

1. Berechne 2^n für $0 \dots 20$.

Für größere Zweierpotenzen ist die Faustregel „ 2^{10} oder 1000 - das ist doch praktisch das selbe“ nützlich. Gib damit Näherungen für 2^{32} und 2^{64} an.

Lösung:

- | | | |
|-----------------|----------------------|------------------------|
| (a) $2^0 = 1$ | (i) $2^8 = 256$ | (q) $2^{15} = 65535$ |
| (b) $2^1 = 2$ | (j) $2^9 = 512$ | (r) $2^{16} = 131071$ |
| (c) $2^2 = 4$ | (k) $2^{10} = 1024$ | (s) $2^{17} = 262143$ |
| (d) $2^3 = 8$ | (l) $2^{11} = 2048$ | (t) $2^{18} = 524287$ |
| (e) $2^4 = 16$ | (m) $2^{12} = 4096$ | (u) $2^{19} = 1048575$ |
| (f) $2^5 = 32$ | (n) $2^{13} = 8192$ | (v) $2^{20} = 2097151$ |
| (g) $2^6 = 64$ | (o) $2^{14} = 16384$ | |
| (h) $2^7 = 128$ | (p) $2^{15} = 32767$ | |

2. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 6 \cdot x^2$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$.

- (a) Skizziere beide Graphen.
 (b) Für welche x ist $f(x) = g(x)$? Für welche ist $f(x) > g(x)$ und für welche $f(x) < g(x)$?

Lösung:

- (a)
 (b) Schnittpunkte der beiden Funktionen durch Berechnen der Nullstellen von $f(x) = g(x)$
 $6x^2 = 2x^3$
 $x_{1,2} = 0 \vee x_3 = 3$
 Durch Einsetzen von Werten um die Nullstellen der Funktion kann man die größere der beiden bestimmen.
 $f(2.5) = 37.5$
 $g(2.5) = 31.25$
 Somit gilt:
 Für $-\infty \leq x \leq 3$ ist $f(x) \geq g(x)$
 Für $3 < x \leq \infty$ ist $g(x) \geq f(x)$

3. Für welche ganzen Zahlen n ist $2^n > n^2$? (Probieren ist hier besser als rechnen!)

Lösung:

- (a) Durch einsetzen von Werten in die Funktionen können die Schnittpunkte bestimmt werden

	-1	0	1	2	3	4	5	6
2^n	1/2	1	2	4	8	16	32	64
n^2	1	0	1	4	9	16	25	36

Für $-\infty \leq x \leq 0 : n^2 > 2^n$

Für $0 < x \leq 2 : 2^n > n^2$

Für $2 < x \leq 4 : n^2 > 2^n$

Für $4 < x \leq \infty : 2^n > n^2$

4. (a) Skizziere den Graph der Funktion $x \mapsto 2^x$ für $Rx = -1000 \dots 10$ und diskutiere den Satz "die Exponentialfunktion ist ein rechter Winkel".
 (b) Bestimme die kleinste Zahl x_0 , so dass für alle $x \geq x_0$ gilt: $2^x \geq 16x^3$.
 (c) Wie ändert sich die Antwort in b), wenn die rechte Seite ($16x^3$) mit $2^{13} = 8192$ multipliziert wird, also die Ungleichung $2^x \geq 131072x^3$ betrachtet wird?

Lösung:

- (a)
 (b) $2^n \geq 16x^3$
 $2^n \geq 2^4 x^3 \mid \div 2^4$
 $2^{n-4} \geq x^3$

x	15	16	17
2^{x-4}	2048	4096	8192
x^3	3375	4096	4913

Die kleinste Zahl, sodass $2^x \geq 16x^3$ ist 16.

- (c)

5. Wie viele verschiedene Zustände kann man mit n Bits darstellen? Speziell: wenn wir ganze Zahlen (bei 0 beginnend) in 32 Bit speichern, wie weit können wir damit zählen?

Lösung:

- (a) In n bits können 2^n Werte dargestellt werden. Somit kann bis $2^n - 1$ gezählt werden.

6. Vereinfache folgende Terme (dabei seien $x, y, z > 0$):

- (a) $\sqrt[5]{2^{15}}$
- (b) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$
- (c) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$
- (d) $(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y^3})^6$
- (e) $\frac{(x^2 \cdot y^3 \cdot z^4)^2}{(x \cdot y \cdot z)^{-2}}$
- (f) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Lösung:

- (a) $\sqrt[5]{2^{15}} = 2^{15/5} = 2^3 = 8$
- (b) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{8}{125}}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2.5$
- (c) $\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$
- (d) $(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y^3})^6 = x^{\frac{1}{3} \cdot 6} \cdot y^{\frac{3}{2} \cdot 6} = x^2 \cdot y^9$
- (e) $\frac{(x^2 \cdot y^3 \cdot z^4)^2}{(x \cdot y \cdot z)^{-2}} = (x^2 \cdot y^3 \cdot z^4)^2 \cdot (xyz)^2 = (x^3 y^4 z^5)^2 = x^6 y^8 z^{10}$
- (f) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

7. Um eine Koch-Kurve zu konstruieren, beginnen wir mit einer Strecke der Länge 1 und ersetzen nun in jeder Runde jede bis dahin erzeugte Strecke durch vier Teilstrecken von je einem Drittel der Länge gemäß folgendem Muster

Die Ergebnisse der Runden zwei bis fünf sehen dann so aus (die Koch-Kurve selbst ist das fraktale Objekt, das im Grenzprozess unendlich vieler Iterationen entsteht):

Schätze die Länge dieser Streckenzüge! Wie lang sind sie wirklich?

Lösung:

- (a) Die Länge bei den aufeinander folgenden Iterationen beträgt:
 $l_0 = 1$
 $l_1 = 4 \cdot \frac{1}{3} l_0$
 $l_2 = 4 \cdot \frac{1}{3} (4 \cdot \frac{1}{3} l_0) = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} l_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 l_0$
 Somit kann die Länge der Kurve bei Iteration n durch $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ berechnet werden.

Somit ist die Länge der Kurve nicht begrenzt.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

8. Lineare Gleichungen - bestimme für die folgenden Gleichungen jeweils alle x , die die Gleichung erfüllen:

- (a) $4 \cdot (x-1) = 5 \cdot (x-2)$
- (b) $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} - 1$
- (c) $(x+2) \cdot (x-2) = 21$

Naja, die letzte Gleichung ist nicht linear in x ; wen das stört, der führt zwischendrin ein $y := x^2$ ein...

Lösung:

- (a) $4 \cdot (x-1) = 5 \cdot (x-2)$
 $4x - 4 = 5x - 10 \quad | +4| -4x$
 $0 = x - 6 \quad | +6$
 $6 = x$
- (b) $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} - 1 \quad | \cdot (x-1)$
 $1 = \frac{(x+1)(x-1)}{x-2} - (x-1) \quad | \cdot (x-2)$
 $x-2 = (x+1)(x-1) - (x-1)(x-2)$
 $x-2 = x^2 - 1 - x^2 - 2x - x + 2$
 $x = -3x - 1 \quad | +x$
 $0 = -4x - 1 \quad | +1$
 $1 = -4x \quad | \div (-4)$
 $x = -\frac{1}{4}$
- (c) $(x+2) \cdot (x-2) = 21$
 $x^2 - 16 = 21 \quad | +16$
 $x^2 = 5 \quad | \sqrt{}$
 $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

9. Leite die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ der quadratischen Gleichung mit Hilfe der so genannten quadratischen Ergänzung her, d.h. bringe die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erst in die Form $(x + \alpha)^2 + \beta = 0$ und löse die Gleichung dann nach x auf.

Lösung:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & x^2 + px + q = 0 \\
& x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0 \\
& (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \quad | + \frac{p^2}{4} | - q \\
& (x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q \quad | \sqrt{} \\
& x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad | - \frac{p}{2} \\
& x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad | - \frac{p}{2}
\end{aligned}$$

10. Gegeben sind die Punkte $A(0|2)$, $B(2|6)$ und $C(-1|1.5)$.

- (a) Konstruiere eine Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, so dass ihr Graph durch diese drei Punkte verläuft. Wie viele solcher Funktionen gibt es?
- (b) Bestimme y_1 und y_2 so, dass die Punkte $D(4|y_1)$ und $E(-3|y_2)$ ebenfalls auf dem Graphen liegen!

Lösung:

- (a) Durch die 3 gegebenen Punkte können die 3 folgenden Funktionen definiert werden, durch welche die ursprüngliche Funktion $f(x)$ eindeutig bestimmt werden kann.

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$$

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 6$$

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1.5$$

Diese Gleichungen können in ein LGS umgeschrieben und dann mit dem Gauß'schen Algorithmus gelöst werden.

$$\begin{array}{ccc|ccc|c}
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\
4 & 2 & 1 & 6 & \rightarrow & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1.5 & & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}$$

Es können nun die gelösten Parameter in die ursprüngliche Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ eingesetzt werden.

$$f(x) = 0.5x^2 + x + 2$$

- (b) $f(4) = 0.5 \cdot 4^2 + 4 + 2 = 14 \Rightarrow D(4|14)$
 $f(-3) = 0.5 \cdot (-3)^2 - 3 + 2 = 3.5 \Rightarrow E(-3|3.5)$

11. Dividiere $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ durch $x^2 - 2$ und bestimme alle Nullstellen von $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$.

Lösung:

$$(a) \quad x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8 \div (x^2 - 2) = x^3 - x^2 + 4x + 4$$

Es muss eine der Nullstellen der Funktion erraten werden ($x_1 = 1$). Diese kann dann abgespalten werden.

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8 \div (x - 1) = x^4 + 2x^2 - 8$$

Substitution mit $x^2 = y$

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} + 8}$$

$$y_{1,2} = -1 \pm 3$$

$$y_1 = -4 \vee y_2 = 2$$

Resubstitution mit $y = x^2$

$$-4 = x^2 \quad | \sqrt{} \\ x_{2,3} = \pm \sqrt{-4}$$

$$2 = x^2 \quad | \sqrt{} \\ x_{4,5} = \pm \sqrt{2}$$

12. Berechne $(\sum_{i=0}^n x^i) \cdot (x - 1)$ und stelle damit eine geschlossene Formel (d.h. ohne Summenzeichen) zur Berechnung von $\sum_{i=0}^n x^i$ für $x \neq 1$ auf.

Lösung:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \sum_{i=0}^n x^i \cdot (x - 1) \\
& = x \cdot \sum_{i=0}^n x^i - \sum_{i=0}^n x^i \\
& = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1} - (1 + x + x^2 + \dots + x^n) \\
& = -1 + x^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad & \sum_{i=0}^n x^i \cdot (x - 1) = x^{n+1} - 1 \quad | \div (x - 1) \\
& \sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}
\end{aligned}$$