

# Vorkurs für Informatiker 2017 Lösungen

Maximilian Frühauf

6. Oktober 2017

## 1 Einstimmung

1. Der Legende nach gewährte einst Sher Khan, der König von Indien, dem Erfinder des Schachspiels für die Erfindung dieses außergewöhnlichen Spiels die Gunst, sich seine Belohnung selbst aussuchen zu dürfen. Der bescheidene (?) Erfinder verlangte lediglich ein paar Reiskörner. Und zwar sollten auf jedem Feld des Schachbrett jeweils doppelt so viele Körner, wie auf dem vorhergehenden Feld liegen (für Mathematiker:  $1+2+2^2+2^3+\dots$  Reiskörner). Auf wie viele Reiskörner hätte sich die Belohnung belaufen?

Überlege Dir dazu allgemein, welche Zahlen herauskommen, wenn man die Zweierpotenzen aufsummiert. Studierende mit Nebenfach Physik schätzen bitte die Zahl der Reiskörner in Tonnen (Studierende mit Nebenfach Agrarwissenschaften entsprechend in Doppelzentner).

Lösung:

$$(a) \sum_{i=0}^4 2^i = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 2^5 - 1$$

Die Summe der ersten  $n$  Zweierpotenzen beträgt:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Da ein Schachbrett 64 Felder hat beträgt die Anzahl aller Reiskörner:

$$\sum_{i=0}^{63} 2^i = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

2. Die Papiergrößen nach DIN sind so gebaut, dass man durch Falten in der Mitte der langen Seite die nächstkleinere Größe bekommt. Also: hat man ein Papier der Höhe  $a$  und der Breite  $b$  (in Hochformat, also  $a > b$ ), dann ist das kleinere Papier  $a$  breit und  $b$  hoch. Zusätzlich gilt aber bei den DIN-Größen, dass das Seitenverhältnis dabei gleich bleibt:  $a : b = b : \frac{a}{b}$ . Wie groß ist demnach das Seitenverhältnis  $x = \frac{a}{b}$ ?  
Ein Blatt DIN A0 hat die Fläche  $1m^2$ . Wie hoch und wie breit ist es?  
Wie hoch und wie breit ist ein Blatt DIN A4?

Lösung:

(a) Das Seitenverhältnis beträgt:

$$x = \frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{2b}{a}$$

Somit gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{2b}{a} \mid \cdot a \mid \cdot b$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \mid \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} = x \approx 1,41$$

Somit können die Seitenlängen des Din A0 Blattes folgendermaßen errechnet werden:

$$1m^2 = (b) \cdot (\sqrt{2} \cdot b)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}m^2} \approx 0.841m$$

$$a = \sqrt{2} \cdot b \approx 1,1891m$$

Es gilt:

$$a_{neu} = b_{alt}$$

$$b_{neu} = \frac{\sqrt{2} \cdot a_{neu}}{2}$$

Somit können jetzt alle Maße der verschiedenen DIN Größen berechnet werden:

	A0	A1	A2	A3	A4
<i>a</i>	1.1891m	0.841m	0.595m	0.4205m	0.2975m
<i>b</i>	0.841m	0.595m	0.4205m	0.2975m	0.2103m

3. Viel Schöner würden die Papiergrößen nach dem so genannten "goldenen Schnitt" ausschauen. Dazu muss sich  $a : b$  verhalten wie  $b : (a - b)$ . Berechne wieder das Seitenverhältnis  $x = \frac{a}{b}$ . Wer eine Schere dabei hat, kann anschließend Wahrheitswert des ersten Satzes überprüfen.

Lösung:

(a) Das Seitenverhältnis lässt sich auch schreiben als:

$$x = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b}$$

$$\frac{1}{x} = x - 1 \mid \cdot x$$

$$1 = x^2 - x \mid -1$$

$$0 = x^2 - x - 1$$

Von diesem Polynom können dann die Nullstellen bestimmt werden, um den goldenen Schnitt zu erhalten:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

4. Interessant sind die Koeffizienten, die herauskommen, wenn man die Terme  $(x + 1)^n$  ausmultipliziert (also z.B.  $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ).

Berechne dies für die ersten paar  $n$  und überlege, nach welchem Gesetz die Koeffizienten gebildet werden.

Lösung:

- (a) Beim ausmultiplizieren der einzelnen Terme sind die Dreieckszahlen in den Koeffizienten erkennbar.

$$(x+1)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 \cdot 1$$

$$(x+1)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1 \cdot 1$$

Somit kann ein solcher Term mit einer beliebigen Potenz folgendermaßen dargestellt werden:

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot 1^i$$

Diese Formel lässt sich auf einen beliebigen Term mit den Variablen  $a, b$  verallgemeinern.

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

5. Ein Vater ist heute  $a$  Jahre älter als sein Sohn. In  $b$  Jahren wird er  $c$  Jahre älter als  $d$ -mal so alt sein wie sein Sohn heute. Wie alt sind Vater und Sohn gegenwärtig?

Führen alle Parameterwerte  $a, b, c, d$  zu einer Lösung? Welche davon sind sinnvoll?

Lösung:

- (a)  $v :=$  Alter des Vaters heute,  $s :=$  Alter des Sohns heute

Aus dem Text erhält man:

$$v = s + a$$

$$c = (v + b) - d \cdot s \quad \text{Einsetzen und vereinfachen:}$$

$$c = s + a + b - d \cdot s \quad | -a \quad | -b$$

$$c - a - b = s - d \cdot s$$

$$c - a - b = s \cdot (1 - d) \quad | \div (1 - d)$$

$$s = \frac{c-a-b}{1-d} \quad \text{für } d \neq 1$$

$$v = s + a = \frac{c-a-b}{1-d} + a = \frac{c-b-a \cdot d}{1-d}$$

6. Der Chinese Xu Yue stellte gegen 190 n. Chr. das folgende Problem: Wie viele Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Tiere haben will und ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 4 Münzen und 4 Küken eine Münze kosten? Die 100 Münzen sollen dabei vollständig verbraucht werden.

Lösung:

- (a)  $a :=$  Hahn,  $b :=$  Henne,  $c :=$  Küken

Da man insgesamt genau 100 Tiere haben möchte, muss gelten:

$$1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c = 100$$

Dazu sollen genau 100 Münzen verbraucht werden, somit muss außerdem gelten:

$$5 \cdot a + 4 \cdot b + \frac{c}{4} = 100$$

Diese zwei Gleichungen können in ein lineares Gleichungssystem geschrieben werden. Da dies aber 3 Variablen mit nur 2 Gleichungen besitzt ist es nicht eindeutig lösbar.

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 4 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 100 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 19 & 15 & 0 & 300 \\ 1 & 1 & 1 & 100 \end{array}$$

$$b = \frac{300-19a}{15} = 20 - \frac{19a}{15}$$

$$c = -a - b + 100 = -a - (20 - \frac{19a}{15}) + 100 = \frac{4a}{15} + 80$$

Ganzzahlige Lösungen für diese beiden Gleichungen sind somit:

$$a = 15 \cdot n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$b = 20 - 19n$$

$$c = 80 + 4n$$

7. Eine Gruppe von Menschen heißt *halbzerstritten*, wenn für zwei beliebig herausgegriffene Gruppenmitglieder  $a$  und  $b$  immer gilt: *Entweder* redet  $a$  mit  $b$  oder  $b$  redet mit  $a$ . Es gibt also weder Paare, bei denen Kommunikation in beide Richtungen möglich ist, noch solche, bei denen Kommunikation in keine Richtung funktioniert.

Um in einer halbzerstrittenen Gruppe Nachrichten weiterzuleiten, wäre es hilfreich, wenn man eine Kontaktperson  $x$  hat, die mit jeder anderen Person über höchstens eine Zwischenstation redet - also für jedes  $a \neq x$  gilt, dass  $x$  mit  $a$  redet oder es zumindest ein  $b$  gibt, so dass  $x$  mit  $b$  und  $b$  mit  $a$  redet.

Gibt es eine solche Kontaktperson in jeder halbzerstrittenen Gruppe?

Lösung:

(a)

## 2 Potenzen und Polynome

1. Berechne  $2^n$  für  $0 \dots 20$ .

Für größere Zweierpotenzen ist die Faustregel " $2^{10}$  oder 1000 - das ist doch praktisch das selbe" nützlich. Gib damit Näherungen für  $2^{32}$  und  $2^{64}$  an.

Lösung:

(a)

2. Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = 6 \cdot x^2$  und  $g(x) = 2 \cdot x^3$ .

(a) Skizziere beide Graphen.

- (b) Für welche  $x$  ist  $f(x) = g(x)$ ? Für welche ist  $f(x) > g(x)$  und für welche  $f(x) < g(x)$ ?
3. Für welche ganzen Zahlen  $n$  ist  $2^n > n^2$ ? (Probieren ist hier besser als rechnen!)

Lösung:

- (a)
4. (a) Skizziere den Graph der Funktion  $x \mapsto 2^x$  für  $x = -1000 \dots 10$  und diskutiere den Satz "die Exponentialfunktion ist ein rechter Winkel".
- (b) Bestimme die kleinste Zahl  $x_0$ , so dass für alle  $x \geq x_0$  gilt:  $2^x \geq 16x^3$ .
- (c) Wie ändert sich die Antwort in b), wenn die rechte Seite ( $16x^3$ ) mit  $2^{13} = 8192$  multipliziert wird, also die Ungleichung  $2^x \geq 131072x^3$  betrachtet wird?

Lösung:

- (a)
5. Wie viele verschiedene Zustände kann man mit  $n$  Bits darstellen? Speziell: wenn wir ganze Zahlen (bei 0 beginnend) in 32 Bit speichern, wie weit können wir damit zählen?

Lösung:

- (a)
6. Vereinfache folgende Terme (dabei seien  $x, y, z > 0$ ):

- (a)  $\sqrt[5]{2^{15}}$
- (b)  $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$
- (c)  $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$
- (d)  $(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y^3})^6$
- (e)  $\frac{(x^2 \cdot y^3 z^4)^2}{(x \cdot y \cdot z)^{-2}}$
- (f)  $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Lösung:

- (a)  $\sqrt[5]{2^{15}} =$
- (b)  $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} =$
- (c)  $\sqrt{\sqrt[3]{x}} =$

(d)  $(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y^3})^6 =$

(e)  $\frac{(x^2 \cdot y^3 z^4)^2}{(x \cdot y \cdot z)^{-2}} =$

(f)  $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

7. Um eine Koch-Kurve zu konstruieren, beginnen wir mit einer Strecke der Länge 1 und ersetzen nun in jeder Runde jede bis dahin erzeugte Strecke durch vier Teilstrecken von je einem Drittel der Länge gemäß folgendem Muster

Die Ergebnisse der Runden zwei bis fünf sehen dann so aus (die Koch-Kurve selbst ist das fraktale Objekt, das im Grenzprozess unendlich vieler Iterationen entsteht):

Schätze die Länge dieser Streckenzüge! Wie lang sind sie wirklich?

Lösung:

(a)

8. Lineare Gleichungen - bestimme für die folgenden Gleichungen jeweils alle  $x$ , die die Gleichung erfüllen:

(a)  $4 \cdot (x - 1) = 5 \cdot (x - 2)$

(b)  $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} - 1$

(c)  $(x + 2) \cdot (x - 2) = 21$

Naja, die letzte Gleichung ist nicht linear in  $x$ ; wen das stört, der führt zwischendrin ein  $y := x^2$  ein...

Lösung:

(a)

9. Leite die Lösungsformel  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$  der quadratischen Gleichung mit Hilfe der so genannten quadratischen Ergänzung her, d.h. bringe die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  erst in die Form  $(x + \alpha)^2 + \beta = 0$  und löse die Gleichung dann nach  $x$  auf.

Lösung:

(a)

10. Gegeben sind die Punkte  $A(0|2)$ ,  $B(2|6)$  und  $C(-1|1.5)$ .

- (a) Konstruiere eine Funktion  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , so dass ihr Graph durch diese drei Punkte verläuft. Wie viele solcher Funktionen gibt es?
- (b) Bestimme  $y_1$  und  $y_2$  so, dass die Punkte  $D(4|y_1)$  und  $E(-3|y_2)$  ebenfalls auf dem Graphen liegen!

Lösung:

(a)

11. Dividiere  $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$  durch  $x^2 - 2$  und bestimme alle Nullstellen von  $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ .

Lösung:

(a)

12. Berechne  $(\sum_{i=0}^n x^i) \cdot (x - 1)$  und stelle damit eine geschlossene Formel (d.h. ohne Summenzeichen) zur Berechnung von  $\sum_{i=0}^n x^i$  für  $x \neq 1$  auf.

Lösung:

(a)

### 3 Logarithmen

write something here

### 4 Aussagenlogik und Beweise

write something here

### 5 Mengen

write something here

### 6 Relationen

### 7 Ordnungsrelationen

write something here

### 8 Abbildungen

### 9 Folgen

write something here

- 10 Analysis
- 11 Kombinatorik
- 12 Lineare Gleichungssysteme