Mathematik Vorkurs für Informatiker 2017
Lösungen

13. Oktober 2017

1 Einstimmung

1. Der Legende nach gewährte einst Sher Khan, der König von Indien, dem Erfinder des Schachspiels für die Erfindung dieses außergewöhnlichen Spiels die Gunst, sich seine Belohnung selbst aussuchen zu dürfen. Der bescheidene (?) Erfinder verlangte lediglich ein paar Reiskörner. Und zwar sollten auf jedem Feld des Schachbrett jeweils doppelt so viele Körner, wie auf dem vorhergehenden Feld liegen (für Mathematiker: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$ Reiskörner). Auf wie viele Reiskörner hätte sich die Belohnung belaufen?

   Überlege Dir dazu allgemein, welche Zahlen herauskommen, wenn man die Zweierpotenzen aufsummiert. Studierende mit Nebenfach Physik schätzen bitte die Zahl der Reiskörner in Tonnen (Studierende mit Nebenfach Agrar- wissenschaften entsprechend in Doppelzentner).

   Lösung:

   (a) $\sum_{i=0}^{4} 2^i = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 2^5 - 1$
   Die Summe der ersten n Zweierpotenzen beträgt:
   $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
   Da ein Schachbrett 64 Felder hat beträgt die Anzahl aller Reiskörner:
   $\sum_{i=0}^{63} 2^i = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$

2. Die Papiergrößen nach DIN sind so gebaut, dass man durch Falten in der Mitte der langen Seite die nächstkleinere Größe bekommt. Also: hat man ein Papier der Höhe a und der Breite b (in Hochformat, also $a > b$), dann ist das kleinere Papier a breit und b hoch. Zusätzlich gilt aber bei den DIN-Größen, dass das Seitenverhältnis dabei gleich bleibt: $a : b = b : \frac{a}{b}$ Wie groß ist demnach das Seitenverhältnis $x = \frac{a}{b}$?

   Ein Blatt DIN A0 hat die Fläche $1m^2$ Wie hoch und wie breit ist es? Wie hoch und wie breit ist ein Blatt DIN A4?

   Lösung:

   (a) Das Seitenverhältnis beträgt:
   $x = \frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{2b}{a}$
   Somit gilt:
   $\frac{a}{b} = \frac{2b}{a} \mid \cdot a \mid \cdot b$
   $\frac{a^2}{b^2} = 2 \mid \sqrt{}$
   $\frac{a}{b} = \sqrt{2} = x \approx 1,41$
   Somit können die Seitenlängen des Din A0 Blattes folgenermaßen errechnet werden:
   $1m^2 = (b) \cdot (\sqrt{2} \cdot b)$
   $b = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} m^2} \approx 0.841m$
   $a = \sqrt{2} \cdot b \approx 1,1891m$
   Es gilt:
   $a_{neu} = b_{alt}$
   $b_{neu} = \frac{\sqrt{2} \cdot a_{neu}}{2}$
   Somit können jetzt alle Maße der verschiedenen DIN Größen berechnet werden:

	$A0$	$A1$	$A2$	$A3$	$A4$
a	$1.1891m$	$0.841m$	$0.595m$	$0.4205m$	$0.2975m$
b	$0.841m$	$0.595m$	$0.4205m$	$0.2975m$	$0.2103m$

3. Viel Schöner würden die Papiergrößen nach dem so genannten "goldenen Schnitt“ ausschauen. Dazu muss sich $a : b$ verhalten wie $b : (a - b)$. Berechne wieder das Seitenverhältnis $x = \frac{a}{b}$. Wer eine Schere dabei hat, kann anschließend Wahrheitswert des ersten Satzes überprüfen.

   Lösung:

   (a) Das Seitenverhältnis lässt sich auch schreiben als:
   $x = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$
   $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$
   $\frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b}$
   $\frac{1}{x} = x - 1 \mid \cdot x$
   $1 = x^2 - x \mid -1$

$0 = x^2 - x - 1$

Von diesem Polynom können dann die Nullstellen bestimmt werden, um den goldenen Schnitt zu erhalten:

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

4. Interessant sind die Koeffizienten, die herauskommen, wenn man die Terme $(x+1)^n$ ausmultipliziert (also z.B. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$). Berechne dies für die ersten paar n und überlege, nach welchem Gesetz die Koeffizienten gebildet werden.

   Lösung:

   (a) Beim ausmultiplizieren der einzelnen Terme sind die Dreieckszahlen in den Koeffizienten erkennbar.

   $(x+1)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 \cdot 1$

   $(x+1)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1 \cdot 1$

   Somit kann ein solcher Therm mit einer beliebigen Potenz folgendermaßen dargestellt werden:

   $(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot 1^i$

   Diese Formel lässt sich auf einen beliegen Therm mit den Variablen a, b verallgemeinern.

   $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$

5. Ein Vater ist heute a Jahre älter als sein Sohn. In b Jahren wird er c Jahre älter als d-mal so alt sein wie sein Sohn heute. Wie alt sind Vater und Sohn gegenwärtig?

   Führen alle Parameterwerte a, b, c, d zu einer Lösung? Welche davon sind sinnvoll?

   Lösung:

   (a) $v :=$ Alter des Vaters heute, $s :=$ Alter des Sohns heute

   Aus dem Text erhält man:

   $v = s + a$

   $c = (v + b) - d \cdot s$ Einsetzen und vereinfachen:

   $c = s + a + b - d \cdot s \; |{-a} \; |{-b}$

   $c - a - b = s - d \cdot s$

   $c - a - b = s \cdot (1 - d) \; |{\div(1-d)}$

   $s = \frac{c-a-b}{1-d}$ für $d \neq 1$

   $v = s + a = \frac{c-a-b}{1-d} + a = \frac{c-b-a \cdot d}{1-d}$

6. Der Chinese Xu Yue stellte gegen 190 n. Chr. das folgende Problem: Wie viele Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Tiere haben will und ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 4 Münzen und 4 Küken eine Münze kosten? Die 100 Münzen sollen dabei vollständig verbraucht werden.

   Lösung:

   (a) $a :=$ Hahn, $b :=$ Henne, $c :=$ Küken

   Da man insgesamt genau 100 Tiere haben möchte, muss gelten:

   $1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c = 100$

   Dazu sollen genau 100 Münzen verbraucht werden, somit muss außerdem gelten:

   $5 \cdot a + 4 \cdot b + \frac{c}{4} = 100$

   Diese zwei Gleichungen können in ein lineares Gleichungssystem geschrieben werden. Da dies aber 3 Variablen mit nur 2 Gleichungen besitzt ist es nicht eindeutig lösbar.

   $$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 4 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 100 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 19 & 15 & 0 & 300 \\ 1 & 1 & 1 & 100 \end{array}$$

   $b = \frac{300-19a}{15} = 20 - \frac{19a}{15}$

   $c = -a - b + 100 = -a - (20 - \frac{19a}{15}) + 100 = \frac{4a}{15} + 80$

   Ganzzahlige Lösungen für diese beiden Gleichungen sind somit:

   $a = 15 \cdot n \; n \in \mathbb{Z}$

   $b = 20 - 19n$

   $c = 80 + 4n$

7. Eine Gruppe von Menschen heißt *halbzerstritten*, wenn für zwei beliebig herausgegriffene Gruppenmitglieder a und b immer gilt: *Entweder* redet a mit b oder b redet mit a. Es gibt also weder Paare, bei denen Kommunikation in beide Richtungen möglich ist, noch solche, bei denen Kommunikation in keine Richtung funktioniert.

   Um in einer halbzerstrittenen Gruppe Nachrichten weiterzuleiten, wäre es hilfreich, wenn man eine Kontaktperson x hat, die mit jeder andereren Person über höchstens eine Zwischenstation redet - also für jedes $a \neq x$ gilt, dass x mit a redet oder es zumindest ein b gibt, so dass x mit b und b mit a redet.

   Gibt es eine solche Kontaktperson in jeder halbzerstrittenen Gruppe?

   Lösung:

(a)

2 Potenzen und Polynome

1. Berechne 2^n für $0 \ldots 20$.

   Für größere Zweierpotenzen ist die Faustregel „2^{10} oder 1000 - das ist doch praktisch das selbe“ nützlich Gib damit Näherungen für 2^{32} und 2^{64} an.

   Lösung:

   (a) $2^0 = 1$
   (b) $2^1 = 2$
   (c) $2^2 = 4$
   (d) $2^3 = 8$
   (e) $2^4 = 16$
   (f) $2^5 = 32$
   (g) $2^6 = 64$
   (h) $2^7 = 128$
   (i) $2^8 = 256$
   (j) $2^9 = 512$
   (k) $2^{10} = 1024$
   (l) $2^{11} = 2048$
   (m) $2^{12} = 4096$
   (n) $2^{12} = 8192$
   (o) $2^{13} = 16384$
   (p) $2^{14} = 32767$
   (q) $2^{15} = 65535$
   (r) $2^{16} = 131071$
   (s) $2^{17} = 262143$
   (t) $2^{18} = 524287$
   (u) $2^{19} = 1048575$
   (v) $2^{20} = 2097151$

2. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 6 \cdot x^2$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$.

   (a) Skizziere beide Graphen.

   (b) Für welche x ist $f(x) = g(x)$? Für welche ist $f(x) > g(x)$ und für welche $f(x) < g(x)$?

   Lösung:

   (a)

   (b) Schnittpunkte der beiden Funktionen durch Berechnen der Nullstellen von $f(x) = g(x)$
   $6x^2 = 2^3$
   $x_{1,2} = 0 \vee x_3 = 3$
   Durch Einsetzen von Werten um die Nullstellen der Funktion kann man die größere der beiden bestimmen.
   $f(2.5) = 37.5$
   $g(2.5) = 31.25$
   Somit gilt:
   Für $-\infty \leq x \leq 3$ ist $f(x) \geq g(x)$
   Für $3 < x \leq \infty$ ist $g(x) \geq f(x)$

3. Für welche ganzen Zahlen n ist $2^n > n^2$? (Probieren ist hier besser als rechnen!)

   Lösung:

   (a) Durch einsetzen von Werten in die Funktionen können die Schnittpunkte bestimmt werden

	-1	0	1	2	3	4	5	6
2^n	1/2	1	2	4	8	16	32	64
n^2	1	0	1	4	9	16	25	36

   Für $-\infty \leq x \leq 0 : n^2 > 2^n$
   Für $0 < x \leq 2 : 2^n > n^2$
   Für $2 < x \leq 4 : n^2 > 2^n$
   Für $4 < x \leq \infty : 2^n > n^2$

4. (a) Skizziere den Graph der Funktion $x \mapsto 2^x$ für $Rx = -1000 \ldots 10$ und diskutiere den Satz ”die Exponentialfunktion ist ein rechter Winkel“.

   (b) Bestimme die kleinste Zahl x_0, so dass für alle $x \geq x_0$ gilt: $2^x \geq 16x^3$.

   (c) Wie ändert sich die Antwort in b), wenn die rechte Seite ($16x^3$) mit $2^{13} = 8192$ multipliziert wird, also die Ungleichung $2^x \geq 131072x^3$ betrachtet wird?

   Lösung:

   (a)

   (b) $2^n \geq 16x^3$
   $2^n \geq 2^4x^3 \mid \div 2^4$
   $2^{n-4} \geq x^3$

x	15	16	17
2^{x-4}	2048	4096	8192
x^3	3375	4096	4913

   Die kleinste Zahl, sodass $2^x \geq 16x^3$ ist 16.

   (c)

5. Wie viele verschiedene Zustände kann man mit n Bits darstellen? Speziell: wenn wir ganze Zahlen (bei 0 beginnend) in 32 Bit speichern, wie weit können wir damit zählen?

   Lösung:

(a) In n bits können 2^n Werte dargestellt werden. Somit kann bis 2^n-1 gezählt werden.

6. Vereinfache folgende Therme (dabei seien $x, y, z > 0$):

(a) $\sqrt[5]{2^{15}}$

(b) $(\frac{8}{125})^{-\frac{1}{3}}$

(c) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$

(d) $(\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y^3})^6$

(e) $\frac{(x^2\cdot y^3 z^4)^2}{(x\cdot y\cdot z)^{-2}}$

(f) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Lösung:

(a) $\sqrt[5]{2^{15}} = 2^{15/5} = 2^3 = 8$

(b) $(\frac{8}{125})^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(\frac{8}{125})^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{8}{125}}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2.5$

(c) $\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$

(d) $(\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y^3})^6 = x^{\frac{1}{3}\cdot 6}\cdot y^{\frac{3}{2}\cdot 6} = x^2\cdot y^9$

(e) $\frac{(x^2\cdot y^3 z^4)^2}{(x\cdot y\cdot z)^{-2}} = (x^2\cdot y^3\cdot z^4)^2\cdot(xyz)^2 = (x^3y^4z^5)^2 = x^6y^8z^{10}$

(f) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

7. Um eine Koch-Kurve zu konstruieren, beginnen wir mit einer Strecke der Länge 1 und ersetzen nun in jeder Runde jede bis dahin erzeugte Strecke durch vier Teilstrecken von je einem Drittel der Länge gemäß folgendem Muster

Die Ergebnisse der Runden zwei bis fünf sehen dann so aus (die Koch-Kurve selbst ist das fraktale Objekt, das im Grenzprozess unendlich vieler Iterationen entsteht):

Schätze die Länge dieser Streckenzüge! Wie lang sind sie wirklich?

Lösung:

(a) Die Länge bei den aufeinander folgenden Iterationen beträgt:
$l_0 = 1$
$l_1 = 4\cdot\frac{1}{3}l_0$
$l_2 = 4\cdot\frac{1}{3}(4\cdot\frac{1}{3}l_0) = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}l_0 = (\frac{4}{3})^2 l_0$
Somit kann die Länge der Kurve bei Iteration n durch $(\frac{4}{3})^n$ berechnet werden.
Somit ist die Länge der Kurve nicht begrenzt.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

8. Lineare Gleichungen - bestimme für die folgenden Gleichungen jeweils alle x, die die Gleichung erfüllen:

(a) $4\cdot(x-1) = 5\cdot(x-2)$

(b) $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} - 1$

(c) $(x+2)\cdot(x-2) = 21$
Naja, die letzte Gleichung ist nicht linear in x; wen das stört, der führt zwischendrin ein $y := x^2$ ein...

Lösung:

(a) $4\cdot(x-1) = 5\cdot(x-2)$
$4x-4 = 5x-10 \mid +4 \mid -4x$
$0 = x-6 \mid\ +6$
$6 = x$

(b) $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} - 1 \mid\cdot(x-1)$
$1 = \frac{(x+1)(x-1)}{x-2} - (x-1) \mid\cdot(x-2)$
$x-2 = (x+1)(x-1)-(x-1)(x-2)$
$x-2 = x^2-1-x^2-2x-x+2$
$x = -3x-1 \mid -x$
$0 = -4x-1 \mid +1$
$1 = -4x \mid \div(-4)$
$x = -\frac{1}{4}$

(c) $(x+2)\cdot(x-2) = 21$
$x^2-16 = 21 \mid +16$
$x^2 = 5 \mid\sqrt{}$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

9. Leite die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ der quadratischen Gleichung mit Hilfe der so genannten quadratischen Ergänzung her, d.h. bringe die Gleichung $x^2+px+q=0$ erst in die Form $(x+\alpha)^2+\beta=0$ und löse die Gleichung dann nach x auf.

Lösung:

(a) $x^2 + px + q = 0$
$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0$
$(x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \mid + \frac{p^2}{4} \mid - q$
$(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q \mid \sqrt{}$
$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \mid - \frac{p}{2}$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \mid - \frac{p}{2}$

10. Gegeben sind die Punkte $A(0|2), B(2|6)$ und $C(-1|1.5)$.

(a) Konstruiere eine Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, so dass ihr Graph durch diese drei Punkte verläuft. Wie viele solcher Funktionen gibt es?

(b) Bestimme y_1 und y_2 so, dass die Punkte $D(4|y_1)$ und $E(-3|y_2)$ ebenfalls auf dem Graphen liegen!

Lösung:

(a) Durch die 3 gegebenen Punkte können die 3 folgenden Funktionen definiert werden, durch welche die ursprüngliche Funktion $f(x)$ eindeutig bestimmt werden kann.

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$$

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 6$$

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1.5$$

Diese Gleichungen können in ein LGS umgeschrieben und dann mit dem Gaus'schen Algorithmus gelöst werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1.5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Es können nun die gelösten Parameter in die ursprüngliche Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ eingesetzt werden.

$$f(x) = 0.5x^2 + x + 2$$

(b) $f(4) = 0.5 \cdot 4^2 + 4 + 2 = 14 \Rightarrow D(4|14)$
$f(-3) = 0.5 \cdot (-3)^2 - 3 + 2 = 3.5 \Rightarrow E(-3|3.5)$

11. Dividiere $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x2 - 8x + 8$ durch $x^2 - 2$ und bestimme alle Nullstellen von $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$.

Lösung:

(a) $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x2 - 8x + 8 \div (x^2 - 2) = x^3 - x^2 + 4x + 4$
Es muss eine der Nullstellen der Funktion erraten werden ($x_1 = 1$). Diese kann dann abgespalten werden.
$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x2 - 8x + 8 \div (x - 1) = x^4 + 2x^2 - 8$
Substitution mit $x^2 = y$
$y^2 + 2y - 8 = 0$
$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} + 8}$
$y1, 2 = -1 \pm 3$
$y_1 = -4 \vee y_2 = 2$
Resubstitution mit $y = x^2$

$-4 = x^2 \mid \sqrt{}$	$2 = x^2 \mid \sqrt{}$
$x_{2,3} = \pm\sqrt{-4}$	$x_{4,5} = \pm\sqrt{2}$

12. Berechne $(\sum_{i=0}^{n} x^i) \cdot (x - 1)$ und stelle damit eine geschlossene Formel (d.h. ohne Summenzeichen) zur Berechnung von $\sum_{i=0}^{n} x^i$ für $x \neq 1$ auf.

Lösung:

(a) $\sum_{i=0}^{n} x^i \cdot (x - 1)$
$= x \cdot \sum_{i=0}^{n} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^i$
$= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$
$= -1 + x^{n+1}$

(b) $\sum_{i=0}^{n} x^i \cdot (x - 1) = x^{n+1} - 1 \mid \div (x - 1)$
$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

3 Logarithmen

1. Skizziere den Graph der Funktion $x \mapsto \log_2 x$ für $x = 2^{-1000} \dots 1000$.

   Lösung:

   (a)

2. Bestimme für beliebiges positives $b \neq 1$ folgende Werte: $\log_b 1$ und $\log_b b$.

   Lösung:

   (a) $\log_b 1 = 0$

   (b) $\log_b b = 1$

3. Finde mit den Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen eine Rechenregel für $log_b \sqrt[n]{x}$.

   Lösung:

   (a) $\log_b \sqrt[n]{x} = \log_b x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$

4. Vereinfache folgende Ausdrücke (b, c, x und y seien positiv mit $b, c \neq 1$):

$$b^{x+\log_b y}, \left(\sqrt{b}\right)^{\log_b x}, \log_c\left(x^{\frac{1}{\log_c b}}\right),$$

   Lösung:

   (a) $b^{x+\log_b y} = b^x \cdot b^{\log_b y} = b^x \cdot y$

   (b) $\left(\sqrt{b}\right)^{\log_b x} = b^{\frac{\log_b x}{2}} = b^{\log_b x} \cdot b^{\frac{1}{2}} = x \cdot \sqrt{b}$

   (c) $\log_c\left(x^{\frac{1}{\log_c b}}\right) = \frac{1}{\log_c b} \cdot \log_c x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$

5. Vereinfache (es sei $x > y > 0$)

$$\ln(x^2 - y^2) - \ln(x - y)$$

   Lösung:

   (a) $\ln(x^2 - y^2) - \ln(x - y)$
   $= \ln((x + y)(x - y)) - \ln(x - y)$
   $= \ln(x + y) + \ln(x - y) - \ln(x - y) = \ln(x + y)$

6. Wenn für Abszisse (vulgo "x-Achse“) und Ordinate logarithmische Maßstäbe verwendet werden — wie sehen dann die Graphen von Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ aus?

   Lösung:

   (a) Die Graphen sind eine Gerade.

7. Jaja, ich weiß schon, dass die allermeisten von Ihnen nicht vorhaben, jemals auf einem Rechenschieber zu rechnen. Zum Logarithmen-Üben ist das Ding (bzw. eine Vorstellung davon) aber immer noch praktisch! Manchmal wollen auch Informatiker die Länge der Diagonale eines Quadrats berechnen — markiere dazu auf dem Informatiker-Rechenschieber den Wert $\sqrt{2}$.

   Markiere nun noch denjenigen Wert, mit dem man die Kantenlänge eines Würfels multiplizieren muss, um die Kantenlänge eines Würfels mit doppeltem Volumen zu erhalten.

   Wie kann man mit unserem Rechenschieber — ohne die Skalen zu verlängern — den Wert von $8 \cdot 512$ ablesen? (Tipp: am echten Rechenschieber heißt diese Technik Durchschieben. Bei unserm Modell ist ggf. mal wieder die Näherung $2^{10} \approx 1000$ hilfreich.)

   Lösung:

   (a)

8. In wieviel Jahren hat sich eine mit einen Zinssatz von $p\%$ im Jahr verzinste Geldanlage (incl. Zinseszins) verdoppelt? Berechne diese Dauer für $p = 1, 2, 3, 4$ und 10 und vergleiche die Ergebnisse mit der Faustregel "70 Jahre geteilt durch Zinssatz“.

   Lösung:

   (a) Die Geldanlage hat nach einer Verzinsung den Wert:
   $x_{neu} = x_{alt} + x_{alt} \cdot \frac{p}{100}$
   Nach einer weiteren Verzinsung hat sie den Wert:
   $(x_{alt} + x_{alt} \cdot \frac{p}{100}) + (x_{alt} + x_{alt} \cdot \frac{p}{100}) \cdot \frac{p}{100}$
   $= (x_{alt} + x_{alt} \cdot \frac{p}{100}) \cdot (1 + \frac{p}{100})$
   $= x_{alt}(1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{100})$
   $= x_{alt}(1 + \frac{p}{100})^2$
   Diese Formel lässt sich für beliebige Verzinsungen verallgemeinern

$$x_{alt}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Nun kann man berechnen, wie lange es dauert, bis sich das Startkapital verdoppelt hat.

$2 \cdot x_{alt} = x_{alt}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad | \div x_{alt} | \ln()$

$\ln 2 = n \cdot \ln(1 + \frac{p}{100}) \mid \div \ln(1 + \frac{p}{100})$

$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+\frac{p}{100})}$

Durch Einsetzen von Werten für p kann die benötigte Anzahl an Jahren errechnet werden, bis sich das Startkapital verdoppelt hat.

In der zweiten Zeile der Tabelle ist zum Vergleich das Ergebnis laut der Faustregel angegeben.

p	1	2	3	4	10
$Formel$	69.66	35	23.45	17.67	7.27
$Faustregel$	70	35	23.33	17.5	7

9. Zeige, dass $ld10$ keine rationale Zahl ist (es gibt keine ganzen Zahlen x, y mit $ld10 = x/y$).

   Lösung:

   (a) Es wird ein Widerspruchsbeweis verwendet, bei dem davon ausgegangen wird, dass die zu widerlegende Annahme wahr ist. Falls dann durch logische Schlüsse ein Widerspruch hergeltet werden kann muss die Annahme falsch sein, wodurch die zu beweisende Bedingung bewiesen ist.

   Annahme: Es gibt ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$, für die gilt: $ld10 = \frac{x}{y}$

   $ld10 = \frac{x}{y} \;|2^x$

   $10 = 2^{\frac{x}{y}} \;|x^y$

   $10^y = 2^x$

   Dies is unmöglich, solange $x, y \neq 0$, was ausgeschlossen werden kann, da sonst $ld10 = 1$.

   Somit ist $10^y \neq 2^x$ für alle ganzen Zahlen x, y. Damit ist die Annahme, dass $ld10 = x/y$ widerlegt, wodurch $ld10$ irrational ist.

4 Aussagenlogik und Beweise

1. Bestätige durch Wahrheitstafeln das erste Distributivgesetz und die erste de morgansche Regel.

   Lösung:

   (a) erstes Distributivgesetz:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$A \vee B$	$B \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$false$	$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$false$	$true$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$
$false$	$false$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$

   (b) erste de morgansche Regel:

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
$true$	$true$	$false$	$false$	$false$	$false$
$true$	$false$	$true$	$false$	$true$	$true$
$false$	$true$	$true$	$true$	$false$	$true$
$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$

2. Zeige die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

   (a) Mittels Wahrheitstafeln

   (b) Durch Umformen (zweckmäßig ist hier, die zweite Form in die erste umzuformen, aber andersrum gehts natürlich auch).

   Lösung:

   (a)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neq B \Rightarrow \neg A$
$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$false$	$false$
$false$	$true$	$true$	$true$
$false$	$false$	$true$	$true$

   (b) $\neg B \Rightarrow \neg A$
   $B \vee \neg A$
   $\neg A \vee B$
   $A \Rightarrow B$

3. Ein logischer Ausdruck, der (unabhängig von den Werten der darin vorkommenden Variablen) immer den Wert $true$ hat, heißt Tautologie — z.B. der Ausdruck $A \vee (\neg A)$.

   Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

   (a) $(A \wedge C) \vee (A \wedge \neg C)$

   (b) $\neg(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge C)$

   (c) $((A \vee B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)) \wedge ((A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B))$

   Lösung:

   (a) $(A \wedge C) \vee (A \wedge \neg C)$
   $A \wedge (C \vee \neg C)$
   $A \wedge (true)$
   $A \Rightarrow$ keine Tautologie

   (b) $\neg(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge C)$
   $(\neg A \vee A) \vee (B \wedge C)$
   $true \vee (B \wedge C)$
   $true \Rightarrow$ Tautologie

   (c) $((A \vee B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)) \wedge ((A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B))$
   $((A \vee B) \wedge (A \vee B)) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B)$
   $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
   $A \vee (B \wedge \neg B)$
   $A \vee false$
   $A \Rightarrow$ keine Tautologie

4. Bei einem Verstoß gegen ein mathematisches Gesetz (welches, ist hier egal) kommen drei stadtbekannte Gauner A, B und C als Täter infrage — einer alleine oder mehrere zusammen. Der Polizei liegen zwei Aussagen vor:

   (a) Wenn A unschuldig ist, ist B schuldig.

   (b) Wenn B unschuldig ist, sind sowohl A als auch C schuldig

Da die Polizei ihre Informanten kennt, weiß sie, dass die erste Aussage wahr, die zweite Aussage aber falsch ist. Wer ists gewesen?

Hier gibt es mal wieder verschiedene Lösungswege – man kann z.B. logische Ausdrücke für die Aussagen aufstellen und umformen, man kann die Aufgabe aber auch graphisch lösen, indem man sich ein Venn-Diagramm für drei Mengen A, B und C aufmalt: Nun legt man fest, dass der Bereich innerhalb von z.B. A bedeutet, dass A schuldig ist etc., hat so alle möglichen Kombinationen von Schuld/Unschuld der drei Kandidaten vor sich und kann mittels der Aussagen solange Bereiche ausschließen, bis nur noch ein Feld übrig ist.

Lösung:

(a) $A :=$ A ist schuldig, $B :=$ B ist schuldig, $C :=$ C ist schuldig

- Wenn A unschuldig ist, ist B schuldig.
  $\Leftrightarrow \neg A \Rightarrow B$
- Wenn B unschuldig ist, sind sowohl A als auch C schuldig
  $\Leftrightarrow \neg B \Rightarrow A \wedge C$

Die beiden Aussagen können nun in eine Gleichung umgeformt werden.
$(\neg A \Rightarrow B) \wedge \neg(\neg B \Rightarrow (A \wedge C))$
$(A \vee B)\neg(B \vee (AC))$
$(A \vee B)(\neg B \neg(AC))$
$(A \vee B)(\neg B(\neg A \vee \neg C))$
$(A \vee B)((\neg B \neg A) \vee (\neg B \neg C))$
$A\neg B\neg A \vee A\neg B\neg C \vee B\neg B\neg A \vee B\neg B\neg C$
$false \vee A\neg B\neg C \vee false \vee false$
$A\neg B\neg C$
Somit is A schuldig und B, C sind unschuldig.

5. Formuliere folgende Aussagen mit Quantoren:

   (a) Die Differenz von 1 und allen natürlichen Zahlen, die größer als 15 sind, ist kleiner als -14.

   (b) Jede reelle Zahl x hat ein multiplikatives Inverses, also eine Zahl y mit $x \cdot y = 1$.

   (c) Es gibt eine gerade Primzahl. (Hierbei kann der Operator $|$ verwendet werden: für zwei ganze Zahlen a und b gilt $a|b$ genau dann, wenn a Teiler von b ist.)

   Lösung:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 15 : 1 - n < -14$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$

   (c) $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N} : 2|a \wedge \neg b|a$

6. Gib für die Aussage $\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 5)$ eine äquivalente Aussage an, die keinen Existenzquantor enthält (Allquantoren sind erlaubt...).

   Hinweis: ein negierter Allquator entspricht einem Existenzquantor und umgekehrt.

   Lösung:

   (a) $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \neq 5$

7. Sind die Aussagen
$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x - y = 0$$
   und
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x - y = 0$$
   äquivalent?

   Lösung:

   (a) Die Aussagen sind nicht äquivalent, da bei der Zweiten ein beliebiges x ausgewählt wird, für welches dann alle y die Gleichung erfüllen sollen. Dies ist aber nicht der Fall, da z.B.:
$$5 - 10 \neq 0$$
   Somit ist die zweite Aussage falsch, die Erste aber wahr.

8. Folgende Aussagen gelten:

   (a) Jeder Student will gute Noten haben.

   (b) Kein Student lernt auf langweilige Prüfungen

   (c) Jeder Prüfung, die ohne Mathe auskommt, ist langweilig

   (d) Jeder Student, der gute Noten haben will, aber nichts gelernt hat, muss sich nur auf sein Glück verlassen.

   Beweise: Wenn alle Prüfungen ohne Mathe auskommen, müssen sich alle Studenten nur auf ihr Glück verlassen.

   Lösung:

(a) Wenn alle Prüfungen ohne Mathe auskommen sind nach (c) alle Prüfungen langweilig. Somit lernt nach (b) kein Student auf diese. Dadurch hat kein Student etwas gelernt, aber nach (a) jeder Student gute Noten haben möchte müssen sich nach (d) alle auf ihr Glück verlassen.

9. Wie lautet die Verneinung von „Alle Kreter sind Lügner“?

Lösung:

(a) Es gibt einen Kreter, der die Wahrheit sagt.

10. Zeige mit vollständiger Induktion über n, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}; x \neq 1$$

und alle $n \geq 0$ gilt.

Lösung:

(a) Induktionsvoraussetzung:
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsanfang: $n = 1$
$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2}$

Induktionschritt: $n \to n+1$
$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k$
$\overset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$
$= \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
$\square$

(b) Induktionsvoraussetzung
$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}; x \neq 1$

Induktionsanfang: $n = 0$
$\sum_{i=0}^{0} x^i = 1 = \frac{x-1}{x-1} = \frac{x^{0+1}-1}{x-1}$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x^i$
$\overset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{=} x^{n+1} + \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$
$= \frac{x^{n+1}\cdot(x-1)}{x-1} + \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{x^{n+1}(x-1)x^{n+1}-1}{x-1}$
$= \frac{x^{n+1}(x-1+1)-1}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$
$\square$

11. Beweise durch vollständige Induktion: für $n \geq 4$ ist $n! > 2^n$. Lösung:

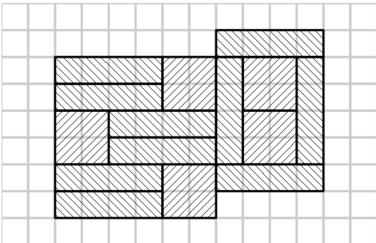
(a) Induktionsvoraussetzung: $n! > 2^n; n \geq 4$

Induktionsanfang: $n = 4$
$4! > 2^4$
$24 > 16$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$
$\overset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{>} (n+1) \cdot 2^n$
$> 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ (da $n \geq 4$)
$\square$

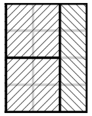
12. Gegeben sei ein Parkett aus 1×4 und 2×2-Stücken (die Skizze zeigt ein Beispiel, in Wirklichkeit kann das Parkett aber eine beliebige andere Form haben). Nun geht ein 1×4-Stück kaputt und wir haben keins mehr im Lager. Daher ersetzen wir es durch ein 2×2 Stück und versuchen, die Ausgangsform wiederherzustellen (die Teile sind noch nicht festgeklebt, können also beliebig umgeordnet werden).

Geht das — immer, also für beliebig geformte Flächen, oder nur für gewisse (welche?), oder vielleicht gar nie?



Lösung:

(a) Das Ersetzen eines 1×4 Stückes durch ein 2×2 ist nur möglich, wenn in der Ausgangsform ≥ 2 1×4 Stücke verwendet wurden und sich mindestens ein 2×4. Rechteck in der Form befindet.



Denn falls dies nicht der Fall ist, muss eine der Seitenlängen der Ausgansform ungerade sein und kann somit nicht durch Stücke gerader Kantenlänge ersetzt werden.

Falls eine Kantenlänge der Ausgangsform ungerade ist, aber > 2 1×4 Stücke werwendet wurden, ist es immer möglich 2 dieser mit einer Gesamtfläche von $2 \cdot (1 \times 4) = 8$ durch 2 2×2 Stücke zu ersetzen. Denn das fehlerhafte 1×4 Stück kann mit einem fehlerfreien zu einem gemeinsamen 2×4 Stück zusammen gelegt werden, welches sich dann durch $2 \cdot (2 \times 2)$ Stücke ersetzen lässt.

5 Mengen

1. Gegeben sind die folgenden Teilmengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

   Gib die folgenden Mengen an:

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A \setminus B$
   (d) $A \setminus D$
   (e) $B \setminus D$
   (f) $D \setminus A$
   (g) $D \setminus B$
   (h) $D \setminus (A \cup B)$
   (i) $D \setminus (A \cap B)$

   Lösung:

   (a) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10\}$
   (b) $A \cap B = \{\}$
   (c) $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   (d) $A \setminus D = \{1, 3\}$
   (e) $B \setminus D = \{2, 4\}$
   (f) $D \setminus A = \{6, 8, 10\}$
   (g) $D \setminus B = \{5, 7, 9\}$
   (h) $D \setminus (A \cup B) = \{\}$
   (i) $D \setminus (A \cap B) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

2. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer (endlichen) Menge A mit $|A| = n$? Schreibe z.B. alle Teilmengen von $\{1, 2\}$ oder $\{1, 2, 3\}$ auf, und versuche eine Regelmäßigkeit zu erkennen. Wie könnte man die Regelmäßigkeit allgemein beweisen? Zeige dass für endliche Mengen stets $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ gilt.

   Lösung:

   (a) $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
   (b) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
   (c) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ hat 2^n Elemente, denn für jedes der n Elemente von A kann entschieden werden, ob dieses in der Relation enthalten ist, oder nicht.
   (d) Beweis mit vollständiger Induktion (Induktionsanfang $n = 0$)

3. Bestimme die folgenden Mächtigkeiten:

   (a) $|\{1, 4, , 6\}|$
   (b) $|\emptyset|$
   (c) $|\{\emptyset\}|$
   (d) $|\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}|$

   Lösung:

   (a) $|\{1, 4, , 6\}| = 3$
   (b) $|\emptyset| = 0$
   (c) $|\{\emptyset\}| = 1$
   (d) $|\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}| = 2$

4. Zeichne Punktmengen A, B und C, die die folgenden vier Bedingungen zugleich erfüllen:

   (a) $A \cap B \cap C = \emptyset$
   (b) $A \cap B \neq \emptyset$
   (c) $B \cap C \neq \emptyset$
   (d) $A \cap C \neq \emptyset$

   Gib daraufhin Zahlenmengen möglichst kleiner Mächtigkeit an, die diese Bedingungen erfüllen.

   Lösung:

   (a) $A \cap B \cap C = \emptyset = \{\}$
   (b) $A \cap B \neq \emptyset = \{\}$
   (c) $B \cap C \neq \emptyset = \{\}$
   (d) $A \cap C \neq \emptyset = \{\}$

5. A, B und C seien Teilmengen einer Grundmenge G. Beweise von den folgenden Aussagen die wahren und gib für die falschen jeweils ein Gegenbeispiel an.

   (a) Wenn $A \cup B = A \cup C$, dann ist $B = C$
   (b) Wenn $A \setminus B = A$, dann ist $B = C$
   (c) Wenn $B = \emptyset$, dann ist $A \setminus B = A$
   (d) $A \setminus B$ und $B \setminus C$ sind immer disjunkt (d.h. die Schnittmenge ist leer).

   Lösung:

   (a)

6. Beweise, dass zwei Mengen A und B gleich sind, wenn sie wechselseitig Teilmengen voneinander sind (und auch nur dann), also:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

   Lösung:

   (a) $\subseteq$
   (b) $\supseteq$

7. Die 30 Schüler einer Klasse schrieben in den drei Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik Prüfungsarbeiten mit folgendem Ergebnis: In Deutsch bestanden 22, in Englisch bestanden 17 und in Mathematik bestanden 22 Schüler. 4 bestanden weder Deutsch noch Englisch, 3 bestanden weder Deutsch noch Mathematik, 5 bestanden weder Englisch noch Mathematik. 1 Schüler schaffte keine der drei Prüfungen.

   Wie viele Schüler bestanden die Prüfung in allen drei Fächern?Aussagen

   Hinweis: zeichne die Mengen!

   Lösung:

   (a)

8. Mit der Schreibweise

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

   kann man bequem auch kompliziertere Mengen formulieren, insbesondere dann, wenn man erlaubt, dass auch unendlich viele Mengen vereinigt werden dürfen:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \ldots$$

   Ein Element ist in dieser Vereinigungsmenge enthalten, wenn es in einer der Mengen A_k enthalten ist. Überlege Dir, wie man zum Beispiel die Menge der Primzahlen hinschreiben könnte (Tipp: formuliere dazu z.B. die Menge V_2 der Vielfachen von 2, etc.).

   Lösung:

   (a)

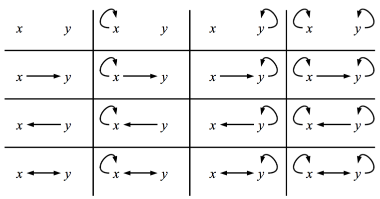
$$V_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{i \cdot k\}$$

$$prim = \mathbb{N} \setminus (V_2 \cup V_3 \cup V_5 \cup V_7 \cup \cdots \cup V_\infty)$$

6 Relationen

1. Wie viele Relationen auf einer endlichen Menge A mit n Elementen gibt es?
   Lösung:
   (a) Denn für eine Relation müssen immer 2 Elemente aus einer Menge ausgewählt werden. Da diese auch das gleiche sein können, gibt es für das erste n Möglichkeiten. Für das 2. wieder n.
   Somit ergeben sich n^2 Paare. Für jedes dieser gibt es die Möglichkeit es in der Relation zu enthalten, oder nicht. Dadurch ergibt sich eine binäre Auswahl pro Element.
   Es gibt somit 2^{n^2} Möglichkeiten.
2. Gib für $A = \{x, y, z\}$ Relationen an mit folgenden Eigenschaften:
   (a) Reflexiv, aber nicht symmetrisch
   (b) Weder symmetrisch noch antisymmetrisch
   (c) Antisymmetrisch, aber nicht asymmetrisch
   (d) Total, aber nicht transitiv
   (e) Symmetrisch und total

   Lösung:
   (a) $R := \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$
   (b) $R := \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$
   (c) $R := \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$
   (d) $R := \{(x, y), (y, z), (z, x), (y, y), (x, x), (z, z)\}$
   (e) $R := \{(x, y), (y, z), (z, x), (y, x), (z, y), (x, z)\}$
3. Hier sind alle Relationen auf der Menge $A = \{x, y\}$:



   Welche dieser Relationen sind reflexiv, welche symmetrisch, welche asymmetrisch, welche antisymmetrisch, welche transitiv und welche total?
   Lösung:

$r :=$ Reflexiv $\quad at :=$ Antisymmetrisch
$s :=$ Symmetrisch $\quad tr :=$ Transitiv
$a :=$ Asymmetrisch $\quad t :=$ Total

s, a, at, tr	a, tr	a, tr	r, s, at, tr
a, at, tr	at	at	r, at, tr, t
a, at, tr	at	at	r, at, tr, t
s, tr	s, tr	s, tr	r, s, tr, t

4. Zeige, dass wenn $xRy \Rightarrow \neg yRx$ erfüllt ist, dann auch $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$. Verwende dazu die Regel zur Auflösen der Implikation ($A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$) und die de morgansche Regel.
   Lösung:
   (a) Die erste Implikation kann umgeformt werden als:
   $xRy \Rightarrow\neq xRy$
   $\Leftrightarrow (\neg xRy \vee \neg yRx)$
   Dies ist äquivalent zur Bedingung der zweiten Bedingung:
   $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
   $\Leftrightarrow \neg(xRy \wedge yRx) \vee x = y$
   $\Leftrightarrow (\neg xRy \vee \neg yRx) \vee x = y$
   Somit ist die zweite Aussage immer wahr, wenn die erste wahr ist.
5. Es sei R eine beliebige Relation auf einer Menge A. Die Relation R^S auf A sei definiert als
$$R^S := \{(x, y) \in A \times A : xRy \vee yRx\}$$
   - Was bedeutet das für das Bild mit Pfeilen?
   - Zeige, dass R^S eine symmetrische Relation ist.
   - Zeige, dass R^S die kleinste symmetrische Relation auf A ist, die R enthält. Für jede symmetrische Relation R' auf A mit $R \subseteq R'$ gilt $R^S \subseteq R'$
   - Beweise oder widerlege: Wenn R transitiv ist, ist auch R' transitiv.

   Lösung:
   (a) Jeder Pfeil, der nur in eine Richtung geht wird durch einen Doppelpfeil ersetzt. (R^S macht jede Relation symmetrisch).

(b) R^S ist symmetrisch, denn falls ein Paar $(x, y) \in R^S$ muss entweder $xRy \vee yRx$ aus der Relation R gelten.

Somit muss auch das Paar $(y, x) \in R^S$, denn wenn beim vorherigen xRy war muss nun yRx oder umgekehrt sein.

(c) Es ist zu zeigen, dass jede Relation in R^S auch in der symmetrischen Relation R' vorhanden ist. Somit ist R^S die kleinste symmetrische Relation, die R enthält.

$xR^Sy \overset{\text{Def.}}{=} yRy \vee yRx$

$\overset{R \subseteq R'}{\Leftrightarrow} xR'y \vee yR'x$

$\overset{\text{Symmetrie von } R'}{\Leftrightarrow} xR'y \vee xR'y$

$\Leftrightarrow xR'y$

(d) Die die Relation R^S ist transitiv, wenn R transitiv ist, da von R^S für eine transitive Relation

$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

folgende Relationen hinzugfügt werden können:

$$yRx, zRy, zRx$$

Diese bilden dann wieder eine transitive Relation $(zRy \wedge yRx) \Rightarrow zRx$, welche genau „umgekehrt“ zu der originalen transitiven Relation verläuft.

6. Gibt es Relationen, die sowohl reflexiv, aus auch asymmetrisch sind? (Vorsicht: genau hinsehen!)

Lösung:

(a) Es gibt nur eine Relation, die reflexiv sowie asymmetrisch ist. Dies ist die Relation auf der leeren Menge.

$$A = \{\}$$

Reflexivität:

$\forall x \in A : xRx$, da $A = \{\}$ ist dies der Fall.

Asymmetrie:

$\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ Da $A = \{\}$ ist die Prämisse immer falsch, wodurch die Implikation wahr wird.

7 Ordnungsrelationen

1. Was für partielle Ordnungen und was für totale Ordnungen gibt es auf zweielementigen Mengen $\{x, y\}$?

   Lösung:

   (a) partielle Ordnung:
   $R_1 = \{(x, x), (y, y)\}$
   totale Ordnung:
   $R_2 = \{(x, x), (y, y), (x, y)\}$
   $R_3 = \{(x, x), (y, y), (y, x)\}$

2. Führe das im Beweis verwendete Sortierverfahren für die Menge $A = \{d, b, c, a, f, e\}$ mit der alphabetischen Sortierung durch. Verwende als Pivotelement z immer das vorderste Element (am Anfang also d) und lasse die Reihenfolge der Elemente in A_1 und A_3 so, wie sie in A waren (also nicht beim Zerlegen aus Versehen sortieren)!

   Lösung:

   (a)
   $$A = \{d, b, c, a, f, e\}$$
   $$A_1 = \{b, c, a\}, d, A_2 = \{f, e\}$$
   $$A_3 = \{a\}, b, A_4 = \{c\}, d, A_5\{e\}, f, A_6 = \{\}$$
   $$A_7 = \{a, b, c\}, d, A_8 = \{e, f\}$$
   $$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

3. Beweise, dass die A_i aus dem Beweis in der Vorlesung paarweise disjunkt sind.

   Lösung:

   (a) Die von dem Algorithmus erzeugen Teilmengen sind disjunkt. Die Elemente von A können in eine von 3 Mengen sortiert werden.
   $$A_1 = \{x \in A : xRz \wedge x \neq z\}$$
   $$A_2 = \{z\}$$
   $$A_3 = \{x \in A : zRx \wedge x \neq z\}$$
   Falls $x = z$ kann durch die Definition der Mengen A_1, A_3 nur in die Menge A_2 sortiert werden. Falls $x \neq z$ kann es in *entweder* A_1 *oder* A_2 sortiert werden, da auf den Elementen von A eine partielle Ordnung existiert und diese die Antisymmetrie fordert. Dadurch kann entweder xRy oder yRx, aber *nicht* $xRy \wedge yRx$ existieren. Somit wird x in eine der beiden Mengen sortiert.

   Da A ebenfalls transitiv ist muss eine der beiden direkten Relationen zu x existieren.

4. Eine schöne Darstellung einer Relation m auf einer endlichen (und nicht zu großen) Menge A ist mittels einer Tabelle, bei der Zeilen und Spalten mit den Elementen von A beschriftet sind (beides Mal dieselbe Reihenfolge wählen) und in der wir genau dann in Zeile x und Spalte y ein Kreuz machen, wenn xRy gilt.

   - Wie sieht die Tabelle für die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ aus?
   - Wie sieht man einer solchen Tabelle an, ob die Relation
     - reflexiv
     - total und / oder
     - antisymmetrisch

     ist?
   - Wie sieht die Tabelle einer Ordnung aus, wenn Zeilen- und Spaltenbeschriftungen nach dieser Ordnung sortiert sind?

   Lösung:

   (a)

$x \subseteq y$	$\{\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{\}$	$\times$			
$\{1\}$	$\times$	$\times$		
$\{2\}$	$\times$		$\times$	
$\{1,2\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

   (b)
   - Reflexivität:
     Die Diagonale der Tabelle ist markiert.
   - Totalität:
     Wenn die Diagonale als Spiegelache betrachtet wird, muss auf mindestens einder der beiden Seiten eins der beiden Felder markiert sein
   - Antisymmetrie:
     Bei der an der Diagonalen gespiegelten Tabelle ist höchstens eins der beiden Felder markiert.

(c) Ordnung: $\leq$ auf den Natürlichen Zahlen

$x \leq y$	1	2	3	4
1	$\times$			
2	$\times$	$\times$		
3	$\times$	$\times$	$\times$	
4	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Es sind alle Felder unter der Diagonalen markiert, da die Ordnung reflexiv, total (transitiv) und antisymmetrisch ist.

5. Für eine endliche Menge A sei jedes Element $x \in A$ mit einer Rangziffer $r(x) \in \mathbb{N}$ versehen. Wir betrachten die Relation R auf A mit

$$xRy :\Leftrightarrow r(x) \leq r(y)$$

- Zeige, dass R transitiv, reflexiv und total ist.
- Unter welcher Bedingung an die Beschriftungen $r(x)$ ist R antisymmetrisch, also eine Ordnung?

Lösung:

(a) Da $r(x) \in \mathbb{N}$ und die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ eine totale Ordnung bildet ist $r(x) \leq r(y)$ transitiv, reflexiv und total.

Da R durch diese definiert wird, hat R auch diese Eingenschaften.

(b) Wenn alle Beschriftungen für die verschiedenen Elemente von A unterschiedlich sind, ist R antisymmetrisch.

$$\forall x, y \in A : r(x) \neq r(y)$$

Dann gilt für jedes $x, y \in A$ *entweder* xRy *oder* yRx.

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \neq y : x \leq y \oplus x \leq y$$

6. Wenn man für eine endliche Menge A mit $n = |A|$ Elementen nur eine partielle Ordnung hat, funktioniert das Sortieren nicht. (Warum nicht?)

Es gibt aber einen entsprechenden Satz, der besagt, dass man A mit seiner partiellen Ordnung topologisch sortieren kann, d.h. es gibt immer (mindestens) eine Numerierung $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, für die gilt:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : x_i R x_j \Rightarrow r \leq j$$

Beweise mithilfe dieses Satzes folgende Aussage: Zu jeder partiellen Ordnung R auf einer endlichen Menge A gibt es eine totale Ordnung R' mit $R \subseteq R'$. (In Worten: Jede partielle Ordnung auf einer endlichen Menge kann ich "durch Hinzufugen von Pfeilen“ zu einer totalen Ordnung ausbauen.)

Lösung:

(a) Es wird A mit R topologisch sortiert. Dadurch erhält man

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Wenn man nun jedem $x \in A$ eine Rangziffer, die dem Index in A entspricht zuweist entsteht somit nach der vorherigen Aufgabe eine totale Ordnung auf diesen. ($r(x_i) \in \mathbb{N}$)

$$r(x_1) = 1, r(x_2) = 2, \ldots, r(x_n) = n$$

Nun ist noch zu zeigen, dass $R \subseteq R'$

$xRy \Rightarrow r(x) \leq r(y) \overset{\text{def. von } R'}{\Rightarrow} xR'y$

Dies ist der Fall, da R' als totale Ordnung definiert ist:

$$\forall i, j \in \{1 \ldots n\} : i \leq j \Leftrightarrow x_i R x_j$$

8 Abbildungen

1. Ein Rechteck R mit Seitenlägen a und b habe eine Fläche von $10cm^2$. Drücke den Umfang U von R als Funktion von b aus.

   Lösung:

   (a) Fläche des Rechtecks: $a \cdot b = 10cm^2 | \div b$
   $a = \frac{10cm^2}{b}$
   Umfang des Rechtecks: $u = 2(a + b) = 2(b + \frac{10cm^2}{b})$

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; b \mapsto 2 \cdot \left(b + \frac{10cm^2}{b}\right)$$

2. Gib (z.B. als Tabelle) die Und-Verknüpfung als Abbildung $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ an, wobei $\mathbb{B} := \{ture, false\}$ die Menge der Wahrheitswerte sei. Ist die Abbildung injektiv und/oder surjektiv?

   Lösung:

   (a)

$\wedge$	$true$	$false$
$true$	$true$	$false$
$false$	$false$	$false$

   Die und-Verknüpfung ist nicht injektiv, da:
   $f^{-1}(false) = \{\{false, true\}, \{ture, false\}, \{false, false\}\}$
   Sie ist aber surjektiv.

3. Existieren Abbildungen, die weder surjektiv noch injektiv sind? Gib gegebenenfalls solche Abbildungen an und veranschauliche sie anhand einer Skizze.

   Lösung:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$
   Nicht injektiv, da:
   $f^{-1}(5) = \{25, -25\}$
   Nicht surjektiv, da:
   $f^{-1}(-1) = \emptyset$

4. Prüfe die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$
   (b) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$
   (c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; 1 \mapsto 1, x \mapsto x - 1$ für $x > 1$
   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; x \mapsto x - 1$

   Lösung:

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$
   nicht injektiv: $f^{-1}(25) = \{-5, 5\}$
   nicht surjektiv: $f^{-1}(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$
   (b) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$
   injektiv
   nicht surjektiv: $f^{-1}(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$
   (c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; 1 \mapsto 1, x \mapsto x - 1$ für $x > 1$
   nicht injektiv: $f^{-1}(1) = \{1, 2\}$
   surjektiv
   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; x \mapsto x - 1$
   injektiv
   surjektiv

5. Gib jeweils zwei Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die

   (a) injektiv, aber nicht surjektiv
   (b) bijektiv sind.

   Lösung:

   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto x + 1$
   $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto 2x$
   (b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto x$
   $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto x + 1$ für x gerade, $x - 1$ für x ungerade

6. Gib eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to Z$ an.

   Lösung:

   (a) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}; 0 \mapsto 0,$
   $x \mapsto \frac{x}{2}$ für x gerade,
   $x \mapsto -\frac{x+1}{2}$ für x ungerade

7. Ordnet man jedem auftretenden Funktionswert y einer Abbildung $f : A \to B$ die Elemente seiner Urbildmenge $f^{-1}(y)$ zu, so erhält man eine Relation. Unter welchen Bedingungen ist diese Umkehrrelation eine Abbildung?

   Die in diesem Fall definierte Abbildung $B \to A$ heißt *Umkehrabbildung* und wird — etwas leichtsinnig — auch mit f^{-1} bezeichnet.

   Lösung:

   (a)

8. Die Bijektivität kann man gut einsetzen, um zu entscheiden, ob zwei Mengen gleich viele Elemente haben – dies ist genau dann der Fall, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt.

   - Demonstriere mit ein paar einfachen Beispielen, dass diese Definition für "kleine" Mengen gut funktioniert.

   Im Gegensatz zum intuitiven "Zählen der Elemente" lässt sich das Kriterium Bijektivität auch auf unendliche Mengen übertragen:

   - Vergleiche mit diesem Kriterium die Menge der geraden Zahlen mit der der ungeraden Zahlen.
   - Gibt es mehr Zahlen die durch 2 teilbar sind, oder mehr, die durch 3 teilbar sind?

   Mehr Erstaunliches über Bijektionen auf unendlichen Mengen findet man unter dem Stichwort "Hilberts Hotel", z.B. in der Wikipedia.

   Lösung:

   (a)

9. Zusatzaufgabe: Zeige, dass auch für unendliche Mengen A gilt: $|A| \neg |\mathcal{P}(a)|$, d.h., es gibt keine Bijektion zwischen A und $\mathcal{P}(A)$. Tipp: zu einer Bijektion $f : A \to \mathcal{P}(a)$ könnte man sich die Menge aller $x \in A$ ansehen, für die $x \notin f(x)$ gilt...

   Lösung:

   (a)

9 Folgen

1. Berechne die ersten Partialsummen der Reihe mit Gliedern $s_n = \frac{9}{10^n}$ und bestimme deren kleinste obere Schranke.

   Lösung:

   (a) Die Partialsumme der Reihenglieder ist:

   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} = \frac{10^n - 1}{10^n}$$

   $\sum_{i=1}^{1} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10}$
   $\sum_{i=1}^{2} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}$
   $\sum_{i=1}^{3} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} = \frac{999}{1000}$
   Im Grenzwert für $n \to \infty$ konvergiert diese Summe gegen 1

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n - 1}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10^n}{10^n} - \frac{1}{10^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) = 1$$

2. Gib eine Bedingung an die Reihenglieder s_k an, wann eine Reihe $f_n = \sum s_k$ streng monoton wachsend bzw. fallend ist (im Fall einer Reihe beziehen sich Attribute wie "monoton wachsend“ auf die Partialsummen, nicht auf die Reihenglieder).

   Lösung:

   (a) Es müssen alle $s_k > 0$ sein damit f_n streng monoton wachsend ist. Wenn alle $s_k < 0$ ist die Folge streng monoton fallend.

3. Zeige für $0 < x < 1$ ist die *geometrische Reihe*

   $$f_n := \sum_{k=0}^{n} x^k$$

   beschränkt und monoton, mithin konvergent. Was ist der Grenzwert der Reihe? (Tipp: Die Summe kennen wir schon. . .)

   Lösung:

   (a) Jeder Term der Partialialsumme ist > 0. Somit ist die Folge der Partialsummen streng monoton wachsend. Sie konvergiert gegen :

   $$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

   (b) Konvergenz von f_n

4. Zeige, dass die harmonische Reihe mit Reihengliedern $s_n := \frac{1}{n}$ keine obere Schranke besitzt (die Partialsummen also beliebig groß werden).

   Lösung:

   (a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i}$
   $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$
   $> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$
   $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$
   $= 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \Rightarrow$ nicht konvergent

5. Zeige, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzen kann! Nimm dazu an, es gebe $y_1 \neq y_2$, die beide die Grenzwertbedingung erfüllen und führe das zum Widerspruch durch Angabe eines ϵ, mit dem die weitere Bedingung unmöglich erfüllt sein kann.

   Lösung:

   (a) Widerspruchsbeweis:
   Annahme: Die Folge f_n hat die Grenzwerte y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$
   Nach der Definition des Grenzwerts einer Folge muss somit gelten:

   $$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow |f_n - y_1| < \epsilon$$

   $$\forall \epsilon > 0 : \exists n_1(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow |f_n - y_2| < \epsilon$$

   Da die Grenzwerte unterschiedlich sind, wird ϵ (Radius um den Grenzwert, in dem unendlich viele Punkte liegen müssen) so gewählt, dass es kleiner als die hälfte der Distanz von y_1, y_2 auf dem Zahlenstrahl.

   $$\epsilon < \frac{|y_1 - y_2|}{2}$$

   Somit müssen die Mengen der Punkte, die in den ϵ- Umgebungen von y_1, y_2 liegen disjunkt sein.
   Es wird nun $N := \max\{n_0, n_1\}$ gewählt. Somit sind alle Glieder der Folge f_n für beide Grenzwerte innerhalb der gegebenen ϵ-Umgebung.

   $$|f_n - y_1| + |f_n - y_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

   $2\epsilon = 2 \cdot \frac{|y_1 - y_2|}{2} = |y_1 - y_2|$

$|y_1 - f_n + f_n - y_2|$
$|(y_1 - f_n) + (f_n - y_2)|$
$\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |y_1 - f_n| + |f_n - y_2|$
$|f_n - y_1| + |f_n - y_2|$
Somit ergibt sich der folgende Widerspruch. Die Annahme muss also falsch sein.

$$2\epsilon \leq |f_n - y_1| + |f_n - y_2| < 2\epsilon$$

□

6. Ein Mann spaziert mit seinem Hund von seinem Haus zu einer Kneipe. Die Entfernung zwischen Haus und Kneipe sei s. Der Mann gehe dabei mit der Geschwindigkeit v. Dies ist dem Hund jedoch zu langweilig. Er läuft deswegen doppelt so schnell zwischen der Kneipe und seinem Herrchen hin und her. Das heißt, er startet am Haus zusammen mit seinem Herrchen, dreht um, sobald er das Ziel erreicht, stoppt, wenn er wieder auf sein Herrchen trifft, läuft dann wieder zur Kneipe,...

   Berechne, welchen Weg der Hund zurücklegt, bis Herrchen und Hund gemeinsam die Kneipe erreichen. Es gibt einen so genannten "Mathematiker-Weg" und einen so genannten "Physiker-Weg". Versuche, beide zu finden.

   Lösung:

   (a) Mathematiker Weg:
   Da der Hund doppelt so schnell läuft wie der Mann und umdreht, sobald sich die Beiden treffen, legt er folgende Strecke zurück:
   $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$
   $= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

   (b) Physiker Weg:
   Da der Hund sich in der gleichen Zeit doppelt so schnell bewegt, wie der Mann, legt der die doppelte Strecke zurück.

7. In Aufgabe 2.7 haben wir die Länge der Kochkurve zu berechnet, was uns auf eine Folge (l_n) von Zahlen führt. Ebenso kann man die Fläche (a_n) unter der Kochkurve berechnen, indem man die Flächen der Dreiecke aufaddiert, die Schritt fur Schritt auf die Kurve "draufgesetzt" werden. Sind diese Folgen jeweils beschränkt und/oder monoton?

   Lösung:

   (a)

8. Gib Folgen (a_n), (b_n) an mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \infty$ sowie:

   (a) $\lim(a_n - b_n) = 0$
   (b) $\lim(a_n - b_n) = +\infty$
   (c) $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = 0$

   Lösung:

   (a) $a_n = n, b_n = n$
   $\lim_{n\to\infty}(n - n) = 0$
   (b) $a_n = 2n, b_n = n$
   $\lim_{n\to\infty}(2n - n) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
   (c) $a_n = n, b_n = n^2$
   $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

9. O- Notation: zeig, dass gilt:

   (a) $6n^4 \in O(3n^4)$
   (b) $16n^3 \in O(2^n)$
   (c) $n^2 \notin O(n)$

   Gib im Fall von „$\in$“ ein entsprechendes n_0 an, so dass Bedingung (8.1) erfüllt ist.

   Lösung:

   (a)

10. Bestmme alle Häufungspunkte und den größten Häufungspunkt von

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

   (Benutze dabei die Gleichheit $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$).

   Lösung:

   (a)

11. Prüfe jeweils auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

   Hinweis: Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ dann ist $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$.

   Ebenfalls gilt: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta$ und - wenn β und alle $b_n \neq 0$ sind - $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \alpha/\beta$

(a) $a_n = \frac{3n+2(-1)^n}{n}$

(b) $b_n = \frac{nx^n}{nx^n+1}$ $x \in \mathbb{R}, x > 1$

Lösung:

(a) $lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2(-1)^n}{n}$
$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n} + \frac{2(-1)^n}{n}\right)$
$= \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{2(-1)^n}{n}\right) = 3$

(b) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^n}{nx^n+1}$
$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{nx^n}{nx^n}}{\frac{nx^n+1}{nx^n}}\right)$
$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{nx^n}}\right) = 0$

10 Analysis

1. Man zeige direkt anhand der ϵ-δ-Definition die Stetigkeit der Funktion $f(x) = |x|$. Wie kann man anhand der ϵ-δ Definition zeigen, dass die Signumsfunktion

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0, \end{cases}$$

in $x = 0$ nicht stetig ist?

Lösung:

$$\forall \xi \in \mathbb{R} |a - \xi| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(\xi)| < \epsilon$$

(a) $f(x) = |x|$
$\forall \xi \in \mathbb{R} |a - \xi| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(\xi)| < \epsilon$
$\delta = \epsilon$
$\forall \xi \in \mathbb{R} |a - \xi| < \delta \Rightarrow |f(0) - f(\xi)| = |0 - \xi| < \epsilon$

(b) $f(x) = sign(x), a = 0$
Die Bedingung muss für beliebig kleine $\epsilon > 0$ gelten, insbesondere für $\epsilon < 1$.
$\delta = \epsilon$
$\forall \xi \in \mathbb{R} |0 - \xi| < \delta \overset{\xi < 0}{\Rightarrow} |f(0) - f(\xi)| = |0 + 1| \nless \epsilon$
$\overset{\xi > 0}{\Rightarrow} |f(0) - f(\xi)| = |0 - 1| \nless \epsilon$
$\overset{\xi = 0}{\Rightarrow} |f(0) - f(\xi)| = |0 - 0| < \epsilon$
Die Aussage ist falsch für alle $0 < \epsilon < 1$.

2. Man zeige

$$x = e^{\ln x}$$

und leite durch beidseitiges Differenzieren eine Regel für die Ableitung des Logarithmus her.

Lösung:

(a) $\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} e^{\ln x}$
$1 = (\frac{d}{dx} \ln x) \cdot e^{\ln x}$
$1 = \frac{d}{dx} (\ln x) \cdot x| \div x$
$\frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln x$

3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f(x) = -x + x \ln(x)$$

Was lässt sich daraus mithilfe der Gleichung $\int f'(x)dx = F(x) + C$ folgern?

Lösung:

(a) $f(x) = -x + x \ln(x)$
$f'(x) = -1 + x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x$
$= -1 + 1 + \ln x$
$= \ln x$

(b) $\int f'(x)dx = F(x) + C$
$\int ln(x)dx = [-x + x \ln x] = -x + x \ln x + C$

4. Man leite mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $\frac{1}{g(x)}$ und anschließend mit der Produktregel die Ableitung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ her.

Lösung:

(a) $\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \frac{d}{dx} g(x)^{-1}$
$= -1 \cdot g(x)^{-2} \cdot g'(x)$
$= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

(b) $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx} \Big(f(x) \cdot g(x)^{-1} \Big)$
$= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$= f(x) \cdot (-\frac{g'(x)}{g(x)^2}) + f'(x) \cdot g(x)^{-1}$
$= \frac{-f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$
$= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

5. In der Vorlesung wurde die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

direkt anhand der Definition der Ableitung gezeigt. Beweise diese Ableitungsregel noch einmal mit vollständiger Induktion.

Lösung:

(a) Induktionsvoraussetzung: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
Induktionsanfang: $n = 0$
$\frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0$
$0 \cdot x^{0-1} = 0$
Induktionsschritt: $n \to n+1$
$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x^n \cdot x)$
$= x^n \cdot \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x^n \cdot x$
$\overset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{=} x^n \cdot 1 + nx^{n-1} \cdot x$
$= x^n + nx^n$
$= x^n(1+n)$ $\square$

6. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet:

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann existiert ein ξ mit
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

(a) Was bedeutet der Satz anschaulich?

(b) Beweise den Satz von Rolle:
Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann besitzt der Graph von f zwischen a und b mindestens einen Punkt mit waagrechter Tangente.

Lösung:

(a)

(b) Nach dem Mittelwertsatz gilt: $\xi \in [a, b]$
$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)| \div (b-a)$
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$
da $f(a) = f(b)$
$\frac{0}{b-a} = f'(\xi)$
$0 = f'(\xi)$ $\square$

7. Wir betrachen die Funktion
$$f(x) = \frac{3^3 + x^2 - 4}{4x^2 - 16}$$

(a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich von f an.

(b) Zeige die Identität
$$f(x) - \frac{1}{4} = -\left(f(-x) - \frac{1}{4}\right)$$
Was lässt sich daraus hinsichtlich der Symmetrie des Graphen von f folgern?

(c) Berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

(d) Bestimme alle Asymptoten von f und berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit der schiefen Asymptote.

(e) Berechne die ersten beiden Ableitungen von f. Kontrolle:
$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{x^2 - 12}{(x^2-4)^2}$$

(f) Bestimme alle Extrempunkte.

(g) Untersuche f auf Wendepunkte.

(h) Zeichne den Graphen von f unter der Verwendung aller bisherigen Resultate.

Lösung:

(a) Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners.
Nullstellen des Nenners:
$4x^2 - 16 = 0| \div 4$
$x^2 - 4 = 0$
$x_{1,2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 4}$
$x_1 = -\frac{1+\sqrt{15}}{2}$
$x_2 = -\frac{1-\sqrt{15}}{2}$
$D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1+\sqrt{15}}{2}, -\frac{1-\sqrt{15}}{2}\}$

(b)

(c) Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Nullstellen der Funktion. Der mit der y-Achse kann durch einsetzen von $f(0)$ ausgerechnet werden.
Nullstellen des Zählers:
$3x^3 + x^2 - 4 = 0$

Raten der Nullstelle $x_1 = 1$. Diese wird dann abgespaltet und so das Polynom mit Polynomdivision um einen Grad reduziert.

$(3x^3 + x^2 - 4) \div (x - 1) = 3x^2 + 4x + 4$

$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$

$x_{2,3} = -\frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{6} \Rightarrow$ Die beiden Nullstellen $x_{2,3}$ sind irrational

Schnittpunkt mit der x-Achse: $x_1 = 1$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = \frac{3 \cdot 0^3 + 0^2 - 4}{4 \cdot 0^2 - 16} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}$

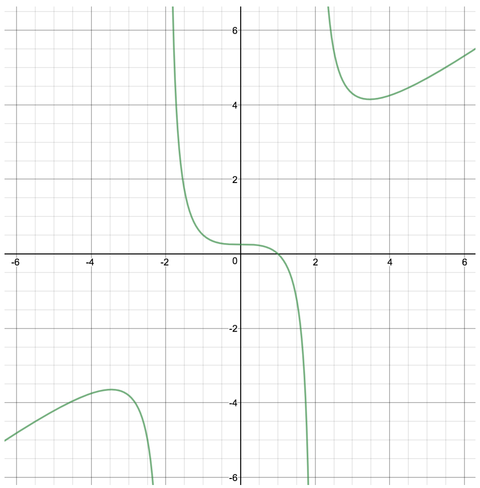
(d) Die Funktion hat eine schiefe Asymptote, da der Grad des Nenners um 1 grö0er ist, als der des Zählers. Diese kann durch Polynomdivision ermittelt werden:

$(3x^3 - x^2 - 4) \div (4x^2 - 16) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{12x}{4x^2 - 16}$

Da der gebrochen rationale Teil des Polynoms für $n \to \infty$ gegen 0 geht, ist die Asymptote von $f(x)$:

$g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

(e) Um $f(x)$ auf Wendepunkte zu untersuchen müssen die Nullstellen der 2. Ableitung ermittelt werden.

(f) 

11 Kombinatorik

1. Zeige:
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$
Lösung:
   (a) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

2. Bei der Strich- Sternmalerei hätten wir auch mit Sternen anfangen können und $n-1$ davon durch Striche ersetzen. Stelle eine Formel für die Anzahl der Möglichkeiten hierfur auf!
Zeige, dass diese Formel dieselben Werte liefert wie
$$\binom{n+k-1}{k}$$
(na hoffentlich!)
Lösung:
   (a) $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{(n+k-1)-(n-1)} = \binom{n+k-1}{k}$

3. Zeige:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
und gib damit ein Schema zum Berechnen der Binomialkoeffizienten nur mittels von Additionen an (zum Rechnen von Hand sehr praktisch!). Wo haben wir dieses Schema schon mal gesehen?
Lösung:
   (a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$
   $= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$
   $= \binom{n+1}{k+1}$

4. Gib die Koeffizienten des Polynoms $(1+x)^n$ mittels Binomialkoeffizienten an und zeige durch geschickes Verwenden dieser Formel
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, n > 0, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
Lösung:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$
   (a) $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
   (b) $(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$

5. Wie viele verschiedene Möglichkeiten zu tippen hat man beim klassischen Lotto " 6 aus 49"(Berechnen mit Taschenrechner oder per Hand mit Runden auf zwei gültige Ziffern)?
Lösung:
   (a) $\binom{49}{6} = 13983816$

6. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es beim Fußball-Toto? (13 Spiele sind zu tippen, jeweils Heimsieg, Heimniederlage oder Unentschieden – wieder Taschenrechner verwenden oder runden).
Lösung:
   (a) $3^{13} = 1594323$

7. Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim Würfeln mit n nicht unterscheidbaren Würfeln (Ergebnis sind dabei die Punkte der einzelnen Würfel, also wäre z.B. bei fünf Würfeln $2, 3, 5, 6, 6$ ein mögliches Ergebnis)?
Lösung:
   (a) 6^n

8. Wie viele verschiedene "Full House" gibt es beim Poker? (52 Karten, vier Farben mit je $2, 3, 4, \ldots, 10$, Bube, Dame, König, As)
Lösung:
   (a) Beim Full House muss zuerst einen Symbol ausgewählt werden. Für dieses gibt es $\binom{13}{1}$ Möglichkeiten. Von diesem müssen dann 3 der 4 Karten ohne Zurücklegen gezogen werden $\binom{4}{3}$. Dann wird ein weiteres Symbol,

welches ungleich dem vorherigen sein muss gezogen. Dies besitzt $\binom{12}{1}$ Möglichkeiten. Von diesem werden dann 2 Karten benötigt.

Somit ergibt sich:

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{2} = 3744$$

9. Wie viele Anagramme (Wörter, die aus denselben Buchstaben bestehen – es geht nur um die möglichen Buchstabenvertauschungen, aussprechen können muss man die Anagramme nicht; Groß- und Kleinbuchstaben werden nicht unterschieden) gibt es von dem Wort *Muh*? Wie viele Anagramme gibt es von *Atlantis* und wie viele von *Mississippi*?

   Lösung:

   Die Anzahl der möglichen Permutationen einer Menge beträgt $n!$. Wenn aber k gleiche Elemente in dieser enthalten sind, beträgt die Zahl der unterschiedlichen Permutationen $\frac{n!}{k!}$, denn $k!$ Permutationen sind gleich.

   (a) Muh: 3!

   (b) Atlantis: $\frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

   (c) Mississippi: $\frac{11!}{10!} = 11$

12 Lineare Gleichungssysteme

1. Gegeben sei das lineare Gleichungsystem

$$\begin{array}{rrcr} -x_1 & +2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & -x_2 & = & 2 \end{array}$$

   (a) Löse das System zunächst graphisch.

   (b) Eliminiere nun mittels der ersten Gleichung das x_1 in der zweiten Gleichung

   (c) Löse das so geänderte System noch einmal graphisch.

   (d) Berechne schließlich aus dem geänderten System die Lösung.

   Lösung:

   (a)

   (b)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c)

   (d)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Löse das lineare Gleichungsystem

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & +4x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & 3x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & -2 \end{array}$$

   Lösung:

   (a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Das Lösen eines LGS nach dieser Methode benötigt bei n Unbekannten etwa $n^3/3$ Operationen (Additionen und Multiplikationen). Angenommen, unser Rechner schafft 100 Millionen Operationen pro Sekunde — wie lange braucht er dann fur ein LGS mit 10, mit 1000, mit 100000 Unbekannten?

   Lösung:

   (a) Allgemeine Formel für n Unbekannte

$$t(n) := \frac{n^3}{3} \cdot \frac{1}{100 \cdot 10^6} s = \frac{n^3}{3 \cdot 10^8} s$$

	10	100	1000	100000
t	$3.33\mu s$	$3.33ms$	$3.33sec$	38.58 Tage

4. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ (d.h. r Zeilen und s Spalten, Koeffizienten aus $\mathbb{R}$) und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^s$ ist das Matrix-Vektor-Produkt $c = A \cdot b \in \mathbb{R}^r$ definiert, bei dem in Zeile i das Skalarprodukt aus der Zeile i von A und dem Vektor b gebildet wird:

$$c_i = \sum_{k=1}^{s} a_{i,k} \cdot b_k$$

   Berechne folgendes Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   und überprüfe die Ergebnisse aus der Aufgabe 11.2

   Lösung:

   (a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1-4 \\ 4+3-2 \\ -1+2 \\ -2+4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5. für welche Werte von a ist folgendes LGS lösbar? Was sind dann die Lösungen?

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & -3x_2 & -x_3 & = & a \end{array}$$

   Lösung:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -a-2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

$0 + 0 + 0 = a + 3$
$a = -3$

$x_2 + x_3 = 1 | - x_3$
$x_2 = 1 - x_3$

$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 + (1 - x_3) = 1$
$x_1 = x_3$