1. Zeige:
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$
Lösung:
   (a) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

2. Bei der Strich- Sternmalerei hätten wir auch mit Sternen anfangen können und $n-1$ davon durch Striche ersetzen. Stelle eine Formel für die Anzahl der Möglichkeiten hierfur auf!

   Zeige, dass diese Formel dieselben Werte liefert wie
$$\binom{n+k-1}{k}$$
(na hoffentlich!)

   Lösung:
   (a) $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{(n+k-1)-(n-1)} = \binom{n+k-1}{k}$

3. Zeige:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
und gib damit ein Schema zum Berechnen der Binomialkoeffizienten nur mittels von Additionen an (zum Rechnen von Hand sehr praktisch!). Wo haben wir dieses Schema schon mal gesehen?

   Lösung:
   (a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$
   $= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \binom{n+1}{k+1}$

4. Gib die Koeffizienten des Polynoms $(1+x)^n$ mittels Binomialkoeffizienten an und zeige durch geschickes Verwenden dieser Formel
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, n > 0, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
Lösung:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$
   (a) $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
   (b) $(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$

5. Wie viele verschiedene Möglichkeiten zu tippen hat man beim klassischen Lotto " 6 aus 49"(Berechnen mit Taschenrechner oder per Hand mit Runden auf zwei gültige Ziffern)?

   Lösung:
   (a) $\binom{49}{6} = 13983816$

6. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es beim Fußball-Toto? (13 Spiele sind zu tippen, jeweils Heimsieg, Heimniederlage oder Unentschieden – wieder Taschenrechner verwenden oder runden).

   Lösung:
   (a) $3^{13} = 1594323$

7. Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim Würfeln mit n nicht unterscheidbaren Würfeln (Ergebnis sind dabei die Punkte der einzelnen Würfel, also wäre z.B. bei fünf Würfeln $2, 3, 5, 6, 6$ ein mögliches Ergebnis)?

   Lösung:
   (a) 6^n

8. Wie viele verschiedene "Full House" gibt es beim Poker? (52 Karten, vier Farben mit je $2, 3, 4, \ldots, 10$, Bube, Dame, König, As)

   Lösung:
   (a) Beim Full House muss zuerst einen Symbol ausgewählt werden. Für dieses gibt es $\binom{13}{1}$ Möglichkeiten. Von diesem müssen dann 3 der 4 Karten ohne Zurücklegen gezogen werden $\binom{4}{3}$. Dann wird ein weiteres Symbol,

welches ungleich dem vorherigen sein muss gezogen. Dies besitzt $\binom{12}{1}$ Möglichkeiten. Von diesem werden dann 2 Karten benötigt.

Somit ergibt sich:

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{2} = 3744$$

9. Wie viele Anagramme (Wörter, die aus denselben Buchstaben bestehen – es geht nur um die möglichen Buchstabenvertauschungen, aussprechen können muss man die Anagramme nicht; Groß- und Kleinbuchstaben werden nicht unterschieden) gibt es von dem Wort *Muh*? Wie viele Anagramme gibt es von *Atlantis* und wie viele von *Mississippi*?

   Lösung:

   Die Anzahl der möglichen Permutationen einer Menge beträgt $n!$. Wenn aber k gleiche Elemente in dieser enthalten sind, beträgt die Zahl der unterschiedlichen Permutationen $\frac{n!}{k!}$, denn $k!$ Permutationen sind gleich.

   (a) Muh: 3!

   (b) Atlantis: $\frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

   (c) Mississippi: $\frac{11!}{10!} = 11$