1. Man zeige direkt anhand der ϵ-δ-Definition die Stetigkeit der Funktion $f(x) = |x|$. Wie kann man anhand der ϵ-δ Definition zeigen, dass die Signumsfunktion

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0, \end{cases}$$

in $x = 0$ nicht stetig ist?

Lösung:

(a)

2. Man zeige

$$x = e^{ln(x)}$$

und leite durch beidseitiges Differenzieren eine Regel für die Ableitung des Logarithmus her.

Lösung:

(a)

3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f(x) = -x + x\ln(x)$$

Was lässt sich daraus mithilfe der Gleichung $\int f'(x)dx = F(x)+C$ folgern?

Lösung:

(a)

4. Man leite mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $\frac{1}{g(x)}$ und anschließend mit der Produktregel die Ableitung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ her.

Lösung:

(a)

5. In der Vorlesung wurde die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

direkt anhand der Definition der Ableitung gezeigt. Beweise diese Ableitungsregel noch einmal mit vollständiger Induktion.

Lösung:

(a)

6. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet:

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann existiert ein ξ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

(a) Was bedeutet der Satz anschaulich?

(b) Beweise den Satz von Rolle:
Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann besitzt der Graph von f zwischen a und b mindestens einen Punkt mit waagrechter Tangente.

Lösung:

(a)

7. Wir betrachen die Funktion

$$f(x) = \frac{3^3 + x^2 - 4}{4x^2 - 16}$$

(a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich von f an.

(b) Zeige die Identität

$$f(x) - \frac{1}{4} = -\left(f(-x) - \frac{1}{4}\right)$$

Was lässt sich daraus hinsichtlich der Symmetrie des Graphen von f folgern?

(c) Berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

(d) Bestimme alle Asymptoten von f und berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit der schiefen Asymptote.

(e) Berechne die ersten beiden Ableitungen von f. Kontrolle:

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{x^2 - 12}{(x^2 - 4)^2}$$

(f) Bestimme alle Extrempunkte.

(g) Untersuche f auf Wendepunkte.

(h) Zeichne den Graphen von f unter der Verwendung aller bisherigen Resultate.

Lösung:

(a)