1. Gegeben sei das lineare Gleichungsystem

$$\begin{array}{rrcr} -x_1 & +2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & -x_2 & = & 2 \end{array}$$

   (a) Löse das System zunächst graphisch.

   (b) Eliminiere nun mittels der ersten Gleichung das x_1 in der zweiten Gleichung

   (c) Löse das so geänderte System noch einmal graphisch.

   (d) Berechne schließlich aus dem geänderten System die Lösung.

   Lösung:

   (a)

   (b)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c)

   (d)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Löse das lineare Gleichungsystem

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & +4x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & 3x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & -2 \end{array}$$

   Lösung:

   (a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Das Lösen eines LGS nach dieser Methode benötigt bei n Unbekannten etwa $n^3/3$ Operationen (Additionen und Multiplikationen). Angenommen, unser Rechner schafft 100 Millionen Operationen pro Sekunde — wie lange braucht er dann fur ein LGS mit 10, mit 1000, mit 100000 Unbekannten?

   Lösung:

   (a) Allgemeine Formel für n Unbekannte

$$t(n) := \frac{n^3}{3} \cdot \frac{1}{100 \cdot 10^6} s = \frac{n^3}{3 \cdot 10^8} s$$

	10	100	1000	100000
t	$3.33\mu s$	$3.33ms$	$3.33sec$	38.58 Tage

4. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ (d.h. r Zeilen und s Spalten, Koeffizienten aus $\mathbb{R}$) und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^s$ ist das Matrix-Vektor-Produkt $c = A \cdot b \in \mathbb{R}^r$ definiert, bei dem in Zeile i das Skalarprodukt aus der Zeile i von A und dem Vektor b gebildet wird:

$$c_i = \sum_{k=1}^{s} a_{i,k} \cdot b_k$$

   Berechne folgendes Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   und überprüfe die Ergebnisse aus der Aufgabe 11.2

   Lösung:

   (a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1-4 \\ 4+3-2 \\ -1+2 \\ -2+4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5. für welche Werte von a ist folgendes LGS lösbar? Was sind dann die Lösungen?

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & -3x_2 & -x_3 & = & a \end{array}$$

   Lösung:

   (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -a-2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

$0 + 0 + 0 = a + 3$
$a = -3$

$x_2 + x_3 = 1 | - x_3$
$x_2 = 1 - x_3$

$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 + (1 - x_3) = 1$
$x_1 = x_3$