1. Gegeben sind die folgenden Teilmengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

   Gib die folgenden Mengen an:

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A \setminus B$
   (d) $A \setminus D$
   (e) $B \setminus D$
   (f) $D \setminus A$
   (g) $D \setminus B$
   (h) $D \setminus (A \cup B)$
   (i) $D \setminus (A \cap B)$

   Lösung:

   (a) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10\}$
   (b) $A \cap B = \{\}$
   (c) $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   (d) $A \setminus D = \{1, 3\}$
   (e) $B \setminus D = \{2, 4\}$
   (f) $D \setminus A = \{6, 8, 10\}$
   (g) $D \setminus B = \{5, 7, 9\}$
   (h) $D \setminus (A \cup B) = \{\}$
   (i) $D \setminus (A \cap B) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

2. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer (endlichen) Menge A mit $|A| = n$? Schreibe z.B. alle Teilmengen von $\{1, 2\}$ oder $\{1, 2, 3\}$ auf, und versuche eine Regelmäßigkeit zu erkennen. Wie könnte man die Regelmäßigkeit allgemein beweisen? Zeige dass für endliche Mengen stets $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ gilt.

   Lösung:

   (a) $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
   (b) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
   (c) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ hat 2^n Elemente, denn für jedes der n Elemente von A kann entschieden werden, ob dieses in der Relation enthalten ist, oder nicht.
   (d) Beweis mit vollständiger Induktion (Induktionsanfang $n = 0$)

3. Bestimme die folgenden Mächtigkeiten:

   (a) $|\{1, 4, , 6\}|$
   (b) $|\emptyset|$
   (c) $|\{\emptyset\}|$
   (d) $|\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}|$

   Lösung:

   (a) $|\{1, 4, , 6\}| = 3$
   (b) $|\emptyset| = 0$
   (c) $|\{\emptyset\}| = 1$
   (d) $|\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}| = 2$

4. Zeichne Punktmengen A, B und C, die die folgenden vier Bedingungen zugleich erfüllen:

   (a) $A \cap B \cap C = \emptyset$
   (b) $A \cap B \neq \emptyset$
   (c) $B \cap C \neq \emptyset$
   (d) $A \cap C \neq \emptyset$

   Gib daraufhin Zahlenmengen möglichst kleiner Mächtigkeit an, die diese Bedingungen erfüllen.

   Lösung:

   (a) $A \cap B \cap C = \emptyset = \{\}$
   (b) $A \cap B \neq \emptyset = \{\}$
   (c) $B \cap C \neq \emptyset = \{\}$
   (d) $A \cap C \neq \emptyset = \{\}$

5. A, B und C seien Teilmengen einer Grundmenge G. Beweise von den folgenden Aussagen die wahren und gib für die falschen jeweils ein Gegenbeispiel an.

   (a) Wenn $A \cup B = A \cup C$, dann ist $B = C$
   (b) Wenn $A \setminus B = A$, dann ist $B = C$
   (c) Wenn $B = \emptyset$, dann ist $A \setminus B = A$
   (d) $A \setminus B$ und $B \setminus C$ sind immer disjunkt (d.h. die Schnittmenge ist leer).

   Lösung:

   (a)

6. Beweise, dass zwei Mengen A und B gleich sind, wenn sie wechselseitig Teilmengen voneinander sind (und auch nur dann), also:

   $$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

   Lösung:

   (a) $\subseteq$
   (b) $\supseteq$

7. Die 30 Schüler einer Klasse schrieben in den drei Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik Prüfungsarbeiten mit folgendem Ergebnis: In Deutsch bestanden 22, in Englisch bestanden 17 und in Mathematik bestanden 22 Schüler. 4 bestanden weder Deutsch noch Englisch, 3 bestanden weder Deutsch noch Mathematik, 5 bestanden weder Englisch noch Mathematik. 1 Schüler schaffte keine der drei Prüfungen.

   Wie viele Schüler bestanden die Prüfung in allen drei Fächern?Aussagen

   Hinweis: zeichne die Mengen!

   Lösung:

   (a)

8. Mit der Schreibweise

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

   kann man bequem auch kompliziertere Mengen formulieren, insbesondere dann, wenn man erlaubt, dass auch unendlich viele Mengen vereinigt werden dürfen:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

   Ein Element ist in dieser Vereinigungsmenge enthalten, wenn es in einer der Mengen A_k enthalten ist. Überlege Dir, wie man zum Beispiel die Menge der Primzahlen hinschreiben könnte (Tipp: formuliere dazu z.B. die Menge V_2 der Vielfachen von 2, etc.).

   Lösung:

   (a)

$$V_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{i \cdot k\}$$

$$prim = \mathbb{N} \setminus (V_2 \cup V_3 \cup V_5 \cup V_7 \cup \dots \cup V_\infty)$$