

1. Gegeben sind die folgenden Teilmengen  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  und  $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

Gib die folgenden Mengen an:

- |                     |                     |                              |
|---------------------|---------------------|------------------------------|
| (a) $A \cup B$      | (d) $A \setminus D$ | (g) $D \setminus B$          |
| (b) $A \cap B$      | (e) $B \setminus D$ | (h) $D \setminus (A \cup B)$ |
| (c) $A \setminus B$ | (f) $D \setminus A$ | (i) $D \setminus (A \cap B)$ |

Lösung:

(a)

2. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge  $\mathcal{P}(A)$  einer (endlichen) Menge  $A$  mit  $|A| = n$ ? Schreibe z.B. alle Teilmengen von  $\{1, 2\}$  oder  $\{1, 2, 3\}$  auf, und versuche eine Regelmäßigkeit zu erkennen. Wie könnte man die Regelmäßigkeit allgemein beweisen? Zeige dass für endliche Mengen stets  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$  gilt.

Lösung:

(a)

3. Bestimme die folgenden Mächtigkeiten:

- |                     |                                    |
|---------------------|------------------------------------|
| (a) $ \{1, 4, 6\} $ | (c) $ \{\emptyset\} $              |
| (b) $ \emptyset $   | (d) $ \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\} $ |

Lösung:

(a)

4. Zeichne Punktmengen  $A, B$  und  $C$ , die die folgenden vier Bedingungen zugleich erfüllen:

- |                                   |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| (a) $A \cap B \cap C = \emptyset$ | (c) $B \cap C \neq \emptyset$ |
| (b) $A \cap B \neq \emptyset$     | (d) $A \cap C \neq \emptyset$ |

Gib daraufhin Zahlenmengen möglichst kleiner Mächtigkeit an, die diese Bedingungen erfüllen.

Lösung:

(a)

5.  $A, B$  und  $C$  seien Teilmengen einer Grundmenge  $G$ . Beweise von den folgenden Aussagen die wahren und gib für die falschen jeweils ein Gegenbeispiel an.

- (a) Wenn  $A \cup B = A \cup C$ , dann ist  $B = C$   
 (b) Wenn  $A \setminus B = A$ , dann ist  $B = C$   
 (c) Wenn  $B = \emptyset$ , dann ist  $A \setminus B = A$   
 (d)  $A \setminus B$  und  $B \setminus C$  sind immer disjunkt (d.h. die Schnittmenge ist leer).

Lösung:

(a)

6. Beweise, dass zwei Mengen  $A$  und  $B$  gleich sind, wenn sie wechselseitig Teilmengen voneinander sind (und auch nur dann), also:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Lösung:

(a)

7. Die 30 Schüler einer Klasse schrieben in den drei Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik Prüfungsarbeiten mit folgendem Ergebnis: In Deutsch bestanden 22, in Englisch bestanden 17 und in Mathematik bestanden 22 Schüler. 4 bestanden weder Deutsch noch Englisch, 3 bestanden weder Deutsch noch Mathematik, 5 bestanden weder Englisch noch Mathematik. 1 Schüler schaffte keine der drei Prüfungen.

Wie viele Schüler bestanden die Prüfung in allen drei Fächern? Aussagen

Hinweis: zeichne die Mengen!

Lösung:

(a)

8. Mit der Schreibweise

$$\bigcup_{k=1}^n A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

kann man bequem auch kompliziertere Mengen formulieren, insbesondere dann, wenn man erlaubt, dass auch unendlich viele Mengen vereinigt werden dürfen:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

Ein Element ist in dieser Vereinigungsmenge enthalten, wenn es in einer der Mengen  $A_k$  enthalten ist. Überlege Dir, wie man zum Beispiel die Menge der Primzahlen hinschreiben könnte (Tipp: formuliere dazu z.B. die Menge  $V_2$  der Vielfachen von 2, etc.).

Lösung:

(a)