1. Skizziere den Graph der Funktion $x \mapsto \log_2 x$ für $x = 2^{-1000} \dots 1000$.

   Lösung:

   (a)

2. Bestimme für beliebiges positives $b \neq 1$ folgende Werte: $\log_b 1$ und $\log_b b$.

   Lösung:

   (a) $\log_b 1 = 0$

   (b) $\log_b b = 1$

3. Finde mit den Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen eine Rechenregel für $log_b \sqrt[n]{x}$.

   Lösung:

   (a) $\log_b \sqrt[n]{x} = \log_b x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$

4. Vereinfache folgende Ausdrücke (b, c, x und y seien positiv mit $b, c \neq 1$):

$$b^{x+\log_b y}, \left(\sqrt{b}\right)^{\log_b x}, \log_c \left(x^{\frac{1}{\log_c b}}\right),$$

   Lösung:

   (a) $b^{x+\log_b y} = b^x \cdot b^{\log_b y} = b^x \cdot y$

   (b) $\left(\sqrt{b}\right)^{\log_b x} = b^{\frac{\log_b x}{2}} = b^{\log_b x} \cdot b^{\frac{1}{2}} = x \cdot \sqrt{b}$

   (c) $\log_c \left(x^{\frac{1}{\log_c b}}\right) = \frac{1}{\log_c b} \cdot \log_c x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$

5. Vereinfache (es sei $x > y > 0$)

$$\ln(x^2 - y^2) - \ln(x - y)$$

   Lösung:

   (a) $\ln(x^2 - y^2) - \ln(x - y)$
   $= \ln((x + y)(x - y)) - \ln(x - y)$
   $= \ln(x + y) + \ln(x - y) - \ln(x - y) = \ln(x + y)$

6. Wenn für Abszisse (vulgo "x-Achse“) und Ordinate logarithmische Maßstäbe verwendet werden — wie sehen dann die Graphen von Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ aus?

   Lösung:

   (a) Die Graphen sind eine Gerade.

7. Jaja, ich weiß schon, dass die allermeisten von Ihnen nicht vorhaben, jemals auf einem Rechenschieber zu rechnen. Zum Logarithmen-Üben ist das Ding (bzw. eine Vorstellung davon) aber immer noch praktisch! Manchmal wollen auch Informatiker die Länge der Diagonale eines Quadrats berechnen — markiere dazu auf dem Informatiker-Rechenschieber den Wert $\sqrt{2}$.

Markiere nun noch denjenigen Wert, mit dem man die Kantenlänge eines Würfels multiplizieren muss, um die Kantenlänge eines Würfels mit doppeltem Volumen zu erhalten.

Wie kann man mit unserem Rechenschieber — ohne die Skalen zu verlängern — den Wert von $8 \cdot 512$ ablesen? (Tipp: am echten Rechenschieber heißt diese Technik Durchschieben. Bei unserm Modell ist ggf. mal wieder die Näherung $2^{10} \approx 1000$ hilfreich.)

Lösung:

(a)

8. In wieviel Jahren hat sich eine mit einen Zinssatz von $p\%$ im Jahr verzinste Geldanlage (incl. Zinseszins) verdoppelt? Berechne diese Dauer für $p = 1, 2, 3, 4$ und 10 und vergleiche die Ergebnisse mit der Faustregel "70 Jahre geteilt durch Zinssatz".

Lösung:

(a) Die Geldanlage hat nach einer Verzinsung den Wert:
$x_{neu} = x_{alt} + x_{alt} \cdot \frac{p}{100}$
Nach einer weiteren Verzinsung hat sie den Wert:
$(x_{alt} + x_{alt} \cdot \frac{p}{100}) + (x_{alt} + x_{alt} \cdot \frac{p}{100}) \cdot \frac{p}{100}$
$= (x_{alt} + x_{alt} \cdot \frac{p}{100}) \cdot (1 + \frac{p}{100})$
$= x_{alt}(1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{100})$
$= x_{alt}(1 + \frac{p}{100})^2$
Diese Formel lässt sich für beliebige Verzinsungen verallgemeinern

$$x_{alt}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Nun kann man berechnen, wie lange es dauert, bis sich das Startkapital verdoppelt hat.
$2 \cdot x_{alt} = x_{alt}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad | \div x_{alt} | \ln()$
$\ln 2 = n \cdot \ln(1 + \frac{p}{100}) \quad | \div \ln(1 + \frac{p}{100})$
$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+\frac{p}{100})}$
Durch Einsetzen von Werten für p kann die benötigte Anzahl an Jahren errechnet werden, bis sich das Startkapital verdoppelt hat.

In der zweiten Zeile der Tabelle ist zum Vergleich das Ergebnis laut der Faustregel angegeben.

p	1	2	3	4	10
$Formel$	69.66	35	23.45	17.67	7.27
$Faustregel$	70	35	23.33	17.5	7

9. Zeige, dass $ld10$ keine rationale Zahl ist (es gibt keine ganzen Zahlen x, y mit $ld10 = x/y$).

Lösung:

(a) Es wird ein Widerspruchsbeweis verwendet, bei dem davon ausgegangen wird, dass die zu widerlegende Annahme wahr ist. Falls dann durch logische Schlüsse ein Widerspruch hergeltet werden kann muss die Annahme falsch sein, wodurch die zu beweisende Bedingung bewiesen ist.

Annahme: Es gibt ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$, für die gilt: $ld10 = \frac{x}{y}$

$ld10 = \frac{x}{y} \ |2^x$

$10 = 2^{\frac{x}{y}} \ |x^y$

$10^y = 2^x$

Dies is unmöglich, solange $x, y \neq 0$, was ausgeschlossen werden kann, da sonst $ld10 = 1$.

Somit ist $10^y \neq 2^x$ für alle ganzen Zahlen x, y. Damit ist die Annahme, dass $ld10 = x/y$ widerlegt, wodurch $ld10$ irrational ist.