GAD Hausaufgaben

13.09.18

Blatt 1:

Aufgabe 1.4:

a)

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 1 = 1^2 = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = (2(n+1)-1) + \sum_{i=1}^{n} (2i-1)$$

$$\text{nach I.V.} = (2n+2-1) + n^2$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2 \qquad \text{q.e.d.}$$

b) Induktionsanfang $n = 1$

$$F_2 \cdot F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1 \quad \checkmark$$

$$F_3 \cdot F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2 \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung:

$$F_{k+1} \cdot F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ und } k < n$$

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 &= F_{n+1} \cdot F_{n-1} - (F_{n-1} + F_{n-2})^2 \\
&= F_{n+1} \cdot F_{n-1} - (F_{n-1}^2 + 2 F_{n-1} F_{n-2} + F_{n-2}^2) \\
&= F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_{n-1}^2 - 2 F_{n-1} F_{n-2} \\
&\quad - F_{n-2}^2 \\
&= F_{n-1} (F_{n+1} - 2 F_{n-2}) \\
&\quad - F_{n+1}^2 - F_{n-2}^2 \\
&= F_{n-1} (F_{n-1} + F_n - 2 F_{n-2}) \\
&\quad - F_{n+1}^2 - F_{n-2}^2 \\
&= F_{n-1} (F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-1} + F_{n-2} - 2 F_{n-2}) \\
&\quad - F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 \\
&= F_{n-1} (F_{n-3} + F_{n-1}) - F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 \\
&= F_{n-1} F_{n-3} + F_{n-1}^2 - F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 \\
&= F_{n-1} F_{n-3} - F_{n-2}^2
\end{aligned}
$$

nach I.V. $= (-1)^{n-2} = (-1)^n$ q.e.d.