

Mathematik Vorkurs für Informatiker 2017

Lösungen

Maximilian Frühauf

7. Oktober 2017

1 Einstimmung

1. Der Legende nach gewährte einst Sher Khan, der König von Indien, dem Erfinder des Schachspiels für die Erfindung dieses außergewöhnlichen Spiels die Gunst, sich seine Belohnung selbst aussuchen zu dürfen. Der bescheidene (?) Erfinder verlangte lediglich ein paar Reiskörner. Und zwar sollten auf jedem Feld des Schachbrett jeweils doppelt so viele Körner, wie auf dem vorhergehenden Feld liegen (für Mathematiker: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$ Reiskörner). Auf wie viele Reiskörner hätte sich die Belohnung belaufen? Überlege Dir dazu allgemein, welche Zahlen herauskommen, wenn man die Zweierpotenzen aufsummiert. Studierende mit Nebenfach Physik schätzen bitte die Zahl der Reiskörner in Tonnen (Studierende mit Nebenfach Agrarwissenschaften entsprechend in Doppelzentner).

Lösung:

$$(a) \sum_{i=0}^4 2^i = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 2^5 - 1$$

Die Summe der ersten n Zweierpotenzen beträgt:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Da ein Schachbrett 64 Felder hat beträgt die Anzahl aller Reiskörner:

$$\sum_{i=0}^{63} 2^i = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

2. Die Papiergrößen nach DIN sind so gebaut, dass man durch Falten in der Mitte der langen Seite die nächstkleinere Größe bekommt. Also: hat man ein Papier der Höhe a und der Breite b (in Hochformat, also $a > b$), dann ist das kleinere Papier a breit und b hoch. Zusätzlich gilt aber bei den DIN-Größen, dass das Seitenverhältnis dabei gleich bleibt: $a : b = b : \frac{a}{b}$. Wie groß ist demnach das Seitenverhältnis $x = \frac{a}{b}$?

Ein Blatt DIN A0 hat die Fläche $1m^2$. Wie hoch und wie breit ist es? Wie hoch und wie breit ist ein Blatt DIN A4?

Lösung:

- (a) Das Seitenverhältnis beträgt:

$$x = \frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{b}} = \frac{2b}{a}$$

Somit gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{2b}{a} \mid \cdot a \mid \cdot b$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} = x \approx 1,41$$

Somit können die Seitenlängen des Din A0 Blattes folgendermaßen errechnet werden:

$$1m^2 = (b) \cdot (\sqrt{2} \cdot b)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}m^2} \approx 0.841m$$

$$a = \sqrt{2} \cdot b \approx 1,1891m$$

Es gilt:

$$a_{neu} = b_{alt}$$

$$b_{neu} = \frac{\sqrt{2} \cdot a_{neu}}{2}$$

Somit können jetzt alle Maße der verschiedenen DIN Größen berechnet werden:

	A0	A1	A2	A3	A4
a	1.1891m	0.841m	0.595m	0.4205m	0.2975m
b	0.841m	0.595m	0.4205m	0.2975m	0.2103m

3. Viel Schöner würden die Papiergrößen nach dem so genannten "goldenen Schnitt" aussehen. Dazu muss sich $a : b$ verhalten wie $b : (a - b)$. Berechne wieder das Seitenverhältnis $x = \frac{a}{b}$. Wer eine Schere dabei hat, kann anschließend Wahrheitswert des ersten Satzes überprüfen.

Lösung:

- (a) Das Seitenverhältnis lässt sich auch schreiben als:

$$x = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b}$$

$$\frac{1}{x} = x - 1 \quad | \cdot x$$

$$1 = x^2 - x \quad | -1$$

$$0 = x^2 - x - 1$$

Von diesem Polynom können dann die Nullstellen bestimmt werden, um den goldenen Schnitt zu erhalten:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

4. Interessant sind die Koeffizienten, die herauskommen, wenn man die Terme $(x+1)^n$ ausmultipliziert (also z.B. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$). Berechne dies für die ersten paar n und überlege, nach welchem Gesetz die Koeffizienten gebildet werden.

Lösung:

- (a) Beim ausmultiplizieren der einzelnen Terme sind die Dreieckszahlen in den Koeffizienten erkennbar.

$$(x+1)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 \cdot 1$$

$$(x+1)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1 \cdot 1$$

Somit kann ein solcher Term mit einer beliebigen Potenz folgendermaßen dargestellt werden:

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot 1^i$$

Diese Formel lässt sich auf einen beliebigen Term mit den Variablen a, b verallgemeinern.

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

5. Ein Vater ist heute a Jahre älter als sein Sohn. In b Jahren wird er c Jahre älter als d -mal so alt sein wie sein Sohn heute. Wie alt sind Vater und Sohn gegenwärtig?

Führen alle Parameterwerte a, b, c, d zu einer Lösung? Welche davon sind sinnvoll?

Lösung:

- (a) $v :=$ Alter des Vaters heute, $s :=$ Alter des Sohns heute

Aus dem Text erhält man:

$$v = s + a$$

$c = (v + b) - d \cdot s$ Einsetzen und vereinfachen:

$$c = s + a + b - d \cdot s \quad | -a \quad | -b$$

$$c - a - b = s - d \cdot s$$

$$c - a - b = s \cdot (1 - d) \quad | : (1 - d)$$

$$s = \frac{c-a-b}{1-d} \quad \text{für } d \neq 1$$

$$v = s + a = \frac{c-a-b}{1-d} + a = \frac{c-b-a \cdot d}{1-d}$$

6. Der Chinese Xu Yue stellte gegen 190 n. Chr. das folgende Problem: Wie viele Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Tiere haben will und ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 4 Münzen und 4 Küken eine Münze kosten? Die 100 Münzen sollen dabei vollständig verbraucht werden.

Lösung:

- (a) $a :=$ Hahn, $b :=$ Henne, $c :=$ Küken

Da man insgesamt genau 100 Tiere haben möchte, muss gelten:

$$1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c = 100$$

Dazu sollen genau 100 Münzen verbraucht werden, somit muss außerdem gelten:

$$5 \cdot a + 4 \cdot b + \frac{c}{4} = 100$$

Diese zwei Gleichungen können in ein lineares Gleichungssystem geschrieben werden. Da dies aber 3 Variablen mit nur 2 Gleichungen besitzt ist es nicht eindeutig lösbar.

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 5 & 4 & 4 & 100 & 19 & 15 & 0 & 300 \\ 1 & 1 & 1 & 100 & 1 & 1 & 1 & 100 \end{array} \rightarrow$$

$$b = \frac{300-19a}{15} = 20 - \frac{19a}{15}$$

$$c = -a - b + 100 = -a - (20 - \frac{19a}{15}) + 100 = \frac{4a}{15} + 80$$

Ganzzahlige Lösungen für diese beiden Gleichungen sind somit:

$$a = 15 \cdot n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$b = 20 - 19n$$

$$c = 80 + 4n$$

7. Eine Gruppe von Menschen heißt *halbzerstritten*, wenn für zwei beliebig herausgegriffene Gruppenmitglieder a und b immer gilt: *Entweder* redet a mit b oder b redet mit a . Es gibt also weder Paare, bei denen Kommunikation in beide Richtungen möglich ist, noch solche, bei denen Kommunikation in keine Richtung funktioniert.

Um in einer halbzerstrittenen Gruppe Nachrichten weiterzuleiten, wäre es hilfreich, wenn man eine Kontaktperson x hat, die mit jeder anderen Person über höchstens eine Zwischenstation redet - also für jedes $a \neq x$ gilt, dass x mit a redet oder es zumindest ein b gibt, so dass x mit b und b mit a redet.

Gibt es eine solche Kontaktperson in jeder halbzerstrittenen Gruppe?

Lösung:

(a)

2 Potenzen und Polynome

1. Berechne 2^n für $0 \dots 20$.

Für größere Zweierpotenzen ist die Faustregel „ 2^{10} oder 1000 - das ist doch praktisch das selbe“ nützlich. Gib damit Näherungen für 2^{32} und 2^{64} an.

Lösung:

(a)

2. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 6 \cdot x^2$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$.

(a) Skizziere beide Graphen.

(b) Für welche x ist $f(x) = g(x)$? Für welche ist $f(x) > g(x)$ und für welche $f(x) < g(x)$?

3. Für welche ganzen Zahlen n ist $2^n > n^2$? (Probieren ist hier besser als rechnen!)

Lösung:

(a)

4. (a) Skizziere den Graph der Funktion $x \mapsto 2^x$ für $Rx = -1000 \dots 10$ und diskutiere den Satz "die Exponentialfunktion ist ein rechter Winkel".

(b) Bestimme die kleinste Zahl x_0 , so dass für alle $x \geq x_0$ gilt: $2^x \geq 16x^3$.

(c) Wie ändert sich die Antwort in b), wenn die rechte Seite ($16x^3$) mit $2^{13} = 8192$ multipliziert wird, also die Ungleichung $2^x \geq 131072x^3$ betrachtet wird?

Lösung:

(a)

5. Wie viele verschiedene Zustände kann man mit n Bits darstellen? Speziell: wenn wir ganze Zahlen (bei 0 beginnend) in 32 Bit speichern, wie weit können wir damit zählen?

Lösung:

(a)

6. Vereinfache folgende Terme (dabei seien $x, y, z > 0$):

(a) $\sqrt[5]{2^{15}}$

(b) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$

(c) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$

(d) $(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y^3})^6$

(e) $\frac{(x^2 \cdot y^3 z^4)^2}{(x \cdot y \cdot z)^{-2}}$

(f) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Lösung:

(a) $\sqrt[5]{2^{15}} =$

(b) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

(c) $\sqrt{\sqrt[3]{x}} =$

(d) $(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y^3})^6 =$

(e) $\frac{(x^2 \cdot y^3 z^4)^2}{(x \cdot y \cdot z)^{-2}} =$

(f) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

7. Um eine Koch-Kurve zu konstruieren, beginnen wir mit einer Strecke der Länge 1 und ersetzen nun in jeder Runde jede bis dahin erzeugte Strecke durch vier Teilstrecken von je einem Drittel der Länge gemäß folgendem Muster

Die Ergebnisse der Runden zwei bis fünf sehen dann so aus (die Koch-Kurve selbst ist das fraktale Objekt, das im Grenzprozess unendlich vieler Iterationen entsteht):

Schätze die Länge dieser Streckenzüge! Wie lang sind sie wirklich?

Lösung:

(a)

8. Lineare Gleichungen - bestimme für die folgenden Gleichungen jeweils alle x , die die Gleichung erfüllen:

(a) $4 \cdot (x - 1) = 5 \cdot (x - 2)$

(b) $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} - 1$

(c) $(x + 2) \cdot (x - 2) = 21$

Naja, die letzte Gleichung ist nicht linear in x ; wen das stört, der führt zwischendrin ein $y := x^2$ ein...

Lösung:

(a)

9. Leite die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ der quadratischen Gleichung mit Hilfe der so genannten quadratischen Ergänzung her, d.h. bringe die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erst in die Form $(x + \alpha)^2 + \beta = 0$ und löse die Gleichung dann nach x auf.

Lösung:

(a)

10. Gegeben sind die Punkte $A(0|2)$, $B(2|6)$ und $C(-1|1.5)$.

- (a) Konstruiere eine Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, so dass ihr Graph durch diese drei Punkte verläuft. Wie viele solcher Funktionen gibt es?
- (b) Bestimme y_1 und y_2 so, dass die Punkte $D(4|y_1)$ und $E(-3|y_2)$ ebenfalls auf dem Graphen liegen!

Lösung:

(a)

11. Dividiere $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ durch $x^2 - 2$ und bestimme alle Nullstellen von $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$.

Lösung:

(a)

12. Berechne $(\sum_{i=0}^n x^i) \cdot (x-1)$ und stelle damit eine geschlossene Formel (d.h. ohne Summenzeichen) zur Berechnung von $\sum_{i=0}^n x^i$ für $x \neq 1$ auf.

Lösung:

(a)

3 Logarithmen

1. Skizziere den Graph der Funktion $x \mapsto \lg x$ für $x = 2^{-1000} \dots 1000$.

Lösung:

(a)

2. Bestimme für beliebiges positives $b \neq 1$ folgende Werte: $\log_b 1$ und $\log_b b$.

Lösung:

(a)

3. Finde mit den Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen eine Rechenregel für $\log_b \sqrt[n]{x}$.

Lösung:

(a)

4. Vereinfache folgende Ausdrücke (b, c, x und y seien positiv mit $b, c \neq 1$):

$$b^{x+\log_b y}, \left(\sqrt{b}\right)^{\log_b x}, \log_c \left(x^{\frac{1}{\log_c b}}\right),$$

Lösung:

(a)

5. Vereinfache (es sei $x > y > 0$)

$$\ln(x^2 - y^2) - \ln(x - y)$$

Lösung:

(a)

6. Wenn für Abszisse (vulgo "x-Achse") und Ordinate logarithmische Maßstäbe verwendet werden — wie sehen dann die Graphen von Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ aus?

Lösung:

(a)

7. Jaja, ich weiß schon, dass die allermeisten von Ihnen nicht vorhaben, jemals auf einem Rechenschieber zu rechnen. Zum Logarithmen-Üben ist das Ding (bzw. eine Vorstellung davon) aber immer noch praktisch! Manchmal wollen auch Informatiker die Länge der Diagonale eines Quadrats berechnen — markiere dazu auf dem Informatiker-Rechenschieber den Wert $\sqrt{2}$. Markiere nun noch denjenigen Wert, mit dem man die Kantenlänge eines Würfels multiplizieren muss, um die Kantenlänge eines Würfels mit doppeltem Volumen zu erhalten.

Wie kann man mit unserem Rechenschieber — ohne die Skalen zu verlängern — den Wert von $8 \cdot 512$ ablesen? (Tipp: am echten Rechenschieber heißt diese Technik Durchschieben. Bei unserm Modell ist ggf. mal wieder die Näherung $2^{10} \approx 1000$ hilfreich.)

Lösung:

(a)

8. In wieviel Jahren hat sich eine mit einem Zinssatz von $p\%$ im Jahr verzinste Geldanlage (incl. Zinseszins) verdoppelt? Berechne diese Dauer für $p = 1, 2, 3, 4$ und 10 und vergleiche die Ergebnisse mit der Faustregel "70 Jahre geteilt durch Zinssatz".

Lösung:

(a)

9. Zeige, dass $\ln 10$ keine rationale Zahl ist (es gibt keine ganzen Zahlen x, y mit $\ln 10 = x/y$).

Lösung:

(a)

4 Aussagenlogik und Beweise

1. Bestätige durch Wahrheitstafeln das erste Distributivgesetz und die erste de Morgansche Regel.

Lösung:

(a)

2. Zeige die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

(a) Mittels Wahrheitstafeln

(b) Durch Umformen (zweckmäßig ist hier, die zweite Form in die erste umzuformen, aber andersrum geht's natürlich auch).

Lösung:

(a)

3. Ein logischer Ausdruck, der (unabhängig von den Werten der darin vorkommenden Variablen) immer den Wert *true* hat, heißt Tautologie — z.B. der Ausdruck $A \vee (\neg A)$.

Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien ?

(a) $(A \vee C) \wedge (A \vee \neg C)$

(b) $\neg(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge C)$

(c) $((A \vee B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)) \wedge ((A \vee \neg B)) \wedge \neg(\neg A \wedge B)$

Lösung:

(a)

4. Bei einem Verstoß gegen ein mathematisches Gesetz (welches, ist hier egal) kommen drei stadtbekannte Gauner A, B und C als Täter infrage — einer alleine oder mehrere zusammen. Der Polizei liegen zwei Aussagen vor:

(a) Wenn A unschuldig ist, ist B schuldig.

(b) Wenn B unschuldig ist, sind sowohl A als auch C schuldig

Da die Polizei ihre Informanten kennt, weiß sie, dass die erste Aussage wahr, die zweite Aussage aber falsch ist. Wer ist's gewesen?

Hier gibt es mal wieder verschiedene Lösungswege – man kann z.B. logische Ausdrücke für die Aussagen aufstellen und umformen, man kann die Aufgabe aber auch graphisch lösen, indem man sich ein Venn-Diagramm für drei Mengen A, B und C aufmalt: Nun legt man fest, dass der Bereich innerhalb von z.B. A bedeutet, dass A schuldig ist etc., hat so alle möglichen Kombinationen von Schuld/Unschuld der drei Kandidaten vor sich und kann mittels der Aussagen solange Bereiche ausschließen, bis nur noch ein Feld übrig ist.

Lösung:

(a)

5. Formuliere folgende Aussagen mit Quantoren:

- (a) Die Differenz von 1 und allen natürlichen Zahlen, die größer als 15 sind, ist kleiner als -14 .
- (b) Jede reelle Zahl x hat ein multiplikatives Inverses, also eine Zahl y mit $x \cdot y = 1$.
- (c) Es gibt eine gerade Primzahl. (Hierbei kann der Operator $|$ verwendet werden: für zwei ganze Zahlen a und b gilt $a|b$ genau dann, wenn a Teiler von b ist.)

Lösung:

(a)

6. Gib für die Aussage $\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 5)$ eine äquivalente Aussage an, die keinen Existenzquantor enthält (Allquantoren sind erlaubt...).

Hinweis: ein negierter Allquantor entspricht einem Existenzquantor und umgekehrt.

Lösung:

(a)

7. Sind die Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x - y = 0$$

und

$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x - y = 0$$

äquivalent?

Lösung:

(a)

8. Folgende Aussagen gelten:

- (a) Jeder Student will gute Noten haben.
- (b) Kein Student lernt auf langweilige Prüfungen
- (c) Jeder Prüfung, die ohne Mathe auskommt, ist langweilig
- (d) Jeder Student, der gute Noten haben will, aber nichts gelernt hat, muss sich nur auf sein Glück verlassen.

Beweise: Wenn alle Prüfungen ohne Mathe auskommen, müssen sich alle Studenten nur auf ihr Glück verlassen.

9. Wie lautet die Verneinung von „Alle Kreter sind Lügner“ ?

Lösung:

(a)

10. Zeige mit vollständiger Induktion über n , dass

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

für alle $x \neq 1$ und alle $n \geq 0$ gilt.

Lösung:

(a)

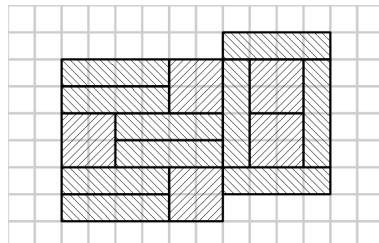
11. Beweise durch vollständige Induktion: für $n \geq 4$ ist $n! > 2^n$.

Lösung:

(a)

12. Gegeben sei ein Parkett aus 1×4 und 2×2 -Stücken (die Skizze zeigt ein Beispiel, in Wirklichkeit kann das Parkett aber eine beliebige andere Form haben). Nun geht ein 1×4 -Stück kaputt und wir haben keins mehr im Lager. Daher ersetzen wir es durch ein 2×2 Stück und versuchen, die Ausgangsform wiederherzustellen (die Teile sind noch nicht festgeklebt, können also beliebig umgeordnet werden).

Geht das — immer, also für beliebig geformte Flächen, oder nur für gewisse (welche?), oder vielleicht gar nie?



Lösung:

(a)

5 Mengen

1. Gegeben sind die folgenden Teilmengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Gib die folgenden Mengen an:

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

- (c) $A \setminus B$
- (d) $A \setminus D$
- (e) $B \setminus D$
- (f) $D \setminus A$
- (g) $D \setminus B$
- (h) $D \setminus (A \cup B)$
- (i) $D \setminus (A \cap B)$

Lösung:

(a)

2. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer (endlichen) Menge A mit $|A| = n$? Schreibe z.B. alle Teilmengen von $\{1, 2\}$ oder $\{1, 2, 3\}$ auf, und versuche eine Regelmäßigkeit zu erkennen. Wie könnte man die Regelmäßigkeit allgemein beweisen? Zeige dass für endliche Mengen stets $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ gilt.

Lösung:

(a)

3. Bestimme die folgenden Mächtigkeiten:

- (a) $|\{1, 4, , 6\}|$
- (b) $|\emptyset|$
- (c) $|\{\emptyset\}|$
- (d) $|\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}|$

Lösung:

(a)

4. Zeichne Punktmengen A, B und C , die die folgenden vier Bedingungen zugleich erfüllen:

- (a) $A \cap B \cap C = \emptyset$
- (b) $A \cap B \neq \emptyset$
- (c) $B \cap C \neq \emptyset$
- (d) $A \cap C \neq \emptyset$

Gib daraufhin Zahlenmengen möglichst kleiner Mächtigkeit an, die diese Bedingungen erfüllen.

Lösung:

(a)

5. A, B und C seien Teilmengen einer Grundmenge G . Beweise von den folgenden Aussagen die wahren und gib für die falschen jeweils ein Gegenbeispiel an.

- (a) Wenn $A \cup B = A \cup C$, dann ist $B = C$
- (b) Wenn $A \setminus B = A$, dann ist $B = C$
- (c) Wenn $B = \emptyset$, dann ist $A \setminus B = A$
- (d) $A \setminus B$ und $B \setminus C$ sind immer disjunkt (d.h. die Schnittmenge ist leer).

Lösung:

(a)

6. Beweise, dass zwei Mengen A und B gleich sind, wenn sie wechselseitig Teilmengen voneinander sind (und auch nur dann), also:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Lösung:

(a)

7. Die 30 Schüler einer Klasse schrieben in den drei Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik Prüfungsarbeiten mit folgendem Ergebnis: In Deutsch bestanden 22, in Englisch bestanden 17 und in Mathematik bestanden 22 Schüler. 4 bestanden weder Deutsch noch Englisch, 3 bestanden weder Deutsch noch Mathematik, 5 bestanden weder Englisch noch Mathematik. 1 Schüler schaffte keine der drei Prüfungen.

Wie viele Schüler bestanden die Prüfung in allen drei Fächern? Aussagen

Hinweis: zeichne die Mengen!

Lösung:

(a)

8. Mit der Schreibweise

$$\bigcup_{k=1}^n A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

kann man bequem auch kompliziertere Mengen formulieren, insbesondere dann, wenn man erlaubt, dass auch unendlich viele Mengen vereinigt werden dürfen:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

Ein Element ist in dieser Vereinigungsmenge enthalten, wenn es in einer der Mengen A_k enthalten ist. Überlege Dir, wie man zum Beispiel die Menge der Primzahlen hinschreiben könnte (Tipp: formuliere dazu z.B. die Menge V_2 der Vielfachen von 2, etc.).

Lösung:

(a)

6 Relationen

1. Wie viele Relationen auf einer endlichen Menge A mit n Elementen gibt es?

Lösung:

(a)

2. Gib für $A = \{x, y, z\}$ Relationen an mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Reflexiv, aber nicht symmetrisch
- (b) Weder symmetrisch noch antisymmetrisch
- (c) Antisymmetrisch, aber nicht asymmetrisch
- (d) Total, aber nicht transitiv
- (e) Symmetrisch und total

Lösung:

(a)

3. Hier sind alle Relationen auf der Menge $A = \{x, y\}$:

Welche dieser Relationen sind reflexiv, welche symmetrisch, welche asymmetrisch, welche antisymmetrisch, welche transitiv und welche total?

Lösung:

(a)

4. Zeige, dass wenn $xRy \Rightarrow \neg yRx$ erfüllt ist, dann auch $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$. Verwende dazu die Regel zur Auflösen der Implikation ($A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$) und die de morgansche Regel.

Lösung:

(a)

5. Es sei R eine beliebige Relation auf einer Menge A . Die Relation R^S auf A sei definiert als

$$R^S := \{(x, y) \in A \times A : xRy \vee yRx\}$$

- Was bedeutet das für das Bild mit Pfeilen?
- Zeige, dass R^S eine symmetrische Relation ist.
- Zeige, dass R^S die kleinste symmetrische Relation auf A ist, die R enthält. Für jede symmetrische Relation R' auf A mit $R \subseteq R'$ gilt $R^S \subseteq R'$
- Beweise oder widerlege: Wenn R transitiv ist, ist auch R' transitiv.

Lösung:

(a)

6. Gibt es Relationen, die sowohl reflexiv, als auch asymmetrisch sind? (Vorsicht: genau hinsehen!)

Lösung:

(a)

7 Ordnungsrelationen

1. Was für partielle Ordnungen und was für totale Ordnungen gibt es auf zweielementigen Mengen $\{x, y\}$?

Lösung:

(a)

2. Führe das im Beweis verwendete Sortiervorgehen für die Menge $A = \{d, b, c, a, f, e\}$ mit der alphabetischen Sortierung durch. Verwende als Pivotelement z immer das vorderste Element (am Anfang also d) und lasse die Reihenfolge der Elemente in A_1 und A_3 so, wie sie in A waren (also nicht beim Zerlegen aus Versehen sortieren)!

Lösung:

(a)

3. Beweise, dass die A_i aus dem Beweis in der Vorlesung paarweise disjunkt sind.

Lösung:

(a)

4. Eine schöne Darstellung einer Relation m auf einer endlichen (und nicht zu großen) Menge A ist mittels einer Tabelle, bei der Zeilen und Spalten mit den Elementen von A beschriftet sind (beides Mal dieselbe Reihenfolge wählen) und in der wir genau dann in Zeile x und Spalte y ein Kreuz machen, wenn xRy gilt.

- Wie sieht die Tabelle für die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ aus?
- Wie sieht man einer solchen Tabelle an, ob die Relation
 - reflexiv
 - total und / oder
 - antisymmetrischist?
- Wie sieht die Tabelle einer Ordnung aus, wenn Zeilen- und Spaltenbeschriftungen nach dieser Ordnung sortiert sind?

Lösung:

(a)

5. Für eine endliche Menge A sei jedes Element $x \in A$ mit einer Rangziffer $r(x) \in \mathbb{N}$ versehen. Wir betrachten die Relation R auf A mit

$$xRy :\Leftrightarrow r(x) \leq r(y)$$

- Zeige, dass R transitiv, reflexiv und total ist.
- Unter welcher Bedingung an die Beschriftungen $r(x)$ ist R antisymmetrisch, also eine Ordnung?

Lösung:

(a)

6. Wenn man für eine endliche Menge A mit $n = |A|$ Elementen nur eine partielle Ordnung hat, funktioniert das Sortieren nicht. (Warum nicht?)

Es gibt aber einen entsprechenden Satz, der besagt, dass man A mit seiner partiellen Ordnung topologisch sortieren kann, d.h. es gibt immer (mindestens) eine Numerierung $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, für die gilt:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : x_i R x_j \Rightarrow i \leq j$$

Beweise mithilfe dieses Satzes folgende Aussage: Zu jeder partiellen Ordnung R auf einer endlichen Menge A gibt es eine totale Ordnung R' mit $R \subseteq R'$. (In Worten: Jede partielle Ordnung auf einer endlichen Menge kann ich "durch Hinzufügen von Pfeilen" zu einer totalen Ordnung ausbauen.)

Lösung:

(a)

8 Abbildungen

1. Ein Rechteck R mit Seitenlängen a und b habe eine Fläche von 10cm^2 . Drücke den Umfang U von R als Funktion von b aus.

Lösung:

(a)

2. Gib (z.B. als Tabelle) die Und-Verknüpfung als Abbildung $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ an, wobei $\mathbb{B} := \{\text{true}, \text{false}\}$ die Menge der Wahrheitswerte sei. Ist die Abbildung injektiv und/oder surjektiv?

Lösung:

(a)

3. Existieren Abbildungen, die weder surjektiv noch injektiv sind? Gib gegebenenfalls solche Abbildungen an und veranschauliche sie anhand einer Skizze.

Lösung:

(a)

4. Prüfe die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

(a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$

(b) $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$

(c) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; 1 \mapsto 1, x \mapsto x - 1 \text{ für } x > 1$

(d) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; x \mapsto x - 1$

Lösung:

(a)

5. Gib jeweils zwei Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} an, die

(a) injektiv, aber nicht surjektiv

(b) bijektiv sind.

Lösung:

(a)

6. Gib eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ an.

Lösung:

(a)

7. Ordnet man jedem auftretenden Funktionswert y einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ die Elemente seiner Urbildmenge $f^{-1}(y)$ zu, so erhält man eine Relation. Unter welchen Bedingungen ist diese Umkehrrelation eine Abbildung?

Die in diesem Fall definierte Abbildung $B \rightarrow A$ heißt *Umkehrabbildung* und wird — etwas leichtsinnig — auch mit f^{-1} bezeichnet.

Lösung:

(a)

8. Die Bijektivität kann man gut einsetzen, um zu entscheiden, ob zwei Mengen gleich viele Elemente haben – dies ist genau dann der Fall, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt.

- Demonstriere mit ein paar einfachen Beispielen, dass diese Definition für "kleine" Mengen gut funktioniert.

Im Gegensatz zum intuitiven "Zählen der Elemente" lässt sich das Kriterium Bijektivität auch auf unendliche Mengen übertragen:

- Vergleiche mit diesem Kriterium die Menge der geraden Zahlen mit der der ungeraden Zahlen.
- Gibt es mehr Zahlen die durch 2 teilbar sind, oder mehr, die durch 3 teilbar sind?

Mehr Erstaunliches über Bijektionen auf unendlichen Mengen findet man unter dem Stichwort "Hilberts Hotel", z.B. in der Wikipedia.

Lösung:

(a)

9. Zusatzaufgabe: Zeige, dass auch für unendliche Mengen A gilt: $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$, d.h., es gibt keine Bijektion zwischen A und $\mathcal{P}(A)$. Tipp: zu einer Bijektion $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ könnte man sich die Menge aller $x \in A$ ansehen, für die $x \notin f(x)$ gilt...

Lösung:

(a)

9 Folgen

1. Berechne die ersten Partialsummen der Reihe mit Gliedern $s_n = \frac{9}{10^n}$ und bestimme deren kleinste obere Schranke.

Lösung:

(a)

2. Gib eine Bedingung an die Reihenglieder s_k an, wann eine Reihe $f_n = \sum s_k$ streng monoton wachsend bzw. fallend ist (im Fall einer Reihe beziehen sich Attribute wie "monoton wachsend" auf die Partialsummen, nicht auf die Reihenglieder).

Lösung:

(a)

3. Zeige für $0 < x < 1$ ist die *geometrische Reihe*

$$f_n := \sum_{k=0}^n x^k$$

beschränkt und monoton, mithin konvergent. Was ist der Grenzwert der Reihe? (Tipp: Die Summe kennen wir schon...)

Lösung:

(a)

4. Zeige, dass die harmonische Reihe mit Reihengliedern $s_n := \frac{1}{n}$ keine obere Schranke besitzt (die Partialsummen also beliebig groß werden).

Lösung:

(a)

5. Zeige, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzen kann! Nimm dazu an, es gebe $y_1 \neq y_2$, die beide die Grenzwertbedingung erfüllen und führe das zum Widerspruch durch Angabe eines ϵ , mit dem die weitere Bedingung unmöglich erfüllt sein kann.

Lösung:

(a)

6. Ein Mann spaziert mit seinem Hund von seinem Haus zu einer Kneipe. Die Entfernung zwischen Haus und Kneipe sei s . Der Mann gehe dabei mit der Geschwindigkeit v . Dies ist dem Hund jedoch zu langweilig. Er läuft deswegen doppelt so schnell zwischen der Kneipe und seinem Herrchen hin und her. Das heißt, er startet am Haus zusammen mit seinem Herrchen, dreht um, sobald er das Ziel erreicht, stoppt, wenn er wieder auf sein Herrchen trifft, läuft dann wieder zur Kneipe,...

Berechne, welchen Weg der Hund zurücklegt, bis Herrchen und Hund gemeinsam die Kneipe erreichen. Es gibt einen so genannten "Mathematiker-Weg" und einen so genannten "Physiker-Weg". Versuche, beide zu finden.

Lösung:

(a)

7. In Aufgabe 2.7 haben wir die Länge der Kochkurve zu berechnen, was uns auf eine Folge (l_n) von Zahlen führt. Ebenso kann man die Fläche (a_n) unter der Kochkurve berechnen, indem man die Flächen der Dreiecke aufaddiert, die Schritt für Schritt auf die Kurve "draufgesetzt" werden. Sind diese Folgen jeweils beschränkt und/oder monoton?

Lösung:

(a)

8. Gib Folgen (a_n) , (b_n) an mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \infty$ sowie:

(a) $\lim(a_n - b_n) = 0$

(b) $\lim(a_n - b_n) = +\infty$

(c) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$

Lösung:

(a)

9. O - Notation: zeig, dass gilt:

(a) $6n^4 \in O(3n^4)$

(b) $16n^3 \in O(2^n)$

(c) $n^2 \notin O(n)$

Gib im Fall von „ \in “ ein entsprechendes n_0 an, so dass Bedingung (8.1) erfüllt ist.

Lösung:

(a)

10. Bestimme alle Häufungspunkte und den größten Häufungspunkt von

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

(Benutze dabei die Gleichheit $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$).

Lösung:

(a)

11. Prüfe jeweils auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Hinweis: Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$.

Ebenfalls gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta$ und - wenn β und alle $b_n \neq 0$ sind - $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = \alpha/\beta$

(a) $a_n = \frac{3n+2(-1)^n}{n}$

(b) $b_n = \frac{nx^n}{nx^n+1}$ $x \in \mathbb{R}, x > 1$

Lösung:

(a)

10 Analysis

1. Man zeige direkt anhand der ϵ - δ -Definition die Stetigkeit der Funktion $f(x) = |x|$. Wie kann man anhand der ϵ - δ Definition zeigen, dass die Signumsfunktion

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0, \end{cases}$$

in $x = 0$ nicht stetig ist?

Lösung:

(a)

2. Man zeige

$$x = e^{\ln(x)}$$

und leite durch beidseitiges Differenzieren eine Regel für die Ableitung des Logarithmus her.

Lösung:

(a)

3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f(x) = -x + x \ln(x)$$

Was lässt sich daraus mithilfe der Gleichung $\int f'(x)dx = F(x) + C$ folgern?

Lösung:

(a)

4. Man leite mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $\frac{1}{g(x)}$ und anschließend mit der Produktregel die Ableitung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ her.

Lösung:

(a)

5. In der Vorlesung wurde die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

direkt anhand der Definition der Ableitung gezeigt. Beweise diese Ableitungsregel noch einmal mit vollständiger Induktion.

Lösung:

(a)

6. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet:

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann existiert ein ξ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

- (a) Was bedeutet der Satz anschaulich?
- (b) Beweise den Satz von Rolle:
Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann besitzt der Graph von f zwischen a und b mindestens einen Punkt mit waagrechter Tangente.

Lösung:

- (a)

7. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{3^3 + x^2 - 4}{4x^2 - 16}$$

- (a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich von f an.
- (b) Zeige die Identität

$$f(x) - \frac{1}{4} = -\left(f(-x) - \frac{1}{4}\right)$$

Was lässt sich daraus hinsichtlich der Symmetrie des Graphen von f folgern?

- (c) Berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.
- (d) Bestimme alle Asymptoten von f und berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit der schiefen Asymptote.
- (e) Berechne die ersten beiden Ableitungen von f . Kontrolle:

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{x^2 - 12}{(x^2 - 4)^2}$$

- (f) Bestimme alle Extrempunkte.
- (g) Untersuche f auf Wendepunkte.
- (h) Zeichne den Graphen von f unter der Verwendung aller bisherigen Resultate.

Lösung:

- (a)

11 Kombinatorik

1. Zeige:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Lösung:

- (a)

2. Bei der Strich- Sternmalerei hätten wir auch mit Sternen anfangen können und $n - 1$ davon durch Striche ersetzen. Stelle eine Formel für die Anzahl der Möglichkeiten hierfür auf!

Zeige, dass diese Formel dieselben Werte liefert wie

$$\binom{n+k-1}{k}$$

(na hoffentlich!)

Lösung:

(a)

3. Zeige:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

und gib damit ein Schema zum Berechnen der Binomialkoeffizienten nur mittels von Additionen an (zum Rechnen von Hand sehr praktisch!). Wo haben wir dieses Schema schon mal gesehen?

Lösung:

(a)

4. Gib die Koeffizienten des Polynoms $(1+x)^n$ mittels Binomialkoeffizienten an und zeige durch geschicktes Verwenden dieser Formel

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, n > 0, \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Lösung:

(a)

5. Wie viele verschiedene Möglichkeiten zu tippen hat man beim klassischen Lotto "6 aus 49" (Berechnen mit Taschenrechner oder per Hand mit Runden auf zwei gültige Ziffern)?

Lösung:

(a)

6. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es beim Fußball-Toto? (13 Spiele sind zu tippen, jeweils Heimsieg, Heimniederlage oder Unentschieden – wieder Taschenrechner verwenden oder runden).

Lösung:

(a)

7. Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim Würfeln mit n nicht unterscheidbaren Würfeln (Ergebnis sind dabei die Punkte der einzelnen Würfel, also wäre z.B. bei fünf Würfeln 2, 3, 5, 6, 6 ein mögliches Ergebnis)?

Lösung:

(a)

8. Wie viele verschiedene "Full House" gibt es beim Poker? (52 Karten, vier Farben mit je 2, 3, 4, ..., 10, Bube, Dame, König, As)

Lösung:

(a)

9. Wie viele Anagramme (Wörter, die aus denselben Buchstaben bestehen – es geht nur um die möglichen Buchstabenvertauschungen, aussprechen können muss man die Anagramme nicht; Groß- und Kleinbuchstaben werden nicht unterschieden) gibt es von dem Wort *Muh*? Wie viele Anagramme gibt es von *Atlantis* und wie viele von *Mississippi*?

Lösung:

(a)

12 Lineare Gleichungssysteme

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} -x_1 & +2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & -x_2 & = & 2 \end{array}$$

- (a) Löse das System zunächst graphisch.
(b) Eliminiere nun mittels der ersten Gleichung das x_1 in der zweiten Gleichung
(c) Löse das so geänderte System noch einmal graphisch.
(d) Berechne schließlich aus dem geänderten System die Lösung.

Lösung:

(a)

2. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & +4x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & 3x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & -2 \end{array}$$

Lösung:

(a)

3. Das Lösen eines LGS nach dieser Methode benötigt bei n Unbekannten etwa $n^3/3$ Operationen (Additionen und Multiplikationen). Angenommen, unser Rechner schafft 100 Millionen Operationen pro Sekunde — wie lange braucht er dann für ein LGS mit 10, mit 1000, mit 100000 Unbekannten?

Lösung:

(a)

4. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ (d.h. r Zeilen und s Spalten, Koeffizienten aus \mathbb{R}) und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^s$ ist das Matrix-Vektor-Produkt $c = A \cdot b \in \mathbb{R}^r$ definiert, bei dem in Zeile i das Skalarprodukt aus der Zeile i von A und dem Vektor b gebildet wird:

$$c_i = \sum_{k=1}^s a_{i,k} \cdot b_k$$

Berechne folgendes Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und überprüfe die Ergebnisse aus der Aufgabe 11.2

Lösung:

(a)

5. für welche Werte von a ist folgendes LGS lösbar? Was sind dann die Lösungen?

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2 \\ x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = 4 \\ -2x_1 & -3x_2 & -x_3 & = a \end{array}$$

Lösung:

(a)