1. Man zeige direkt anhand der ϵ-δ-Definition die Stetigkeit der Funktion $f(x) = |x|$. Wie kann man anhand der ϵ-δ Definition zeigen, dass die Signumsfunktion

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0, \end{cases}$$

in $x = 0$ nicht stetig ist?

Lösung:

$$\forall \xi \in \mathbb{R} |a - \xi| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(\xi)| < \epsilon$$

(a) $f(x) = |x|$
$\forall \xi \in \mathbb{R} |a - \xi| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(\xi)| < \epsilon$
$\delta = \epsilon$
$\forall \xi \in \mathbb{R} |a - \xi| < \delta \Rightarrow |f(0) - f(\xi)| = |0 - \xi| < \epsilon$

(b) $f(x) = sign(x), a = 0$
Die Bedingung muss für beliebig kleine $\epsilon > 0$ gelten, insbesondere für $\epsilon < 1$.
$\delta = \epsilon$
$\forall \xi \in \mathbb{R} |0 - \xi| < \delta \overset{\xi < 0}{\Rightarrow} |f(0) - f(\xi)| = |0 + 1| \not< \epsilon$
$\overset{\xi > 0}{\Rightarrow} |f(0) - f(\xi)| = |0 - 1| \not< \epsilon$
$\overset{\xi = 0}{\Rightarrow} |f(0) - f(\xi)| = |0 - 0| < \epsilon$
Die Aussage ist falsch für alle $0 < \epsilon < 1$.

2. Man zeige

$$x = e^{\ln x}$$

und leite durch beidseitiges Differenzieren eine Regel für die Ableitung des Logarithmus her.

Lösung:

(a) $\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} e^{\ln x}$
$1 = (\frac{d}{dx} \ln x) \cdot e^{\ln x}$
$1 = \frac{d}{dx} (\ln x) \cdot x | \div x$
$\frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln x$

3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f(x) = -x + x \ln(x)$$

Was lässt sich daraus mithilfe der Gleichung $\int f'(x) dx = F(x) + C$ folgern?

Lösung:

(a) $f(x) = -x + x \ln(x)$
$f'(x) = -1 + x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x$
$= -1 + 1 + \ln x$
$= \ln x$

(b) $\int f'(x) dx = F(x) + C$
$\int ln(x) dx = [-x + x \ln x] = -x + x \ln x + C$

4. Man leite mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $\frac{1}{g(x)}$ und anschließend mit der Produktregel die Ableitung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ her.

Lösung:

(a) $\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \frac{d}{dx} g(x)^{-1}$
$= -1 \cdot g(x)^{-2} \cdot g'(x)$
$= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

(b) $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx} \Big(f(x) \cdot g(x)^{-1} \Big)$
$= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$= f(x) \cdot (-\frac{g'(x)}{g(x)^2}) + f'(x) \cdot g(x)^{-1}$
$= \frac{-f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$
$= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

5. In der Vorlesung wurde die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

direkt anhand der Definition der Ableitung gezeigt. Beweise diese Ableitungsregel noch einmal mit vollständiger Induktion.

Lösung:

(a) Induktionsvoraussetzung: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
Induktionsanfang: $n = 0$
$\frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0$
$0 \cdot x^{0-1} = 0$
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x^n \cdot x)$
$= x^n \cdot \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x^n \cdot x$
$\overset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{=} x^n \cdot 1 + nx^{n-1} \cdot x$
$= x^n + nx^n$
$= x^n(1 + n)$ □

6. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet:

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann existiert ein ξ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

(a) Was bedeutet der Satz anschaulich?

(b) Beweise den Satz von Rolle:
Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann besitzt der Graph von f zwischen a und b mindestens einen Punkt mit waagrechter Tangente.

Lösung:

(a)

(b) Nach dem Mittelwertsatz gilt: $\xi \in [a, b]$
$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)| \ \div (b - a)$
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$
da $f(a) = f(b)$
$\frac{0}{b-a} = f'(\xi)$
$0 = f'(\xi)$ □

7. Wir betrachen die Funktion

$$f(x) = \frac{3^3 + x^2 - 4}{4x^2 - 16}$$

(a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich von f an.

(b) Zeige die Identität

$$f(x) - \frac{1}{4} = -\left(f(-x) - \frac{1}{4}\right)$$

Was lässt sich daraus hinsichtlich der Symmetrie des Graphen von f folgern?

(c) Berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

(d) Bestimme alle Asymptoten von f und berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit der schiefen Asymptote.

(e) Berechne die ersten beiden Ableitungen von f. Kontrolle:

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{x^2 - 12}{(x^2 - 4)^2}$$

(f) Bestimme alle Extrempunkte.

(g) Untersuche f auf Wendepunkte.

(h) Zeichne den Graphen von f unter der Verwendung aller bisherigen Resultate.

Lösung:

(a) Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners.
Nullstellen des Nenners:
$4x^2 - 16 = 0| \div 4$
$x^2 - 4 = 0$
$x_{1,2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 4}$
$x_1 = -\frac{1+\sqrt{15}}{2}$
$x_2 = -\frac{1-\sqrt{15}}{2}$
$D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1+\sqrt{15}}{2}, -\frac{1-\sqrt{15}}{2}\}$

(b)

(c) Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Nullstellen der Funktion. Der mit der y-Achse kann durch einsetzen von $f(0)$ ausgerechnet werden.
Nullstellen des Zählers:
$3x^3 + x^2 - 4 = 0$

Raten der Nullstelle $x_1 = 1$. Diese wird dann abgespaltet und so das Polynom mit Polynomdivision um einen Grad reduziert.

$(3x^3 + x^2 - 4) \div (x - 1) = 3x^2 + 4x + 4$

$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3}$

$x_{2,3} = -\frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{6} \Rightarrow$ Die beiden Nullstellen $x_{2,3}$ sind irrational

Schnittpunkt mit der x-Achse: $x_1 = 1$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = \frac{3\cdot 0^3 + 0^2 - 4}{4\cdot 0^2 - 16} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}$

(d) Die Funktion hat eine schiefe Asymptote, da der Grad des Nenners um 1 grö0er ist, als der des Zählers. Diese kann durch Polynomdivision ermittelt werden:

$(3x^3 - x^2 - 4) \div (4x^2 - 16) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{12x}{4x^2-16}$

Da der gebrochen rationale Teil des Polynoms für $n \to \infty$ gegen 0 geht, ist die Asymptote von $f(x)$:

$g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

(e) Um $f(x)$ auf Wendepunkte zu untersuchen müssen die Nullstellen der 2. Ableitung ermittelt werden.

(f)