1. Was für partielle Ordnungen und was für totale Ordnungen gibt es auf zweielementigen Mengen $\{x, y\}$?

   Lösung:

   (a) partielle Ordnung:
   $R_1 = \{(x, x), (y, y)\}$
   totale Ordnung:
   $R_2 = \{(x, x), (y, y), (x, y)\}$
   $R_3 = \{(x, x), (y, y), (y, x)\}$

2. Führe das im Beweis verwendete Sortierverfahren für die Menge $A = \{d, b, c, a, f, e\}$ mit der alphabetischen Sortierung durch. Verwende als Pivotelement z immer das vorderste Element (am Anfang also d) und lasse die Reihenfolge der Elemente in A_1 und A_3 so, wie sie in A waren (also nicht beim Zerlegen aus Versehen sortieren)!

   Lösung:

   (a)
   $$A = \{d, b, c, a, f, e\}$$
   $$A_1 = \{b, c, a\}, d, A_2 = \{f, e\}$$
   $$A_3 = \{a\}, b, A_4 = \{c\}, A_5\{d\}, A_4 = \{f\}$$

3. Beweise, dass die A_i aus dem Beweis in der Vorlesung paarweise disjunkt sind.

   Lösung:

   (a)

4. Eine schöne Darstellung einer Relation m auf einer endlichen (und nicht zu großen) Menge A ist mittels einer Tabelle, bei der Zeilen und Spalten mit den Elementen von A beschriftet sind (beides Mal dieselbe Reihenfolge wählen) und in der wir genau dann in Zeile x und Spalte y ein Kreuz machen, wenn xRy gilt.

   - Wie sieht die Tabelle für die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ aus?
   - Wie sieht man einer solchen Tabelle an, ob die Relation
     - reflexiv
     - total und / oder
     - antisymmetrisch

     ist?
   - Wie sieht die Tabelle einer Ordnung aus, wenn Zeilen- und Spaltenbeschriftungen nach dieser Ordnung sortiert sind?

   Lösung:

   (a)

5. Für eine endliche Menge A sei jedes Element $x \in A$ mit einer Rangziffer $r(x) \in \mathbb{N}$ versehen. Wir betrachten die Relation R auf A mit
   $$xRy :\Leftrightarrow r(x) \leq r(y)$$
   - Zeige, dass R transitiv, reflexiv und total ist.
   - Unter welcher Bedingung an die Beschriftungen $r(x)$ ist R antisymmetrisch, also eine Ordnung?

   Lösung:

   (a)

6. Wenn man für eine endliche Menge A mit $n = |A|$ Elementen nur eine partielle Ordnung hat, funktioniert das Sortieren nicht. (Warum nicht?)

   Es gibt aber einen entsprechenden Satz, der besagt, dass man A mit seiner partiellen Ordnung topologisch sortieren kann, d.h. es gibt immer (mindestens) eine Numerierung $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, für die gilt:
   $$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : x_i R x_j \Rightarrow r \leq j$$
   Beweise mithilfe dieses Satzes folgende Aussage: Zu jeder partiellen Ordnung R auf einer endlichen Menge A gibt es eine totale Ordnung R' mit $R \subseteq R'$. (In Worten: Jede partielle Ordnung auf einer endlichen Menge kann ich "durch Hinzufugen von Pfeilen" zu einer totalen Ordnung ausbauen.)

   Lösung:

   (a)