.75957 | - 0.03243 |
| 3 | 1.12500 | 1.25000 | 1.18750 | - 0.03243 | 0.75957 | 0.29241 |
| 4 | 1.12500 | 1.18750 | 1.15625 | - 0.03243 | 0.29241 | 0.11623 |
| 5 | 1.12500 | 1.15625 | 1.14063 | - 0.03243 | 0.11623 | 0.03884 |
| - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - |
| 12 | 1.13208 | 1.13232 | 1.13220 | - 0.00085 | 0.00026 | - 0.00030 |
| 13 | 1.13220 | 1.13232 | 1.13226 | - 0.00030 | 0.00026 | - 0.00002 |

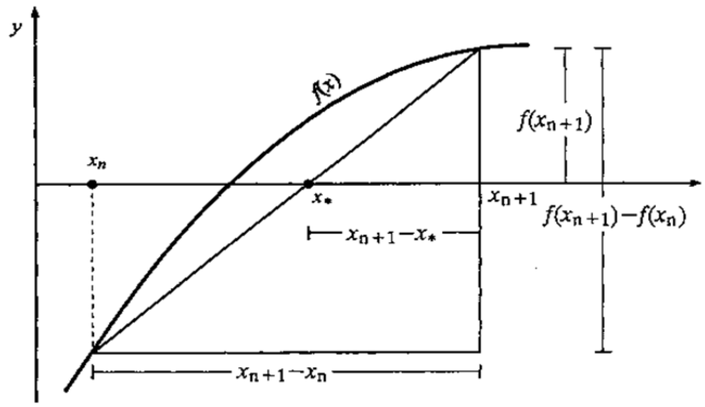
**2. Metode Interpolasi Linier**

Metode ini dikenal juga dengan metode *false position*, metode ini ada untuk menutupi kekurangan pada metode setengah interval yang mudah tetapi tidak efisien (untuk mendapatkan hasil yang mendekati nilai eksak diperlukan langkah iterasi cukup panjang). Dengan metode ini nilai akar dari suatu fungsi dapat lebih cepat diperoleh daripada dengan metode setengah interval, metode ini didasarkan pada interpolasi antara dua nilai dari fungsi yang mempunyai tanda berlawanan.

Mula-mula dicari nilai fungsi untuk setiap interval $\Delta x$, yang sama hingga didapat dua nilai fungsi $f(x_i)$ dan $f(x_{i+1})$ berurutan dengan tanda berlawanan (Gambar 2.3). Kedua nilai fungsi tersebut ditarik garis lurus hingga terbentuk suatu segitiga, dengan menggunakan sifat segitiga sebangun didapat persamaan berikut:

$$\frac{x_{i+1} - x_*}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1})}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

$$x_* = x_{i+1} - \frac{f(x_{i+1})}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} (x_{i+1} - x_i) \tag{2.2}$$




**Gambar 2.3.** Metode interpolasi linier

Nilai fungsi untuk setiap interval $\Delta x$, digunakan untuk menghitung nilai fungsi $f(x_*)$ yang kemudian digunakan lagi untuk interpolasi linier dengan nilai $f(x_i)$ atau $f(x_{i+1})$ sedemikian sehingga kedua fungsi mempunyai tanda berbeda, prosedur ini diulang sampai nilai $f(x_*)$ yang didapat mendekati nol.

**Contoh.**

Hitung salah satu akar dari persamaan berikut ini:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

**Penyelesaian:**

Langkah pertama adalah menghitung nilai $f(x)$ pada interval antara dua titik sedemikian sehingga nilai $f(x)$ pada kedua titik tersebut berlawanan tanda.

Dihitung nilai $f(x)$ pada interval antara dua titik, misalnya $x = 1$ dan $x = 2$.

Untuk $x_1 = 1$; $f(x_1 = 1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 = -4$.

Untuk $x_2 = 2$; $f(x_2 = 2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) - 3 = 3$.

Dengan menggunakan persamaan (3.2), didapat:

$$x_* = x_{i+1} - \frac{f(x_{i+1})}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}(x_{i+1} - x_i) = 2 - \frac{3}{\left[3-(-4)\right]}(2-1) = 1{,}57142.$$

$f(x_*) = (1{,}57142)^3 + (1{,}57142)^2 - 3(1{,}57142) - 3 = -1{,}36449$.

Karena $f(x_*)$ bertanda negatif maka akar terletak antara $x = 1{,}57142$ dan $x = 2$, selanjutnya dihitung nilai $x_*$:

$$x_* = 2 - \frac{3}{\left[3-(-1{,}36449)\right]}(2 - 1{,}57142) = 1{,}70540.$$

$$f(x_*) = (1{,}70540)^3 + (1{,}70540)^2 - 3(1{,}70540) - 3 = -0{,}24787.$$

Dengan menggunakan pemrograman komputer, hasil hitungan tersebut di atas ada pada Tabel 2.3 dan didapat pada iterasi ke 7, yaitu $x_* = $ **1,73205**.

Tabel 2.3. Hasil hitungan metode interpolasi linier

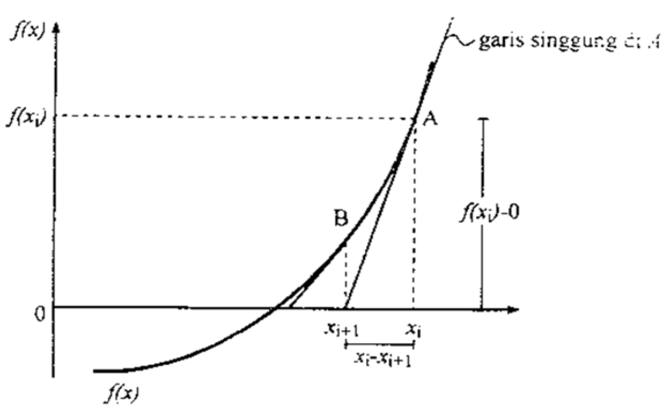
| **i** | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $x_*$ | $f(x_i)$ | $f(x_{i+1})$ | $f(x_*)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.57143 | - 4.00000 | 3.00000 | - 1.36443 |
| 2 | 1.57143 | 2.00000 | 1.70541 | - 1.36443 | 3.00000 | - 0.24774 |
| 3 | 1.70541 | 2.00000 | 1.72788 | - 0.24774 | 3.00000 | - 0.03934 |
| 4 | 1.72788 | 2.00000 | 1.73141 | - 0.03934 | 3.00000 | - 0.00611 |
| 5 | 1.73141 | 2.00000 | 1.73195 | - 0.00611 | 3.00000 | - 0.00094 |
| 6 | 1.73195 | 2.00000 | 1.73204 | - 0.00094 | 3.00000 | - 0.00014 |
| 7 | 1.73204 | 2.00000 | 1.73205 | - 0.00014 | 3.00000 | - 0.00002 |

### 3. Metode Newton-Raphson

Metode ini paling banyak digunakan dalam mencari akar-akar persamaan, jika perkiraan awal dari akar adalah $x_i$, maka suatu garis singgung dapat dibuat dari titik ($x_i$, $f(x_i)$). Titik dari garis singgung tersebut memotong sumbu-$x$, biasanya memberikan perkiraan yang lebih dekat dari nilai akar.

Pada Gambar 2.4, nampak bahwa turunan pertama pada $x_i$ adalah ekivalen dengan kemiringan, yaitu:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \quad \text{atau} \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.3}$$




**Gambar 2.4.** Prosedur metode Newton-Raphson secara grafis

**Contoh.**

1) Hitung salah satu akar dari persamaan berikut ini, dengan metode Newton-Raphon.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

**Penyelesaian:**

Turunan pertama dari persamaan tersebut adalah: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$,

Dengan menggunakan persamaan (3.3), yaitu: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Pada awal hitungan ditentukan nilai $x_i$ sembarang, misalnya $x_1 = 1$, maka:

$$f(x_1 = 1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 = -4.$$

$$f'(x_1 = 1) = 3(1)^2 + 2(1) - 3 = 2.$$

$$x_2 = 1 - \frac{-4}{2} = 3$$

Langkah berikutnya nilai $x_2 = 3$, tersebut digunakan untuk hitungan pada iterasi berikutnya.

$$f(x_2 = 3) = (3)^3 + (3)^2 - 3(3) - 3 = 24.$$

$$f'(x_2 = 3) = 3(3)^2 + 2(3) - 3 = 30.$$

$$x_3 = 3 - \frac{24}{30} = 2{,}2$$

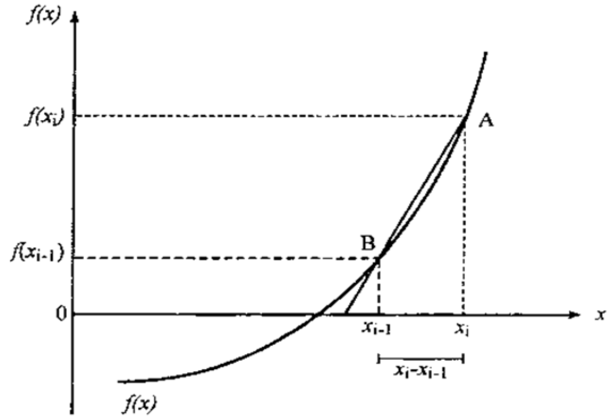
Hitungan dilanjutkan dengan menggunakan program komputer dan hasilnya nampak pada Tabel 2.4, serta hasil hitungan didapat pada iterasi ke 6.

Tabel 2.4. Hasil hitungan metode Newton-Raphson

| ***I*** | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $f(x_i)$ | $f(x_{i+1})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 3.00000 | - 4.0000 | 24.00000 |
| 2 | 3.00000 | 2.20000 | 24.0000 | 5.88800 |
| 3 | 2.20000 | 1.83015 | 5.88800 | 0.98900 |
| 4 | 1.83015 | 1.73780 | 0.98900 | 0.05457 |
| 5 | 1.73780 | 1.73207 | 0.05457 | 0.00021 |
| 6 | 1.73207 | 1.73205 | 0.00021 | 0.00000 |

## 4. Metode Secant

Kekurangan metode Newton-Raphson adalah diperlukannya turunan pertama (diferensial) dari $f(x)$ dalam hitungan, mungkin sulit untuk mencari turunan dari persamaan yang diselesaikan, maka bentuk diferensial didekati dengan nilai perkiraan berdasarkan diferensial beda hingga.




**Gambar 2.5.** Metode Secant

Nampak pada Gambar 2.5, garis singgung di titik $x_i$ didekati oleh bentuk berikut:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Apabila disubstitusikan ke dalam persamaan (2.3), maka didapat:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \qquad (2.4)$$

Pada metode ini pendekatan memerlukan dua nilai awal dari $x$, yang digunakan untuk memperkirakan kemiringan dari fungsi.

**Contoh.**

1) Hitung salah satu akar dari persamaan berikut ini, dengan metode Secant.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

**Penyelesaian**

Iterasi pertama, diambil dua nilai awal yaitu $x = 1$ dan $x = 2$.

Untuk $x_1 = 1$, $\rightarrow$ $f(x_1 = 1) = -4$, dan $x_2 = 2$, $\rightarrow$ $f(x_2 = 2) = 3$.

Dengan menggunakan persamaan (2.4), didapat:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 2 - \frac{3(2-1)}{3-(-4)} = 1{,}57142.$$

Pada iterasi kedua, hitungan dilakukan berdasar nilai $x_2 = 2$ dan $x_3 = 1{,}57142$.

Untuk $x_2 = 2, \rightarrow f(x_2 = 2) = 3$, dan $x_3 = 1{,}57142, \rightarrow f(x_3 = 1{,}57142) = -1{,}36449$.

Dengan menggunakan persamaan (2.4), didapat:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 1{,}57142 - \frac{-1{,}36449(1{,}57142 - 2)}{-1{,}36449 - 3} = 1{,}70540.$$

Dengan menggunakan pemrograman komputer, hasilnya diberikan pada Tabel 2.5, dan iterasi ke 5 merupakan hasil hitungan yang diperoleh yaitu $x$ = **1,73205**.

Tabel 2.5. Hasil hitungan metode Secant

| ***i*** | $x_{i-1}$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $f(x_{i-1})$ | $f(x_i)$ | $f(x_{i+1})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.57143 | - 4.00000 | 3.00000 | - 1.36443 |
| 2 | 2.00000 | 1.57143 | 1.70541 | 3.00000 | - 1.36443 | - 0.24774 |
| 3 | 1.57143 | 1.70541 | 1.73514 | - 1.36443 | - 0.24774 | 0.02925 |
| 4 | 1.70541 | 1.73514 | 1.73200 | - 0.24774 | 0.02925 | - 0.00051 |
| 5 | 1.73514 | 1.73200 | 1.73205 | 0.02925 | - 0.00051 | 0.00000 |

### 5. Metode Iterasi

Metode ini menggunakan suatu persamaan untuk memperkirakan nilai akar persamaan. Persamaan tersebut dikembangkan dari fungsi $f(x) = 0$, sehingga parameter $x$ berada pada sisi kiri dari persamaan, yaitu: $x = g(x)$. Transformasi ini dapat dilakukan dengan manipulasi aljabar atau dengan menambahkan parameter $x$ pada kedua sisi dari persamaan aslinya.

Sebagai contoh, persamaan berikut: $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, dapat ditulis menjadi bentuk $x = \dfrac{x^3 + x^2 - 3}{3}$. Hal ini menunjukkan bahwa nilai $x$ merupakan fungsi dari $x$, sehingga dengan memberi nilai perkiraan awal dari akar $x_i$ dapat dihitung perkiraan baru $x_{i+1}$ dengan rumus iteratif berikut:

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{2.6}$$

Besarnya kesalahan dihitung dengan rumus berikut:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

**Contoh.**

1) Hitung akar dari persamaan berikut ini, dengan metode iterasi.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

**Penyelesaian:**

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$x^3 = -x^2 + 3x + 3 \quad \rightarrow \quad x = (-x^2 + 3x + 3)^{1/3}$$

Dalam bentuk persamaan (3.6), persamaan di atas menjadi:

$$x_{i+1} = (-x_i^2 + 3x_i + 3)^{1/3}$$

Apabila ditentukan perkiraan awal $x_1 = 2$, didapat:

$$x_2 = (-x_1^2 + 3x_1 + 3)^{1/3} = (-2^2 + 3(2) + 3)^{1/3} = 1{,}70998.$$

Besar kesalahan:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| \times 100\% = \left| \frac{1{,}70998 - 2}{1{,}70998} \right| \times 100\% = -16{,}96\ \%.$$

Selanjutnya, nilai $x_2 = 1{,}70998$ tersebut digunakan untuk menghitung nilai $x_3$ pada iterasi berikutnya, sehingga:

$$x_3 = (-x_2^2 + 3x_2 + 3)^{1/3} = (-(1{,}70998^2) + 3(1{,}70998) + 3)^{1/3} = 1{,}73313.$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| \times 100\% = \left| \frac{1{,}73313 - 1{,}70998}{1{,}73313} \right| \times 100\% = 1{,}34\ \%.$$

Hasil hitungan berdasarkan program komputer untuk metode iterasi ini diberikan pada Tabel 2.6, dan hasilnya diperoleh pada iterasi ke 5, yaitu $x$ = **1,73205**.

Tabel 2.6. Hasil hitungan dengan metode Iterasi

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $\varepsilon_a$ (%) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2.00000 | 1.70998 | –16.96 |
| 2 | 1.70998 | 1.73313 | 1.33622 |
| 3 | 1.73313 | 1.73199 | –0.06579 |
| 4 | 1.73199 | 1.73205 | 0.00340 |

Pada Tabel 2.6, nampak bahwa hasil hitungan pada iterasi yang lebih tinggi semakin dekat dengan akar persamaan yang benar, dengan kata lain kesalahan yang terjadi semakin kecil. Penyelesaian persamaan seperti ini disebut *konvergen*.

Persamaan $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, dapat pula diubah dalam bentuk berikut: $x = \dfrac{x^3 + x^2 - 3}{3}$

Dalam bentuk iterasi persamaan di atas menjadi: $x_{i+1} = \dfrac{x_i^3 + x_i^2 - 3}{3}$

Untuk perkiraan awal $x_1 = 2$, didapat: $x_2 = \dfrac{x_1^3 + x_1^2 - 3}{3} = \dfrac{2^3 + 2^2 - 3}{3} = 3.$

Besar kesalahan: $\varepsilon_a = \left|\dfrac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100\% = \left|\dfrac{3-2}{3}\right| \times 100\% = 33{,}3333\ \%.$

Hitungan dilanjutkan dengan program yang sama yaitu program metode iterasi, dengan menggantikan bentuk fungsi yang diselesaikan, dan hasilnya diberikan pada Tabel 2.7.

Tabel 2.7. Hasil hitungan metode Iterasi

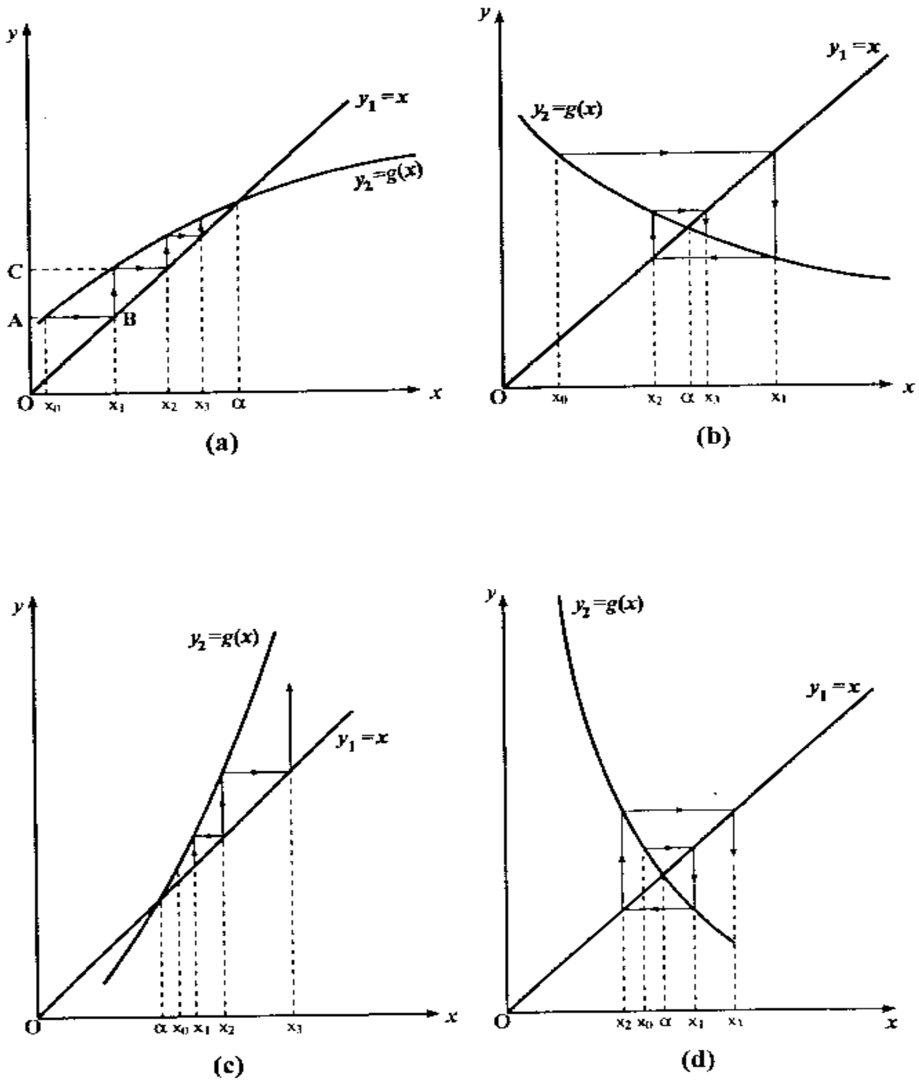
| ***i*** | $x_i$ | $\varepsilon_a$ (%) |
|---|---|---|
| 1 | 2.00000 | - |
| 2 | 3.00000 | 33.3333 |
| 3 | 11.00000 | 72.7273 |
| 4 | 483.00000 | 97.7226 |
| 5 | 37637290.0 | 99.9987 |

Nampak bahwa hasil hitungan pada iterasi yang lebih tinggi semakin menjauhi nilai akar persamaan yang benar, keadaan hitungan seperti ini disebut *divergen*.

Mengenai *konvergen* dan *divergen* pada metode iterasi yaitu, persamaan (2.5) dapat ditulis menjadi satu pasang persamaan yaitu $y_1 = x$ dan $y_2 = g(x)$. Kedua persamaan itu dapat digambarkan bersama-sama dalam satu sistem koordinat, akar persamaan adalah sama dengan nilai absis dari titik potong antara kedua kurve. Fungsi $y_1 = x$ dan empat macam bentuk dari $y_2 = g(x)$ nampak pada Gambar 2.6. Pada keadaan pertama (Gambar 2.6a), perkiraan awal $x_0$ digunakan untuk menentukan titik pada kurve $y_2$ yaitu *A*. Panjang garis *OA* adalah $g(x_0)$. Garis $y_1 = x$ membentuk sudut $45^0$ terhadap kedua sumbu, sehingga titik pada kedua garis tersebut mempunyai koordinat *x* dan *y* yang sama. Dari titik *A* bergerak secara horisontal ke kanan sehingga memotong titik *B*. Absis dari titik *B*, yaitu ($x_1$), adalah sama dengan $g(x_0)$; atau ($x_1$) = $g(x_0)$, dengan demikian nilai awal $x_0$ digunakan untuk mencari perkiraan berikutnya yaitu $x_1$.

Selanjutnya, dari titik $x_1$ bergerak vertikal sehingga memotong kurve $y_2 = g(x)$, dan kemudian bergerak horisontal ke kanan memotong kurve $y_1 = x$ di suatu titik yang mempunyai absis $x_2$. Demikian seterusnya hingga akhirnya penyelesaian pada Gambar 2.6a. adalah <u>*konvergen*</u>, karena perkiraan *x* bergerak mendekati perpotongan kedua kurve.

Keadaan yang sama terjadi pada Gambar 2.6b. Sebaliknya, pada Gambar 2.6c dan 2.6d, penyelesaian iterasi semakin menjauhi nilai akar yang benar (*divergen*). Dari penjelasan Gambar 2.6, dapat disimpulkan bahwa *konvergensi* akan terjadi apabila nilai absolut dari kemiringan $y_2 = g\ (x)$ adalah lebih kecil dari kemiringan $y_1 = x$, atau: $|g'(x)| < 1$.




**Gambar 2.6.** Penjelasan *konvergensi* dan *divergensi* pada metode Iterasi

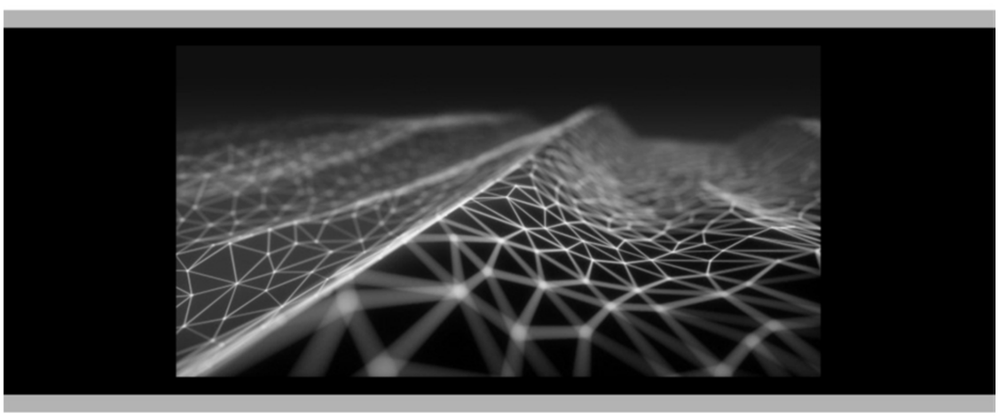
## B. SOAL

**Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar!**

1. Dengan menggunakan metode setengah interval, tentukan perpotongan antara kurva $y = e^x$ dan $y = 3x$ dengan mencari akar dari $3^x - 3x^2 = 0$. Ketelitian 0,5%!
2. Dengan menggunakan metode setengah interval, tentukan salah satu akar dari persamaan tg $x - x - 1 = 0$!
3. Tentukan akar persamaan $x^2 + 10 \cos x = 0$ dengan metode Newton-Raphson!
4. Tentukan akar penyelesaian dari persamaan $f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0$ dengan metode tabulasi!
5. Tentukan akar penyelesaian dari persamaan $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ dengan metode biseksi atau setengah interval!
6. Tentukan akar penyelesaian dari persamaan $f(x) = 2 - 5x + \sin x = 0$ dengan metode tabulasi dan Newton Raphson!
7. Tentukan akar penyelesaian dari persamaan $x^x = 10$ dengan metode biseksi atau setengah interval!
8. Tentukan akar penyelesaian dari persamaan $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ dengan metode Regula Falsi!
9. Tentukan akar penyelesaian dari persamaan $f(x) = 3x - \cos x = 0$ dengan metode Regula Falsi!
10. Tentukan akar penyelesaian dari persamaan $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = 10$ dengan metode Regula Falsi!

# BAB 3

## SOLUSI PERSAMAAN LINIER SIMULTAN



# BAB 3
# SOLUSI PERSAMAAN LINIER SIMULTAN

Capaian Pembelajaran : menjelaskan proses penyelesaian persamaan linier dengan metode numeric

Kemampuan Akhir Pembelajaran :

1. menjelaskan apa yang dimaksud dengan sistem persamaan linier
2. menjelaskan latar belakang digunakannya metode eliminasi Gauss
3. menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan eliminasi Gauss Jordan
4. menyebutkan persamaan dan perbedaan antara metode eliminasi Gauss dengan metode Gauss-Jordan

## A. LANDASAN TEORI

Bentuk umum dari persamaan linier sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

dengan $a$ adalah koefisien konstan, $b$ adalah konstan, dan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah bilangan tak diketahui, serta $n$ adalah jumlah persamaan.

Suatu sistem persamaan linier dapat ditulis dalam bentuk matriks, misalnya:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

dapat ditulis dalam bentuk matriks, menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ atau } AX = B$$

dengan: $A$ adalah matriks koefisien $n \times n$.
$X$ adalah kolom vektor $n \times 1$ dari bilangan tak diketahui.
$B$ adalah kolom vektor $n \times 1$ dari konstanta.

Nilai pada vektor kolom $X$ dapat dicari dengan cara mengalikan kedua ruas persamaan dengan matriks inversi, yaitu $A^{-1}AX = A^{-1}B$, karena $A^{-1}A = I$, maka nilai-nilai elemen $X = A^{-1}B$. Penyelesaian sistem persamaan linier juga sering digunakan matriks yang ditingkatkan, misalnya matriks (3×3) akan ditingkatkan dengan matriks $C$ (3×1), sehingga berbentuk matriks 3×4 menjadi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & c_3 \end{bmatrix}$$

## 1. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gauss adalah metode yang paling awal dikembangkan dan banyak digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier, prosedur penyelesaian dari metode ini adalah mengurangi sistem persamaan ke dalam bentuk segitiga atas, sehingga salah satu dari persamaan-persamaan tersebut hanya mengandung satu bilangan tak diketahui, dan setiap persamaan berikutnya hanya terdiri dari satu tambahan bilangan tak diketahui baru. Bentuk segitiga diselesaikan dengan penambahan dan pengurangan dari beberapa persamaan, setelah persamaan tersebut dikalikan dengan suatu faktor (konstan).

Prosedur hitungan metode eliminasi Gauss, yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & | & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & | & b''_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} x_3 = \dfrac{b''_3}{a''_{33}} \\ x_2 = \dfrac{(b'_2 - a'_{23}x_3)}{a'_{22}} \\ x_1 = \dfrac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}} \end{array}$$

Lebih jelasnya kita pandang suatu sistem dari 3 persamaan dengan 3 bilangan tak diketahui berikut ini:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (3.1a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad (3.1b)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad (3.1c)$$

Persamaan pertama dari sistem dibagi koefisien pertama dari persamaan pertama ($a_{11}$), sehingga menjadi:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \tag{3.2}$$

Persamaan (3.2) dikalikan dengan koefisien pertama dari persamaan kedua:

$$a_{21} x_1 + a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = a_{21} \frac{b_1}{a_{11}} \tag{3.3}$$

Persamaan (3.1b) dikurangi persamaan (3.3), sehingga didapat:

$$\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \left(a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right) x_3 = \left(b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}\right) \text{ atau } a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 = b'_2$$

Selanjutnya persamaan yang telah dinormalkan persamaan (3.2) dikalikan dengan koefisien pertama dari persamaan ketiga, dan hasilnya dikurangkan dari persamaan ketiga dari sistem persamaan asli (persamaan 3.1c), hasilnya adalah: $a'_{32} x_2 + a'_{33} x_3 = b'_3$. Dengan melakukan prosedur di atas, maka didapat sistem persamaan sebagai berikut:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \tag{3.4a}$$

$$a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 = b'_2 \tag{3.4b}$$

$$a'_{32} x_2 + a'_{33} x_3 = b'_3 \tag{3.4c}$$

Persamaan 3.4, ekivalen dengan persamaan aslinya, tetapi variabel $x_1$ hanya muncul pada persamaan pertama, sedang dua persamaan terakhir hanya mengandung dua bilangan tak diketahui, bila kedua persamaan terakhir dapat diselesaikan untuk nilai $x_2$ dan $x_3$, maka hasilnya dapat disubstitusikan ke dalam persamaan pertama untuk mendapatkan nilai $x_1$. Permasalahan menjadi lebih sederhana, dari menyelesaikan 3 persamaan dengan 3 bilangan tak diketahui menjadi penyelesaian 2 persamaan dengan 2 bilangan tak diketahui.

Prosedur berikutnya adalah mengeliminasi $x_2$ dari salah satu dua persamaan terakhir, untuk itu persamaan (3.4b) dibagi dengan koefisien pertama dari persamaan (3.4b), yaitu $a'_{22}$ sehingga menjadi:

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \frac{b'_2}{a'_{22}} \tag{3.5}$$

Persamaan 3.5, dikalikan dengan koefisien pertama dari persamaan (3.4c):

$$a'_{32} x_2 + a'_{32} \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = a'_{32} \frac{b'_2}{a'_{22}} \tag{3.6}$$

Persamaan (3.4c) dikurangi persamaan (3.6), sehingga menjadi:

$$\left(a'_{33} - a'_{32}\frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right) x_3 = \left(b'_3 - a'_{32}\frac{b'_2}{a'_{22}}\right) \text{ atau } a'_{33} x_3 = b''_3$$

Dengan demikian sistem persamaan menjadi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (3.7a)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \quad (3.7b)$$

$$a''_{33}x_2 = b''_3 \quad (3.7c)$$

Sistem persamaan di atas mempunyai koefisien matriks yang berbentuk segitiga atas ($a_{ij}$ = 0 untuk $i > j$), dari persamaan tersebut akan dapat dihitung nilai $x_1$, $x_2$ dan $x_3$, yaitu:

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}} \quad (3.8a)$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a''_{23}x_3}{a'_{22}} \quad (3.8b)$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \quad (3.8c)$$

dengan demikian sistem persamaan telah dapat diselesaikan.

**Contoh.**

1) Selesaikan sistem persamaan berikut ini:

$$3x + y - z = 5 \quad (1)$$

$$4x + 7y - 3z = 20 \quad (2)$$

$$2x - 2y + 5z = 10 \quad (3)$$

**Penyelesaian:**

a) Menormalkan persamaan (1) dengan membagi persamaan tersebut dengan koefisien pertama persamaan (1) yaitu 3, sehingga:

$$x + 0{,}3333\,y - 0{,}3333\,z = 1{,}6666 \quad (4)$$

b) Persamaan (4) dikalikan dengan elemen pertama dari persamaan (2):

$$4x + 1{,}3333\,y - 1{,}3333\,z = 6{,}6666 \quad (5)$$

c) Persamaan (2) dikurangi persamaan (5), menjadi:

$$5{,}6667\,y - 1{,}6666\,z = 13{,}3334 \quad (6)$$

d) Persamaan (4) dikalikan dengan elemen pertama dari persamaan (3), yaitu 2, sehingga menjadi:

$$2x + 0{,}6666\,y - 0{,}6666\,z = 3{,}3333 \quad (7)$$

e) Persamaan (3) dikurangi persamaan (7), menjadi:

$$-2{,}6666\,y + 5{,}6666\,z = 6{,}6667 \quad (8)$$

f) Sistem persamaan menjadi:

$$3x + y - z = 5 \quad (8.a)$$

$$5{,}6667\,y - 1{,}6666\,z = 13{,}3334 \quad (8.b)$$

$$-2{,}6666\,y + 5{,}6666\,z = 6{,}6667 \quad (8.c)$$

g) Berikutnya mengeleminasi variabel $x_2$ dari persamaan (8.c), untuk itu persamaan (8.b) dinormalkan dengan membaginya dengan elemen pertama dari persamaan tersebut yaitu 5,6667 sehingga menjadi:

$$y - 0{,}2941\, z = 2{,}3529 \quad (9)$$

h) Persamaan (9) dikalikan dengan elemen pertama dari persamaan (8.c), yaitu dengan – 2,6666 sehingga menjadi:

$$-2{,}6666\, y + 0{,}7842\, z = -6{,}2742 \quad (10)$$

i) Persamaan (8.c) dikurangi persamaan (10), menjadi:

$$4{,}8824\, z = 12{,}9409$$

j) Setelah dilakukan 3 kali manipulasi sistem persamaan, menjadi:

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 5 && (11.a)\\ 5{,}6667\, y - 1{,}6666\, z &= 13{,}3334 && (11.b)\\ 4{,}8824\, z &= 12{,}9409 && (11.c) \end{aligned}$$

k) Dari persamaan (11.c), dapat dihitung nilai $z$, yaitu:

$$z = \frac{12{,}9409}{4{,}8824} = \mathbf{2{,}6505}.$$

l) Dari persamaan (11.b) dan nilai $z$ yang didapat, maka nilai $y$ dapat dihitung yaitu:

$$y = \frac{13{,}3334 + (1{,}6666 \times 2{,}6505)}{5{,}6667} = \mathbf{3{,}1325}.$$

m) Dengan persamaan (11.a) serta nilai $y$ dan $z$ yang didapat, maka nilai $x$ dapat dihitung, yaitu: $x = \dfrac{5 - y + z}{3} = \dfrac{5 - 3{,}1325 + 2{,}6505}{3} = \mathbf{1{,}506}$.

Jadi, hasil penyelesaian sistem persamaan adalah:

$x = \mathbf{1{,}506}$ ; $y = \mathbf{3{,}1325}$ dan $z = \mathbf{2{,}6505}$.

Untuk mengetahui benar tidaknya hasil yang didapat, nilai $x$, $y$ dan $z$ yang didapat disubstitusikan ke sistem persamaan asli:

$$\begin{aligned} 3(1{,}506) + 3{,}1325 - 2{,}6505 &= 5 && (= 5)\\ 4(1{,}506) + 7(3{,}1325) - 3(2{,}6505) &= 20 && (= 20)\\ 2(1{,}506) - 2(3{,}1325) + 5(2{,}6505) &= 9{,}9995 && (\approx 10) \end{aligned}$$

2) Berapakah nilai $x$, $y$, $z$ dari persamaan ini:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

**Penyelesaian:**

a) Mengubah persamaan ke dalam matriks yang diperbesar: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

b) Matriks tersebut dijadikan ke bentuk eselon baris: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

c) Sistem yang bersesuaian dengan matriks adalah:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

d) Nilai $z$ telah diketahui, maka elemen $y$ dapat pula diketahui, yaitu:

$$y - \frac{7}{2}(3) = -\frac{17}{2} \rightarrow y = -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}(3) \rightarrow y = -\frac{17}{2} + \frac{21}{2} \rightarrow y = \frac{4}{2} \rightarrow y = \mathbf{2}$$

e) Dengan diketahui nilai $z = \mathbf{3}$ dan $y = \mathbf{2}$, maka nilai $x$ dapat pula diketahui, yaitu:

$$x + y + 2z = 9 \rightarrow x = 9 - y - 2z \rightarrow x = 9 - 2 - 2(3) \rightarrow x = 9 - 2 - 6 \rightarrow x = \mathbf{1}$$

Jadi nilai $x$, $y$, $z$ dari persamaan di atas adalah $x = \mathbf{1}$, $y = \mathbf{2}$, dan $z = \mathbf{3}$.

## 2. Metode Gauss-Jordan

Metode ini hampir sama dengan metode eliminasi Gauss, metode ini selain untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, juga dapat digunakan untuk menghitung matriks inversi. Pada metode ini bilangan tak diketahui dieliminasi dari semua persamaan, yang dalam metode Gauss bilangan tersebut dieliminasi dari persamaan berikutnya, dengan demikian langkah-langkah eliminasi menghasilkan matriks identitas. Prosedur hitungan metode Gauss-Jordan, yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & b_1^* \\ 0 & 1 & 0 & | & b_2^* \\ 0 & 0 & 1 & | & b_3^* \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & | & b_1^* \\ 0 & x_2 & 0 & | & b_2^* \\ 0 & 0 & 1 & | & b_3^* \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \quad (3.9a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \quad (3.9b)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \quad (3.9c)$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \quad (3.9d)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Pada metode Gauss-Jordan, dipilih secara berurutan elemen pertama tidak 0 dari setiap baris matriks.

1) Pertama kali baris pertama dari persamaan (3.10) dibagi dengan elemen pertama dari persamaan pertama, yaitu $a_{11}$, sehingga didapat:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

   Elemen pertama dari semua baris lainnya dihilangkan dengan cara berikut ini:

   a) Persamaan pertama dikalikan elemen pertama dari persamaan kedua ($a_{21}$) dan kemudian dikurangkan terhadap persamaan kedua.
   b) Persamaan pertama dikalikan elemen pertama dari persamaan ketiga ($a_{31}$) dan kemudian dikurangkan terhadap persamaan ketiga.
   c) Persamaan pertama dikalikan elemen pertama dari persamaan keempat ($a_{41}$) dan kemudian dikurangkan terhadap persamaan keempat.

   Operasi ini menghasilkan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

2) Kemudian dipilih elemen pertama tidak 0 dari baris kedua yaitu $a'_{22}$, dan prosedur di atas diulangi lagi untuk baris kedua.

   Baris kedua dari persamaan di atas dibagi dengan elemen $a'_{22}$, sehingga didapat:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b''_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Elemen kedua dari semua baris lainnya dihilangkan dengan cara berikut ini:

a) Persamaan kedua dikalikan elemen kedua dari persamaan pertama ($a'_{12}$) dan kemudian dikurangkan terhadap persamaan pertama.
b) Persamaan kedua dikalikan elemen kedua dari persamaan ketiga ($a'_{32}$) dan kemudian dikurangkan terhadap persamaan ketiga.
c) Persamaan kedua dikalikan elemen kedua dari persamaan keempat ($a'_{42}$) dan kemudian dikurangkan terhadap persamaan keempat.

Operasi ini menghasilkan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & a''_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

3) Langkah selanjutnya dipilih elemen pertama tidak 0 dari baris ketiga yaitu $a''_{33}$, dan prosedur di atas diulangi lagi untuk baris ketiga.

Dengan prosedur seperti sebelumnya, akhirnya didapat sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'''_1 \\ b'''_2 \\ b'''_3 \\ b'''_4 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Dari sistem persamaan (3.13) dapat dihitung nilai $x_1$, $x_2$, $x_3$ dan $x_4$:

$$x_1 = b'''_1; \quad x_2 = b'''_2; \quad x_3 = b'''_3 \quad \text{dan} \quad x_4 = b'''_4$$

**Contoh**

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metode Gauss-Jordan:

$$3x + y - z = 5 \tag{1}$$
$$4x + 7y - 3z = 20 \tag{2}$$
$$2x - 2y + 5z = 10 \tag{3}$$

**Penyelesaian:**

Sistem persamaan di atas ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Baris pertama dari persamaan (4) dibagi dengan elemen pertama dari persamaan (1) yaitu 3, sehingga persamaan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3333 & -0,3333 \\ 4 & 7 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6666 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Persamaan (1) dikalikan elemen pertama dari persamaan (2) yaitu 4, dan kemudian dikurangkan terhadap persamaan (2), dengan cara yang sama untuk persamaan (3), sehingga didapat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3333 & -0,3333 \\ 0 & 5,6668 & -1,6668 \\ 0 & -2,6666 & 5,6666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6666 \\ 13,3336 \\ 6,6668 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Baris kedua dari persamaan (6) dibagi dengan elemen pertama tidak 0 dari baris kedua, yaitu 5,6668 sehingga sistem persamaan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3333 & -0,3333 \\ 0 & 1 & -0,2941 \\ 0 & -2,6666 & 5,6666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6666 \\ 2,3529 \\ 6,6668 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Baris kedua persamaan (7) dikalikan dengan elemen kedua dari baris pertama, yaitu 0,3333 dan kemudian dikurangkan terhadap persamaan baris pertama. Kemudian dengan cara yang sama untuk persamaan baris ketiga, sehingga didapat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,2353 \\ 0 & 1 & -0,2941 \\ 0 & 0 & 4,8824 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8824 \\ 2,3529 \\ 12,9410 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Baris ketiga persamaan (8) dibagi dengan elemen pertama tidak 0 dari baris ketiga, yaitu 4,8824 sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,2353 \\ 0 & 1 & -0,2941 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8824 \\ 2,3529 \\ 2,6505 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Persamaan baris ketiga dikalikan elemen ketiga dari persamaan (9) baris pertama kemudian dikurangkan persamaan (9) baris pertama. Kemudian dengan cara yang sama untuk persamaan (9) baris kedua, sehingga didapat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5061 \\ 3,1324 \\ 2,6505 \end{bmatrix}$$

Dari sistem persamaan di atas, didapat nilai $x$, $y$ dan $z$ berikut ini:

$$x = \mathbf{1,5061};\quad y = \mathbf{3,1324} \text{ dan } z = \mathbf{2,6505}.$$

**Matriks Tridiagonal (Metode Sapuan Ganda Choleski)**

Matrik tridiagonal disebut juga metode penyelesaian langsung, karena pemakaiannya mudah dan matriks tridiagonal banyak dijumpai dalam berbagai permasalahan terutama dalam penyelesaian persamaan diferensial order dua. Sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} b_1x_1 + c_1x_2 & & & = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & & & = d_2 \\ & a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 & & = d_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & & = \cdot \\ & & a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} & = d_i \\ & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & = \cdot \\ & & \cdot \quad \cdot & = \cdot \\ & & a_nx_{n-1} + b_nx_n & = d_n \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Baris pertama pada persamaan (3.14) dari sistem memungkinkan untuk menulis bilangan tak diketahui $x_1$ sebagai fungsi bilangan tak diketahui $x_2$ dalam bentuk:

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1} \text{ atau } x_1 = P_1x_2 + Q_1 \tag{3.15}$$

dengan $P_1 = -\dfrac{c_1}{b_1}$ dan $Q_1 = \dfrac{d_1}{b_1}$, bila nilai $x_1$ disubstitusikan ke dalam baris kedua persamaan (3.14), maka didapat:

$$a_2\left(-\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1}\right) + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \quad \text{atau} \quad \left(-\frac{a_2c_1}{b_1} + b_2\right)x_2 = -c_2x_3 + \left(d_2 - a_2\frac{d_1}{b_1}\right)$$

dapat pula ditulis sebagai: $x_2 = P_2x_3 + Q_2$

dengan $P_2 = -\dfrac{c_2}{\left(-\dfrac{a_2c_1}{b_1} + b_2\right)}$ dan $Q_2 = \dfrac{d_2 - a_2\dfrac{d_1}{b_1}}{\left(-\dfrac{a_2c_1}{b_1} + b_2\right)}$, persamaan ini menunjukkan bahwa $x_2$ merupakan fungsi dari $x_3$, langkah seperti tadi dapat diulangi lagi untuk semua baris pada persamaan berikutnya. Dengan demikian setiap bilangan tak diketahui dapat dinyatakan sebagai bilangan tak diketahui berikutnya. Misalnya telah diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$x_{i-1} = P_{i-1}x_i + Q_{i-1}$$

Apabila nilai $x_{i-1}$ disubstitusikan ke dalam baris ke $i$ dari sistem persamaan (3.14), maka:

$$a_i(P_{i-1}x_i + Q_{i-1}) + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i$$

$$(a_iP_{i-1} + b_i)x_i + c_ix_{i+1} = d_i - (a_iQ_{i-1})$$

$$x_i = -\frac{c_i}{(a_i P_{i-1} + b_i)} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{(a_i P_{i-1} + b_i)}$$

Persamaan tersebut di atas dapat ditulis dalam bentuk:

$$x_i = P_i \, x_{i+1} + Q_i \tag{3.16a}$$

dengan:
$$P_i = -\frac{c_i}{(a_i P_{i-1} + b_i)} x_{i+1} \text{ dan} \tag{3.16b}$$

$$Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{(a_i P_{i-1} + b_i)} \tag{3.16c}$$

Untuk $i = 1$, maka persamaan (3.16a), menjadi:

$$x_1 = P_1 x_2 + Q_1 \tag{3.17a}$$

dengan:
$$P_1 = -\frac{c_1}{\left(a_1 P_0 + b_1\right)} \text{ dan} \tag{3.17b}$$

$$Q_1 = \frac{d_1 - a_1 Q_0}{\left(a_1 P_0 + b_1\right)} \tag{3.17c}$$

Perbandingan persamaan (3.17) dan (3.15), menunjukkan bahwa:

$$P_0 = 0 \text{ dan } Q_0 = 0 \tag{3.18}$$

Persamaan (3.17) dan (3.18), memungkinkan untuk menghitung koefisien $P_i$ serta $Q_i$ dari nilai $i = 1$ sampai $i = n$, langkah ini merupakan sapuan pertama. Setelah sampai titik ke $n$ hitungan dilakukan dalam arah kebalikannya, yaitu dari $n$ ke 1, untuk menghitung bilangan tak diketahui $x_i$.

Untuk itu persamaan terakhir dari sistem persamaan (3.14) ditulis dalam bentuk:

$$a_n \, x_{n-1} + b_n \, x_n = d_n \tag{3.19}$$

Pada sistem persamaan (3.16), apabila $i = n - 1$, maka:

$$x_{n-1} = P_{n-1} \, x_n + Q_{n-1} \tag{3.20}$$

Substitusi dari persamaan (3.20) ke dalam persamaan (3.19), akan memberikan:

$$a_n(P_{n-1} \, x_n + Q_{n-1}) + b_n x_n = d_n$$

$$(a_n P_{n-1} + b_n) \, x_n = d_n - a_n \, Q_{n-1}$$

$$x_n = \frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{\left(a_n P_{n-1} + b_n\right)}$$

Sesuai dengan persamaan (2.16a), maka: $x_n = Q_n$.

Nilai $x_n$ dapat diperoleh, berdasarkan nilai $x_n$ yang didapat maka nilai $x_{n-1}$ dapat dihitung pula dengan persamaan sebagai berikut: $x_{n-1} = P_{n-1} \, x_n + Q_{n-1}$. Dari nilai $x_{n-1}$ kemudian dihitung nilai $x_{n-2}$, $x_{n-3}$, dan seterusnya hingga ke nilai $x_1$.

**Contoh.** Selesaikan sistem persamaan berikut ini dengan menggunakan metode sapuan ganda.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &= 7\\
x_1 + x_2 - 3x_3 &= -10\\
6x_2 - 2x_3 + x_4 &= 7\\
2x_3 - 3x_4 &= 13
\end{aligned}
$$

**Penyelesaian:**

Sistem persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks tridiagonal, yang penyelesaiannya dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan berikut:

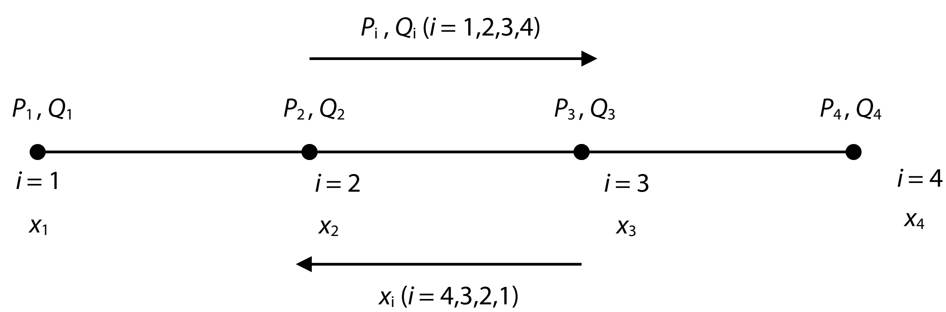
$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i \tag{4}$$

dengan:

$$P_i = -\frac{c_i}{(a_i P_{i-1} + b_i)} \text{ dan} \tag{5}$$

$$Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{(a_i P_{i-1} + b_i)} \tag{6}$$

Skema penyelesaian sistem persamaan dengan metode sapuan ganda sebagai berikut:




Langkah pertama dihitung nilai $P_i$ dan $Q_i$ ($i$ = 1, 2, 3, 4) dari kiri ke kanan. Setelah sampai ke titik $i = n = 4$, dihitung nilai $x_n = Q_n$. Berdasarkan nilai $x_n$ tersebut, kemudian hitungan dilanjutkan dari kanan ke kiri untuk mendapatkan nilai $x_i$ ($i$ = 4, 3, 2, 1).

a) *Menghitung koefisien $P_i$ dan $Q_i$* ($i$ = 1, 2, 3, 4)

Koefisien $P_i$ *dan* $Q_i$ dihitung dengan menggunakan persamaan (5) dan (6), berdasarkan sistem persamaan (c1).

Untuk $i = 1$, $P_0 = 0$ dan $Q_0 = 0$.

$$P_1 = -\frac{c_1}{\left(a_1 P_0 + b_1\right)} = -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{1}{2} = -0{,}5.$$

$$Q_1 = \frac{d_1 - a_1 Q_0}{\left(a_1 P_0 + b_1\right)} = \frac{7 - 0}{\left(0 + 2\right)} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Untuk $i = 2$, $P_1 = -0{,}5$ dan $Q_1 = 3{,}5$.

$$P_2 = -\frac{c_2}{(a_2P_1 + b_2)} = -\frac{-3}{(1(-0,5)+1)} = 6.$$

$$Q_2 = \frac{d_2 - a_2Q_1}{(a_2P_1 + b_2)} = \frac{(-10)-1(3,5)}{(1(-0,5)+1)} = \frac{-13,5}{0,5} = -27.$$

Untuk $i = 3$, $P_2 = 6$ dan $Q_2 = -27$.

$$P_3 = -\frac{c_3}{(a_3P_2 + b_3)} = -\frac{1}{(6(6)+(-2))} = -\frac{1}{34} = -0,02941.$$

$$Q_3 = \frac{d_3 - a_3Q_2}{(a_3P_2 + b_3)} = \frac{7-6(-27)}{(6(6)+(-2))} = \frac{169}{34} = 4,97059.$$

Untuk $i = n = 4$, $P_n = 0$ dan $Q_n = \dfrac{d_n - a_nQ_{n-1}}{(a_nP_{n-1} + b_n)}$, maka:

$$x_4 = Q_4 = \frac{d_4 - a_4Q_3}{(a_4P_3 + b_4)} = \frac{13-2(4,97059)}{(2(-0,02941)+(-3))} = \frac{3,05882}{-3,05882} = -1,00.$$

Setelah nilai $P_i$ dan $Q_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) didapat, lalu dihitung nilai $x_i$ ($i = 4, 3, 2, 1$).

b) *Menghitung* $x_i$ ($i = 4, 3, 2, 1$)

Variabel $x_i$ ($i = 4, 3, 2, 1$) dihitung dengan menggunakan persamaan (4):

$$x_i = P_i\, x_{i+1} + Q_i$$

Untuk $i = 4$, maka $x_4 = Q_4 = -1,00$.

Untuk $i = 3$, maka $x_3 = P_3x_4 + Q_3 = (-0,02941(-1,00)) + 4,97059 = 5,00$.

Untuk $i = 2$, maka $x_2 = P_2x_3 + Q_2 = (6(5,00)) + (-27) = 3,00$.

Untuk $i = 1$, maka $x_1 = P_1x_2 + Q_1 = (-0,5(3,00)) + 3,5 = 2,00$.

Dengan demikian hasil yang diperoleh adalah:

$$x_1 = \mathbf{2,00;} \quad x_2 = \mathbf{3,00;} \quad x_3 = \mathbf{5,00;} \quad x_4 = \mathbf{-1,00.}$$

Untuk mengetahui benar atau tidaknya hasil yang diperoleh, maka nilai-nilai tersebut dimasukkan ke dalam persamaan yang telah diselesaikan.

$$\begin{array}{llll}
2\,(2,00) + 3,00 & & = 7 & (= 7) \\
2,00 + 3,00 - 3\,(5,00) & & = -10 & (= -10) \\
6\,(3,00) - 2\,(5,00) + (-1,00) & & = 7 & (= 7) \\
2\,(5,00) - 3\,(-1,00) & & = 13 & (= 13)
\end{array}$$

### 3. Matriks Inversi

Pada matriks, operasi pembagian matriks tidak didefinisikan, akan tetapi operasi matriks yang serupa dengan pembagian adalah matriks inversi. Bila $A$ adalah **MBS**, maka matriks inversinya adalah $A^{-1}$, sedemikian sehingga:

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dengan I adalah matriks identitas.

Selain itu matriks inversi dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem yang berbentuk:

$$AX = C \text{ atau } A^{-1}C \tag{3.21}$$

Nilai $X$ dapat dihitung dengan mengalikan matriks inversi dari koefisien matriks $A$ dengan ruas kanan dari sistem persamaan yaitu $C$.

Metode Gauss-Jordan dapat digunakan untuk mencari matriks inversi, untuk itu koefisien matriks ditingkatkan dengan matriks identitas. Metode Gauss-Jordan dipakai untuk mereduksi koefisien matriks menjadi matriks identitas, setelah selesai, sisi kanan dari matriks yang ditingkatkan merupakan matriks inversi. Prosedur dari hitungan matriks inversi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & | & a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & | & a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

$A \qquad I \qquad I \qquad A^{-1}$

**Contoh.** Cari matriks inversi dari matriks sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian:**

Dilakukan dengan menggunakan metode Gauss-Jordan, dengan terlebih dahulu dilakukan peningkatan matriks dengan matriks identitas.

a) Matriks ditingkatkan, menjadi: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Baris pertama dibagi 3 (nilai yang akan dijadikan 1), menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3333 & -0,3333 & 0,3333 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Baris kedua dikurangi hasil dari baris pertama dikali 4, dan baris ketiga dikurangi hasil dari baris pertama dikali 2, menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3333 & -0,3333 & 0,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 5,6667 & -1,6667 & -1,3333 & 1 & 0 \\ 0 & -2,6667 & 5,6667 & -0,6667 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Baris kedua dibagi 5,6667 (nilai yang akan dijadikan 1), menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3333 & -0,3333 & 0,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,2941 & -0,2353 & 0,1765 & 0 \\ 0 & -2,6667 & 5,6667 & -0,6667 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Baris pertama dikurangi hasil dari baris kedua dikali 0,3333 dan baris ketiga ditambah hasil dari baris kedua dikali 2,6667 menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,2353 & 0,4118 & -0,0588 & 0 \\ 0 & 1 & -0,2941 & -0,2353 & 0,1765 & 0 \\ 0 & 0 & 4,8824 & -1,2941 & 0,4706 & 1 \end{bmatrix}$$

f) Baris ketiga dibagi 4,8824 (nilai yang akan dijadikan 1), menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,2353 & 0,4118 & -0,0588 & 0 \\ 0 & 1 & -0,2941 & -0,2353 & 0,1765 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2651 & 0,0964 & 0,2048 \end{bmatrix}$$

g) Baris pertama ditambah hasil dari baris ketiga dikali 0,2353 dan baris kedua ditambah hasil dari baris ketiga dikali 0,2941 menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,3494 & -0,0361 & 0,0482 \\ 0 & 1 & 0 & -0,3133 & 0,2048 & 0,0602 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2651 & 0,0964 & 0,2048 \end{bmatrix}$$

maka matriks inversnya adalah = $\begin{bmatrix} 0,3494 & -0,0361 & 0,0482 \\ -0,3133 & 0,2048 & 0,0602 \\ -0,2651 & 0,0964 & 0,2048 \end{bmatrix}$

**4. Metode Iterasi**

Metode ini lebih baik dibanding dengan metode langsung, misalnya untuk matriks yang tersebar yaitu matriks dengan banyak elemen nol dan juga dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan tidak linier.

1. Metode Jacobi

Dipandang sistem dengan 3 persamaan dan 3 bilangan tak diketahui:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Persamaan pertama dari sistem di atas dapat digunakan untuk menghitung $x_1$ sebagai fungsi dari $x_2$ dan $x_3$. Demikian juga persamaan kedua dan ketiga untuk menghitung $x_2$ dan $x_3$ sehingga didapat:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}} \\
x_2 &= \frac{(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)}{a_{22}} \\
x_3 &= \frac{(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)}{a_{33}}
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Hitungan dimulai dengan nilai perkiraan awal sembarang untuk variabel yang dicari (biasanya semua variabel diambil sama dengan nol). Nilai perkiraan awal disubstitusikan ke dalam ruas kanan dari sistem persamaan (3.22). Selanjutnya nilai variabel yang didapat tersebut disubstitusikan ke ruas kanan dari sistem (3.23) lagi untuk mendapatkan nilai perkiraan kedua. Prosedur tersebut diulangi lagi sampai nilai setiap variabel pada iterasi ke $n$ mendekati nilai pada iterasi ke $n - 1$. Apabila indeks $n$ menunjukkan jumlah iterasi, maka persamaan (3.23) dapat ditulis menjadi:

$$
\begin{aligned}
x_1^n &= \frac{(b_1 - a_{12}x_2^{n-1} - a_{13}x_3^{n-1})}{a_{11}} \\
x_2^n &= \frac{(b_2 - a_{21}x_1^{n-1} - a_{23}x_3^{n-1})}{a_{22}} \\
x_3^n &= \frac{(b_3 - a_{31}x_1^{n-1} - a_{32}x_2^{n-1})}{a_{33}}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Iterasi hitungan berakhir setelah:

$$x_1^{n-1} \approx x_1^n, x_2^{n-1} \approx x_2^n, \text{ dan } x_3^{n-1} \approx x_3^n,$$

atau telah dipenuhi kriteria berikut:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_i^n - x_i^{n-1}}{x_i^n} \right| \times 100\% < \varepsilon_s$$

dengan $\varepsilon_s$ adalah batasan ketelitian yang dikehendaki.

**Contoh.**

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metode iterasi Jacobi:

$$3x + y - z = 5$$
$$4x + 7y - 3z = 20$$
$$2x - 2y + 5z = 10$$

**Penyelesaian:**

Sistem persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk:

$$x = \frac{5 - y + z}{3}$$
$$y = \frac{20 - 4x + 3z}{7}$$
$$z = \frac{10 - 2x + 2y}{5}$$

Langkah pertama dicoba nilai $x = y = z = 0$ dan dihitung nilai $x'$, $y'$, dan $z'$.

$$x' = \frac{5 - 0 + 0}{3} = 1{,}66667$$
$$y' = \frac{20 - 0 + 0}{7} = 2{,}85714$$
$$z' = \frac{10 - 0 + 0}{5} = 2$$

Nilai $x'$, $y'$, dan $z'$ yang diperoleh tidak sama dengan nilai pemisalan. Iterasi dilanjutkan dengan memasukkan nilai $x'$, $y'$, dan $z'$ kedalam persamaan untuk menghitung $x''$, $y''$, dan $z''$ dan kesalahan yang terjadi.

$$x'' = \frac{5 - 2{,}85714 + 2}{3} = 1{,}38095$$
$$\varepsilon_x = \frac{1{,}38095 - 1{,}66667}{1{,}38095} \times 100\% = -20{,}69\%$$
$$y'' = \frac{20 - 4(1{,}66667) + 3(2)}{7} = 2{,}76190$$
$$\varepsilon_y = \frac{2{,}76190 - 2{,}85714}{2{,}76190} \times 100\% = -3{,}45\%$$
$$z'' = \frac{10 - 2(1{,}66667) + 2(2)}{5} = 2{,}13333$$
$$\varepsilon_z = \frac{2{,}13333 - 2}{2{,}13333} \times 100\% = 6{,}25\%$$

Hitungan dilanjutkan dengan prosedur di atas, sampai akhirnya diperoleh kesalahan yang relatif kecil (terhadap ketelitian yang diharapkan). Untuk mempercepat dan memudahkan hitungan, dibuat program untuk menghitung sistem persamaan linier dengan menggunakan metode Jacobi. Dengan tingkat ketelitian sebesar 0,1%, maka hasil hitungan adalah $x_1$ = **1,5063**; $x_2$ = **3,1328**; $x_3$ = **2,6504**.

2. Metode Gauss-Seidel

Di dalam metode Jacobi, nilai $x_1$ yang dihitung dari persamaan pertama tidak digunakan untuk menghitung nilai $x_2$ dengan persamaan kedua. Demikian juga nilai $x_2$ tidak digunakan untuk mencari $x_3$, sehingga nilai-nilai tersebut tidak dimanfaatkan. Sebenarnya nilai-nilai baru tersebut lebih baik dari nilai-nilai yang lama. Di dalam metode Gauss-Seidel nilai-nilai tersebut dimanfaatkan untuk menghitung variabel berikutnya.

Seperti dalam metode Jacobi sistem persamaan (3.22) diubah menjadi sistem persamaan (3.23). Kemudian ke dalam persamaan pertama dari sistem, disubstitusikan nilai sembarang $x_2^0, x_3^0$ (biasanya diambil nol ), sehingga:

$$x_1^1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0)}{a_{11}} \qquad (3.25a)$$

Nilai baru dari $x_1^1$ tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan kedua dari sistem (3.23), sehingga:

$$x_2^1 = \frac{(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0)}{a_{22}} \qquad (3.25b)$$

Demikian juga ke dalam persamaan ketiga dari sistem (3.23) disubstitusikan nilai baru $x_1^1$ dan $x_2^1$, sehingga didapat:

$$x_3^1 = \frac{(b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1)}{a_{33}} \qquad (3.25c)$$

Dengan cara seperti ini nilai $x_1, x_2, x_3$ akan diperoleh lebih cepat dari pada metode Jacobi.

**Contoh**

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metode iterasi Gauss Seidel:

$$3x + y - z = 5$$
$$4x + 7y - 3z = 20$$
$$2x - 2y + 5z = 10$$

**Penyelesaian:**

Langkah pertama dicoba nilai $y = z = 0$ dan dihitung $x'$ dengan menggunakan persamaan (3.25a).

$$x' = \frac{5 - 0 + 0}{3} = 1,6667$$

Persamaan (3.25b) digunakan untuk menghitung nilai $y'$:

$$y' = \frac{20 - 4(1,6667) + 3(0)}{7} = 1.90476$$

Nilai $z'$ dihitung dengan persamaan (3.25c):

$$z' = \frac{10 - 2(1{,}6667) + 2(1{,}90476)}{5} = 2{,}09524$$

Nilai $x'$, $y'$, dan $z'$ yang diperoleh tidak sama dengan nilai pemisalan. Iterasi dilanjutkan dengan prosedur di atas untuk menghitung $x''$, $y''$, dan $z''$ serta kesalahan yang terjadi.

$$x'' = \frac{5 - 1{,}90476 + 2{,}09524}{3} = 1{,}73016$$

$$\varepsilon_x = \frac{1{,}73016 - 1{,}6667}{1{,}73016} \times 100\% = 3{,}67\%$$

$$y'' = \frac{20 - 4(1{,}73016) + 3(2{,}09524)}{7} = 2{,}76644$$

$$\varepsilon_y = \frac{2{,}76644 - 1{,}90476}{2{,}76644} \times 100\% = 31{,}15\%$$

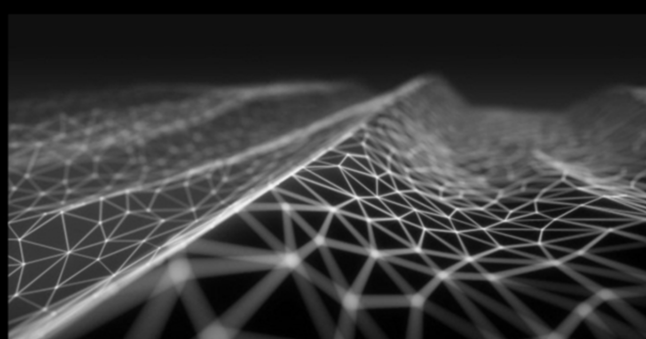
$$z'' = \frac{10 - 2(1{,}73016) + 2(2{,}76644)}{5} = 2{,}41451$$

$$\varepsilon_z = \frac{2{,}41451 - 2{,}09524}{2{,}41451} \times 100\% = 13{,}22\%$$

Hitungan dilanjutkan dengan prosedur di atas, sampai akhirnya diperoleh kesalahan yang relatif kecil (terhadap yang diharapkan). Untuk mempercepat dan memudahkan hitungan, dibuat program komputer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan metode Jacobi dengan tingkat ketelitian yaitu sebesar 0,1%, maka hasil hitungan diperoleh yaitu $x_1$ = **1,5066**; $x_2$ = **3,1311**; $x_3$ = **2,6498**.

# BAB 4

## INTERPOLASI



# BAB 4
# INTERPOLASI

Capaian Pembelajaran : memahami dan mampu melakukan perhitungan interpolasi

Kemampuan Akhir Pembelajaran :
1. menjelaskan akan apa yang dimaksud dengan pendekatan sebuah fungsi
2. mampu melakukan perhitungan interpolasi linier
3. mampu melakukan perhitungan interpolasi kuadratik
5. mampu melakukan perhitungan interpolasi polinomial

## A. LANDASAN TEORI

Interpolasi adalah teknik mencari harga suatu fungsi pada suatu titik di antara dua titik yang nilai fungsi pada ke-2 titik tersebut sudah diketahui. Cara menentukan harga fungsi f dititik $x^* \in [x_0, x_n]$ dengan menggunakan informasi dari seluruh atau sebagian titik-titik yang diketahui ( $x_0, x_1, \ldots, x_n$)

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | ……. | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | ……. | $f(x_n)$ |

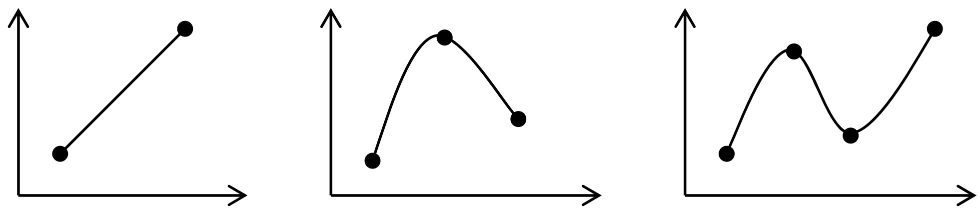
Teknik umum yang digunakan

- Membentuk polinomial berderajat ≤ n yg mempunyai harga fungsi di titik-titik yang diketahui → Polinomial Interpolasi
- Masukkan titik yang ingin dicari harga fungsinya ke dalam polinomial interpolasi

Pada beberapa masalah kita sering memerlukan suatu penaksiran nilai antara (intermediate values) yaitu suatu nilai diantara beberapa titik data yang telah diketahui nilainya. Metode yang biasa digunakan untuk menentukan titik antara tersebut adalah melakukan interpolasi. Metode interpolasi yang biasa digunakan adalah dengan interpolasi Polinomial. Persamaan polinomial orde ke n yang dipakai secara umum adalah :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n \tag{4.1}$$

Persamaan polinomial ini merupakan persamaan aljabar yang hanya mengandung jumlah dari variabel x berpangkat bilangan bulat (integer). Untuk n + 1 titik data, hanya terdapat satu polinomial order n atau kurang yang melalui semua titik. Misalnya hanya terdapat satu garis lurus (polinomial order satu) yang menghubungkan dua titik, lihat Gambar 4.1,(a). Demikian juga dengan menghubungkan tiga titik dapat membentuk suatu parabola (polinomial order 2), lihat Gambar 4.1 (b), sedang bila empat titik dapat dihubungkan dengan kurva polinomial order tiga, lihat Gambar 4.1 (c), Dengan operasi interpolasi kita dapat menentukan suatu persamaan polinomial order ke n yang melalui n + 1 titik data, yang kemudian digunakan untuk menentukan suatu nilai (titik antara) diantara titik data tersebut.

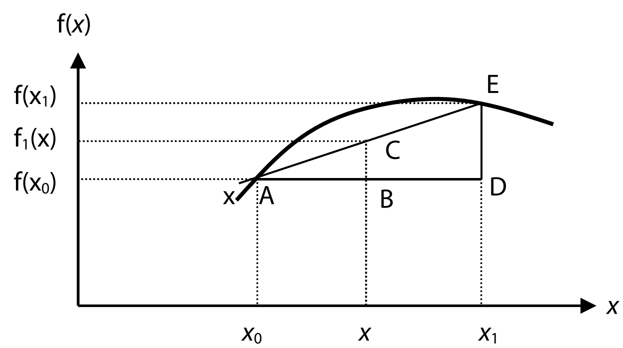


(a) (b) (c)

Gambar 4.1

**1. Interpolasi Linier**

Dengan menghubungkan dua buah titik data dengan garis lurus. Diketahui nilai fungsi di titik $x_0$ , yaitu $f(x_0)$ dan dititik $x_1$ , yaitu $f(x_1)$, akan dicari nilai fungsi dititik $x$, yaitu $f_1(x)$. Dalam hal ini indeks 1 pada $f_1(x)$ menunjukan interpolasi polinomial order 1.




Dari gambar : $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DE}{AD}$

maka : $\dfrac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad \text{dengan} \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} : \text{Kemiringan}$$

garis

**Contoh.**

Akan dicari nilai ln 2 (dengan nilai exact ln 2 = 0.69314718), jika diketahui data :

ln 1 = 0

ln 6 = 1.7917595

dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$ , maka untuk ln 2 :

$$f_1(2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f_1(2) = 0 + \frac{1.7917595 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0.35835190$$

besar kesalahan : $E_t = \dfrac{0.69314718 - 0.35835190}{0.69314718} \times 100\% = 48.3\%$

Apabila ingin lebih teliti dapat didekati dengan interpolasi yang lebih kecil, dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 4$ , dimana ln 1 = 0 dan ln 4 = 1,3862944,

maka untuk ln 2

$$f_1(2) = 0 + \frac{1{,}3862944 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0.46209813$$

besar kesalahan : $E_t = \dfrac{0.69314718 - 0.46209813}{0.69314718} \times 100\% = 33.3\%$

Kesimpulan semakin kecil interval antara titik data, hasil perkiraan interpolasi akan semakin baik.

## 2. Interpolasi Kuadrat

Perkiraan dilakukan dengan menggunakan garis lengkung dengan data tiga buah titik, maka dibuat polinomial order dua. Adapun persamaannya :

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x - b_1 x_0 + b_2 x^2 + b_2 x_0 x_1 - b_2 x x_0 - b_2 x x_1 \quad \text{atau}$$

$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{------- persamaan polinomial order 2}$$

dengan $a_0 = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1$

$a_1 = b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1$

$a_2 = b_2$

bila $x = x_0$ maka : $f_2(0) = b_0 + b_1(x_0 - x_0) + b_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)$ dan $b_0 = f(x_0)$

bila $b_0 = f(x_0)$ dan $x = x_1$ maka :

$$f(x_1) = f(x_0) + b_1(x_1 - x_0) + b_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) \text{ atau } b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

analog dengan cara diatas bila $b_0$ dan $b_1$ dimasukan kedalam persamaan $f$(x) dan x = $x_2$

$$\text{maka : } b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad \text{atau : } b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

**Contoh.** Akan dicari nilai ln 2 (dengan nilai exact ln 2 = 0.69314718), jika diketahui data:

$x_0 = 1, \quad f(x_0) = 0$

$x_1 = 4, \quad f(x_1) = 1.3862944$

$x_2 = 6, \quad f(x_2) = 1.7917595$

maka : $f_2(x_2) = b_0 + b_1(x_0 - x_0) + b_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)$

$b_0 = f(x_0) = 0$

$$b_1 = \frac{1.3862944 - 0}{4 - 1} = 0.46209813$$

$$b_2 = \frac{\frac{1.7917595 - 1.3862944}{6 - 4} - 0.46209813}{6 - 1} = -0.051873116$$

$$f_2(2) = 0 + 0.46209813(x_1 - 1) - 0.051873116(x - 1)(x - 4) = 0.56584436$$

$$\text{dengan, } E_t = \frac{0.69314718 - 0.56584436}{0.69314718} \times 100\% = 18.4\%$$

### 3. Interpolasi Polinomial

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots\dots\dots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

dengan

$b_0 = f(x_0)$

$b_1 = f[x_1, x_0]$

$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$

$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots\dots\dots\dots, x_1, x_0]$

Tanda { [.......] } adalah pembagian beda hingga (b – h)

$$\text{b – h pertama : } \quad f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$\text{b – h kedua : } \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$\text{b – h ke-n : } \quad f[x_n, x_{n-1}, \dots\dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots\dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots\dots, x_0]}{x_k - x_0}$$

**Contoh**

Akan dicari nilai ln 2 (dengan nilai exact ln 2 = 0.69314718), jika diketahui data :

$x_0 = 1$ , $f(x_0) = 0$

$x_1 = 4$ , $f(x_1) = 1.3862944$

$x_2 = 6$ , $f(x_2) = 1.7917595$

$x_3 = 5$ , $f(x_3) = 1.609437$ (sebagai tambahan )

Jawaban : disini diambil sampai n = 3

Maka : $f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + .......... + b_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$

$f_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

dihitung :

b-h pertama :

$$b_1 = f\left[x_1, x_0\right] = \frac{1.3862944 - 0}{4 - 1} = 0.46209813$$

untuk $f\left[x_2, x_1\right] = \dfrac{1.7917595 - 1.3862944}{6 - 4} = 0.20273255$

untuk $f\left[x_3, x_2\right] = \dfrac{1.6054379 - 1.7917595}{5 - 6} = 0.18232160$

dihitung :

b-h kedua :

$$b_2 = f\left[x_2, x_1, x_0\right] = \frac{0.20273255 - 0.46209813}{6 - 1} = -0.051873116$$

untuk $f\left[x_3, x_2, x_1\right] = \dfrac{0.18232160 - 0.20273255}{5 - 4} = -0.020410950$

dihitung :

b-h ketiga :

$$b_3 = f\left[x_3, x_2, x_1, x_0\right] = \frac{-0.020410950 - (-0.051873116)}{5 - 1} = 0.0078655415$$

Jadi :

$f_3(x) = 0 + 0.46209813(x - 1) - 0.051873116(x - 1)(x - 4) + 0.0078655415(x - 1)(x - 4)(x - 6)$

maka untuk ln 2 , dimana x = 2

$f_3(2) = 0{,}62876869$

apabila dihitung Et = 9.3 % (kesalahan relatihnya makin kecil lagi, untuk mendekati nilai exact dapat dilakukan untuk tingkat n = 4 atau lebih besar lagi)

## 4. Interpolasi Polinomial Lagrange

Penurunan dari polinomial Newton

$$f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0).f\left[x_1, x_0\right]$$

dimana : $f\left[x_1, x_0\right] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \dfrac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$

maka : $f_1(x) = f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \dfrac{x - x_0}{x_0 - x_1} f(x_0)$

$$f_1(x) = \left\{\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right\} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

jadi : $f_1(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$

(interpolasi polinomial Lagrange order satu)

Analog dengan cara diatas :

Interpolasi polinomial Lagrange order dua

$$f_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Interpolasi polinomial Lagrange order n

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).f(x_i)$$

dimana : $L_i(x) = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j \neq i} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$ , simbol $\prod$ = perkalian

**Contoh**. Interpolasi polinomial Lagrange order 3

$$f_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x).f(x_i) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) + L_2(x).f(x_2) + L_3(x).f(x_3)$$

dengan $L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \dfrac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot \dfrac{x - x_3}{x_0 - x_3}$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$L_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

**Contoh.** Diketahui :

$x_0 = 1$ , $f(x_0) = 0$

$x_1 = 4$ , $f(x_1) = 1.3862944$

$x_2 = 6$ , $f(x_2) = 1.7917595$

Hitung ln 2 dengan Interpolasi Polinomial Lagrange order 1, order 2, dan order 3

Jawab :

a. Order Satu

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.f(x_1)$$

maka ln 2 , berarti x = 2

$$f_1(2) = \frac{2-4}{1-4}.0 + \frac{2-1}{4-1}.1.3862944 = 0.4620981$$

b. Order dua

$$f_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}.\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

maka ln 2 , berarti x = 2

$$f_2(2) = \frac{2-4}{1-4}.\frac{2-6}{1-6}.0 + \frac{2-1}{4-1}.\frac{2-6}{4-6}1.3862944 + \frac{2-1}{6-1}.\frac{2-4}{6-4}.1.7917595 = 0.56584437$$

c. Order Tiga , dimana data : $x_3 = 5$ , $f(x_3) = 1.609437$

$$f_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x).f(x_i) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) + L_2(x).f(x_2) + L_3(x).f(x_3)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}.\frac{x - x_3}{x_0 - x_3} = L_0(2) = \frac{2-4}{1-4}.\frac{2-6}{1-6}.\frac{2-5}{1-5}$$

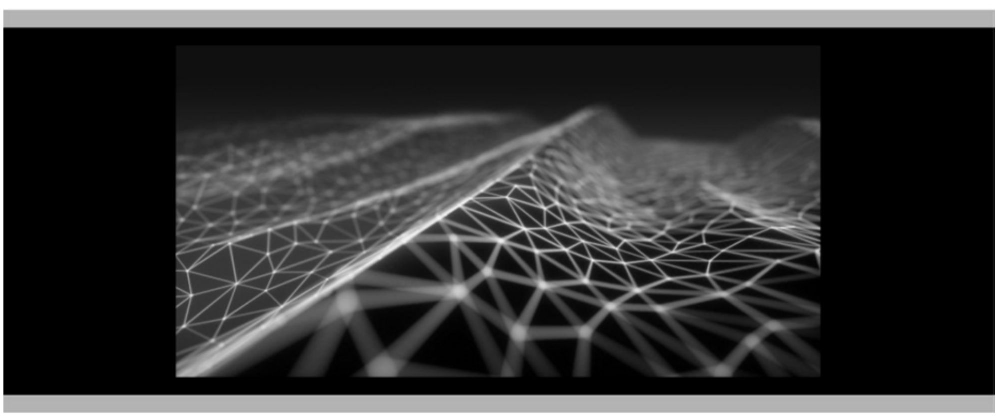
$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}.\frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}.\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.\frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$L_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0}.\frac{x - x_1}{x_3 - x_1}.\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

# BAB 5

## INTEGRASI NUMERIK



# BAB 5
# INTEGRASI NUMERIK

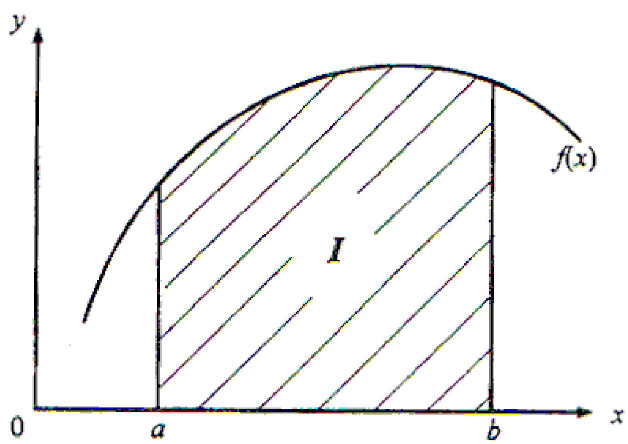
| | |
|---|---|
| Capaian Pembelajaran : | mampu menaksir integrasi fungsi dengan metode numeric |
| Kemampuan Akhir Pembelajaran : | mahasiswa dapat<br>1. menjelaskan aturan Simpson untuk menaksir integral fungsi<br>2. menjelaskan metode kuadratur Gauss untuk menaksir integral fungsi |

## A. LANDASAN TEORI

Integral suatu fungsi adalah operator matematik yang dipresentasikan dalam bentuk:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \tag{5.1}$$

dan merupakan integral suatu fungsi *f* (*x*) terhadap variabel *x* dengan batas-batas integrasi adalah dari $x = a$ sampai $x = b$. Seperti pada Gambar 5.1 dan persamaan (5.1), yang dimaksud dengan integral adalah nilai total atau luasan yang dibatasi oleh fungsi *f* (*x*) dan sumbu-*x*, serta antara batas $x = a$ dan $x = b$.




**Gambar 5.1.** Integral suatu fungsi

Dalam integral analitis, persamaan (5.1) dapat diselesaikan menjadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

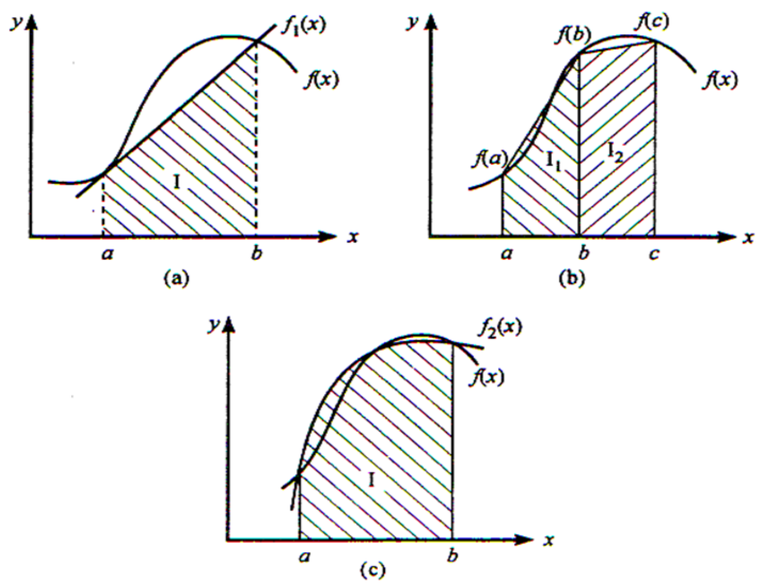
dengan $F(x)$ adalah integral dari $f(x)$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$.

**Contoh.**

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \left[\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(0)^3\right] = 9.$$

Integral numerik dilakukan apabila:

1) Integral tidak dapat (sukar) diselesaikan secara analisis.
2) Fungsi yang diintegralkan tidak diberikan dalam bentuk analitis, tetapi secara numerik dalam bentuk angka (tabel).




**Gambar 5.2.** Metode integral numerik

**Metode integral numerik** merupakan integral tertentu yang didasarkan pada hitungan perkiraan. Hitungan perkiraan tersebut dilakukan dengan fungsi polinomial yang diperoleh berdasar data tersedia. Bentuk paling sederhana adalah apabila tersedia dua titik data yang dapat dibentuk fungsi polinomial order satu yang merupakan garis lurus (linier). Seperti pada Gambar 5.2a, akan dihitung: $I = \int_a^b f(x)\,dx$ yang merupakan luasan antara kurve $f(x)$ dan sumbu-$x$ serta antara $x = a$ dan $x = b$, bila nilai $f(a)$ dan $f(b)$ diketahui maka dapat dibentuk fungsi polinomial order satu $f_1(x)$.

Dalam gambar tersebut fungsi $f(x)$ didekati oleh $f_1(x)$, sehingga integralnya dalam luasan antara garis $f_1(x)$ dan sumbu-$x$ serta antara $x = a$ dan $x = b$. Bidang tersebut merupakan bentuk trapesium yang luasannya dapat dihitung dengan rumus geometri, yaitu:

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Dalam integral numerik, pendekatan tersebut dikenal dengan metode trapesium. Dengan pendekatan ini integral suatu fungsi adalah sama dengan luasan bidang yang diarsir (Gambar 5.2), sedang kesalahannya adalah sama dengan luas bidang yang tidak diarsir.

Apabila hanya terdapat dua data $f(a)$ dan $f(b)$, maka hanya bisa dibentuk satu trapesium dan cara ini dikenal dengan metode trapesium satu pias. Jika tersedia lebih dari dua data, maka dapat dilakukan pendekatan dengan lebih dari satu trapesium, dan luas total adalah jumlah dari trapesium-trapesium yang terbentuk. Cara ini dikenal dengan metode trapesium banyak pias. Seperti pada Gambar 5.2b, dengan tiga data dapat dibentuk dua trapesium, dan luas kedua trapesium (bidang yang diarsir) adalah pendekatan dari integral fungsi. Hasil pendekatan ini lebih baik dari pada pendekatan dengan satu pias. Apabila digunakan lebih banyak trapesium hasilnya akan lebih baik.

Fungsi yang diintegralkan dapat pula didekati oleh fungsi polinomial dengan order lebih tinggi, sehingga kurve yang terbentuk tidak lagi linier, seperti dalam metode trapesium, tetapi kurve lengkung. Seperti pada Gambar 7.2c, tiga data yang ada dapat digunakan untuk membentuk polinomial order tiga. Metode Simpson merupakan metode integral numerik yang menggunakan fungsi polinomial dengan order lebih tinggi. Metode Simpson 1/3 menggunakan tiga titik data (polinomial order dua) dan Simpson 3/8 menggunakan empat titik data (polinomial order tiga). Jarak antara titik data tersebut adalah sama.

## 1. Metode Trapesium

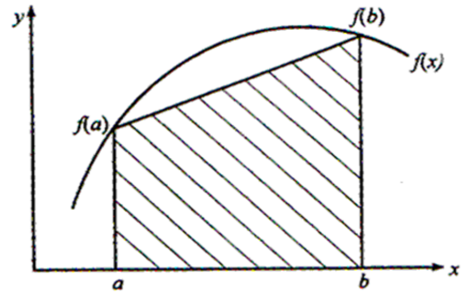
Metode trapesium merupakan metode pendekatan integral numerik dengan persamaan polinomial order satu. Dalam metode ini kurve lengkung dari fungsi $f(x)$ digantikan oleh garis lurus. Seperti pada Gambar 5.2, luasan bidang di bawah fungsi $f(x)$ antara nilai $x = a$ dan nilai $x = b$ didekati oleh luas satu trapesium yang terbentuk oleh garis lurus yang menghubungkan $f(a)$ dan $f(b)$ dan sumbu-$x$ serta antara $x = a$ dan $x = b$. Pendekatan dilakukan dengan satu pias (trapesium). Menurut rumus geometri, luas trapesium adalah lebar kali tinggi rerata, yang berbentuk:

$$I \approx (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{5.2}$$

Pada Gambar 5.3, penggunaan garis lurus untuk mendekati garis lengkung menyebabkan terjadinya kesalahan sebesar luasan yang tidak diarsir. Besarnya kesalahan yang terjadi dapat diperkirakan dari persamaan berikut:

$$E = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a) \qquad (5.3)$$

dengan $\xi$ adalah titik yang terletak di dalam interval *a* dan *b*.




**Gambar 7.3.** Metode trapesium

Persamaan (5.3) menunjukkan bahwa apabila fungsi yang diintegralkan adalah linier, maka metode trapesium akan memberikan nilai eksak karena turunan kedua dari fungsi linier adalah nol. Sebaliknya untuk fungsi dengan derajat dua atau lebih, penggunaan metode trapesium akan memberikan kesalahan.

**Contoh.** Gunakan metode trapesium satu pias untuk menghitung, $I = \int_0^4 e^x \, dx$.

**Penyelesaian:**

Bentuk integral di atas dapat diselesaikan secara analitis:

$$AI = \int_0^4 e^x dx = \left[ e^x \right]_0^4 = \left[ e^4 - e^0 \right] = 53{,}598150.$$

Hitungan integral numerik dilakukan dengan menggunakan persamaan (5.2):

$$I \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = (4-0)\,\frac{e^0 + e^4}{2} = 111{,}1963$$

Untuk mengetahui tingkat ketelitian dari integral numerik, hasil hitungan numerik dibandingkan dengan hitungan analitis.

Kesalahan relatif terhadap nilai eksak adalah:

$$\varepsilon_t = \frac{53{,}598150 - 111{,}1963}{53{,}598150} \times 100\% = -107{,}46\%.$$

Terlihat bahwa penggunaan metode trapesium satu pias memberikan kesalahan sangat besar (lebih dari 100 %).

## 2. Metode Trapesium Dengan Banyak Bias

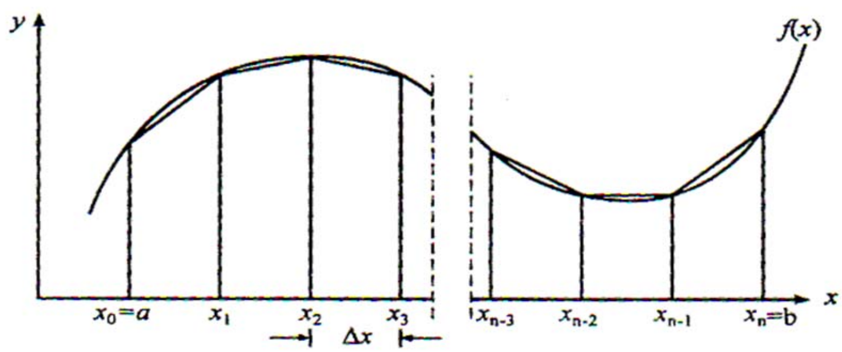
Dari contoh soal di atas terlihat bahwa pendekatan dengan menggunakan satu pias (trapesium) menimbulkan kesalahan sangat besar. Untuk mengurangi kesalahan yang terjadi maka kurve lengkung didekati oleh sejumlah garis lurus, sehingga terbentuk banyak pias (Gambar 5.4). Luas bidang adalah jumlah dari luas beberapa pias tersebut. Semakin kecil pias yang digunakan, hasil yang didapat menjadi semakin teliti.

Dalam Gambar 5.4, panjang tiap pias adalah sama yaitu $\Delta x$. Apabila terdapat $n$ pias, berarti panjang masing-masing pias adalah: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Batas-batas pias diberi notasi: $x_o = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$

Integral total dapat ditulis dalam bentuk:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \qquad (5.4)$$




**Gambar 5.4.** Metode trapesium dengan banyak pias

Substitusi persamaan (5.2) ke dalam persamaan (5.4) akan didapat:

$$I = \Delta x\,\frac{f(x_1)+f(x_0)}{2} + \Delta x\,\frac{f(x_2)+f(x_1)}{2} + \ldots + \Delta x\,\frac{f(x_n)+f(x_{n-1})}{2}$$

atau

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \qquad (5.5)$$

atau

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \qquad (5.6)$$

Besarnya kesalahan yang terjadi pada penggunaan banyak pias adalah:

$$\varepsilon_t = -\frac{\Delta x^2}{12}(b-a)f''(x_i) \tag{5.7}$$

yang merupakan kesalahan order dua. Apabila kesalahan tersebut diperhitungkan dalam hitungan integral, maka akan didapat hasil yang lebih teliti. Bentuk persamaan trapesium dengan memperhitungkan koreksi adalah:

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] - \frac{\Delta x^2}{12}\left(b-a\right)f''(\xi) - O\left(\Delta x^4\right) \tag{5.8}$$

Untuk kebanyakan fungsi, bentuk $f''(\xi)$ dapat didekati oleh:

$$f''\left(\xi\right) = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} \tag{5.9}$$

Substitusi persamaan (5.9) ke dalam persamaan (5.8) didapat:

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] - \frac{\Delta x^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right] \tag{5.10}$$

Bentuk persamaan (5.10) disebut dengan persamaan trapesium dengan koreksi ujung, karena memperhitungkan koreksi pada ujung interval *a* dan *b*.

Metode trapesium dapat digunakan untuk integral suatu fungsi yang diberikan dalam bentuk numerik pada interval diskret. Koreksi pada ujung-ujungnya dapat didekati dengan mengganti diferensial $f'(a)$ dan $f'(b)$ dengan diferensial beda hingga.

**Contoh.** Gunakan metode trapesium empat pias dengan lebar pias adalah $\Delta x = 1$ untuk menghitung:

$$I = \int_0^4 e^x \, dx$$

**Penyelesaian:**

Metode trapesium dengan 4 pias, sehingga panjang pias adalah:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1.$$

Luas bidang dihitung dengan persamaan (5.6):

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^0 + e^4 + 2\left(e^1 + e^2 + e^3\right)\right] = 57{,}991950.$$

Kesalahan relatif terhadap nilai eksak:

$$\varepsilon_t = \frac{53{,}598150 - 57{,}991950}{53{,}598150} \times 100\% = -8{,}2\%.$$

Apabila digunakan metode trapesium dengan koreksi ujung, maka integral dihitung dengan persamaan (5.10). Dalam persamaan tersebut koreksi ujung mengandung turunan pertama dari fungsi.

Apabila $f(x) = e^x$, turunan pertamanya adalah $f' = e^x$; sehingga:

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] - \frac{\Delta x^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^0 + e^4 + 2(e^1 + e^2 + e^3)\right] - \frac{1}{12}(e^4 - e^0)$$

$$= 57{,}991950 - 4{,}466513 = 53{,}525437$$

Kesalahan relatif terhadap nilai eksak:

$$\varepsilon_t = \frac{53{,}598150 - 53{,}525437}{53{,}598150} \times 100\% = 0{,}14\%.$$

**Contoh.** Diberikan tabel data berikut:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 3 | 9 | 19 | 33 |

Hitung luasan di bawah fungsi $f(x)$ dan di antara $x = 0$ dan $x = 4$, dengan menggunakan metode trapesium dan trapesium dengan koreksi ujung.

**Penyelesaian:**

Integral numerik dihitung dengan persamaan (5.6):

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + 33 + 2(3 + 9 + 19)\right] = 48.$$

Apabila digunakan metode trapesium dengan koreksi ujung, integral dihitung dengan persamaan (5.10):

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] - \frac{\Delta x^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right]$$

Turunan pertama pada ujung-ujung dihitung dengan diferensial beda hingga:

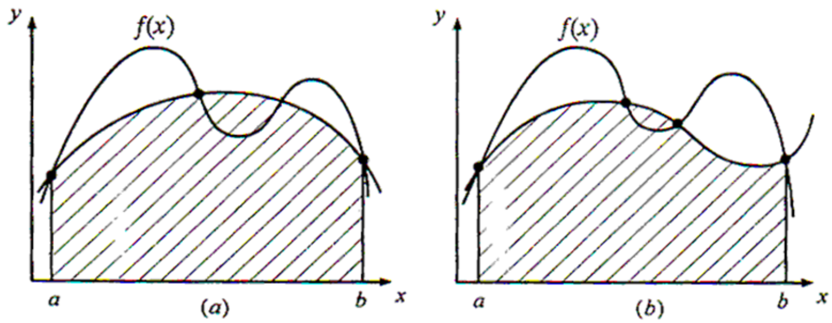
$$f'(x_1 = a = 0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{3 - 1}{1} = 2.$$

$$f'(x_n = b = 4) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{33 - 19}{1} = 14.$$

$$I = \frac{1}{2}\left[1 + 33 + 2(3 + 9 + 19)\right] - \frac{1}{12}(14 - 2) = 48 - 1 = 47.$$

### 3. Metode Simpson

Di samping menggunakan rumus trapesium dengan interval yang lebih kecil, cara lain untuk mendapatkan perkiraan yang lebih teliti adalah menggunakan polinomial order lebih tinggi untuk menghubungkan titik-titik data. Misalnya, apabila terdapat satu titik tambahan di antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka ketiga titik dapat dihubungkan dengan fungsi parabola (Gambar 5.5a). Apabila terdapat dua titik tambahan dengan jarak yang sama antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka keempat titik tersebut dapat dihubungkan dengan polinomial order tiga (Gambar 5.5b). Rumus yang dihasilkan oleh integral di bawah polinomial tersebut dikenal dengan metode (aturan) Simpson.




**Gambar 5.5. Aturan Simpson**

1) *Aturan Simpson* 1/3

Di dalam aturan Simpson 1/3 digunakan polinomial order dua (persamaan parabola) yang melalui titik $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ dan $f(x_{i+1})$ untuk mendekati fungsi. Rumus Simpson dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor. Untuk itu, dipandang bentuk integral berikut ini.

$$I(x) = \int_a^x f(x)dx \tag{5.11}$$

Apabila bentuk tersebut didiferensialkan terhadap *x*, akan menjadi:

$$I'(x) = \frac{dI(x)}{dx} = f(x) \tag{5.12}$$

Dengan memperhatikan Gambar 5.6. dan persamaan (5.12) maka persamaan deret Taylor adalah:

$$I(x_{i+1}) = I(x_i + \Delta x) = I(x_i) + \Delta x f(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f'''(x_i) + O\left(\Delta x^5\right) \tag{5.13}$$

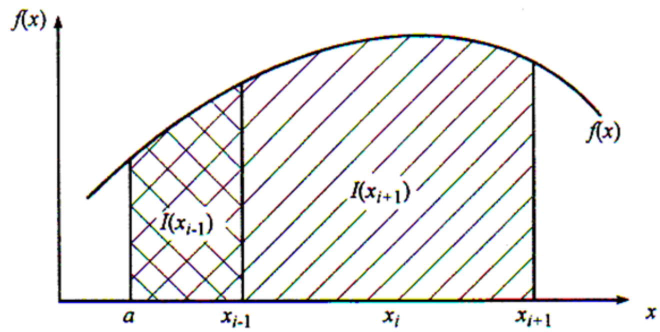
$$I(x_{i-1}) = I(x_i - \Delta x) = I(x_i) - \Delta x f(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f'(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f'''(x_i) - O\left(\Delta x^5\right) \tag{5.14}$$

Pada Gambar 5.6, nilai $I(x_{i+1})$ adalah luasan dibawah fungsi $f(x)$ antara batas $a$ dan $x_{i+1}$. Sedangkan nilai $I(x_{i-1})$ adalah luasan antara batas $a$ dan $I(x_{i-1})$. Dengan demikian luasan di bawah fungsi antara batas $x_{i-1}$ dan $x_{i+1}$ yaitu ($A_i$), adalah luasan $I(x_{i+1})$ dikurangi $I(x_{i-1})$ atau persamaan (5.13) dikurangi persamaan (5.14).

$$A_i = I(x_{i+1}) - I(x_{i-1})$$

atau

$$A_i = 2\Delta x f(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3} f''(x_i) + O(\Delta x^5) \qquad (5.15)$$




**Gambar 5.6** Penurunan metode Simpson

Nilai $f''(x_i)$ ditulis dalam bentuk diferensial terpusat:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Kemudian bentuk di atas disubstitusikan ke dalam persamaan (5.15). Untuk memudahkan penulisan, selanjutnya notasi $f(x_i)$ ditulis dalam bentuk $f_i$ , sehingga persamaan (5.15) menjadi:

$$A_i = 2\,\Delta x f_i + \frac{\Delta x}{3}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + \frac{\Delta x^3}{3} O(\Delta x^2) + O(\Delta x^5)$$

atau

$$A_i = \frac{\Delta x}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) + O(\Delta x^5) \qquad (5.16)$$

Persamaan (5.16) dikenal dengan metode Simpson 1/3. Diberi tambahan nama 1/3 karena $\Delta x$ dibagi dengan 3. Pada pemakaian satu pias, $\Delta x = \frac{b-a}{2}$, sehingga persamaan (5.16) dapat ditulis dalam bentuk:

$$A_i = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right] \qquad (5.17)$$

dengan titik $c$ adalah titik tengah antara $a$ dan $b$.

Kesalahan pemotongan yang terjadi dari metode Simpson 1/3 untuk satu pias adalah:

$$\varepsilon_t = -\frac{1}{90}\Delta x^5 f''''(\xi)$$

Oleh karena $\Delta x = \dfrac{b-a}{2}$, maka: $\varepsilon_t = -\dfrac{(b-a)^5}{2880} f''''(\xi)$

**Contoh.** Hitung $I = \int_0^4 e^x \, dx$, dengan aturan Simpson 1/3.

**Penyelesaian:**

Dengan menggunakan persamaan (5.17) maka luas bidang adalah:

$$A_i = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right] = \frac{4-0}{6}(e^0 + 4e^2 + e^4) = 56,7696.$$

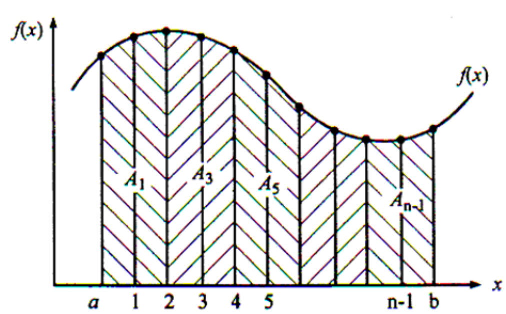
Kesalahan terhadap nilai eksak:

$$\varepsilon_t = \frac{53,598150 - 56,7696}{53,598150} \times 100\% = -5,917\%.$$

Terlihat bahwa pada pemakaian satu pias, metode Simpson 1/3 memberikan hasil lebih baik dari rumus trapesium.

2) *Aturan Simpson* 1/3 *dengan banyak pias*

Seperti dalam metode trapesium, metode Simpson dapat diperbaiki dengan membagi luasan dalam sejumlah pias dengan panjang interval yang sama (Gambar 5.6): $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ dengan $n$ adalah jumlah pias.




**Gambar 5.7.** Metode Simpson dengan banyak pias

Luas total diperoleh dengan menjumlahkan semua pias, seperti pada Gambar 5.7.

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_3 + \ldots + A_{n-1} \tag{5.18}$$

Dalam metode Simpson ini jumlah interval adalah genap. Apabila persamaan (5.16) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.18) akan diperoleh:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) + \frac{\Delta x}{3}\left(f_1 + 4f_2 + f_3\right) + ... + \frac{\Delta x}{3}\left(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

atau

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2}^{n-2} f(x_i)\right] \qquad (5.19)$$

Seperti pada Gambar (5.7), dalam penggunaan metode Simpson dengan banyak pias ini jumlah interval adalah genap. Perkiraan kesalahan yang terjadi pada aturan Simpson untuk banyak pias adalah:

$$\varepsilon_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\overline{f''''}$$

dengan $\overline{f''''}$ adalah rerata dari turunan keempat untuk setiap interval.

**Contoh.** Hitung $I = \int_0^4 e^x \, dx$, dengan metode Simpson dengan $\Delta x = 1$.

**Penyelesaian:**

Dengan menggunakan persamaan (5.19) maka luas bidang adalah:

$$I = \frac{1}{3}[e^0 + e^4 + 4(e^1 + e^3) + 2e^2] = 53{,}863846.$$

Kesalahan terhadap nilai eksak:

$$\varepsilon_t = \frac{53{,}598150 - 53{,}863846}{53{,}598150} \times 100\% = 0{,}5\%.$$

3) *Metode Simpson* 3/8

Metode Simpson 3/8 diturunkan dengan menggunakan persamaan polinomial order tiga yang melalui empat titik.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_3(x)\,dx$$

Dengan cara yang sama pada penurunan aturan Simpson 1/3, akhirnya diperoleh:

$$I = \frac{3\Delta x}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] \qquad (5.20)$$

dengan: $\Delta x = \dfrac{b-a}{3}$

Persamaan (5.20) disebut dengan metode Simpson 3/8 karena $\Delta x$ dikalikan dengan 3/8. Metode Simpson 3/8 dapat juga ditulis dalam bentuk:

$$I = (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]}{8} \tag{5.21}$$

Metode Simpson 3/8 mempunyai kesalahan pemotongan sebesar:

$$\varepsilon_t = -\frac{3}{80}\Delta x^3 f''''(\xi) \tag{5.22a}$$

Mengingat $\Delta x = \frac{b-a}{3}$, maka:

$$\varepsilon_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f''''(\xi) \tag{5.22b}$$

Metode Simpson 1/3 biasanya lebih disukai karena mencapai ketelitian order tiga dan hanya memerlukan tiga titik, dibandingkan metode Simpson 3/8 yang membutuhkan empat titik. Dalam pemakaian banyak pias, metode Simpson 1/3 hanya berlaku untuk jumlah pias genap. Apabila dikehendaki jumlah pias ganjil, maka dapat digunakan metode trapesium. Tetapi metode ini tidak begitu baik karena adanya kesalahan yang cukup besar. Untuk itu kedua metode dapat digabung, yaitu sejumlah genap pias digunakan metode Simpson 1/3 sedang 3 pias sisanya digunakan metode Simpson 3/8.

**Contoh.** Dengan aturan Simpson 3/8 hitung $I = \int_0^4 e^x \, dx$. Hitung pula integral tersebut dengan menggunakan gabungan dari metode Simpson 1/3 dan 3/8, apabila digunakan 5 pias dengan $\Delta x = 0{,}8$.

**Penyelesaian:**

a) *Metode Simpson* 3/8 *dengan satu pias*

Integral dihitung dengan menggunakan persamaan (5.21):

$$I = (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]}{8}$$

$$I = (4-0)\frac{(e^0 + 3e^{1,3333} + 3e^{2,6667} + e^4)}{8} = 55{,}07798.$$

Besar kesalahan adalah:

$$\varepsilon_t = \frac{53{,}598150 - 55{,}07798}{53{,}59815} \times 100\% = -2{,}761\%.$$

b) *Apabila digunakan* 5 *pias*, maka data untuk kelima pias tersebut adalah:

$f(0) = e^0 = 1$ $\qquad$ $f(2{,}4) = e^{2,4} = 11{,}02318.$

$f(0{,}8) = e^{0,8} = 2{,}22554$ $\qquad$ $f(3{,}2) = e^{3,2} = 24{,}53253.$

$$f(1{,}6) = e^{1,6} = 4{,}9530 \qquad\qquad f(4) = e^{4} = 54{,}59815.$$

Integral untuk 2 pias pertama dihitung dengan metode Simpson 1/3 (pers. 5.17):

$$A_i = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right]$$

$$I = \frac{1{,}6}{6}(1 + (4 \times 2{,}22554) + 4{,}95303) = 3{,}96138.$$

Tiga pias terakhir digunakan aturan Simpson 3/8:

$$I = (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]}{8}$$

$$I = 2{,}4\frac{(4{,}95303 + (3 \times 11{,}02318) + (3 \times 24{,}53253) + 54{,}59815)}{8} = 49{,}86549.$$

Integral total adalah jumlah dari kedua hasil di atas:

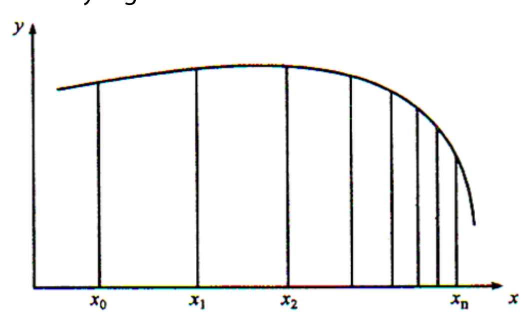
$$I = 3{,}96138 + 49{,}86549 = 53{,}826873.$$

Kesalahan terhadap nilai eksak:

$$\varepsilon_t = \frac{53{,}598150 - 53{,}826873}{53{,}59815} \times 100\% = -0{,}427\%.$$

**4. Integral Dengan Panjang Pias Tidak Sama**

Beberapa rumus di atas didasarkan pada titik data yang berjarak sama. Di dalam prakteknya sering dijumpai suatu keadaan dimana diperlukan pembagian pias dengan panjang tidak sama, seperti terlihat pada Gambar 5.8. Pada kurve yang melengkung dengan tajam diperlukan jumlah pias yang lebih banyak sehingga panjang pias lebih kecil dibanding dengan kurve yang relatif datar.




**Gambar 5.8.** Integral dengan panjang pias tidak sama

Di antara beberapa aturan yang telah dibicarakan, yang dapat digunakan untuk keadaan ini adalah metode trapesium dengan banyak pias, dan bentuk persamaannya adalah:

$$I = \Delta x_1 \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + \Delta x_2 \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \ldots + \Delta x_n \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2} \tag{5.23}$$

dengan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

**5. Metode Kuadratur**

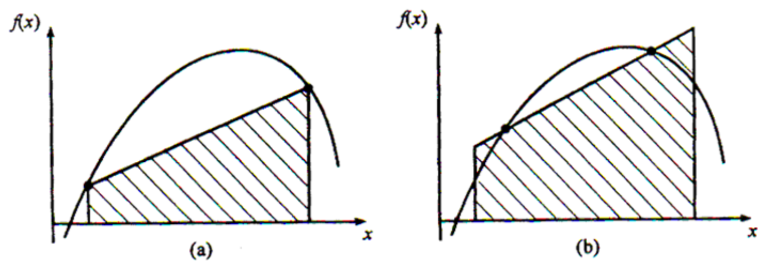
Di dalam metode trapesium dan Simpson, fungsi yang diintegralkan secara numerik terdiri dari dua bentuk yaitu tabel data atau fungsi. Pada metode kuadratur, yang akan dibahas adalah metode Gauss Kuadratur, data yang diberikan berupa fungsi.

Pada aturan trapesium dan Simpson, integral didasarkan pada nilai-nilai di ujung-ujung pias. Seperti pada Gambar 5.9a, metode trapesium didasarkan pada luasan di bawah garis lurus yang menghubungkan nilai-nilai dari fungsi pada ujung-ujung interval integrasi.

Rumus yang digunakan untuk menghitung luasan adalah:

$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{5.24}$$

dengan $a$ dan $b$ adalah batas integrasi dan $(b - a)$ adalah lebar dari interval integrasi. Karena metode trapesium harus melalui titik-titik ujung, maka seperti terlihat pada Gambar 5.9a. rumus trapesium memberikan kesalahan cukup besar.




**Gambar 5.9.** Bentuk grafik metode trapesium dan Gauss kuadratur

Di dalam metode Gauss kuadratur dihitung luasan di bawah garis lurus yang menghubungkan dua titik sembarang pada kurve. Dengan menetapkan posisi dari kedua titik tersebut secara bebas, maka akan bisa ditentukan garis lurus yang dapat menyeimbangkan antara kesalahan positif dan negatif, seperti pada Gambar 5.9b.

Dalam metode trapesium, persamaan integral seperti diberikan oleh persamaan (5.24) dapat ditulis dalam bentuk:

$$I = c_1 f(a) + c_2 f(b) \tag{5.25}$$

dengan $c$ adalah konstanta. Dari persamaan tersebut akan dicari koefisien $c_1$ dan $c_2$.

Seperti halnya dengan metode trapesium, dalam metode Gauss Kuadratur juga akan dicari koefisien-koefisien dari persamaan yang berbentuk:

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \tag{5.26}$$

Dalam hal ini variabel $x_1$ dan $x_2$ adalah tidak tetap, dan akan dicari seperti pada Gambar 5.10. Persamaan (5.26) mengandung 4 bilangan tak diketahui, yaitu $c_1$, $c_2$, $x_1$, dan $x_2$, sehingga diperlukan 4 persamaan untuk menyelesaikannya.

Untuk itu persamaan (5.26) dianggap harus memenuhi integral dari empat fungsi, yaitu dari nilai $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ dan $f(x) = x^3$, sehingga untuk:

$$f(x) = x^3 : c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \qquad (5.27)$$

$$f(x) = x^2 : c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \qquad (5.28)$$

$$f(x) = x : c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x dx = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \qquad (5.29)$$

$$f(x) = 1 : c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2 = c_1 + c_2 \qquad (5.30)$$

Sehingga didapat sistem persamaan:

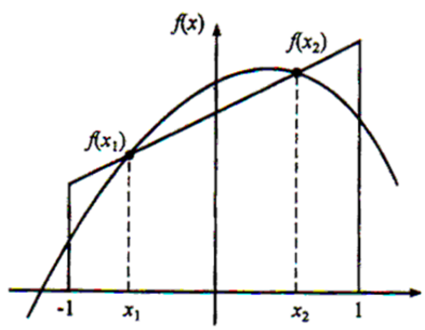
$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0; \quad c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}; \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0; \quad c_1 + c_2 = 2$$

Penyelesaian dari sistem persamaan di atas adalah:

$$c_1 = c_2 = 1; \;\; x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}577350269; \;\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577350269.$$

Substitusi dari hasil tersebut ke dalam persamaan (5.26) menghasilkan:

$$I = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (5.31)$$




**Gambar 5.10.** Integrasi Gauss kuadratur

Batas-batas integral dalam persamaan (5.27) hingga persamaan (5.30) adalah –1 sampai 1, sehingga lebih memudahkan hitungan dan membuat rumus yang didapat bisa digunakan secara umum. Dengan melakukan transformasi batas-batas integrasi yang lain dapat diubah ke dalam bentuk tersebut. Untuk itu dianggap terdapat hubungan antara variabel baru $x_d$ dan variabel asli $x$ secara linier dalam bentuk:

$$x = a_0 + a_1 x_d \qquad (5.32)$$

Bila batas bawah adalah $x = a$, untuk variabel baru batas tersebut adalah $x_d = -1$. Kedua nilai tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (5.32), sehingga diperoleh:

$$a = a_0 + a_1(-1) \qquad (5.33)$$

dan batas baru $x_d = 1$, memberikan:

$$b = a_0 + a_1(1) \qquad (5.34)$$

Persamaan (5.33) dan (5.34) dapat diselesaikan secara simultan dan hasilnya adalah:

$$a_0 = \frac{b+a}{2} \qquad (5.35)$$

dan

$$a_1 = \frac{b-a}{2} \qquad (5.36)$$

Substitusikan persamaan (5.35) dan (5.36) ke persamaan (5.32) menghasilkan:

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2} \qquad (5.37)$$

Diferensial dari persamaan tersebut menghasilkan:

$$dx = \frac{b-a}{2} dx_d \qquad (5.38)$$

Persamaan (5.37) dan persamaan (5.38) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan yang diintegralkan. Bentuk rumus Gauss Kuadratur untuk dua titik dapat dikembangkan untuk lebih banyak titik, yang secara umum mempunyai bentuk:

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n) \qquad (5.39)$$

Nilai $c$ dan $x$ untuk rumus sampai dengan enam titik diberikan dalam Tabel 5.1.

Tabel 5.1. Nilai $c$ dan $x$ pada rumus Gauss kuadratur

| **Jumlah titik** | **Koefisien *c*** | **Variabel *x*** |
|---|---|---|
| 2 | $c_1 = 1{,}000000000$<br>$c_2 = 1{,}000000000$ | $x_1 = -\ 0{,}577350269$<br>$x_2 = \ \ 0{,}577350269$ |
| 3 | $c_1 = 0{,}555555556$<br>$c_2 = 0{,}888888889$<br>$c_3 = 0{,}555555556$ | $x_1 = -\ 0{,}774596669$<br>$x_2 = \ \ 0{,}000000000$<br>$x_3 = \ \ 0{,}774596669$ |
| 4 | $c_1 = 0{,}347854845$<br>$c_2 = 0{,}652145155$<br>$c_3 = 0{,}652145155$<br>$c_4 = 0{,}347854845$ | $x_1 = -\ 0{,}861136312$<br>$x_2 = -\ 0{,}339981044$<br>$x_3 = \ \ 0{,}339981044$<br>$x_4 = \ \ 0{,}861136312$ |
| 5 | c1 = 0,236926885<br>c2 = 0,478628670 | x1 = – 0,906179846<br>x2 = – 0,538469310 |

| Jumlah titik | Koefisien *c* | Variabel *x* |
|---|---|---|
| | c3 = 0,568888889<br>c4 = 0,478628670<br>c5 = 0,236926885 | x3 = 0,000000000<br>x4 = 0,538469310<br>x5 = 0,906179846 |
| 6 | c1 = 0,171324492<br>c2 = 0,360761573<br>c3 = 0,467913935<br>c4 = 0,467913935<br>c5 = 0,360761573<br>c6 = 0,171324492 | x1 = – 0,932469514<br>x2 = – 0,661209386<br>x3 = – 0,238619186<br>x4 = 0,238619186<br>x5 = 0,661209386<br>x6 = 0,932469514 |

**Contoh.**

Hitung integral $I = \int_0^4 e^x \, dx$, dengan menggunakan metode Gauss kuadratur.

**Penyelesaian:**

Dengan menggunakan persamaan (5.37) untuk $a = 0$ dan $b = 4$ didapat:

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2}$$

$$x = \frac{(4+0)+((4-0)x_d)}{2} = 2 + 2x_d$$

Turunan dari persamaan tersebut adalah:

$$dx = 2\ dx_d$$

Kedua bentuk di atas disubstitusikan ke dalam persamaan asli, sehingga didapat:

$$\int_0^4 e^x dx = \int_{-1}^{1} e^{(2+2x_d)} 2dx_d$$

Ruas kanan dari persamaan di atas dapat digunakan untuk menghitung luasan dengan metode Gauss Kuadratur, dengan memasukkan nilai $x_d = x_1 = -0{,}577350269$ dan nilai $x_d = x_2 = 0{,}577350269$.

Untuk $x_1 = -0{,}577350269 \rightarrow 2e^{\left[2+\left(2\times(-0{,}577350269)\right)\right]} = 4{,}6573501.$

Untuk $x_2 = \ 0{,}577350269 \rightarrow 2e^{\left[2+\left(2\times(0{,}577350269)\right)\right]} = 46{,}8920297.$

Luas total seperti diberikan oleh persamaan (5.30):

$$I = 4{,}6573501 + 46{,}8920297 = 51{,}549380.$$

Kesalahan:

$$\varepsilon_t = \frac{53{,}598150 - 51{,}549380}{53{,}598150} \times 100\% = 3{,}82\%.$$

**Contoh.**

Hitung integral $I = \int_0^4 e^x \, dx$, dengan menggunakan metode Gauss Kuadratur 3 titik.

**Penyelesaian:**

Untuk 3 titik persamaan (5.26) menjadi:

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \qquad \text{(c1)}$$

Seperti terlihat dalam Tabel 5.1, untuk 3 titik, koefisien $c$ dan $x$ adalah:

$c_1 = 0{,}555555556.$ $\qquad x_1 = -0{,}774596669.$

$c_2 = 0{,}888888889.$ $\qquad x_2 = 0{,}000000000.$

$c_3 = 0{,}555555556.$ $\qquad x_3 = 0{,}774596669.$

Dari contoh soal sebelumnya didapat persamaan yang telah dikonversi adalah:

$$\int_0^4 e^x dx = \int_{-1}^{1} e^{(2+2x_d)} 2dx_d$$

Untuk $x_1 = -0{,}774596669 \rightarrow 2e^{(2+2x_1)} = 3{,}13915546.$

Untuk $x_2 = 0{,}000000000 \rightarrow 2e^{(2+2x_2)} = 14{,}7781122.$

Untuk $x_3 = 0{,}774596669 \rightarrow 2e^{(2+2x_3)} = 69{,}5704925.$

Persamaan (c1) menjadi:

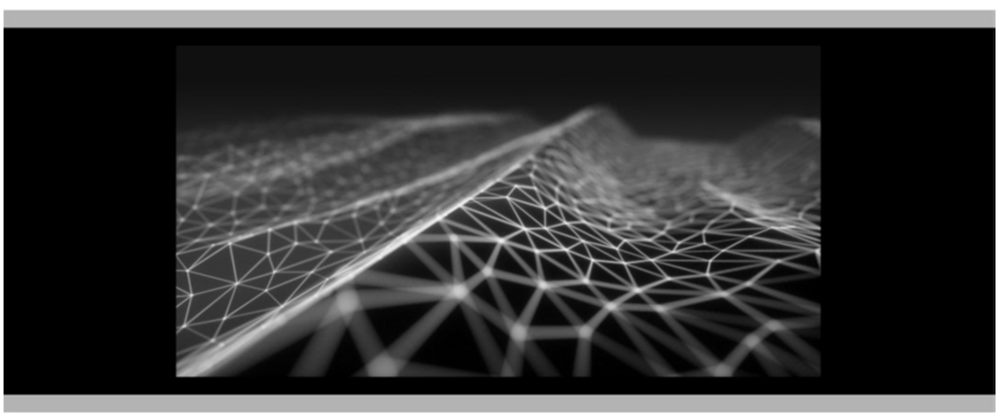
$$\begin{aligned} I &= (0{,}555555556 \times 3{,}13915546) + (0{,}888888889 \times 14{,}7781122) + \\ &\quad (0{,}555555556 \times 69{,}5704925) \\ &= 53{,}5303486. \end{aligned}$$

Kesalahan:

$$\varepsilon_t = \frac{53{,}598150 - 53{,}5303486}{53{,}598150} \times 100\% = 0{,}13\%.$$

# BAB 6

## APLIKASI METODE NUMERIK



# BAB 6
# APLIKASI METODE NUMERIK

Capaian Pembelajaran : mampu mengidentifikasi kasus penerapan metode numeric

Kemampuan Akhir Pembelajaran : mahasiswa dapat memberikan contoh-contoh kasus dan metode numerik digunakan untuk penyelesaian.

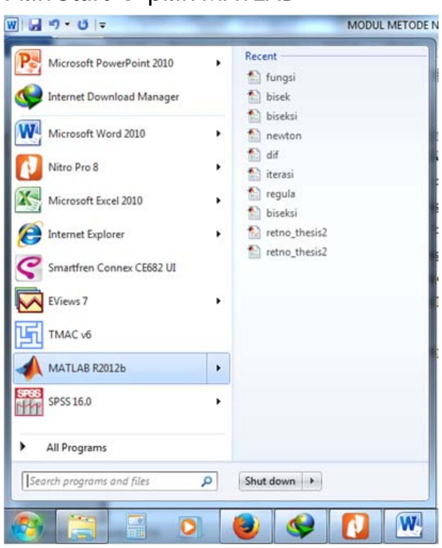
## A. LANDASAN TEORI

### 1. Pengenalan MATLAB

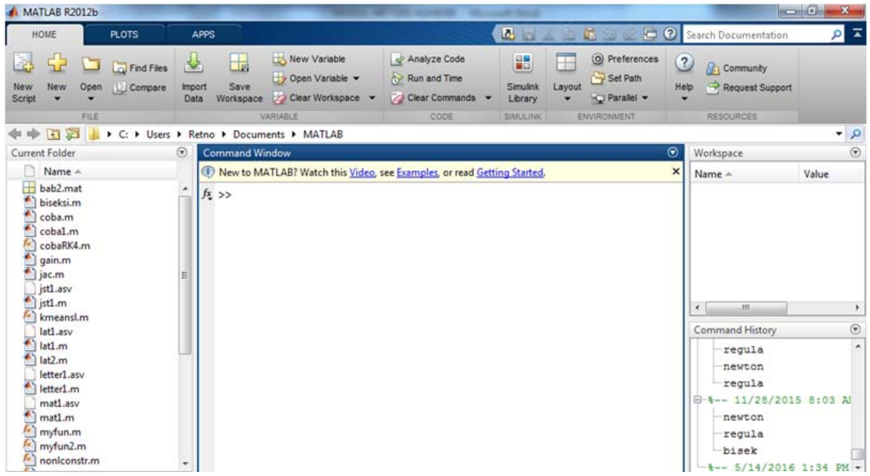
Gambaran sederhana tentang MATLAB adalah sebuah kalkulator yang mampu melakukan perhitungan yang sederhana dan rumit, selain itu kemampuan MATLAB yang lain adalah dalam hal visualisasi atau grafik dari hasil suatu fungsi matematika. MATLAB merupakan bahasa pemrograman yang menggunakan bahasa *command line*. MATLAB juga menyediakan fungsi-fungsi matematika yang sangat lengkap, misalkan sqrt, det, inv, dst. Data yang dikelola dapat berbentuk array maupun matriks. MATLAB mempunyai fasilitas Mfile yang digunakan untuk menyimpan program.

- Memulai MATLAB dan mengakhiri

  Pilih Start → pilih MATLAB




Maka akan muncul tampilan seperti di bawah ini




*Command window* adalah area dimana user dapat melakukan perintah operasi atau memanggill fungsi yang disediakan oleh MATLAB. Jika akan keluar dari MATLAB ketik quit, maka user akan keluar dari MATLAB.

**Contoh.**

1. Perhitungan matematika sederhana

   \>> x =[1 2]
   x =
   1 2
   \>> y = sqrt(x)
   y =
   1.0000 1.4142
   \>> z = transpose(x)
   z =
   1
   2

2. Menghitung luas dan keliling lingkaran

   r =
   7.2500
   \>> luas=pi*r^2
   luas =
   165.1300
   \>> keliling=2*pi*r
   keliling =
   45.5531

3. Perhitungan matriks

menginputkan matriks

```
>> A=[23,34;12,21]

A =

    23    34
    12    21

>> B=[11,21;10,13]

B =

    11    21
    10    13
```

melakukan operasi matriks : penjumlahan, perkalian, determinan dan invers

```
>> C=A*B

C =

   593   925
   342   525

>> D=A+B

D =

    34    55
    22    34

>> inv(A)

ans =

    0.2800   -0.4533
   -0.1600    0.3067
```

## 2. Fungsi-fungsi MATLAB

Sama seperti kalkulator biasa, MATLAB mempunyai beberapa fungsi umum yang penting untuk matematika(dalam hal ini metode numeric). MATLAB juga memiliki ratusan fungsi khusus dan algoritma yang berguna untuk penyelesaian permasalahan tertentu. Fungsi-fungsi umum yang terdapat pada MATLAB antara lain:

- Abs(x) : harga mutlak
- Acos(x) : invers cos
- Asin(x) : invers sin
- Atan(x) : invers tangen
- Cos(x) : cosinus
- Sin(x) : sinus

- Exp(x) : eksponensial
- Fix(x) : pembulatan kearah nol
- Imag(x) : bagian imaginer suatu bilangan kompleks
- Log(x) : logaritma natural
- Real(x) : bilangan real suatu bilangan kompleks
- Log10(x) : logaritma biasa
- Rem(x) : sisa pembagian
- Round(x) : pembulatan kearah bilangan bulat terdekat
- Floor(x) : pembulatan kearah minus tak terhingga
- Ceil(x) : pembulatan kearah plus tak berhingga

Data dan variabel yang dibuat dalam jendela command tersimpan dalam ruang kerja MATLAB. Untuk menampilkan nama-nama dalam ruang kerja MATLAB gunakan perintah: who

### 3. Operasi Matrik dan Grafik

MATLAB menyediakan banyak fungsi matrik yang berguna untuk menyelesaikan masalah-masalah numerik dan linier. Gambaran singkat fungsi matrik diantaranya seperti dibawah ini:

- Det(A) : determinan matriks
- Eig(A) : nilai eigen
- Chol(A) : faktorisasi cholesky
- Inv(A) : invers matriks
- Lu(A) : factor dari eliminasi gauss
- Poli(A) : karakteriostik polynomial
- Rank(A) : jumlah baris dan kolom bebas linier

Selain fungsi diatas MATLAB juga menyediakan fungsi matrik khusus, diantaranya sbb:

- [ ] : matriks kosong
- eye : matriks identitas
- hadamard : matriks hadamard
- company : matriks companion
- hankel : matriks hankel
- hilb : matriks Hilbert
- invhilb : invers Hilbert
- magic : matriks segiempat ajaib
- ones : matriks dengan semua elemen Satu
- pascal : matriks segitiga pascal
- zeros : matriks dengan semua elemen nol

Pada MATLAB juga terdapat fungsi yang dapat menampilkan grafik dari suatu fungsi dengan menggunakan perintah ***plot*** (grafik 2 dimensi). Untuk mencetak suatu grafik dari menu bar→ klik jendela *figure* → gunakan perintah print (dari menu file).

**Contoh.** Diketahui 2 matrik A ordo 3 x 3 dan matriks B ordo 2 x 2 seperti di bawah ini

```
>> A = [1 2 2; 2 1 3; 2 5 1]
A =
   1    2    2
   2    1    3
   2    5    1

>> B = [ 1 2; -1 3]
B =
   1    2
  -1    3
>>
```

**Contoh.** Memunculkan matriks khusus

```
>> eye(2)
ans =

   1    0
   0    1

>> eye(3)
ans =
   1    0    0
   0    1    0
   0    0    1

>> zeros(3)
ans =
   0    0    0
   0    0    0
   0    0    0

>> ones(3)
ans =
   1    1    1
   1    1    1
   1    1    1

>> eye(3)+ones(3)
ans =
   2    1    1
   1    2    1
   1    1    2

>> ones(2)+eyes(3)
Undefined function 'eyes' for input arguments of type 'double'.

Did you mean:
>> ones(2)+eye(3)
```

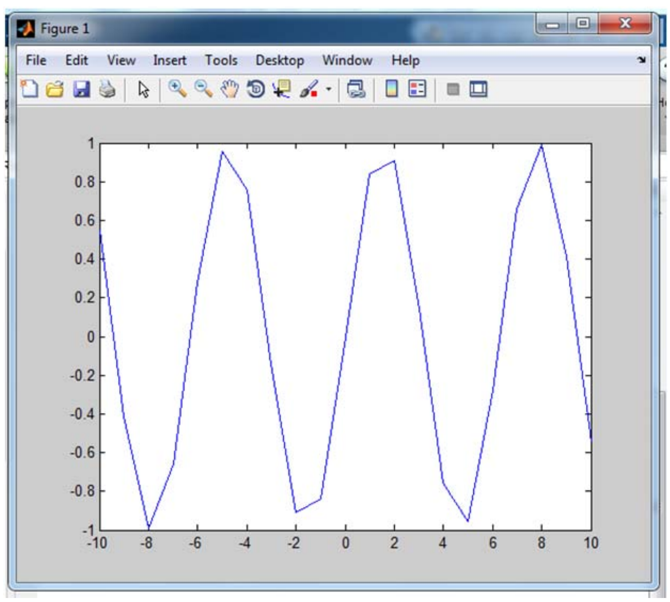
```
Error using  +
Matrix dimensions must agree.
```

Eror terjadi karena operasi matriks hanya dapat dilakukan jika memiliki orde sama.

**Contoh.** Akan dibuat grafik fungsi sebagai berikut: y = sin(x), dengan interval x adalah -10 sampai dengan 10, maka tampilan pada MATLAB sbb:

```
>> x = -10 : 10;
>> y = sin(x)

y =

  Columns 1 through 6

    0.5440   -0.4121   -0.9894   -0.6570    0.2794    0.9589

  Columns 7 through 12

    0.7568   -0.1411   -0.9093   -0.8415         0    0.8415

  Columns 13 through 18

    0.9093    0.1411   -0.7568   -0.9589   -0.2794    0.6570

  Columns 19 through 21

    0.9894    0.4121   -0.5440

>> plot(x,y)
>>
```

sehingga grafik yang muncul sbb:



## 4. M-File

Apabila dipunyai masalah sederhana, perintah langsung dari jendela command cukup cepat dan efektif, tetapi jika perintah banyak atau ingin mengubah nilai beberapa variable, kemudian mengulang kembali perhitungannya maka perintah langsung sangat membosankan. Matlab membolehkan pengetikan deretan perintah tersebut pada suatu teks file, kemudian memerintahakn Matlab untuk membuka file tersebut dan menjalankannya seolah-olah diketikan langsung dijendela command. File seperti ini disebut file script atau M-File. File ini diakhiri dengan ekstensi.m

Perintah-perintah yang ada pada M-File antara lain:

1. disp(ans) digunakan untuk menampilkan hasil tanpa menampilkan nama variable.
2. echo mengatur jendela command dalam penampilan kembali perintah yang sedang dikerjakan.
3. Input meminta pemakai untuk memberikan input
4. Keyboard memberikan kontrol pada keyboard sementara waktu. Ketikkan return untuk kembali.
5. Pause digunakan berhenti sampai pemakai menekan sembarang tombol.
6. pause(n) digunakan berhenti sampai n detik
7. waitforbuttonpress digunakan berhenti sampai penekanan tombol mouse atau keyboard.

Jika perintah Matlab tidak diakhiri dengan titik koma, hasil perintah itu serta nama variabelnya akan ditampilakn kembali dalam jendela command.

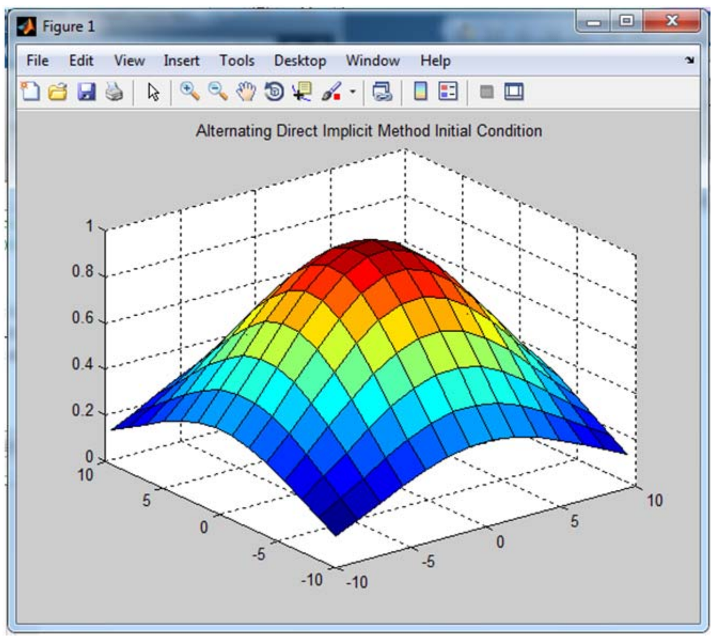
**Contoh**. Berikut adalah cara pembuatan script dalam M-File

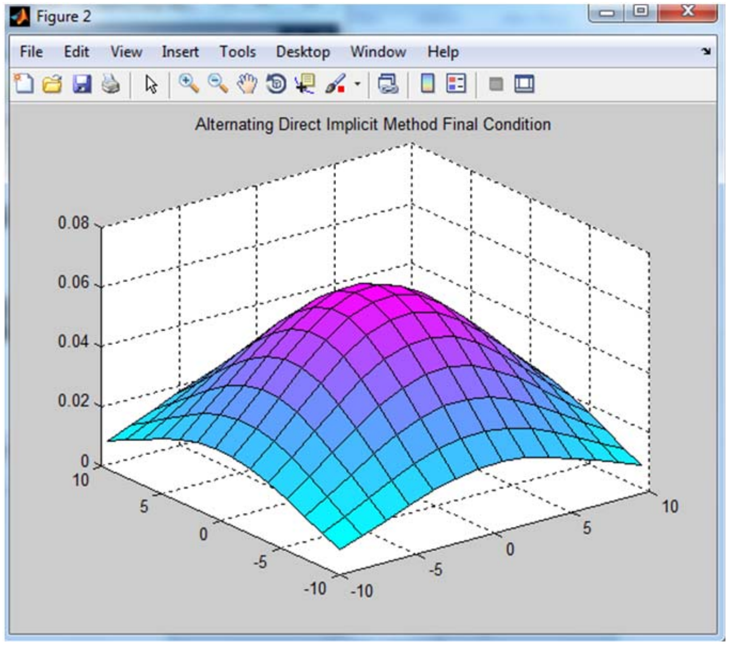
Ketikkan perintah yang ada di bawah ini pada M-file editor

```
clc; clear all;
dx=1.5; dt=3;
dy=1.5; x=-10:dx:10;
N=length(x); y=-10:dy:10;
L=length(y); t=0:dt:100;
M=length(t);
lamda=dt/(dx^2)
nu=dt/(dy^2)
for j=1:L
  for i=1:N
    %T(i,j,1) = 1
    T(i,j,1)=exp(-((x(i))^2+(x(j))^2)/100);
  end;
end;
figure(1);
colormap(jet);
surf(x,y,T(:,:,1));
title(['Alternating Direct Implicit Method Initial Condition']);
MM=getframe;
A=zeros(N-2,N-2,M-1);
B=zeros(L-2,L-2,M-1);
```

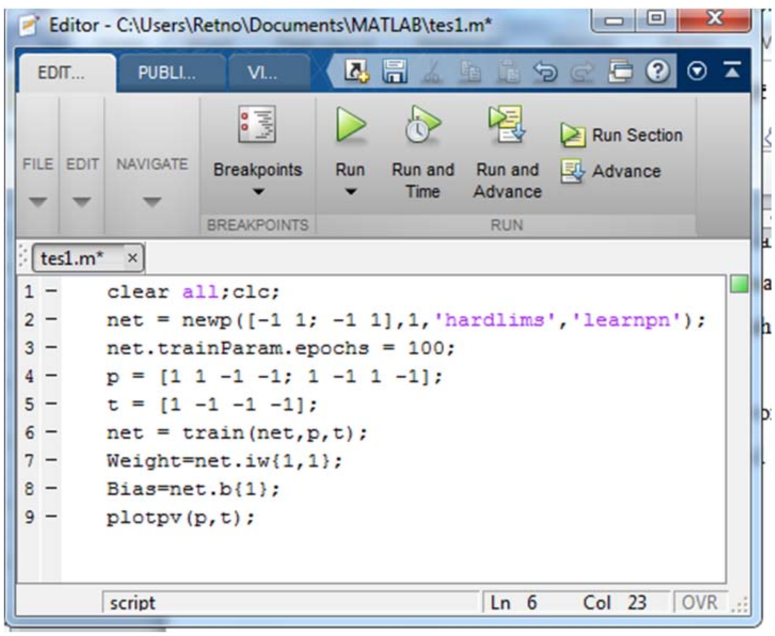
```
for k=1:M-1
  for j=1:L-2
    for i=1:N-2
      A(1,2,k)=-2*lamda;
      A(N-2,L-3,k)=-2*lamda;
      B(1,2,k)=2*nu;
      B(N-2,L-3,k)=2*nu;
      if i==j
        A(i,j,k)=3*y(j)+2*lamda;
        B(i,j,k)=3*y(j)-2*nu;
      end;
      if i==j+1
        A(i,j,k)=-lamda;
        B(i,j,k)=nu;
      end;
      if j==i+1
        A(i,j,k)=-lamda;
        B(i,j,k)=nu;
      end;
    end;
  end;
end;
```

Kemudian simpan pada direktori work yang ada pada Matlab.

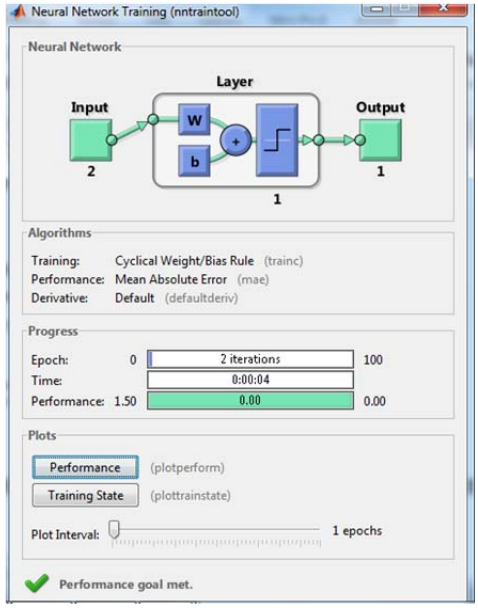





**Contoh.**




Kemudian simpan pada direktori work yang ada pada Matlab.




**5. Akar Persamaan Non-linier**

Didalam permasalahan numeric yang sifatnya non linier, sangatlah mudah apabila dapat diselesaikan dengan menggunkan fungsi dalam M-File. Persamaan linier dapat disajikan f(x)=0 dengan f(x) adalah fungsi non linier. Rumus iterasi metode Newton Raphson adalah sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Algoritma atau langkah-langkah pencarian akar dengan metode Raphson sebagai berikut:

a. Tentukan taksiran awal $(x_0)$ dan $\varepsilon$ atau batas toleransi

b. Hitung $x_{i+1}$ dengan rumus diatas

c. Jika $|x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon$, maka berhenti

d. Jika langkah ke tiga belum dipenuhi ulangi langkah b.

**Contoh.** Akan dicari akar persamaan $f(x) = x^2 + 2{,}1x - 1$

Untuk penyelesaian dengan Matlab diperlukan 2 M-File, file pertama merupakan fungsi fequat (salah satu fungsi dalam Matlab) yang berisi fungsi fequat dan persamaan yang akan dhitung. File kedua adalah listing program perhitungan metode Newton Raphson.

Penulisan listing program dalam M-File dengan nama file Newton, file Newton ini merupakan file pertama yang harus dibuat. Seperti dibawah ini

```
clear;
clc;
err=0.005;
x=input('Taksiran awal x0:  ');
eps=1;
no=0;
clc;
fprintf (' taksiran awal x0 :  %5.3f\n', x);
%fprintf
('==============================================================\n');
fprintf ('   iterasi         f           f~         x1      Selisih\n');
%fprintf
('==============================================================\n');
while eps> err;
    no=no+1;
    [f1,f2]=fequat(x);
    x1=x-(f1/f2);
    eps=abs(x1-x);
    x=x1;
    fprintf ('    %3d      % 8.5f      %8.5f      %8.5f      %8.5f\n',  no,f1,f2,x1,eps);
end;
%fprintf
('==============================================================\n');
fprintf (' pada iterasi ke-%1d, selisih<%5.3f.\n', no, err);
fprintf (' Jadi akar persamaannya adalah  %7.5f.\n', x1);
```

File kedua yaitu file fequat yang berisi persamaan yang akan diselesaikan seperti di bawah ini:

```
function[f1,f2]=fequat(x);
f1=x^2+2.1*x-1; % persamaan yang akan dihitung
f2=2*x+2.1;    % derivatif f1
```

Dari menjalankan kedua fungsi tersebut pada Matlab Command, maka menghasilkan penyelesaian dari persamaan diatas seperti di bawah ini

```
 taksiran awal x0 :  5.000
   iterasi          f            f~          x1       Selisih
      1         34.50000      12.10000      2.14876       2.85124
      2         8.12957       6.39752      0.87802       1.27074
      3         1.61477       3.85605      0.45926       0.41876
      4         0.17536       3.01852      0.40116       0.05810
      5         0.00338       2.90233      0.40000       0.00116
 pada iterasi ke-5, selisih<0.005.
 Jadi akar persamaannya adalah  0.40000.
>> |
```

**B. SOAL**

1. Hitung volume silinder dengan jarai-jari alas 10, tinggi silinder 21
2. Lakukan perhitungan bunga pada kasus pembelian mobil secara kredit dibawah ini: Si Adi telah menyetujui untuk membeli baru merk BMW seharga 500 juta. Dealer mobil menawarkan dua pilihan kredit untuk pembelian, yaitu:

   1. bunga 10 % /tahun selama 3 tahun dan
   2. bunga 9,8%/thn selama 4 tahun

   Tentukan pilihan yang terbaik untuk Adi, jelaskan perhitungan bunganya, berapa dia harus membayar kredit mobil perbulannya? tampilkan variabel-variabel yang anda gunakan. (perhitungkan dua alternatif yang ada tersebut)
3. Coba program diatas untuk perhitungan bunga, dengan pinjaman 20 juta, tingkat bunga 10%, 11% dan 12% dengan masa pinjaman 5 thn, 7 thn dan 10 thn.
4. Buat persamaan linier dengan 5 persamaan dan 5 variabel, selesaikan dengan menggunakan invers dan determinan. Tampilkan : matriks identitas, matriks nol, matriks yang elemennya satu dengan ordo minimal 4x4 .
5. Gambarlah grafik fungsi y = cos(x) dan y = tan(x)
6. Tentukan persamaan berikut

   a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

   b. $x^2 + 2.5x - 1.5 = 0$
7. Diketahui persamaan linier

   2a + b − c = 2

   a + 2b − c =2

   a − b + 2c = 2

   Buat script M-File untuk menyelesaikan system persamaan linier diatas dengan metode invers dan determinan.

## DAFTAR PUSTAKA


Charles G.Cullen 1993, *Aljabar linier dan penerapannya*, edisi terjemahan PT Gramedia Pustaka Utama , Jakarta.

Duane Hanselman & Bruce Littlefied, *Matlab*, Andi Offset. Yogyakarta

Rinaldi Munir 2008, *Metoda Numerik* , revisi ke dua,

Samuel D.Conte, 1981. *Elementary Numerical Analysis An algorithmic Approach*

Steven C. Chapra & Raymond P. Canale, *Metode Numerik untuk Teknik dengan Penerapan pada Komputer Pribadi*, UI-Press, Jakarta, 1991.

Suryadi H.S., *Pengantar Metode Numerik*, Seri Diktat Kuliah, Gunadarma, 1990

Suryadi M.T., *Bahasa FORTRAN dan Analisis Numerik*, Seri Diktat Kuliah, Gunadarma, 1995

## BIODATA PENULIS

Penulis dilahirkan di Surakarta, Jawa Tengah pada tanggal 13 Maret 1988 dan merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara. Pendidikan formal didapatkan penulis mulai dari TK Siwi Peni 11, SD N Tegalsari 12, SMP N 1 Surakarta, SMA N 4 Surakarta, sampai ke Universitas Negeri Sebelas Maret pada tahun 2006 dan lulus pada tahun 2010. Kemudian melanjutkan S2 di jurusan matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2013 dengan beasiswa BPP DN Calon Dosen. Penulis menekuni ilmu matematika, statistika, riset operasi. Saran dan kritik silakan menghubungi retno.tv@gmail.com.

# METODE NUMERIK

## Teori, Kasus, dan Aplikasi

Buku Metode Numerik ini disusun sebagai media pembelajaran sehingga mahasiswa mampu memahami materi dengan lebih mudah dan dapat dimanfaatkan sebagai penunjang kelancaran pembelajaran. Buku ini terdiri dari 6 bab yang dimaksudkan untuk dua belas pertemuan.

Buku ini berisikan mengenai :

- Pengenalan Metode Numerik
- Penyelesaian Persamaan Non-linier
- Penyelesaian Persamaan Linier Simultan
- Interpolasi
- Integrasi numerik, dan
- Studi kasus mengenai metode numerik di bidang teknik informatik

Setiap bab dalam buku ini berisi pembahasan konsep-konsep dan dilengkapi dengan contoh soal dan soal-soal sebagai bahan latihan sehingga dapat membantu mahasiswa menguasai materi.

9 786026 059888