1. Was für partielle Ordnungen und was für totale Ordnungen gibt es auf zweielementigen Mengen $\{x, y\}$?

   Lösung:

   (a) partielle Ordnung:
   $R_1 = \{(x, x), (y, y)\}$
   totale Ordnung:
   $R_2 = \{(x, x), (y, y), (x, y)\}$
   $R_3 = \{(x, x), (y, y), (y, x)\}$

2. Führe das im Beweis verwendete Sortierverfahren für die Menge $A = \{d, b, c, a, f, e\}$ mit der alphabetischen Sortierung durch. Verwende als Pivotelement z immer das vorderste Element (am Anfang also d) und lasse die Reihenfolge der Elemente in A_1 und A_3 so, wie sie in A waren (also nicht beim Zerlegen aus Versehen sortieren)!

   Lösung:

   (a)
   $$A = \{d, b, c, a, f, e\}$$
   $$A_1 = \{b, c, a\}, d, A_2 = \{f, e\}$$
   $$A_3 = \{a\}, b, A_4 = \{c\}, d, A_5\{e\}, f, A_6 = \{\}$$
   $$A_7 = \{a, b, c\}, d, A_8 = \{e, f\}$$
   $$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

3. Beweise, dass die A_i aus dem Beweis in der Vorlesung paarweise disjunkt sind.

   Lösung:

   (a) Die von dem Algorithmus erzeugen Teilmengen sind disjunkt. Die Elemente von A können in eine von 3 Mengen sortiert werden.
   $$A_1 = \{x \in A : xRz \land x \neq z\}$$
   $$A_2 = \{z\}$$
   $$A_3 = \{x \in A : zRx \land x \neq z\}$$
   Falls $x = z$ kann durch die Definition der Mengen A_1, A_3 nur in die Menge A_2 sortiert werden. Falls $x \neq z$ kann es in *entweder* A_1 *oder* A_2 sortiert werden, da auf den Elementen von A eine partielle Ordnung existiert und diese die Antisymmetrie fordert. Dadurch kann entweder xRy oder yRx, aber *nicht* $xRy \land yRx$ existieren. Somit wird x in eine der beiden Mengen sortiert.

   Da A ebenfalls transitiv ist muss eine der beiden direkten Relationen zu x existieren.

4. Eine schöne Darstellung einer Relation m auf einer endlichen (und nicht zu großen) Menge A ist mittels einer Tabelle, bei der Zeilen und Spalten mit den Elementen von A beschriftet sind (beides Mal dieselbe Reihenfolge wählen) und in der wir genau dann in Zeile x und Spalte y ein Kreuz machen, wenn xRy gilt.

   - Wie sieht die Tabelle für die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ aus?
   - Wie sieht man einer solchen Tabelle an, ob die Relation
     – reflexiv
     – total und / oder
     – antisymmetrisch

     ist?
   - Wie sieht die Tabelle einer Ordnung aus, wenn Zeilen- und Spaltenbeschriftungen nach dieser Ordnung sortiert sind?

   Lösung:

   (a)

$x \subseteq y$	$\{\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{\}$	×			
$\{1\}$	×	×		
$\{2\}$	×		×	
$\{1,2\}$	×	×	×	×

   (b)
   - Reflexivität:
     Die Diagonale der Tabelle ist markiert.
   - Totalität:
     Wenn die Diagonale als Spiegelache betrachtet wird, muss auf mindestens einder der beiden Seiten eins der beiden Felder markiert sein
   - Antisymmetrie:
     Bei der an der Diagonalen gespiegelten Tabelle ist höchstens eins der beiden Felder markiert.

(c) Ordnung: $\leq$ auf den Natürlichen Zahlen

$x \leq y$	1	2	3	4
1	$\times$			
2	$\times$	$\times$		
3	$\times$	$\times$	$\times$	
4	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Es sind alle Felder unter der Diagonalen markiert, da die Ordnung reflexiv, total (transitiv) und antisymmetrisch ist.

5. Für eine endliche Menge A sei jedes Element $x \in A$ mit einer Rangziffer $r(x) \in \mathbb{N}$ versehen. Wir betrachten die Relation R auf A mit

$$xRy :\Leftrightarrow r(x) \leq r(y)$$

- Zeige, dass R transitiv, reflexiv und total ist.
- Unter welcher Bedingung an die Beschriftungen $r(x)$ ist R antisymmetrisch, also eine Ordnung?

Lösung:

(a) Da $r(x) \in \mathbb{N}$ und die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ eine totale Ordnung bildet ist $r(x) \leq r(y)$ transitiv, reflexiv und total.

Da R durch diese definiert wird, hat R auch diese Eingenschaften.

(b) Wenn alle Beschriftungen für die verschiedenen Elemente von A unterschiedlich sind, ist R antisymmetrisch.

$$\forall x, y \in A : r(x) \neq r(y)$$

Dann gilt für jedes $x, y \in A$ *entweder* xRy *oder* yRx.

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \neq y : x \leq y \oplus x \leq y$$

6. Wenn man für eine endliche Menge A mit $n = |A|$ Elementen nur eine partielle Ordnung hat, funktioniert das Sortieren nicht. (Warum nicht?)

Es gibt aber einen entsprechenden Satz, der besagt, dass man A mit seiner partiellen Ordnung topologisch sortieren kann, d.h. es gibt immer (mindestens) eine Numerierung $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, für die gilt:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : x_i R x_j \Rightarrow r \leq j$$

Beweise mithilfe dieses Satzes folgende Aussage: Zu jeder partiellen Ordnung R auf einer endlichen Menge A gibt es eine totale Ordnung R' mit $R \subseteq R'$. (In Worten: Jede partielle Ordnung auf einer endlichen Menge kann ich "durch Hinzufugen von Pfeilen" zu einer totalen Ordnung ausbauen.)

Lösung:

(a) Es wird A mit R topologisch sortiert. Dadurch erhält man

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Wenn man nun jedem $x \in A$ eine Rangziffer, die dem Index in A entspricht zuweist entsteht somit nach der vorherigen Aufgabe eine totale Ordnung auf diesen. ($r(x_i) \in \mathbb{N}$)

$$r(x_1) = 1, r(x_2) = 2, \dots, r(x_n) = n$$

Nun ist noch zu zeigen, dass $R \subseteq R'$

$xRy \Rightarrow r(x) \leq r(y) \overset{\text{def. von } R'}{\Rightarrow} xR'y$

Dies ist der Fall, da R' als totale Ordnung definiert ist:

$$\forall i, j \in \{1 \dots n\} : i \leq j \Leftrightarrow x_i R x_j$$