

1. Was für partielle Ordnungen und was für totale Ordnungen gibt es auf zweielementigen Mengen $\{x, y\}$?

Lösung:

(a)

2. Führe das im Beweis verwendete Sortiervverfahren für die Menge $A = \{d, b, c, a, f, e\}$ mit der alphabetischen Sortierung durch. Verwende als Pivotelement z immer das vorderste Element (am Anfang also d) und lasse die Reihenfolge der Elemente in A_1 und A_3 so, wie sie in A waren (also nicht beim Zerlegen aus Versehen sortieren)!

Lösung:

(a)

3. Beweise, dass die A_i aus dem Beweis in der Vorlesung paarweise disjunkt sind.

Lösung:

(a)

4. Eine schöne Darstellung einer Relation m auf einer endlichen (und nicht zu großen) Menge A ist mittels einer Tabelle, bei der Zeilen und Spalten mit den Elementen von A beschriftet sind (beides Mal dieselbe Reihenfolge wählen) und in der wir genau dann in Zeile x und Spalte y ein Kreuz machen, wenn xRy gilt.

- Wie sieht die Tabelle für die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ aus?
- Wie sieht man einer solchen Tabelle an, ob die Relation
 - reflexiv
 - total und / oder
 - antisymmetrisch

ist?

- Wie sieht die Tabelle einer Ordnung aus, wenn Zeilen- und Spaltenbeschriftungen nach dieser Ordnung sortiert sind?

Lösung:

(a)

5. Für eine endliche Menge A sei jedes Element $x \in A$ mit einer Rangziffer $r(x) \in \mathbb{N}$ versehen. Wir betrachten die Relation R auf A mit

$$xRy :\Leftrightarrow r(x) \leq r(y)$$

- Zeige, dass R transitiv, reflexiv und total ist.
- Unter welcher Bedingung an die Beschriftungen $r(x)$ ist R antisymmetrisch, also eine Ordnung?

Lösung:

(a)

6. Wenn man für eine endliche Menge A mit $n = |A|$ Elementen nur eine partielle Ordnung hat, funktioniert das Sortieren nicht. (Warum nicht?)

Es gibt aber einen entsprechenden Satz, der besagt, dass man A mit seiner partiellen Ordnung topologisch sortieren kann, d.h. es gibt immer (mindestens) eine Numerierung $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, für die gilt:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : x_i R x_j \Rightarrow i \leq j$$

Beweise mithilfe dieses Satzes folgende Aussage: Zu jeder partiellen Ordnung R auf einer endlichen Menge A gibt es eine totale Ordnung R' mit $R \subseteq R'$. (In Worten: Jede partielle Ordnung auf einer endlichen Menge kann ich "durch Hinzufügen von Pfeilen" zu einer totalen Ordnung ausbauen.)

Lösung:

(a)