

1. Berechne 2^n für $0 \dots 20$.

Für größere Zweierpotenzen ist die Faustregel "2¹⁰ oder 1000 - das ist doch praktisch das selbe" nützlich. Gib damit Näherungen für 2³² und 2⁶⁴ an.

Lösung:

(a)

2. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 6 \cdot x^2$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$.

(a) Skizziere beide Graphen.

(b) Für welche x ist $f(x) = g(x)$? Für welche ist $f(x) > g(x)$ und für welche $f(x) < g(x)$?

3. Für welche ganzen Zahlen n ist $2^n > n^2$? (Probieren ist hier besser als rechnen!)

Lösung:

(a)

4. (a) Skizziere den Graph der Funktion $x \mapsto 2^x$ für $x = -1000 \dots 10$ und diskutierte den Satz "die Exponentialfunktion ist ein rechter Winkel".

(b) Bestimme die kleinste Zahl x_0 , so dass für alle $x \geq x_0$ gilt: $2^x \geq 16x^3$.

(c) Wie ändert sich die Antwort in b), wenn die rechte Seite ($16x^3$) mit $2^{13} = 8192$ multipliziert wird, also die Ungleichung $2^x \geq 131072x^3$ betrachtet wird?

Lösung:

(a)

5. Wie viele verschiedene Zustände kann man mit n Bits darstellen? Speziell: wenn wir ganze Zahlen (bei 0 beginnend) in 32 Bit speichern, wie weit können wir damit zählen?

Lösung:

(a)

6. Vereinfache folgende Terme (dabei seien $x, y, z > 0$):

(a) $\sqrt[5]{2^{15}}$

(b) $(\frac{8}{125})^{-\frac{1}{3}}$

(c) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$

(d) $(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y^3})^6$

(e) $\frac{(x^2 \cdot y^3 z^4)^2}{(x \cdot y \cdot z)^{-2}}$

(f) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Lösung:

(a) $\sqrt[5]{2^{15}} =$

(b) $(\frac{8}{125})^{-\frac{1}{3}} =$

(c) $\sqrt{\sqrt[3]{x}} =$

(d) $(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y^3})^6 =$

(e) $\frac{(x^2 \cdot y^3 z^4)^2}{(x \cdot y \cdot z)^{-2}} =$

(f) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

7. Um eine Koch-Kurve zu konstruieren, beginnen wir mit einer Strecke der Länge 1 und ersetzen nun in jeder Runde jede bis dahin erzeugte Strecke durch vier Teilstrecken von je einem Drittel der Länge gemäß folgendem Muster

Die Ergebnisse der Runden zwei bis fünf sehen dann so aus (die Koch-Kurve selbst ist das fraktale Objekt, das im Grenzprozess unendlich vieler Iterationen entsteht):

Schätze die Länge dieser Streckenzüge! Wie lang sind sie wirklich?

Lösung:

(a)

8. Lineare Gleichungen - bestimme für die folgenden Gleichungen jeweils alle x , die die Gleichung erfüllen:

(a) $4 \cdot (x - 1) = 5 \cdot (x - 2)$

(b) $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} - 1$

(c) $(x + 2) \cdot (x - 2) = 21$

Naja, die letzte Gleichung ist nicht linear in x ; wen das stört, der führt zwischendrin ein $y := x^2$ ein...

Lösung:

(a)

9. Leite die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ der quadratischen Gleichung mit Hilfe der so genannten quadratischen Ergänzung her, d.h. bringe die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erst in die Form $(x + \alpha)^2 + \beta = 0$ und löse die Gleichung dann nach x auf.

Lösung:

(a)

10. Gegeben sind die Punkte $A(0|2)$, $B(2|6)$ und $C(-1|1.5)$.

(a) Konstruiere eine Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, so dass ihr Graph durch diese drei Punkte verläuft. Wie viele solcher Funktionen gibt es?

(b) Bestimme y_1 und y_2 so, dass die Punkte $D(4|y_1)$ und $E(-3|y_2)$ ebenfalls auf dem Graphen liegen!

Lösung:

(a)

11. Dividiere $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ durch $x^2 - 2$ und bestimme alle Nullstellen von $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$.

Lösung:

(a)

12. Berechne $(\sum_{i=0}^n x^i) \cdot (x - 1)$ und stelle damit eine geschlossene Formel (d.h. ohne Summenzeichen) zur Berechnung von $\sum_{i=0}^n x^i$ für $x \neq 1$ auf.

Lösung:

(a)