GAD Hausaufgaben Blatt 2

Aufgabe 2.1.)

a.) $f(n) + g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n)) \wedge g(n) \in O(h(n))$

Somit: $\exists c, n_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \geq n_0 :$

$f(n) + g(n) \leq c h(n)$

Da $\forall n \in \mathbb{N} :$ $f(n) > 0$ und $g(n) > 0$:

$f(n) \leq c \cdot h(n)$ und $g(n) \leq c \cdot h(n)$

Somit:

$f(n) \in O(h(n))$ und $g(n) \in O(h(n))$

b.) Diese Aussage ist nach a.) wahr

c.) Falsch, da:

$f(n) := n \cdot \sin(n)$ $g(n) := \sqrt{n}$ $h(n) := 2^n$

$f(n) - g(n) = n \cdot \sin(n) - \sqrt{n} \in O(2^n)$

Jedoch:

$n \cdot \sin(n) \notin O(\sqrt{n})$

$\sqrt{n} \notin O(n \cdot \sin(n))$

Somit ist die Aussage falsch.

d.) $O(42) \subseteq O((\log_2 n)^7) \subseteq O(0{,}1n) \subseteq O(n(\log_2 n)^2)$
$\subseteq O(n^{15}) \subseteq O(n^3 3^{3n}) \subseteq O(1{,}1^{1{,}1^n})$

e) Induktionsbasis $n=1$:

$$\sum_{j=0}^{1} \frac{j}{2^j} = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \qquad 3 - \frac{2 \cdot 1}{2^1} = 2$$

$\frac{1}{2} \leq 2$ ✓

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert

Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} \leq 3 - \frac{2n}{2^n}$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \frac{j}{2^j} = \frac{n+1}{2^{n+1}} + \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} \leq \frac{n+1}{2^{n+1}} + 3 - \frac{2n}{2^n}$$

$$= \frac{n+1}{2^{n+1}} + 3 - \frac{2n \cdot 2}{2^{n+1}} = \frac{-3n+1}{2^{n+1}} + 3$$

$$= 3 - \frac{3n-1}{2^{n+1}} \leq 3 - \frac{2n+2}{2^{n+1}} = 3 - \frac{2(n+1)}{2^{n+1}}$$

f.) $\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} \leq 3 - \frac{2n}{2^n}$

Da $\frac{2n}{2^n} \in [0,1]$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$

gilt: $3 - \frac{2n}{2^n} \in O(1)$ Somit auch

$\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} \in O(1)$

Aufgabe 2.5.)

a.) (nach Folien)

$O(f(n) + g(n)) = O(f(n)) + O(g(n))$

Da für $O(f(n))$, $O(g(n))$ zwei beliebige Elemente der ~~x~~ beiden Klassen gewählt werden können gilt:

$O(f(n)) \cup O(g(n)) \Leftrightarrow O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$

b.) $n \notin \Omega(n \log_2 n)$:

Widerspruch:

Für $n \geq 2$ gilt $n < n \log_2 n$

Denn $\log_2 n$ ist für $n \geq 2$ ≥ 1 und streng monoton steigend.

Somit $n \notin \Omega(n \log_2 n)$

c.) $\left(\frac{n}{2}\right)^5 \notin O(3n^2)$:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^5 = \frac{n^5}{2^5} = n^5 \cdot \frac{1}{2^5}$$

Falsch für $n = 5$ gilt $\left(\frac{n}{2}\right)^5 > 3n^2$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^5 \approx 97{,}66 \qquad 3 \cdot 5^2 = 75$$

d.) $n^2 + 8n \in O(3n^2)$

$$n^2 + 8n \leq$$
$$n^2 + 8n^2 =$$
$$9n^2 \leq c \cdot 3n^2$$ Diese Aussage ist wahr für $c = 3$

Somit $n^2 + 8n \in O(3n^2)$

e.)
$$0.1n + \sqrt[3]{27n^3} = 0.1n + \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{n^3} = 0.1n + 3n$$
$$= 3.1n$$
$$= c \cdot n$$

Somit $0.1n + \sqrt[3]{27n^3} \in \Theta(n)$ für $c = 3.1$