1. Bestätige durch Wahrheitstafeln das erste Distributivgesetz und die erste de morgansche Regel.

   Lösung:

   (a) erstes Distributivgesetz:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$A \vee B$	$B \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$false$	$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$false$	$true$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$
$false$	$false$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$

   (b) erste de morgansche Regel:

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
$true$	$true$	$false$	$false$	$false$	$false$
$true$	$false$	$true$	$false$	$true$	$true$
$false$	$true$	$true$	$true$	$false$	$true$
$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$

2. Zeige die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

   (a) Mittels Wahrheitstafeln

   (b) Durch Umformen (zweckmäßig ist hier, die zweite Form in die erste umzuformen, aber andersrum gehts natürlich auch).

   Lösung:

   (a)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neq B \Rightarrow \neg A$
$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$false$	$false$
$false$	$true$	$true$	$true$
$false$	$false$	$true$	$true$

   (b) $\neg B \Rightarrow \neg A$
   $B \vee \neg A$
   $\neg A \vee B$
   $A \Rightarrow B$

3. Ein logischer Ausdruck, der (unabhängig von den Werten der darin vorkommenden Variablen) immer den Wert $true$ hat, heißt Tautologie — z.B. der Ausdruck $A \vee (\neg A)$.

   Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

   (a) $(A \wedge C) \vee (A \wedge \neg C)$

   (b) $\neg(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge C)$

   (c) $((A \vee B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)) \wedge ((A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B))$

   Lösung:

   (a) $(A \wedge C) \vee (A \wedge \neg C)$
   $A \wedge (C \vee \neg C)$
   $A \wedge (true)$
   $A \Rightarrow$ keine Tautologie

   (b) $\neg(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge C)$
   $(\neg A \vee A) \vee (B \wedge C)$
   $true \vee (B \wedge C)$
   $true \Rightarrow$ Tautologie

   (c) $((A \vee B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)) \wedge ((A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B))$
   $((A \vee B) \wedge (A \vee B)) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B)$
   $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
   $A \vee (B \wedge \neg B)$
   $A \vee false$
   $A \Rightarrow$ keine Tautologie

4. Bei einem Verstoß gegen ein mathematisches Gesetz (welches, ist hier egal) kommen drei stadtbekannte Gauner A, B und C als Täter infrage — einer alleine oder mehrere zusammen. Der Polizei liegen zwei Aussagen vor:

   (a) Wenn A unschuldig ist, ist B schuldig.

   (b) Wenn B unschuldig ist, sind sowohl A als auch C schuldig

   Da die Polizei ihre Informanten kennt, weiß sie, dass die erste Aussage wahr, die zweite Aussage aber falsch ist. Wer ists gewesen?

   Hier gibt es mal wieder verschiedene Lösungswege – man kann z.B. logische Ausdrücke für die Aussagen aufstellen und umformen, man kann die Aufgabe aber auch graphisch lösen, indem man sich ein Venn-Diagramm für drei Mengen A, B und C aufmalt: Nun legt man fest, dass der Bereich innerhalb von z.B. A bedeutet, dass A schuldig ist etc., hat so alle möglichen Kombinationen von Schuld/Unschuld der drei Kandidaten vor sich und kann mittels der Aussagen solange Bereiche ausschließen, bis nur noch ein Feld übrig ist.

Lösung:

(a) $A := A$ ist schuldig, $B := B$ ist schuldig, $C := C$ ist schuldig
   - Wenn A unschuldig ist, ist B schuldig.
     $\Leftrightarrow \neg A \Rightarrow B$
   - Wenn B unschuldig ist, sind sowohl A als auch C schuldig
     $\Leftrightarrow \neg B \Rightarrow A \wedge C$

   Die beiden Aussagen können nun in eine Gleichung umgeformt werden.
   $(\neg A \Rightarrow B) \wedge \neg(\neg B \Rightarrow (A \wedge C))$
   $(A \vee B)\neg(B \vee (AC))$
   $(A \vee B)(\neg B \neg(AC))$
   $(A \vee B)(\neg B(\neg A \vee \neg C))$
   $(A \vee B)((\neg B \neg A) \vee (\neg B \neg C))$
   $A\neg B\neg A \vee A\neg B\neg C \vee B\neg B\neg A \vee B\neg B\neg C$
   $false \vee A\neg B\neg C \vee false \vee false$
   $A\neg B\neg C$
   Somit is A schuldig und B, C sind unschuldig.

5. Formuliere folgende Aussagen mit Quantoren:

   (a) Die Differenz von 1 und allen natürlichen Zahlen, die größer als 15 sind, ist kleiner als -14.
   (b) Jede reelle Zahl x hat ein multiplikatives Inverses, also eine Zahl y mit $x \cdot y = 1$.
   (c) Es gibt eine gerade Primzahl. (Hierbei kann der Operator $|$ verwendet werden: für zwei ganze Zahlen a und b gilt $a|b$ genau dann, wenn a Teiler von b ist.)

   Lösung:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 15 : 1 - n < -14$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$
   (c) $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N} : 2|a \wedge \neg b|a$

6. Gib für die Aussage $\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 5)$ eine äquivalente Aussage an, die keinen Existenzquantor enthält (Allquantoren sind erlaubt...).

   Hinweis: ein negierter Allquator entspricht einem Existenzquantor und umgekehrt.

   Lösung:

   (a) $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \neq 5$

7. Sind die Aussagen
   $$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x - y = 0$$
   und
   $$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x - y = 0$$
   äquivalent?

   Lösung:

   (a) Die Aussagen sind nicht äquivalent, da bei der Zweiten ein beliebiges x ausgewählt wird, für welches dann alle y die Gleichung erfüllen sollen. Dies ist aber nicht der Fall, da z.B.:
   $$5 - 10 \neq 0$$
   Somit ist die zweite Aussage falsch, die Erste aber wahr.

8. Folgende Aussagen gelten:

   (a) Jeder Student will gute Noten haben.
   (b) Kein Student lernt auf langweilige Prüfungen
   (c) Jeder Prüfung, die ohne Mathe auskommt, ist langweilig
   (d) Jeder Student, der gute Noten haben will, aber nichts gelernt hat, muss sich nur auf sein Glück verlassen.

   Beweise: Wenn alle Prüfungen ohne Mathe auskommen, müssen sich alle Studenten nur auf ihr Glück verlassen.

   Lösung:

   (a) Wenn alle Prüfungen ohne Mathe auskommen sind nach (c) alle Prüfungen langweilig. Somit lernt nach (b) kein Student auf diese. Dadurch hat kein Student etwas gelernt, aber nach (a) jeder Student gute Noten haben möchte müssen sich nach (d) alle auf ihr Glück verlassen.

9. Wie lautet die Verneinung von „Alle Kreter sind Lügner“?

   Lösung:

   (a) Es gibt einen Kreter, der die Wahrheit sagt.

10. Zeige mit vollständiger Induktion über n, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}; x \neq 1$$

und alle $n \geq 0$ gilt.

Lösung:

(a) Induktionsvoraussetzung:
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsanfang: $n = 1$
$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2}$

Induktionschritt: $n \to n+1$
$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k$
$\overset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$
$= \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
$\square$

(b) Induktionsvoraussetzung
$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}; x \neq 1$

Induktionsanfang: $n = 0$
$\sum_{i=0}^{0} x^i = 1 = \frac{x-1}{x-1} = \frac{x^{0+1}-1}{x-1}$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x^i$
$\overset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{=} x^{n+1} + \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$
$= \frac{x^{n+1} \cdot (x-1)}{x-1} + \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{x^{n+1}(x-1)x^{n+1}-1}{x-1}$
$= \frac{x^{n+1}(x-1+1)-1}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$
$\square$

11. Beweise durch vollständige Induktion: für $n \geq 4$ ist $n! > 2^n$. Lösung:

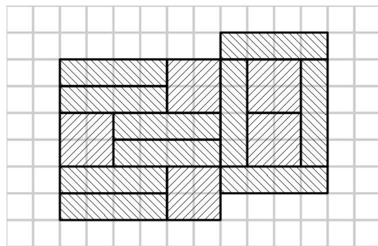
(a) Induktionsvoraussetzung: $n! > 2^n; n \geq 4$

Induktionsanfang: $n = 4$
$4! > 2^4$
$24 > 16$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$
$\overset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{>} (n+1) \cdot 2^n$
$> 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ (da $n \geq 4$)
$\square$

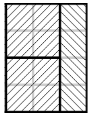
12. Gegeben sei ein Parkett aus 1×4 und 2×2-Stücken (die Skizze zeigt ein Beispiel, in Wirklichkeit kann das Parkett aber eine beliebige andere Form haben). Nun geht ein 1×4-Stück kaputt und wir haben keins mehr im Lager. Daher ersetzen wir es durch ein 2×2 Stück und versuchen, die Ausgangsform wiederherzustellen (die Teile sind noch nicht festgeklebt, können also beliebig umgeordnet werden).

Geht das — immer, also für beliebig geformte Flächen, oder nur für gewisse (welche?), oder vielleicht gar nie?



Lösung:

(a) Das Ersetzen eines 1×4 Stückes durch ein 2×2 ist nur möglich, wenn in der Ausgangsform ≥ 2 1×4 Stücke verwendet wurden und sich mindestens ein 2×4. Rechteck in der Form befindet.



Denn falls dies nicht der Fall ist, muss eine der Seitenlängen der Ausgansform ungerade sein und kann somit nicht durch Stücke gerader Kantenlänge ersetzt werden.

Falls eine Kantenlänge der Ausgangsform ungerade ist, aber > 2 1×4 Stücke werwendet wurden, ist es immer möglich 2 dieser mit einer Gesamtfläche von $2 \cdot (1 \times 4) = 8$ durch 2 2×2 Stücke zu ersetzen. Denn das fehlerhafte 1×4 Stück kann mit einem fehlerfreien zu einem gemeinsamen 2×4 Stück zusammen gelegt werden, welches sich dann durch $2 \cdot (2 \times 2)$ Stücke ersetzen lässt.