1. Berechne die ersten Partialsummen der Reihe mit Gliedern $s_n = \frac{9}{10^n}$ und bestimme deren kleinste obere Schranke.

   Lösung:

   (a) Die Partialsumme der Reihenglieder ist:

   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} = \frac{10^n - 1}{10^n}$$

   $\sum_{i=1}^{1} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10}$
   $\sum_{i=1}^{2} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}$
   $\sum_{i=1}^{3} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} = \frac{999}{1000}$
   Im Grenzwert für $n \to \infty$ konvergiert diese Summe gegen 1

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n - 1}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10^n}{10^n} - \frac{1}{10^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1$$

2. Gib eine Bedingung an die Reihenglieder s_k an, wann eine Reihe $f_n = \sum s_k$ streng monoton wachsend bzw. fallend ist (im Fall einer Reihe beziehen sich Attribute wie "monoton wachsend“ auf die Partialsummen, nicht auf die Reihenglieder).

   Lösung:

   (a) Es müssen alle $s_k > 0$ sein damit f_n streng monoton wachsend ist. Wenn alle $s_k < 0$ ist die Folge streng monoton fallend.

3. Zeige für $0 < x < 1$ ist die *geometrische Reihe*

   $$f_n := \sum_{k=0}^{n} x^k$$

   beschränkt und monoton, mithin konvergent. Was ist der Grenzwert der Reihe? (Tipp: Die Summe kennen wir schon...)

   Lösung:

   (a) Jeder Term der Partialialsumme ist > 0. Somit ist die Folge der Partialsummen streng monoton wachsend. Sie konvergiert gegen :

   $$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

   (b) Konvergenz von f_n

4. Zeige, dass die harmonische Reihe mit Reihengliedern $s_n := \frac{1}{n}$ keine obere Schranke besitzt (die Partialsummen also beliebig groß werden).

   Lösung:

   (a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i}$
   $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$
   $> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$
   $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$
   $= 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \Rightarrow$ nicht konvergent

5. Zeige, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzen kann! Nimm dazu an, es gebe $y_1 \neq y_2$, die beide die Grenzwertbedingung erfüllen und führe das zum Widerspruch durch Angabe eines ϵ, mit dem die weitere Bedingung unmöglich erfüllt sein kann.

   Lösung:

   (a) Widerspruchsbeweis:
   Annahme: Die Folge f_n hat die Grenzwerte y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$
   Nach der Definition des Grenzwerts einer Folge muss somit gelten:

   $$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow |f_n - y_1| < \epsilon$$

   $$\forall \epsilon > 0 : \exists n_1(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow |f_n - y_2| < \epsilon$$

   Da die Grenzwerte unterschiedlich sind, wird ϵ (Radius um den Grenzwert, in dem unendlich viele Punkte liegen müssen) so gewählt, dass es kleiner als die hälfte der Distanz von y_1, y_2 auf dem Zahlenstrahl.

   $$\epsilon < \frac{|y_1 - y_2|}{2}$$

   Somit müssen die Mengen der Punkte, die in den ϵ- Umgebungen von y_1, y_2 liegen disjunkt sein.
   Es wird nun $N := \max\{n_0, n_1\}$ gewählt. Somit sind alle Glieder der Folge f_n für beide Grenzwerte innerhalb der gegebenen ϵ-Umgebung.

   $$|f_n - y_1| + |f_n - y_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

   $2\epsilon = 2 \cdot \frac{|y_1 - y_2|}{2} = |y_1 - y_2|$

$|y_1 - f_n + f_n - y_2|$
$|(y_1 - f_n) + (f_n - y_2)|$
$\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |y_1 - f_n| + |f_n - y_2|$
$|f_n - y_1| + |f_n - y_2|$
Somit ergibt sich der folgende Widerspruch. Die Annahme muss also falsch sein.

$$2\epsilon \leq |f_n - y_1| + |f_n - y_2| < 2\epsilon$$

□

6. Ein Mann spaziert mit seinem Hund von seinem Haus zu einer Kneipe. Die Entfernung zwischen Haus und Kneipe sei s. Der Mann gehe dabei mit der Geschwindigkeit v. Dies ist dem Hund jedoch zu langweilig. Er läuft deswegen doppelt so schnell zwischen der Kneipe und seinem Herrchen hin und her. Das heißt, er startet am Haus zusammen mit seinem Herrchen, dreht um, sobald er das Ziel erreicht, stoppt, wenn er wieder auf sein Herrchen trifft, läuft dann wieder zur Kneipe,. . .

   Berechne, welchen Weg der Hund zurücklegt, bis Herrchen und Hund gemeinsam die Kneipe erreichen. Es gibt einen so genannten "Mathematiker-Weg" und einen so genannten "Physiker-Weg". Versuche, beide zu finden.

   Lösung:

   (a) Mathematiker Weg:
   Da der Hund doppelt so schnell läuft wie der Mann und umdreht, sobald sich die Beiden treffen, legt er folgende Strecke zurück:
   $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$
   $= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

   (b) Physiker Weg:
   Da der Hund sich in der gleichen Zeit doppelt so schnell bewegt, wie der Mann, legt der die doppelte Strecke zurück.

7. In Aufgabe 2.7 haben wir die Länge der Kochkurve zu berechnet, was uns auf eine Folge (l_n) von Zahlen führt. Ebenso kann man die Fläche (a_n) unter der Kochkurve berechnen, indem man die Flächen der Dreiecke aufaddiert, die Schritt fur Schritt auf die Kurve "draufgesetzt" werden. Sind diese Folgen jeweils beschränkt und/oder monoton?

   Lösung:

   (a)

8. Gib Folgen (a_n), (b_n) an mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \infty$ sowie:

   (a) $\lim(a_n - b_n) = 0$
   (b) $\lim(a_n - b_n) = +\infty$
   (c) $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = 0$

   Lösung:

   (a) $a_n = n, b_n = n$
   $\lim_{n\to\infty}(n - n) = 0$
   (b) $a_n = 2n, b_n = n$
   $\lim_{n\to\infty}(2n - n) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
   (c) $a_n = n, b_n = n^2$
   $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

9. O- Notation: zeig, dass gilt:

   (a) $6n^4 \in O(3n^4)$
   (b) $16n^3 \in O(2^n)$
   (c) $n^2 \notin O(n)$

   Gib im Fall von „$\in$“ ein entsprechendes n_0 an, so dass Bedingung (8.1) erfüllt ist.

   Lösung:

   (a)

10. Bestmme alle Häufungspunkte und den größten Häufungspunkt von

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

   (Benutze dabei die Gleichheit $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$).

   Lösung:

   (a)

11. Prüfe jeweils auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

   Hinweis: Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ dann ist $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$.

   Ebenfalls gilt: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta$ und - wenn β und alle $b_n \neq 0$ sind - $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \alpha/\beta$

(a) $a_n = \frac{3n+2(-1)^n}{n}$

(b) $b_n = \frac{nx^n}{nx^n+1}$ $x \in \mathbb{R}, x > 1$

Lösung:

(a) $lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2(-1)^n}{n}$
$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n} + \frac{2(-1)^n}{n}\right)$
$= \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{2(-1)^n}{n}\right) = 3$

(b) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^n}{nx^n+1}$
$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{nx^n}{nx^n}}{\frac{nx^n+1}{nx^n}}\right)$
$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{nx^n}}\right) = 0$