1. Wie viele Relationen auf einer endlichen Menge A mit n Elementen gibt es?

   Lösung:

   (a) Denn für eine Relation müssen immer 2 Elemente aus einer Menge ausgewählt werden. Da diese auch das gleiche sein können, gibt es für das erste n Möglichkeiten. Für das 2. wieder n.
   Somit ergeben sich n^2 Paare. Für jedes dieser gibt es die Möglichkeit es in der Relation zu enthalten, oder nicht. Dadurch ergibt sich eine binäre Auswahl pro Element.
   Es gibt somit 2^{n^2} Möglichkeiten.

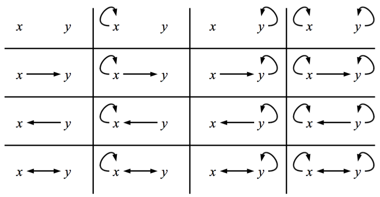
2. Gib für $A = \{x, y, z\}$ Relationen an mit folgenden Eigenschaften:

   (a) Reflexiv, aber nicht symmetrisch
   (b) Weder symmetrisch noch antisymmetrisch
   (c) Antisymmetrisch, aber nicht asymmetrisch
   (d) Total, aber nicht transitiv
   (e) Symmetrisch und total

   Lösung:

   (a) $R := \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$
   (b) $R := \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$
   (c) $R := \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$
   (d) $R := \{(x, y), (y, z), (z, x), (y, y), (x, x), (z, z)\}$
   (e) $R := \{(x, y), (y, z), (z, x), (y, x), (z, y), (x, z)\}$

3. Hier sind alle Relationen auf der Menge $A = \{x, y\}$:



   Welche dieser Relationen sind reflexiv, welche symmetrisch, welche asymmetrisch, welche antisymmetrisch, welche transitiv und welche total?

   Lösung:

$r :=$ Reflexiv
$s :=$ Symmetrisch
$a :=$ Asymmetrisch
$at :=$ Antisymmetrisch
$tr :=$ Transitiv
$t :=$ Total

s, a, at, tr	a, tr	a, tr	r, s, at, tr
a, at, tr	at	at	r, at, tr, t
a, at, tr	at	at	r, at, tr, t
s, tr	s, tr	s, tr	r, s, tr, t

4. Zeige, dass wenn $xRy \Rightarrow \neg yRx$ erfüllt ist, dann auch $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$. Verwende dazu die Regel zur Auflösen der Implikation ($A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$) und die de morgansche Regel.

   Lösung:

   (a) Die erste Implikation kann umgeformt werden als:
   $xRy \Rightarrow \neq xRy$
   $\Leftrightarrow (\neg xRy \vee \neg yRx)$
   Dies ist äquivalent zur Bedingung der zweiten Bedingung:
   $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
   $\Leftrightarrow \neg(xRy \wedge yRx) \vee x = y$
   $\Leftrightarrow (\neg xRy \vee \neg yRx) \vee x = y$
   Somit ist die zweite Aussage immer wahr, wenn die erste wahr ist.

5. Es sei R eine beliebige Relation auf einer Menge A. Die Relation R^S auf A sei definiert als

$$R^S := \{(x, y) \in A \times A : xRy \vee yRx\}$$

   - Was bedeutet das für das Bild mit Pfeilen?
   - Zeige, dass R^S eine symmetrische Relation ist.
   - Zeige, dass R^S die kleinste symmetrische Relation auf A ist, die R enthält. Für jede symmetrische Relation R' auf A mit $R \subseteq R'$ gilt $R^S \subseteq R'$
   - Beweise oder widerlege: Wenn R transitiv ist, ist auch R' transitiv.

   Lösung:

   (a) Jeder Pfeil, der nur in eine Richtung geht wird durch einen Doppelpfeil ersetzt. (R^S macht jede Relation symmetrisch).

(b) R^S ist symmetrisch, denn falls ein Paar $(x, y) \in R^S$ muss entweder $xRy \vee yRx$ aus der Relation R gelten.

Somit muss auch das Paar $(y, x) \in R^S$, denn wenn beim vorherigen xRy war muss nun yRx oder umgekehrt sein.

(c) Es ist zu zeigen, dass jede Relation in R^S auch in der symmetrischen Relation R' vorhanden ist. Somit ist R^S die kleinste symmetrische Relation, die R enthält.

$xR^Sy \overset{\text{Def.}}{=} yRy \vee yRx$

$\overset{R \subseteq R'}{\Leftrightarrow} xR'y \vee yR'x$

$\overset{\text{Symmetrie von } R'}{\Leftrightarrow} xR'y \vee xR'y$

$\Leftrightarrow xR'y$

(d) Die die Relation R^S ist transitiv, wenn R transitiv ist, da von R^S für eine transitive Relation

$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

folgende Relationen hinzugfügt werden können:

$$yRx, zRy, zRx$$

Diese bilden dann wieder eine transitive Relation $(zRy \wedge yRx) \Rightarrow zRx$, welche genau „umgekehrt“ zu der originalen transitiven Relation verläuft.

6. Gibt es Relationen, die sowohl reflexiv, aus auch asymmetrisch sind? (Vorsicht: genau hinsehen!)

Lösung:

(a) Es gibt nur eine Relation, die reflexiv sowie asymmetrisch ist. Dies ist die Relation auf der leeren Menge.

$$A = \{\}$$

Reflexivität:

$\forall x \in A : xRx$, da $A = \{\}$ ist dies der Fall.

Asymmetrie:

$\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ Da $A = \{\}$ ist die Prämisse immer falsch, wodurch die Implikation wahr wird.