

1. Ein Rechteck  $R$  mit Seitenlängen  $a$  und  $b$  habe eine Fläche von  $10\text{cm}^2$ . Drücke den Umfang  $U$  von  $R$  als Funktion von  $b$  aus.

Lösung:

(a) Fläche des Rechtecks:  $a \cdot b = 10\text{cm}^2 \mid \div b$

$$a = \frac{10\text{cm}^2}{b}$$

Umfang des Rechtecks:  $u = 2(a + b) = 2(b + \frac{10\text{cm}^2}{b})$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; b \mapsto 2 \cdot \left(b + \frac{10\text{cm}^2}{b}\right)$$

2. Gib (z.B. als Tabelle) die Und-Verknüpfung als Abbildung  $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  an, wobei  $\mathbb{B} := \{true, false\}$  die Menge der Wahrheitswerte sei. Ist die Abbildung injektiv und/oder surjektiv?

Lösung:

(a)

$\wedge$	$true$	$false$
$true$	$true$	$false$
$false$	$false$	$false$

Die und-Verknüpfung ist nicht injektiv, da:

$$f^{-1}(false) = \{\{false, true\}, \{true, false\}, \{false, false\}\}$$

Sie ist aber surjektiv.

3. Existieren Abbildungen, die weder surjektiv noch injektiv sind? Gib gegebenenfalls solche Abbildungen an und veranschauliche sie anhand einer Skizze.

Lösung:

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$

Nicht injektiv, da:

$$f^{-1}(5) = \{25, -25\}$$

Nicht surjektiv, da:

$$f^{-1}(-1) = \emptyset$$

4. Prüfe die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

(a)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$

(b)  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$

(c)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; 1 \mapsto 1, x \mapsto x - 1$  für  $x > 1$

(d)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; x \mapsto x - 1$

Lösung:

(a)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$

nicht injektiv:  $f^{-1}(25) = \{-5, 5\}$

nicht surjektiv:  $f^{-1}(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

(b)  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$

injektiv

nicht surjektiv:  $f^{-1}(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

(c)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; 1 \mapsto 1, x \mapsto x - 1$  für  $x > 1$

nicht injektiv:  $f^{-1}(1) = \{1, 2\}$

surjektiv

(d)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; x \mapsto x - 1$

injektiv

surjektiv

5. Gib jeweils zwei Funktionen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  an, die

(a) injektiv, aber nicht surjektiv

(b) bijektiv sind.

Lösung:

(a)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; x \mapsto x + 1$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; x \mapsto 2x$$

(b)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; x \mapsto x$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; x \mapsto x + 1 \text{ für } x \text{ gerade, } x - 1 \text{ für } x \text{ ungerade}$$

6. Gib eine bijektive Abbildung  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  an.

Lösung:

(a)  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}; 0 \mapsto 0,$

$$x \mapsto \frac{x}{2} \text{ für } x \text{ gerade,}$$

$$x \mapsto -\frac{x+1}{2} \text{ für } x \text{ ungerade}$$

7. Ordnet man jedem auftretenden Funktionswert  $y$  einer Abbildung  $f : A \rightarrow B$  die Elemente seiner Urbildmenge  $f^{-1}(y)$  zu, so erhält man eine Relation. Unter welchen Bedingungen ist diese Umkehrrelation eine Abbildung?

Die in diesem Fall definierte Abbildung  $B \rightarrow A$  heißt *Umkehrabbildung* und wird — etwas leichtsinnig — auch mit  $f^{-1}$  bezeichnet.

Lösung:

(a)

8. Die Bijektivität kann man gut einsetzen, um zu entscheiden, ob zwei Mengen gleich viele Elemente haben – dies ist genau dann der Fall, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt.

- Demonstriere mit ein paar einfachen Beispielen, dass diese Definition für "kleine" Mengen gut funktioniert.

Im Gegensatz zum intuitiven "Zählen der Elemente" lässt sich das Kriterium Bijektivität auch auf unendliche Mengen übertragen:

- Vergleiche mit diesem Kriterium die Menge der geraden Zahlen mit der der ungeraden Zahlen.
- Gibt es mehr Zahlen die durch 2 teilbar sind, oder mehr, die durch 3 teilbar sind?

Mehr Erstaunliches über Bijektionen auf unendlichen Mengen findet man unter dem Stichwort "Hilberts Hotel", z.B. in der Wikipedia.

Lösung:

(a)

9. Zusatzaufgabe: Zeige, dass auch für unendliche Mengen  $A$  gilt:  $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$ , d.h., es gibt keine Bijektion zwischen  $A$  und  $\mathcal{P}(A)$ . Tipp: zu einer Bijektion  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  könnte man sich die Menge aller  $x \in A$  ansehen, für die  $x \notin f(x)$  gilt...

Lösung:

(a)