Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.

- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.

- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.

- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorias and Example", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.

Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.

Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].

Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan mengklik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah

EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

```
- * Judul
- ** Sub-Judul
- latex: F (x) = \int_a^x f (t) \, dt
- mathjax: \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1
- maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
- http://www.euler-math-toolbox.de
- See: http://www.google.de | Google
- image: hati.png
- ---
```

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Judul

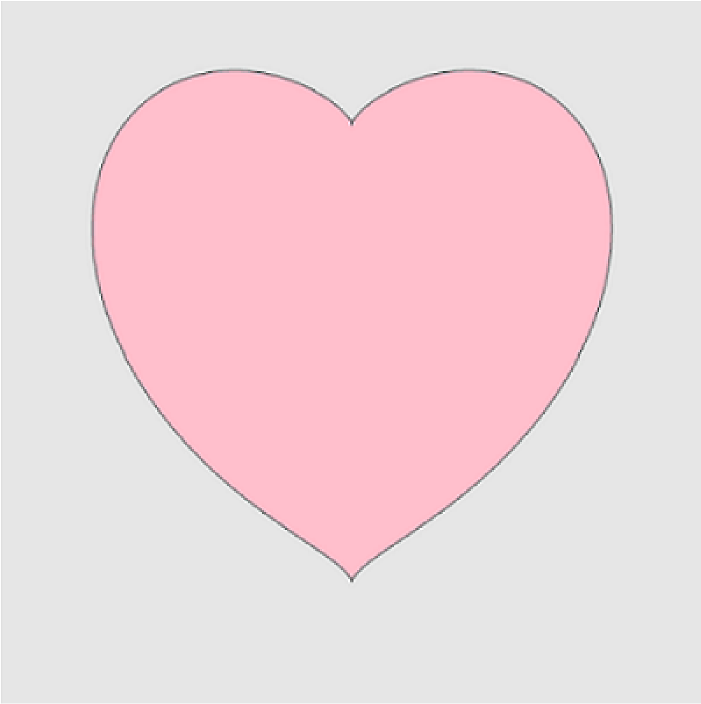
Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

$$\int x^3\ dx = C + \frac{x^4}{4}$$

http://www.euler-math-toolbox.de
See: http://www.google.de | Google



Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk "See:", tautan (URL)web lokal dapat digunakan.

Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

```
>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //
```

Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.

EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.

- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).

Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

```
>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r
```

```
4.90873852123
7.85398163397
```

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.

- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!
- Gunakan * untuk perkalian dan ˆ untuk eksponen (pangkat).
- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.
- ˆ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi * r ˆ 2 merupakan rumus luas lingkaran.
- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ˆ (2 ˆ 3).

Perintah r = 1.25 adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis r: = 1.25 jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.

Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

```
>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan  := sebagai ganti =
```

```
1.25
```

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

```
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))
```

```
0.707106781187
-1
0.5
```

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.

EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika.Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

```
>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi x^2-x+1=0
```

```
1.61803398875
2
```

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles  // 1 mil = 1609,344 m
```

```
1609.344
```

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar ($), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.

kilometer$:=1000;
km$:=kilometer$;
cm$:=0.01;
mm$:=0.001;
minute$:=60;
min$:=minute$;
minutes$:=minute$;
hour$:=60*minute$;
h$:=hour$;
hours$:=hour$;
day$:=24*hour$;
days$:=day$;
d$:=day$;
year$:=365.2425*day$;
years$:=year$;
y$:=year$;
inch$:=0.0254;
in$:=inch$;

feet$:=12*inch$;
foot$:=feet$;
ft$:=feet$;
yard$:=3*feet$;
yards$:=yard$;
yd$:=yard$;
mile$:=1760*yard$;
miles$:=mile$;
kg$:=1;
sec$:=1;
ha$:=10000;
Ar$:=100;
Tagwerk$:=3408;
Acre$:=4046.8564224;
pt$:=0.376mm;

Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

```
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

```
2.48548476895
101.6 mm
```

Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatrtamilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

```
>long pi
```

```
3.14159265359
```

```
>short pi
```

```
  3.1416
```

```
>shortest pi
```

```
     3.1
```

```
>fraction pi
```

```
  312689/99532
```

```
>short 1200*1.03^10, long E, longest pi
```

```
  1612.7
  2.71828182846
        3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah ”defformat” atau ”reset”.

```
>longestformat; pi, defformat; pi
```

```
3.141592653589793
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

```
0.392857142857
11/28
```

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan "..." di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan "..." di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^2/(a^2*4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

```
-0.138444501319
-3.61155549868
```

Menampilkan Daftar Variabe

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah ”listvar”.

```
>listvar
```

```
r                    1.25
a                    4
b                    15
c                    2
D                    1.73655549868123
```

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.

Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel ”d” berbeda dengan variabel ”D”.

Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan ”m” dengan mencari semua variabel yang berisi ”m$”.

```
>listvar m$
```

```
km$                    1000
cm$                    0.01
mm$                    0.001
nm$                    1853.24496
gram$                  0.001
m$                     1
hquantum$              6.62606957e-34
atm$                   101325
```

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah ”remvalue”.

```
>remvalue a,b,c,D
>D
```

```
Variable D not found!
Error in:
D ...
 ^
```

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.

Coba klik dua kali pada perintah "intrandom" berikut ini!

```
>intrandom(10,6)
```

```
[4,  2,  6,  2,  4,  2,  3,  2,  2,  6]
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi.

Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

```
>random(10)
```

```
[0.270906,  0.704419,  0.217693,  0.445363,  0.308411,  0.914541,
0.193585,  0.463387,  0.095153,  0.595017]
```

```
>normal(10)
```

```
[-0.495418,  1.6463,  -0.390056,  -1.98151,  3.44132,  0.308178,
-0.733427,  -0.526167,  1.10018,  0.108453]
```

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(,), antar baris dipisahkan oleh titik koma (;).

Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4,5,6,3,2,1]
```

```
[4,  5,  6,  3,  2,  1]
```

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
```

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.

Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:),seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1,  2,  3,  4,  5]
```

```
>w=0:0.1:1
```

```
[0,  0.1,  0.2,  0.3,  0.4,  0.5,  0.6,  0.7,  0.8,  0.9,  1]
```

```
>mean(w^2)
```

```
0.35
```

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.
complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
```

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!
>sqrt(complex(-1))
```

```
>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
2+3i
2
3
2-3i
0.982793723247
56.309932474
56.309932474
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

```
90
```

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
        ^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.

Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi "complex".

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

```
-1+0i
0+1i
```

Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).

Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.

Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>&(a+b)^2
```

```
                                    2
                             (b + a)
```

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

```
                           2             2
                          b  + 2 a b + a

                          (x + 2) (x + 3)
```

```
>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

```
                   2                         2
       - sqrt(b  - 4 a c) - b      sqrt(b  - 4 a c) - b
  [x = ----------------------, x = --------------------]
                2 a                        2 a
```

```
>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan
```

```
                                 2    2
                                a  - b
                                -------
                                 b + a

                                 a - b
```

```
>10! // nilai faktorial (modus EMT)
```

3628800

```
>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)
```

$$3628800$$

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda "::" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

```
>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)
```

```
[2,  2,  2,  5,  5,  5]
```

```
>:: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)
```

```
 3  3
2  5
```

```
>:: factor(20!)
```

```
 18  8  4  2
2   3  5  7  11 13 17 19
```

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

```
>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)
```

```
10
```

```
>::: binomial(m,4); // C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)
```

```
(m - 3) (m - 2) (m - 1) m
-------------------------
           24
```

```
>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x)sin(y)
```

```
cos(x) cos(y) - sin(x) sin(y)
```

```
>::: trigexpand(sin(x+y));
```

```
cos(x) sin(y) + sin(x) cos(y)
```

```
>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi trigonometri
```

```
                 4
sin(x) + cos (x)
----------------
          3
       cos (x)
```

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda "&=".

```
>p1 &= (x^3+1)/(x+1)
```

```
 3
x  + 1
------
x + 1
```

```
>&ratsimp(p1)
```

```
 2
x  - x + 1
```

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah "with".

```
>&p1 with x=3 // (3^3+1)/(3+1)
```

```
7
```

```
>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru
```

```
        3
(b + a)  + 1
------------
 b + a + 1
```

```
 2                  2
b  + (2 a - 1) b + a  - a + 1
```

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

```
   2       3
3 x       x  + 1
----- - --------
x + 1          2
        (x + 1)
```

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

```
   3      2
2 x  - 3 x  + 6 x
-----------------
        6
```

Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitunagn simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar ($) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima.
Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$&(a+b)^2
```

$$\left(b+a\right)^2$$

```
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)
```

$$\left(x+2\right)\,\left(x+3\right)$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} , x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} \right]$$

```
>$&(a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

$$a - b$$

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.

Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.

- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
- Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
- Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT.

Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

1. Hitunglah perkalian matriks A = [1,0,2;3,2,2;2,2,0] dan matriks B = [4,6,3;5,0,2;1,2,2]

```
>A = [1,0,2;3,2,2;2,2,0] ; B = [4,6,3;5,0,2;1,2,2] ; A*B
```

```
              4             0             6
             15             0             4
              2             4             0
```

2. Sebuah kue berbentuk lingkaran dengan jari-jari 7cm telah dimakan 1/4 bagian. Berapa luas kue yang tersisa?

```
>r=7; (3/4)*pi*r^2
```

```
115.453530019
```

3. Berapa nilai-nilai x yang memenuhi persamaan tersebut, 2x^2-14x+24=0

```
>$&solve(2*x^2-14*x+24,x)
```

$$[x = 3, x = 4]$$

4. Berapa nilai fungsi 2xˆ2-6x+5 jika nilai x adalah 4?

```
>x=4; 2x^2-6x+5
```

```
13
```

5. Nilai dari sin(135°)?

```
>sin(135°)
```

```
0.707106781187
```

6. Nilai dari sin(135°)+ cos(45°)?

```
>$&sin(135°)+cos(45°)
```

$$\sqrt{2}$$

7. Hitunglah penjumlahan matriks A = [3,4,7;8,5,6;2,7,5] dan matriks B = [0,6,4;5,4,8;6,9,7]

```
>A = [3,4,7;8,5,6;2,7,5] ; B = [0,6,4;5,4,8;6,9,7]; A+B
```

```
          3          10          11
         13           9          14
          8          16          12
```

8. Nilai-nilai x yang memenuhi persamaan x^2+4x-5=0?

```
>$&solve(x^2+4*x-5,x)
```

$$[x = -5, x = 1]$$

9. Berapakah luas permukaan donat yang berjari-jari 14cm dan jari-jari lingkaran dalamnya 5cm?

```
>R=14; r=5; pi*R^2 - pi*r^2
```

```
537.212343764
```

10. Nilai dari cos(210°)+ sin(150°)?

```
>cos(210°)+ sin(150°)
```

```
-0.366025403784
```

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Rasdiana Putri
NIM : 23030630033
Prodi : Matematika E

EMT untuk Perhitungan Aljabar

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:

- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9}$$

```
>$&6*x^(-3)*y^5*-7*x^2*y^(-9)
```

$$-\frac{42}{x\,y^4}$$

Menjabarkan:

$$(6x^{-3}+y^5)(-7x^2-y^{-9})$$

```
>$&showev('expand((6*x^(-3)+y^5)*(-7*x^2-y^(-9))))
```

$$expand\left(\left(-\frac{1}{y^9}-7\,x^2\right)\,\left(y^5+\frac{6}{x^3}\right)\right)=-7\,x^2\,y^5-\frac{1}{y^4}-\frac{6}{x^3\,y^9}-\frac{42}{x}$$

Baris Perintah

Baris perintah Euler dapat terdiri dari satu atau beberapa perintah Euler yang diakhiri dengan titik koma ";" atau koma ",". Titik koma berfungsi untuk mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan.

Baris perintah berikut ini hanya akan mencetak hasil dari ekspresi, bukan tugas atau perintah format.

```
>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

```
16.7551608191
```

Perintah harus dipisahkan dengan spasi. Baris perintah berikut ini akan mencetak dua hasilnya.

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhir sebelumnya
```

```
50.2654824574
100.530964915
```

Baris perintah dieksekusi sesuai dengan urutan saat pengguna menekan tombol enter. Jadi, Anda akan mendapatkan nilai baru setiap kali Anda mengeksekusi baris perintah kedua.

```
>x := 1;
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

```
0.540302305868
```

```
>x := cos(x)
```

```
0.857553215846
```

Jika dua baris terhubung dengan "..." maka dua baris tersebut akan selalu dieksekusi secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...
>x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

```
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
```

Ini juga merupakan cara yang baik untuk membagi perintah yang panjang menjadi dua baris atau lebih. Anda dapat menekan tombol Ctrl+Return untuk membagi baris menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau menekan Ctrl+Back untuk menggabungkan baris.

Untuk menyembunyikan multi-baris tekan Ctrl+L. Kemudian baris-baris berikutnya hanya akan terlihat jika salah satunya mempunyai fokus. Untuk menyembunyikan satu baris yang panjang, mulai baris pertama dengan "%+ ".

```
>%+ x=4+5; ...
```

Baris yang diawali dengan %% tidak akan terlihat sama sekali.

```
81
```

Euler mendukung perulangan dalam baris perintah, selama perulangan tersebut masuk dalam satu baris atau multi-baris. Dalam program, pembatasan ini tidak berlaku. Untuk informasi lebih lanjut, lihat pengantar berikut.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
1.41421356237
```

Tidak masalah untuk menggunakan multi-baris. Pastikan baris diakhiri dengan "...".

```
>x := 1.5; // comments go here before the ...
>repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~=x; ...
>   x := xnew; ...
>end; ...
>x,
```

```
1.41421356237
```

Struktur bersyarat juga berfungsi.

```
>if E^pi>pi^E; then "Thought so!", endif;
```

```
Thought so!
```

Saat Anda menjalankan perintah kursor dapat berada pada posisi manapun di baris perintah. Anda juga dapat kembali ke perintah sebelumnya atau ke perintah selanjutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat menekan bagian komentar di atas perintah untuk menuju ke perintah.

Saat Anda menggeser kursor di sepanjang baris, pasangan tanda kurung atau kurung buka dan kurung tutup akan disorot. Juga, perhatikan status baris. Setelah kurung buka fungsi sqrt(), baris status akan menampikan teks bantuan untuk fungsi tersebut. Eksekusi perintah dengan tombol return atau enter.

```
>sqrt(sin(10°)/cos(20°))
```

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Disana, Anda dapat memasukkan teks yang ingin dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela bantuan akan ditampilkan. Anda dapat menekan escape untuk menghapus baris, atau untuk menutup jendela bantuan.

Anda dapat mengklik dua kali pada perintah apapun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Coba klik dua kali perintah exp di bawah ini pada baris perintah.

```
>exp(log(2.5))
```

```
2.5
```

Anda juga dapat menyalin dan menempel di Euler. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift bersamaan dengan tombol kursor apapun. Selain itu, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

Sintak Dasar

Euler mengetahui fungsi matematika biasa. Seperti yang Anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi ke derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilai, atau gunakan fungsi rad(x). Fungsi akar kuadarat dijuluki sqrt di Euler. Tentu saja, xˆ(1/2) juga dapat digunakan.

Untuk mengatur variabel, gunakan "=" atau ":=". Demi kejelasan, pengantar ini menggunakan bentuk yang terakhir. Tanda spasi tidak menjadi masalah. Tetapi, spasi diharapkan ada diantara perintah.

Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan "," atau ";". Titik koma menekan output dari perintah. Pada akhir baris perintah "," diasumsikan, jika ";" tidak ada.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

```
30.65625
```

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk memasukkan

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3+4\log(0.6)}+\frac{1}{7}\right)$$

Anda harus mengatur tanda kurung yang benar dan gunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk mendapat bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e diberi nama E di EMT.

```
>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)
```

```
8.77908249441
```

Untuk menghitung ekspresi rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^2\pi$$

Anda harus memasukkannya dalam bentuk baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

```
23.2671801626
```

Letakkan tanda kurung di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu Anda dengan menyorot ekspresi yang diselesaikan oleh tanda kurung. Anda juga harus memasukkan "pi" untuk huruf Yunani pi.

Hasil dari perhitungan ini adalah bilangan floating point. Secara default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Di baris perintah berikut, kita juga belajar bagaimana kita dapat merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

```
0.47619047619
10/21
```

Perintah Euler dapar berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi terbuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, ekspresi harus berisi tanda kurung agar eksukusi dilakukan dengan urutan yang benar. Jika ragu, mengatur tanda kurung adalah ide yang bagus. Perhatikan bahwa EMT menampilkan tanda kurung buka dan kurung tutup saat mengedit baris perintah.

```
>(cos(pi/4)+1)^3*(sin(pi/4)+1)^2
```

```
14.4978445072
```

Operator numerik Euler meliputi

```
+ unary atau operator plus
- unary atau operator minus
*, /
. produk matriks
a^b untuk a positif atau bilangan bulat b (a**b juga dapat digunakan)
```

dan lebih banyak lagi.

Berikut adalah beberapa fungsi yang mungkin Anda butuhkan. Ada lebih banyak lagi.

```
sin,cos,tan,atan,asin,acos,rad,deg
log,exp,log10,sqrt,logbase
bin,logbin,logfac,mod,floor,ceil,round,abs,sign
conj,re,im,arg,conj,real,complex
beta,betai,gamma,complexgamma,ellrf,ellf,ellrd,elle
bitand,bitor,bitxor,bitnot
```

Beberapa perintah memiliki alias, contohnya ln untuk log.

```
>ln(E^2), arctan(tan(0.5))
```

```
2
0.5
```

```
>sin(30°)
```

```
0.5
```

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (kurung bulat), apabila ada keraguan tentang urutan eksekusi nya! Berikut ini tidak sama dengan (2^3)^4, yang merupakan default untuk 2^3^4 di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

```
>2^3^4, (2^3)^4, 2^(3^4)
```

```
2.41785163923e+24
4096
2.41785163923e+24
```

Tipe data utama dalam Euler adalah bilangan real. Real direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

```
>longest 1/3
```

```
      0.3333333333333333
```

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
>printdual(1/3)
```

```
 1.0101010101010101010101010101010101010101010101010101*2^-2
```

```
>printhex(1/3)
```

```
 5.5555555555554*16^-1
```

String dalam Euler didefinisikan dengan "...".

```
>"A string can contain anything."
```

```
A string can contain anything.
```

String dapat digabungkan dengan | atau dengan +. Ini juga berfungsi dengan angka, yang dikonversi menjadi string dalam kasus tesebut.

```
>"The area of the circle with radius " + 2 + " cm is " + pi*4 + " cm^2."
```

```
The area of the circle with radius 2 cm is 12.5663706144 cm^2.
```

Fungsi cetak juga mengonversi angka ke string. Fungsi cetak ini dapat mengambil sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk keluaran padat), dan secara optimal 1 unit.

```
>"Golden Ratio : " + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Ada string khusus yang tidak ada, yang tidak dicetak. Dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak penting. (Dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tidak memiliki pernyataan pengembalian).

```
>none
```

Untuk mengonversi string menjadi angka, cukup evaluasi saja. Ini berlaku juga untuk ekspresi (lihat di bawah).

```
>"1234.5"()
```

```
1234.5
```

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...].

```
>v:=["affe","charlie","bravo"]
```

```
affe
charlie
bravo
```

Vektor string kosong dilambangkan dengan [none]. Vektor string dapat digabungkan.

```
>w:=[none]; w|v|v
```

```
affe
charlie
bravo
affe
charlie
bravo
```

String dapat berisi Unicode karakter. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk membuat string seperti itu, gunakan u"..." dan salah satu entitas HTML.

String Unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u"&alpha; = " + 45 + u"&deg;" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
 = 45°
```

I

Dalam komentar, entitas yang sama seperti , dsb. dapat digunakan. Ini mungkin bisa menjadi alternatif yang cepat untuk Latex. (Detail lebih lanjut di komentar bawah)

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Funsi strtochar() akan mengenali string unicode, dan menerjemahkannya dengan benar.

```
>v=strtochar(u"&Auml; is a German letter")
```

```
[196,  32,  105,  115,  32,  97,  32,  71,  101,  114,  109,  97,  110,
32,  108,  101,  116,  116,  101,  114]
```

Hasilnya adalah vektor angka Unicode. Fungsi kebalikannya adalah chartoutf().

```
>v[1]=strtochar(u"&Uuml;")[1]; chartoutf(v)
```

```
Ü is a German letter
```

Fungsi utf() dapat menerjemahkan string dengan entitas dalam variabel menjadi sebuah string Unicode.

```
>s="We have &alpha;=&beta;."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
We have =.
```

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u"&#196;hnliches"
```

```
Ähnliches
```

Nilai Boolean

Nilai Boolean direpresentasikan dengan 1 = benar atau 0 = salah dalam Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya dengan angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

```
0
1
```

”and” adalah operator ”&&” dan ”or” adalah operator ”||”, seperti dalam bahasa C. (Kata ”and” dan ”or” hanya dapat digunakan dalam kondisi ”jika”.)

```
>2<E && E<3
```

```
1
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0,  0,  0,  0,  0,  1,  1,  1,  1,  1]
[6,  7,  8,  9,  10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi nonzeros() untuk mengekstrak elemen tertentu dari vektor. Sebagai contoh, kita menggunakan kondisional isprime (n).

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29,
31,  33,  35,  37,  39,  41,  43,  45,  47,  49,  51,  53,  55,  57,
59,  61,  63,  65,  67,  69,  71,  73,  75,  77,  79,  81,  83,  85,
87,  89,  91,  93,  95,  97,  99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47,
53,  59,  61,  67,  71,  73,  79,  83,  89,  97]
```

Format default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kita melihat format default, kita mengatur ulang formatnya.

```
>defformat; pi
```

```
3.14159265359
```

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk angka ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat jumlah digit secara lengkap, gunakan perintah ”longestdormat”, atau kita menggunakan operator ”longest” untuk menampilkan hasil dalam format terpanjang.

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

Berikut adalah representasi heksadesimal internal dari bilangan ganda.

```
>printhex(pi)
```

```
3.243F6A8885A30*16^0
```

Format output dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

```
>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)
```

```
      0.33333
      3.14159
      0.84147
```

Standarnya adalah format(12).

```
>format(12); 1/3
```

```
  0.333333333333
```

Fungsi seperti ”shortestformat”, ”shortformat”, ”longformat” bekerja untuk vekor dengan cara berikut.

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
    0.66     0.2    0.89    0.28    0.53    0.31    0.44     0.3
    0.28    0.88    0.27     0.7    0.22    0.45    0.31    0.91
    0.19    0.46   0.095     0.6    0.43    0.73    0.47    0.32
```

Format default untuk skalar adalah format(12). Tetapi ini dapat diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

```
3.1416
```

Fungsi "longestformat" mengatur format skalar juga.

```
>longestformat; pi
```

```
3.141592653589793
```

Sebagai referensi, berikut adalah daftar format output yang paling penting.

```
shortestformat shortformat longformat, longestformat
format(length,digits) goodformat(length)
fracformat(length)
defformat
```

Akurasi internal dari EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Angka disimpan dalam format internal ini.

Tetapi format output EMT dapat diatur dengan cara fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

```
  3.141592653589793
```

```
>format(10,5); pi
```

```
    3.14159
```

Standarnya adalah defformat().

```
>defformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator "longest" akan mencetak semua digit angka yang valid.

```
>longest pi^2/2
```

```
        4.934802200544679
```

Ada juga operator pendek untuk mencetak hasil dalam formal pecahan. Kita sudah menggunakannya di atas.

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

```
25/12
```

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, nilai 0.1 tidak akan direpresentasikan dengan tepat. Kesalahan bertambah sedikit, seperti yang Anda dapat lihat dalam perhitungan berikut ini.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
 -1.110223024625157e-16
```

Tetapi dengan default "longformat" Anda tidak akan melihat hal ini. Untuk kenyamanan, output dari angka yang sangat kecil adalah 0.

```
>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
0
```

Sting atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung setelah ekspresi. Jika Anda bermaksud menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya "fx" atau "fxy" dsb. Ekspresi lebih diutamakan daripada fungsi.

Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

```
>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()
```

```
      12.56637061435917
```

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan tersebut. Parameter tambahan dapat ditambahkan dengan menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)
```

```
-0.919535764538
```

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, walaupun ada variabel dalam fungsi dengan nama yang sama. (Jika tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang memanggil fungsi tersebut).

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
>f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

```
36
```

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk "at" daripada nilai global, Anda perlu menambahkan "att=value".

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
>f("at*x^2",3,5)
```

```
45
```

Untuk referensi, kami menyatakan bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi kita dapat membuat contoh di atas sebagai berikut.

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
>f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

```
45
```

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti dengan fungsi.
Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global akan menghapus variabel ini untuk menghindari kebingungan antara ekspresi simbolik dan fungsi.

```
>f &= 5*x;
>function f(x) := 6*x;
>f(2)
```

```
12
```

Sesuai dengan konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy, dsb. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

$$x^x\ (\log x + 1)$$

Bentuk khusus dari sebuah ekspresi memungkinkan variabel apa pun sebagai parameter tanpa nama untuk evaluasi ekspresi, bukan hanya "x", "y", dsb. Untuk itu, mulailah ekspresi dengan "@(variabel)..."

```
>"@(a,b) a^2+b^2", %(4,5)
```

```
@(a,b) a^2+b^2
41
```

Hal ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang membutuhkan ekspresi dalam "x".

Cara paling dasar untuk mendefinisikan fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolis atau numerik. Jika variabel utamanya adalah x, ekspresi dapat dievaluasi seperti fungsi.

Seperti yang Anda lihat dalam contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

```
>fx &= x^3-a*x;  ...
>a=1.2; fx(0.5)
```

```
-0.475
```

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx(0.5,a=1.1)
```

```
-0.425
```

Sebuah ekspresi tidak perlu berbentuk simbolik. Hal ini diperlukan, jika ekspresi berisi fungsi-fungsi, yang hanya diketahui di kernel numerik, bukan di Maxima.

Matematika Simbolik

EMT melakukan matematika simbolik dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut, atau telusuri referensi untuk Maxima. Para ahli di Maxima harus memperthatikan bahwa ada perbedaan sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks default ekspresi simbolik di EMT.

Matematika simbolik diintegrasikan dengan mulus ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apapun yang dimulai dengan & adalah ekspresi simbolik. Ekspresi ini akan dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika "tak terbatas" yang dapat menangani angka yang sangat besar.

```
>$&44!
```

$$2658271574788448768043625811014615890319638528000000000$$

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar dengan tepat. Mari kita hitung

$$C(44,10) = \frac{44!}{34! \cdot 10!}$$

```
>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)
```

$$2481256778$$

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk hal ini(seperti halnya bagian numerik di EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

$$2481256778$$

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali pada fungsi tersebut. Contohnya, coba klik dua kali pada "&binomial" di baris perintah sebelumnya. Ini akan membuka dokumentasi Maxima yang disediakan oleh pembuat program tersebut.

Anda akan mengetahui bahwa perintah-perintah berikut ini juga dapat digunakan

$$C(x,3) = \frac{x!}{(x-3)!3!} = \frac{(x-2)(x-1)x}{6}$$

```
>$binomial(x,3) // C(x,3)
```

$$\frac{(x-2)\,(x-1)\,x}{6}$$

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu, gunakan "with".

```
>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)
```

$$120$$

Dengan begitu, Anda dapat menggunakan solusi dari sebuah persamaan dalam persamaan lain.

Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasannya adalah bendera simbolik khusus dalam string.

Seperti yang telah Anda lihat pada contoh sebelumnya dan contoh berikut, jika Anda telah menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi simbolik dengan Latex. Jika tidak, perintah berikut ini akan mengeluarkan pesan error.

Untuk mencetak ekspresi simbolik dengan LaTeX, gunakan $ di depan & (atau Anda dapat menghilangkan &) sebelum perintah. Jangan jalankan perintah Maxima dengan $, jika Anda tidak meginstal LaTeX.

```
>$(3+x)/(x^2+1)
```

$$\frac{x+3}{x^2+1}$$

Ekspresi simbolik diuraikan oleh Euler. Jika Anda membutuhkan sintaks yang kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat menyatakan ekspresi dalam "...". Menggunakan lebih dari satu ekspresi sederhana dimungkinkan, tetapi sangat tidak disarankan.

```
>&"v := 5; v^2"
```

25

Untuk kelengkapan, kami menyatakan bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, tetapi perlu diapit dengan tanda kutip. Selain itu, akan jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada saat kompilasi jika memungkinkan.

```
>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(%,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

$$4\,\left(x+1\right)^3$$

Sekali lagi, % mengacu pada hasil sebelumnya.

Untuk mempermudah, kami menyimpan solusi ke dalam sebuah variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan "&=".

```
>fx &= (x+1)/(x^4+1); $&fx
```

$$\frac{x+1}{x^4+1}$$

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&factor(diff(fx,x))
```

$$\frac{-3\,x^4-4\,x^3+1}{\left(x^4+1\right)^2}$$

Masukan langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan "::". Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT(disebut "mode kompatibilitas").

```
>&factor(20!)
```

2432902008176640000

```
>::: factor(10!)
```

```
                     8  4  2
                    2  3  5  7
```

```
>:: factor(20!)
```

```
                  18  8  4  2
                 2   3  5  7  11 13 17 19
```

Jika Anda ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli Maxima. Anda dapat melakukannya dengan ":::"

```
>::: av:g$ av^2;
```

```
                          2
                         g
```

```
>fx &= x^3*exp(x), $fx
```

```
 3  x
x  E
```

$$x^3\,e^x$$

Variabel tersebut dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa pada perintah berikut ini, sisi kanan dari &= dievaluasi sebelum penugasan ke Fx.

```
>&(fx with x=5), $%, &float(%)
```

```
     5
125 E
```

$$125\,e^5$$

```
18551.64488782208
```

```
>fx(5)
```

```
18551.6448878
```

Untuk mengevaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator "with".

Baris perintah berikut mendemonstrasikan bahwa Maxima dapat mengevaluasi sebuah ekspresi secara numerik dengan float().

```
>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)
```

```
                  10         5
            1000 E   - 125 E
```

```
            2.20079141499189e+7
```

```
>$factor(diff(fx,x,2))
```

$$x\,\left(x^2+6\,x+6\right)\,e^{x}$$

Untuk mendapatkan kode Latex untuk sebuah ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

```
>tex(fx)
```

```
x^3\,e^{x}
```

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti halnya ekspresi numerik.

```
>fx(0.5)
```

```
0.206090158838
```

Dalam ekspresi simbolik, hal ini tidak dapat dilakukan, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintak "with" (bentuk yang lebih baik dari perintah at(...) pada Maxima).

```
>$&fx with x=1/2
```

$$\frac{\sqrt{e}}{8}$$

Penugasan ini juga bisa bersifat simbolik.

```
>$&fx with x=1+t
```

$$\left(t+1\right)^3\,e^{t+1}$$

Perintah solve memecahkan ekspresi simbolik untuk sebuah variabel di Maxima. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>$&solve(x^2+x=4,x)
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{17}-1}{2},x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$$

Bandingkan dengan perintah "solve" numerik di Euler, yang membutuhkan nilai awal, dan secara opsional nilai target.

```
>solve("x^2+x",1,y=4)
```

```
1.56155281281
```

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan evaluasi hasil simbolik. Euler akan membaca tugas x= dsb. Jika Anda tidak membutuhkan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga dapat membiarkan Maxima menemukan nilai numeriknya.

```
>sol &= solve(x^2+2*x=4,x); $&sol, sol(), $&float(sol)
```

$$\left[x=-\sqrt{5}-1,x=\sqrt{5}-1\right]$$

```
[-3.23607,  1.23607]
```

$$[x = -3.23606797749979, x = 1.23606797749979]$$

Untuk mendapatkan solusi simbolik yang spesifik, seseorang dapat menggunakan "with" dan indeks.

```
>$&solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with %[2]; $&x2
```

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>sol &= solve([x+y=3,x^2+y^2=5],[x,y]); $&sol, $&x*y with sol[1]
```

$$2$$

Ekspresi simboliK dapat memiliki bendera, yang menunjukkan perlakuan khusus di Maxima. Beberapa flag dapat digunakan sebagai perintah juga, namun ada yang tidak. Bendera ditambahkan dengan "|" (bentuk yang lebih bagus dari "ev(...,flags)")

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan
```

$$\frac{3\,x^2}{x+1}-\frac{x^3-1}{\left(x+1\right)^2}$$

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan
```

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{x^2+2\,x+1}$$

```
>$&factor(%)
```

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{\left(x+1\right)^2}$$

Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang didefinisikan dengan perintah "fuction". Ini bisa berupa fungsi satu baris atau fungsi multibaris.
Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik didefinisikan oleh ":="

```
>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Sebagai gambaran umum, kami menunjukkan semua definisi yang mungkin untuk fungsi satu baris. Suatu fungsi dapat dievaluasi seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

```
>f(2)
```

```
4.472135955
```

Fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor, dengan mematuhi bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi ini adalah vektor.

```
>f(0:0.1:1)
```

```
[0,  0.100499,  0.203961,  0.313209,  0.430813,  0.559017,  0.699714,
0.854459,  1.0245,  1.21083,  1.41421]
```

Fungsi dapat diplot. Alih-alih ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsi.

Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus disediakan dalam bentuk string.

```
>solve("f",1,y=1)
```

```
0.786151377757
```

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi built-in, Anda harus menambahkan kata kunci "overwrite". Menimpa fungsi bawaan berbahaya dan dapat menimbulkan masalah untuk fungsi lain yang bergantung pada fungsi tersebut.

Anda masih dapat memanggil fungsi bawaan sebagai "_...", jika fungsi tersebut dalam inti Euler.

```
>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redine sine in degrees
>sin(45)
```

```
0.707106781187
```

Kita sebaiknya menghapus redefinisi tentang sin.

```
>forget sin; sin(pi/4)
```

```
0.707106781187
```

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

```
>function f(x,a=1) := a*x^2
```

Menghilangkan parameter ini menggunakan nilai default.

```
>f(4)
```

```
16
```

Menetapkannya akan menimpa nilai default.

```
>f(4,5)
```

```
80
```

Parameter yang ditetapkan juga menimpanya. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4,a=1)
```

```
16
```

Jika variabel bukan parameter, maka variabel tersebut adalah global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2
>a=6; f(2)
```

```
24
```

Tetapi parameter yang ditetapkan akan menggantikan nilai global.

Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditentukan sebelumnya, argumen tersebut harus dideklarasikan dengan ":="!

```
>f(2,a:=5)
```

```
20
```

Fungsi simbolik didefinisikan dengan "&=". Fungsi-fungsi ini didefinisikan dalam Euler dan Maxima, dan dapat digunakan di kedua bahasa tersebut. Ekspresi pendefinisian dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

$$x^3 - x\,e^{-x}$$

Fungsi simbolik dapat digunakan di ekspresi simbolik.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

$$\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{16}{3}$$

$$\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{16}{3}$$

Fungsi juga dapat digunakan di ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menginterpretasikan semua yang ada di fungsi.

```
>g(5+g(1))
```

```
178.635099908
```

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolik lainnya.

```
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: mengintegralkan
```

$$\frac{e^{-c}\,\left(c^4\,e^{c}+4\,c+4\right)}{4}$$

```
>solve(&g(x),0.5)
```

```
0.703467422498
```

Hal berikut ini juga dapat digunakan, karena Euler menggunakan ekspresi simbolik dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolik g, dan jika ada fungsi simbolik g.

```
>solve(&g,0.5)
```

```
0.703467422498
```

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
```

$$\left(2\,x-1\right)^{n}$$

```
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
```

$$(x+2)^n$$

```
>$&P(x,4), $&expand(%)
```

$$16\,x^4-32\,x^3+24\,x^2-8\,x+1$$

```
>P(3,4)
```

625

```
>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)
```

$$16\,x^4-31\,x^3+30\,x^2+4\,x+9$$

```
>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

```
>$&P(x,4)*Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$\left(x+2\right)^3\,\left(2\,x-1\right)^4$$

```
>$&P(x,4)/Q(x,1), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$\frac{\left(2\,x-1\right)^4}{x+2}$$

$$\frac{16\,x^4}{x+2}-\frac{32\,x^3}{x+2}+\frac{24\,x^2}{x+2}-\frac{8\,x}{x+2}+\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{(2x-1)^4}{x+2}$$

```
>function f(x) &= x^3-x; $&f(x)
```

$$x^3 - x$$

Dengan &=, fungsi ini bersifat simbolik, dan dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&integrate(f(x),x)
```

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

Dengan := fungsinya numerik. Contoh yang baik adalah integral pasti seperti

$$f(x) = \int_1^x t^t \, dt,$$

Yang tidak dapat dievaluasi secara simbolik

Jika kita mendefinisikan ulang fungsi tersebut dengan kata kunci "map", maka fungsi tersebut dapat digunakan untuk vektor x. Secara internal, fungsi dipanggil untuk semua nilai x satu kali, dan hasilnya disimpan dalam sebuah vektor.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
>f(0:0.5:2)
```

```
[-0.783431,  -0.410816,  0,  0.676863,  2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang, fungsi ini dapat dipanggil dengan atau tanpa parameter "base".

```
>mylog(100), mylog(2^6.7,2)
```

```
2
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>mylog(E^2,base=E)
```

```
2
```

Seringkali, kita ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk elemen individual di tempat lain. Hal ini dimungkinkan dengan parameter vektor.

```
>function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)
```

$$y^2 - x\,y + y + x^2$$

Fungsi simbolik seperti itu dapat digunakan untuk variabel simbolik.

Tetapi fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

```
>v=[3,4]; f(v)
```

```
17
```

Ada juga fungsi yang murni simbolik, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

```
>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial kedua
```

```
diff(expr, y, 2) + diff(expr, x, 2)
```

```
>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(%,x,y)
```

$$0$$

Tetapi tentu saja, semua itu dapat digunakan dalam ekspresi simbolik atau dalam definifi fungsi simbolik.

```
>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); $&f(x,y)
```

$$10\,\left(y^2+x\right)^3\,\left(9\,y^2+x+2\right)$$

Untuk meringkas

- &= mendefinisikan fungsi simbolik,
- := mendefinisikan fungsi numerik,
- &&= mendefinisikan fungsi simbolik murni.

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolik.

Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi solve(). Fungsi ini memerlukan nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, solve() menggunakan metode secant.

```
>solve("x^2-2",1)
```

```
1.41421356237
```

Ini juga bisa digunakan untuk ekspresi simbolik. Perhatikan fungsi berikut ini.

```
>$&solve(x^2=2,x)
```

$$\left[x=-\sqrt{2},x=\sqrt{2}\right]$$

```
>$&solve(x^2-2,x)
```

$$\left[x=-\sqrt{2},x=\sqrt{2}\right]$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c=0,x)
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} , x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}\right]$$

```
>$&solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])
```

$$\left[\left[x=-\frac{c\,e}{b\,(d-5)-a\,e} , y=\frac{c\,(d-5)}{b\,(d-5)-a\,e}\right]\right]$$

```
>px &= 4*x^8+x^7-x^4-x; $&px
```

$$4\,x^8+x^7-x^4-x$$

Sekarang kita mencari titik, di mana polinomialnya adalah 2. Dalam solve(), nilai target default y=0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.
Kami menggunakan y=2 dan memeriksa dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

```
0.966715594851
2
```

Memecahkan ekspresi simbolik dalam bentuk simbolik mengembalikan daftar solusi. Kami menggunakan pemecah simbolik solve() yang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

$$\left[x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} , x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$$

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti sebuah ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
      -0.6180339887498949       1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah "with".

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

Memecahkan sistem persamaan secara simbolik dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan pemecah simbolik solve(). Jawabannya adalah daftar daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])
```

$$[[x=-1,y=3],[x=1,y=1],[x=0,y=2]]$$

Fungsi f() dapat melihat variabel global. Tetapi seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.

$$a^x - x^a = 0.1$$

dengan a=3.

```
>function f(x,a) := x^a-a^x;
```

Salah satu cara untuk meneruskan parameter tambahan ke f() adalah dengan menggunakan sebuah daftar yang berisi nama fungsi dan parameter nya (cara lainnya adalah dengan menggunakan parameter titik koma).

```
>solve({{"f",3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Ini juga dapat dilakukan dengan ekspresi. Namun, daftar elemen bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar dalam tutorial tentang sintak EMT).

```
>solve({{"x^a-a^x",a=3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah "load(fourier_elim)" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
  ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1>0],[x]) // x^2-1 > 0
```

$$[1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1<0],[x]) // x^2-1 < 0
```

$$[-1 < x, x < 1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^-1 <> 0
```

$$[-1 < x, x < 1] \vee [1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x # 6],[x])
```

$$[x < 6] \vee [6 < x]$$

```
>$&fourier_elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian
```

$$emptyset$$

```
>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R
```

$$universalset$$

```
>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])
```

$$\left[1 < x, x^2 + x + 1 > 0\right] \vee \left[x < 1, -x^2 - x - 1 > 0\right]$$

```
>$&fourier_elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal
```

$$[1-2\,\cos x>0]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaan
```

$$[y-5<x,x<y+7,10<y]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])
```

$$[max\left(10,x-7\right)<y,y<x+5,5<x]$$

```
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y >8),[x,y])
```

$$\left[y+8<x,x<5-y,y<-\frac{3}{2}\right]$$

```
>$&fourier_elim(((x + y < 5) and x < 1) or  (x - y >8),[x,y])
```

$$[y+8<x] \vee [x<min\,(1,5-y)]$$

```
>&fourier_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])
```

```
        [6 < x, x < 8, y < - 11] or [8 < x, y < - 11]
 or [x < 8, 13 < y] or [x = y, 13 < y] or [8 < x, x < y, 13 < y]
 or [y < x, 13 < y]
```

```
>$&fourier_elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])
```

$$[x=12] \vee [12<x] \vee [x<9]$$

Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisikan diskusi terperinci tentang bahasa matriks Euler.

Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemennya dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

```
>A=[1,2;3,4]
```

```
            1             2
            3             4
```

Produk matriks dilambangkan dengan titik.

```
>b=[3;4]
```

```
            3
            4
```

```
>b' // transpose b
```

```
  [3,  4]
```

```
>inv(A) //inverse A
```

```
          -2             1
         1.5          -0.5
```

```
>A.b //perkalian matriks
```

```
          11
          25
```

```
>A.inv(A)
```

```
           1             0
           0             1
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah bahwa semua fungsi dan operator bekerja elemen untuk elemen.

```
>A.A
```

```
           7            10
          15            22
```

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

1	4
9	16

```
>A.A.A
```

37	54
81	118

```
>power(A,3) //perpangkatan matriks
```

37	54
81	118

```
>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak
```

1	1
1	1

```
>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor kolom)
```

```
     0.333333      0.666667
         0.75             1
```

```
>A\b // hasilkali invers A dan b, A^(-1)b
```

```
           -2
          2.5
```

```
>inv(A).b
```

```
           -2
          2.5
```

```
>A\A   //A^(-1)A
```

```
            1             0
            0             1
```

```
>inv(A).A
```

```
              1             0
              0             1
```

```
>A*A //perkalin elemen-elemen matriks seletak
```

```
              1             4
              9            16
```

Ini bukan produk matriks, tetapi perkalian elemen dengan elemen. Hal yang sama berlaku untuk vektor.

```
>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor
```

```
              9
             16
```

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, maka akan diperluas dengan cara alami.

```
>2*A
```

```
          2             4
          6             8
```

Sebagai contoh, jika operan adalah vektor kolom, elemen-elemennya diterapkan ke semua baris A

```
>[1,2]*A
```

```
          1             4
          3             8
```

Jika itu adalah vektor baris, itu diterapkan ke semua kolom A.

```
>A*[2,3]
```

```
          2             6
          6            12
```

Kita dapat membayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah digandakan untuk membentuk matriks dengan ukuran yang sama dengan A.

```
>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kali (baris)
```

```
             1             2
             1             2
```

```
>A*dup([1,2],2)
```

```
             1             4
             3             8
```

Ini juga berlaku untuk dua vektor di mana salah satunya adalah vektor baris dan yang lainnya adalah vektor kolom. Kami menghitung i*j untuk i,j dari 1 hingga 5. Caranya adalah dengan mengalikan 1:5 dengan transposnya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan sebuah tabel nilai.

```
>(1:5)*(1:5)' // hasilkali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom
```

```
             1             2             3             4             5
             2             4             6             8            10
             3             6             9            12            15
             4             8            12            16            20
             5            10            15            20            25
```

Sekali lagi, ingatlah bahwa ini bukan produk matriks!

```
>(1:5).(1:5)' // hasilkali vektor baris dan vektor kolom
```

```
55
```

```
>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya
```

```
55
```

Bahkan operator seperti $<$ atau $==$ bekerja dengan cara yang sama.

```
>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6
```

```
[1,  1,  1,  1,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Contohnya, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi sum().

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

```
5
```

Euler memiliki operator perbandingan, seperti "==", yang memeriksa kesetaraan.

Kita mendapatkan vektor 0 dan 1, di mana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

```
[0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Dari vektor seperti itu, "nonzeros" memilih elemen bukan nol.

Dalam hal ini, kita mendapatkan indeks semua elemen yang lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[8,  9,  10]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai yang sesuai dalam t.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[64,  81,  100]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat dari angka 1 hingga 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4,  48,  95,  139,  147,  191,  238,  282,  290,  334,  381,  425,
433,  477,  524,  568,  576,  620,  667,  711,  719,  763,  810,  854,
862,  906,  953,  997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk perhitungan bilangan bulat. EMT menggunakan floating point presisi ganda secara internal. Namun, hal ini sering kali sangat berguna.

Kita dapat memeriksa bilangan prima. Mari kita cari tahu, berapa banyak kuadrat ditambah 1 yang merupakan bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

```
112
```

Fungsi bukan nol() hanya berfungsi untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

```
      0.765761      0.401188      0.406347      0.267829
       0.13673      0.390567      0.495975      0.952814
      0.548138      0.006085      0.444255      0.539246
```

Ini mengembalikan indeks elemen yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

```
          1             4
          2             1
          2             2
          3             2
```

Indeks ini dapat digunakan untuk menetapkan elemen ke suatu nilai.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

```
   0.765761      0.401188      0.406347             0
          0             0      0.495975      0.952814
   0.548138             0      0.444255      0.539246
```

Fungsi mset() juga dapat mengatur elemen-elemen pada indeks ke entri-entri matriks yang lain.

```
>mset(A,k,-random(size(A)))
```

```
   0.765761      0.401188      0.406347     -0.126917
  -0.122404     -0.691673      0.495975      0.952814
   0.548138     -0.483902      0.444255      0.539246
```

Dan dimungkinkan untuk mendapatkan elemen-elemen dalam vektor.

```
>mget(A,k)
```

```
[0.267829,  0.13673,  0.390567,  0.006085]
```

Fungsi lain yang berguna adalah extrema, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

```
>ex=extrema(A)
```

```
       0.267829             4      0.765761             1
        0.13673             1      0.952814             4
       0.006085             2      0.548138             1
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal dalam setiap baris.

```
>ex[,3]'
```

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Ini, tentu saja, sama dengan fungsi max().

```
>max(A)'
```

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Tetapi dengan mget(), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen-elemen pada posisi yang sama dari matriks lain.

```
>j=(1:rows(A))'|ex[,4], mget(-A,j)
```

```
             1             1
             2             4
             3             1
[-0.765761,  -0.952814,  -0.548138]
```

Fungsi Matriks Lainnya (Membangun Matriks)

Untuk membangun sebuah matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, kolom yang lebih pendek akan diisi dengan 0.

```
>v=1:3; v_v
```

```
              1             2             3
              1             2             3
```

Demikian juga, kita dapat melampirkan matriks ke matriks lain secara berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

```
       0.032444     0.0534171      0.595713      0.564454             1
        0.83916      0.175552      0.396988       0.83514             2
      0.0257573      0.658585      0.629832      0.770895             3
```

Jika keduanya tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0.

Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan real yang dilampirkan pada matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan real tersebut.

```
>A|1
```

```
    0.032444    0.0534171     0.595713     0.564454            1
     0.83916     0.175552     0.396988      0.83514            1
   0.0257573     0.658585     0.629832     0.770895            1
```

Dimungkinkan untuk membuat matriks vektor baris dan kolom.

```
>[v;v]
```

```
           1            2            3
           1            2            3
```

```
>[v',v']
```

```
           1            1
           2            2
           3            3
```

Tujuan utama dari ini adalah untuk menginterpretasikan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

```
>"[x,x^2]"(v')
```

```
              1             1
              2             4
              3             9
```

Untuk mendapatkan ukuran A, kita dapat menggunakan fungsi berikut ini.

```
>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)
```

```
2
4
[2,  4]
4
```

Untuk vektor, terdapat length().

```
>length(2:10)
```

```
9
```

Ada banyak fungsi lain, yang menghasilkan matriks.

```
>ones(2,2)
```

```
              1             1
              1             1
```

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan angka selain 1, gunakan yang berikut ini.

```
>ones(5)*6
```

```
  [6,  6,  6,  6,  6]
```

Matriks angka acak juga dapat dibuat dengan acak (distribusi seragam) atau normal (distribusi Gauß).

```
>random(2,2)
```

```
        0.66566      0.831835
          0.977      0.544258
```

Berikut ini adalah fungsi lain yang berguna, yang merestrukturisasi elemen-elemen matriks menjadi matriks lain.

```
>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen2 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3
```

```
              1             2             3
              4             5             6
              7             8             9
```

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan fungsi ini dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep(), yang mengulang vektor sebanyak n kali.

```
>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))
```

Mari kita uji.

```
>rep(1:3,5)
```

```
  [1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3]
```

Fungsi multdup() menduplikasi elemen-elemen sebuah vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
[1,  1,  1,  1,  1,  2,  2,  2,  2,  2,  3,  3,  3,  3,  3]
[1,  1,  2,  2,  2,  3,  3]
```

Fungsi flipx() dan flipy() membalik urutan baris atau kolom dari matriks. Misalnya, fungsi flipx() membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
[5,  4,  3,  2,  1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotleft() dan rotright().

```
>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
[2,  3,  4,  5,  1]
```

Fungsi khusus adalah drop(v,i), yang menghapus elemen-elemen dengan indeks di i dari vektor v.

```
>drop(10:20,3)
```

```
[10,  11,  13,  14,  15,  16,  17,  18,  19,  20]
```

Perhatikan bahwa vektor i dalam drop(v,i) merujuk pada indeks elemen-elemen dalam v, bukan nilai dari elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda harus menemukan elemen-elemen tersebut terlebih dahulu. Fungsi indexof(v,x) dapat digunakan untuk menemukan elemen x dalam vektor terurut v.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
[0,  5,  0,  6,  0,  0,  0,  7,  0,  8,  0]
[2,  3,  5,  7,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya menyertakan indeks di luar rentang (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak diurutkan.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1,  2,  3,  4,  6,  8,  9,  10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau untuk menghasilkan matriks diagonal. Kita mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

Kemudian, kita menetapkan diagonal bawah (-1) ke 1:4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	2	1	0	0
0	0	3	1	0
0	0	0	4	1

Perhatikan bahwa kita tidak mengubah matriks A. Kita mendapatkan sebuah matriks baru sebagai hasil dari setdiag().

Berikut adalah sebuah fungsi yang mengembalikan sebuah matriks tri-diagonal.

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
>tridiag(5,1,2,3)
```

2	3	0	0	0
1	2	3	0	0
0	1	2	3	0
0	0	1	2	3
0	0	0	1	2

Diagonal sebuah matriks juga dapat diekstrak dari matriks tersebut. Untuk mendemonstrasikan ini, kami merestrukturisasi vektor 1:9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9,3,3)
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sekarang kita dapat mengekstrak diagonal.

```
>d=getdiag(A,0)
```

```
[1,  5,  9]
```

Sebagai contoh, kita dapat membagi matriks dengan diagonalnya. Bahasa matriks memperhatikan bahwa vektor kolom d diterapkan ke matriks baris demi baris.

```
>fraction A/d'
```

```
          1           2           3
        4/5           1         6/5
        7/9         8/9           1
```

Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler juga dapat digunakan untuk input matriks dan vektor, kapan pun ini masuk akal.

Sebagai contoh, fungsi sqrt() menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

```
[1,  1.41421,  1.73205]
```

Jadi, Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot sebuah fungsi (alternatif lainnya menggunakan ekspresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampikan
```

Dengan ini dan operator titik dua a:delta:b, vektor nilai fungsi dapat dihasilkan dengan mudah.

Pada contoh berikut, kita membuat vektor nilai t[i] dengan jarak 0.1 dari -1 hingga 1. Kemudian kita membuat vektor nilai dari fungsi.

$$s = t^3 - t$$

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

```
 [0,  0.171,  0.288,  0.357,  0.384,  0.375,  0.336,  0.273,  0.192,
 0.099,  0,  -0.099,  -0.192,  -0.273,  -0.336,  -0.375,  -0.384,
 -0.357,  -0.288,  -0.171,  0]
```

EMT memperluas operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Sebagai contoh, vektor kolom dikalikan vektor baris menjadi matriks, jika operator diterapkan. Berikut ini, v' adalah vektor yang ditransposisikan (vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

```
         1         2         3         4         5
         2         4         6         8        10
         3         6         9        12        15
         4         8        12        16        20
         5        10        15        20        25
```

Perhatikan, bahwa ini sangat berbeda dari produk matriks. Produk matriks dilambangkan dengan titik "." di EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

```
55
```

Secara default, vektor baris dicetak dalam format yang ringkas.

```
>[1,2,3,4]
```

```
[1,  2,  3,  4]
```

Untuk matriks, operator khusus . menyatakan perkalian matriks, dan A' menyatakan transposisi. Matriks 1x1 dapat digunakan seperti halnya bilangan real.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

```
5
25
```

Untuk mentransposisikan matriks, kita menggunakan apostrophe.

```
>v=1:4; v'
```

```
1
2
3
4
```

Jadi kita dapat menghitung matriks A dikali vektor b.

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

```
30
70
```

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi v'.v berbeda dengan v.v'.

```
>v'.v
```

```
1         2         3         4
2         4         6         8
3         6         9        12
4         8        12        16
```

v.v' menghitung norma v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah vektor 1x1, yang berfungsi seperti bilangan real.

```
>v.v'
```

```
30
```

Ada juga fungsi norm (bersama dengan banyak fungsi Aljabar Linear lainnya).

```
>norm(v)^2
```

```
30
```

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.

Berikut ini adalah ringkasan aturannya.

- Sebuah fungsi yang diterapkan pada vektor atau matriks diterapkan pada setiap elemen.

- Operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan secara berpasangan pada elemen-elemen matriks.

- Jika dua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diperluas dengan cara yang masuk akal, sehingga memiliki ukuran yang sama.

Sebagai contoh, nilai skalar dikalikan vektor mengalikan nilai tersebut dengan setiap elemen vektor. Atau matriks dikali vektor (dengan *, bukan .) memperluas vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.

Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator ^.

```
>[1,2,3]^2
```

```
[1,  4,  9]
```

Berikut adalah kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan dengan vektor kolom memperluas keduanya dengan menduplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

```
            1             2             3
            2             4             6
            3             6             9
```

Perhatikan bahwa hasil kali skalar menggunakan hasil kali matriks, bukan tanda *!

```
>v.v'
```

```
14
```

Ada banyak fungsi untuk matriks. Kami memberikan daftar singkat. Anda harus membaca dokumentasi untuk informasi lebih lanjut mengenai perintah-perintah ini.

```
sum,prod computes the sum and products of the rows
cumsum,cumprod does the same cumulatively
computes the extremal values of each row
extrema returns a vector with the extremal information
diag(A,i) returns the i-th diagonal
setdiag(A,i,v) sets the i-th diagonal
id(n) the identity matrix
det(A) the determinant
charpoly(A) the characteristic polynomial
eigenvalues(A) the eigenvalues
```

```
>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)
```

```
[1,  4,  9]
14
[1,  5,  14]
```

Operator : menghasilkan vektor baris spasi yang sama, opsional dengan ukuran langkah.

```
>1:4, 1:2:10
```

```
[1,  2,  3,  4]
[1,  3,  5,  7,  9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor, terdapat operator "|" dan "_".

```
>[1,2,3]|[4,5], [1,2,3]_1
```

```
[1,  2,  3,  4,  5]
            1              2              3
            1              1              1
```

Elemen-elemen dari sebuah matriks disebut dengan "A[i,j]".

```
>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]
```

```
6
```

Untuk vektor baris atau kolom, v[i] adalah elemen ke-i dari vektor tersebut. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i dari matriks.

```
>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]
```

```
6
[7,  8,  9]
```

Indeks juga dapat berupa vektor baris dari indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2,  4]
            2
            5
            8
```

Bentuk singkat untuk : adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

```
            2             3
            5             6
            8             9
```

Untuk tujuan vektorisasi, elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

```
>A{4}
```

```
4
```

Matriks juga dapat diratakan, dengan menggunakan fungsi redim(). Hal ini diimplementasikan dalam fungsi flatten().

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
```

Untuk menggunakan matriks untuk tabel, mari kita reset ke format default, dan menghitung tabel nilai sinus dan kosinus. Perhatikan bahwa sudut dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

```
          0
         45
         90
        135
        180
        225
        270
        315
        360
```

Sekarang kita menambahkan kolom ke matriks.

```
>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)
```

```
          0             0             1             0
         45      0.785398      0.707107      0.707107
         90        1.5708             0             1
        135       2.35619     -0.707107      0.707107
        180       3.14159            -1             0
        225       3.92699     -0.707107     -0.707107
        270       4.71239             0            -1
        315       5.49779      0.707107     -0.707107
        360       6.28319             1             0
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat membuat beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus.

Pada contoh berikut, kita menghitung t[j]ˆi untuk i dari 1 hingga n. Kita mendapatkan sebuah matriks, di mana setiap baris adalah tabel tˆi untuk satu i. Dengan kata lain, matriks tersebut memiliki elemen-elemen latex: a_{i,j} = t_jˆi, \quad 1 \le j \le 101, \quad 1 \le i \le n

Fungsi yang tidak berfungsi untuk input vektor harus "divektorkan". Iini dapat dicapai dengan kata kunci "map" dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi akan dievaluasi untuk setiap elemen parameter vektor.

Integrasi numerik integrate() hanya bekerja untuk batas interval skalar. Jadi kita perlu membuat vektornya.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
```

Kata kunci "peta" membuat vektor fungsi. Fungsinya sekarang akan bekerja untuk vektor bilangan.

```
>f([1:5])
```

```
[0,  2.05045,  13.7251,  113.336,  1241.03]
```

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi kurung.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]
```

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
5
```

Kita dapat mengakses satu baris lengkap dari sebuah matriks.

```
>A[2]
```

```
[4,  5,  6]
```

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

```
>v=1:3; v[2]
```

```
2
```

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks 1xn dan mxn, tentukan semua kolom menggunakan indeks kedua yang kosong.

```
>A[2,]
```

```
 [4,  5,  6]
```

Jika indeks adalah vektor indeks, Euler akan mengembalikan baris matriks yang sesuai.

Di sini kita menginginkan baris pertama dan kedua dari A.

```
>A[[1,2]]
```

```
              1             2             3
              4             5             6
```

Kita bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Tepatnya, kita tidak mengubah A disini, tetapi menghitung versi susunan ulang dari A.

```
>A[[3,2,1]]
```

```
              7             8             9
              4             5             6
              1             2             3
```

Trik indeks juga bekerja dengan kolom.

Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

```
>A[1:3,2:3]
```

2	3
5	6
8	9

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

```
>A[:,3]
```

```
3
6
9
```

Sebagai alternatif, biarkan indeks pertama kosong.

```
>A[,2:3]
```

2	3
5	6
8	9

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir dari dari A.

```
>A[-1]
```

```
[7,  8,  9]
```

Sekarang mari kita ubah elemen-elemen dari A dengan menetapkan sebuah submatriks dari A ke beberapa nilai. Hal ini sebenarnya mengubah matriks A yang tersimpan.

```
>A[1,1]=4
```

```
            4            2            3
            4            5            6
            7            8            9
```

Kita juga dapat menetapkan nilai pada baris A.

```
>A[1]=[-1,-1,-1]
```

```
           -1           -1           -1
            4            5            6
            7            8            9
```

Kami bahkan dapat menetapkan sub-matriks jika memiliki ukuran yang tepat.

```
>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]
```

```
 5   6  -1
 7   8   6
 7   8   9
```

Selain itu, beberapa jalan pintas diperbolehkan.

```
>A[1:2,1:2]=0
```

```
 0   0  -1
 0   0   6
 7   8   9
```

Peringatan: Indeks di luar batas akan mengembalikan matriks kosong, atau pesan kesalahan, tergantung pada pengaturan sistem. Standarnya adalah pesan kesalahan. Namun, ingatlah bahwa bagaimanapun indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen-elemen matriks yang dihitung dari akhir.

```
>A[4]
```

```
Row index 4 out of bounds!
Error in:
A[4] ...
    ^
```

Fungsi mengurutkan() mengurutkan vektor baris.

```
>sort([5,6,4,8,1,9])
```

```
[1,  4,  5,  6,  8,  9]
```

Sering kali diperlukan untuk mengetahui indeks vektor yang diurutkan dalam vektor aslinya. Hal ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain dengan cara yang sama.

Mari kita mengacak sebuah vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

```
[4,  5,  10,  6,  8,  9,  1,  7,  2,  3]
```

Indeks berisi urutan v yang tepat.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Hal ini juga berlaku untuk vektor string.

```
>s=["a","d","e","a","aa","e"]
```

```
a
d
e
a
aa
e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
a
a
aa
d
e
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
[4,  1,  5,  2,  6,  3]
```

Fungsi unique mengembalikan daftar terurut dari elemen unik sebuah vektor.

```
>intrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
[4,  4,  9,  2,  6,  5,  10,  6,  5,  1]
[1,  2,  4,  5,  6,  9,  10]
```

Hal ini juga berlaku untuk vektor string.

```
>unique(s)
```

```
a
aa
d
e
```

EMT memiliki banyak fungsi untuk menyelesaikan sistem linear, sistem sparse, atau masalah regresi.

Untuk sistem linier Ax=b, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers, atau kecocokan linear. Operator A\b menggunakan versi algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

```
             -4
            4.5
```

Sebagai contoh lain, kita membuat matriks 200x200 dan jumlah barisnya. Kemudian kita selesaikan Ax = b dengan menggunakan matriks kebalikannya. Kita mengukur kesalahan sebagai deviasi maksimal dari semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang benar.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
    8.790745908981989e-13
```

Jika sistem tidak mempunyai solusi, kecocokan linear meminimalkan norma kesalahan Ax-b.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
          1           2           3
          4           5           6
          7           8           9
```

Determinan dari matriks ini adalah 0.

```
>det(A)
```

```
0
```

Matriks Simbolik

Maxima memiliki matriks simbolik. Tentu saja, Maxima dapat digunakan untuk masalah aljabar linear sederhana. Kita dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan &:=, dan kemudian menggunakannya dalam ekspresi simbolik. Bentuk [...] biasa untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan dalam Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

```
>$&det(A), $&factor(%)
```

$$(a-1)^2\ (a+2)$$

```
>$&invert(A) with a=0
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

$$\begin{pmatrix}1 & a \\ b & 2\end{pmatrix}$$

Seperti semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(%,x)
```

$$\left[x=\frac{3-\sqrt{4\,a\,b+1}}{2} , x=\frac{\sqrt{4\,a\,b+1}+3}{2}\right]$$

$$\left[x=\frac{3-\sqrt{4\,a\,b+1}}{2} , x=\frac{\sqrt{4\,a\,b+1}+3}{2}\right]$$

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah sebuah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan kelipatannya.

```
>$&eigenvalues([a,1;1,a])
```

$$\left[\left[a-1 , a+1\right] , \left[1 , 1\right]\right]$$

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu, diperlukan pengindeksan yang cermat.

```
>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

$$[[[a-1,a+1]\,,[1,1]]\,,[[[1,-1]]\,,[[1,1]]]]$$

```
[1, - 1]
```

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik seperti halnya ekspresi simbolik lainnya.

```
>A(a=4,b=5)
```

```
            1               4
            5               2
```

Dalam ekspresi simbolik, gunakan dengan.

```
>$&A with [a=4,b=5]
```

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

Akses ke baris matriks simbolik bekerja seperti halnya matriks numerik.

```
>$&A[1]
```

$$[1, a]$$

Ekspresi simbolik dapat berisi sebuah penugasan. Dan itu mengubah matriks A.

```
>&A[1,1]:=t+1; $&A
```

$$\begin{pmatrix} t+1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Terdapat fungsi-fungsi simbolik dalam Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk hal ini, lihat dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

```
>v &= makelist(1/(i+j),i,1,3); $v
```

$$\left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+2}, \frac{1}{j+3}\right]$$

```
>B &:= [1,2;3,4]; $B, $&invert(B)
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik dalam Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengantar Maxima.

```
>$&invert(B)()
```

```
     -2             1
    1.5          -0.5
```

Euler juga memiliki sebuah fungsi yang kuat xinv(), yang melakukan usaha yang lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perhatikan, bahwa dengan &:= matriks B telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan sebagai numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita dapat menggunakannya di sini.

```
>longest B.xinv(B)
```

```
                      1                       0
                      0                       1
```

Sebagai contoh, nilai eigen dari A dapat dihitung secara numerik.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

```
 [16.1168,  -1.11684,  0]
```

Atau secara simbolik. Lihat tutorial tentang Maxima untuk mengetahui secara detail.

```
>$&eigenvalues(@A)
```

$$\left[\left[\frac{15-3\,\sqrt{33}}{2} , \frac{3\,\sqrt{33}+15}{2} , 0\right] , [1, 1, 1]\right]$$

Nilai Numerik dalam Ekspresi simbolik

Ekspresi simbolik hanyalah sebuah string yang berisi ekspresi. Jika kita ingin mendefinisikan nilai baik untuk ekspresi simbolik maupun ekspresi numerik, kita harus menggunakan "&:=".

```
>A &:= [1,pi;4,5]
```

```
          1         3.14159
          4               5
```

Masih ada perbedaan antara bentuk numerik dan bentuk simbolik. Saat mentransfer matriks ke bentuk simbolik, perkiraan pecahan untuk bilangan real akan digunakan.

```
>$&A
```

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1146408}{364913} \\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Untuk menghindarinya, ada fungsi "mxmset(variable)".

```
>mxmset(A); $&A
```

$$\begin{pmatrix}1 & 3.141592653589793 \\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Maxima juga dapat menghitung dengan angka floating point, dan bahkan dengan angka floating besar dengan 32 digit. Namun, evaluasinya jauh lebih lambat.

```
>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

$$1.414213562373095$$

Ketepatan angka floating point yang besar dapat diubah.

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
         3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\
  4592307816406286208998628034825342117068b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik apapun dengan menggunakan "@var".

Perhatikan bahwa ini hanya diperlukan, jika variabel telah didefinisikan dengan ":=" atau "=" sebagai variabel numerik.

```
>B:=[1,pi;3,4]; $&det(@B)
```

$$-5.424777960769379$$

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk menghitung suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal sebesar 5000 (dalam dolar).

```
>K=5000
```

```
5000
```

Sekarang kita asumsikan tingkat bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu suku bunga sederhana dan hitung hasilnya.

```
>K*1.03
```

```
5150
```

Euler juga akan memahami sintaks berikut.

```
>K+K*3%
```

```
5150
```

Tetapi lebih mudah untuk menggunakan faktor.

```
>q=1+3%, K*q
```

```
1.03
5150
```

Untuk 10 tahun, kita cukup mengalikan faktor-faktor tersebut dan mendapatkan nilai akhir dengan suku bunga majemuk.

```
>K*q^10
```

```
6719.58189672
```

Untuk tujuan kita, kita dapat mengatur format menjadi 2 digit setelah titik desimal.

```
>format(12,2); K*q^10
```

```
    6719.58
```

Mari kita cetak angka yang dibulatkan menjadi 2 digit dalam kalimat lengkap.

```
>"Starting from " + K + "$ you get " + round(K*q^10,2) + "$."
```

```
Starting from 5000$ you get 6719.58$.
```

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun 1 sampai tahun 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak harus menulis loop, tetapi cukup masukkan

```
>K*q^(0:10)
```

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Bagaimana keajaiban ini bekerja? Pertama, ekspresi 0:10 mengembalikan sebuah vektor bilangan bulat.

```
>short 0:10
```

```
[0,  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Kemudian semua operator dan fungsi dalam Euler dapat diterapkan pada vektor elemen demi elemen. Jadi

```
>short q^(0:10)
```

```
[1,  1.03,  1.0609,  1.0927,  1.1255,  1.1593,  1.1941,  1.2299,
1.2668,  1.3048,  1.3439]
```

adalah vektor faktor q^0 hingga q^10. Ini dikalikan dengan K, dan kita mendapatkan vektor nilai.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

Tentu saja, cara yang realistis untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkan ke sen terdekat setelah setiap tahun. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini

```
>function oneyear (K) := round(K*q,2)
```

Mari kita bandingkan kedua hasil tersebut, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
        1271.61
      1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n, dan kita harus mengulang selama bertahun-tahun. Euler menyediakan banyak solusi untuk ini.

Cara termudah adalah iterasi fungsi, yang mengulang fungsi yang diberikan beberapa kali.
salah kehidupan nyata.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Kita bisa mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kami dengan angka desimal yang tetap.

```
>VKr'
```

```
5000.00
5150.00
5304.50
5463.64
5627.55
5796.38
5970.27
6149.38
6333.86
6523.88
6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen tertentu dari vektor, kita menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
5150.00
5000.00      5150.00      5304.50
```

Yang mengejutkan, kita juga dapat menggunakan vektor indeks. Ingatlah bahwa 1:3 menghasilkan vektor [1,2,3].

Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
6719.60
6719.58
```

Perbedaannya sangatlah kecil.

Sekarang kita mengambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan tingkat uang tertentu setiap tahun.

```
>function onepay (K) := K*q+R
```

Kita tidak perlu menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus mendefinisikan nilai-nilai ini. Kita memilih R = 200.

```
>R=200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5350.00     5710.50     6081.82     ...
```

Bagaimana jika kita menghapus jumlah yang sama setiap tahun?

```
>R=-200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     4950.00     4898.50     4845.45     ...
```

Kami melihat bahwa uangnya berkurang. Jelas, jika kita hanya mendapatkan 150 bunga di tahun pertama, tetapi menghapus 200, kita kehilangan uang setiap tahun.
Bagaimana kita dapat menentukan berapa tahun uang itu akan bertahan? Kita harus menulis perulangan untuk ini. Cara termudah adalah dengan melakukan perulangan yang cukup lama.

```
>VKR=iterate("onepay",5000,50)
```

```
 Real 1 x 51 matrix

     5000.00     4950.00     4898.50     4845.45     ...
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

```
>min(nonzeros(VKR<0))
```

```
       48.00
```

Alasannya adalah karena nonzeros(VKR<0) mengembalikan vektor dengan indeks i, di mana VKR[i]<0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, maka jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate() memiliki satu trik lagi. Fungsi ini dapat menerima kondisi akhir sebagai argumen. Kemudian fungsi ini akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x,n}=iterate("onepay",5000,till="x<0"); x, n,
```

```
-19.83
 47.00
```

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Anggaplah kita tahu bahwa nilainya adalah 0 setelah 50 tahun. Berapakah tingkat suku bunganya?

Ini adalah pertanyaan yang hanya bisa dijawab secara numerik. Di bawah ini, kami akan menurunkan rumus yang diperlukan. Kemudian Anda akan melihat bahwa tidak ada rumus yang mudah untuk suku bunga. Namun untuk saat ini, kita akan mencari solusi numerik.

Langkah pertama adalah mendefinisikan sebuah fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kita tambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n) := iterate("x*(1+P/100)+R",K,n;P,R)[-1]
```

Perulangannya sama seperti di atas

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) + R$$

Tetapi kita tidak lagi menggunakan nilai global R dalam ekspresi kita. Fungsi-fungsi seperti iterate() memiliki trik khusus dalam Euler. Anda bisa mengoper nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam hal ini P dan R.

Selain itu, kita hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi kita mengambil indeks [-1].

Mari kita coba tes.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

```
-19.83
```

Sekarang kita bisa menyelesaikan masalah kita.

```
>solve("f(5000,-200,x,50)",3)
```

```
3.15
```

Rutin penyelesaian menyelesaikan ekspresi = 0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kita mengambil nilai awal 3% untuk algoritma ini. Fungsi solve() selalu membutuhkan nilai awal.

Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menyelesaikan pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita hapus per tahun sehingga modal awal habis setelah 20 tahun dengan asumsi tingkat bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

```
-336.08
```

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat memecahkan jumlah tahun, karena fungsi kami mengasumsikan n sebagai nilai bilangan bulat.

Solusi Simbolik untuk Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolik dari Euler untuk mempelajari masalah ini. Pertama, kita mendefinisikan fungsi onepay() secara simbolik.

```
>function op(K) &= K*q+R; $&op(K)
```

$$R + q\,K$$

Sekarang kita bisa mengulangi hal ini.

```
>$&op(op(op(op(K)))), $&expand(%)
```

$$q^3\,R + q^2\,R + q\,R + R + q^4\,K$$

Kita dapat melihat sebuah pola. Setelah n periode, kita memiliki

$$K_n = q^n K + R(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = q^n K + \frac{q^n - 1}{q - 1} R$$

Rumus tersebut adalah rumus untuk jumlah geometris, yang dikenal dengan Maxima.

```
>&sum(q^k,k,0,n-1); $& % = ev(%,simpsum)
```

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ini sedikit rumit. Penjumlahan dievaluasi dengan flag "simpsum" untuk menguranginya menjadi hasil bagi.

Mari kita buat sebuah fungsi untuk ini.

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; $&fs(K,R,P,n)
```

$$\frac{100\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^n - 1\right) R}{P} + K\left(\frac{P}{100}+1\right)^n$$

Fungsi ini melakukan hal yang sama seperti fungsi f kita sebelumnya. Tetapi fungsi ini lebih efektif.

```
>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)
```

```
-19.82504734650985
-19.82504734652684
```

Sekarang kita dapat menggunakannya untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Perkiraan awal kita adalah 30 tahun.

```
>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)
```

```
20.51
```

Jawaban ini mengatakan bahwa nilai tersebut akan menjadi negatif setelah 21 tahun.

Kita juga bisa menggunakan sisi simbolis dari Euler untuk menghitung rumus pembayaran.

Asumsikan kita mendapatkan pinjaman sebesar K, dan membayar n kali pembayaran sebesar R (dimulai setelah tahun pertama) sehingga menyisakan sisa utang sebesar Kn (pada saat pembayaran terakhir). Rumus untuk hal ini adalah sebagai berikut.

```
>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; $&equ
```

$$\frac{100\,\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}-1\right)\,R}{P}+K\,\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}=Kn$$

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

$$i = \frac{P}{100}$$

```
>equ &= (equ with P=100*i); $&equ
```

$$\frac{\left(\left(i+1\right)^{n}-1\right)\,R}{i}+\left(i+1\right)^{n}\,K=Kn$$

Kita dapat menyelesaikan laju R secara simbolik.

```
>$&solve(equ,R)
```

$$\left[R=\frac{i\,Kn-i\,\left(i+1\right)^{n}\,K}{\left(i+1\right)^{n}-1}\right]$$

Seperti yang dapat Anda lihat dari rumusnya, fungsi ini mengembalikan kesalahan floating point untuk i = 0. Euler tetap memplotnya.

Tentu saja, kita memiliki limit berikut.

```
>$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)
```

$$\lim_{x\rightarrow 0}{R\left(5000 , 0 , x , 10\right)}$$

Jelas, tanpa bunga kita harus membayar kembali 10 suku bunga 500.

Persamaan ini juga dapat diselesaikan untuk n. Akan terlihat lebih baik jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan.

```
>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; $&fn
```

$$\left[n=\frac{\log \left(\frac{R+i\,K\,n}{R+i\,K}\right)}{\log \left(i+1\right)}\right]$$

Latihan soal operasi bentuk-bentuk aljabar

1. Faktorkan soal berikut ini

$$9z^2 - 12z + 4$$

```
>$&factor(9*z^2-12*z+4)
```

$$(3\,z-2)^2$$

2. Jabarkan soal berikut ini

$$(-5m^4n^2)(6m^2n^3)$$

```
>$&expand((-5*m^4*n^2)*(6*m^2*n^3))
```

$$-30\,m^6\,n^5$$

3. Sederhanakan soal berikut

$$(3x^2 - 2x - x^3 + 2) - (5x^2 - 8x - x^3 + 4)$$

```
>$&(3*x^2-2*x-x^3+2)-(5*x^2-8*x-x^3+4)
```

$$-2\,x^2 + 6\,x - 2$$

4. Sederhanakan soal berikut

$$(x^4 - 3x^2 + 4x) - (3x^3 + x^2 - 5x + 3)$$

```
>$&(x^4-3*x^2+4*x)-(3*x^3+x^2-5*x+3)
```

$$x^4 - 3\,x^3 - 4\,x^2 + 9\,x - 3$$

5. Jabarkan soal berikut ini

$$(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

```
>$&expand((x+1)*(x-1)*(x^2+1))
```

$$x^4 - 1$$

Latihan soal perhitungan berbagai operasi dan fungsi matematika

1. Cari nilai x yang memenuhi persamaan berikut

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

```
>$&solve(x^4-4*x^2+3,x)
```

$$\left[x = -1, x = 1, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}\right]$$

2. Berapa nilai fungsi berikut jika nilai x nya 4

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

```
>x=4 ; x^4-10*x^2+9
```

```
105.00
```

3. Cari nilai x yang memenuhi persamaan berikut

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

```
>$&solve(x^3+3*x^2-x-3)
```

$$[x = 1, x = -1, x = -3]$$

4. Berapa nilai fungsi berikut jika nilai x nya 3

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$$

```
>x=3 ; x^3-x^2-2*x+2
```

```
14.00
```

5. Cari nilai x yang memenuhi persamaan berikut

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$$

```
>$&solve(2*x^3-x^2-8*x+4)
```

$$\left[x = \frac{1}{2}, x = -2, x = 2\right]$$

Latihan soal perhitungan menggunakan bilangan kompleks

1. Berapa nilai i yang memenuhi

$$(3i - 2) + (3i + 2) = 12$$

```
>$&solve((3*i-2)+(3*i+2)=12,i)
```

$$[i = 2]$$

2. Hitunglah soal berikut ini

$$(10 + 7i) - (5 + 3i)$$

```
>$&(10+7*i)-(5+3*i)
```

$$4\,i + 5$$

3. Hitung soal berikut

$$(6-4i)-(-5+i)$$

```
>$&(6-4*i)-(-5+i)
```

$$11-5\,i$$

4. Berapa nilai i yang memenuhi

$$(8-3i)-(9-i)=35$$

```
>$&solve((8-3*i)-(9-i)=17,i)
```

$$[i=-9]$$

5. Hitunglah soal berikut

$$7i(2-5i)$$

```
>$&(7*i*2-7*i*5*i)
```

$$14\,i-35\,i^2$$

Latihan soal perhitungan menggunakan fungsi buatan sendiri

1. Cari nilai x dari fungsi berikut

$$f(x)=x^2+4x=5$$

```
>$&solve(x^2+4*x=5)
```

$$[x=-5,x=1]$$

2. Tentukan nilai t yang memenuhi soal berikut ini

$$3t^2 + 8t + 3 = 0$$

```
>$&solve(3*t^2+8*t+3=0)
```

$$\left[t = \frac{-\sqrt{7}-4}{3}, t = \frac{\sqrt{7}-4}{3}\right]$$

3. Berapa nilai f(x) * f(y) jika

$$f(x) = 2x + 4$$

$$f(y) = y + 1$$

```
>$&expand((2*x+4)*(y+1))
```

$$2\,x\,y + 4\,y + 2\,x + 4$$

4. Berapa nilai x yang memenuhi

$$4x^2 + 3 = x$$

```
>$&solve(4*x^2+3=x)
```

$$\left[x = \frac{1 - \sqrt{47}\, i}{8}, x = \frac{\sqrt{47}\, i + 1}{8}\right]$$

5. Hasil dari f(x)-2f(y) jika

$$f(x) = x + 3$$

$$f(y) = y - 1$$

```
>$&expand((x+3)-2*(y-1))
```

$$-2\, y + x + 5$$

Latihan soal menyelesaikan persamaan dan sistem persamaan

1. Diketahui bahwa

$$2x + 4y = 14$$

$$5x - 2y = -1$$

$$x + 3y = 10$$

berapakah nilai x dan y?

```
>$&solve([2*x+4*y=14, 5*x-2*y=-1, x+3*y=10],[x,y])
```

$$[[x = 1, y = 3]]$$

2. Berapa nilai x dari

$$2x^2 - 5x = 0$$

```
>$&solve(2*x^2-5*x=0)
```

$$\left[x = \frac{5}{2}, x = 0\right]$$

3. Nilai x dan y dari sistem persamaan berikut:

$$3x - 2y = 7$$

$$5x + 7y = 22$$

```
>$&solve([3*x-2*y=7,5*x+7*y=22],[x,y])
```

$$[[x = 3, y = 1]]$$

4. Berapakah nilai x dan y yang memenuhi

$$16x + 9y = 50$$

$$7x - 3y = 8$$

```
>$&solve([16*x+9*y=50,7*x-3*y=8],[x,y])
```

$$[[x = 2, y = 2]]$$

5. Nilai dari x dan y

$$9x + 7y = 25$$

$$2x - 5y = -1$$

$$x - 2y = 0$$

```
>$&solve([9*x+7*y=25, 2*x-5*y=-1, x-2*y=0], [x,y])
```

$$[[x = 2, y = 1]]$$

Latihan soal pertidaksamaan dan sistem pertidaksamaan

1. Selesaikan

$$2y - 3 >= 1 - y + 5$$

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([2*y-3 >= 1-y+5],[y])
```

$$[y = 3] \vee [3 < y]$$

2. Selesaikan

$$(x-2)(x+5) > x(x-3)$$

```
>$&fourier_elim([(x-2)*(x+5)>x*(x-3)],[x])
```

$$\left[\frac{5}{3} < x\right]$$

3. Nilai x yang memenuhi

$$|x + 6| >= 7$$

```
>$&fourier_elim([abs(x+6)>=7],[x])
```

$$[x = 1] \vee [x = -13] \vee [x < -13] \vee [1 < x]$$

4. Berapakah nilai x yang memenuhi

$$|x + 1/4| <= 2/3$$

```
>$&fourier_elim([abs(x+1/4)<=2/3],[x])
```

$$\left[x = -\frac{11}{12}\right] \vee \left[x = \frac{5}{12}\right] \vee \left[-\frac{11}{12} < x, x < \frac{5}{12}\right]$$

5. Selesaikan

$$|2x-1|<5$$

```
>$&fourier_elim([abs(2*x-1)<5],[x])
```

$$[-2<x, x<3]$$

Latihan soal perhitungan menggunakan matriks dan vektor

1. Invers matriks

$$A=[1,1,2;3,2,2;2,2,0]$$

```
>A = [1,1,2;3,2,2;2,2,0]
```

```
            1.00            1.00            2.00
            3.00            2.00            2.00
            2.00            2.00            0.00
```

```
>inv(A)
```

```
     -1.00         1.00        -0.50
      1.00        -1.00         1.00
      0.50         0.00        -0.25
```

2. Penjumlahan matriks A + B dimana

$$A = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9]$$

$$B = [2, 3, 4; 7.9.6; 0, 1, 3]$$

```
>A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
      1.00         2.00         3.00
      4.00         5.00         6.00
      7.00         8.00         9.00
```

```
>B=[2,3,4;7,9,6;0,1,3]
```

```
      2.00         3.00         4.00
      7.00         9.00         6.00
      0.00         1.00         3.00
```

```
>A+B
```

```
      3.00        5.00        7.00
     11.00       14.00       12.00
      7.00        9.00       12.00
```

3. Hasil kali 3 matriks

$$Z = [3, 4, 7; 2, 4, 1; 9, 8, 7]$$

```
>3*[3,4,7;2,4,1;9,8,7]
```

```
      9.00       12.00       21.00
      6.00       12.00        3.00
     27.00       24.00       21.00
```

4. Invers matriks

$$A = [1, 3; 5, 7]$$

```
>A = [1,3;5,7]
```

```
   1.00        3.00
   5.00        7.00
```

```
>inv(A)
```

```
  -0.88        0.38
   0.63       -0.13
```

5. Pengurangan matriks C-D dengan

$$C = [1, 1; 0, 1]$$

$$D = [1, -1; -1, 1]$$

```
>C = [1,1;0,1]
```

```
   1.00        1.00
   0.00        1.00
```

```
>D=[1,-1;-1,1]
```

```
   1.00       -1.00
  -1.00        1.00
```

```
>C-D
```

```
        0.00          2.00
        1.00          0.00
```

Latihan soal aljabar untuk menyelesaikan masalah bidang lain

1. Berapa luas sebuah lapangan berbentuk lingkaran dengan panjang 50m

```
>r=50; pi*r*r
```

```
    7853.98
```

2. Tentukan panjang tali yang digunakan untuk mengelilingi sebuah kotak persegi panjang dengan lebar 5m dan panjang 7m

```
>l=5; p=7; 2*(p+l)
```

```
    24.00
```

3. Luas sebuah segitiga dengan alas 5cm dan tinggi 8cm

```
>a=5; t=8; 1/2 *a *t
```

```
20.00
```

4. Sebuah tangki berbentuk kerucut dengan jari-jari lingkaran 10m dan tinggi tangki 15m, berapakah volume tangki tersebut?

```
>r=10; t=15; 1/3 * pi*10*10*15
```

```
1570.80
```

5. Berapa luas permukaan tabung dengan jari-jari 5cm dan tinggi 8cm?

```
>r=5 ; t=8 ; 2*pi*r*t+2*pi*pi
```

```
271.07
```

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Rasdiana Putri
NIM : 23030630033
Kelas : Matematika E

Menggambar Grafik 2D dengan EMT

Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagaikurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

Plot Dasar

Ada fungsi plot yang sangat mendasar. Terdapat koordinat layar, yang selalu berkisar dari 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya berbentuk persegi atau tidak. Dan terdapat koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antar koordinat bergantung pada jendela plot saat ini. Contohnya, shrinkwindow() default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh, kita hanya menggambar beberapa garis acak dalam berbagai warna. Untuk detail mengenai fungsi-fungsi ini, pelajari fungsi inti EMT.

```
>clg; // clear screen
>window(0,0,1024,1024); // use all of the window
>setplot(0,1,0,1); // set plot coordinates
>hold on; // start overwrite mode
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2);  // get random points
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // get random colors
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot
>hold off; // end overwrite mode
>insimg; // insert to notebook
```

```
>reset;
```

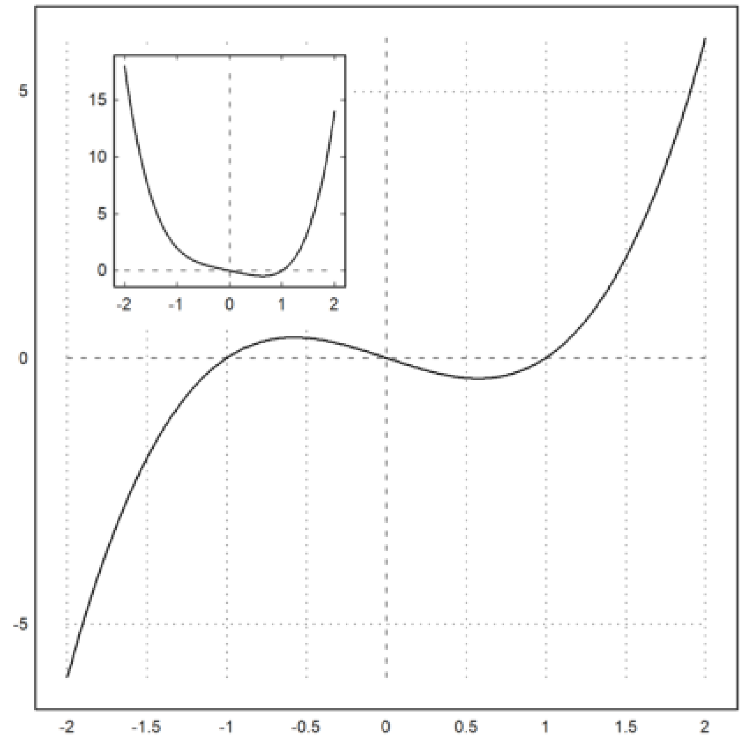
Grafik perlu ditahan, karena perintah plot() akan menghapus jendela plot.

Untuk menghapus semua yang telah kita lakukan, kita menggunakan reset().

Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua(:). Cara lain adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.

Sebagai contoh lain, kita menggambar plot sebagai sisipan dalam plot lain. Hal ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak menyediakan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk hal ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kita menyimpan dan mengembalikan jendela penuh, dan menahan plot saat ini ketika kita memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x");
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;
>ow=window();
>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);
>hold on;
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);
>plot2d("x^4-x",grid=6):
```



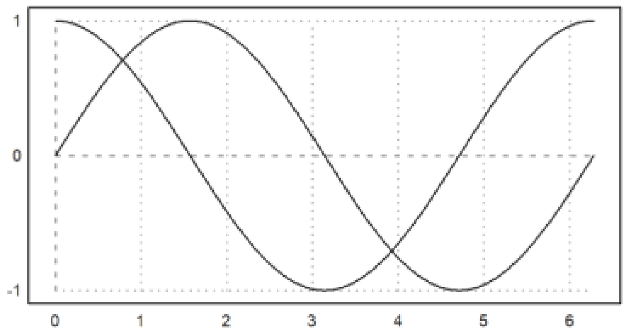

```
>hold off;
>window(ow);
```

Plot dengan banyak gambar dicapai dengan cara yang sama. Ada fungsi utilitas figure() untuk ini.

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspect(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspeknya nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan "Set Aspect" ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafik saat ini.

Tetapi Anda juga bisa mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki ruang yang cukup.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi):
```




```
>aspect();
>reset;
```

Fungsi reset() memulihkan default plot, termasuk rasio aspek.

2D Plots di Euler

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam bentuk 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.

Hal ini memungkinkan untuk memplot di Maxima menggunakan Gnuplot atau di Python menggunakan Math Plot Lib.

Euler dapat membuat plot 2D dari

- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva berparameter,
- vektor nilai x-y,
- awan titik-titik di dalam pesawat,
- kurva implisit dengan level atau wilayah level.
- Fungsi yang kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang dan plot berbayang.

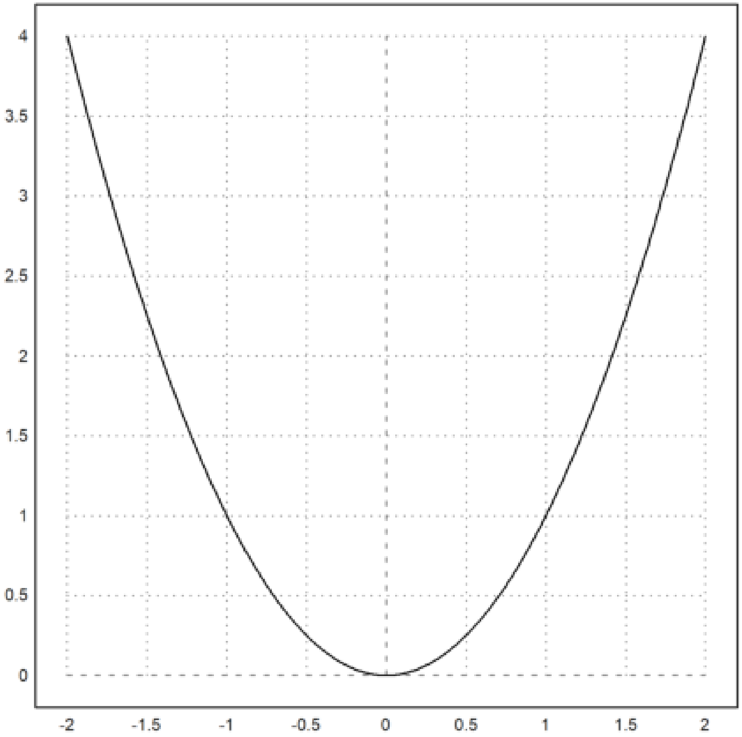
Plot Ekspresi atau Variabel

Ekspresi tunggal dalam "x" (misalnya "4*xˆ2") atau nama fungsi (misalnya "f") menghasilkan grafik fungsi.

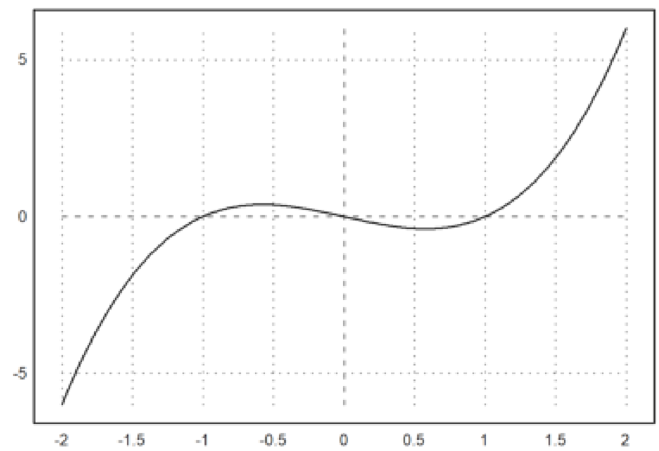
Berikut ini adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsi.

Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan tanda titik dua ":", plot akan dimasukkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

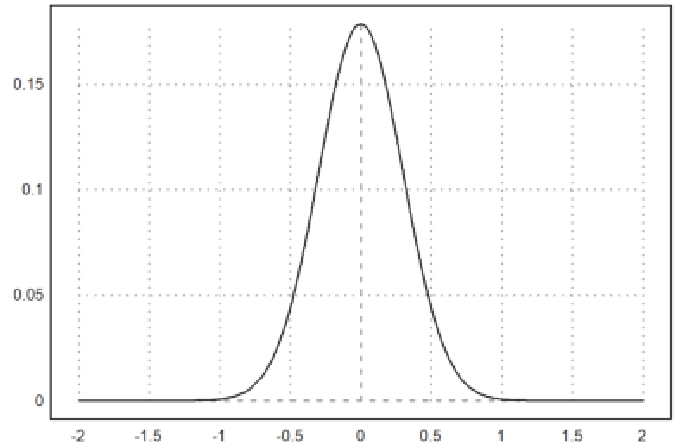
```
>plot2d("x^2"):
```




```
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):
```




```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25 baris
```

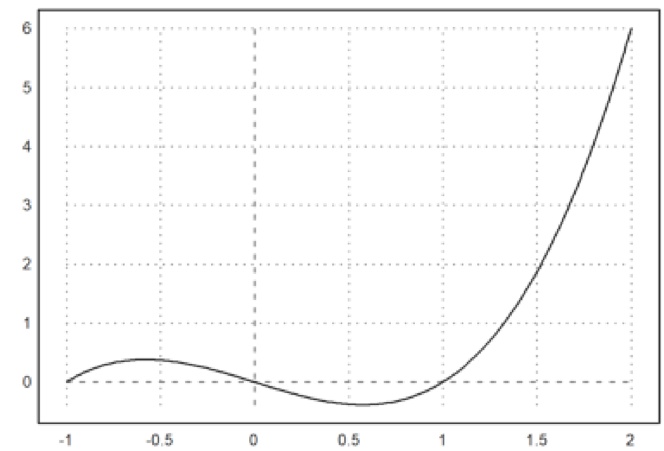


Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai-nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.

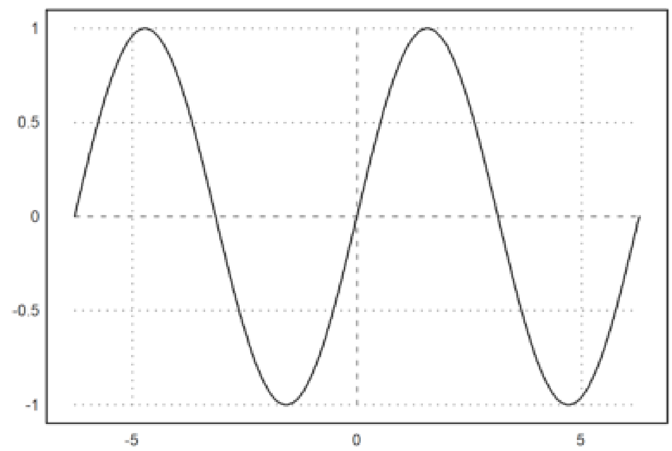
Rentang plot ditetapkan dengan parameter yang ditetapkan sebagai berikut

- a,b: rentang x (default -2,2)
- c,d: rentang y (default: skala dengan nilai)
- r: sebagai alternatif adalah radius di sekitar pusat plot
- cx,cy: koordinat pusat plot (default 0,0)

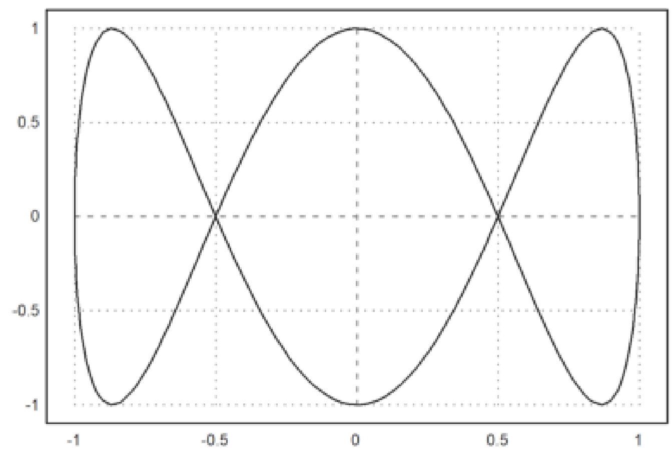
```
>plot2d("x^3-x",-1,2):
```




```
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```




```
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):
```



Alternatif untuk tanda titik dua adalah perintah insimg(lines), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.

Dalam opsi, plot dapat diatur agar muncul

- dalam jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,

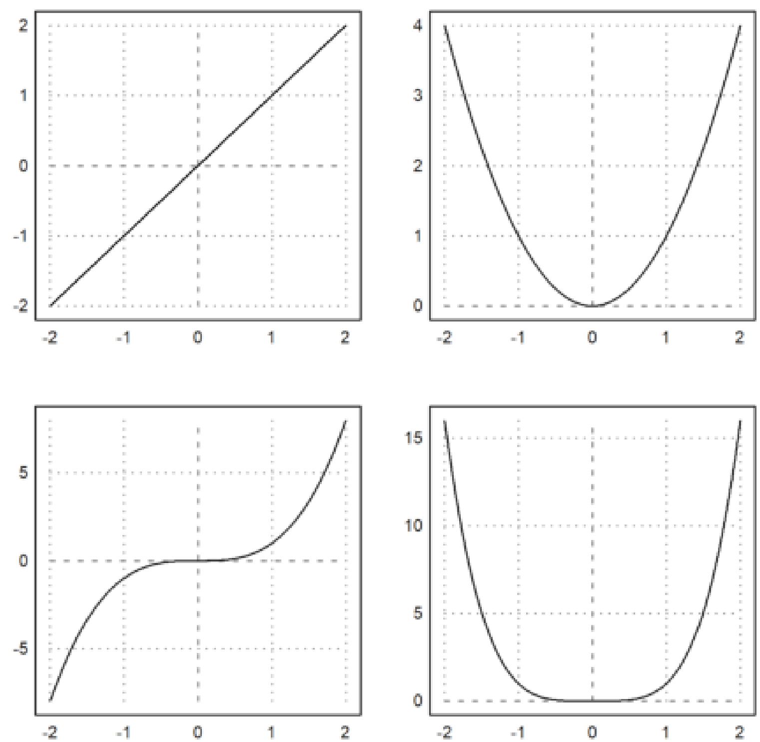
- di jendela buku catatan.

lebih banyak gaya dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.

Dalam hal apa pun, tekan tombol tabulator untuk melihat plot, jika disembunyikan.

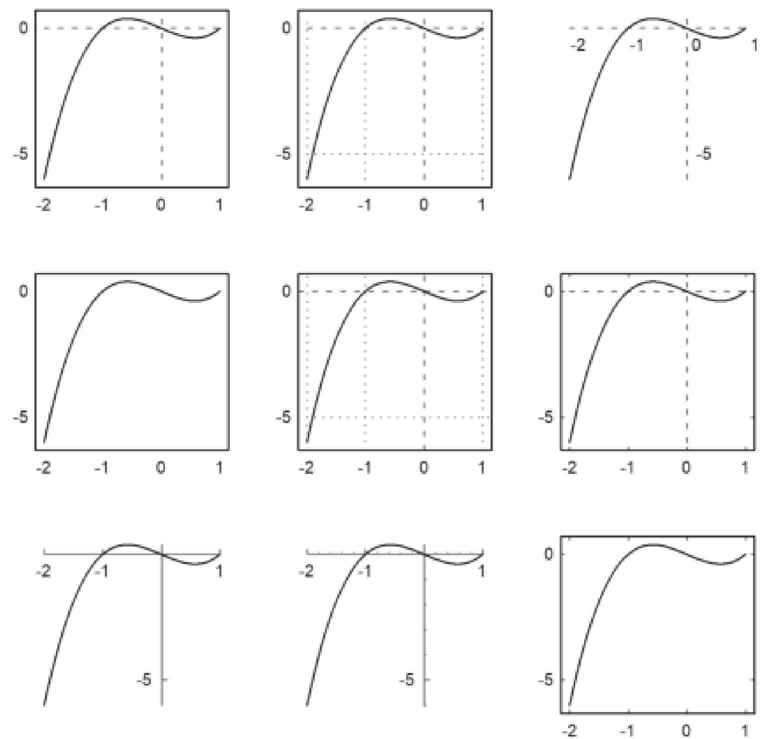
Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Pada contoh, kita memplot x^1 hingga x^4 menjadi 4 bagian jendela. figure(0) mengatur ulang jendela default.

```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0):
```



Pada plot2d(), terdapat gaya alternatif yang tersedia dengan grid=x. Sebagai gambaran umum, kami menampilkan berbagai gaya grid dalam satu gambar (lihat di bawah ini untuk perintah figure()). Gaya grid=0
tidak disertakan. Gaya ini tidak menampilkan grid dan bingkai.

```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

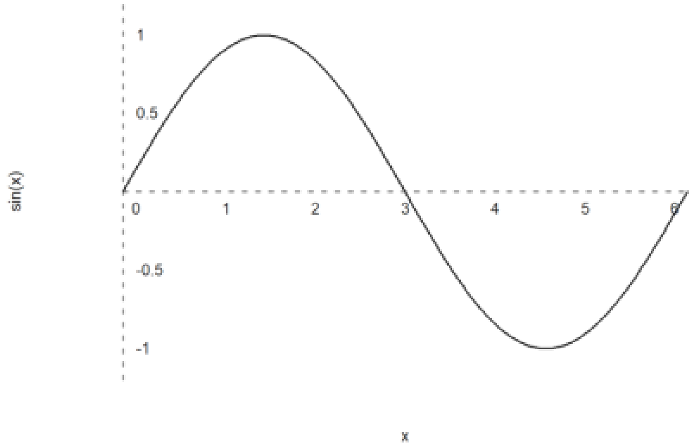


Jika argumen pada plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot tersebut.

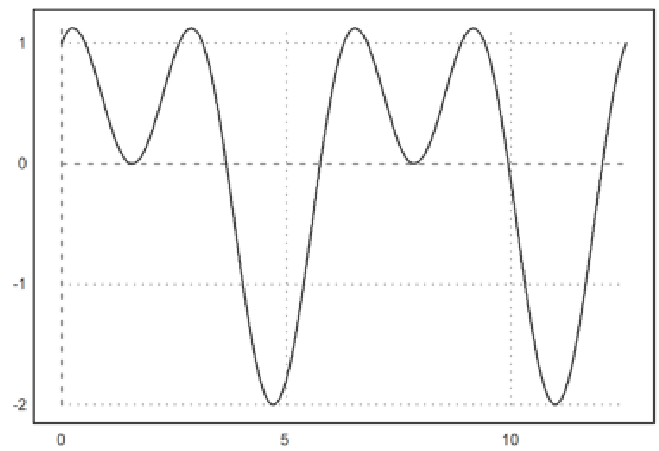
Alternatifnya, a, b, c, d dapat ditetapkan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dsb.

Pada contoh berikut, kita mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)"):
```




```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):
```

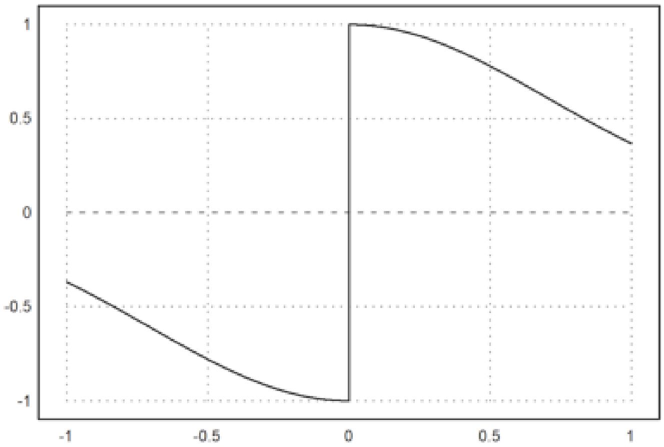


Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan di direktori yang sama dengan buku catatan, secara default dalam subdirektori bernama ”images”. Gambar-gambar tersebut juga
digunakan oleh ekspor HTML.

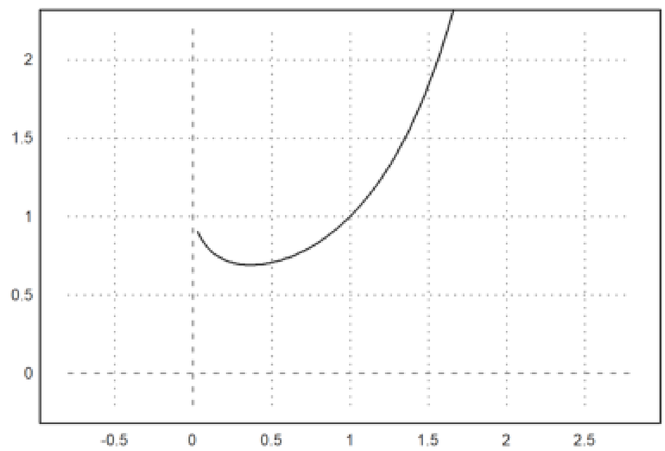
Anda bisa menandai gambar apa pun dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi-fungsi yang ada di dalam menu File.

Fungsi atau ekspresi dalam plot2d dievaluasi secara adaptif. Untuk kecepatan yang lebih tinggi, matikan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=... Hal ini hanya diperlukan pada kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```

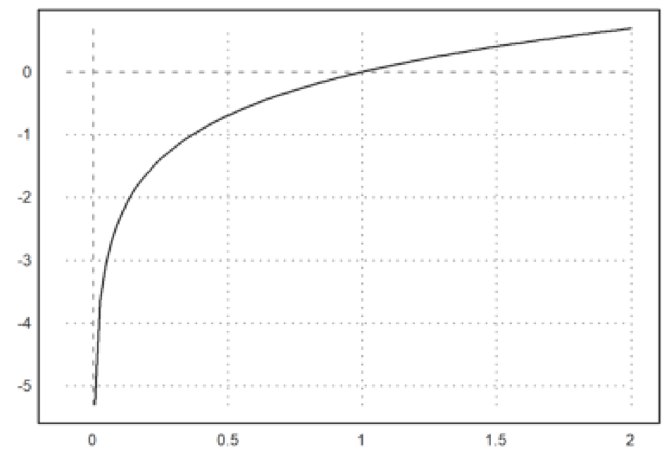



```
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```



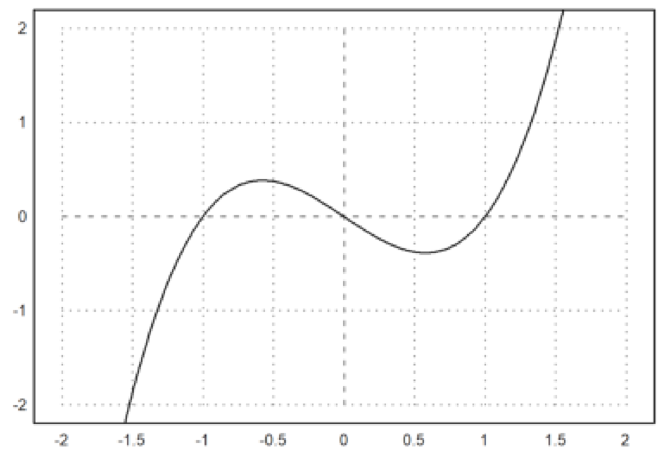
Perhatikan bahwa x^x tidak didefinisikan untuk x<=0. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai membuat plot segera setelah fungsinya ditentukan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN di luar jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)",-0.1,2):
```

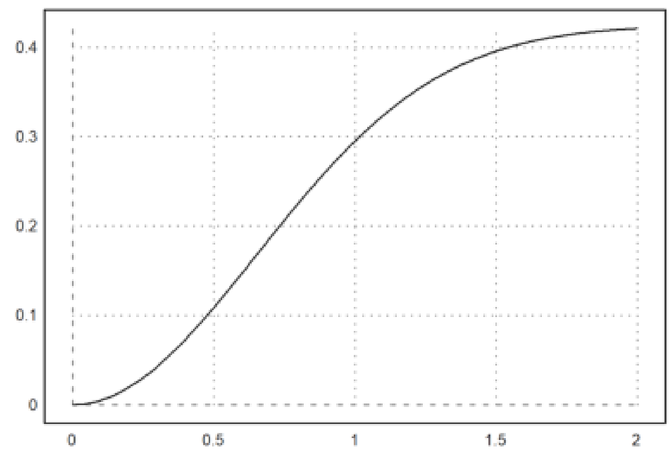


Parameter square=true (atau >square) memilih rentang y secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan ruang persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
```

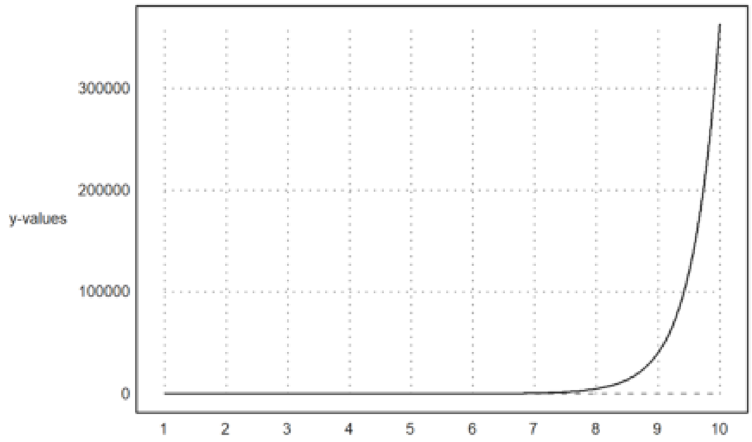



```
>plot2d(''integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)'',0,2): // plot integral
```



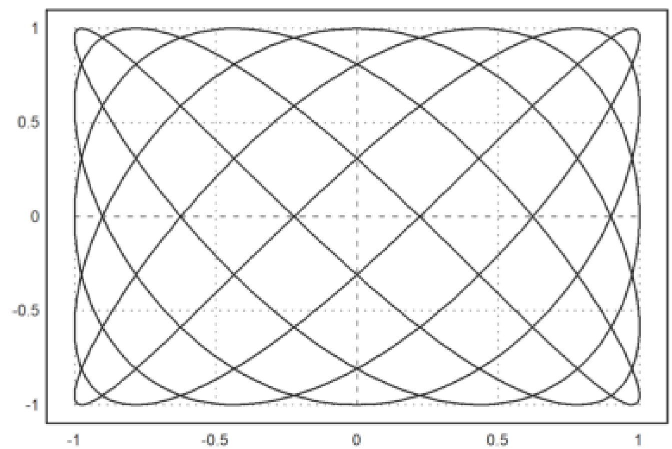
Jika Anda memerlukan lebih banyak ruang untuk label y, panggil shrinkwindow() dengan parameter lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

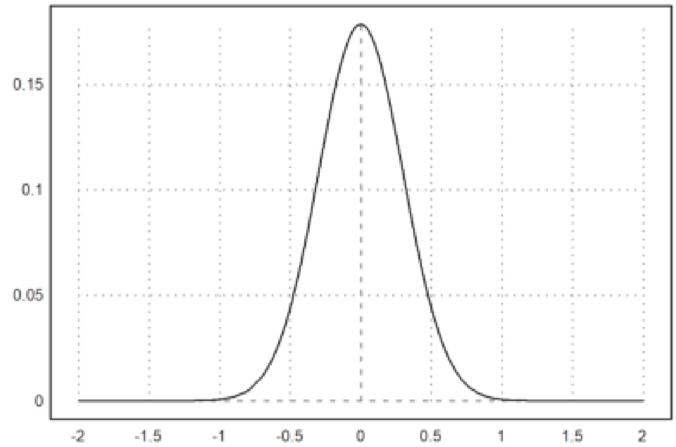


Ekspresi simbolik juga dapat digunakan karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

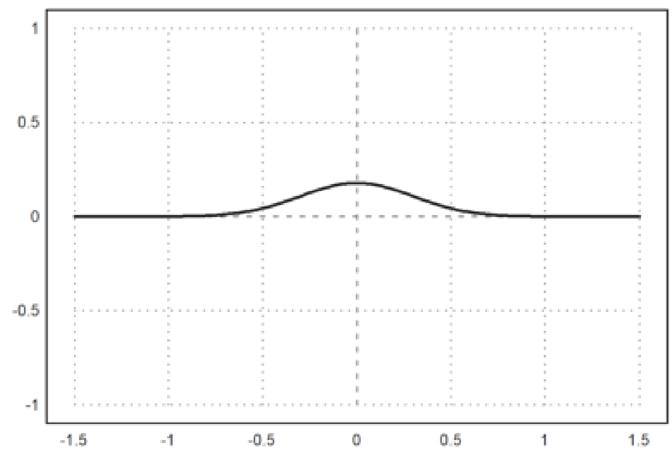
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```



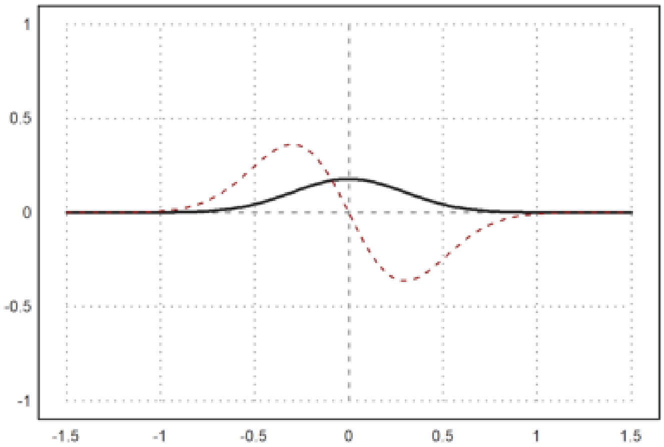

```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression
>plot2d(expr,-2,2): // plot from -2 to 2
```



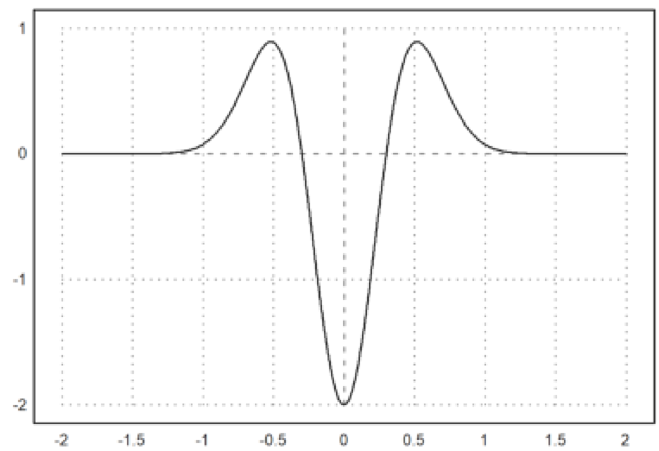

```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot in a square around (0,0)
```



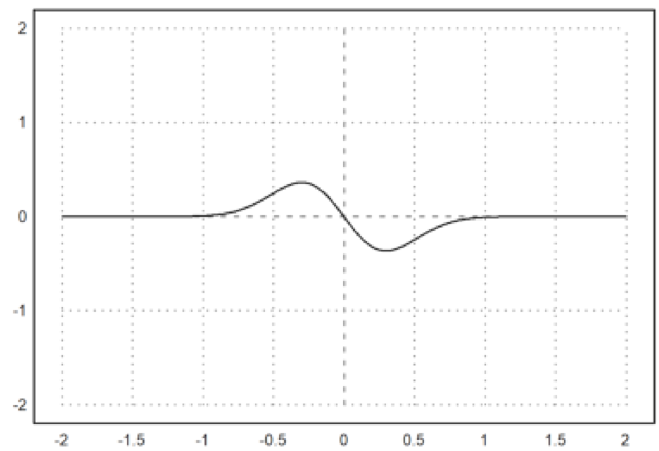

```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // add another plot
```



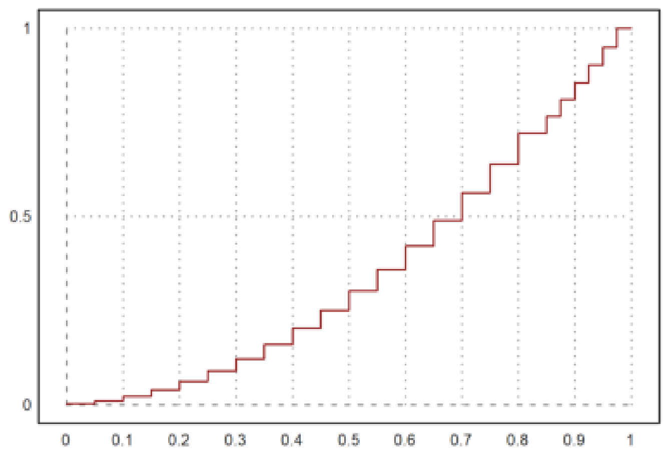

```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle
```



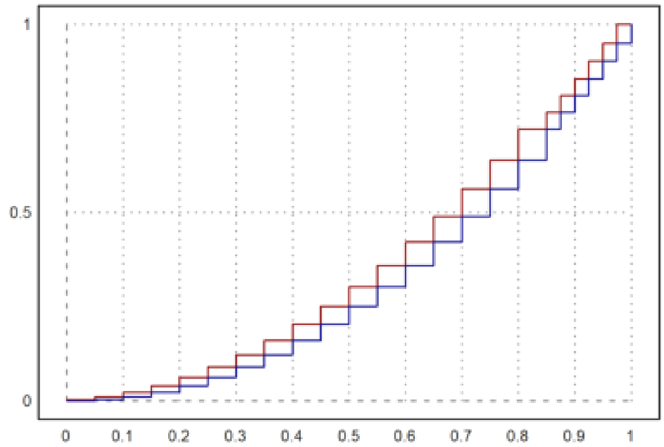

```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square
```




```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
```




```
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10):
```

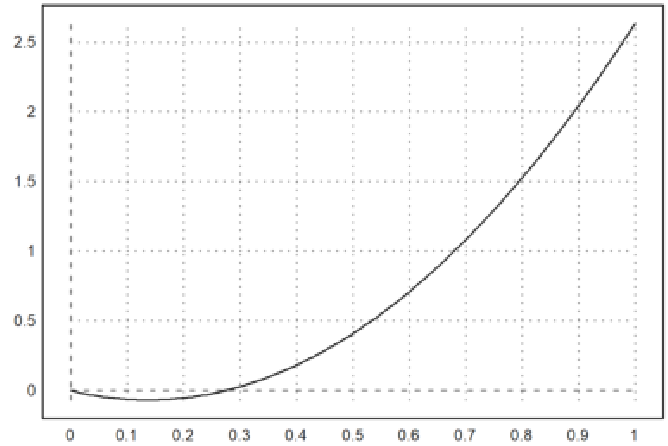


1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

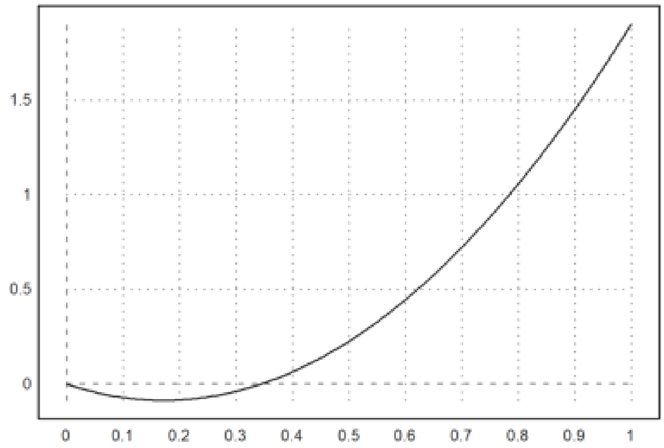
Fungsi plot yang paling penting untuk plot planar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file ”plot.e”, yang dimuat pada awal program.

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan fungsi. Seperti biasa dalam EMT, fungsi yang bekerja untuk fungsi atau eksekusi lain, Anda dapat mengoper parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global
ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan kumpulan panggilan.

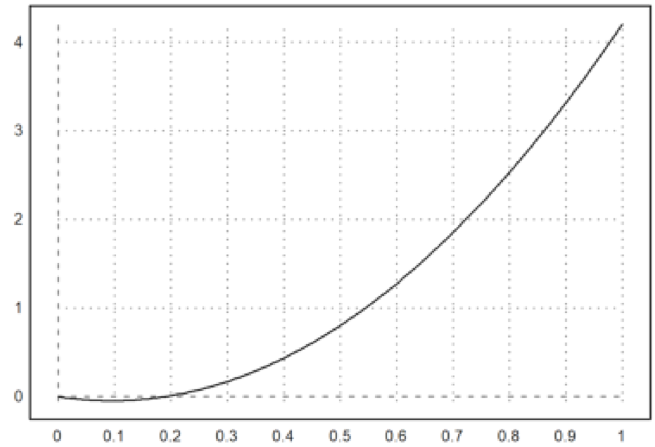
```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; // define a function
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a): // plot with a=0.3
```



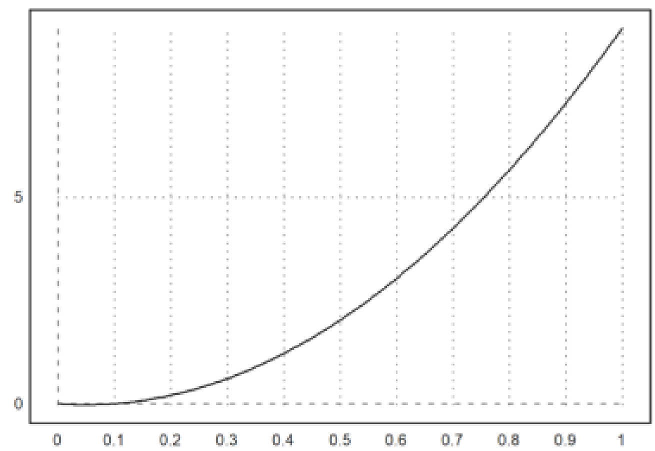
```
>plot2d("f",0,1;0.4): // plot with a=0.4
```



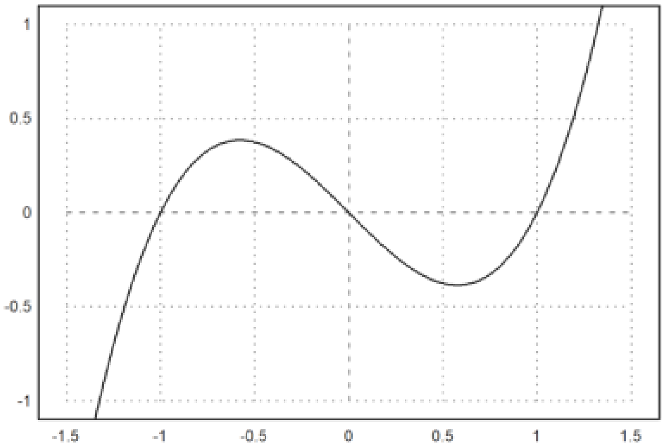

```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1): // plot with a=0.2
```




```
>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1): // plot with 0.1
```




```
>function f(x) := x^3-x; ...
>plot2d("f",r=1):
```



Berikut ini adalah ringkasan dari fungsi yang diterima

- ekspresi atau ekspresi simbolik dalam x

- fungsi atau fungsi simbolis dengan nama sebagai "f"

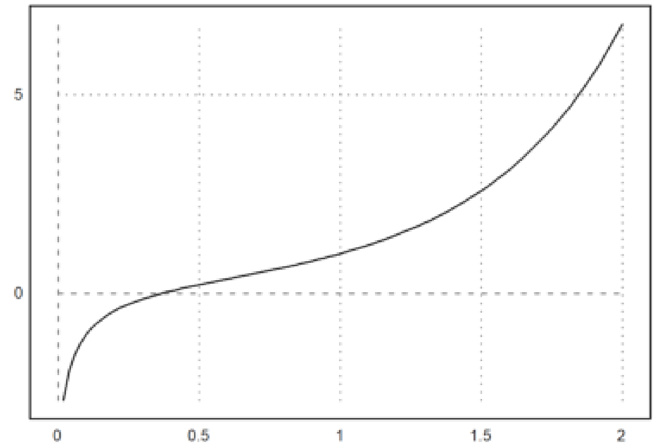
- fungsi simbolik hanya dengan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolik. Untuk fungsi simbolik, nama saja sudah cukup.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

```
                                 x
                                x  (log(x) + 1)
```

```
>plot2d(f,0,2):
```

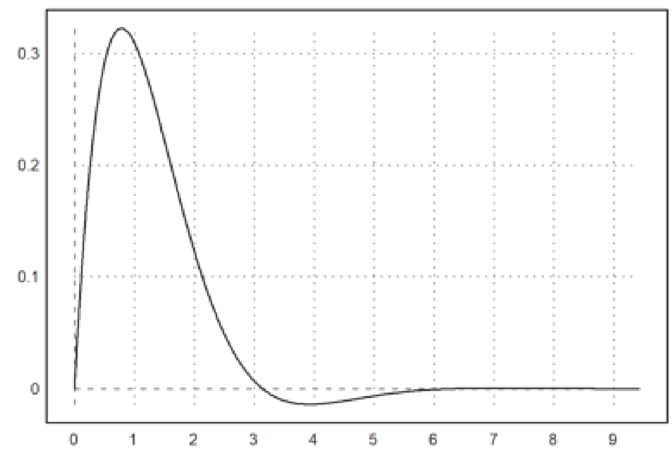


Tentu saja, untuk ekspresi atau ungkapan simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

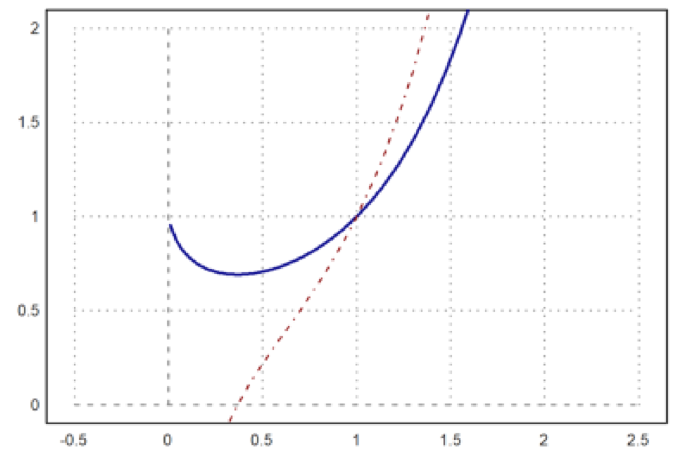
```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

```
 - x
E    sin(x)
```

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```




```
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```



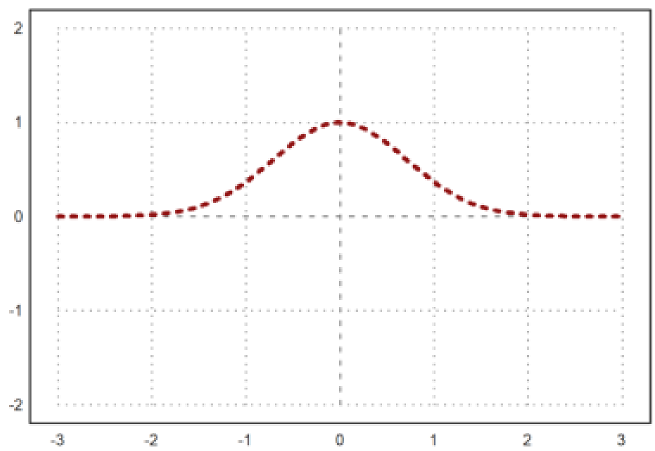
Untuk gaya garis ada berbagai pilihan.

- gaya=”...”. Pilih dari ”-”, ”–”, ”-.”, ”.”, ”.-.”, ”-.-”.
- warna: Lihat di bawah untuk warna.
- ketebalan: standarnya adalah 1.

Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.

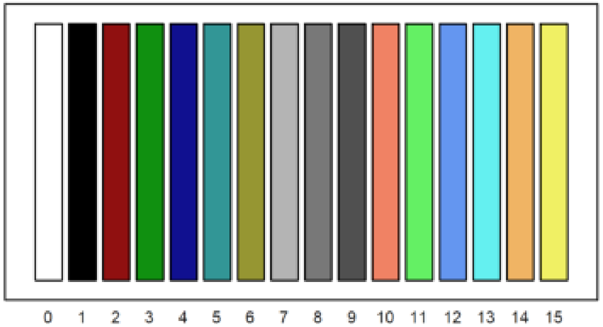
- 0..15: indeks warna default.
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abuabu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru muda, oranye muda, kuning.
- rgb(merah,hijau,biru): parameternya real di [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="--"):
```



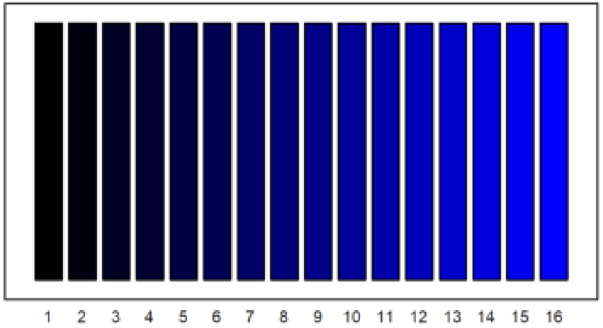
Berikut adalah tampilan warna EMT yang telah ditentukan sebelumnya.

```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):
```



Tetapi Anda bisa menggunakan warna apapun.

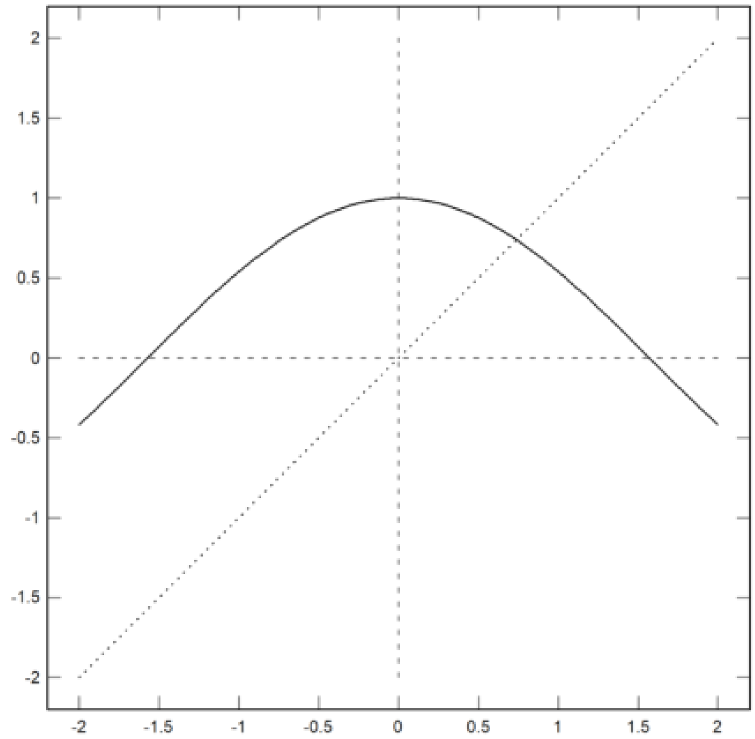
```
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):
```



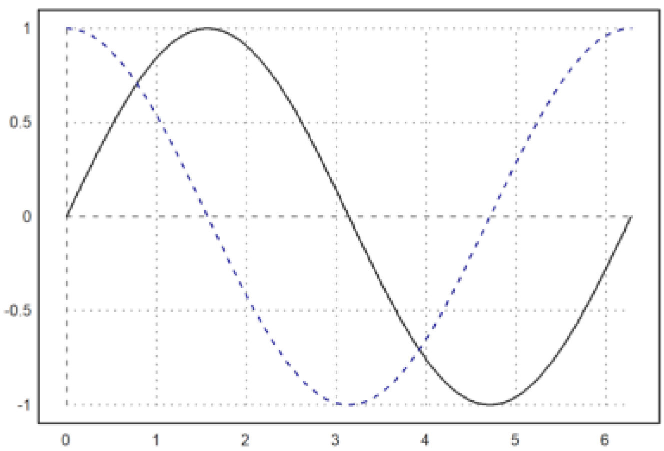
Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama

Plot lebih dari satu fungsi (multiple function) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan cara yang berbeda. Salah satu caranya adalah menggunakan >add untuk beberapa panggilan ke plot2d secara keseluruhan, kecuali panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini dalam contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```

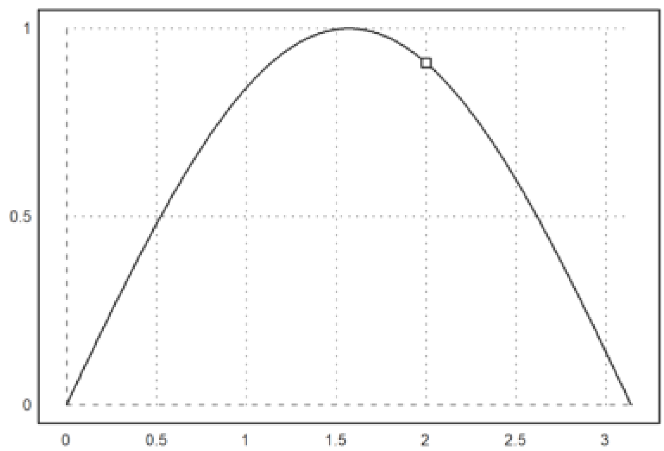



```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="--",>add):
```



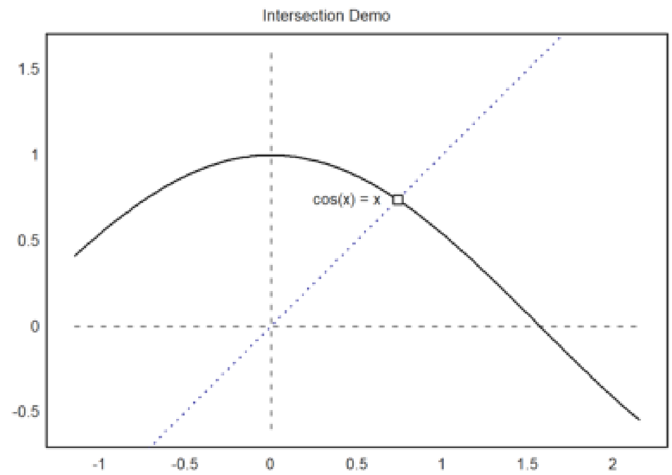
Salah satu kegunaan >add adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```



Kami menambahkan titik perpotongan dengan label (pada posisi ”cl” untuk kiri tengah), dan memasukkan hasilnya ke dalam buku catatan. Kami juga menambahkan judul ke plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
>  color=[black,blue],style=["-","."], ...
>  grid=1);
>x0=solve("cos(x)-x",1);  ...
>  plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo");  ...
>  label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```



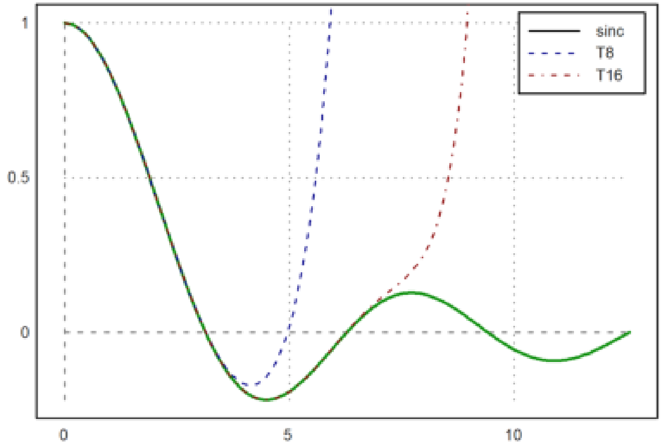
Dalam demo berikut, kita memplot fungsi sinc(x)=sin(x)/x dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung perluasan ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolik.
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke plot2d(). Yang kedua dan ketiga memiliki kumpulan tanda >add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.

Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsinya.

```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

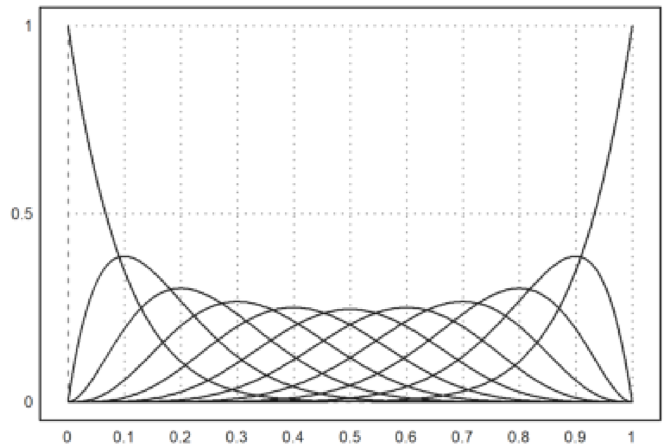
```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); ...
>  labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","--","-.-"], ...
>    colors=[black,blue,red]):
```



Dalam contoh berikut, kita menghasilkan Polinomial Bernstein.

$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

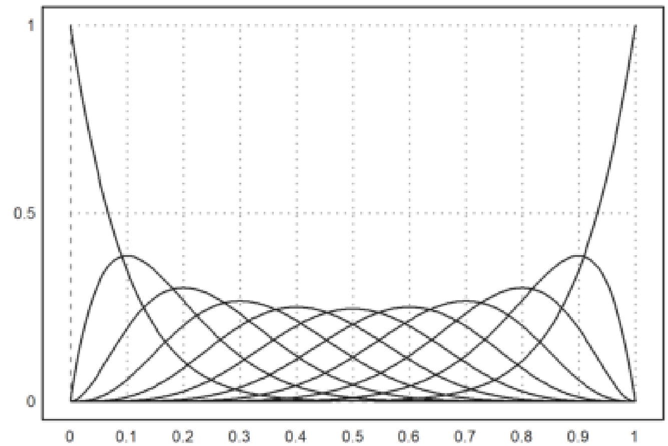
```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot first function
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;
>insimg;
```



Cara kedua adalah dengan menggunakan pasangan matriks bernilai x dan matriks bernilai y yang berukuran sama.

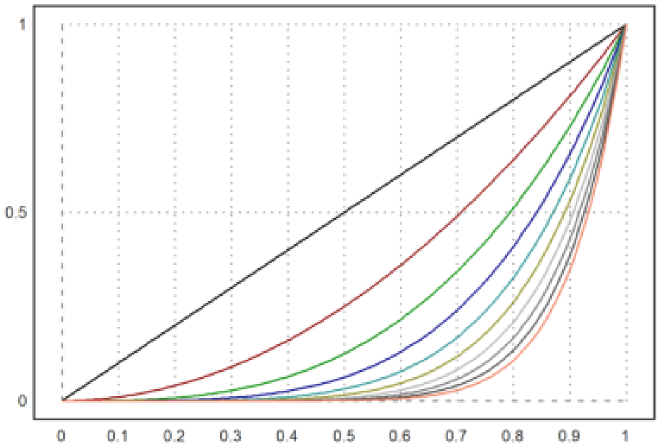
Kami menghasilkan matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pendahuluan tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y):
```



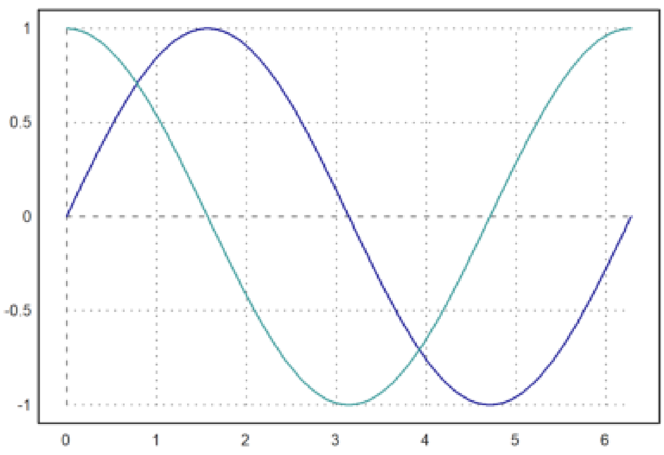
Perhatikan bahwa parameter color dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```

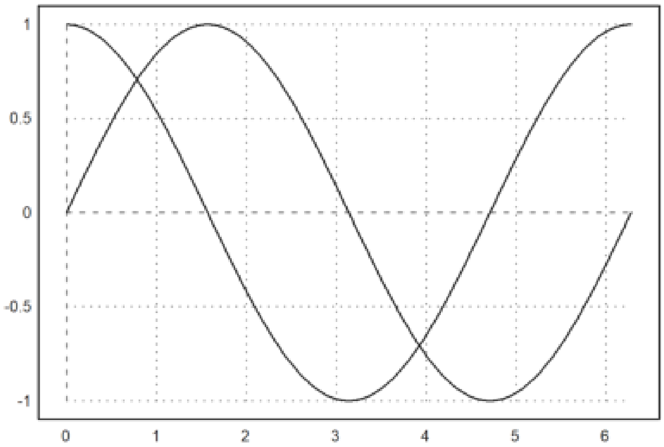


Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (strings). Anda kemudian dapat menggunakan susunan warna, gaya, dan susunan ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5):
```




```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi): // plot vector of expressions
```



Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

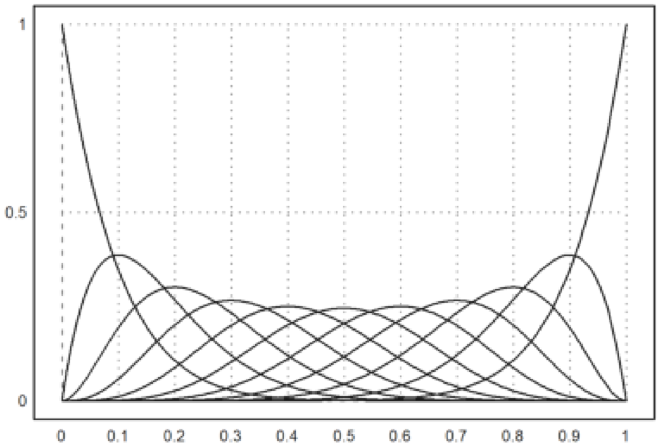
```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i),i,0,10) // make list
```

```
                 10              9                8  2                7  3
        [(1 - x)  , 10 (1 - x)  x, 45 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
            6  4             5  5               4  6               3  7
 210 (1 - x)  x , 252 (1 - x)  x , 210 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
           2  8              9   10
 45 (1 - x)  x , 10 (1 - x) x , x  ]
```

```
>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector
```

```
(1-x)^10
10*(1-x)^9*x
45*(1-x)^8*x^2
120*(1-x)^7*x^3
210*(1-x)^6*x^4
252*(1-x)^5*x^5
210*(1-x)^4*x^6
120*(1-x)^3*x^7
45*(1-x)^2*x^8
10*(1-x)*x^9
x^10
```

```
>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions
```

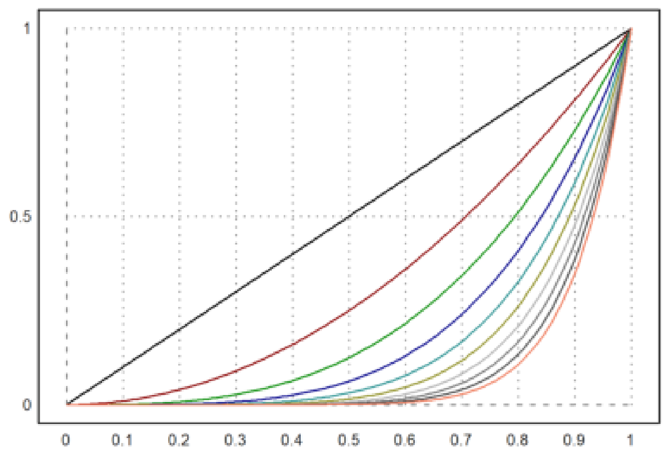


Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.

Jika suatu ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi tersebut akan diplot ke dalam satu plot.

Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika susunn warna ditambahkan maka akan digunakan untuk setiap baris plot.

```
>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):
```

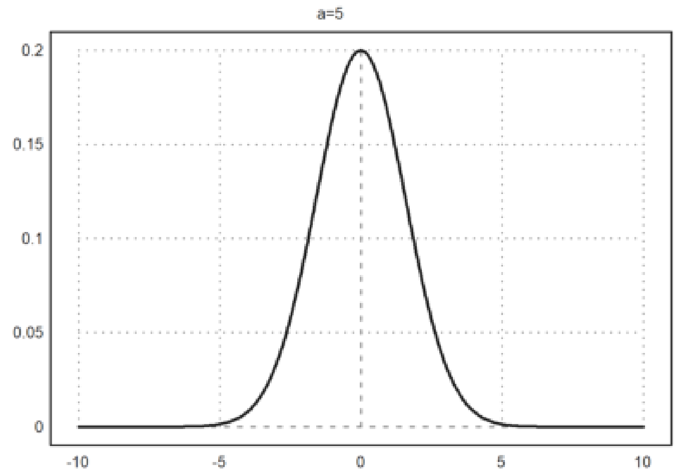


Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.

Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan ke akhir perintah plot2d. Dalam contoh kita meneruskan a = 5 ke fungsi f, yang kita plot dari -10 hingga 10.

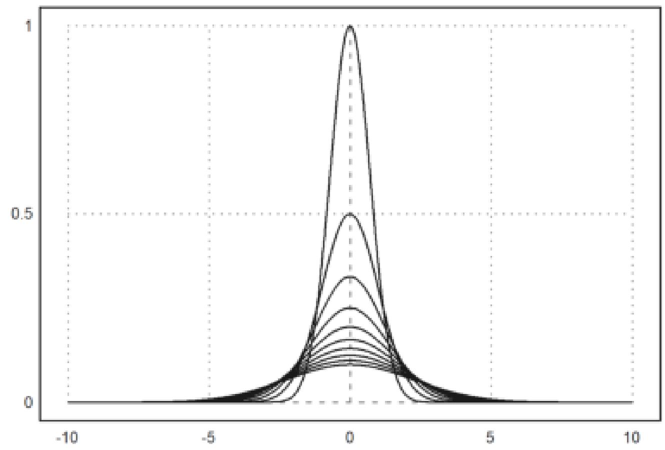
```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):
```



Alternatifnya, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut kumpulan panggilan, dan ini adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke suatu fungsi yang kemudian diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.

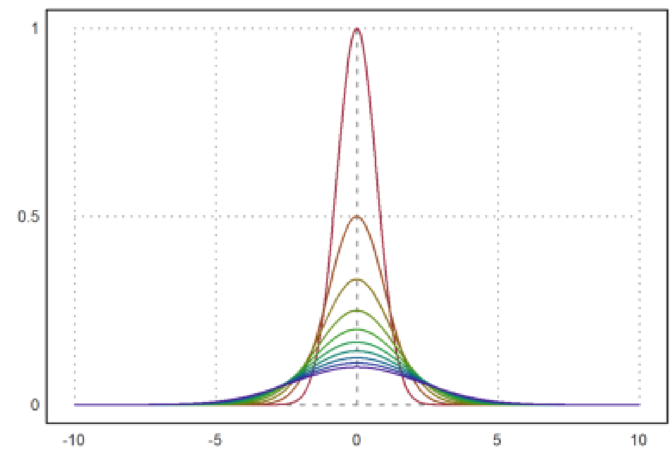
Pada contoh berikut, kita menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman loop).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```



Kita dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks f (x, a) adalah satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasan.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):
```



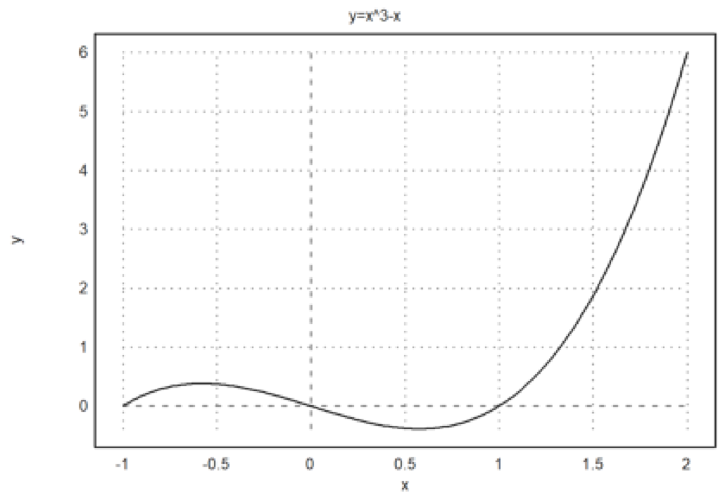
Label Text

Dekorasi sederhana bisa

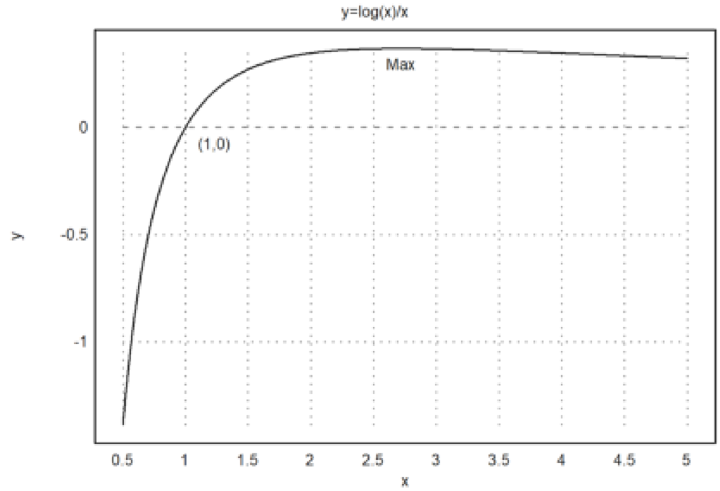
- judul dengan title=”...”
- label x dan y dengan xl=”...”, yl=”...”
- label teks lain dengan label(”...”,x,y)

Perintah label akan memplot ke plot saat ini di koordinat plot (x,y). Hal ini memerlukan argumen posisional

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x"):
```

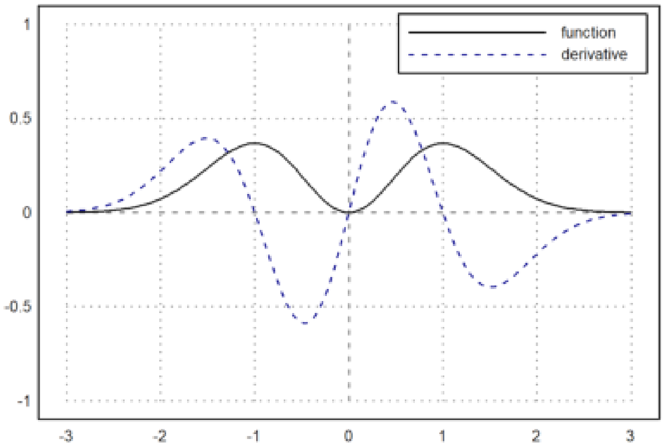



```
>expr := "log(x)/x"; ...
>  plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...
>  label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```



Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Dibutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2);  ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1);  ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="--"); ...
>labelbox(["function","derivative"],styles=["-","--"], ...
>   colors=[black,blue],w=0.4):
```

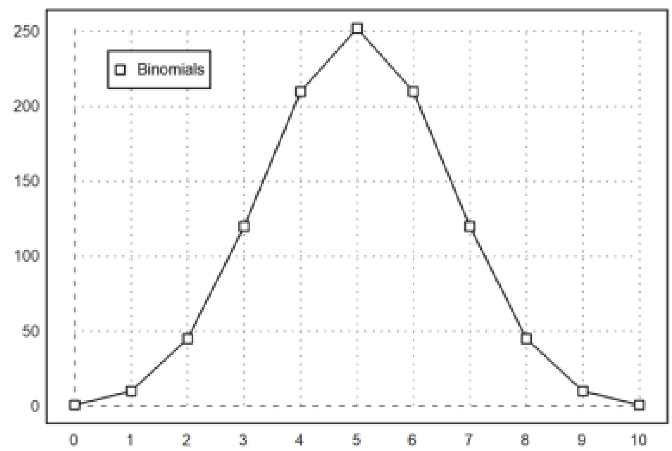


Kotak ini berlabuh di kanan atas secara default, tetapi >kiri berlabuh di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat mana pun yang Anda suka. Posisi jangkar berada di pojok kanan atas kotak, dan angkanya merupakan pecahan dari ukuran jendela grafis. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter >points, atau vektor bendera, satu untuk setiap label.

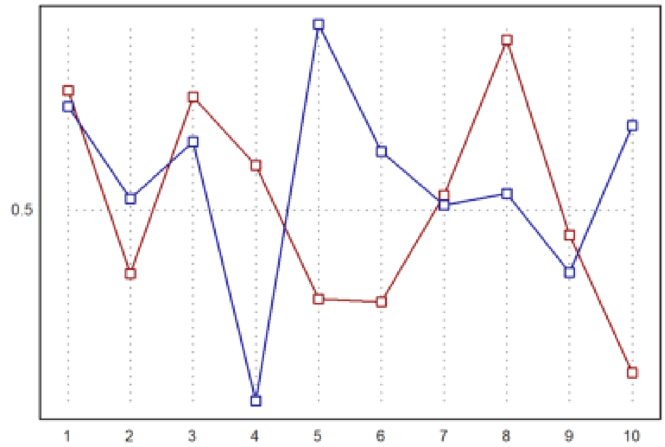
Dalam contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita bisa menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kami mengatur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
>labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
>tcolor=black,>left):
```



Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti pada plot2d() warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Ada lebih banyak plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

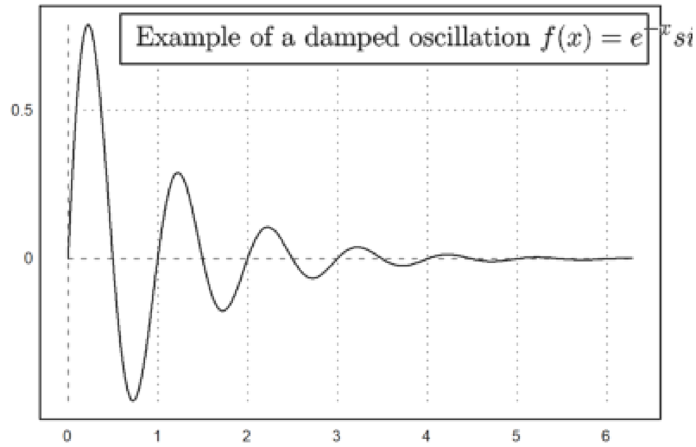
```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]):
```



Fitur serupa adalah fungsi textbox().

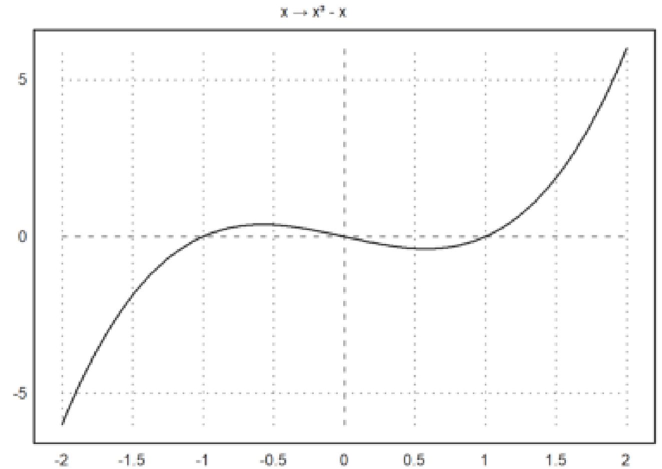
Lebarnya secara default adalah lebar maksimal baris teks. Tetapi itu bisa diatur oleh pengguna juga.

```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
>plot2d("f(x)",0,2pi); ...
>textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\ f(x)=e^{-x}sin(2\pi x)"),w=0.85):
```



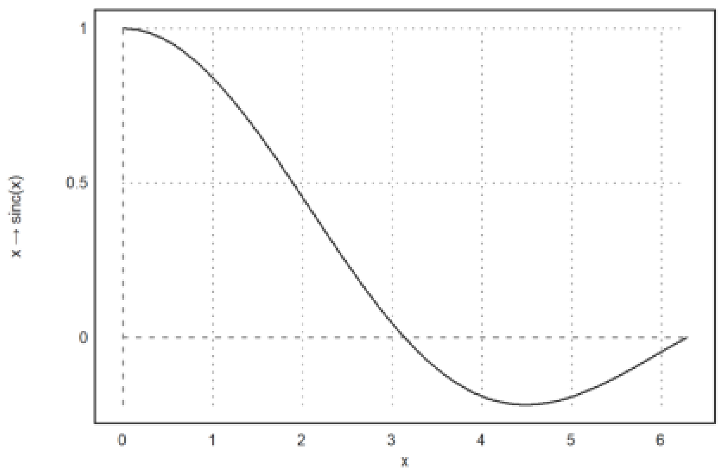
Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaks EMT untuk informasi lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x &rarr; x&sup3; - x"):
```



Label pada sumbu x dan y dapat vertikal, begitu juga dengan sumbunya.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x &rarr; sinc(x)",>vertical):
```



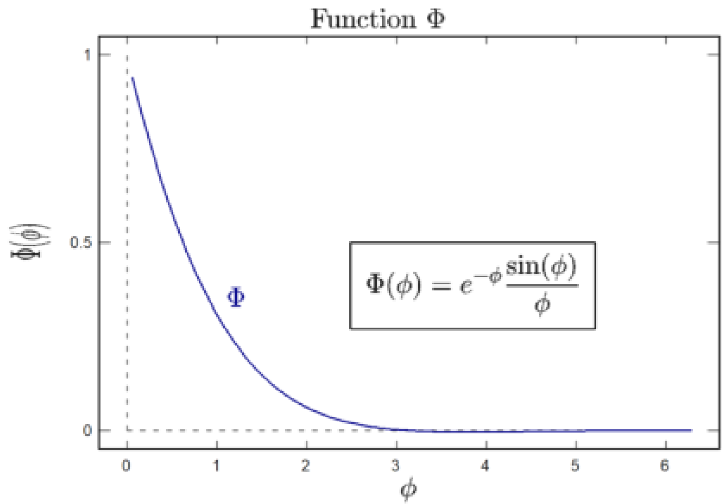
LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner "lateks" dan "dvipng" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX
di menu opsi

Perhatikan, bahwa penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil latex() sebelum loop sekali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

Pada plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label x dan y, label, kotak label, dan judul plot.

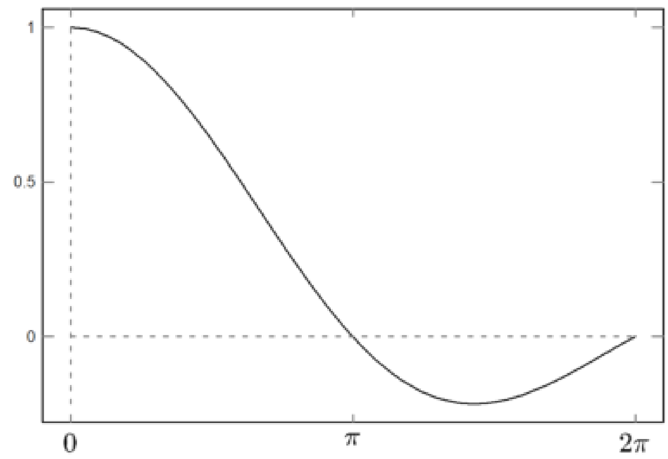
```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
>  title=latex("\text{Function $\Phi$}"), ...
>  xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
>textbox( ...
>  latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
>label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```



Seringkali, kita menginginkan spasi non-konformal dan label teks pada sumbu x. Kita dapat menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.

Cara termudah adalah dengan membuat plot kosong dengan frame menggunakan grid = 4, dan kemudian menambahkan grid dengan ygrid () dan xgrid (). Dalam contoh berikut, kita menggunakan tiga string LaTeX
untuk label pada sumbu x dengan xtick().

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
>ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
>xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6);  ...
>xtick([0,pi,2pi],["0","\pi","2\pi"],>latex):
```



Tentu saja, fungsinya juga bisa digunakan.

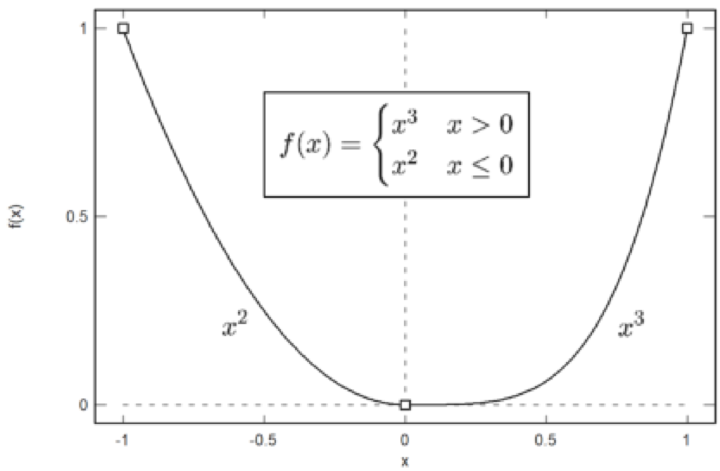
```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^4
  else return x^2
  endif
  endfunction
```

Parameter "peta" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk plot, itu tidak perlu. Tetapi untuk menunjukkan vektorisasi itu berguna, kami menambahkan beberapa poin penting ke plot di x = -1, x = 0 dan x = 1.

Dalam plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakannya untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya akan dapat menggunakan LaTeX jika Anda memiliki LaTeX diinstal dengan benar.

```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6);  ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
>  latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0\end{cases}"), ...
>  x=0.7,y=0.2):
```



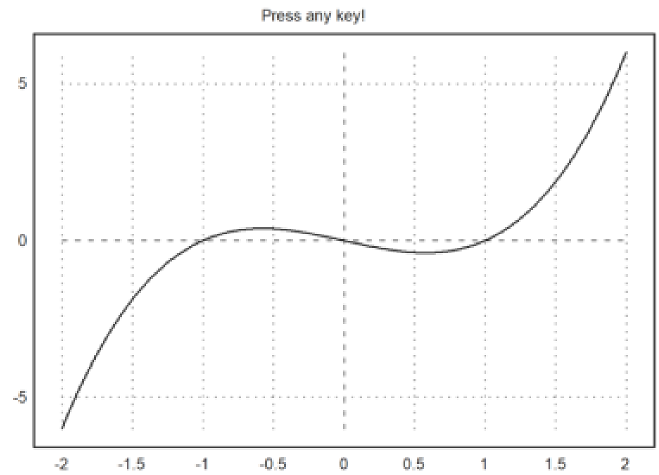
Saat merencanakan fungsi atau ekspresi, parameter >user memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau mouse. Pengguna dapat

- zoom dengan + atau -
- pindahkan plot dengan tombol kursor
- pilih jendela plot dengan mouse
- setel ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan return

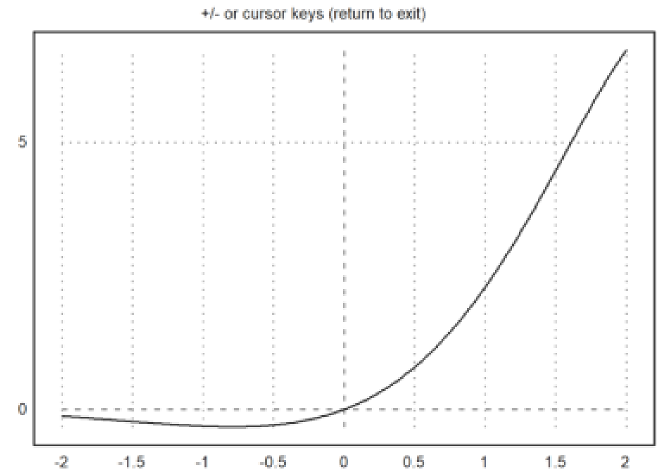
Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot asli.

Saat memplot data, flag >user hanya akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x",a=1}},>user,title="Press any key!"):
```




```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...
>  title="+/- or cursor keys (return to exit)"):
```



Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan mousedrag() menunggu aktivitas mouse atau keyboard. Ini melaporkan mouse ke bawah, gerakan mouse atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Sebagai contoh, kita melakukan interpolasi pada 5 titik dengan polinomial. Fungsi tersebut harus diplot ke dalam area plot tetap.

```
>function plotf(xp,yp,select) ...
```

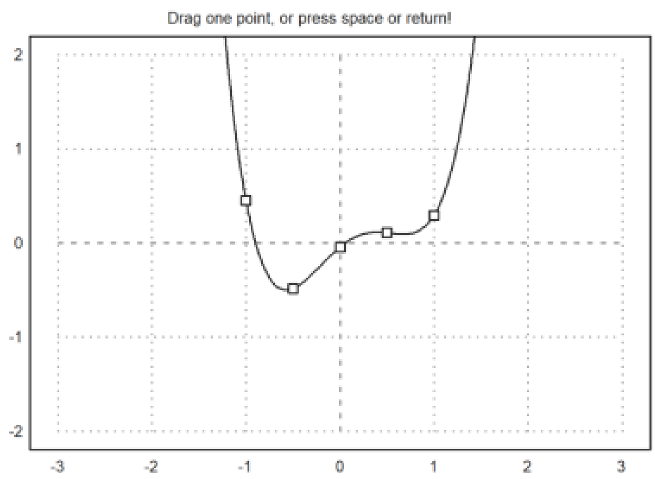
```
  d=interp(xp,yp);
  plot2d("interpval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
  plot2d(xp,yp,>points,>add);
  if select>0 then
```

```
    plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
  endif;
  title("Drag one point, or press space or return!");
endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma dalam plot2d (d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis fungsi plotinterp() terlebih dahulu, mengakses nilai secara global.

Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret titiknya.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5):
```



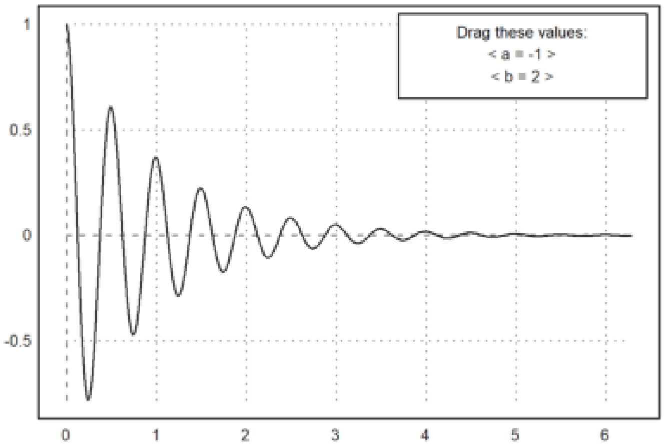
Ada juga fungsi yang memplot fungsi lain tergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.

Pertama kita membutuhkan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Maka kita perlu nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang nx2, opsional baris judul.
Ada penggeser interaktif, yang dapat mengatur nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
>  heading="Drag these values:",hcolor=black):
```



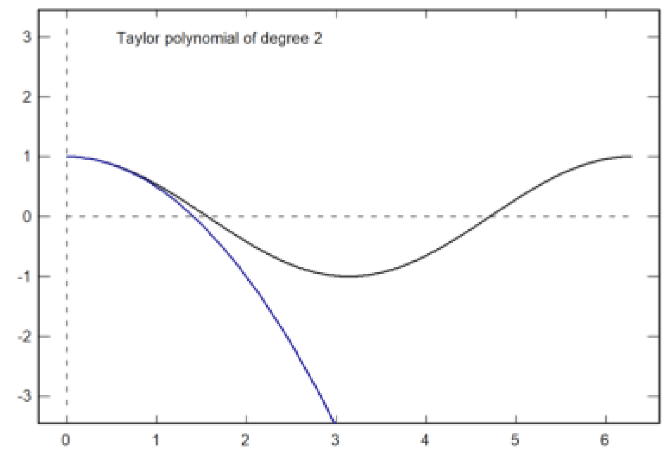
Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret menjadi bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor berderajat n ke fungsi kosinus.

```
>function plotf(n) ...
```

```
  plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
  plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
  textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
  endfunction
```

Sekarang kita mengizinkan derajat n bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 pemberhentian. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
>   heading="Drag the value:"); ...
>plotf(nd):
```



Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsinya. Pengguna dapat menggambar jendela plot, meninggalkan jejak titik.

```
>function dragtest ...
```

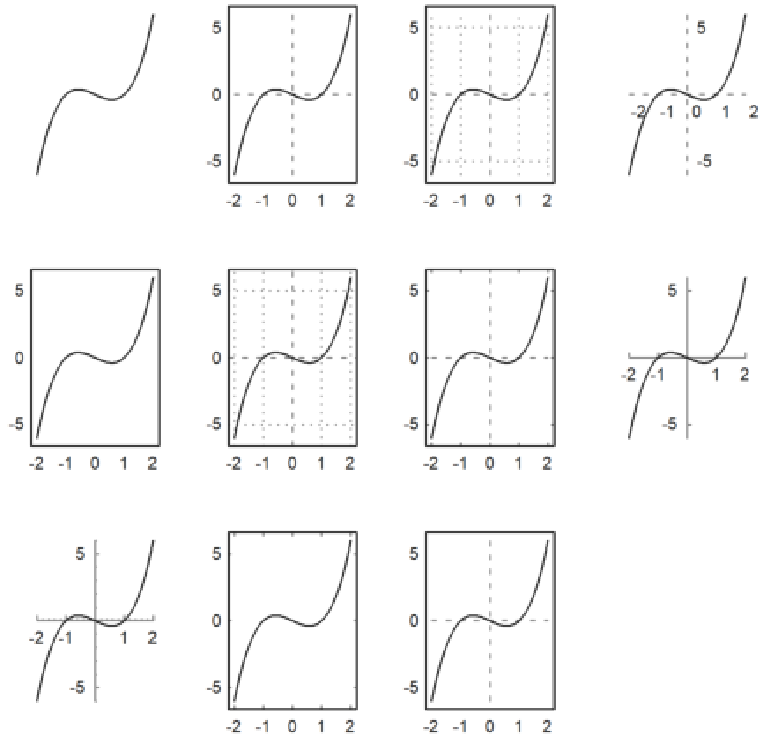
```
    plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
    start=0;
    repeat
      {flag,m,time}=mousedrag();
      if flag==0 then return; endif;
      if flag==2 then
        hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
      endif;
    end
  endfunction
```

```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

Gaya plot 2D

Secara default, EMT menghitung tick sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tick. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat dimodifikasi. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk mengatur ulang ke gaya default, gunakan reset().

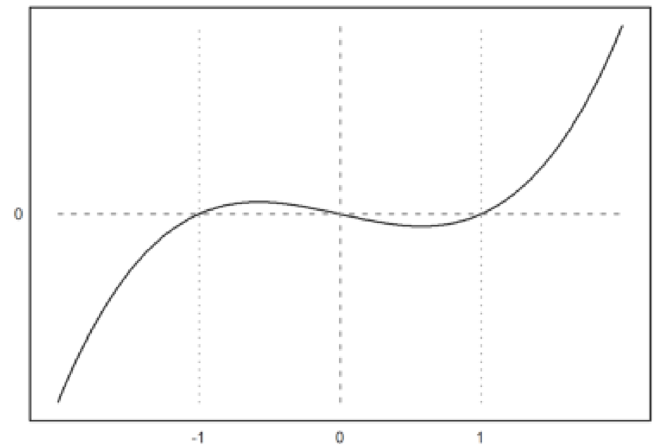
```
>aspect();
>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // no grid, frame or axis
> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis
> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // default ticks
> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside
> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels
> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // axes only
> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis
> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis
> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside
> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only
> figure(0):
```



Parameter <frame mematikan frame, dan framecolor=blue mengatur frame menjadi warna biru.

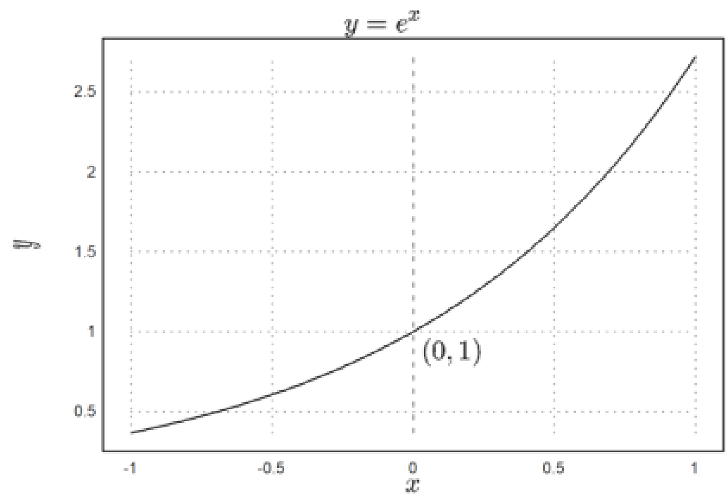
Jika Anda menginginkan tanda centang Anda sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0): // add frame and grid
```



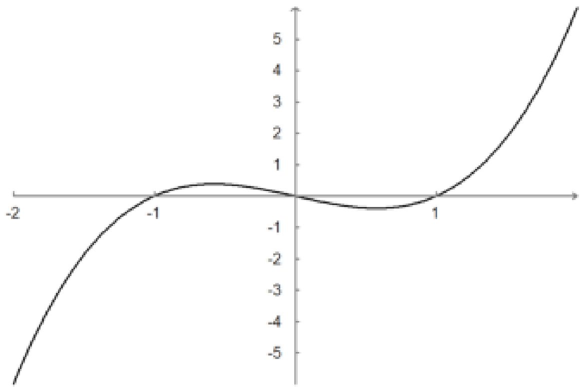
Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

```
>plot2d("exp(x)",-1,1);
>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")); // title above the plot
>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis
>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue): // label a point
```



Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan xaxis() dan yaxis().

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):
```

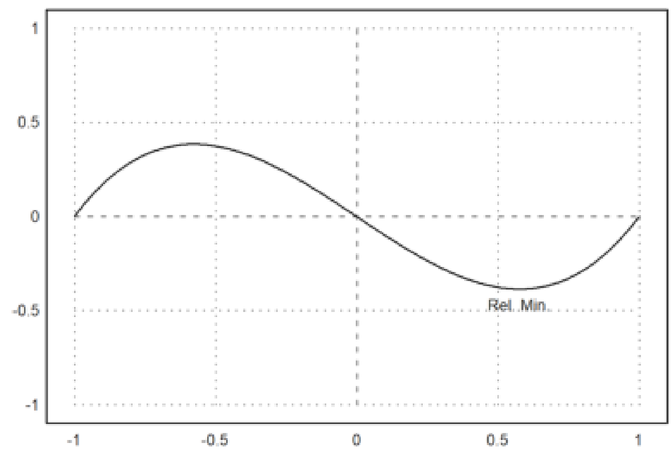


Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti bagian pusat/tengah bawah. Ini menetapkan posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

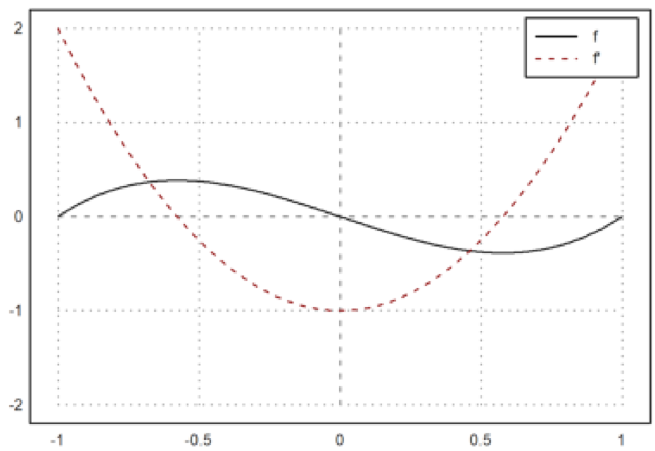
```
                                 3
                                x  - x
```

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"): // add a label there
```

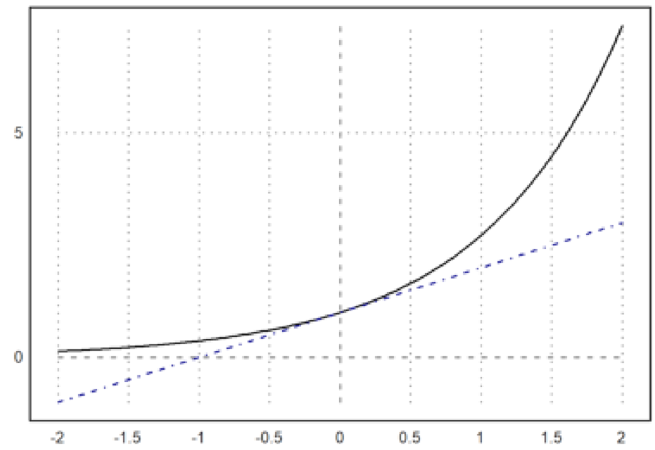


Ada juga kotak teks.

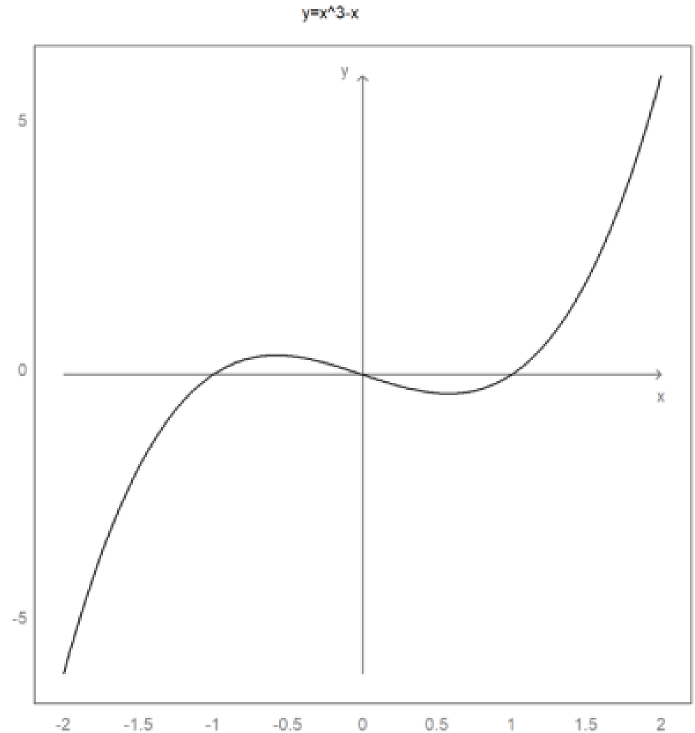
```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // derivative
>labelbox(["f","f'"],["-","--"],[black,red]): // label box
```




```
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-","-.-"]):
```



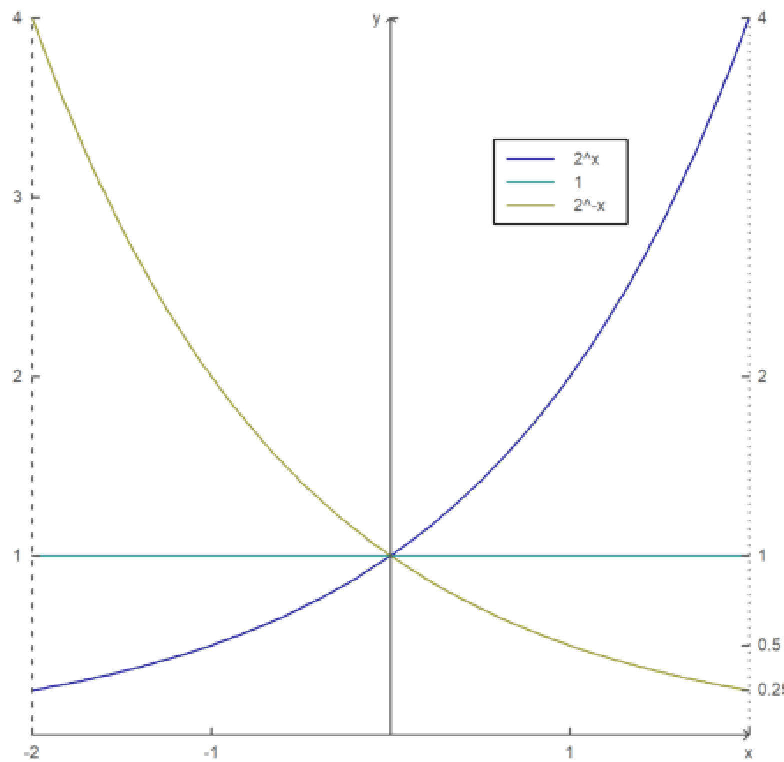

```
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray);  ...
> plot2d("x^3-x",grid=1);   ...
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray);  ...
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...
> reset():
```



Untuk kontrol lebih lanjut, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.

Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi membutuhkan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk menyetel ulang ke default.

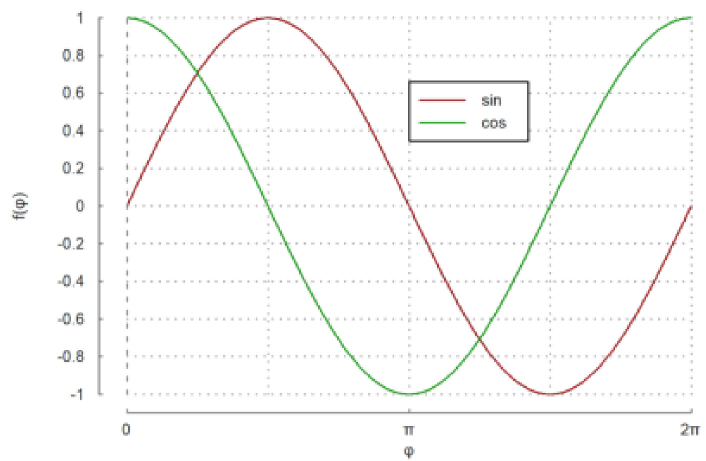
```
>fullwindow; ...
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
> plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
> yaxis(-2,1:4,>left); ...
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
> labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
> reset:
```



Berikut adalah contoh lain, dimana string Unicode digunakan dan sumbu di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0",u"&pi;",u"2&pi;"],style="-",>ticks,>zero);  ...
> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
```

```
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
> xlabel(u"&phi;"); ylabel(u"f(&phi;)"):
```



Jika x dan y adalah vektor data, maka data tersebut akan digunakan sebagai koordinat x dan y pada suatu kurva. Dalam hal ini, a, b, c, dan d, atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan
secara otomatis dengan data. Alternatifnya, >square dapat diatur untuk mempertahankan rasio aspek persegi.

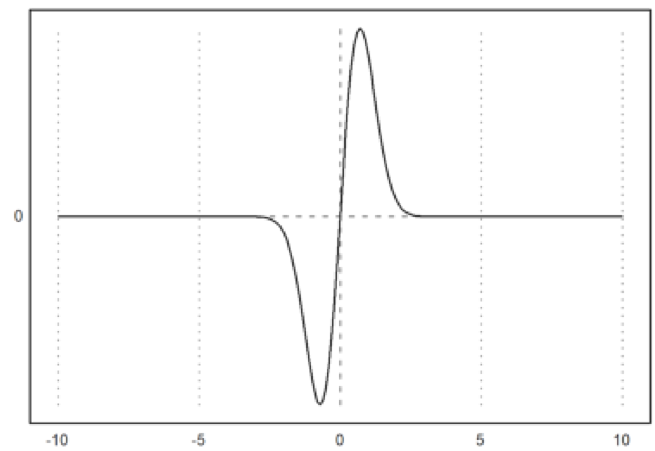
Memplot ekspresi hanyalah singkatan dari plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x, dan satu atau beberapa baris nilai y. Dari rentang dan nilai x, fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan ">titik", untuk garis dan titik campuran gunakan ">addpoints".

Tetapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.

- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.

Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y.

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):
```

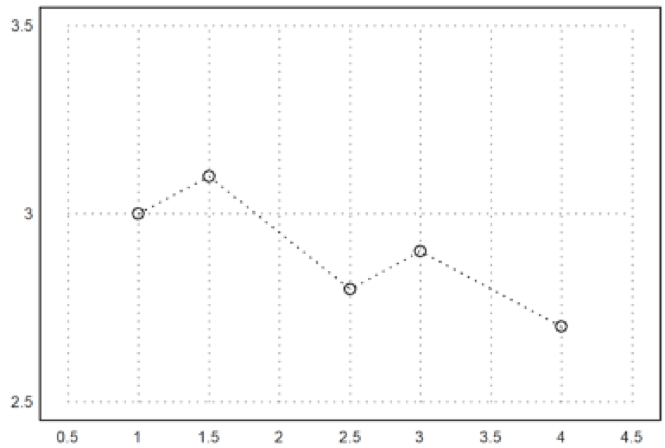


Data juga dapat diplot sebagai poin. Gunakan points=true untuk ini. Plotnya bekerja seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudutnya saja.

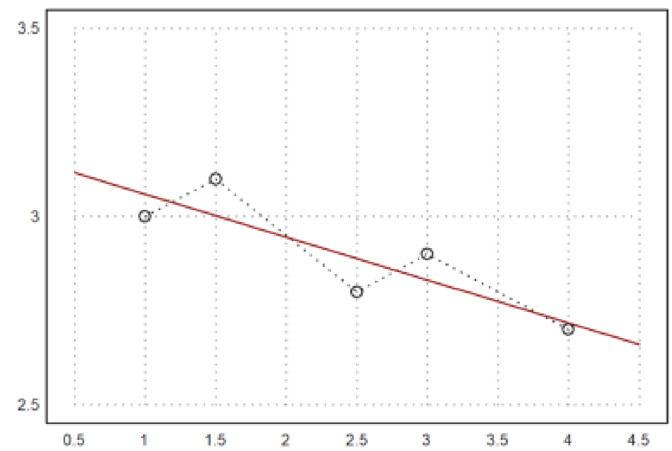
- style=”...”: pilih dari ”[]”, ”<>”, ”o”, ”.”, ”..”, ”+”, ”*”, ”[]”, ”<>”, ”o”, ”..”, ””, ”|”.

Untuk memplot kumpulan titik, gunakan >poin. Jika warnanya adalah vektor warna, masing-masing titik mendapat warna yang berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna berlaku untuk baris matriks.
Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen baris untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // add points
```




```
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // add plot of line
```


3.5
3
2.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

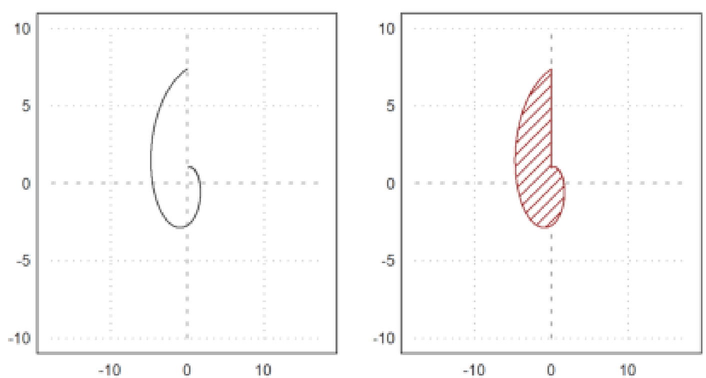
Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

Plot data sebenarnya berbentuk poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.

- filled=true mengisi plot.
- style=”...”: Pilih dari ””, ”/”, ”\”, ”\/”.
- Fillcolor : Lihat di atas untuk mengetahui warna yang tersedia.

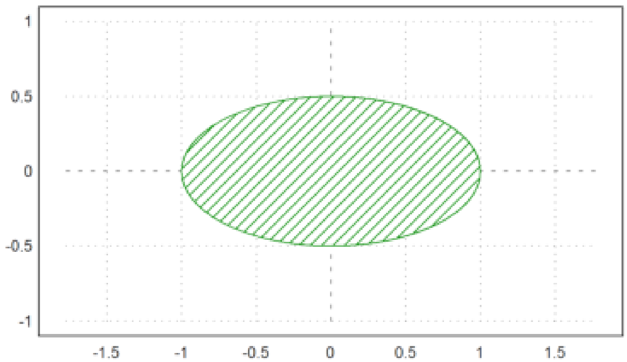
Warna isian ditentukan oleh argumen ”fillcolor”, dan pada <outline opsional, mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali gaya default

```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```

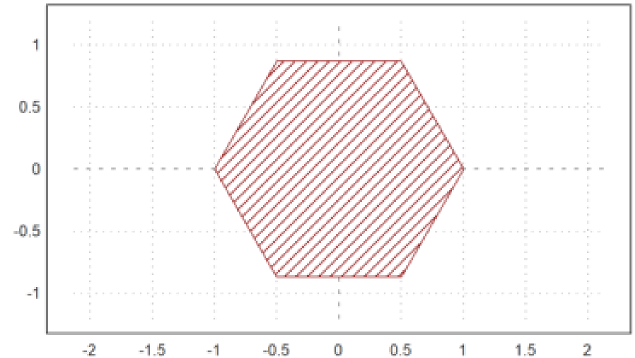


Dalam contoh berikut, kami memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian yang berbeda.

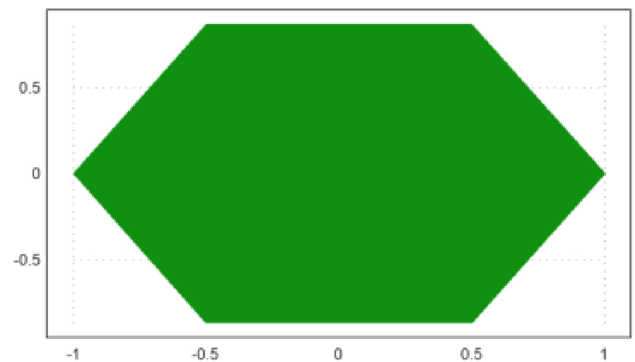
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```




```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
>plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
```

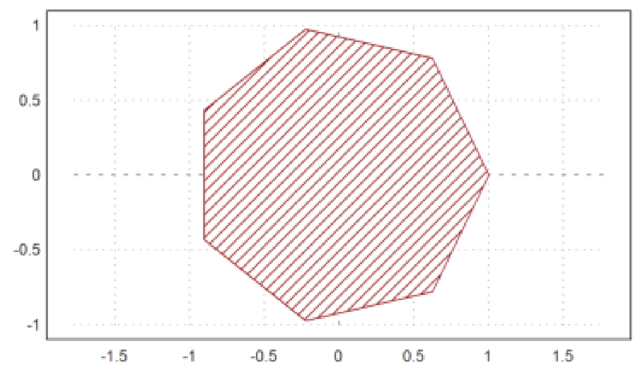



```
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```



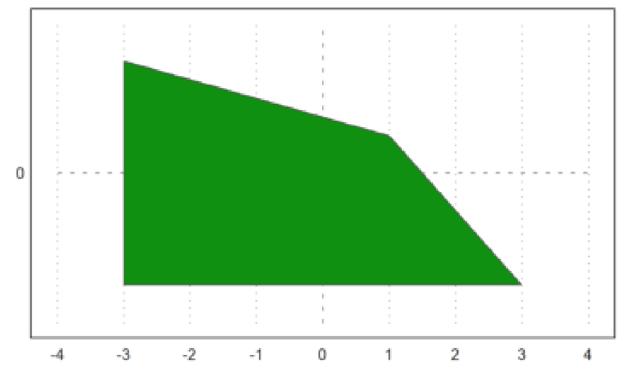
Contoh lainnya adalah septagon, yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran unit.

```
>t=linspace(0,2pi,7);  ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):
```



Berikut ini adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah A[k].v<=3 untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kami menggunakan n relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```

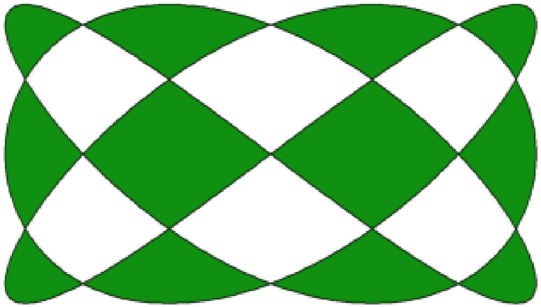


Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan untuk menghasilkan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

Kita sekarang memiliki nilai vektor x dan y. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik tersebut. Plotnya bisa diisi. Pada kasus ini, ini memberikan hasil yang bagus karena aturan belitan, yang digunakan untuk isi.

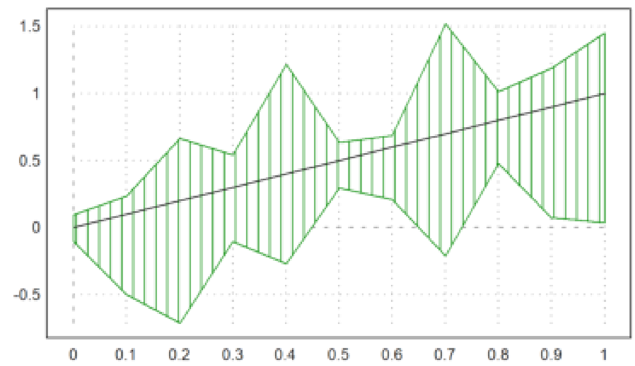
```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```



Vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai wilayah terisi antara nilai interval yang lebih rendah dan lebih tinggi.

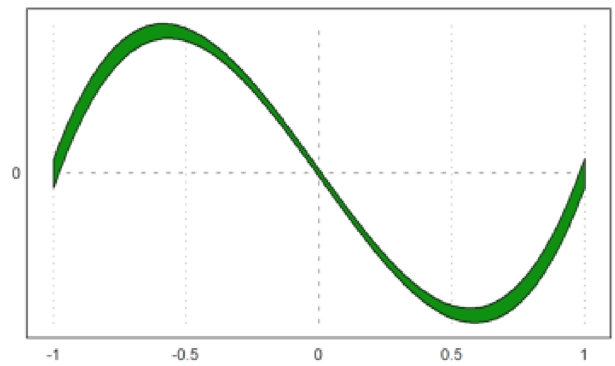
Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu dapat juga dapat digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|");  ...
> plot2d(t,t,add=true):
```



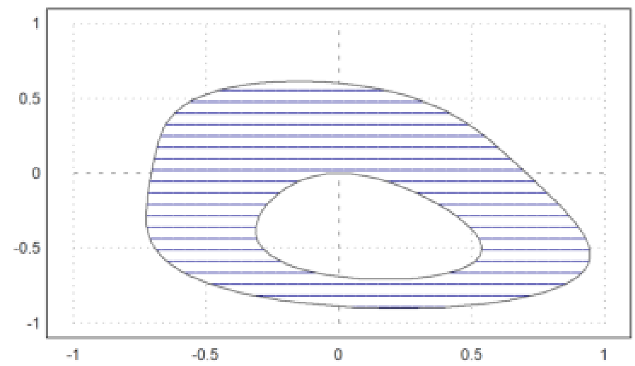
Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi di bidang. Gaya isiannya sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=~t-0.01,t+0.01~; y=x^3-x;
>plot2d(t,y):
```



Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Bagi Ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

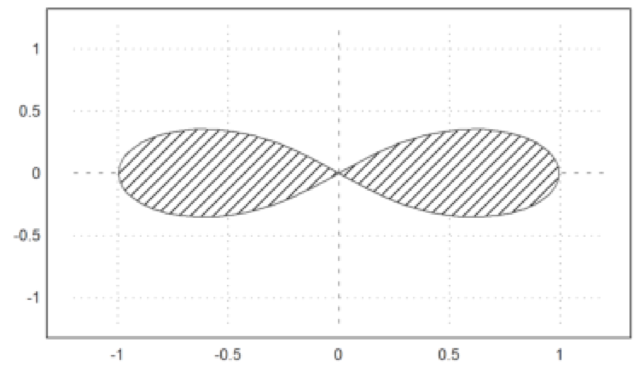
```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```



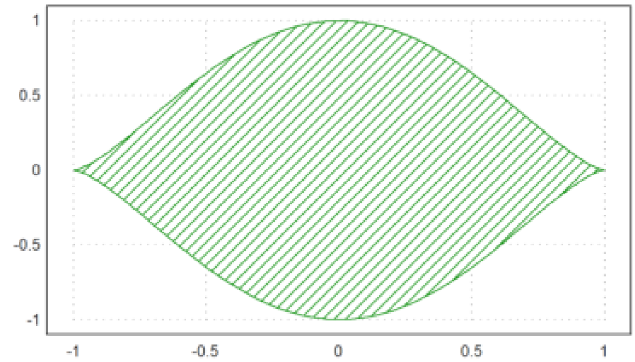
Kita juga dapat mengisi rentang nilai seperti

$$-1 \le (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \le 0.$$

```
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/"):
```




```
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/"):
```



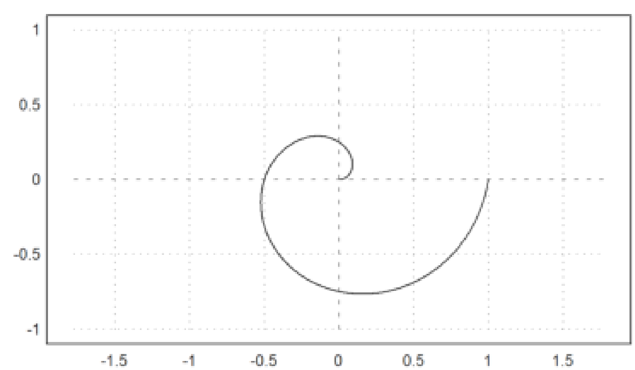
Nilai x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan kurva. Jika x diurutkan, kurva adalah grafik fungsi.

Dalam contoh berikut, kita memplot spiral

$$\gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

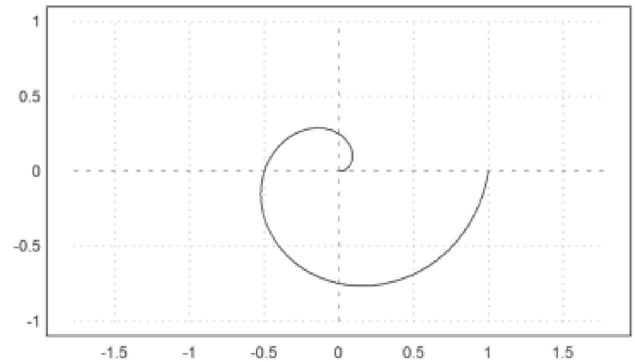
Kita juga perlu menggunakan banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptive() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptive() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```

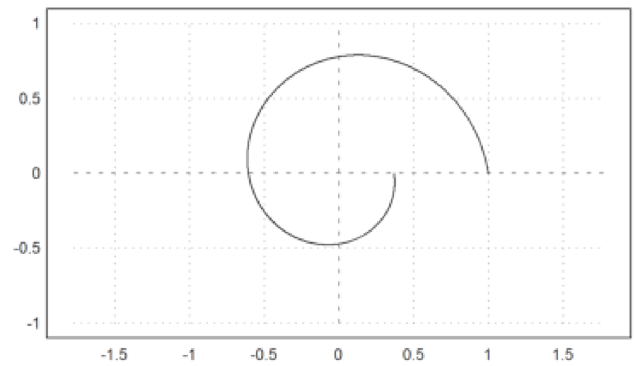


Sebagai alternatif, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):
```




```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);
>plot2d(x,y,r=1):
```



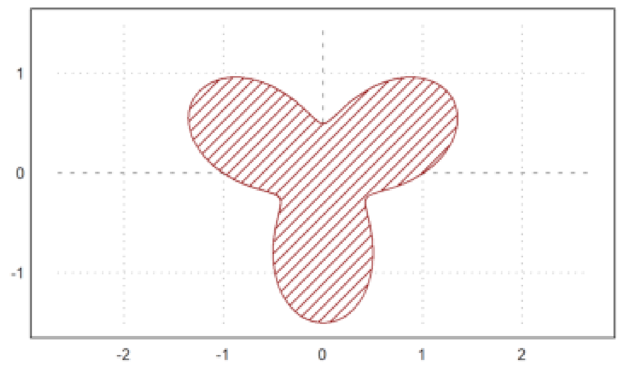
Pada contoh berikutnya, kita memplot kurva

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
```



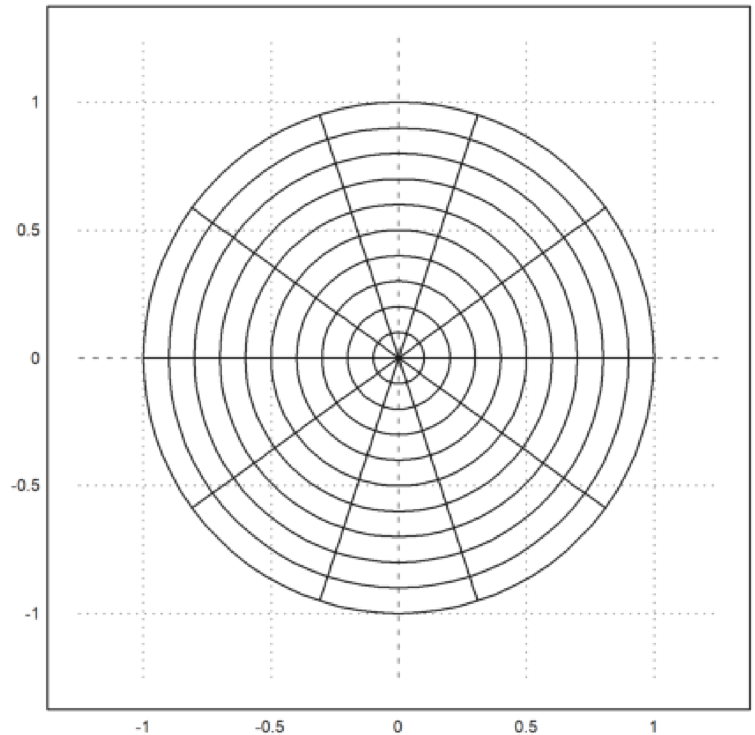
1
0
-1
-2
-1
0
1
2

Serangkaian bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan dihubungkan. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1x2) dalam argumen cgrid, hanya garis kisi tersebut yang akan terlihat.

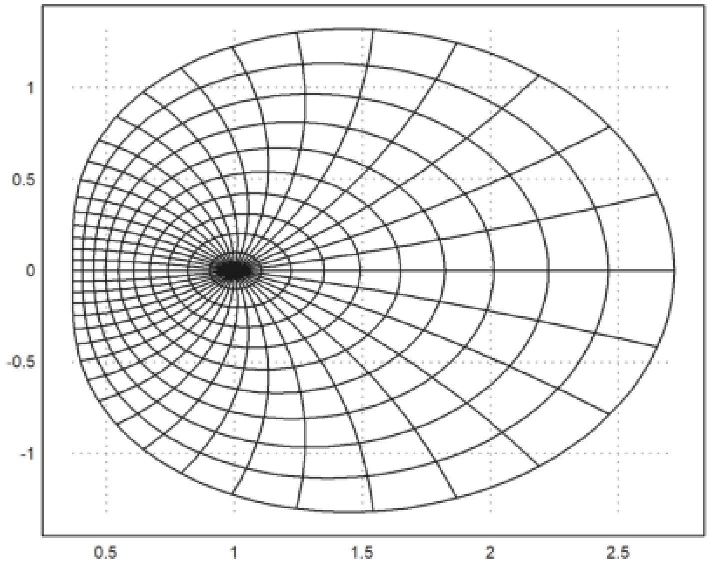
Matriks bilangan kompleks secara otomatis akan diplot sebagai kisi-kisi pada bidang kompleks.

Pada contoh berikut, kita memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

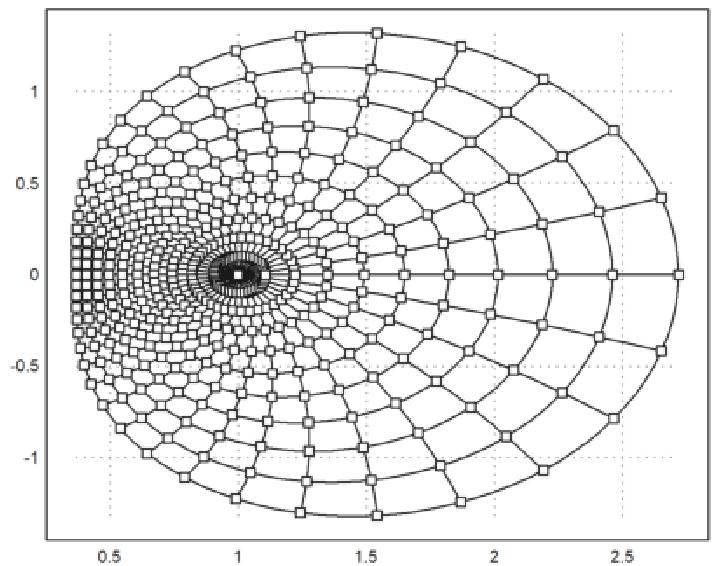
```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```




```
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```




```
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add):
```

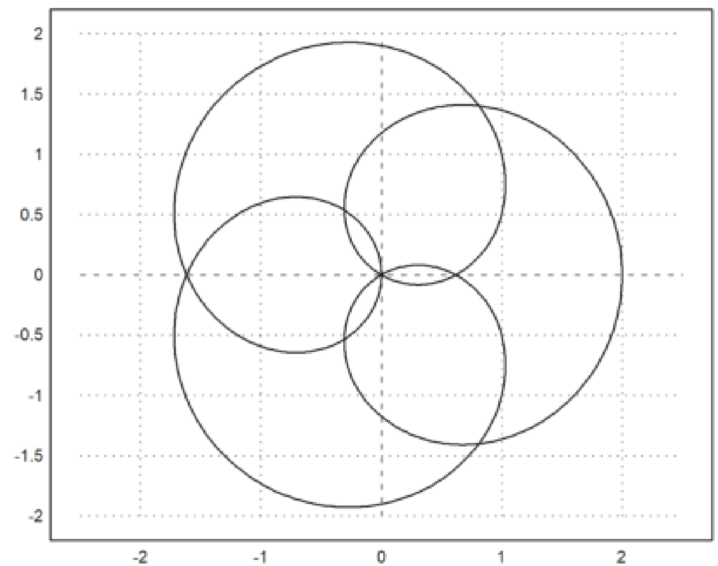


Vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva dalam bidang kompleks dengan bagian nyata dan bagian imajiner.

Dalam contoh, kita memplot lingkaran unit dengan

$$\gamma(t) = e^{it}$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1
0
1
2

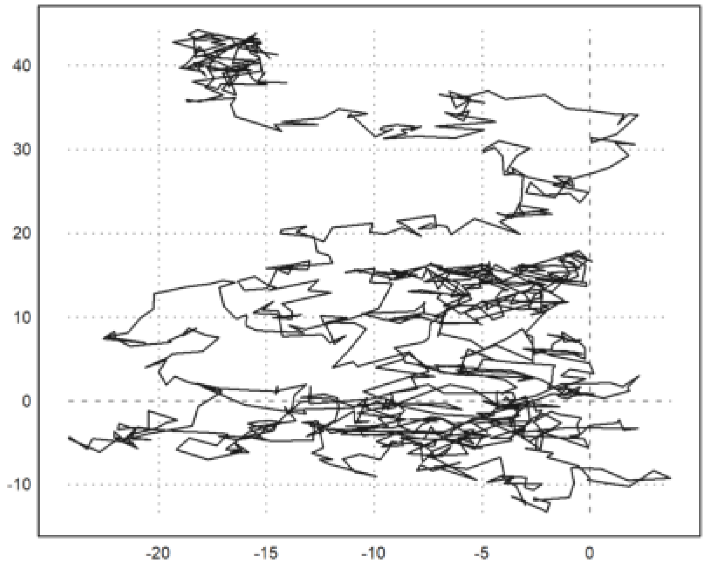
Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.

Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi normal 0-1 menghasilkan jalan acak.

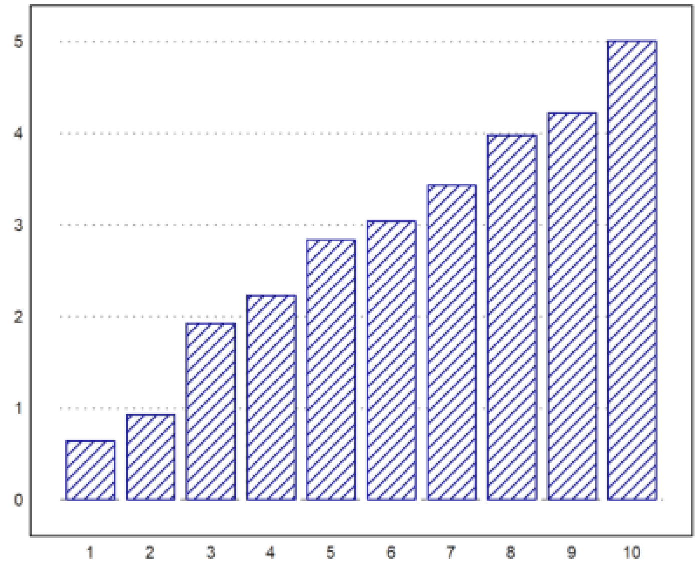
```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```

Penggunaan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```

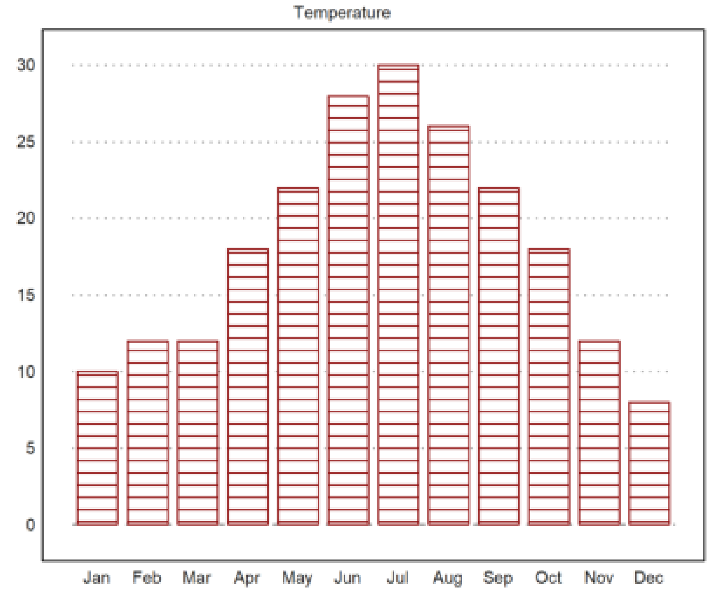



```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue):
```

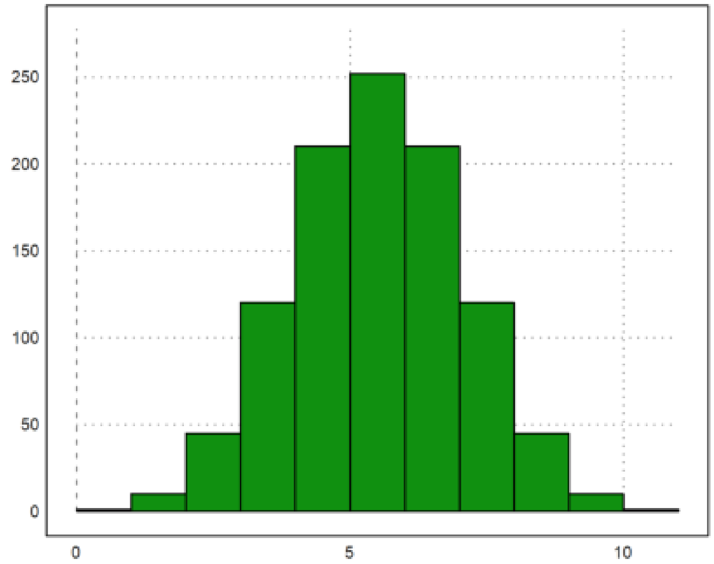


Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.

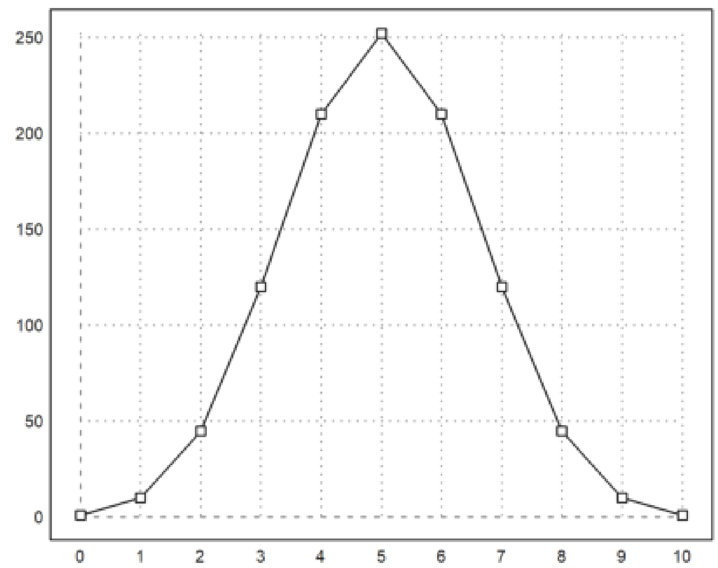
```
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...
>  "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");
>title("Temperature"):
```



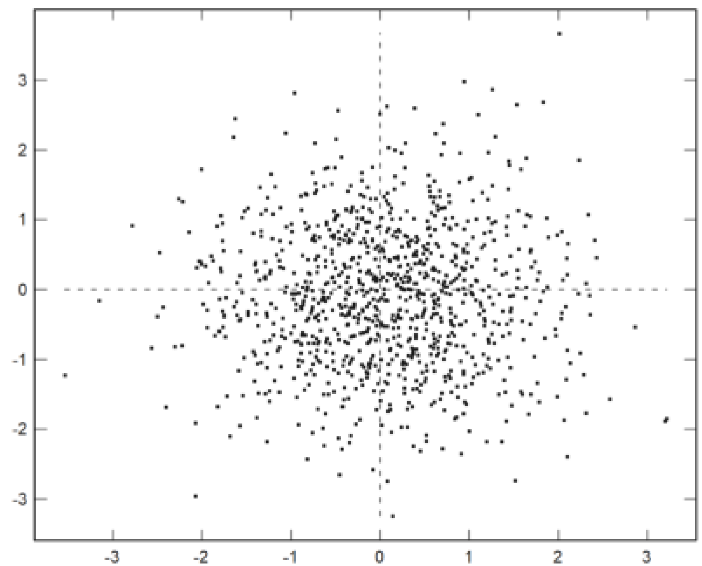

```
>k=0:10;
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```



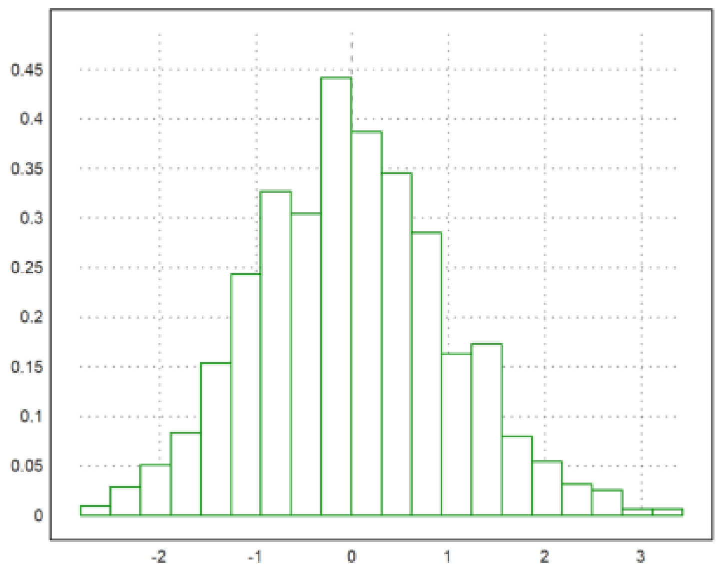

```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```



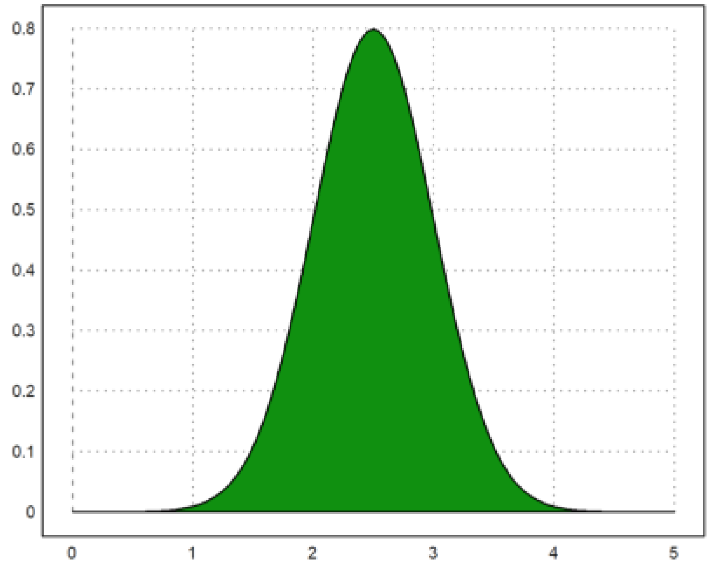

```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style=".."):
```




```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="0"):
```

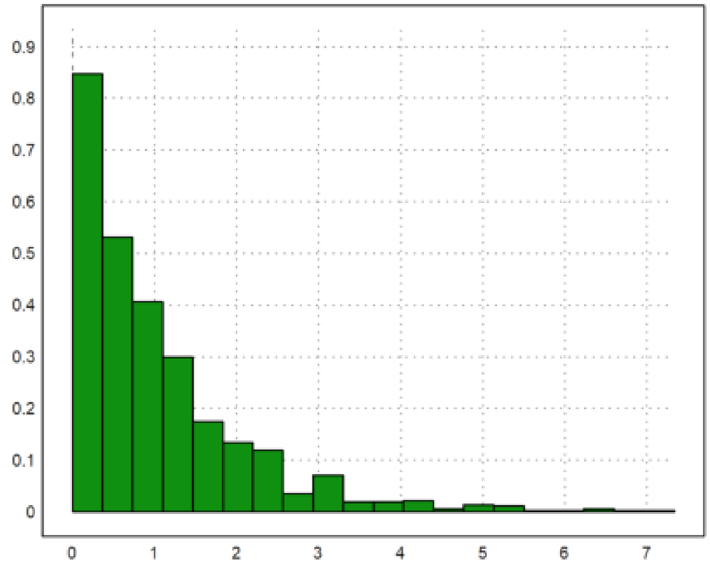



```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```



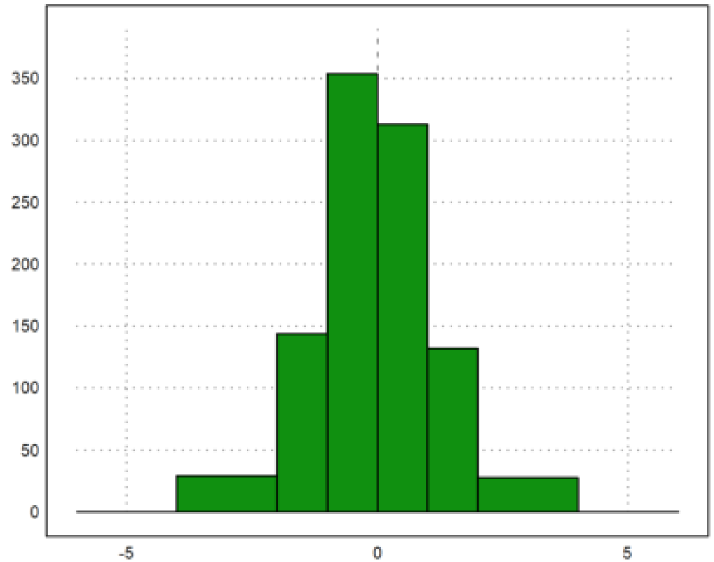
Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

```
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals
```



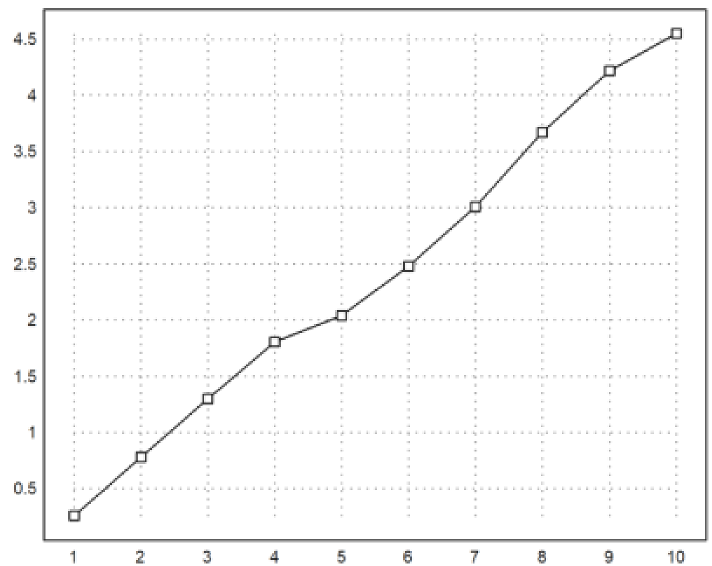
Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
>plot2d(x,y,>bar):
```

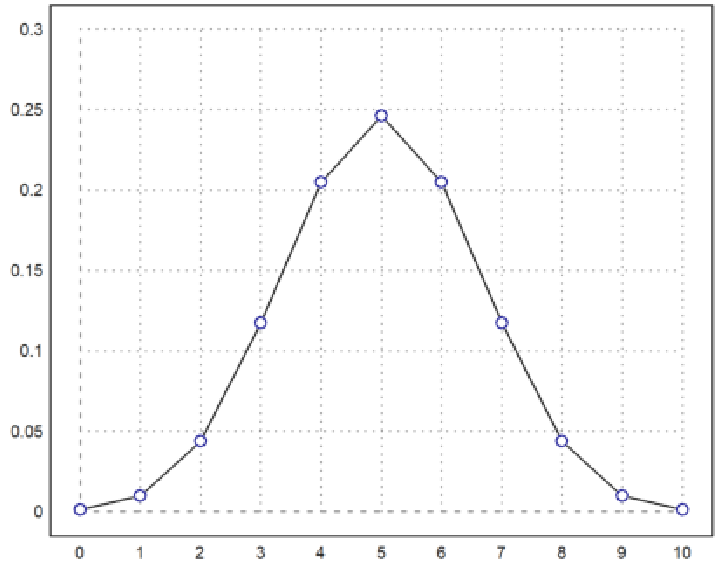


Fungsi statplot() mengatur gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),"b"):
```



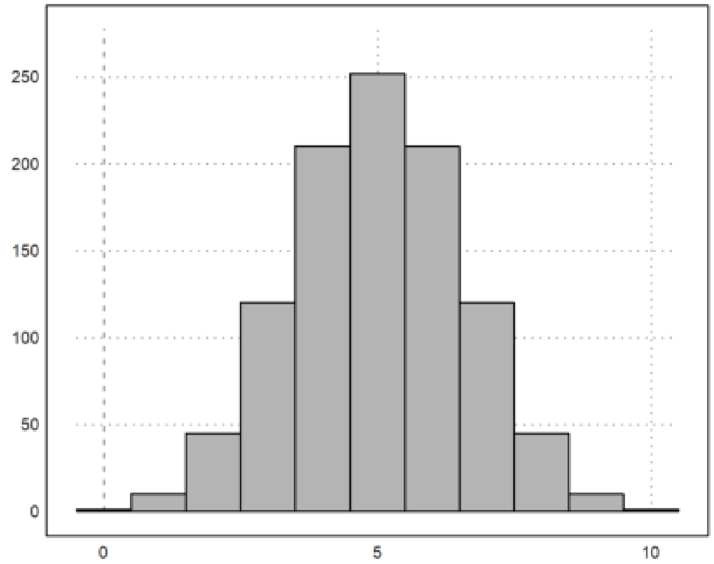

```
>n=10; i=0:n; ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```



Selain itu, data dapat diplot sebagai bar. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Batangnya akan memanjang dari x[i] hingga x[i+1] dengan nilai y[i]. Jika x berukuran sama dengan y, maka x akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir.

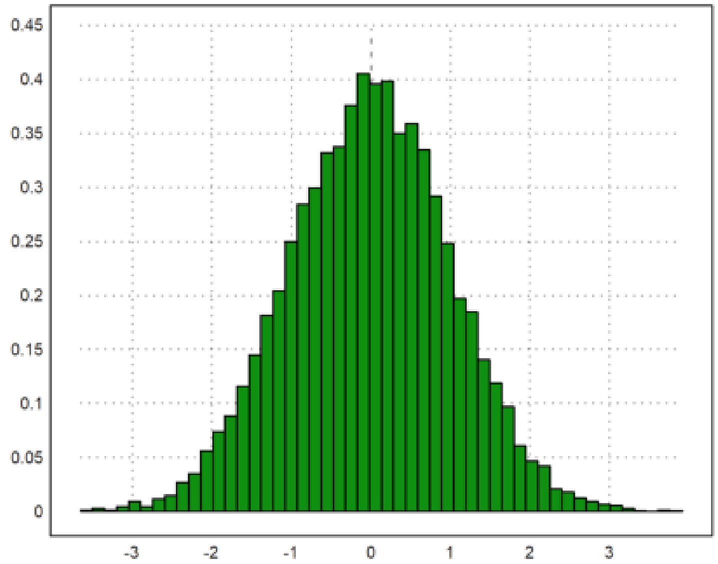
Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
>plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```

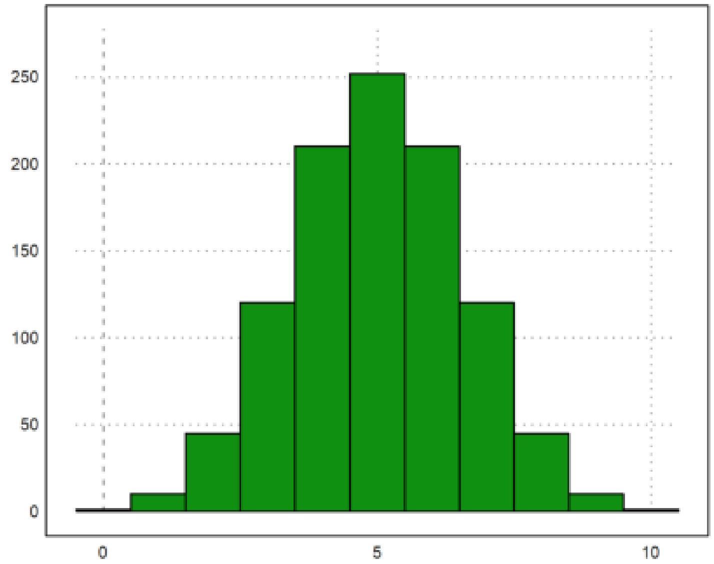


Data untuk plot batang (bar=1) dan histogram (histogram=1) dapat diberikan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribusi (atau distribusi=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >even ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

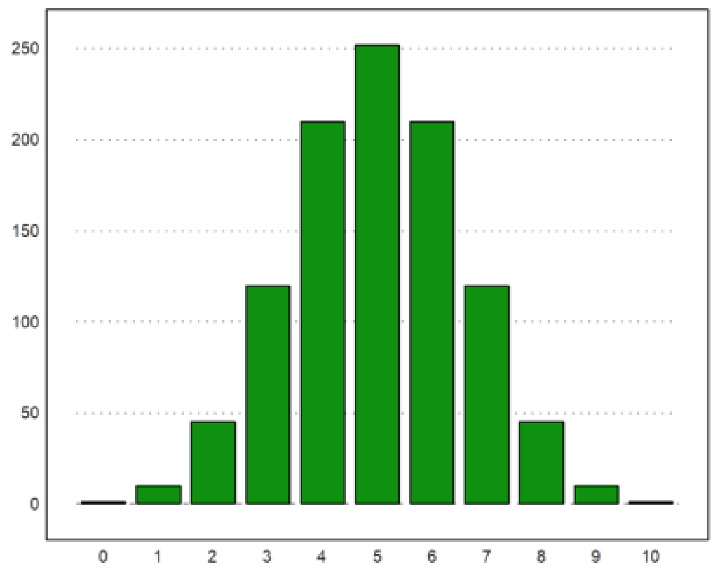
```
>plot2d(normal(10000),distribution=50):
```



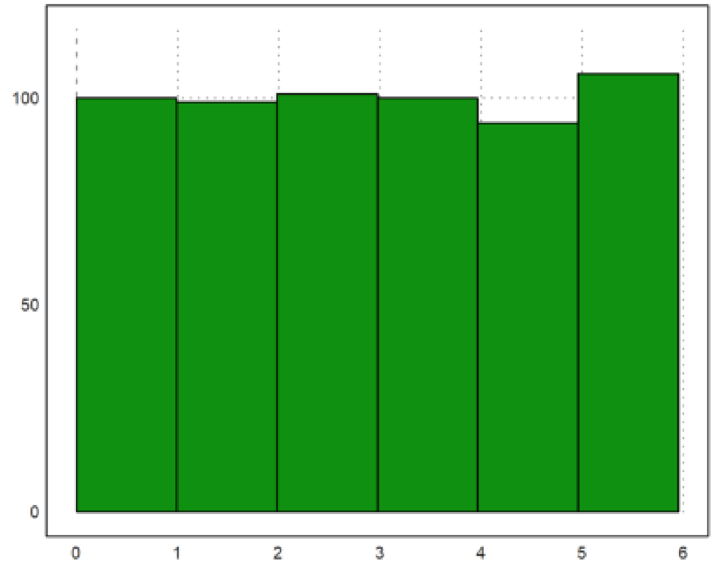

```
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```




```
>columnsplot(m,k):
```

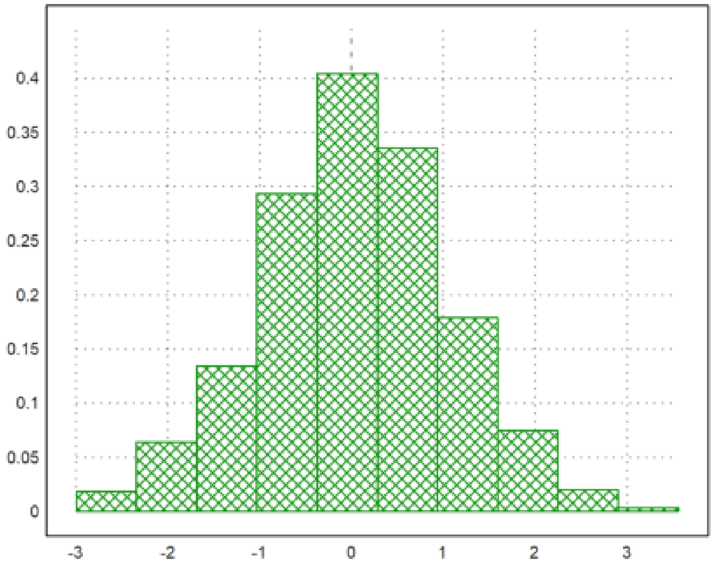



```
>plot2d(random(600)*6,histogram=6):
```



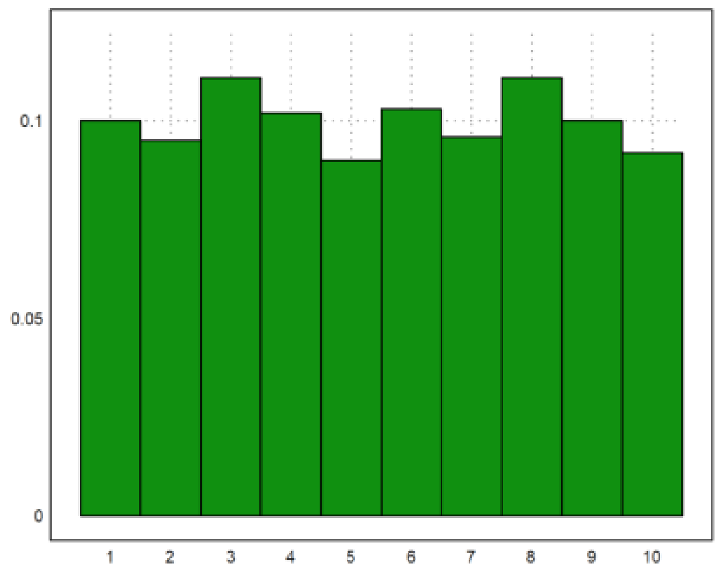
Untuk distribusi, ada parameter distribution=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\/"):
```



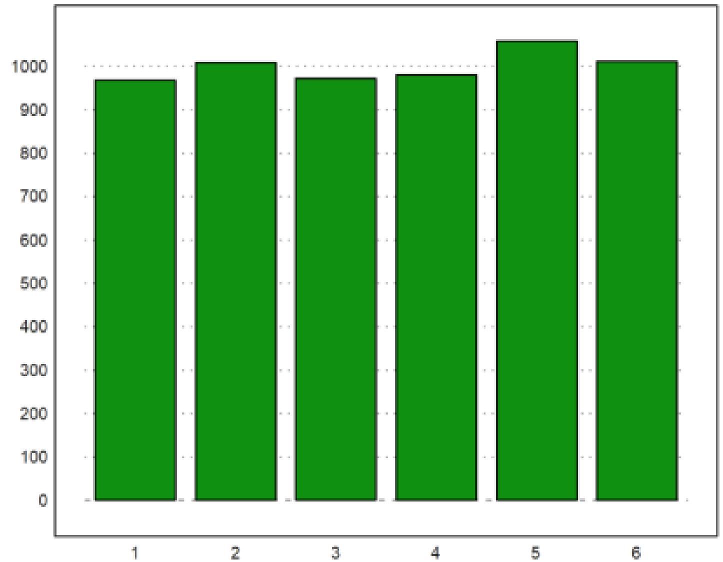
Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval bilangan bulat.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```

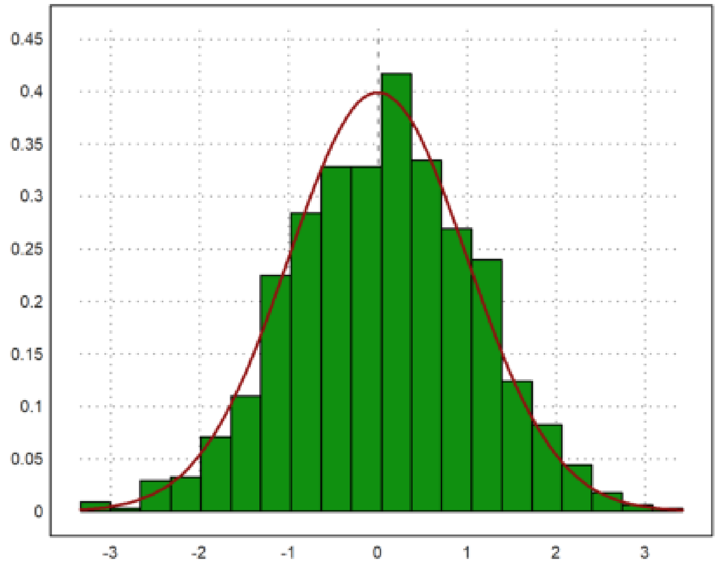


Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```

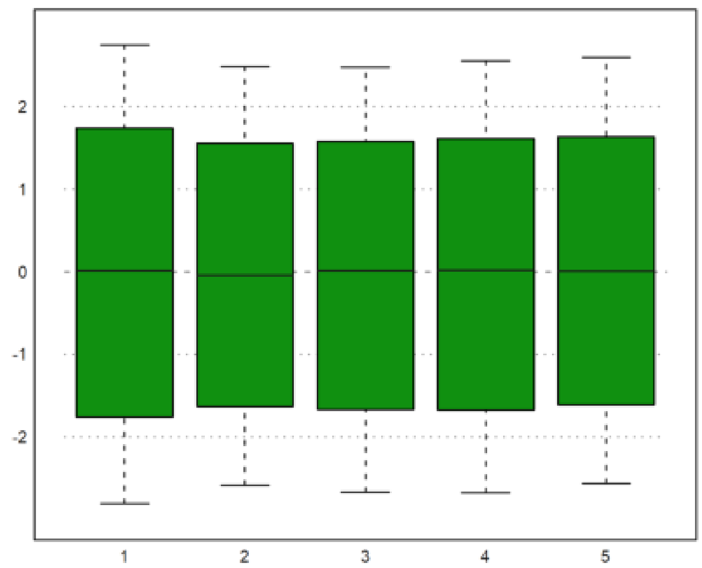



```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
>  plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```



Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. boxplot menunjukkan kuartil distribusi ini dan banyak outlier. Menurut definisi, outlier dalam boxplot adalah data yang melebihi 1,5 kali rentang 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```



2
1
0
-1
-2
1
2
3
4
5

Plot implisit menunjukkan penyelesaian garis level f(x,y)=level, dimana ”level” dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level= ”auto”, akan ada garis level nc, yang akan tersebar antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi parameter x dan y, atau alternatifnya, xv dapat berupa matriks nilai.

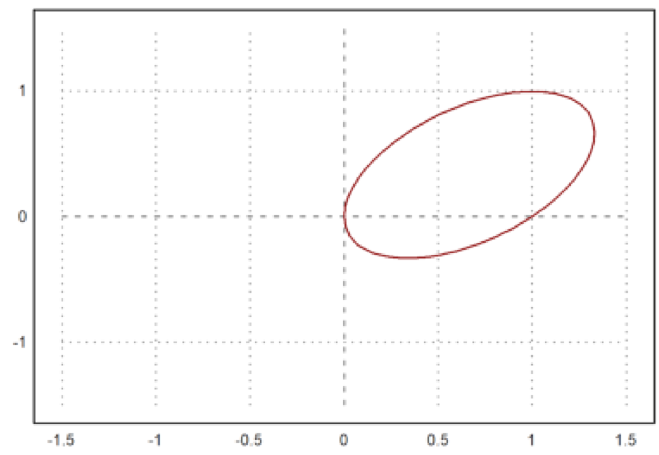
Euler dapat menandai garis level

$$f(x,y)=c$$

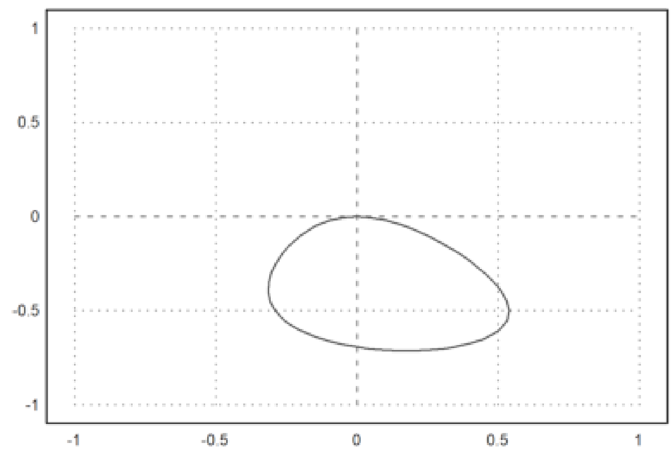
dari fungsi apapun.

Untuk menggambar himpunan f(x,y)=c untuk satu atau lebih konstanta c, Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya pada bidang. Parameter c adalah level=c, dimana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi setiap titik dalam plot. Parameter ”n” menentukan kehalusan plot.

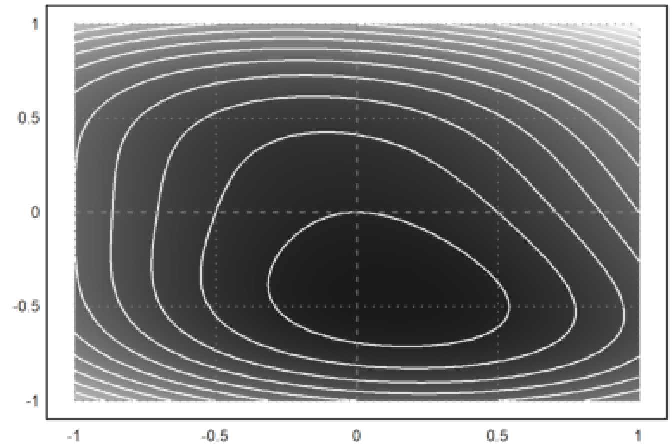
```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x*y-x",r=1.5,level=0,contourcolor=red):
```



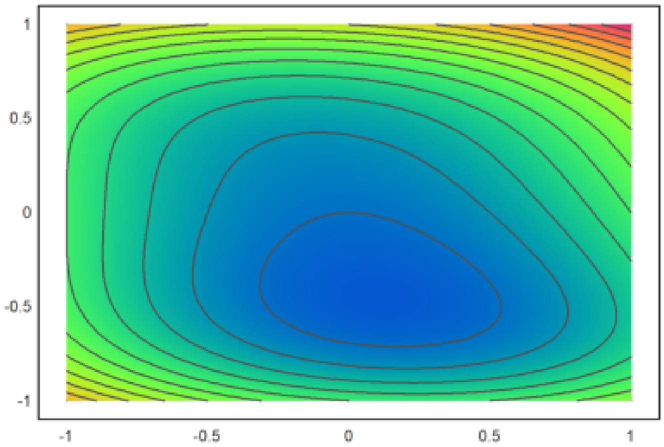

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=0): // Solutions of f(x,y)=0
```




```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice
```

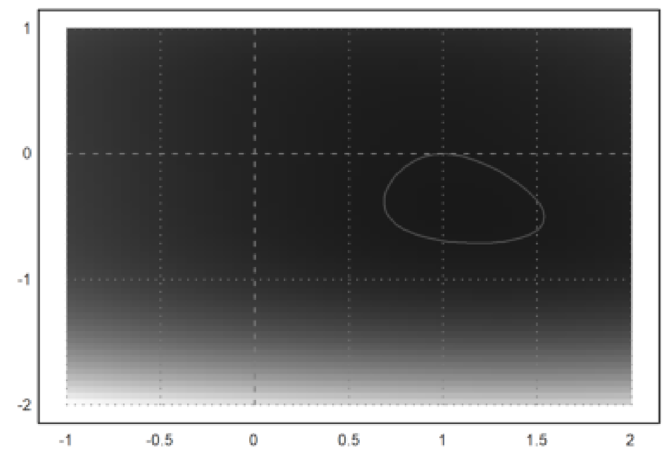



```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

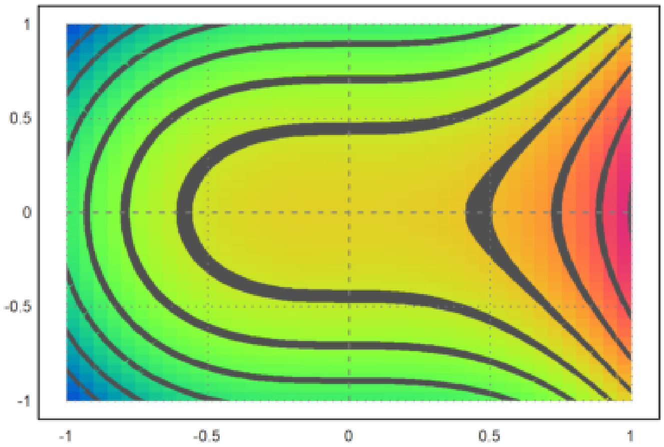


Ini juga berfungsi untuk plot data. Tetapi Anda harus menentukan rentangnya untuk label sumbu.

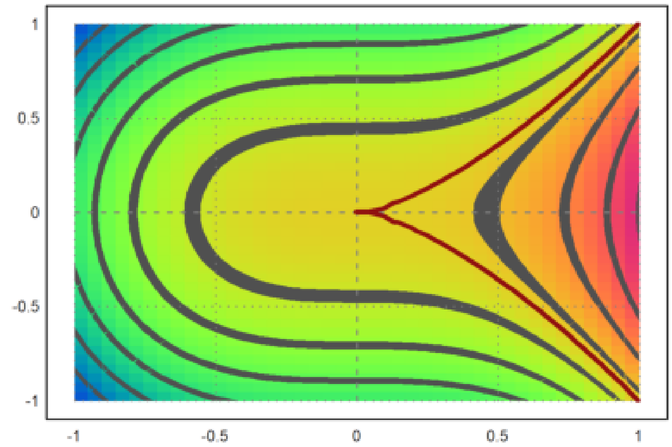
```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```



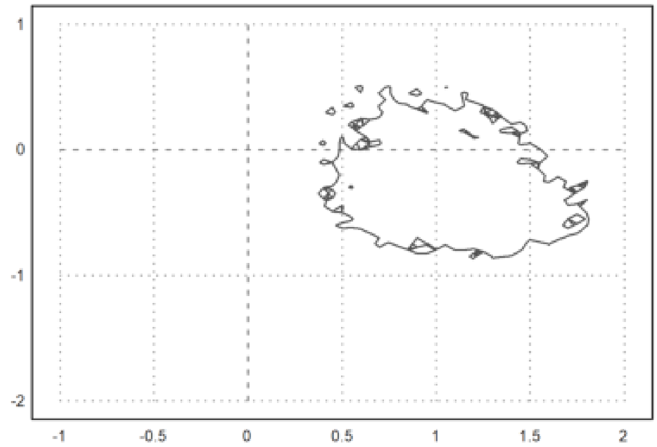

```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral):
```



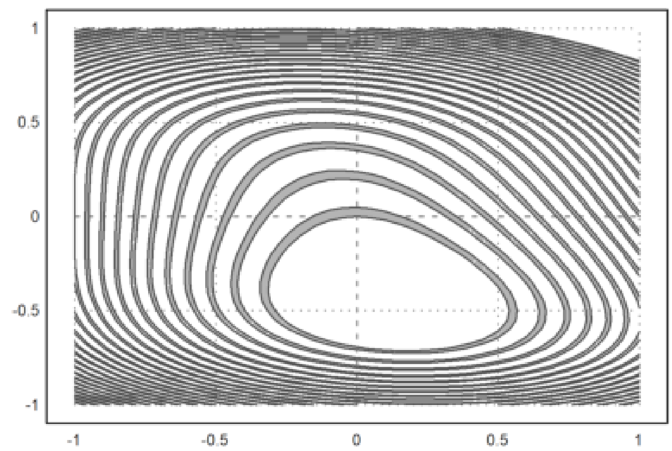

```
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):
```



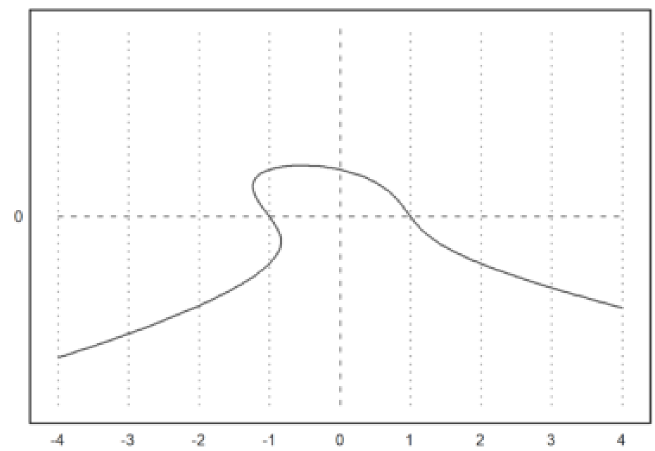

```
>z=z+normal(size(z))*0.2;
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):
```



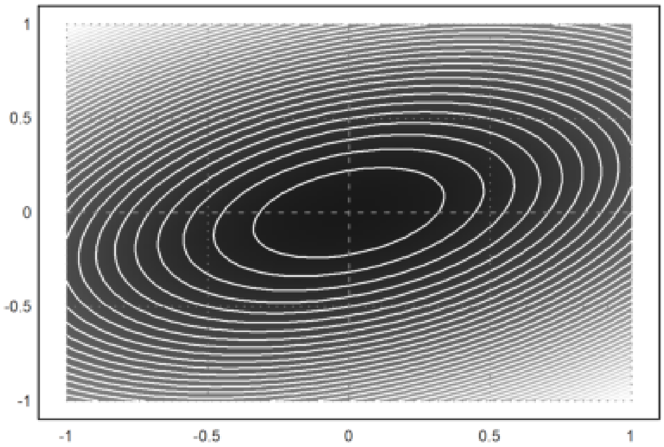

```
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```



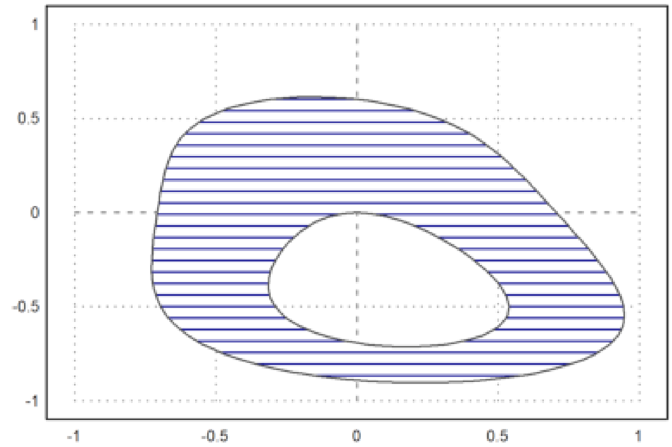
Dimungkinkan juga untuk mengisi set

$$a \leq f(x, y) \leq b$$

dengan rentang level.

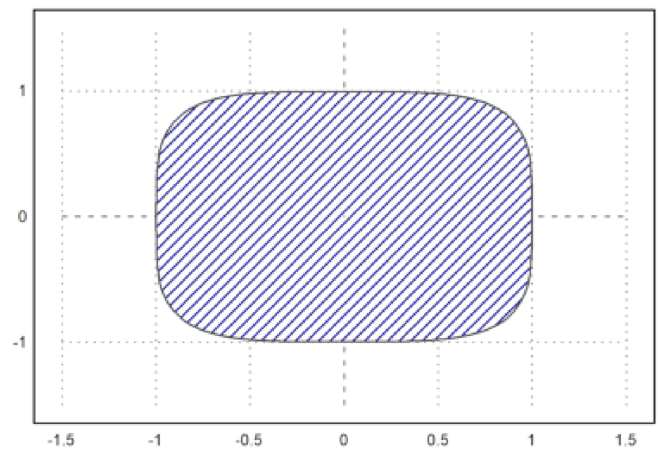
Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

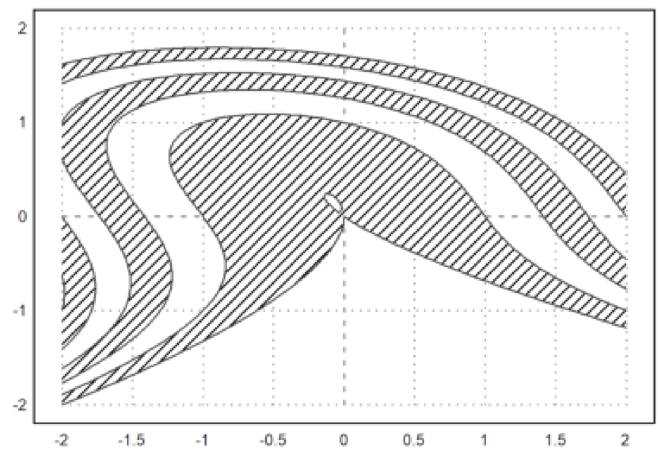


Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Maka level harus berupa matriks interval level 2xn, dimana baris pertama berisi awal dan baris kedua adalah akhir dari setiap interval. Alternatifnya, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

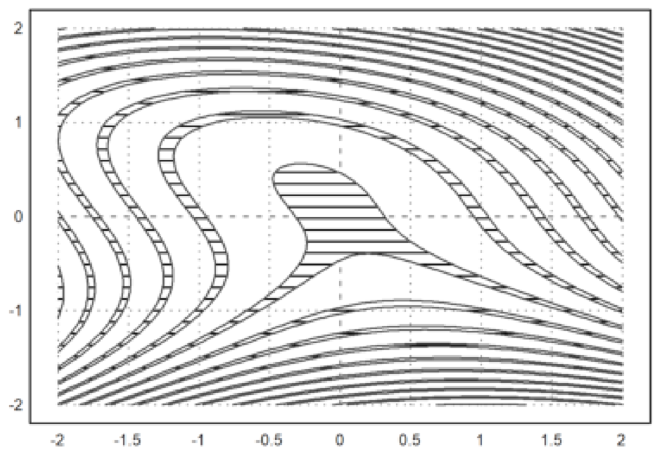
```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):
```



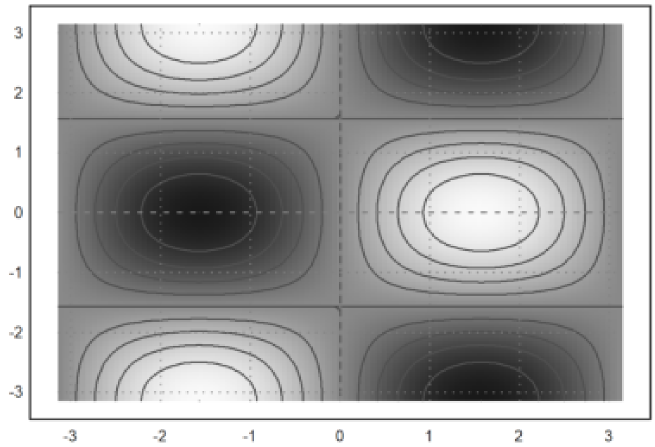

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):
```




```
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):
```

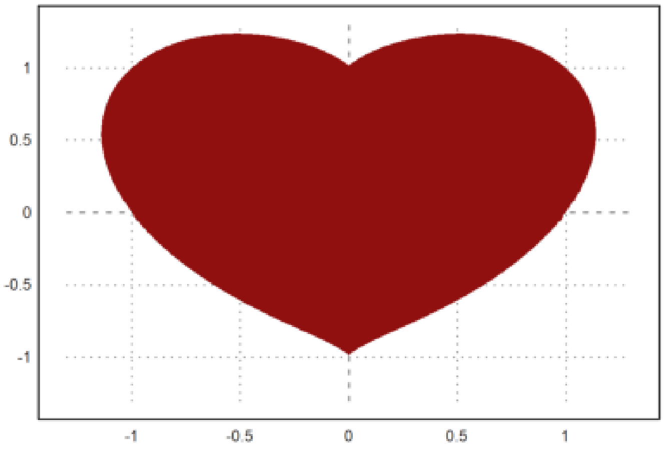


Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah

$$a \leq f(x, y) \leq b.$$

Hal ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

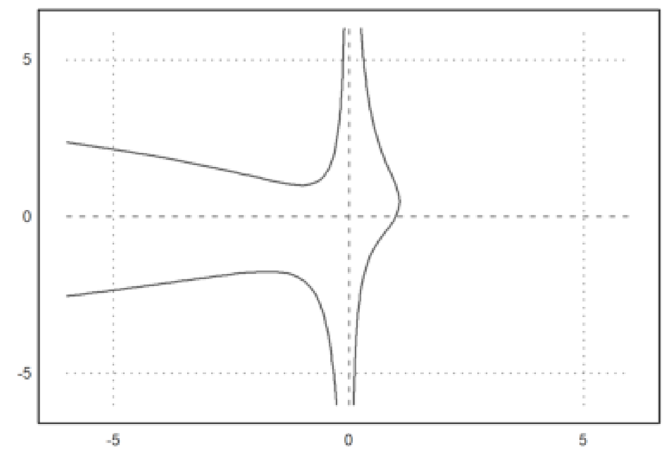
```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>  style="#",color=red,<outline, ...
>  level=[-2;0],n=100):
```



Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Sebagai contoh, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

$$x^3 - xy + x^2y^2 = 6$$

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2",r=6,level=1,n=100):
```




```
>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
```

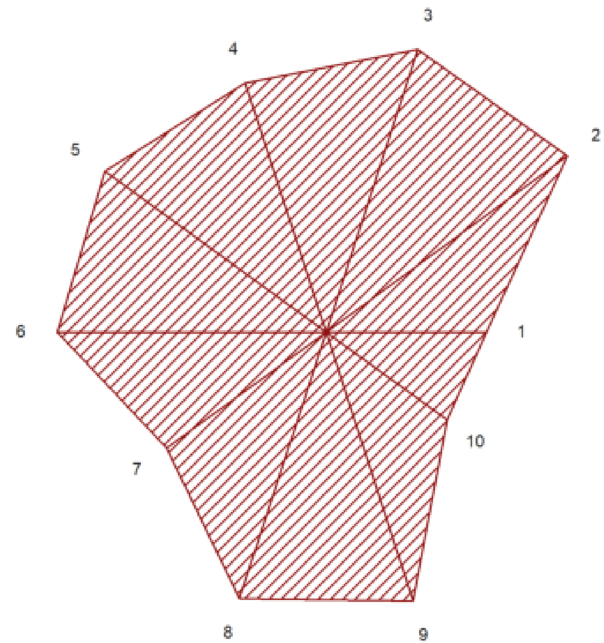
```
if !holding() then clg; endif;
w=window(); window(0,0,1024,1024);
h=holding(1);
r=max(abs(v))*1.2;
setplot(-r,r,-r,r);
n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
loop 1 to n
  polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
  if lab!=none then
    rlab=v[#]+r*0.1;
    {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
    ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
```

```
    endif;
  end;
  barcolor(cl); barstyle(st);
  holding(h);
  window(w);
endfunction
```

Tidak ada tanda centang kotak atau sumbu di sini. Selain itu, kami menggunakan jendela penuh untuk plotnya.

Kami memanggil reset sebelum kami menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Ini tidak perlu dilakukan jika Anda yakin plot Anda berhasil.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```



Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang plot2d tidak dapat lakukan, tetapi hampir.

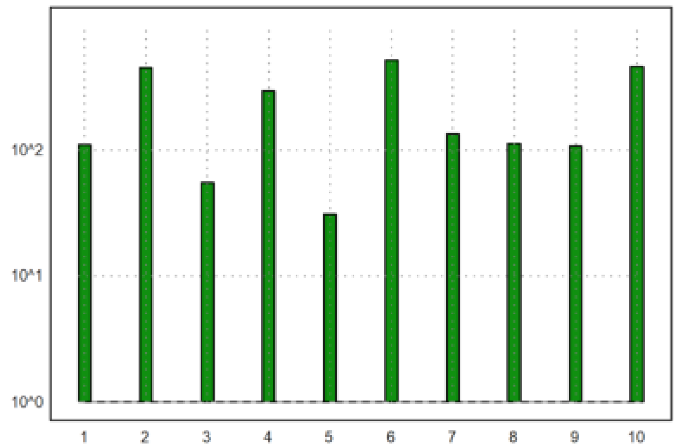
Dalam fungsi berikut, kita melakukan plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk bar impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
    {x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
    plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
    h=holding(1);
    frame();
    xgrid(ticks(x));
    p=plot();
    for i=-10 to 10;
      if i<=p[4] and i>=p[3] then
         ygrid(i,yt="10^"+i);
      endif;
    end;
    holding(h);
  endfunction
```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y):
```



Mari kita animasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke jendela plot. setplot (a, b, c, d) mengatur jendela ini.

Fungsi wait(0) memaksa plot muncul di jendela grafis. Jika tidak, penggambaran ulang berlangsung dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
  t=linspace(0,2pi,500);
  f=0;
  c=framecolor(0);
  l=linewidth(2);
  setplot(-1,1,-1,1);
  repeat
    clg;
```

```
    plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
    wait(0);
    if testkey() then break; endif;
    f=f+0.02;
  end;
  framecolor(c);
  linewidth(l);
  endfunction
```

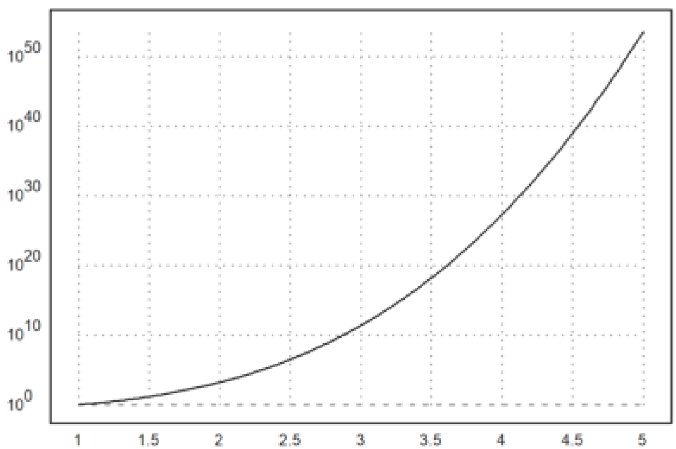
Tekan sembarang tombol untuk menghentikan animasi ini.

```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

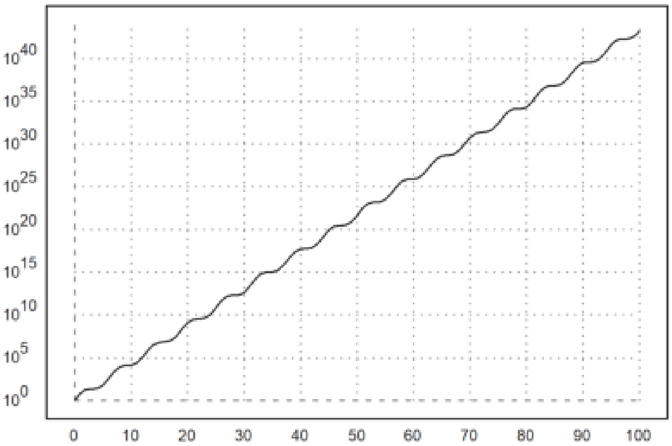
EMT menggunakan parameter "logplot" untuk skala logaritmik. Plot logaritma dapat diplot menggunakan skala logaritma di y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritma di x dan y dengan logplot=2, atau di x dengan logplot=3.

```
 - logplot=1: y-logaritma
 - logplot=2: x-y-logaritma
 - logplot=3: x-logaritma
```

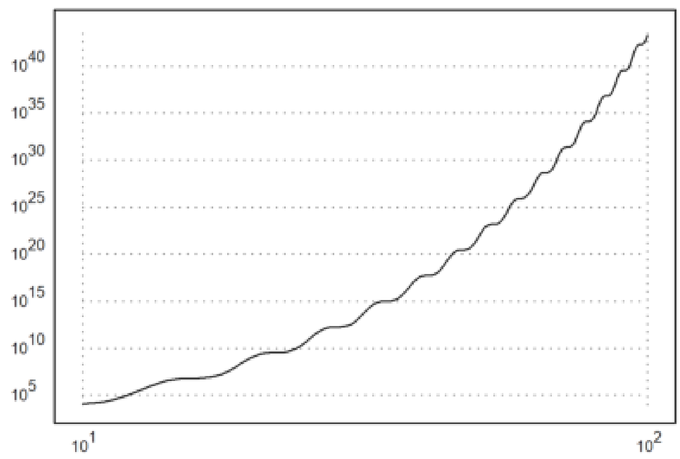
```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1):
```



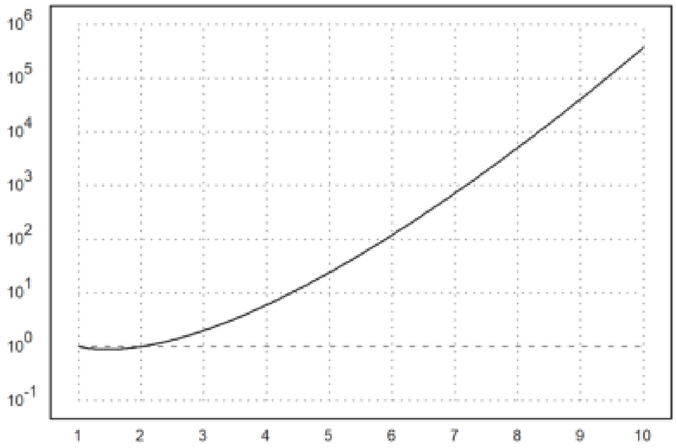
```
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1):
```



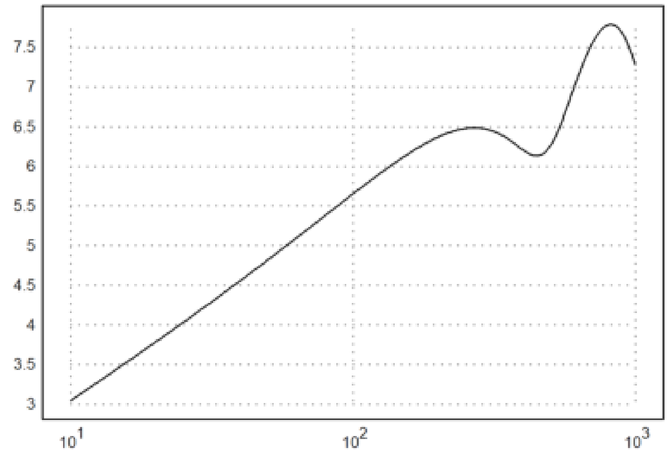

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2):
```




```
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1):
```

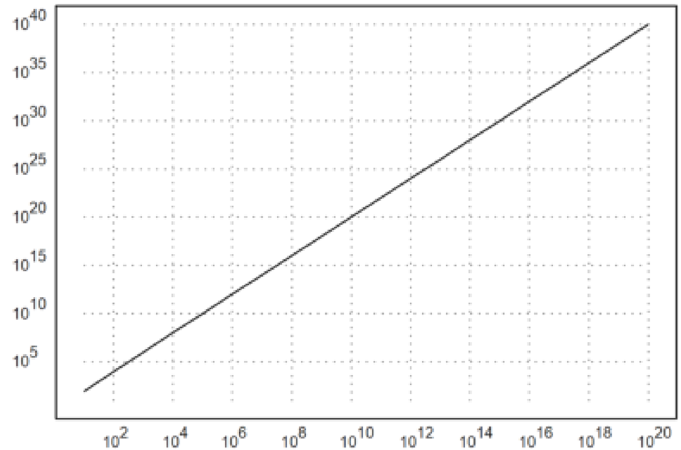



```
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):
```



Ini juga berfungsi dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
>plot2d(x,y,logplot=2):
```

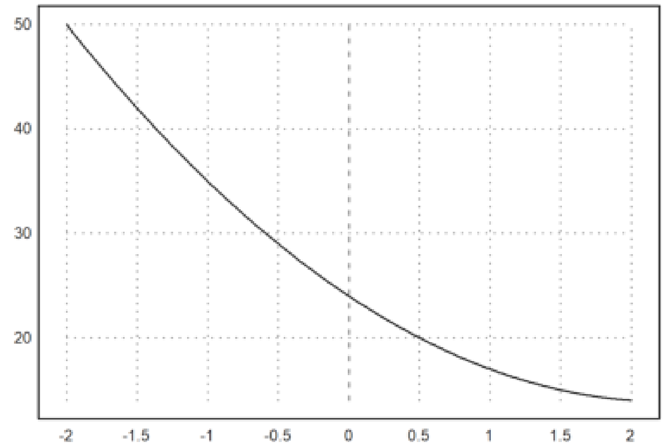


10^40
10^35
10^30
10^25
10^20
10^15
10^10
10^5
10^2
10^4
10^6
10^8
10^10
10^12
10^14
10^16
10^18
10^20

1. Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 24$$

```
>plot2d("2*x^2-9*x+24"):
```



Grafik tersebut merupakan salah satu contoh dari grafik fungsi kuadrat yang memiliki bentuk umum persamaan

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Grafik tersebut dapat digambar dengan bentuk ekspresi langsung yaitu plot2d("fungsi"): titik dua berfungsi untuk menampilkan grafik.

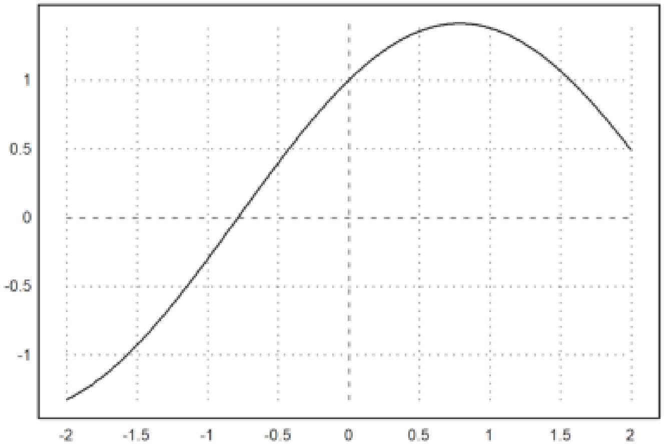
---

2. Gambarlah fungsi trigonometri

$$f(x) = sin(x) + cos(x)$$

lalu cobalah untuk menyimpan fungsi tersebut, sehingga untuk menampilkan grafiknya cukup dengan memanggil nama fungsi.

```
>function f(x):= sin(x)+cos(x);
>plot2d("f"):
```

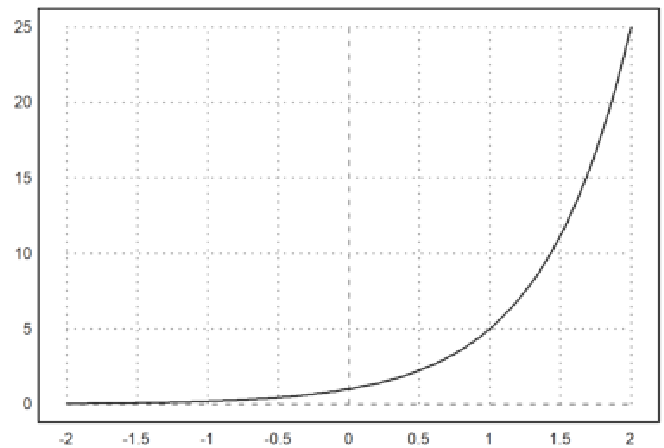


perintah function berfungsi untuk menyimpan sebah fungsi. Untuk melihat bentuk grafik jangan lupa tambahkan : diakhir perintah. Terlihat dari gambar tersebut fungsi sin(x)+cos(x) adalah grafik yang terbuka ke bawah.

3. Gambarlah fungsi eksponensial

$$f(x) = 5^x$$

```
>plot2d("5^x"):
```



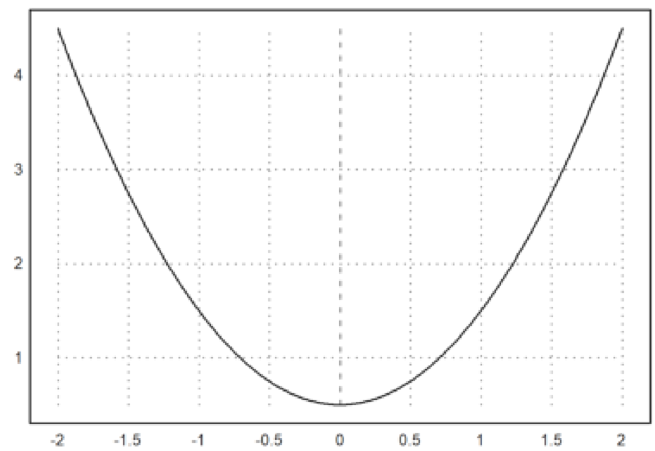
Bentuk umum dari persamaan eksponensial adalah aˆx. Grafik di atas merupakan salah satu contoh grafik fungsi eksponensial.

---

4. Gambarlah fungsi yang didefinisikan sebagai fungsi simbolik yaitu

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{2}$$

```
>function f(x)&=((2*x^2+1)/2);
>plot2d("f(x)"):
```

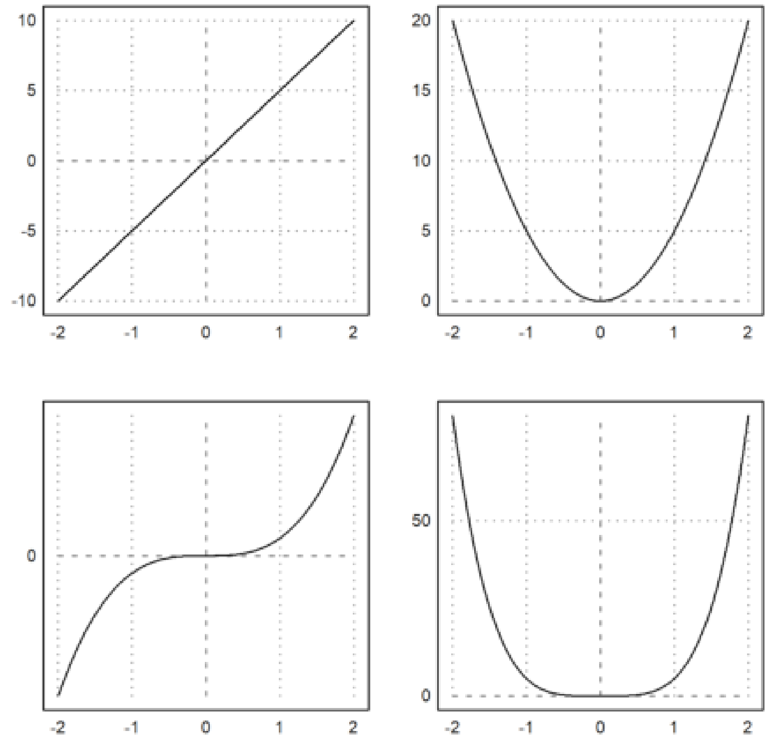


Berikut merupakan gambarnya. Yaitu grafik yang membuka keatas dengan titik minimumnya adalah (0,0.5).

5. Gambarkan beberapa kurva sekalikus yaitu

$$f(x) = 5x^n, 1 \leq n \leq 4$$

```
>reset;
>figure(2,2);
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("5*x^"+n); end;
>figure(0):
```

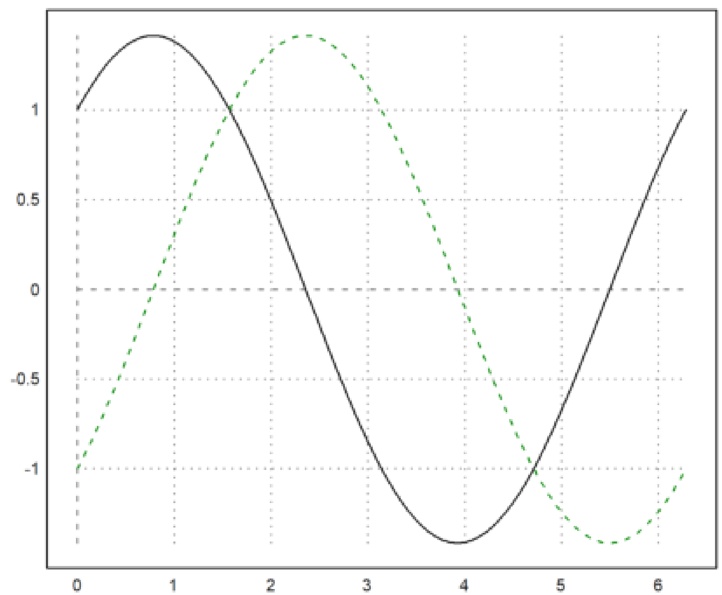


Penjelasan perintah:
figure(2,2) merupakan perintah untuk membuat grafik berukuran 2x2 atau 2 kolom 2 baris.
for n=1 to n=4; plot2d("5*x^"+n) berarti fungsi tersebut yaitu 5x^n akan dilakukan berulang yaitu dari 1 sampai 4.
figure(0) digunakan untuk menampilkan hasilnya.
Grafik di atas merupakan hasilnya.

6. Gambarkan kedua kurva berikut pada satu bidang yang sama

$$f(x) = sin(x) + cos(x); f(x) = sin(x) - cos(x); 0 \leq x \leq 2\pi$$

```
>aspect(1.2); plot2d("sin(x)+cos(x)",0,2pi); plot2d("sin(x)-cos(x)",color=green,style="--",>add):
```



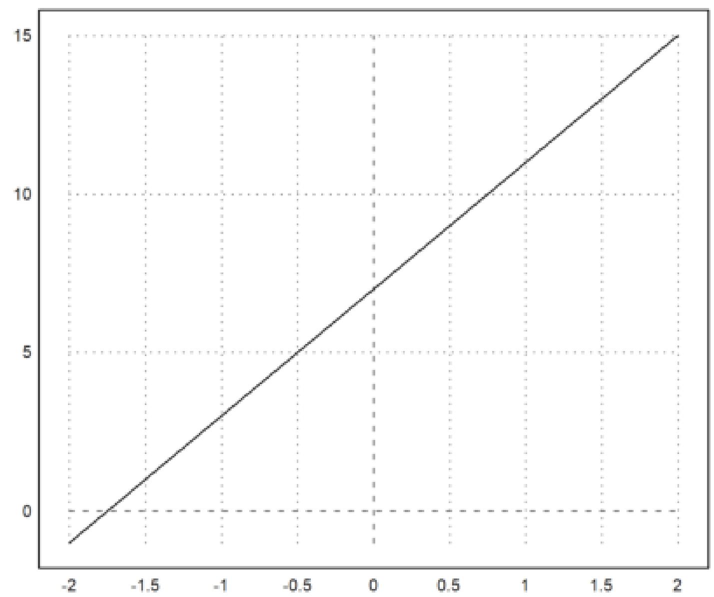
Pada gambar tersebut fungsi sin(x)+cos(x) ditunjukkan dengan garis default sedangkan fungsi sin(x)-cos(x) ditunjukkan dengan garis putus-putus.

---

7. Gambarlh grafik fungsi linear

$$f(x) = 4x + 7$$

```
>plot2d("4*x+7"):
```

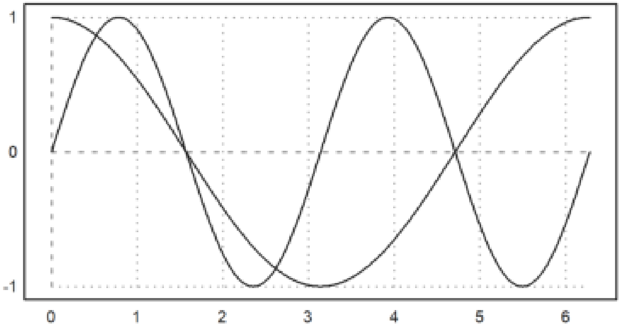


Fungsi linear memiliki bentuk persamaan umum ax+b. Grafik fungsi linear berupa garis lurus. Salah satu contohnya adalah gambar grafik di atas.

8. Gambarlah grafik fungsi berikut

$$f(x) = sin(2x); f(X) = cos(x)$$

```
>aspect(2);
>plot2d(["sin(2x)","cos(x)"],0,2pi):
```

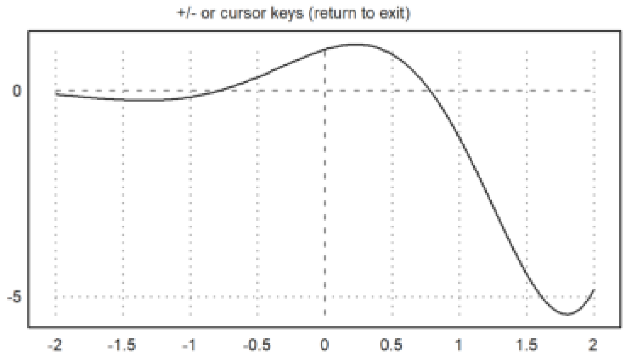


Berikut merupakan gabungan dari fungsi sin(2x) dan cos(x) dengan rasio panjang dan lebar 2:1.

9. Gambarlah kurva fungsi yang interaktif dengan

$$f(x) = e^x cos(2x)$$

```
>plot2d("exp(x)*cos(2*x)",user=true, ...
> title="+/- or cursor keys (return to exit)"):
```

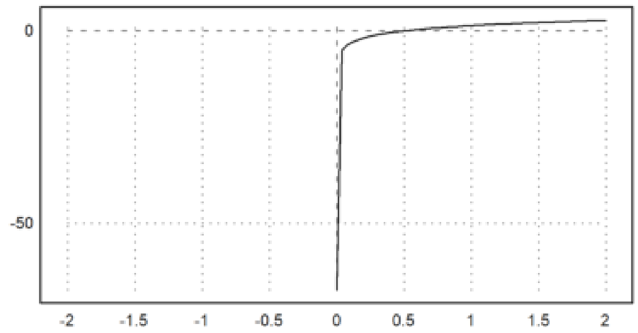


Di atas adalah salah satu bentuk gambar kurva yang interaktif.

10. Gambarlah fungsi berikut ini

$$f(x) = 2log(2x)$$

```
>plot2d("2log(2*x)"):
```

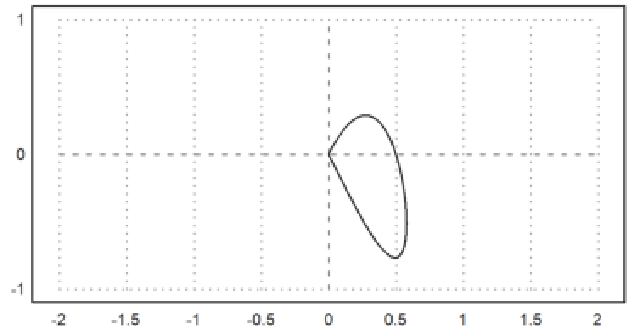


Berikut merupakan gambar salah satu contoh fungsi logaritma.

11. Gambarlah grafik fungsi parametrik

$$\gamma(t) = t \cdot (\sin(\pi t), \sin(2\pi t))$$

```
>t=linspace(0,1,1000);
>plot2d(t*sin(pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```

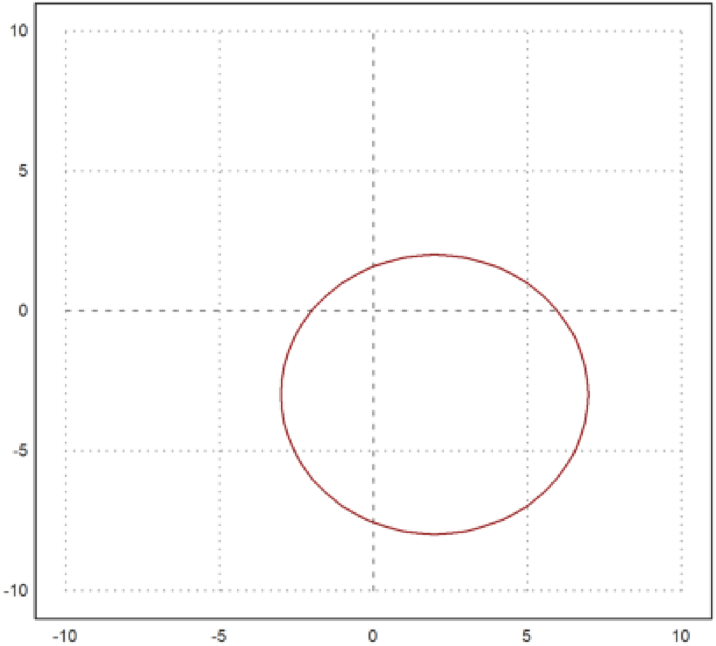


Gambar diatas merupakan grafik dari fungsi parametrik nya.

12. Gambarlah grafik fungsi implisit yaitu

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12$$

```
>aspect(1.1);
>plot2d("x^2+y^2-4*x+6*y-12",r=10,level=0,contourcolor=red):
```

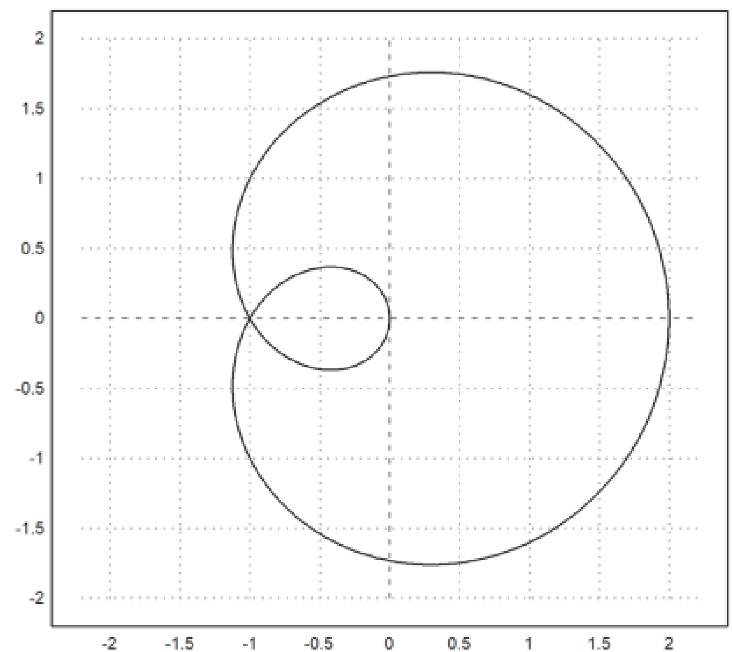


Ternyata diperoleh bahwa fungsi implisit tersebut membentuk sebuah lingkaran dengan jari-jari 5.

---

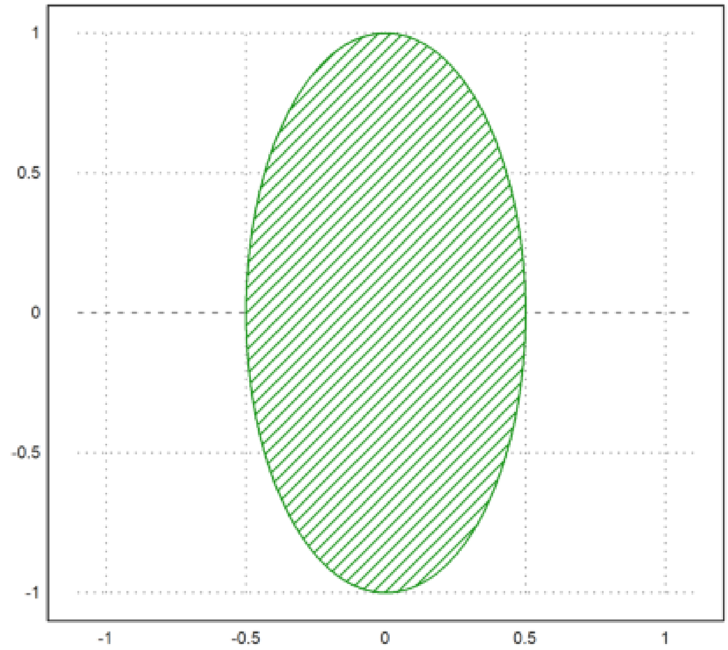
13. Gambarlah grafik fungsi kompleks e^(I*t)+e^(2*I*t)

```
>t=linspace(0,2pi,1000);
>plot2d(exp(I*t)+exp(2*I*t),r=2):
```


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2

14. Gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva berikut ini

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x)*0.5,cos(x),r=1,>filled,style="/"):
```

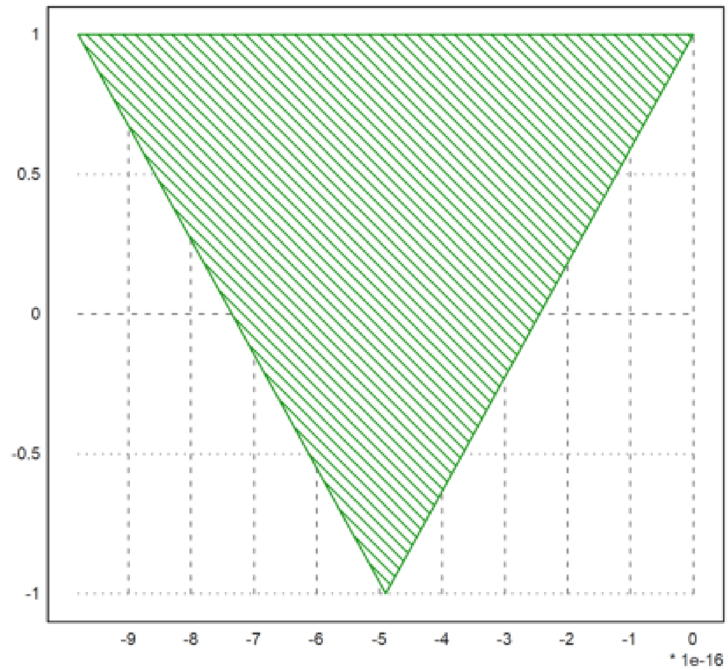


Hasil dari perintah berikut adalah ellips tegak. perintah filled berfungsi untuk mengisi bagian yang dibatasi oleh kurva, sedangkah perintah style= adalah perintah untuk pilihan gaya untuk mengisi kurva tersebut. / berarti arsiran akan berupa garis dari kiri ke kanan.

---

15. Gambarlah segi banyak

```
>x=linspace(0,2pi,4); plot2d(sin(4*x),cos(x),>filled,style="\"):
```



Untuk menggambar sebuah poligon dapat menggunakan perintah >filled yaitu berfungsi untuk mengisi daerah dalam kurva tersebut. style="\" berarti arsiran daerah kurva berupa garis dari kanan ke kiri. Hasilnya adalah sebuah segitiga terbalik.

Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

```
function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n,  ..
logplot, grid, frame, framecolor, square, color, thickness, style, ..
auto, add, user, delta, points, addpoints, pointstyle, bar, histogram,  ..
distribution, even, steps, own, adaptive, hue, level, contour,  ..
nc, filled, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral,  ..
cgrid, vertical, smaller, dl, niveau, levels)
```

Multipurpose plot function for plots in the plane (2D plots). This function can do plots of functions of one variables, data plots, curves in the plane, bar plots, grids of complex numbers, and implicit plots of functions of two variables.

Parameters
x,y : equations, functions or data vectors
a,b,c,d : Plot area (default a=-2,b=2)
r : if r is set, then a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

```
r can be a vector [rx,ry] or a vector [rx1,rx2,ry1,ry2].
```

xmin,xmax : range of the parameter for curves
auto : Determine y-range automatically (default)
square : if true, try to keep square x-y-ranges
n : number of intervals (default is adaptive)
grid : 0 = no grid and labels,

```
1 = axis only,
2 = normal grid (see below for the number of grid lines)
3 = inside axis
4 = no grid
5 = full grid including margin
6 = ticks at the frame
7 = axis only
8 = axis only, sub-ticks
```

frame : 0 = no frame
framecolor: color of the frame and the grid
margin : number between 0 and 0.4 for the margin around the plot
color : Color of curves. If this is a vector of colors,

```
it will be used for each row of a matrix of plots. In the case of
point plots, it should be a column vector. If a row vector or a
full matrix of colors is used for point plots, it will be used for
each data point.
```

thickness : line thickness for curves

```
This value can be smaller than 1 for very thin lines.
```

style : Plot style for lines, markers, and fills.

```
For points use
"[]", "<>", ".", "..", "...",
"*", "+", "|", "-", "o"
"[]#", "<>#", "o#" (filled shapes)
"[]w", "<>w", "ow" (non-transparent)
For lines use
"-", "--", "-.", ".", ".-.", "-.-", "->"
For filled polygons or bar plots use
"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",
"+", "|", "-", "t"
```

points : plot single points instead of line segments
addpoints : if true, plots line segments and points
add : add the plot to the existing plot
user : enable user interaction for functions
delta : step size for user interaction
bar : bar plot (x are the interval bounds, y the interval values)
histogram : plots the frequencies of x in n subintervals
distribution=n : plots the distribution of x with n subintervals
even : use inter values for automatic histograms.
steps : plots the function as a step function (steps=1,2)
adaptive : use adaptive plots (n is the minimal number of steps)
level : plot level lines of an implicit function of two variables
outline : draws boundary of level ranges.
If the level value is a 2xn matrix, ranges of levels will be drawn in the color using the given fill style. If outline is true, it will be drawn in the contour color. Using this feature, regions of f(x,y) between limits can be marked.
hue : add hue color to the level plot to indicate the function

```
value
```

contour : Use level plot with automatic levels
nc : number of automatic level lines
title : plot title (default "")
xl, yl : labels for the x- and y-axis
smaller : if >0, there will be more space to the left for labels.
vertical :

```
Turns vertical labels on or off. This changes the global variable
verticallabels locally for one plot. The value 1 sets only vertical
text, the value 2 uses vertical numerical labels on the y axis.
```

filled : fill the plot of a curve
fillcolor : fill color for bar and filled curves
outline : boundary for filled polygons
logplot : set logarithmic plots

```
1 = logplot in y,
2 = logplot in xy,
3 = logplot in x
```

own :

```
A string, which points to an own plot routine. With >user, you get
the same user interaction as in plot2d. The range will be set
before each call to your function.
```

maps : map expressions (0 is faster), functions are always mapped.
contourcolor : color of contour lines
contourwidth : width of contour lines
clipping : toggles the clipping (default is true)
title :

```
This can be used to describe the plot. The title will appear above
the plot. Moreover, a label for the x and y axis can be added with
xl="string" or yl="string". Other labels can be added with the
functions label() or labelbox(). The title can be a unicode
string or an image of a Latex formula.
```

cgrid :

```
Determines the number of grid lines for plots of complex grids.
Should be a divisor of the the matrix size minus 1 (number of
subintervals). cgrid can be a vector [cx,cy].
```

Overview

The function can plot

- expressions, call collections or functions of one variable,
- parametric curves,
- x data against y data,
- implicit functions,
- bar plots,
- complex grids,
- polygons.

If a function or expression for xv is given, plot2d() will compute values in the given range using the function or expression. The

expression must be an expression in the variable x. The range must be defined in the parameters a and b unless the default range should be used. The y-range will be computed automatically, unless c and d are specified, or a radius r, which yields the range r,r
for x and y. For plots of functions, plot2d will use an adaptive evaluation of the function by default. To speed up the plot for complicated functions, switch this off with <adaptive, and optionally decrease the number of intervals n. Moreover, plot2d() will by default use mapping. I.e., it will compute the plot element for element. If your expression or your functions can handle a vector x, you can switch that off with <maps for faster evaluation.

Note that adaptive plots are always computed element for element. If functions or expressions for both xv and for yv are specified, plot2d() will compute a curve with the xv values as x-coordinates and the yv values as y-coordinates. In this case, a range should be defined for the parameter using xmin, xmax. Expressions contained in strings must always be expressions in the parameter variable x. [a4paper,10pt]article eumat

Nama : Rasdiana Putri
NIM : 23030630033
Kelas : Matematika E

Menggambar Plot 3D dengan EMT

Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita membutuhkan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dua variabel.

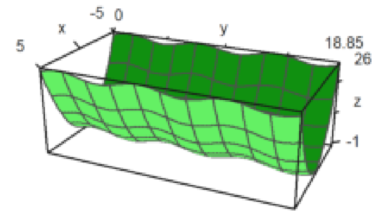
Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi sentral. Defaultnya adalah dari kuadran x-y positif menuju titik asal x=y=z=0, tetapi sudut=0° dilihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan ketinggian dapat diubah.

Euler dapat merencanakan

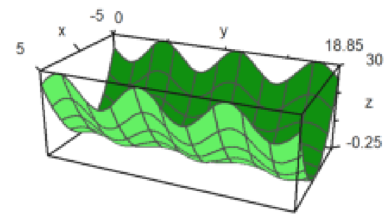
- permukaan dengan garis penetasan dan level atau rentang level,
- awan titik,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur rentang plot sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```




```
>plot3d("x^2+x*sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```



Silakan lakukan modifikasi agar gambar "talang bergelombang" tersebut tidak lurus melainkan melengkung/melingkar, baik melingkar secara mendatar maupun melingkar turun/naik (seperti papan peluncur pada kolam renang. Temukan rumusnya.

Untuk grafik suatu fungsi, gunakan

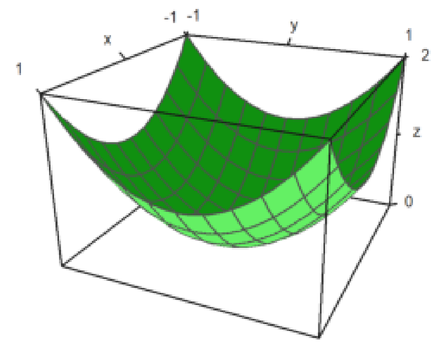
- ekspresi sederhana dalam x dan y,
- nama fungsi dari dua variabel
- atau matriks data

Defaultnya adalah kisi-kisi kawat berisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah interval kisi default adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default persegi panjang 40x40 untuk membuat
permukaannya. Ini bisa diubah.

- n=40, n=[40,40]: jumlah garis kisi di setiap arah
- grid=10, grid=[10,10]: jumlah garis grid di setiap arah.

Kami menggunakan default n=40 dan grid=10.

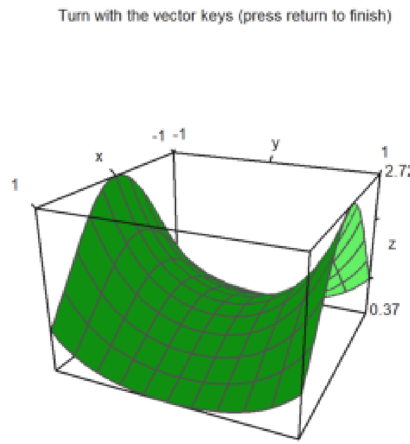
```
>plot3d("x^2+y^2"):
```



Interaksi pengguna dimungkinkan dengan parameter >pengguna. Pengguna dapat menekan tombol berikut.

- kiri, kanan, atas, bawah: memutar sudut pandang
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l : tombol nyalakan sumber cahaya (lihat dibawah)
- spasi: reset ke default
- kembali: mengakhiri interaksi

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
>  title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):
```



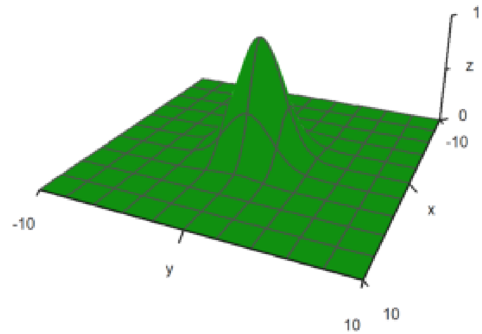
Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan

- a,b: rentang x
- c,d: rentang y
- r : kuadrat simetris di sekitar (0,0).
- n : jumlah subinterval untuk plot.

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.

fscale: menskalakan ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).
skala: angka atau vektor 1x2 untuk menskalakan ke arah x dan y.
bingkai: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3,>user):
```



Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.

- jarak: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- sudut: sudut terhadap sumbu y negatif dalam radian.
- tinggi: ketinggian pandangan dalam radian.

Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view(). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

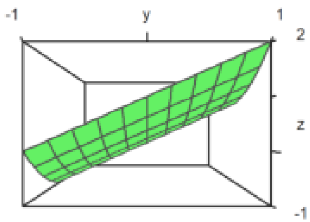
```
>view
```

```
[5,  2.6,  2,  0.4]
```

Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit zoom. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.

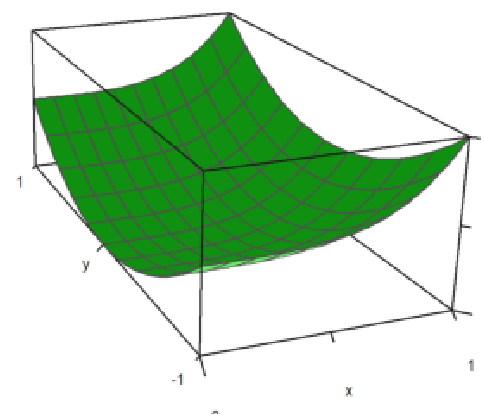
Pada contoh berikut, sudut=0 dan tinggi=0 dilihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=1,angle=pi/2,height=0):
```



Plot selalu terlihat berada di tengah kubus plot. Anda dapat memindahkan bagian tengah dengan parameter tengah.

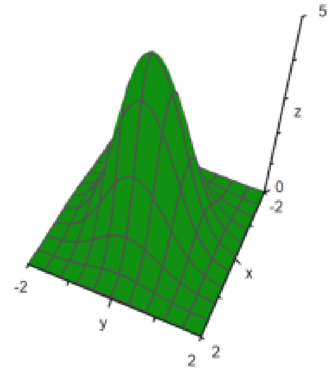
```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>  center=[0.4,0,0],zoom=5):
```



Plotnya diskalakan agar sesuai dengan unit kubus untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung ukuran plot. Namun labelnya mengacu pada ukuran sebenarnya.

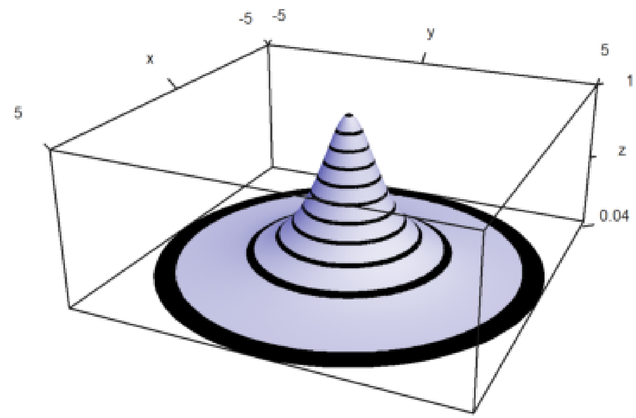
Jika Anda mematikannya dengan scale=false, Anda harus berhati-hati agar plot tetap masuk ke dalam jendela plotting, dengan mengubah jarak pandang atau zoom, dan memindahkan bagian tengah.

```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
>  center=[0,0,-2],frame=3):
```

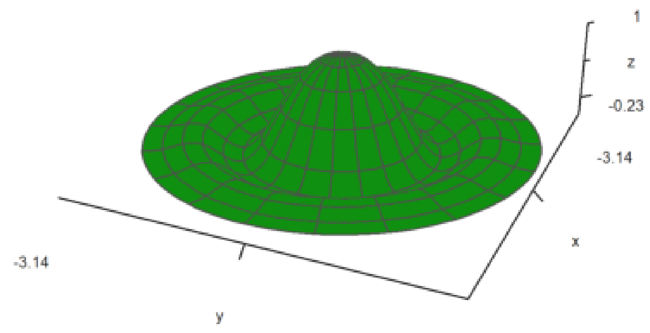


Plot kutub juga tersedia. Parameter polar=true menggambar plot kutub. Fungsinya harus tetap berupa fungsi x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skalanya sendiri. Jika tidak, fungsinya adalah diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=blue):
```



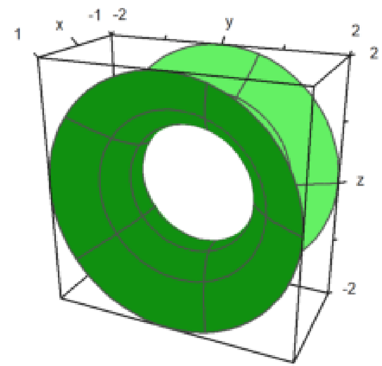

```
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...
>plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=pi,frame=3,zoom=4):
```



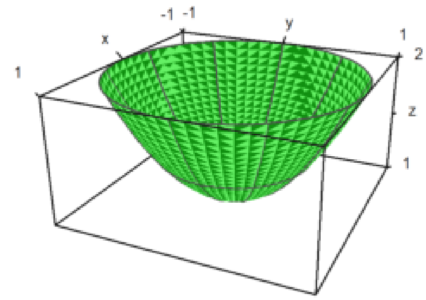
Parameter rotate memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu x.

- rotate=1: Menggunakan sumbu x
- rotate=2: Menggunakan sumbu z

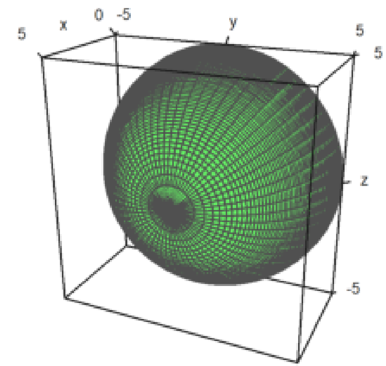
```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```



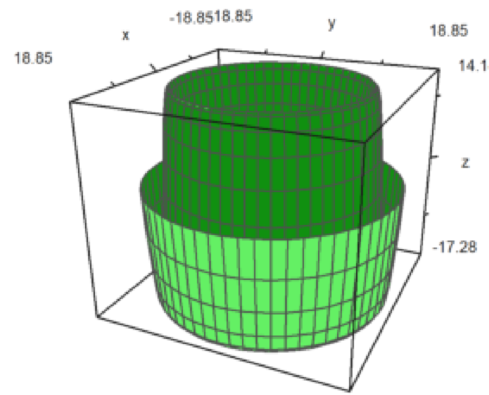

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=2,grid=5):
```




```
>plot3d("sqrt(25-x^2)",a=0,b=5,rotate=1):
```

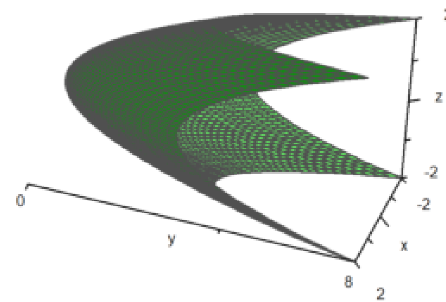



```
>plot3d("x*sin(x)",a=0,b=6pi,rotate=2):
```



Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x","x^2+y^2","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```



2
z
-2
-2
x
2
0
y
8

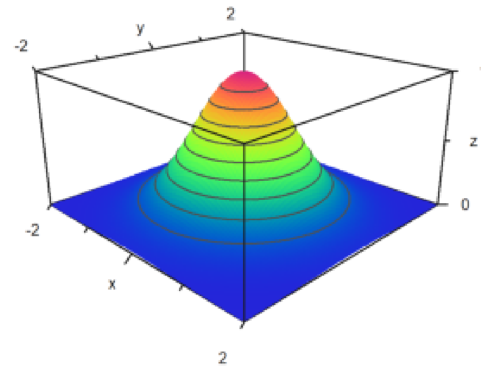
Untuk plot, Euler menambahkan garis kisi. Sebaliknya, dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan rona satu warna atau spektral rona berwarna. Euler dapat menggambar ketinggian fungsi pada plot dengan bayangan. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/cyan.

- >hue: Mengaktifkan bayangan cahaya, bukan kabel.
- >contour: Membuat plot garis kontur otomatis pada plot.
- level=... (atau level): Vektor nilai untuk garis kontur.

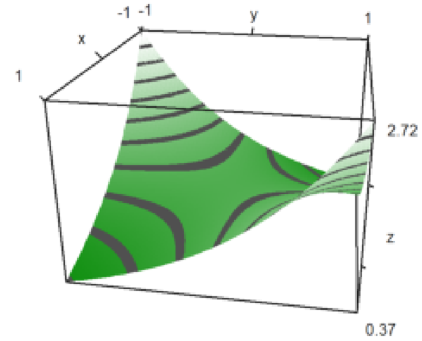
Defaultnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, levelnya sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan kisi yang lebih halus untuk 100x100 titik, skala fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```




```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```

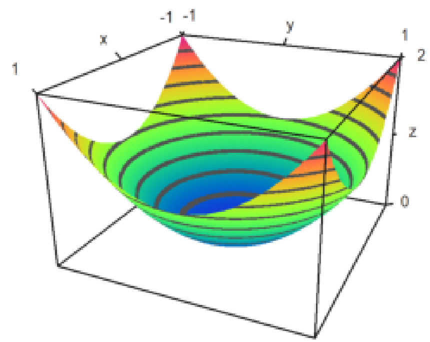


Bayangan default menggunakan warna abu-abu. Tetapi rentang warna spektral juga tersedia.

- >spektral: Menggunakan skema spektral default
- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral

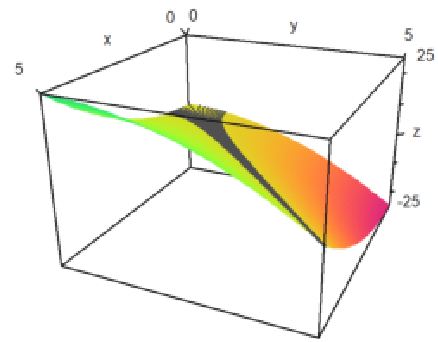
Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan halus.

```
>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100):
```



Selain garis level otomatis, kita juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis, bukan rentang level.

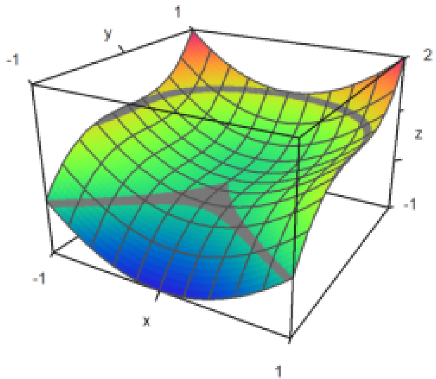
```
>plot3d("x^2-y^2",0,5,0,5,level=-1:0.1:1,color=redgreen):
```



Dalam plot berikut, kita menggunakan dua pita level yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai
matriks dengan batas level sebagai kolom.

Selain itu, kami melapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x^2+y^3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
>  >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```

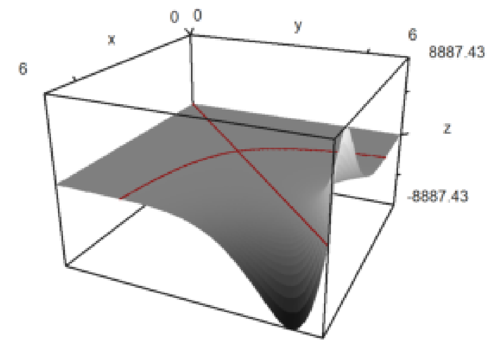


Pada contoh berikut, kita memplot himpunan, dimana

$$f(x, y) = x^y - y^x = 0$$

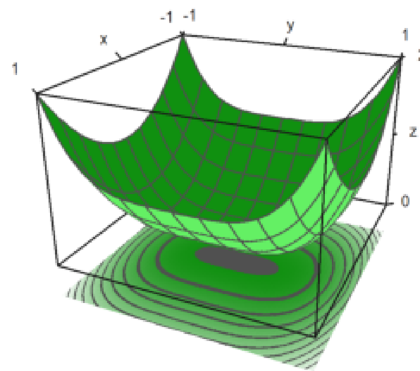
Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):
```



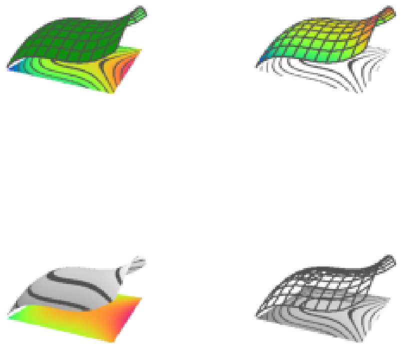
Dimungkinkan untuk menampilkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x^2+y^4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2):
```



Berikut adalah beberapa gaya lainnya. Kami selalu mematikan bingkai, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan kisi.

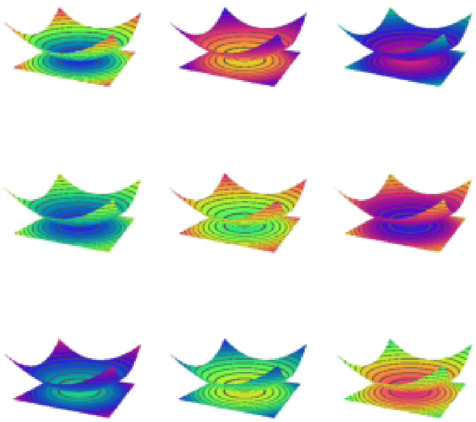
```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```



Ada beberapa skema spektral lainnya, yang diberi nomor dari 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat menggunakan color=value, dimana nilai

- spektral: untuk rentang dari biru hingga merah
- putih: untuk kisaran yang lebih redup
- kuningbiru, unguhijau, birukuning, hijaumerah
- birukuning, hijauungu, kuningbiru, merahhijau

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9;  ...
>  figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4);  ...
>end; ...
>figure(0):
```

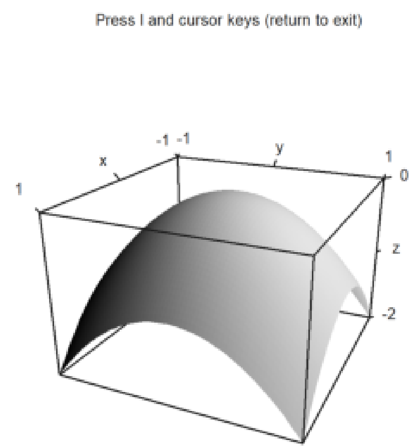


Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan Parameter.

- light: arah datangnya cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program ini tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda akan membutuhkan Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>  hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
>  title="Press l and cursor keys (return to exit)"):
```

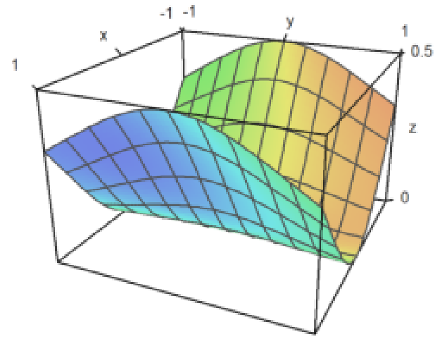


Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga bisa diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
>  zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```

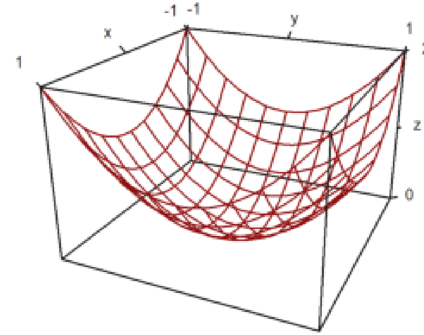
Warna 0 memberikan efek pelangi yang istimewa.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```



Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```



-1
-1
x
y
1
1
2
z
0

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan potongan melalui objek. Fitur plot3d termasuk plot implisit. Plot ini menunjukkan himpunan nol fungsi dalam tiga variabel.
Solusi dari

$$f(x, y, z) = 0$$

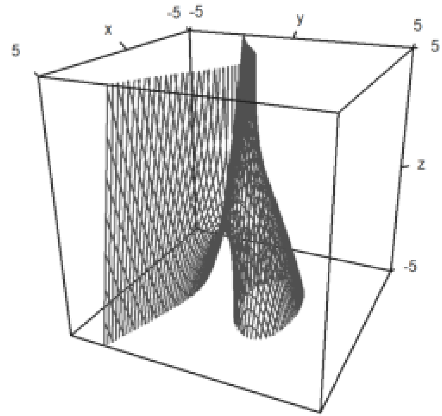
dapat divisualisasikan dalam potongan sejajar dengan bidang x-y, x-z dan y-z.

- implicit=1: dipotong sejajar dengan bidang y-z
- implicit=2: dipotong sejajar dengan bidang x-z
- implicit=4: dipotong sejajar dengan bidang x-y

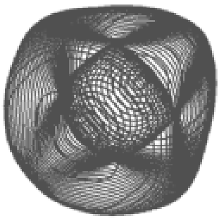
Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda mau. Dalam contoh kita memplot

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

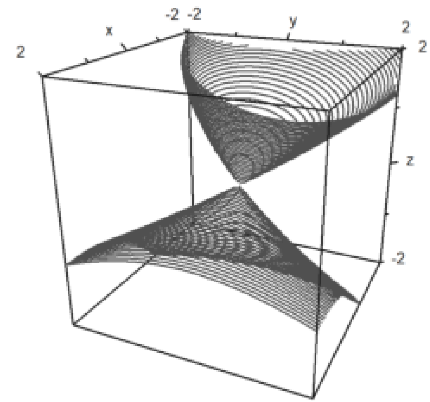
```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1",r=5,implicit=3):
```




```
>c=1; d=1;
>plot3d("((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-c^2)^2+(y^2-1)^2)-d",r=2,
```



```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```



x
y
z
2
-2
-2
2
2
-2

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai x-, y- dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi fx(x,y), fy(x,y), fz(x,y).

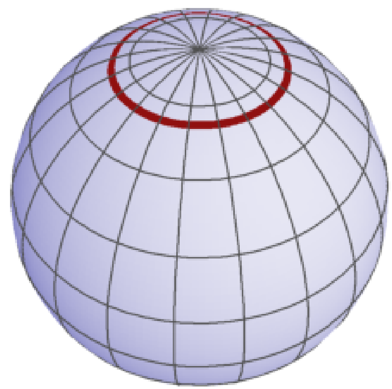
$$\gamma(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$$

Karena x,y,z adalah matriks, kita berasumsi bahwa (t,s) melalui kisi persegi. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persegi panjang dalam ruang.

Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

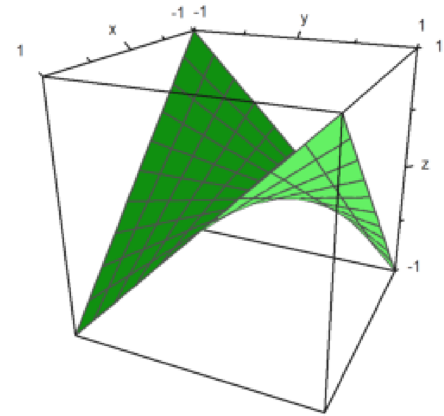
Dalam contoh berikut, kita menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai wilayah, dalam kasus kita wilayah kutub.

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```



Berikut ini contohnya yaitu grafik suatu fungsi.

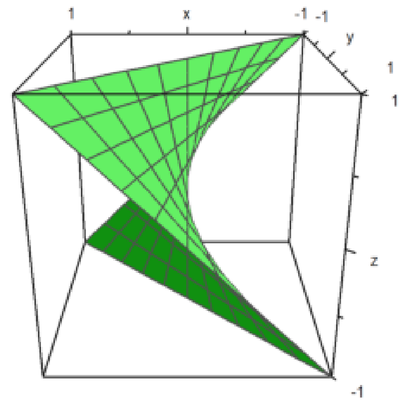
```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```



Namun, kita bisa membuat berbagai macam permukaan. Berikut adalah permukaan yang sama sebagai suatu fungsi

$$x = y\,z$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```



Dengan lebih banyak usaha, kita dapat menghasilkan banyak permukaan.

alam contoh berikut kita membuat tampilan bayangan dari bola yang terdistorsi. Koordinat bola yang biasa adalah

$$\gamma(t, s) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s), \cos(s))$$

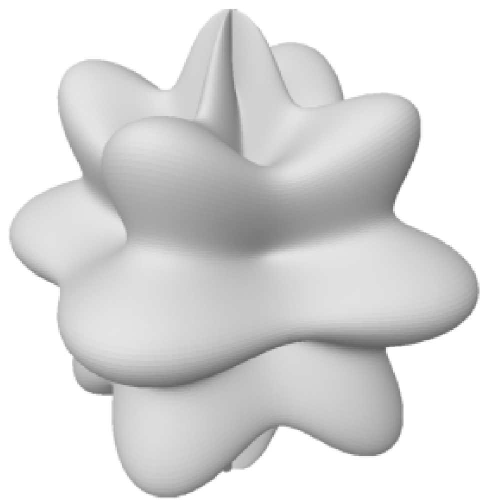
dengan

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kami mendistorsi ini dengan sebuah faktor

$$d(t,s) = \frac{\cos(4t) + \cos(8s)}{4}.$$

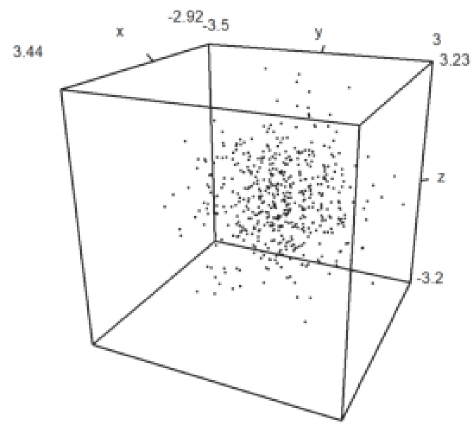
```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
>  light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```



Tentu saja, point cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor untuk koordinat titik.

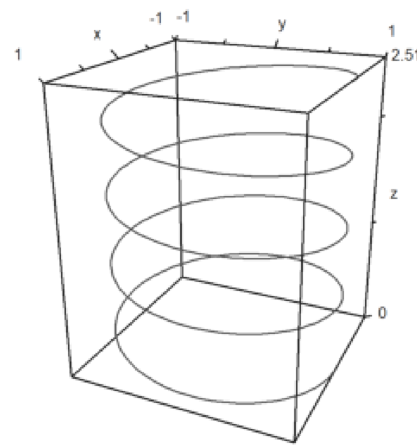
Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500;  ...
>  plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

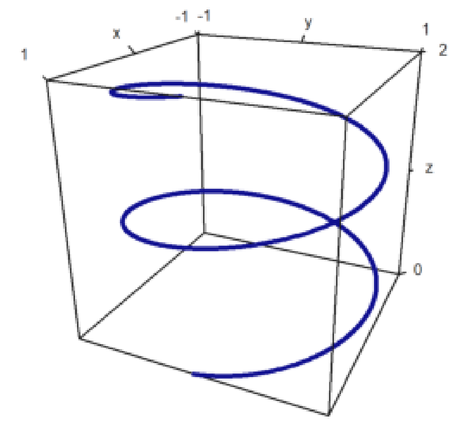


Dimungkinkan juga untuk memplot kurva dalam 3D. Dalam hal ini, lebih mudah untuk menghitung terlebih dahulu titik-titik kurva. Untuk kurva pada bidang kita menggunakan barisan koordinat dan parameter wire=true.

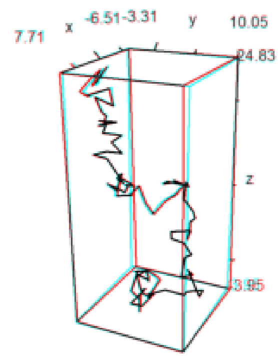
```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
>plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3):
```




```
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
>linewidth=3,wirecolor=blue):
```

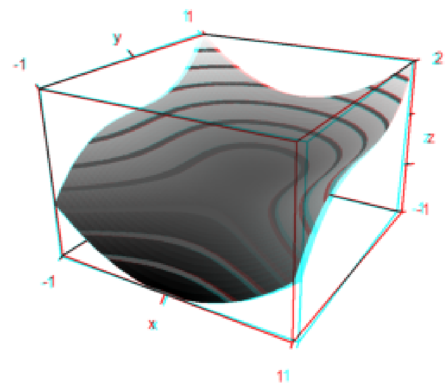



```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```



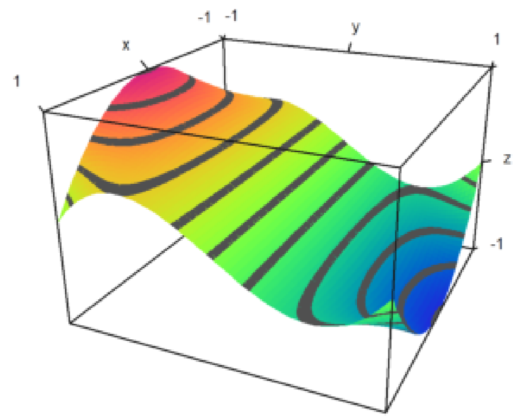
EMT juga dapat membuat plot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot seperti itu, Anda memerlukan kacamata berwarna merah/sian.

```
> plot3d("x^2+y^3",>anaglyph,>contour,angle=30°):
```



Seringkali skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan ketinggian fungsinya.

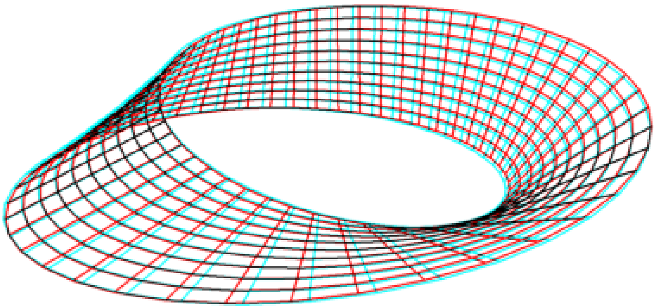
```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```



Euler juga dapat memplot permukaan berparameter, kjika parameternya adalah nilai x, y, dan z dari gambar kotak persegi panjang di ruang tersebut.

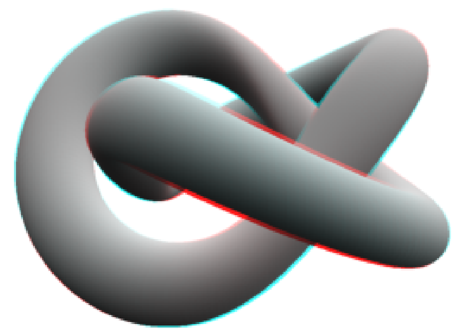
Untuk demo berikut, kami mengatur parameter u- dan v-, dan menghasilkan koordinat ruang dari parameter tersebut.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
>X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
>plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang megah dengan kacamata merah/cyan.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)';  ...
>x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
> z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```



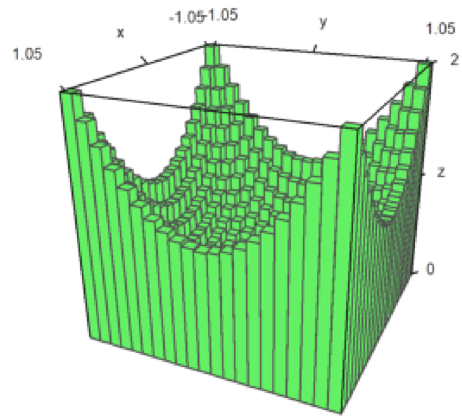
Plot bar juga dimungkinkan. Untuk itu, kita harus menyediakan

- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai nxn.

z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.

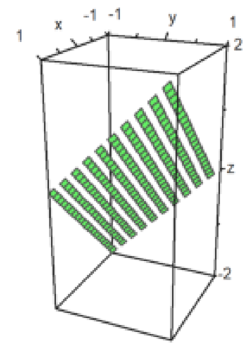
Dalam contoh ini, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektorvektornya berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



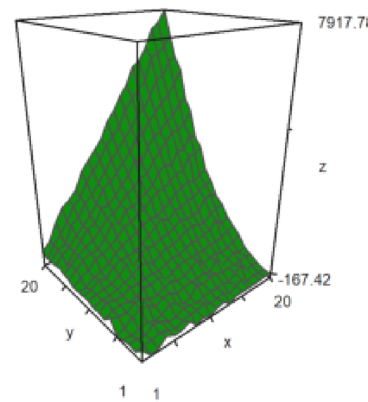
Dimungkinkan untuk membagi plot suatu permukaan menjadi dua bagian atau lebih.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

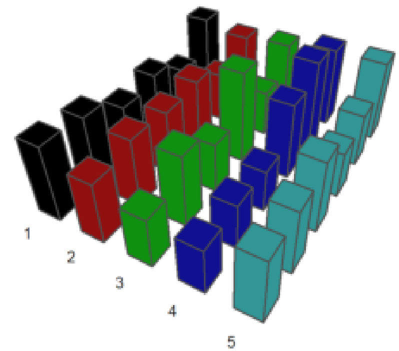


Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan skala (M), atau skala matriks dengan skala >z. Ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individu yang diterapkan tambahan.

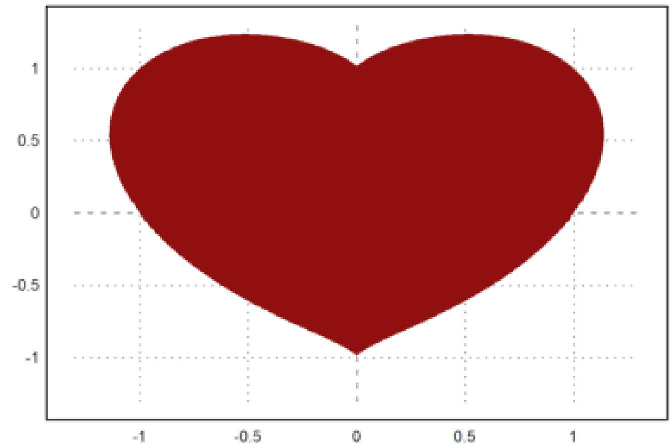
```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):
```




```
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```


1
2
3
4
5

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=red,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
```




```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$\left(y^2+x^2-1\right)^3-x^2\,y^3$$

Kami ingin memutar kurva hati di sekitar sumbu y. Berikut adalah ekspresi yang mendefinisikan hati:

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2.y^3.$$

Selanjutnya kita atur

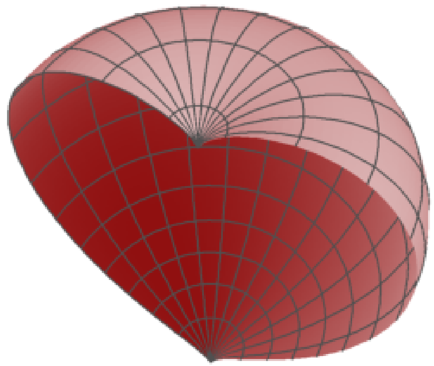
$$x = r.cos(a), \quad y = r.sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

$$\left(r^2-1\right)^3+\frac{\left(\sin \left(5\,a\right)-\sin \left(3\,a\right)-2\,\sin a\right)\,r^5}{16}$$

Ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang menyelesaikan r, jika a diberikan. Dengan fungsi tersebut kita dapat memplot hati yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t);  ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```

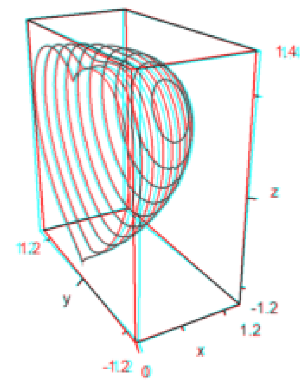


Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar mengelilingi sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi yang mendeskripsikan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
```

```
  r=x^2+y^2;
  return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
   endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,100,60],>anaglyph):
```



1.4
z
-1.2
1.2
x
0
-1.2
y
1.2

Fungsi plot3d bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, dimungkinkan untuk mendapatkan plot berbingkai dari objek apapun yang Anda suka.

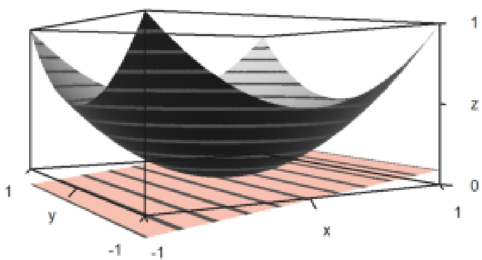
Meskipun Euler bukan program 3D, ia dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kami mencoba memvisualisasikan paraboloid dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
```

```
    y=-1:0.01:1; x=(-1:0.01:1)';
    plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ..
      hues=0.5,>contour,color=orange);
    h=holding(1);
    plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);
    holding(h);
  endfunction
```

Sekarang framedplot() menyediakan bingkai, dan mengatur tampilan.

```
>framedplot("myplot",[-1,1,-1,1,0,1],height=0,angle=-30°, ...
>  center=[0,0,-0.7],zoom=3):
```

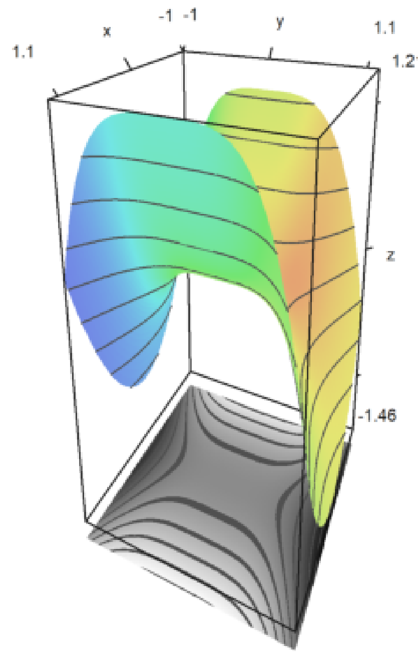


Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d() mengatur jendela ke fullwindow() secara default, tetapi plotcontourplane() berasumsi demikian.

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
>function myplot (x,y,z) ...
```

```
    zoom(2);
    wi=fullwindow();
    plotcontourplane(x,y,z,level="auto",<scale);
    plot3d(x,y,z,>hue,<scale,>add,color=white,level="thin");
    window(wi);
    reset();
  endfunction
```

```
>myplot(x,y,z):
```

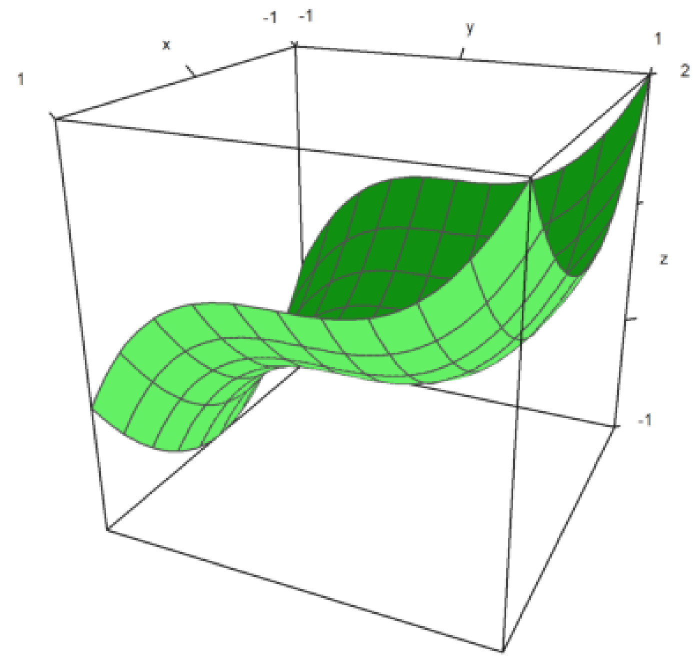


Euler dapat menggunakan frame untuk menghitung animasi sebelumnya.

Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah rotate. Itu dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi memanggil addpage() untuk setiap plot baru. Akhirnya ia menganimasikan plot.

Silakan pelajari sumber rotasi untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3"); ...
>rotate("testplot"); testplot():
```


x
y
z
1
-1
-1
1
2
-1

Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari http://www.povray.org/, dan meletakkan subdirektori "bin" dari Povray ke jalur lingkungan, atau atur variabel "defaultpovray" dengan jalur penuh menunjuk ke "pvengine.exe".

Antarmuka Povray Euler menghasilkan file Povray di direktori beranda pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:UsersUsernameEuler. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam notebook. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear().

Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi f(x,y), atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.

Selain pov3d(), ada banyak fungsi, yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian Gunakan writeln(...) untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "look", yang membutuhkan string dengan kode Povray untuk tekstur dan hasil akhir objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.

Perhatikan bahwa alam semesta Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke Sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk secara vertikal ke atas, a sumbu nd x, y, z dalam arti tangan kanan.
Anda perlu memuat file povray.

```
>load povray;
```

Pastikan, direktori Povray bin ada di jalurnya. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi jalur ke povray yang dapat dieksekusi.

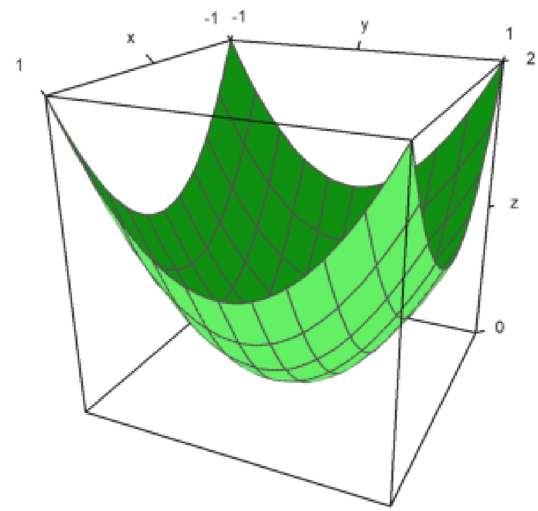
```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

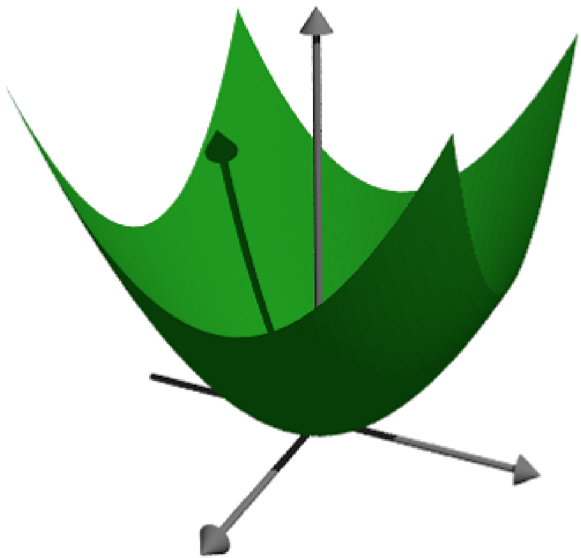
Untuk kesan pertama, kami memplot fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk ray tracing file ini.

Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan ditutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya, apakah Anda ingin mengizinkan file exe berjalan. Anda dapat menekan batal untuk berhenti lebih lanjut Pertanyaan. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengakui dialog start-up Povray.

```
>plot3d("x^2+y^2",zoom=2):
```

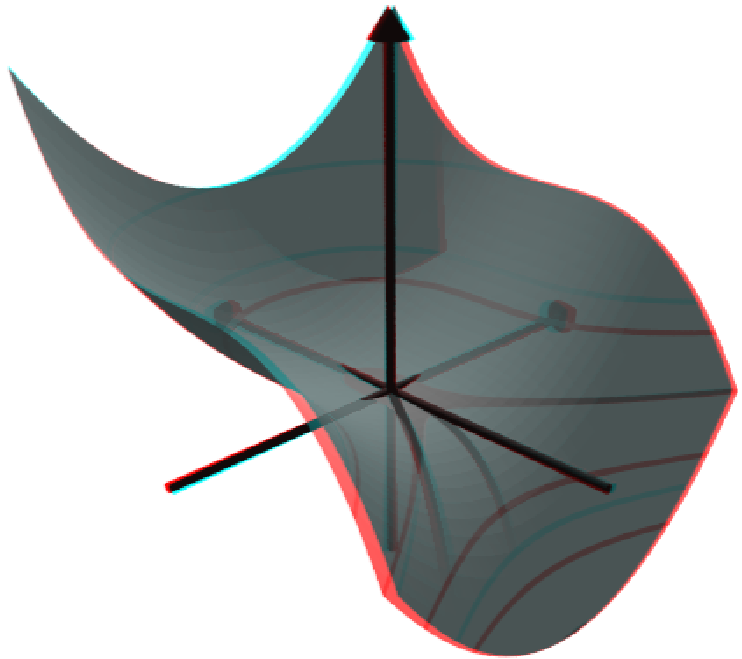



```
>pov3d("x^2+y^2",zoom=3);
```



Kita dapat membuat fungsi transparan dan menambahkan hasil akhir lain. Kita juga dapat menambahkan garis level ke plot fungsi.

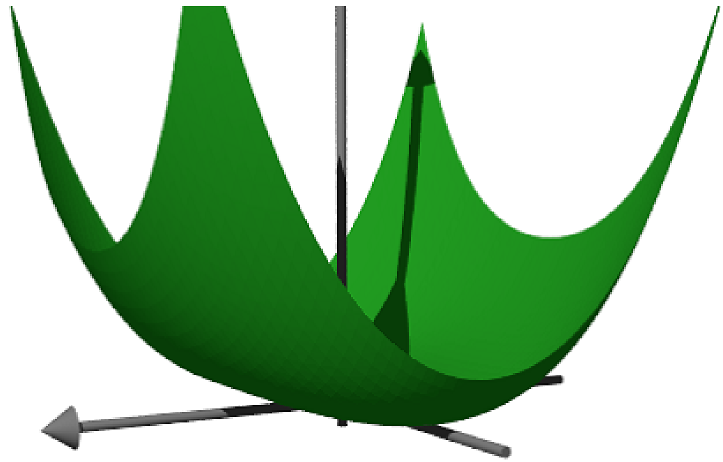
```
>pov3d("x^2+y^3",axiscolor=red,angle=-45°,>anaglyph, ...
>  look=povlook(cyan,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```



Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi secara manual.

Kita memplot himpunan titik pada bidang kompleks, dimana hasil kali jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

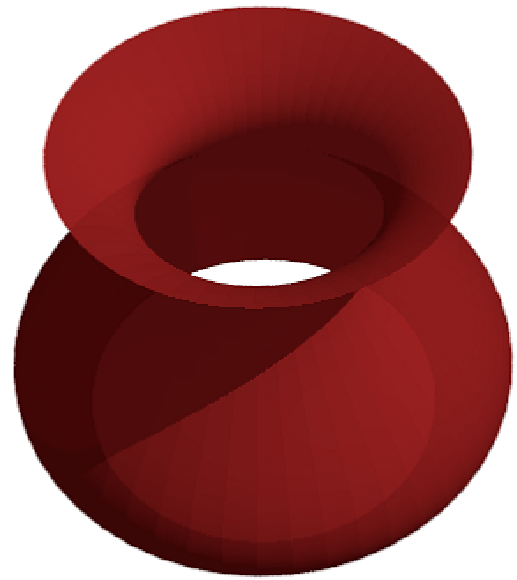
```
>pov3d("((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=2, ...
>  angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=10°,n=50, ...
>  <fscale,zoom=3.8);
```



Daripada menggunakan fungsi, kita bisa memplotnya dengan koordinat. Seperti di plot3d, kita memerlukan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.

Dalam contoh ini kita memutar suatu fungsi di sekitar sumbu-z.

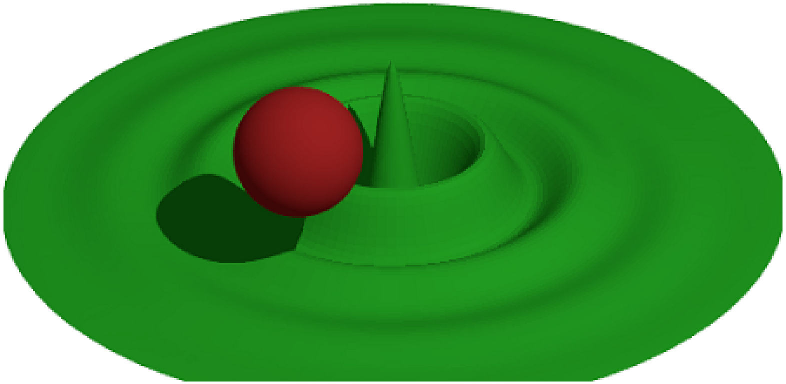
```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,50)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,look=povlook(red,0.1),height=50°,axis=0,zoom=4,light=[10,5,15]);
```



Dalam contoh berikut, kami memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.

Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga sesuai dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3;  ...
>pov3d(x,y,z,zoom=6,axis=0,height=30°,add=povsphere([0.5,0,0.25],0.15,povlook(red)), ...
>  w=500,h=300);
```



Dengan metode bayangan Povray yang canggih, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya di batas-batas dan dalam bayang-bayang, triknya mungkin menjadi jelas.

Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

$$x^2\,y^3$$

Persamaan permukaannya adalah [x,y,Z]. Kami menghitung dua turunan dari x dan y dan mengambil perkalian silangnya sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

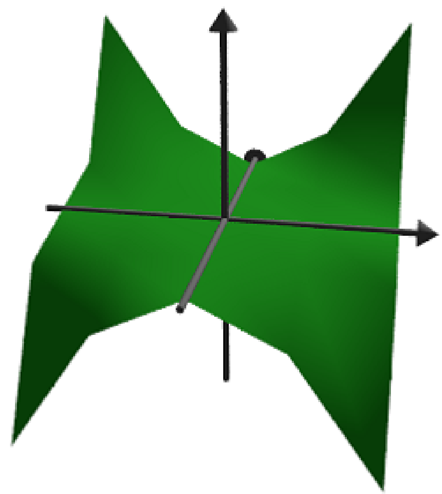
Kami mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

$$[- 2\,x\,y^3 , - 3\,x^2\,y^2 , 1]$$

Kami hanya menggunakan 25 poin.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
>  xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);
```



Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang lebih baik dalam contoh ini.

See: Examples\Trefoil Knot | Trefoil Knot

Untuk tampilan yang bagus dengan poin yang tidak terlalu banyak, kami menambahkan vektor normal disini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normalnya bagi kami. Pertama, tiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian kedua vektor turunan ke x dan y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normalnya, yaitu perkalian silang kedua turunannya.

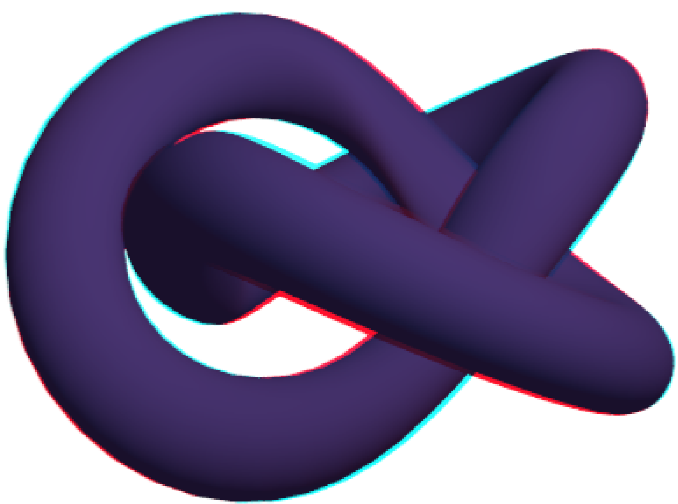
```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kami sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

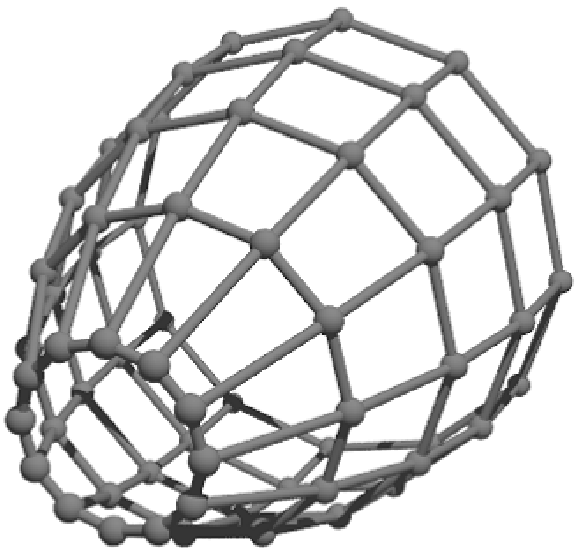
Vektor normal adalah evaluasi ekspresi simbolis dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaks untuk ini adalah &"expression"(parameter). Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan simbolis ekspresi NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),>anaglyph,axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
>  <shadow,look=povlook(blue), ...
>  xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```



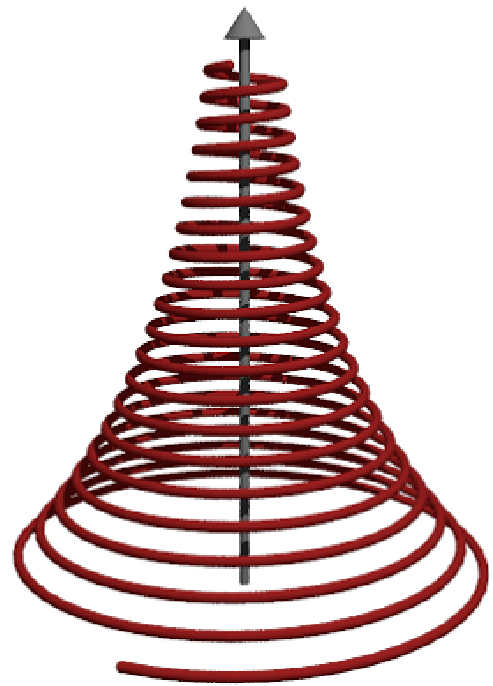
Kita juga dapat menghasilkan grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```



Dengan povgrid(), kurva dimungkinkan.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```



Di atas, kami menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek-objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray.

Kita memulai output dengan povstart().

```
>povstart(zoom=4);
```

Pertama kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam string di Euler.

Fungsi povx() dll hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(yellow)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

String tersebut berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.

```
>c2
```

```
 cylinder { <0,0,-1>, <0,0,1>, 1
  texture { pigment { color rgb <0.941176,0.941176,0.392157> }  }
  finish { ambient 0.2 }
  }
```

Seperti yang Anda lihat, kami menambahkan tekstur ke objek dalam tiga warna berbeda.

Itu dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan Euler default warna, atau tentukan warna kita sendiri. Kita juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

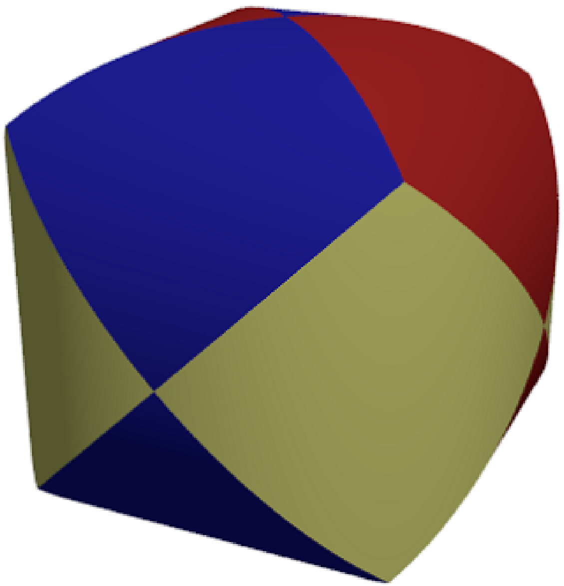
```
  texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> }  }
  finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek persimpangan, dan menulis hasilnya ke file.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Persimpangan tiga silinder sulit untuk divisualisasikan jika Anda belum pernah melihatnya sebelumnya.

```
>povend;
```



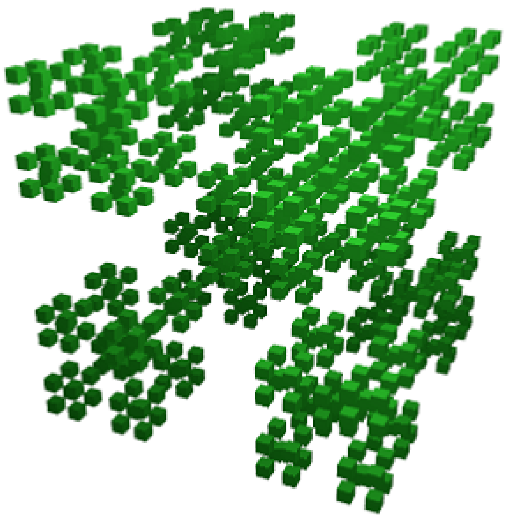
Fungsi berikut menghasilkan fraktal secara rekursif.

Fungsi pertama menunjukkan bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan string, berisi koordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```
   if n==1 then writeln(onebox(x,y,z,h));
   else
     h=h/3;
     fractal(x,y,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+h,y+h,z+h,h,n-1);
   endif;
  endfunction
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
>povend();
```



Perbedaan memungkinkan pemisahan satu objek dari yang lain. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG di Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kita mendefinisikan objek di Povray, alih-alih menggunakan string di Euler. Definisi segera ditulis ke file.

Koordinat kotak -1 hanya berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

Kita bisa menggunakan objek ini di povobject(), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject("mycube",povlook(red));
```

Kami membuat kubus kedua, dan memutar serta menskalakannya sedikit.

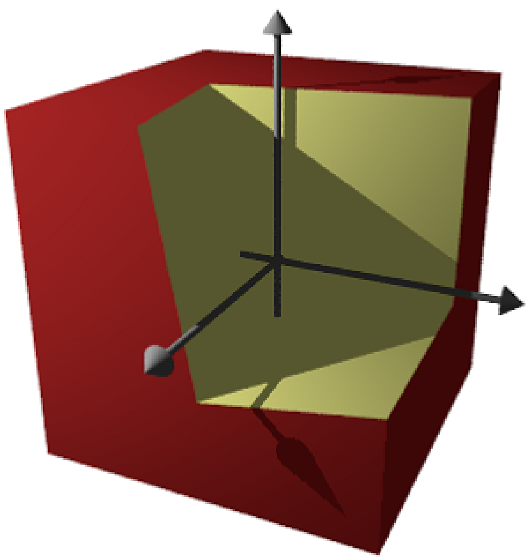
```
>c2=povobject("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...
>  rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Lalu kita ambil selisih kedua benda tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.

```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
>povend();
```



Povray dapat memplot himpunan di mana f(x,y,z)=0, seperti parameter implisit di plot3d. Namun hasilnya terlihat jauh lebih baik.

Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan keluaran ekspresi Maxima atau Euler.

$$((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-c^2)^2+(y^2-1)^2)=d$$

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
>c=0.1; d=0.1; ...
>writeln(povsurface("(pow(pow(x,2)+pow(y,2)-pow(c,2),2)+pow(pow(z,2)-1,2))*(pow(pow(y,2)+pow(z,2)-po
>povend();
```

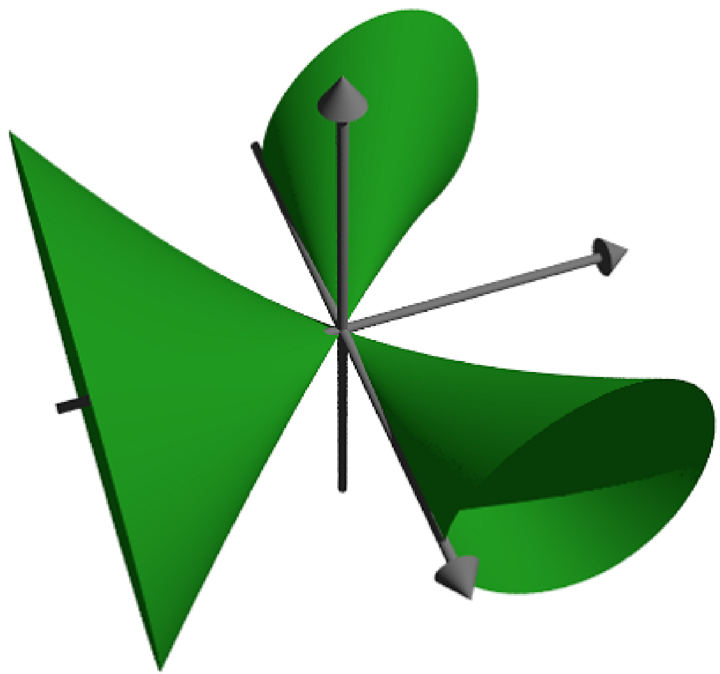
```
Error : Povray error!

Error generated by error() command

povray:
    error("Povray error!");
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

```
>povstart(angle=25°,height=10°);
>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,2)*pow(z,2)-1",povlook(blue),povbox(-2,2,"")));
>povend();
```

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
```

Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaksis yang berbeda dalam ekspresi.

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
```



Dalam contoh ini, kami menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.

Kami ingin memaksimalkan xy dalam kondisi x+y=1 dan menunjukkan sentuhan tangensial dari garis level.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

Kita tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan menyatakan. Fungsi povtriangle() melakukan ini secara otomatis. Ini dapat menerima vektor normal seperti pov3d().

Berikut ini mendefinisikan objek mesh, dan langsung menulisnya ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kita mendefinisikan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
>ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tulis permukaannya dikurangi kedua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Tuliskan kedua perpotongan tersebut.

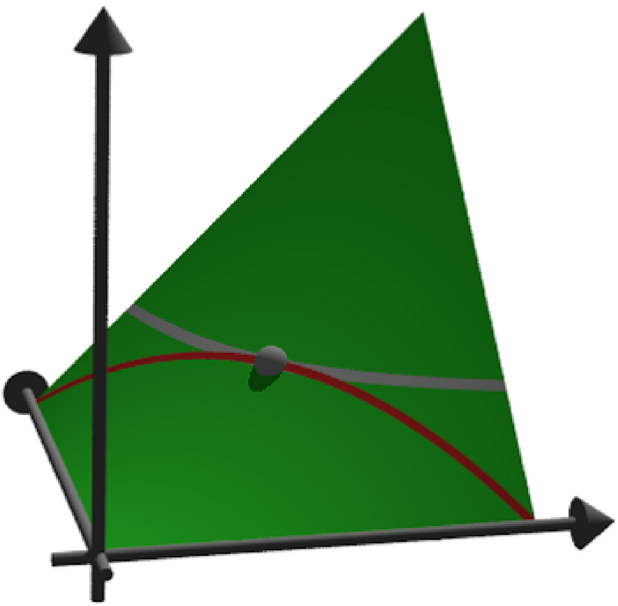
```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
>writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Tulis poin maksimal.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsize));
```

Tambahkan sumbu dan selesai.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
>povend();
```

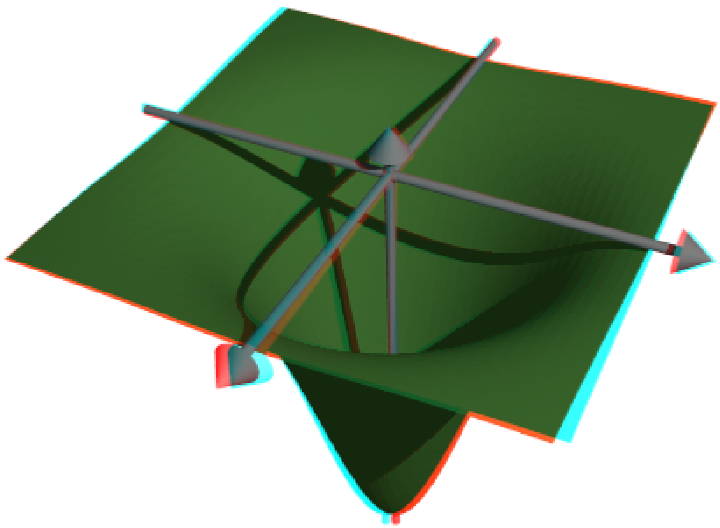


Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/cyan, Povray harus dijalankan dua kali dari posisi kamera berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().

Tentu saja, Anda memerlukan kacamata berwarna merah/cyan untuk melihat contoh berikut dengan benar.

Fungsi pov3d() memiliki saklar sederhana untuk menghasilkan anaglyph.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```



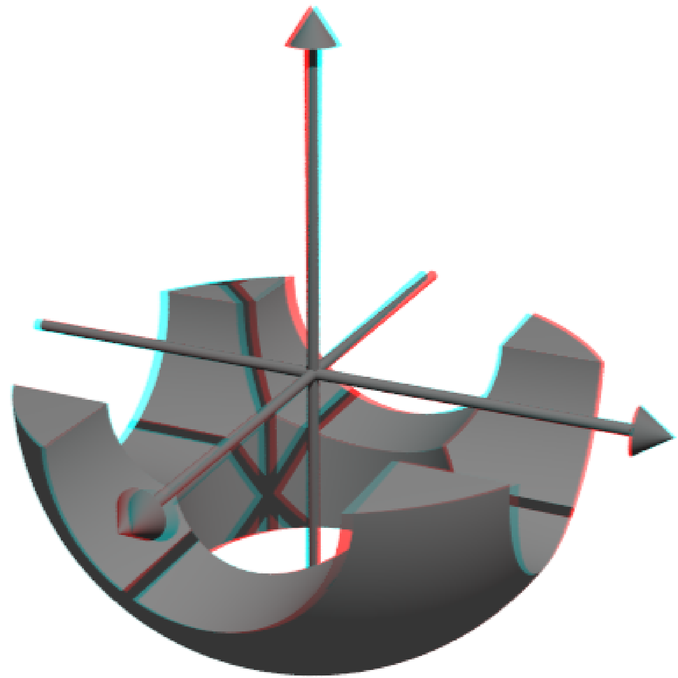
Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu memasukkan pembuatan adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
```

```
    s=povsphere(povc,1);
    cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
    clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
    cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));
    c=povbox([-1,-1,0],1);
    un=povunion([cl,clx,cly,c]);
    obj=povdifference(s,un,povlook(red));
    writeln(obj);
    writeAxes();
  endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti pada povstart() dan povend() digabungkan.

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```



Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Tetapi Anda tidak terbatas pada ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau merupakan objek yang benar-benar baru.

Kami mendemonstrasikan torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi kita mengembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat di titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look="") ...
```

```
    return "torus {"+r1+","+r2+look+"}";
  endfunction
```

Inilah torus pertama kami.

```
>t1=povdonat(0.8,0.2)
```

```
torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.

```
>t2=povobject(t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```
object { torus {0.8,0.2}
 rotate 90 *x
 translate <0.8,0,0>
 }
```

Sekarang kita tempatkan objek-objek tersebut ke dalam sebuah adegan. Untuk tampilannya kami menggunakan Phong Shading.

```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
>writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
>writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
```

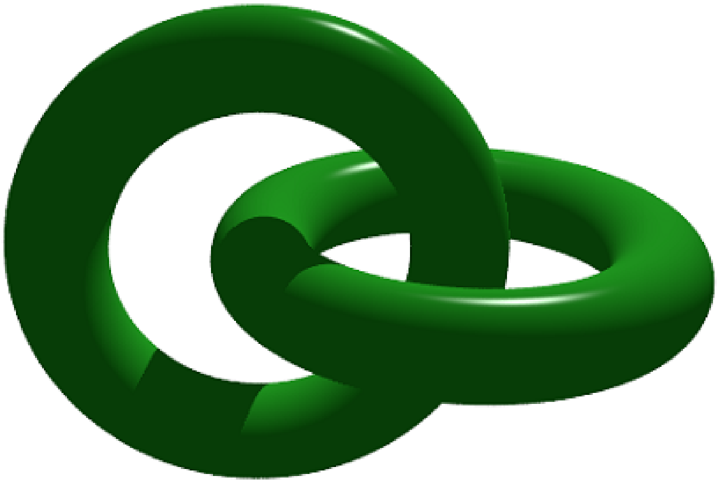
```
>povend();
```

memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, kesalahan tersebut tidak ditampilkan. Oleh karena itu Anda harus menggunakan

```
>povend(<exit);
```

jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membiarkan jendela Povray terbuka.

```
>povend(h=320,w=480);
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit. Kami menyelesaikan

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c.x \to \text{Max.}$$

dan menunjukkan titik-titik yang layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini punya solusinya.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[0,  1,  0.5]
```

Ya, punya.

Selanjutnya kita mendefinisikan dua objek. Yang pertama adalah pesawat

$$a \cdot x \leq b$$

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
  return povplane(a,b,look)
endfunction
```

Kemudian kita mendefinisikan perpotongan semua setengah ruang dan sebuah kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="") ...
```

```
    ol=[];
    loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#],b[#]); end;
    ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
    return povintersection(ol,look);
  endfunction
```

Sekarang kita dapat merencanakan adegannya.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
>writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
>writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar yang optimal.

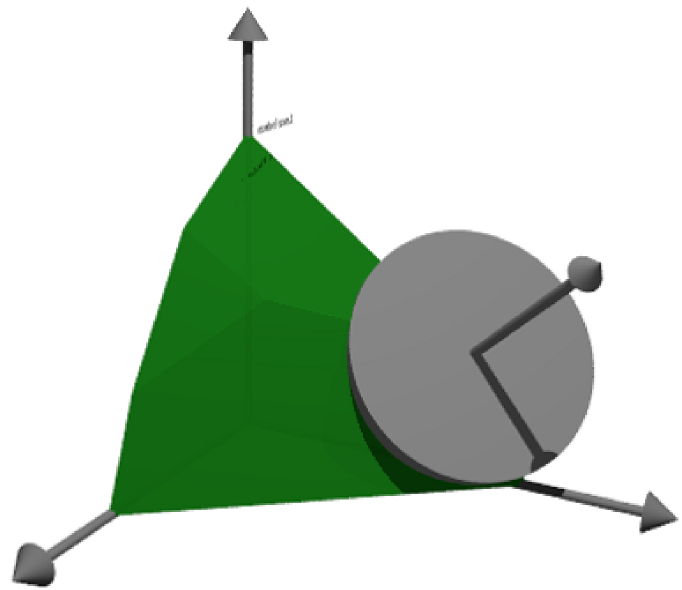
```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
>  povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan ke arah optimal.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

Kami menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya sesuai dengan pandangan kita.

```
>writeln(povtext("Linear Problem",[0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=5°)); ...
>povend();
```



Contoh Lainnya

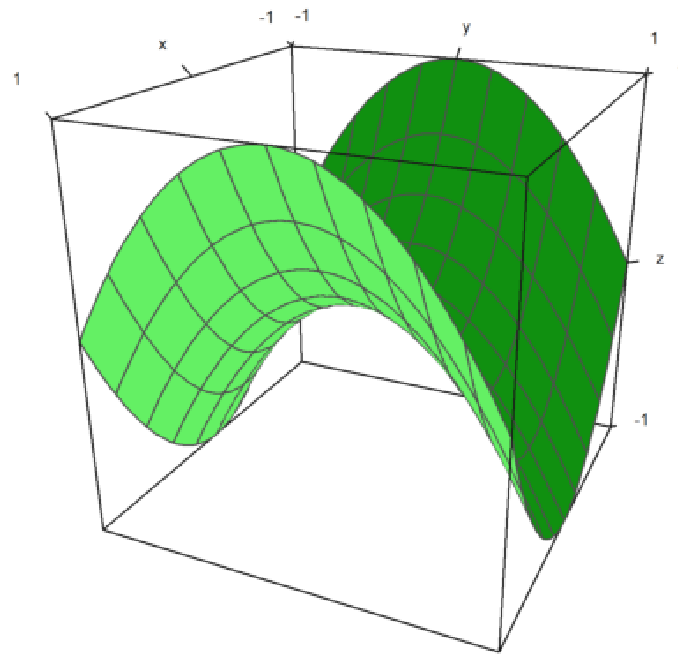
Anda dapat menemukan beberapa contoh Povray di Euler dalam file berikut.

See: Examples/Dandelin Spheres
See: Examples/Donat Math
See: Examples/Trefoil Knot
See: Examples/Optimization by Affine Scaling

Contoh Soal

1. Gambarkan grafik fungsi dua variabel berikut latex: f(x,y)= x^2-y^2

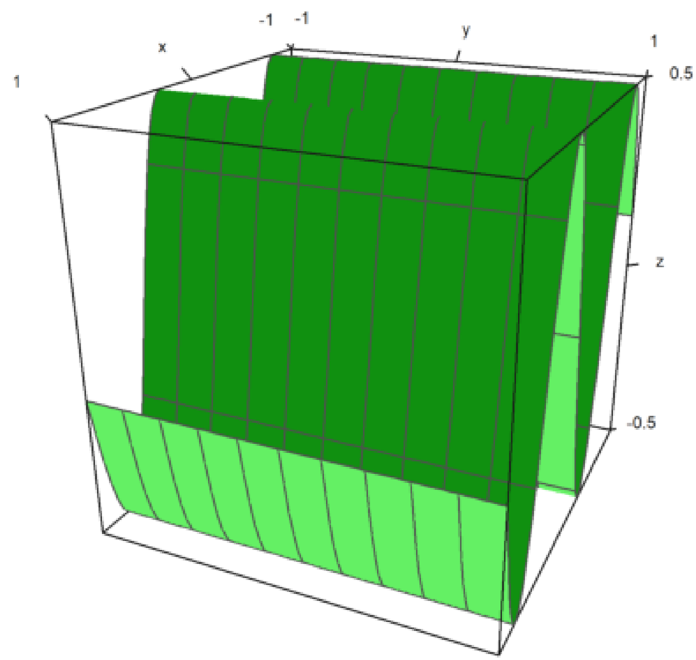
```
>plot3d("x^2-y^2"):
```



2. Gambarkan grafik z yang merupakan fungsi dua variabel sebagai berikut

$$z = f(x, y) = sin(x)cos(y)$$

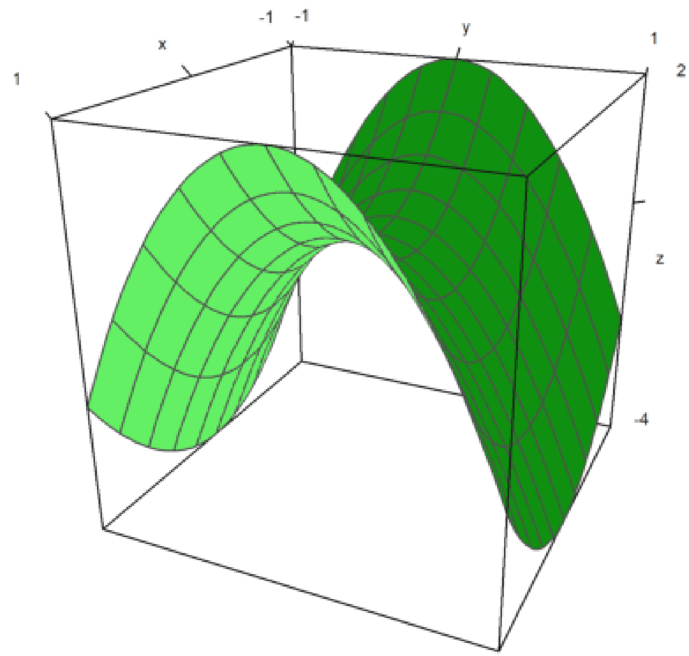
```
>x = -3:0.1:3;
>y = -3:0.1:3;
>z = sin(x)*cos(y);
>plot3d("z"):
```



3. Gambarkan grafik fungsi tersebut:

$$f(x,y) = 2x^2 - 4y^2$$

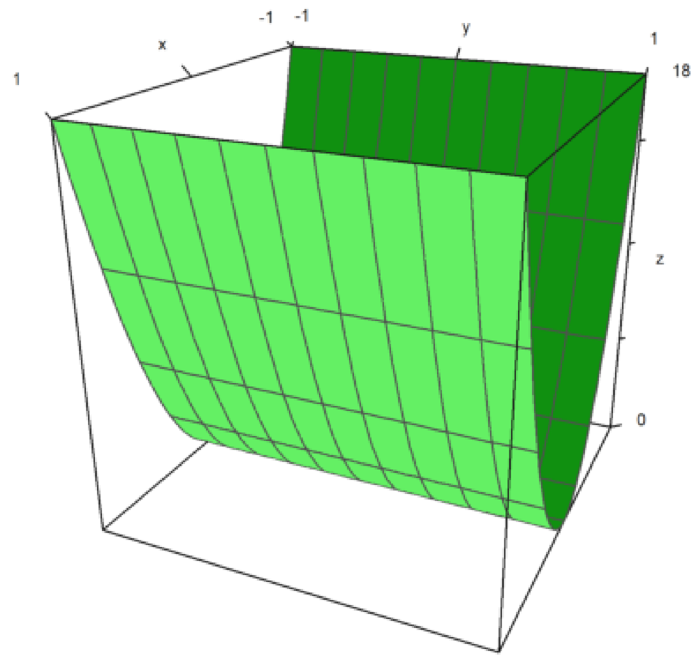
```
>plot3d("2*x^2-4*y^2"):
```



4. Gambarkan fungsi grafik f(x,y) berikut dengan interval yang telah ditentukan

$$3x^2 - y^2, -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$$

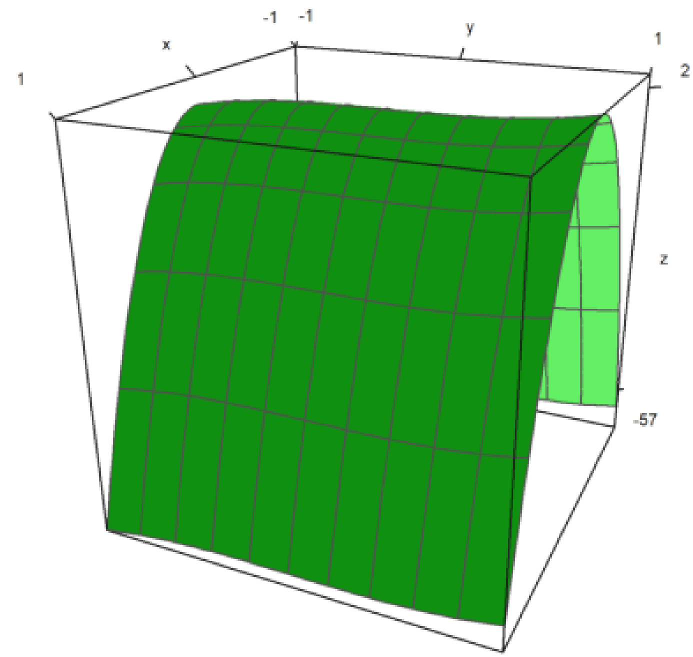
```
>x = -3:0.1:3;
>y = -3:0.1:3;
>z = 3*x^2-y^2;
>plot3d("z"):
```



5. Buatlah garfik fungsi berikut:

$$f(x, y, z) = -x^2 + 2y^3 - 3z$$

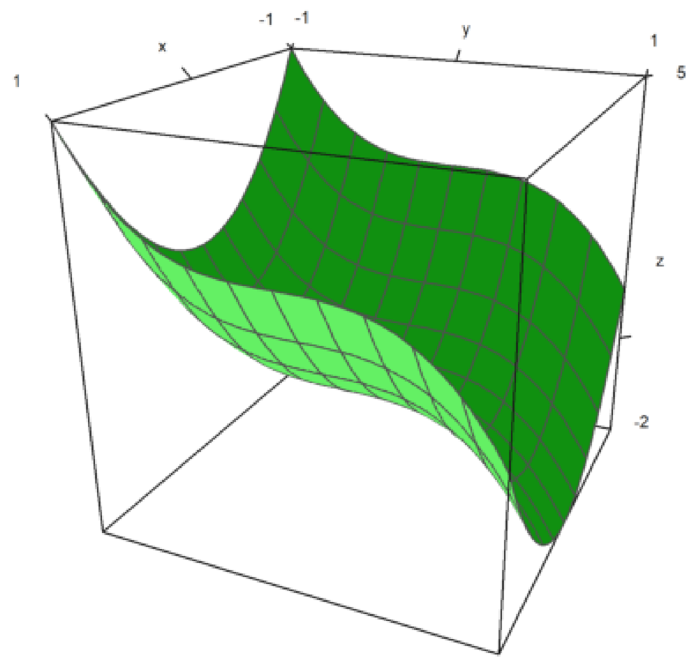
```
>plot3d("-x^2+2*y^3-3*z"):
```



6. Buat animasi grafik dari fungsi tersebut:

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^3$$

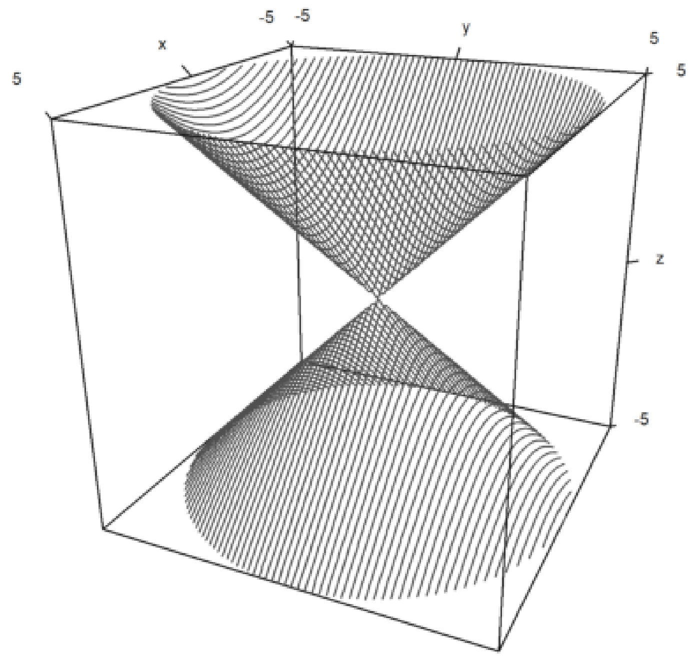
```
>function testplot () := plot3d("3*x^2-2*y^3");
>rotate("testplot"); testplot():
```



7. Buat garfik fungsi berikut dengan implisit 2

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

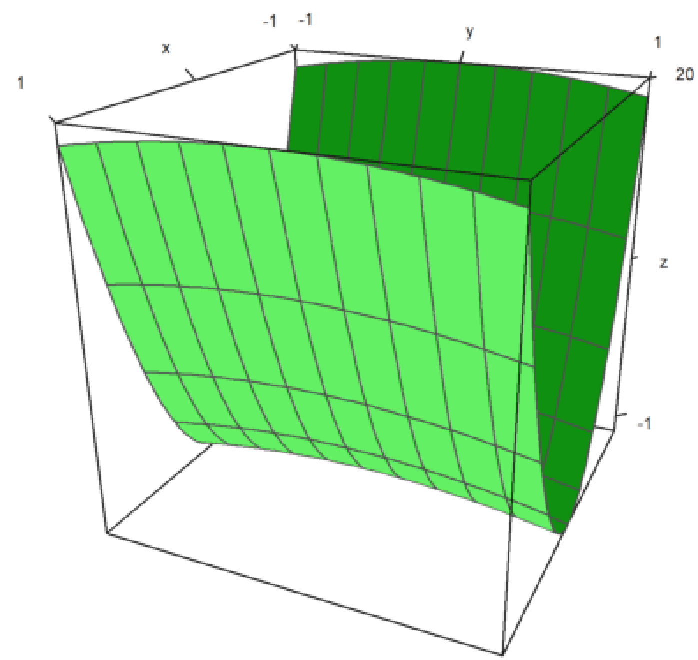
```
>plot3d("x^2+y^2-z^2",r=5,implicit=2):
```



8. Bentuk grafik fungsi berikut:

$$2x^2 - y^2 + z$$

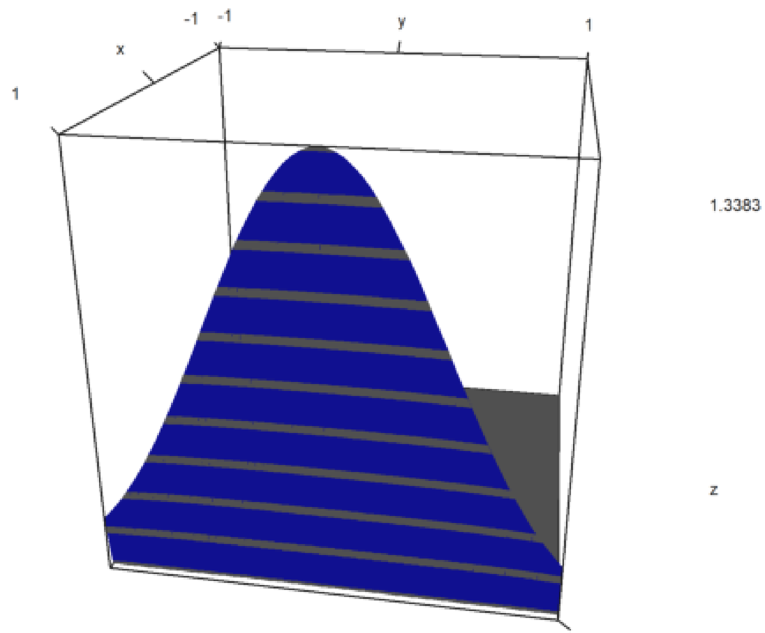
```
>plot3d("2*x^2-y^2+z"):
```



9. Buatlah plot kontur dari fungsi berikut:

$$7x - 2y^2 + 5z$$

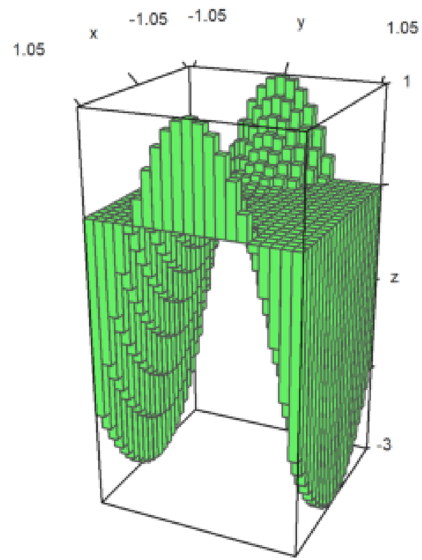
```
>plot3d("exp(7*x-2*y^2+5*z)",angle=100°,>contour,color=blue):
```



10. Gambarlah plot batang dengan fungsi sebagai berikut

$$x^2 - 3y^2$$

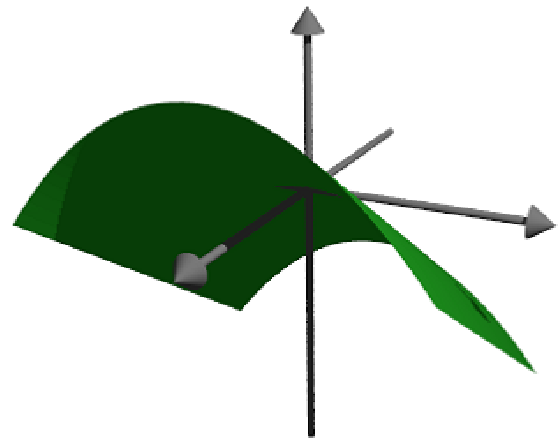
```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2-3*y^2;
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05;
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



11. Buat grafik fungsi berikut dengan povray

$$f(x, y) = x - y^2$$

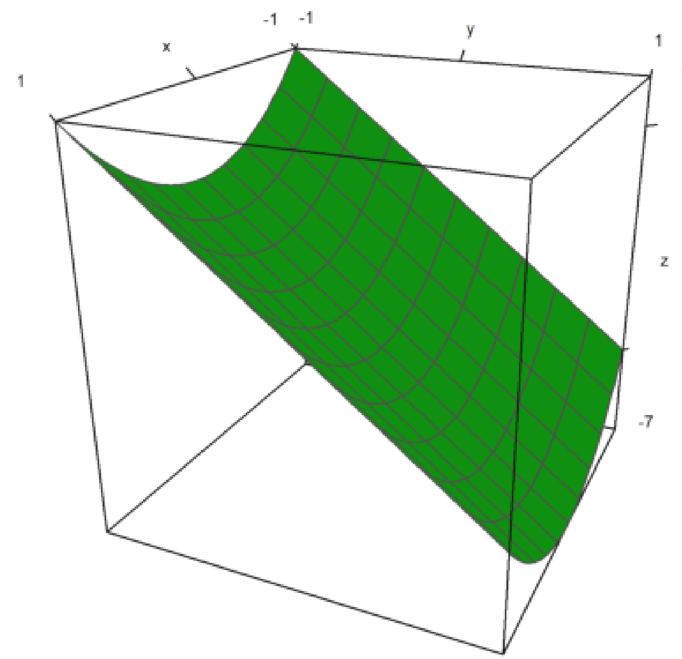
```
>pov3d("x-y^2",zoom=3);
```



12. Buat animasi grafik dari fungsi tersebut:

$$f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$$

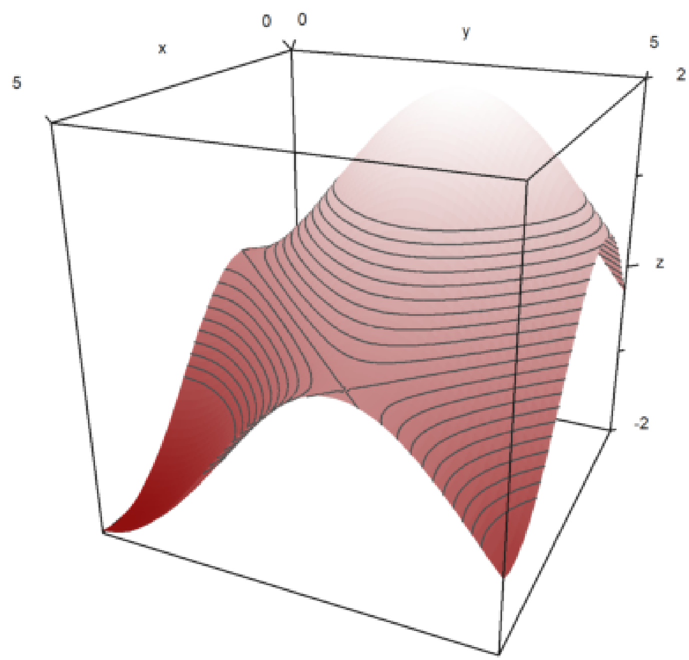
```
>function testplot () := plot3d("2*x^2-3*y-4");
>rotate("testplot"); testplot():
```



13. Buat plot kontur fungsi

$$sin(x) - cos(y)$$

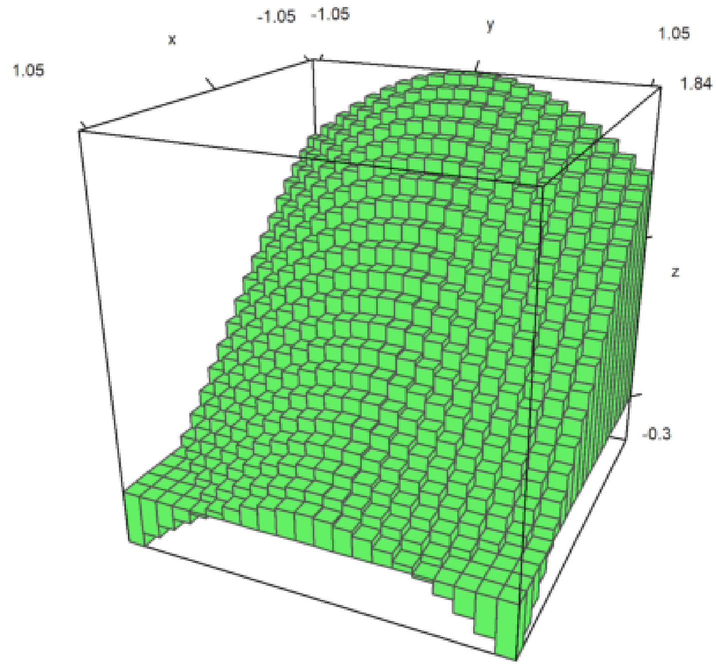
```
>plot3d("sin(x)-cos(y)",0,5,0,5,level=-1:0.1:1,color=red):
```



14. Buatlah plot batang dari fungsi berikut:

$$cos(y) - sin(x)$$

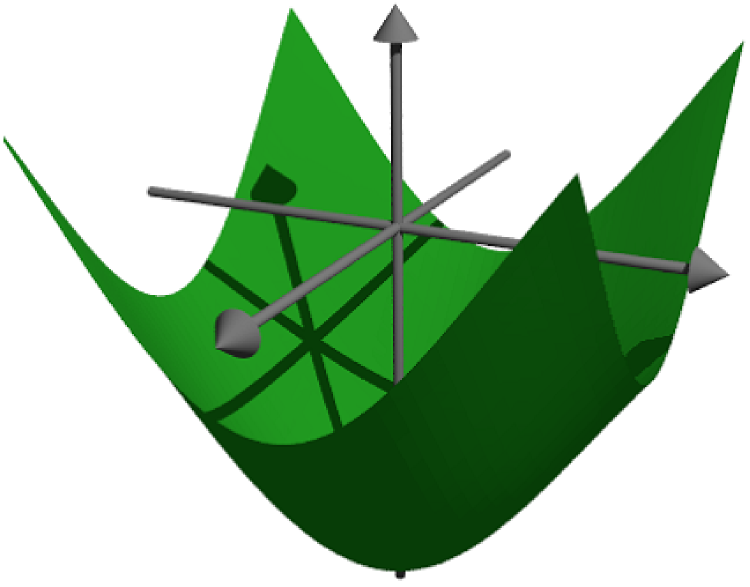
```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=cos(y)-sin(x);
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05;
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



15. Gambarlah grafik fungsi berikut dengan povray

$$sin(x)^2 - cos(y)^2$$

```
>pov3d("sin(x)^2-cos(y)^2",zoom=4);
```



[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Rasdiana Putri
NIM : 23030630033
Kelas: Matematika E

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.
Error in:
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
   ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x+1}.$$

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

```
0
```

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
    useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
Error in:
g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...
    ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
2.20920171961
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
[0.987534,  0.987596,  0.987657,  0.987718,  0.987778,  0.987837,
0.987896,  0.987954,  0.988012,  0.988069,  0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara ”inline” menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata ”map” digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata ”map” fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return x^3
    else return x^2
    endif;
  endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

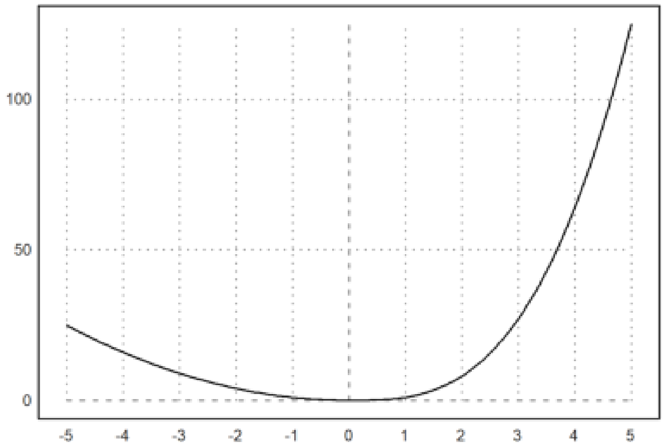
```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```




```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

```
                                     x
                                  2 E
```

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2\,e^{a}$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

```
30.308524483
```

```
>$f(E), $float(%)
```

$$30.30852448295852$$

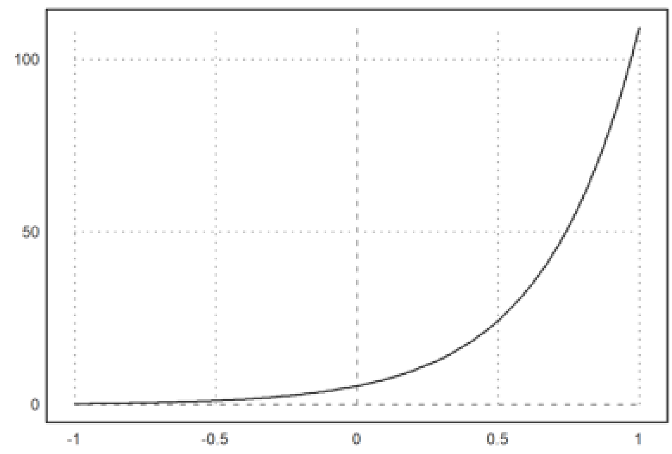
```
>function g(x) &= 3*x+1
```

```
3 x + 1
```

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

```
     3 x + 1
  2 E
```

```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-fungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi-komposisi 2 fungsi.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

Nomor 1

$$g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 25$$

```
>function g(x) &= (x^3 + 2*x^2 - 5*x + 25)
```

```
                          3      2
                         x  + 2 x  - 5 x + 25
```

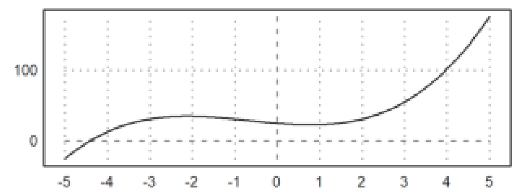
```
>function g(x) := (x^3 + 2*x^2 - 5*x + 25)
>g(7)
```

```
431
```

```
>g(-5:5)
```

```
[-25,  13,  31,  35,  31,  25,  23,  31,  55,  101,  175]
```

```
>aspect(3); plot2d("g(x)",-5,5):
```



Nomor 2

$$a(x) = \sqrt{2x^2 + 25}$$

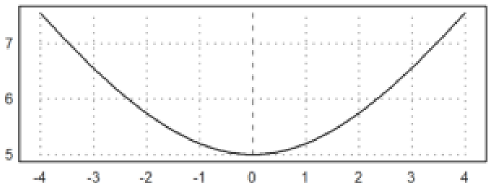
```
>function a(x) := (sqrt(2*x^2+25))
>a(6)
```

```
9.8488578018
```

```
>a=(-4:4)
```

```
[-4,  -3,  -2,  -1,  0,  1,  2,  3,  4]
```

```
>aspect(3); plot2d("a(x)",-4,4):
```



nomor 3

$$f(x) = x^2 - e^{\cos x}$$

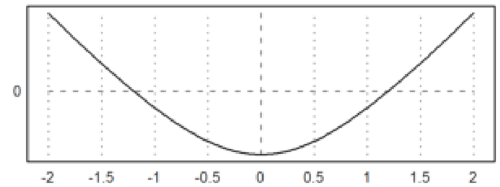
```
>function f(x):=(x^2-exp(cos(x)))
>f(pi)
```

```
9.50172495992
```

```
>f=(-2:2)
```

```
[-2,  -1,  0,  1,  2]
```

```
>aspect(3); plot2d("f(x)",-2,2):
```



Nomor 4

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x}{5x}$$

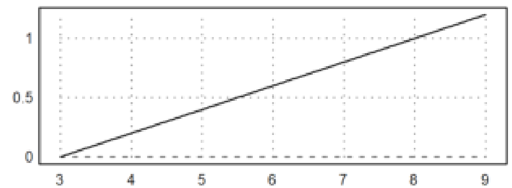
```
>function d(x):= ((x^2-3*x)/(5*x))
>d(4)
```

```
0.2
```

```
>d=(3:9)
```

```
[3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
```

```
>aspect(3); plot2d("d(x)",3,9):
```



Nomor 5

$$h(x) = \begin{cases} x+3 & x<2 \\ x^2+1 & x \geq 2. \end{cases}$$

```
>function map h(x)
```

```
if x<2 then return x+3
else return x^2+1
endif;h(7)
endfunction
```

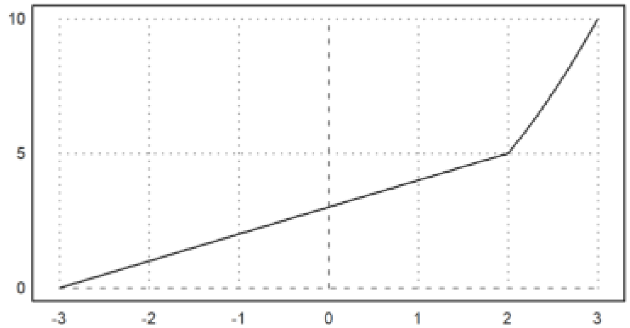
```
>h(7)
```

```
50
```

```
>h=(-3:3)
```

```
[-3,  -2,  -1,  0,  1,  2,  3]
```

```
>aspect(2); plot2d("h(x)",-3,3):
```



```
>
```

Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3\,x}}{x+1}=1$$

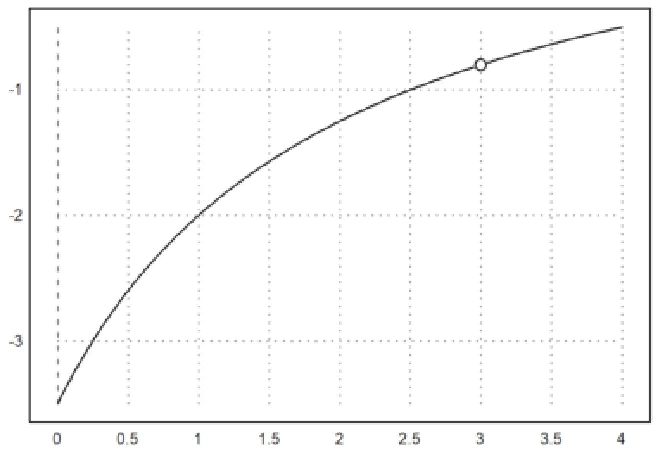
```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-13\,x^2+51\,x-63}{x^3-4\,x^2-3\,x+18}=-\frac{4}{5}$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d(3,-4/5,>points,style="ow
```



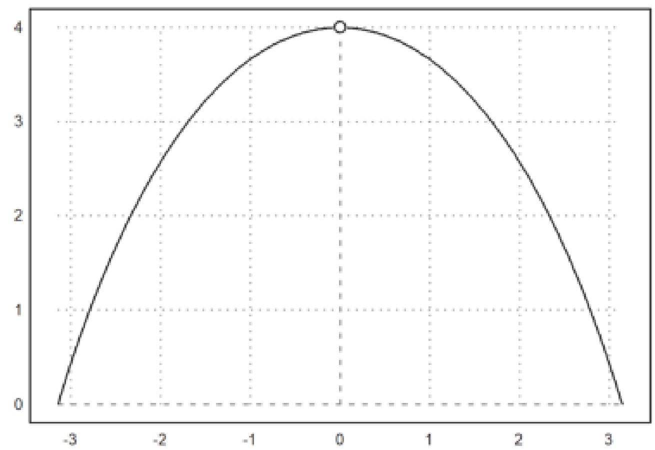

```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$4$$

$$2\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\,\sin x}{1-\cos x}\right)=4$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):
```



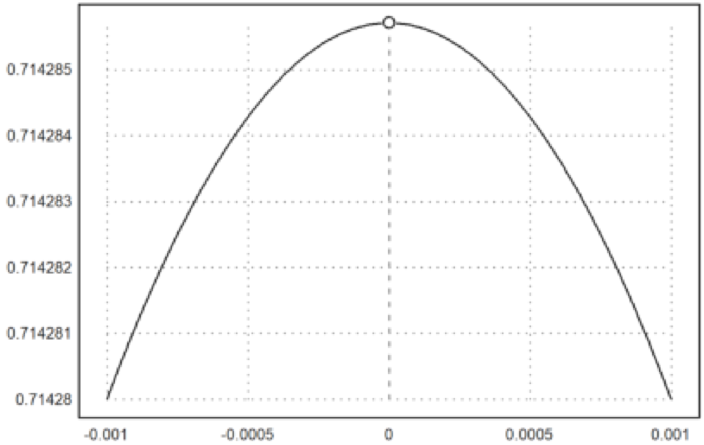
```
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\frac{5}{7}$$

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\cot \left(7\,h\right)}{\cot \left(5\,h\right)}}=\frac{5}{7}$$

Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

$$\lim_{x\to 8}\frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-1}{x-8}=\frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x\rightarrow 0}{\frac{1}{2\,x-1}}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\rightarrow 5}{\frac{x^2-3\,x-10}{x-5}}=7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x\rightarrow \infty }{\sqrt{x^2+x}-x}=\frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

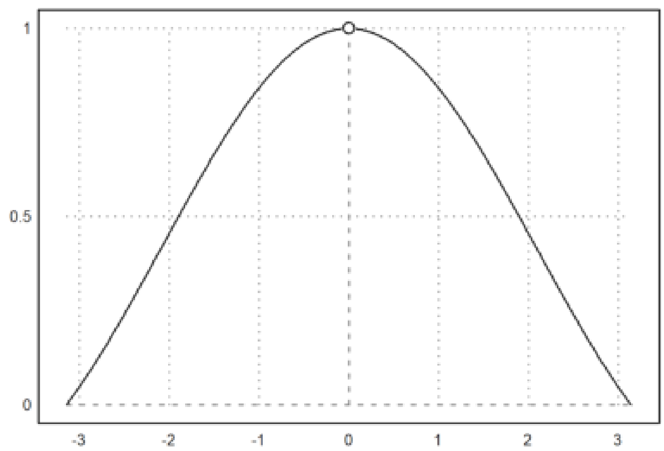
$$\lim_{x\uparrow 1}\frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.
Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x\to -\infty}\log x = \mathit{infinity}$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}(-2)^x = infinity$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t\uparrow 2} t-\sqrt{2-t} = 2$$

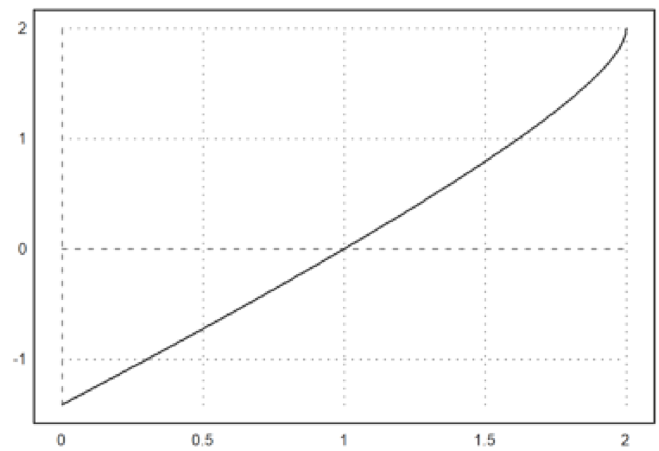
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus))
```

$$\lim_{t\downarrow 2} t-\sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t\downarrow 5} t-\sqrt{2-t} = 5-\sqrt{3}\,i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):
```




```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3}=\frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

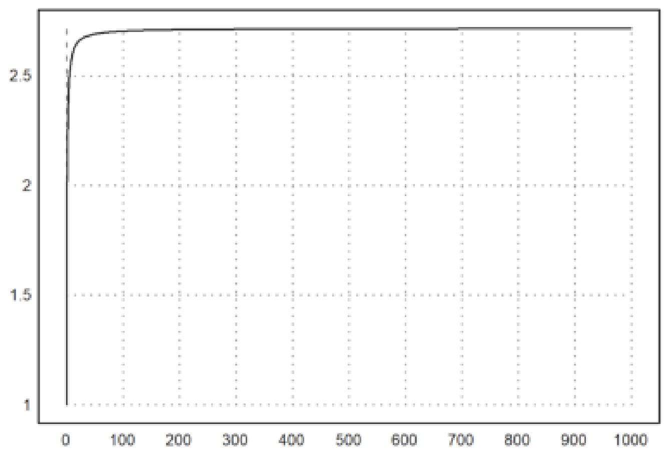
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|+x^2}{x^2-|x|}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}=e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```




```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x}+1\right)^{x}=e^{k}$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+k}\right)^{x}=e^{-k}$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x}-e^{2}}{x-2}=e^{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

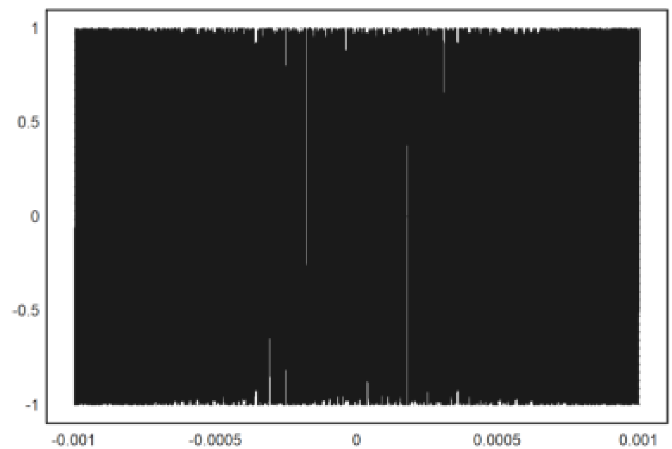
```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-0.001,0.001):
```



Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

Nomor 1

```
>$showev('limit((x^2-3*x+8),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3} x^2 - 3\,x + 8 = 8$$

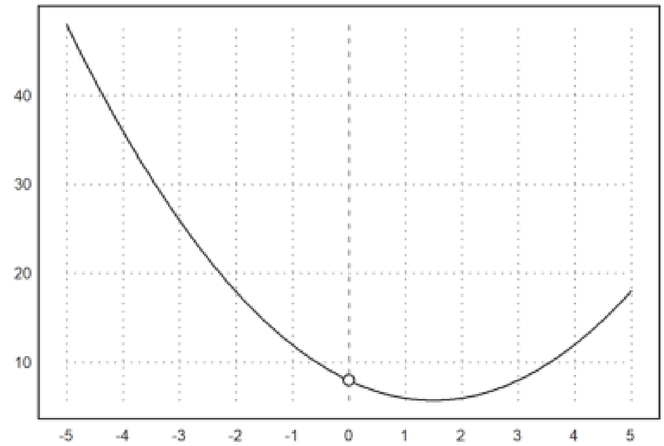
```
>$showev('limit((x^2-3*x+8),x,7))
```

$$\lim_{x\to 7} x^2 - 3\,x + 8 = 36$$

```
>$showev('limit((x^2-3*x+8),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} x^2 - 3\,x + 8 = \infty$$

```
>plot2d("(x^2-3*x+8)",-5,5); plot2d(0,8,>points,style="ow",>add):
```



Nomor 2

```
>$showev('limit(sqrt(2*x^2+4*x),x,2))
```

$$\lim_{x\rightarrow 2}\sqrt{2\,x^2+4\,x}=4$$

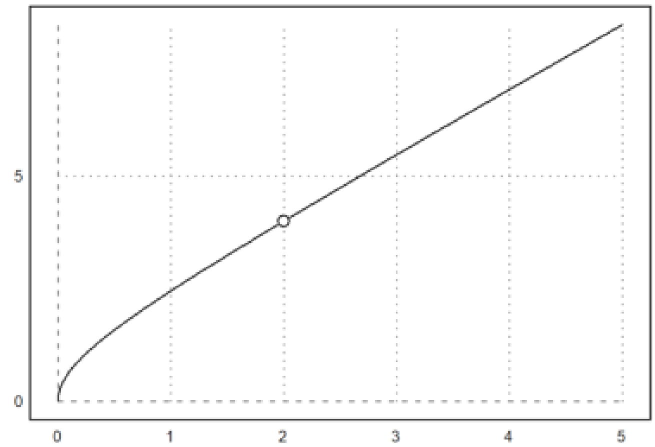
```
>$showev('limit(sqrt(2*x^2+4*x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2\,x^2+4\,x} = \infty$$

```
>$showev('limit(sqrt(2*x^2+4*x),x,6))
```

$$\lim_{x\to 6} \sqrt{2\,x^2+4\,x} = 4\,\sqrt{6}$$

```
>plot2d("sqrt(2*x^2+4*x)",0,5); plot2d(2,4,>points,style="ow",>add):
```



Nomor 3

```
>$showev('limit((x^2-5*x+6)/(2-x),x,1))
```

$$\lim_{x\to 1}{\frac{x^2-5\,x+6}{2-x}}=2$$

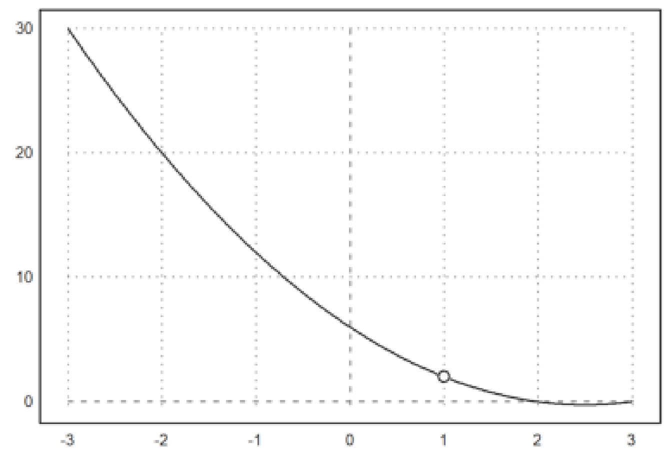
```
>$showev('limit((x^2-5*x+6)/(2-x),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3}{\frac{x^2-5\,x+6}{2-x}}=0$$

```
>$showev('limit((x^2-5*x+6)/(2-x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\frac{x^2-5\,x+6}{2-x}}=-\infty$$

```
>plot2d("(x^2-5*x+6)",-3,3); plot2d(1,2,>points,style="ow",>add):
```



Nomor 4

```
>$showev('limit((1-sin(2*x))/x^2,x,1))
```

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\left(2\,x\right)}{x^2}=1-\sin 2$$

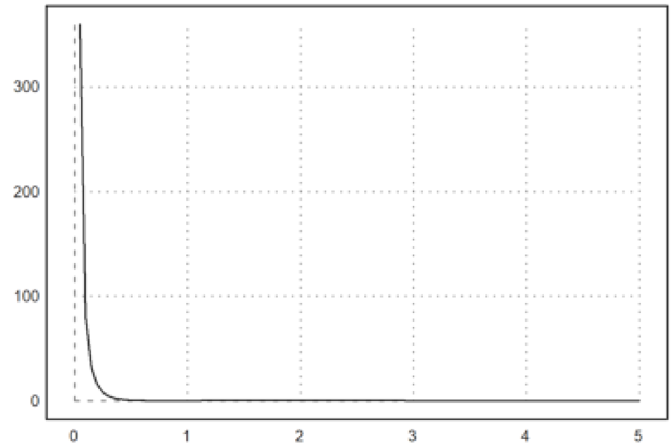
```
>$showev('limit((1-sin(2*x))/x^2,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin\left(2\,x\right)}{x^2}=\infty$$

```
>$showev('limit((1-sin(2*x))/x^2,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\sin(2\,x)}{x^2} = 0$$

```
>plot2d("((1-sin(2*x))/x^2)",0,5):
```



Nomor 5

```
>$showev('limit((x^3 + 2*x^2 - 3*x)/(x),x,1))
```

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2\,x^2-3\,x}{x}=0$$

```
>$showev('limit((x^3 + 2*x^2 - 3*x)/(x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2\,x^2-3\,x}{x}=-3$$

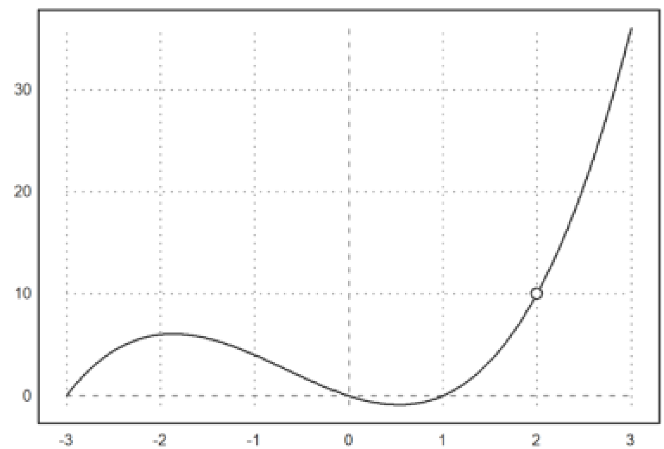
```
>$showev('limit((x^3 + 2*x^2 - 3*x)/(x),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2\,x^2-3\,x}{x}=5$$

```
>$showev('limit((x^3 + 2*x^2 - 3*x)/(x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^3+2\,x^2-3\,x}{x}=\infty$$

```
>plot2d("(x^3 + 2*x^2 - 3*x)",-3,3); plot2d(2,10,>points,style="ow",>add):
```


30
20
10
0
-3
-2
-1
0
1
2
3

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2\,x$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$2\,h\,x + h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$2\,x+h$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2\,x$$

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^{n}-x^{n}}{h}}=n\,x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)ˆn dengan menggunakan teorema binomial.

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\sin \left(x+h\right)-\sin x}{h}}=\cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(x+h\right)-\log x}{h}=\frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
 $showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                     ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$factor\left(e^{x+h}-e^x\right)=\left(e^h-1\right)\,e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h\to 0}{\frac{e^h-1}{h}}\right)\,e^x=e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

```
 x
x
```

```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{x^x}=1$$

Silakan Anda gambar kurva

$$y=x^x.$$

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^{x+h}-x^{x}}{h}}=\mathit{infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^{x+h}-x^{x}}{h}}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^{x+h}-x^{x}}{h}}=x^{x}\,\left(\log x+1\right)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
[x > 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

```
[x < 0]
```

```
>&facts()
```

```
[]
```

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin \left(x+h\right)-\arcsin x}{h}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan \left(x+h\right)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos ^2x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

```
sinh(x)
```

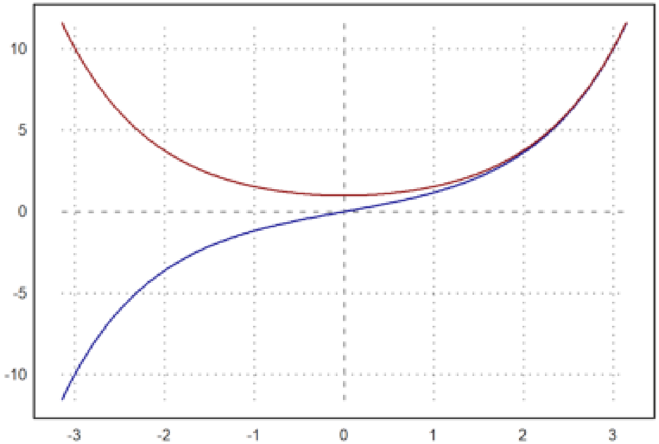
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^ {- x }\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```




```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                 2     5
              sin (3 x  + 7)
```

```
>diff(f,3), diffc(f,3)
```

```
40.1710738464
40.1710738464
```

Apakah perbedaan diff dan diffc?

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(2\,e^{x}\right)=2\,e^{x}$$

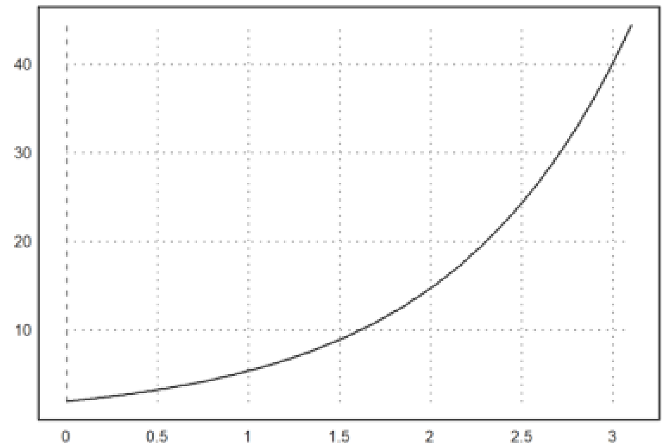
```
>$% with x=3
```

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(2\,e^{x}\right) , x=3\right)=2\,e^{3}$$

```
>$float(%)
```

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\left(2.0\,2.718281828459045^{x}\right) , x=3.0\right)=40.17107384637534$$

```
>plot2d(f,0,3.1):
```




```
>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi f
```

```
5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

```
>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)
```

```
- 12 sin(2 x) - 4 x cos(2 x)
```

```
>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2)
```

$$-0.2410081230863468$$

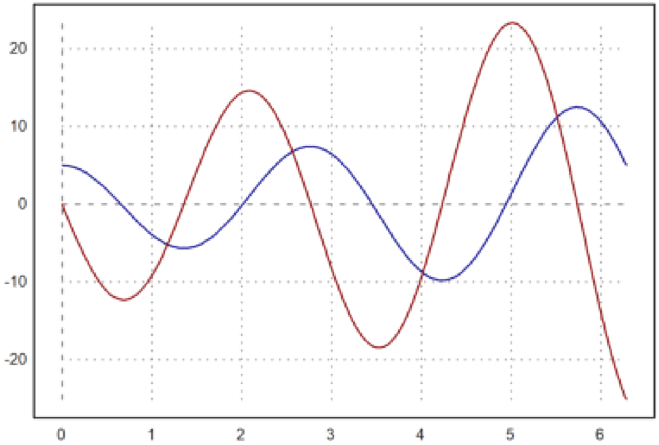
```
>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]
```

```
1.35822987384
```

```
>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut
```

```
0
-5.67530133759
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```



Perhatikan titik-titik "puncak" grafik y=f(x) dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik "puncak" tersebut.

```
>reset;
```

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), menggunakan perintah diff, dan secara manual (langkah demi langkah yang dihitung dengan Maxima) seperti contoh-contoh di atas. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

Nomor 1

```
>function f(x):= 2*sin(x^2)
>function f(x)&= 2*sin(x^2)
```

```
                                   2
                            2 sin(x )
```

```
>$showev('limit((2*sin((x+h)^2)-2*sin(x^2))/h,h,0)) // dengan definisi limit
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\,\sin \left(x+h\right)^2-2\,\sin x^2}{h}=4\,x\,\cos x^2$$

```
>p &= expand((2*sin((x+h)^2)-2*sin(x^2)))|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$2\,\sin \left(x^2+2\,h\,x+h^2\right)-2\,\sin x^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$\frac{2\,\sin \left(x^2+2\,h\,x+h^2\right)-2\,\sin x^2}{h}$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$4\,x\,\cos x^2$$

```
>$showev('diff(f(x),x)) //turunan dengan perintah diff
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(2\,\sin x^2\right)=4\,x\,\cos x^2$$

Turunan dengan cara manual

$$u = x^2$$

$$f(x) = 2sin(u)$$

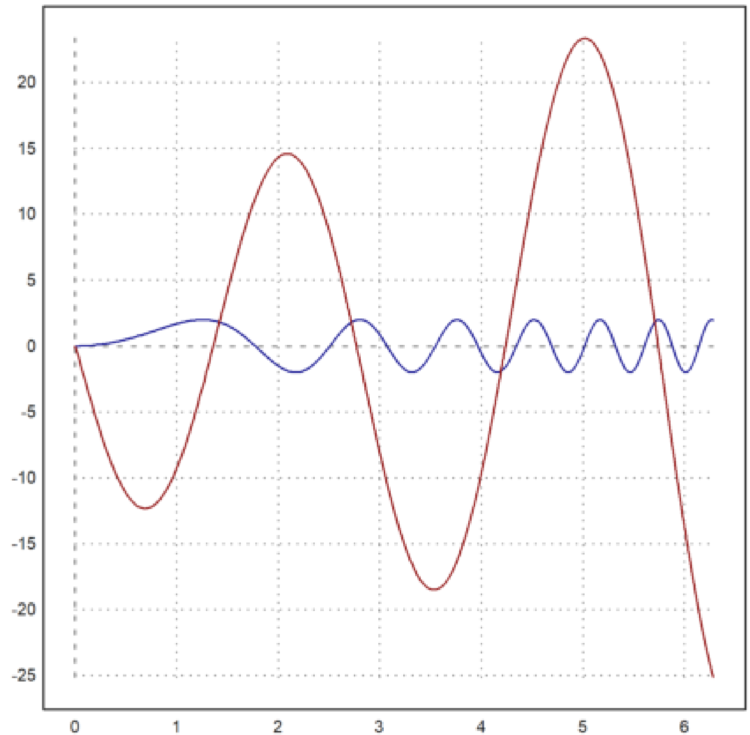
$$\frac{d}{du}(2sin(u)) = 2cos(u)$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{du}(2sin(u)) \times \frac{du}{dx} = 2cos(u)(2x)$$

$$\frac{df}{dx} = 2cos(x^2)2x = 4xcos(x^2)$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```




```
>reset;
```

Nomor 2

```
>function f(x)&= (2-4*x)^2
```

```
                                        2
                              (2 - 4 x)
```

```
>function f(x):= (2-4*x)^2
>$showev('limit(((2-4*(x+h))^2-(2-4*x)^2)/h,h,0)) // dengan definisi limit
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(2-4\,\left(x+h\right)\right)^2-\left(2-4\,x\right)^2}{h}}=32\,x-16$$

```
>p &= expand(((2-4*(x+h))^2-(2-4*x)^2))|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$32\,h\,x+16\,h^2-16\,h$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$32\,x+16\,h-16$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$32\,x-16$$

```
>$showev('diff(f(x),x)) //turunan dengan perintah diff
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(2-4\,x\right)^2=-8\,\left(2-4\,x\right)$$

Turunan dengan cara manual

$$f(x)=(2-4x)^2$$

misal

$$u=2-4x$$

maka

$$f(x) = u^2$$

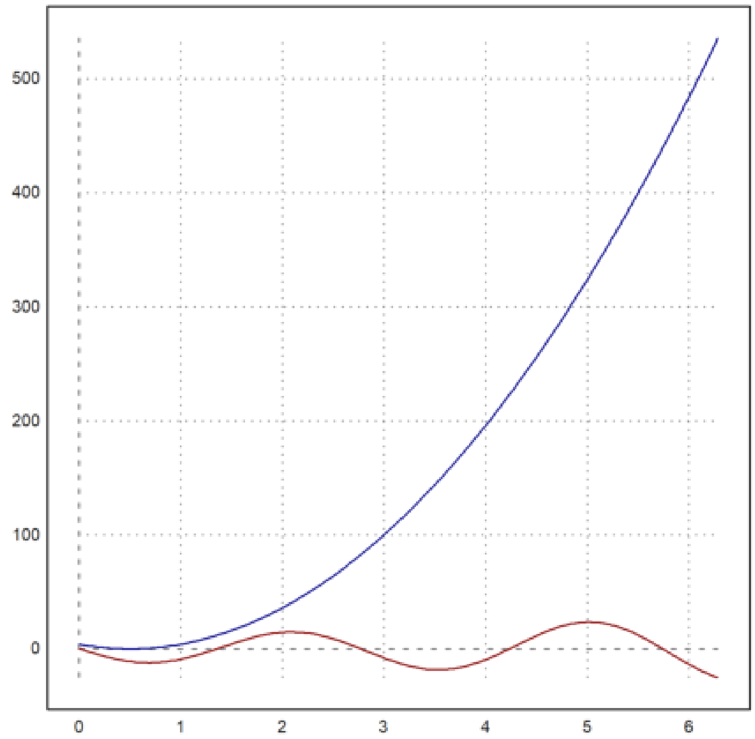
$$\frac{d}{du}(u^2) = 2u$$

$$\frac{du}{dx} = -4$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{du}(u^2) \times \frac{du}{dx} = 2u(-4)$$

$$\frac{df}{dx} = 2(2-4x)(-4) = 32x - 16$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```




```
>reset;
```

Nomor 3

```
>function f(x)&= sin(2*x)-2*cos(x)
```

```
sin(2 x) - 2 cos(x)
```

```
>function f(x):= sin(2*x)-2*cos(x)
>$showev('limit((sin(2*(x+h))-2*cos(x+h)-(sin(2*x)-2*cos(x)))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\sin \left(2\,\left(x+h\right)\right)-2\,\cos \left(x+h\right)-\sin \left(2\,x\right)+2\,\cos x}{h}}=2\,\cos \left(2\,x\right)+2\,\sin x$$

```
>p &= expand((sin(2*(x+h))-2*cos(x+h)-(sin(2*x)-2*cos(x))))|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan
```

$$\sin \left(2\,x+2\,h\right)-2\,\cos \left(x+h\right)-\sin \left(2\,x\right)+2\,\cos x$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$\frac{\sin \left(2\,x+2\,h\right)-2\,\cos \left(x+h\right)-\sin \left(2\,x\right)+2\,\cos x}{h}$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2\,\cos\left(2\,x\right)+2\,\sin x$$

```
>$showev('diff(f(x),x)) //turunan dengan perintah diff
```

$${{d}\over{d\,x}}\,\left(\sin\left(2\,x\right)-2\,\cos x\right)=2\,\cos\left(2\,x\right)+2\,\sin x$$

Turunan dengan cara manual

$$sin(2x) - 2cos(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(sin(2x)) - \frac{d}{dx}(2cos(x))$$

misal u = 2x

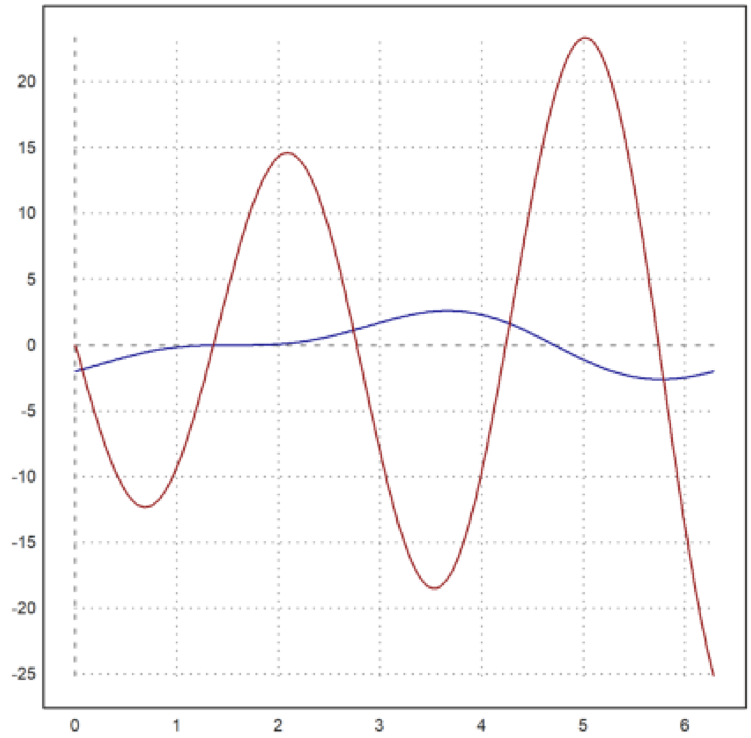
$$\frac{d}{du}(u) = 2$$

$$\frac{d}{dx}(2sin(x)) = \frac{d}{dx}(sin(u))\frac{d}{du}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(2sin(x)) = cos(u)(2) = 2cos(2x)$$

$$\frac{df}{dx} = 2cos(2x) - (-2sin(x)) = 2cos(2x) + 2sin(x)$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```




```
>reset;
```

Nomor 4

```
>function f(x) &= 2*x-1
```

```
2 x - 1
```

```
>function f(x):=2*x-1
>$showev('limit(((2*(x+h)-1)-(2*x-1))/h,h,0)) //dengan definisi limit
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\,\left(x+h\right)-2\,x}{h}=2$$

```
>$showev('diff(f(x),x)) //turunan dengan perintah diff
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(2\,x-1\right)=2$$

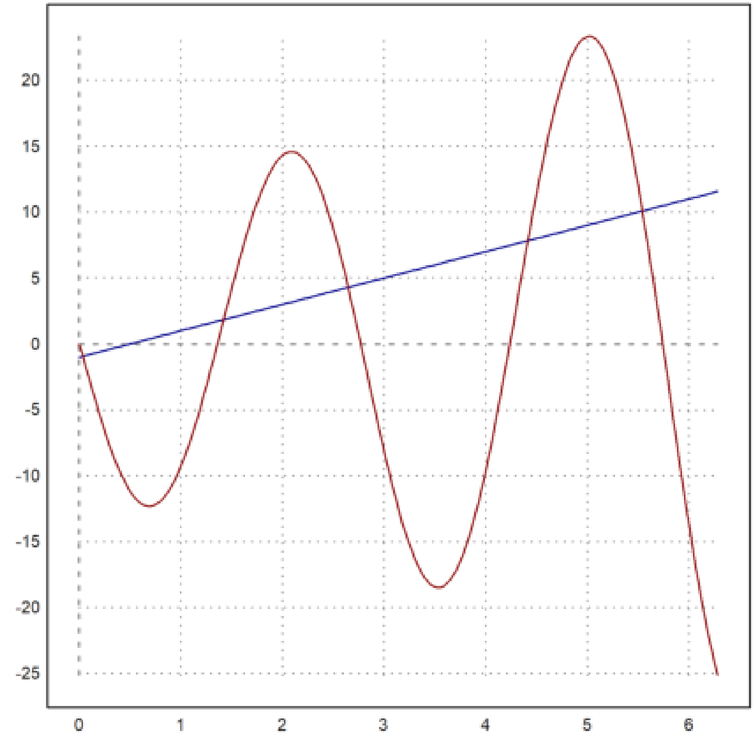
Turunan dengan cara manual

$$f(x) = 2x - 1)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{df}{dx} = 2 - 0 = 2$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```



```
>reset;
```

Nomor 5

```
>function f(x) &= 7*x+5
```

```
7 x + 5
```

```
>function f(x) := 7*x+5
>$showev('limit(((7*(x+h)+5)-(7*x+5))/h,h,0)) //dengan definisi limit
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{7\,\left(x+h\right)-7\,x}{h}}=7$$

```
>$showev('diff(f(x),x)) //turunan dengan perintah diff
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(7\,x+5\right)=7$$

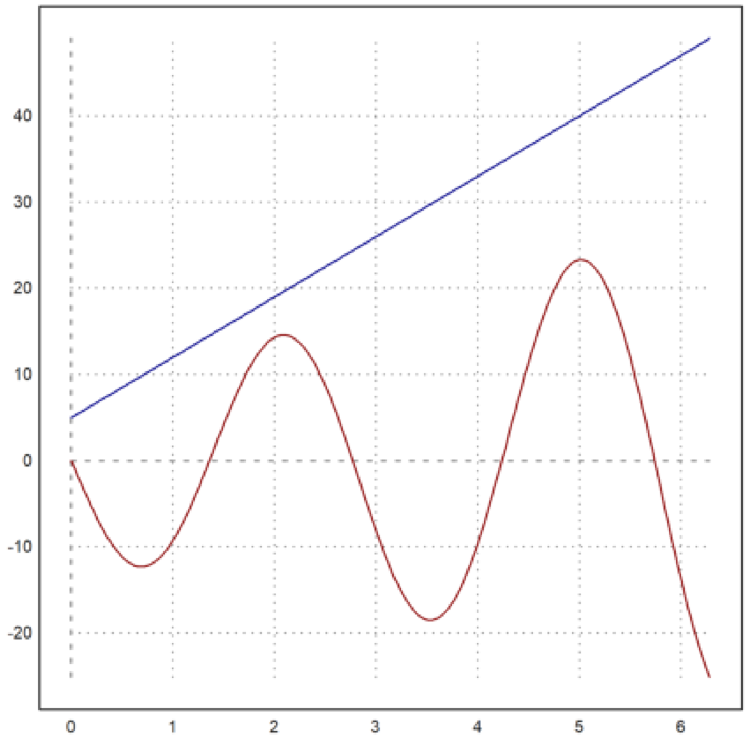
Turunan dengan cara manual

$$f(x) = 7x + 5$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$\frac{df}{dx} = 7 + 0 = 7$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```




```
>reset;
```

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx=\log\left(x+1\right)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\arctan x$$

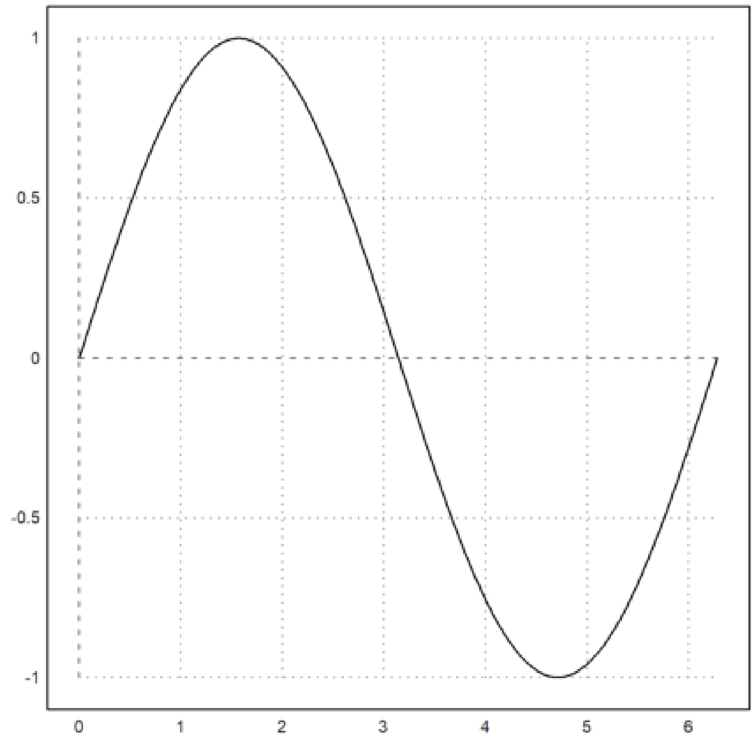
```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,2*pi):
```




```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_{a}^{b}{\sin x\;dx}=\cos a-\cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_{a}^{b}{x^{n}\;dx}=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int {x^2\,\sqrt{2\,x+1}}{\;dx}=\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{7}{2}}}{28}-\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{5}{2}}}{10}+\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}{x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_{0}^{2}{x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin \left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin \left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

```
                                     2
                                  - x
                                 E
```

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int {e^ {- x^2 }}{\;dx}=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

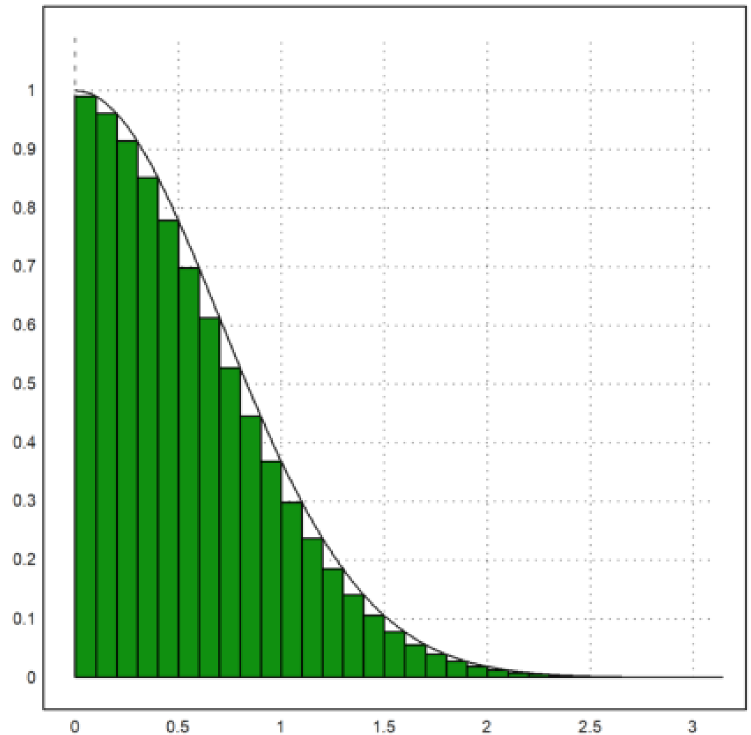
$$erf(x) = \int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\ dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_0^{\pi} f\left(x\right)\ dx$$

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu

$$\int_0^{\pi} f(x)\ dx$$

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

$$\int_0^{\pi} f\left(x\right)\,dx = 0.1\,\left(f\left(3.100000000000001\right)+f\left(3.000000000000001\right)+f\left(2.900000000000001\right)+f\left(2.800000000000001\right)+$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_{0}^{\infty}{e^ {- x^2 }\;dx}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukkan kebenaran hasil di atas!

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

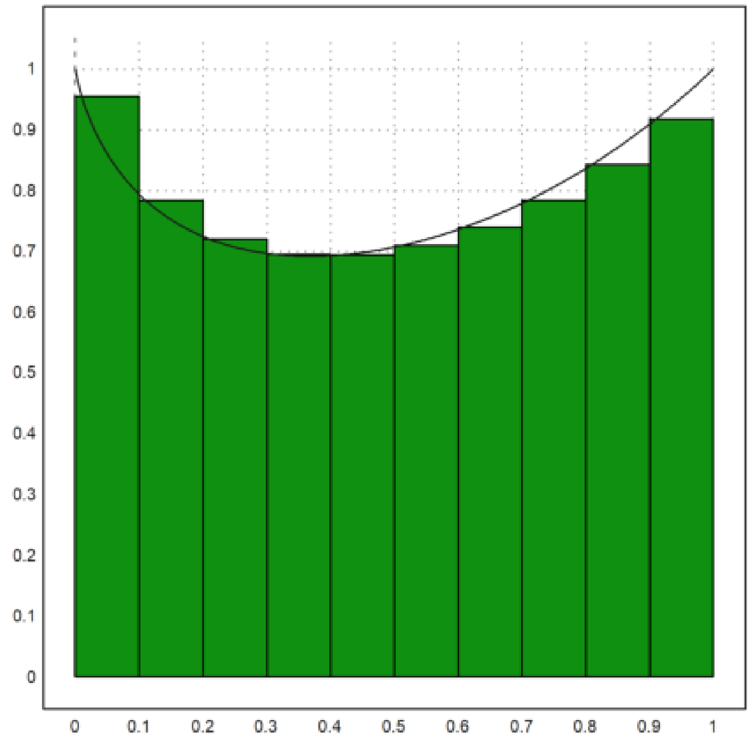
```
>function f(x) &= x^x
```

```
                                   x
                                  x
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^x \, dx = \int_0^1 x^x \, dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

$$\int_{0}^{1}f\left(x\right)\,dx=0.01\,\left(f\left(3.100000000000001\right)+f\left(3.000000000000001\right)+f\left(2.900000000000001\right)+f\left(2.800000000000001\right)\right.$$

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
   2    5
sin (3 x  + 7)
```

```
>integrate(f,0,1)
```

```
0.542581176074
```

```
>&showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

```
          1                                   1                pi
         /                         gamma(-) sin(14) sin(--)
         [      2    5                        5                10
         I  sin (3 x  + 7) dx = ------------------------
         ]                                          1/5
         /                                       10 6
          0
       4/5                  1          4/5                   1
 - (((6    gamma_incomplete(-, 6 I) + 6    gamma_incomplete(-, - 6 I))
                            5                                5
             4/5                    1
 sin(14) + (6    I gamma_incomplete(-, 6 I)
                                    5
    4/5                   1                             pi
 - 6    I gamma_incomplete(-, - 6 I)) cos(14)) sin(--) - 60)/120
                          5                             10
```

```
>&float(%)
```

```
          1.0
         /
         [       2       5
         I    sin (3.0 x  + 7.0) dx =
         ]
         /
```

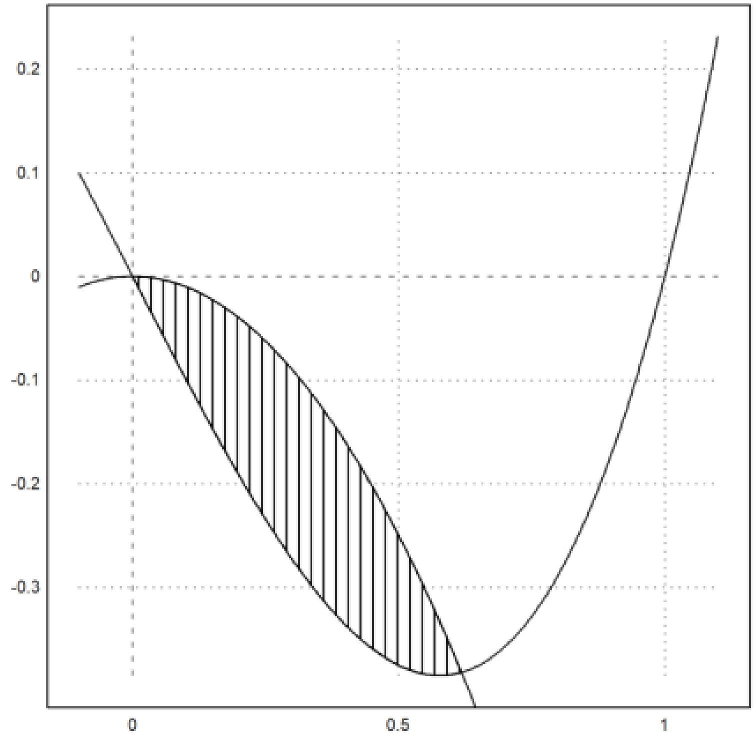
```
        0.0
0.09820784258795788 - 0.008333333333333333
 (0.3090169943749474 (0.1367372182078336
 (4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
 - 4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))
 + 0.9906073556948704 (4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
 + 4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))) - 60.0)
```

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

$$\int_{0}^{1}{x\,e^ {- x }\;dx}=1-2\,e^ {- 1 }$$

Aplikasi Integral Tentu

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add);  ...
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daerah antara 2 kurva
```



```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksak
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2},x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},x=0\right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak
```

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{-x^3-x^2+x\;dx}=\frac{13-5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949}{-1.0\,x^3-1.0\,x^2+x\;dx}=0.07581917135421037$$

Panjang Kurva

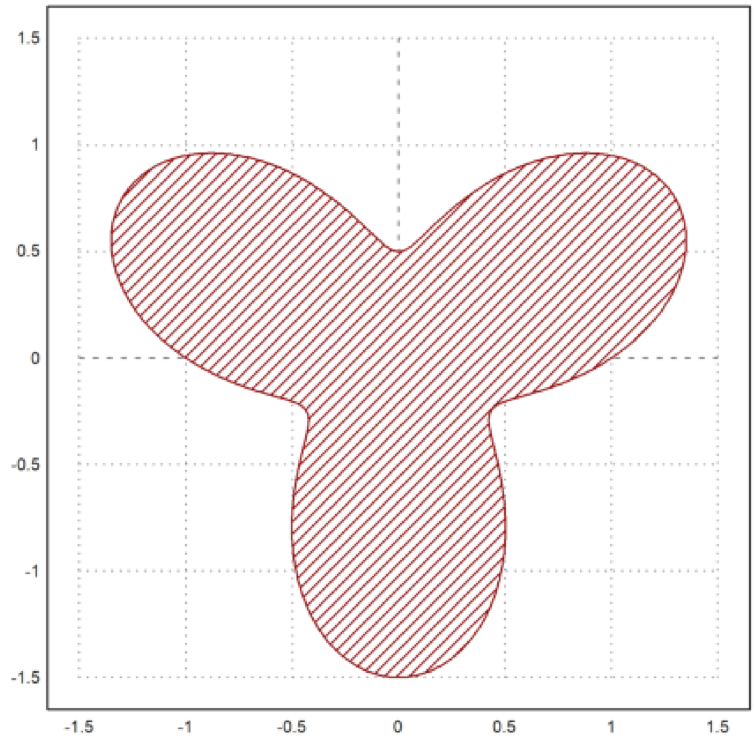
Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya terlebih dahulu
```




```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
```

$$r\left(t\right)=\frac{\sin\left(3\,t\right)}{2}+1$$

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$fx\left(t\right)=\cos t\,\left(\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$fy\left(t\right)=\sin t\,\left(\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

```
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t)
```

$$ds\left(t\right)=\frac{\sqrt{4\,\cos \left(6\,t\right)+4\,\sin \left(3\,t\right)+9}}{2}$$

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

$$\frac{\int_{0}^{2\,\pi}{\sqrt{4\,\cos \left(6\,x\right)+4\,\sin \left(3\,x\right)+9}\;dx}}{2}$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.

Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

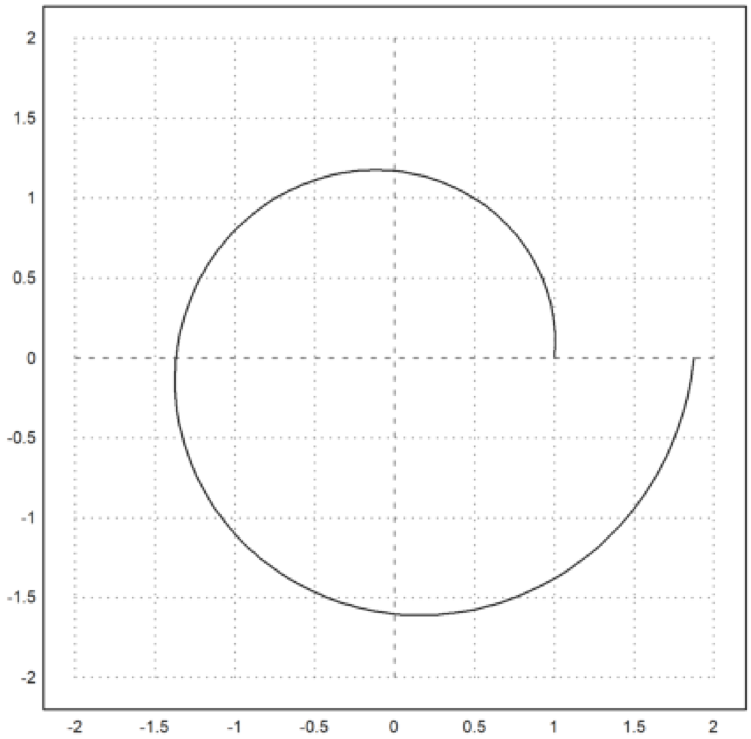
```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
9.0749467823
```

Spiral Logaritmik

$$x = e^{ax}\cos x,\ y = e^{ax}\sin x.$$

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```




```
>&kill(a) // hapus expresi a
```

done

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$fx\left(t\right)=e^{a\,t}\,\cos t$$

```
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$fy\left(t\right)=e^{a\,t}\,\sin t$$

```
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t)
```

$$df\left(t\right)=\sqrt{a^2+1}\,e^{a\,t}$$

```
>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)
```

$$\sqrt{a^2+1}\,\left(\frac{e^{2\,\pi\,a}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

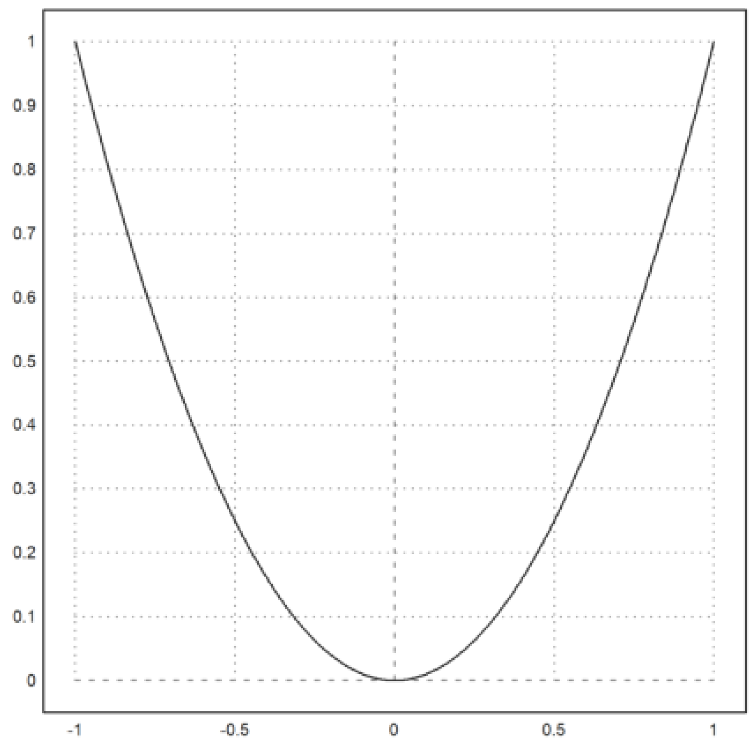
```
8.78817491636
```

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```



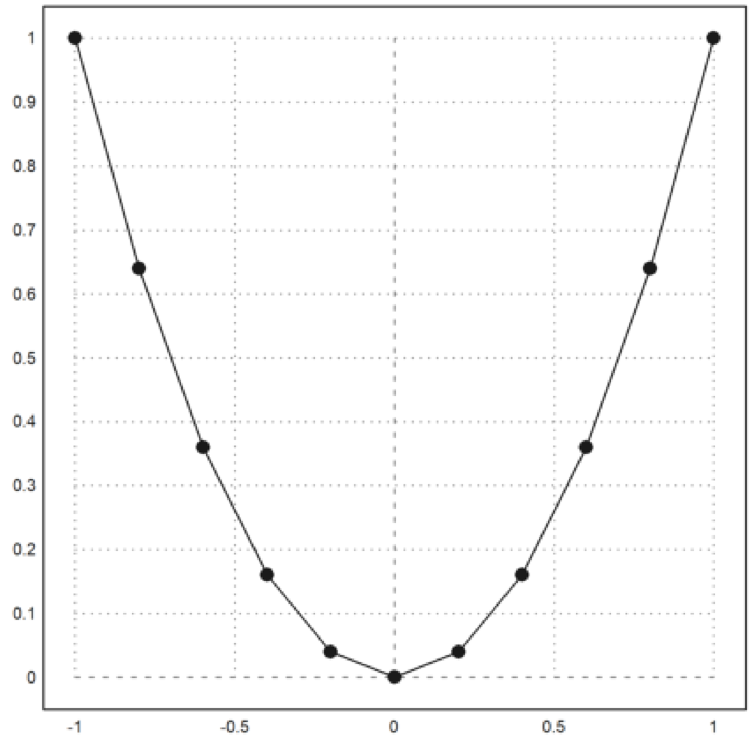
```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^{1}{\sqrt{4\,x^2+1}\;dx}=\frac{\operatorname{asinh}2+2\,\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0}{\sqrt{4.0\,x^2+1.0}\;dx}=2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y);  ...
>  plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```



Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

Koordinat Kartesius

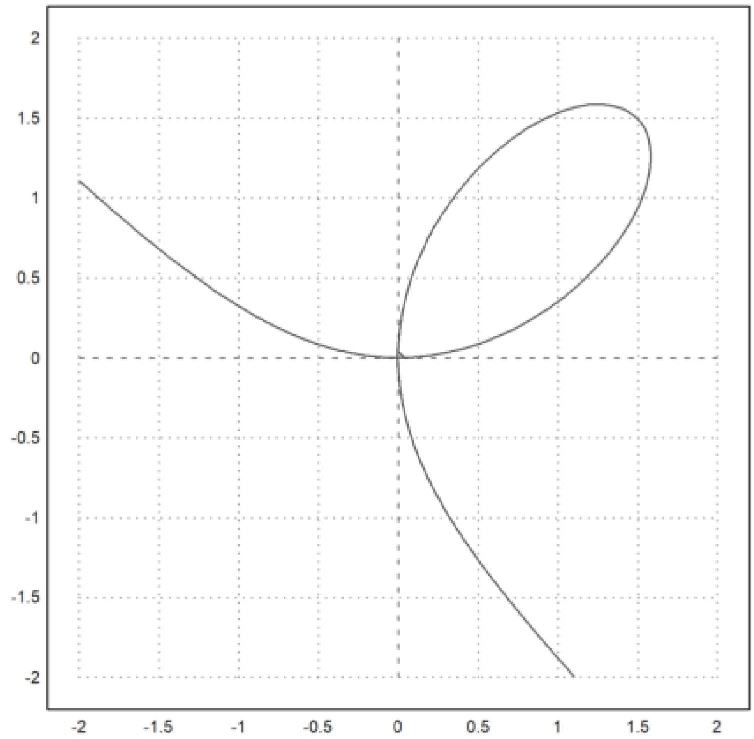
Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
```

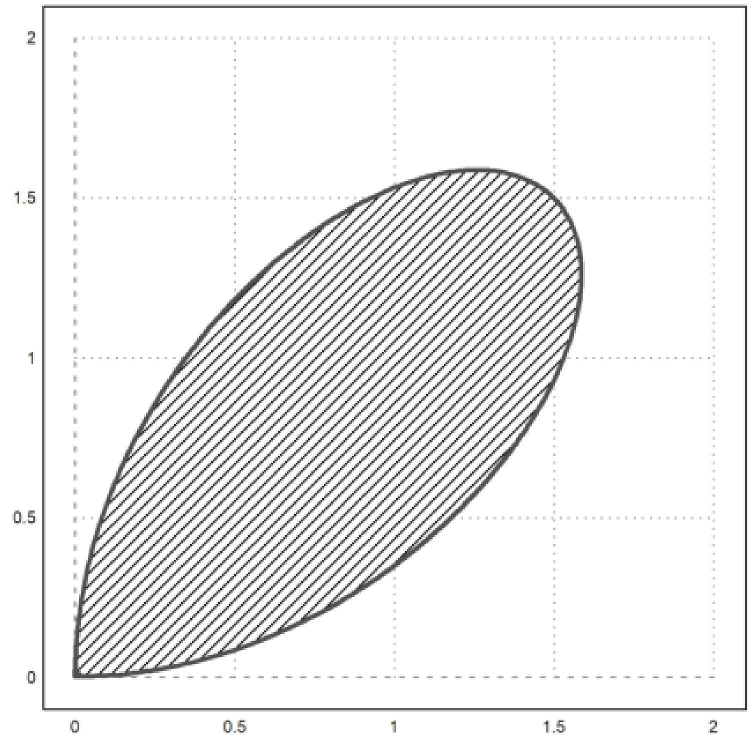
$$y^3 - 3\,x\,y + x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```



Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```



Kita selesaikan persamaannya untuk x.

```
>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1} , x=0\right]$$

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1} , x=0\right]$$

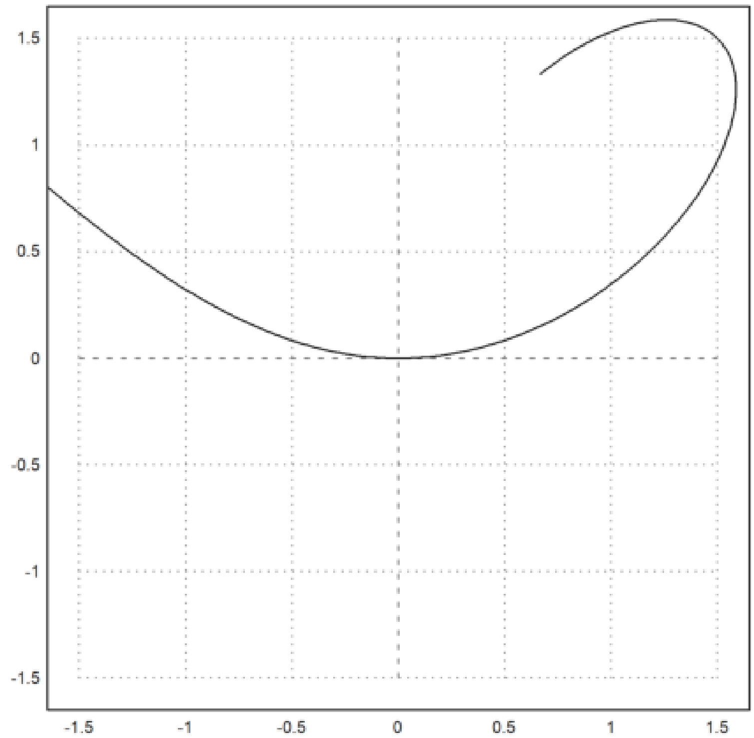
Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f\left(l\right)=\frac{3\,l}{l^3+1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```



Elemen panjang kurva adalah:

$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (lf'(l) + f(l))^2}.$$

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
```

$$ds\left(l\right)=\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}$$

```
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

$$\int_{0}^{1}{\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\;dl}$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral yang sama
```

```
4.91748872168
```

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
```

```
ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
return romberg(ds,a,b);
endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabola sebelumnya
```

```
2.95788571509
```

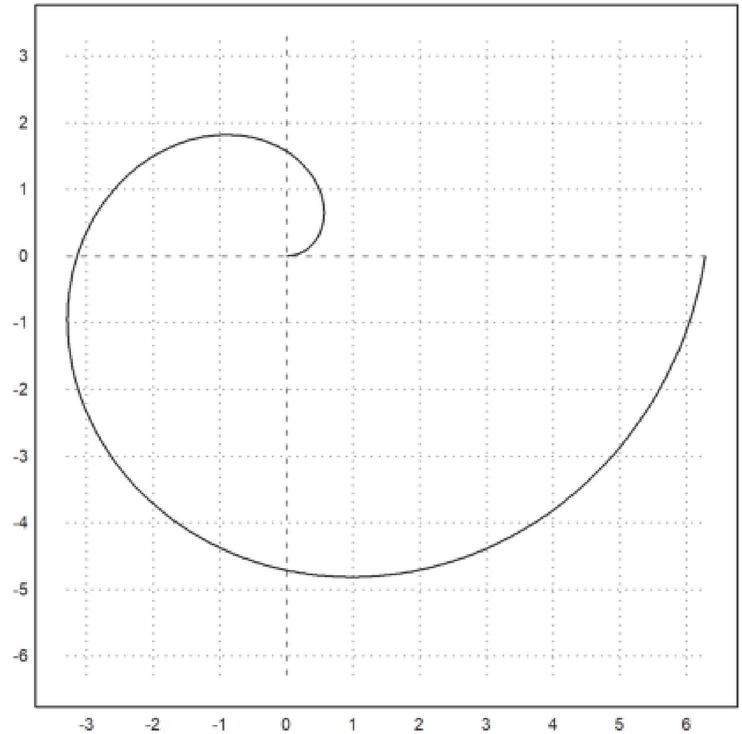
Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, bandingkan hasilnya!
```

```
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
```




```
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

```
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

```
done
```

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

```
                 2               2
sqrt(diff (fy, x) + diff (fx, x))
```

```
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang kurva terakhir di atas
```

$$\sqrt{\left(\cos x-x\,\sin x\right)^2+\left(\sin x+x\,\cos x\right)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

$$\frac{\mathrm{asinh}\;(2\,\pi)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

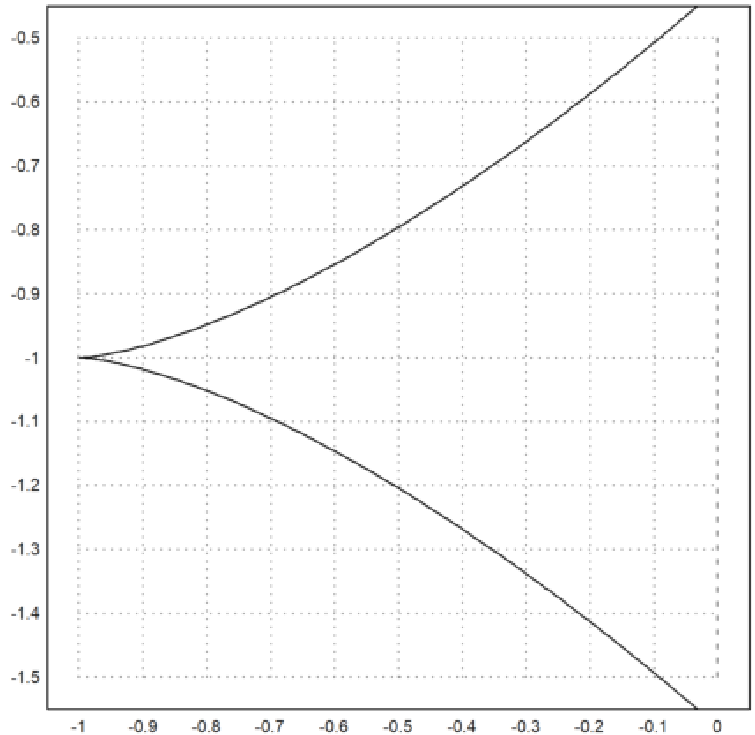
$$\frac{\mathrm{asinh}\;(2\,\pi)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.

Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```




```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas
```

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\,dx = 2.337835372767141$$

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\,dx = 2.337835372767141$$

Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t-\sin(t)), r(1-\cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

```
r (t - sin(t))
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
r (1 - cos(t))
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

```
>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
>  plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
>  plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
>  plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add);  ...
>  plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```

```
Error : r*(t-sin(t))-sin(r*(t-sin(t))) does not produce a real or column vector

Error generated by error() command

adaptiveeval:
    error(f$|" does not produce a real or column vector");
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n;args());
```

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva sikloid
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds ...
                                             ^
```

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran penuh
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found r*(t-sin(t))
#0: showev(f='integrate(ds,r*(t-sin(t)),0,2*pi))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid sat ...
                                 ^
```

```
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

```
Illegal function result in map.
 %evalexpression:
    if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
    if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
    t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
    return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

```
>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik
```

```
Wrong argument!

Cannot combine a symbolic expression here.
Did you want to create a symbolic expression?
```

```
Then start with &.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
romberg:
    if cols(y)==1 then return y*(b-a); endif;
Error in:
romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik ...
                         ^
```

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)
Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

$$\gamma(s) = (x(s),\ y(s)),$$

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Ini berarti bahwa vektor singgung

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s),\ y'(s))$$

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.

Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka T'(s) ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(s) &= \gamma'(s), \\
\mathbf{T}^2(s) &= 1 \text{ (konstanta)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0 \\
\kappa(s) &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}.
\end{aligned}$$

Nilai

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.

Bilangan riil

$$k(s) = \pm\kappa(s)$$

disebut nilai kelengkungan bertanda.

Contoh:
Akan ditentukan kurvatur lingkaran

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

```
>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen panjang kurva, 
```

```
r t
```

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terhadap s deng
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan menggunak
```

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\kappa = \frac{d\phi}{ds} &= \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad (\phi \text{ adalah sudut kemiringan garis singgung dan } s \text{ adalah panjang kurva}) \\ &= \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

$$\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\sec^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.\end{aligned}$$

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ \ y = r(\theta)\sin\theta,$$

maka rumus kurvaturnya adalah

$$\kappa(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{\left(r'(\theta)^2 + r'(\theta)^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)

Contoh:
Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

$$x = r\cos t,\ \ y = r\sin t.$$

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.

Kurva

$$y = f(x)$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

$$x = t,\ y = f(t), \quad \text{dengan } x'(t) = 1,\ x''(t) = 0,$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Contoh:
Akan ditentukan kurvatur parabola

$$y = ax^2 + bx + c.$$

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
```

$$r\ (1 - \cos t) = b\, r\ (t - \sin t) + a\, r^2\ (t - \sin t)^2 + c$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... (x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x)  ...
                                                     ^
```

```
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola untuk a=b=c=1
```

$$r\,\left(1-\cos t\right)=r\,\left(t-\sin t\right)+r^2\,\left(t-\sin t\right)^2+1$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... (x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x)  ...
                                                     ^
```

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

$$(-1/2,3/4),\ 1/k(2)=1/2,$$

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,color=green,>add); ...
>plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)","5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue):
```

```
Error : f(x) does not produce a real or column vector

Error generated by error() command

 %ploteval:
    error(f$|" does not produce a real or column vector");
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

$$F(x,y)=0$$

dengan turunan-turunan parsial

$$F_x=\frac{\partial F}{\partial x},\ F_y=\frac{\partial F}{\partial y},\ F_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

berlaku

$$F_x dx + F_y dy = 0 \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan sendiri!)

Contoh 1:
Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

$$ax^2 + bx + c - y = 0.$$

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
```

$$b\,r\,\left(t-\sin t\right)+a\,r^2\,\left(t-\sin t\right)^2-r\,\left(1-\cos t\right)+c$$

```
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=diff(diff(F(x,y),x),y), Fy
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y) ...
                    ^
```

```
>function k(x) &= (Fy^2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx^2*Fyy)/(Fx^2+Fy^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kurvatur parabol
```

$$k\left(r\,\left(t-\sin t\right)\right)=\frac{Fx^2\,Fyy+Fxx\,Fy^2-2\,Fx\,Fxy\,Fy}{\left(Fy^2+Fx^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x)^2\ dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)
- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk:

```
a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x))
b. koordinat kutub ( r=r(theta))
c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t)
d. persamaan implit F(x,y)=0
```

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

Nomor 1

```
>function f(x) := 2cos(2x)
```

Integral

```
>$showev('integrate(2*cos(2*x),x))
```

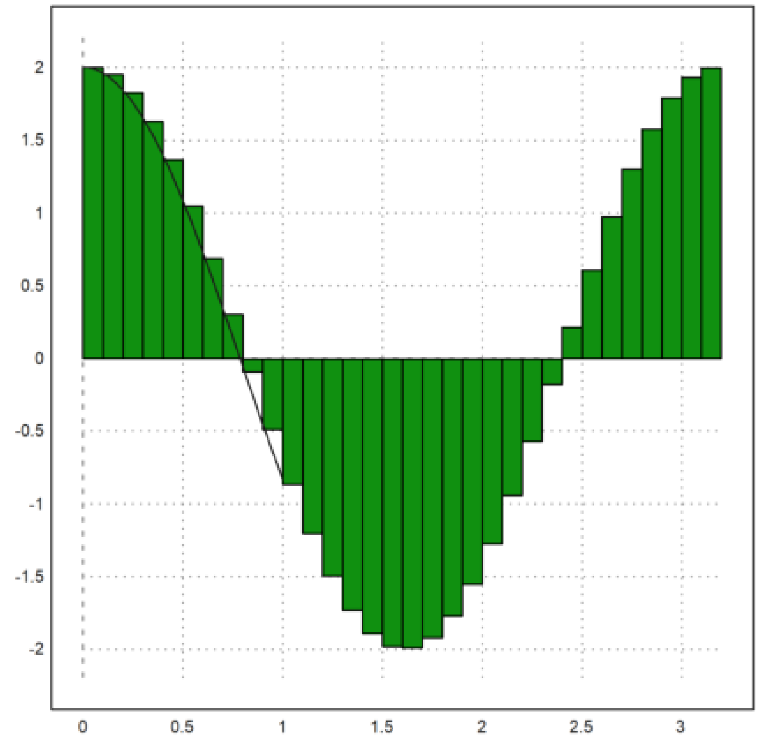
$$2\int \cos\left(2\,r\,\left(t-\sin t\right)\right)\,dr\,\left(t-\sin t\right)=2\int \cos\left(2\,r\,\left(t-\sin t\right)\right)\,dr\,\left(t-\sin t\right)$$

Integral dengan batas tertentu

```
>$showev('integrate(2*cos(2*x),x,0,pi/3))
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found r*(t-sin(t))
#0: showev(f=2*'integrate(cos(2*r*(t-sin(t))),r*(t-sin(t)),0,pi/3))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $showev('integrate(2*cos(2*x),x,0,pi/3)) ...
                                        ^
```

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



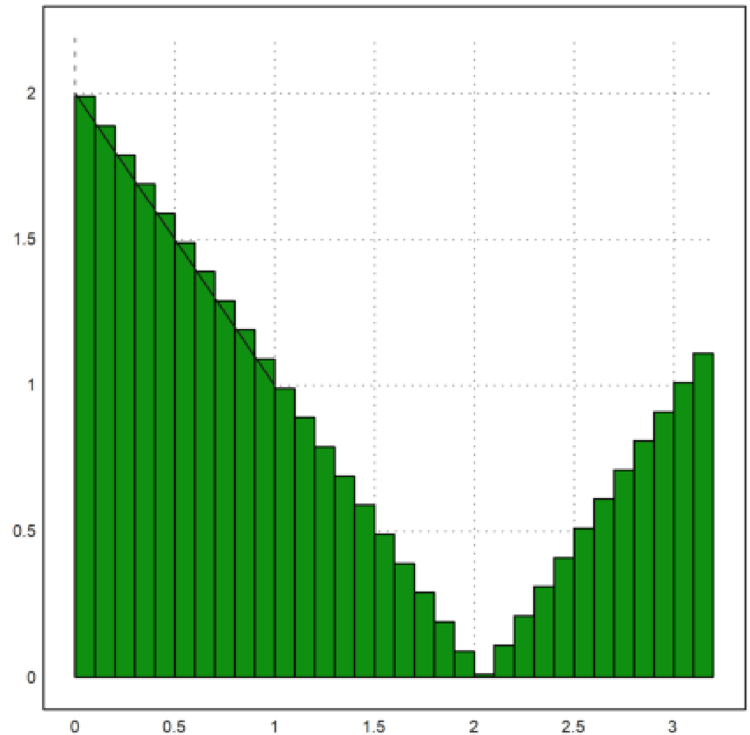

```
>reset;
```

Nomor 2

```
>function f(x):=sqrt(x^2-4*x+4)
>$showev('integrate(sqrt(x^2-4*x+4),x))
```

$$\int \sqrt{-4\,r\,\left(t-\sin t\right)+r^2\,\left(t-\sin t\right)^2+4}\;dr\,\left(t-\sin t\right)=\int \sqrt{-4\,r\,\left(t-\sin t\right)+r^2\,\left(t-\sin t\right)^2+4}\;dr\,\left(t-\sin t\right)$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```




```
>reset;
```

Nomor 3

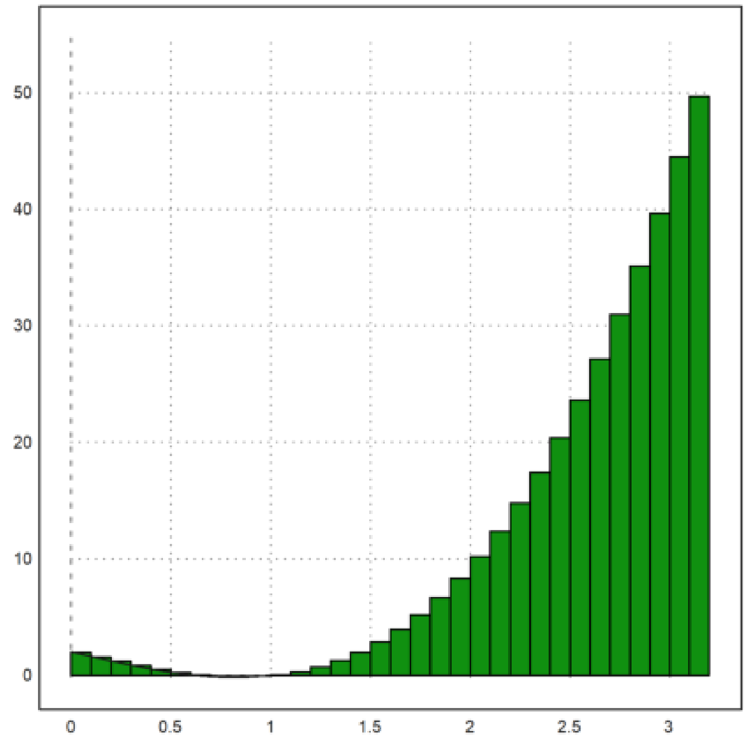
```
>function f(x):=2*x^3-4*x+2
>$showev('integrate(2*x^3-4*x+2,x))
```

$$\int -4\,r\,\left(t-\sin t\right)+2\,r^3\,\left(t-\sin t\right)^3+2\;dr\,\left(t-\sin t\right)=\int -4\,r\,\left(t-\sin t\right)+2\,r^3\,\left(t-\sin t\right)^3+2\;dr\,\left(t-\sin t\right)$$

```
>$showev('integrate(2*x^3-4*x+2,x,0,8))
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found r*(t-sin(t))
#0: showev(f='integrate(-4*r*(t-sin(t))+2*r^3*(t-sin(t))^3+2,r*(t-sin(t)),0,8))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $showev('integrate(2*x^3-4*x+2,x,0,8)) ...
                                      ^
```

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```




```
>reset;
```

Nomor 4

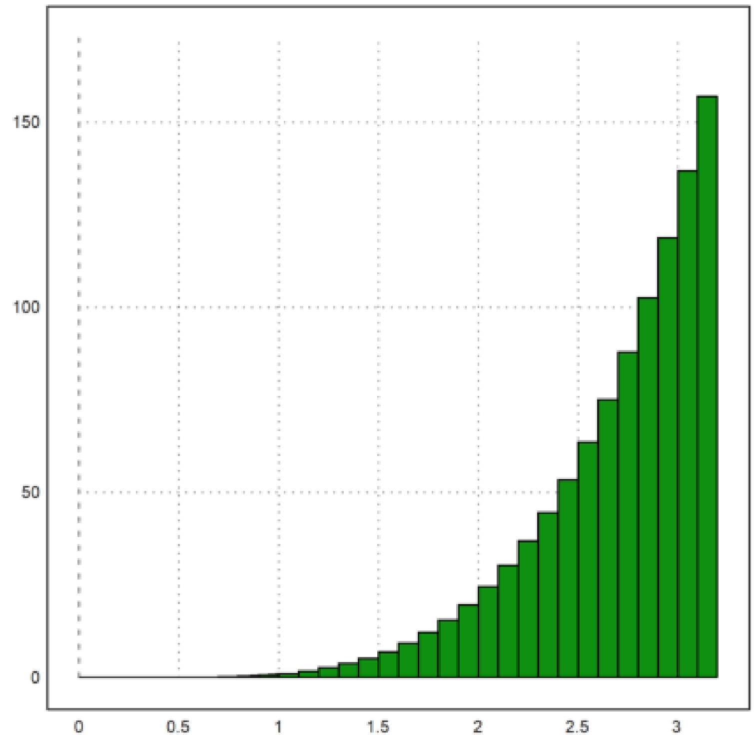
```
>function f(x):=(2*x^4-x^3)
>$showev('integrate((2*x^4-x^3),x))
```

$$\int 2\,r^4\,\left(t-\sin t\right)^4-r^3\,\left(t-\sin t\right)^3\;dr\,\left(t-\sin t\right)=\int 2\,r^4\,\left(t-\sin t\right)^4-r^3\,\left(t-\sin t\right)^3\;dr\,\left(t-\sin t\right)$$

```
>$showev('integrate((2*x^4-x^3),x,1,5))
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found r*(t-sin(t))
#0: showev(f='integrate(2*r^4*(t-sin(t))^4-r^3*(t-sin(t))^3,r*(t-sin(t)),1,5))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $showev('integrate((2*x^4-x^3),x,1,5)) ...
                                      ^
```

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```




```
>reset;
```

Nomor 5

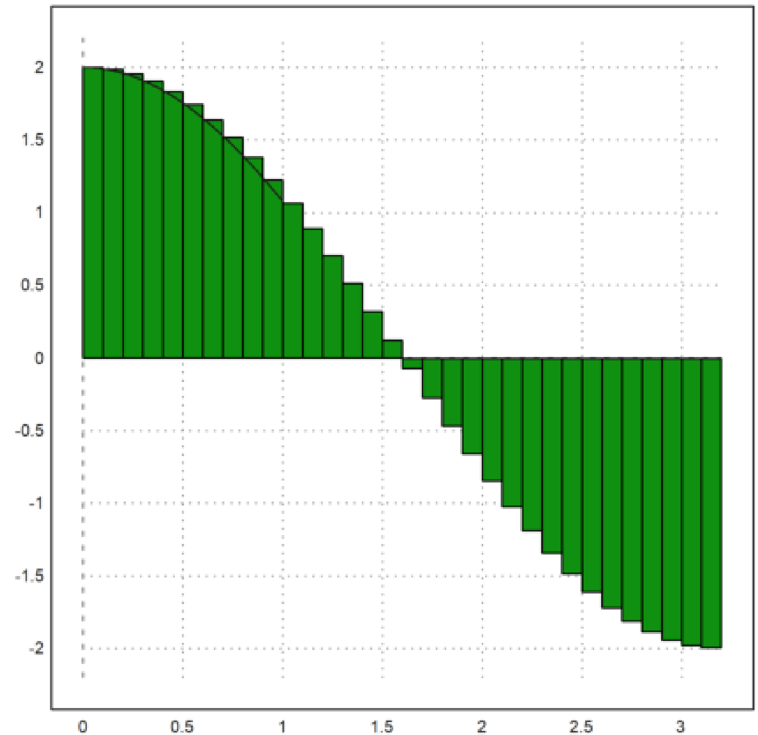
```
>function f(x):=2*cos(x)
>$showev('integrate(2*(cos(x)),x))
```

$$2\int \cos\left(r\ \left(t-\sin t\right)\right)\,dr\ \left(t-\sin t\right)=2\,\sin\left(r\ \left(t-\sin t\right)\right)$$

```
>$showev('integrate(2*(cos(x)),x,0,pi/4))
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found r*(t-sin(t))
#0: showev(f=2*'integrate(cos(r*(t-sin(t))),r*(t-sin(t)),0,pi/4))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $showev('integrate(2*(cos(x)),x,0,pi/4)) ...
                                        ^
```

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

EMT menyediakan fungsi iterate(”g(x)”, x0, n) untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

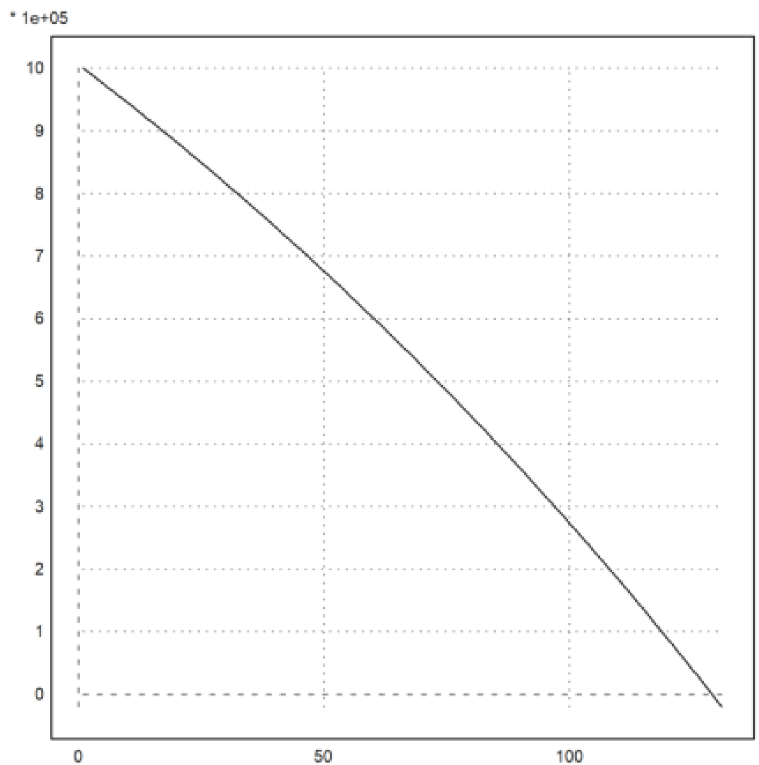
Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'
```

```
        1000
        1050
      1102.5
     1157.63
     1215.51
     1276.28
      1340.1
      1407.1
     1477.46
     1551.33
     1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):
```



Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.

Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

$$[A = 2500.0]$$

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);
>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=6)
```

```
[1000,  994,  987.98,  981.93,  975.86,  969.76,  963.64]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=6)
```

```
[2000,  1998,  1995.99,  1993.97,  1991.95,  1989.92,  1987.88]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2500,n=6)
```

```
[2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500]
```

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},3000,n=6)
```

```
[3000,  3002,  3004.01,  3006.03,  3008.05,  3010.08,  3012.12]
```

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.
Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)
```

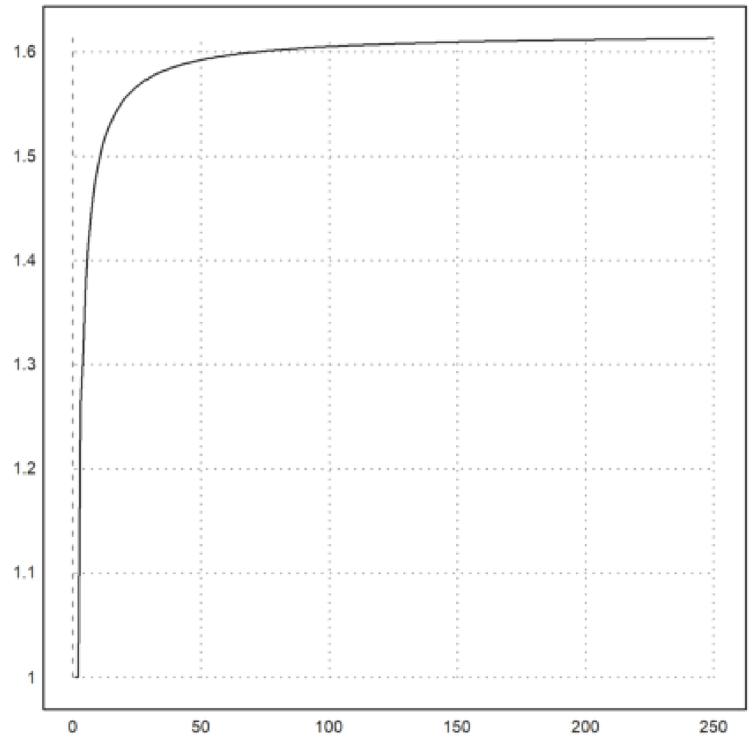
```
[1,  1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55,  89,  144,  233,  377,  610]
```

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

```
>$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)
```

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749895$$

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):
```



Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

```
>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;
```

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah 2ˆ(n-2), untuk n=2, 4, 5, ...

```
>sequence("sum(x)",1,10)
```

```
[1,  1,  2,  4,  8,  16,  32,  64,  128,  256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.

Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]
>sequence("suku",[1;1],6)
```

```
Real 2 x 6 matrix

            1             2             5            13     ...
            1             3             8            21     ...
```

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak log_2(n).

$$x_n = A.x_{n-1} = A^2.x_{n-2} = A^3.x_{n-3} = ... = A^{n-1}.x_1.$$

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)
```

```
Real 2 x 6 matrix

             1             5            13            34     ...
             1             8            21            55     ...
```

image: Spiral_of_Theodorus.png
Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

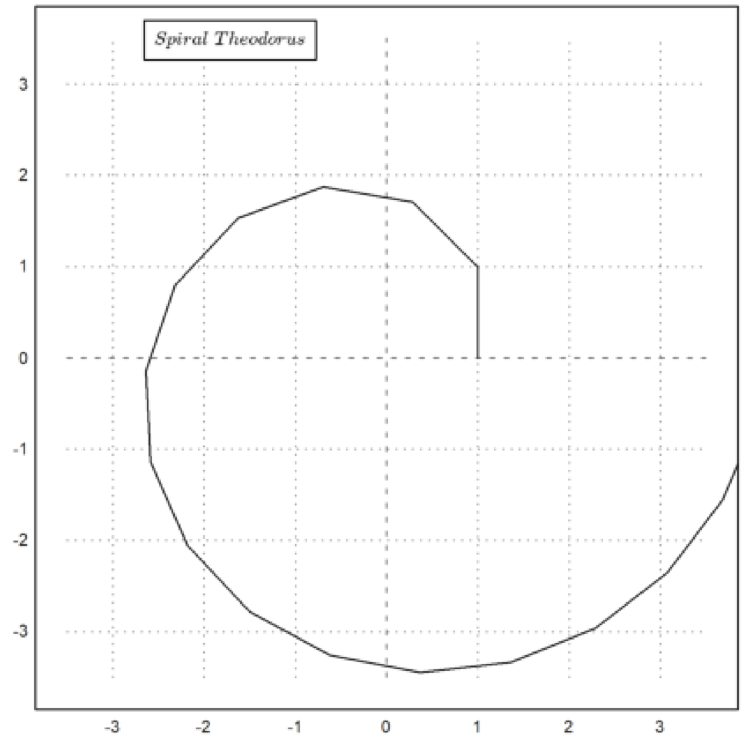
$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

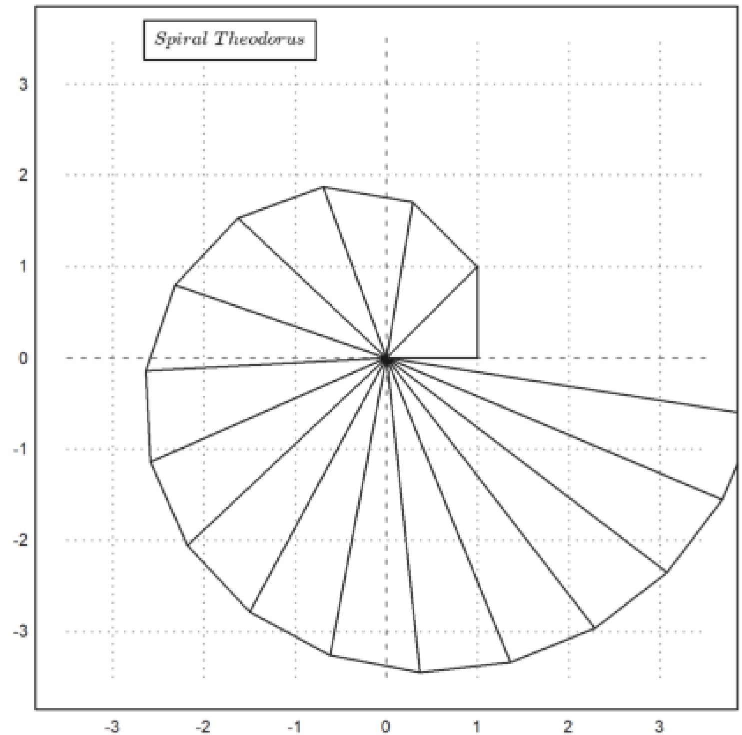
Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4):
```



Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```



Spiral Theodorus
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3


```
>
```

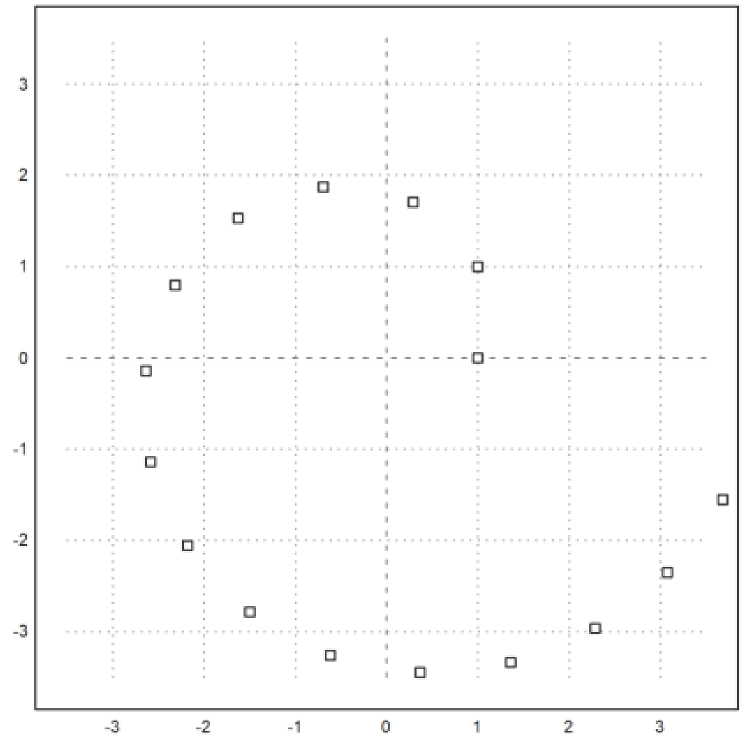
Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memmerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini diigunakan vektor kolom pada bidang.

```
>function gstep (v) ...
```

```
  w=[-v[2];v[1]];
  return v+w/norm(w);
  endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

```
>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```


3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

```
>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.
```

```
0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

```
>hasil := iterate("cos(x)",~1,2~) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interval awal (1, 2)
```

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
~0.73908513309,0.73908513333~
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
1.41421356237
1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
[2,  1.5,  1.41667,  1.41422,  1.41421,  1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",~1,2~,5)
```

```
[ ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Satu-satunya solusi adalah

$$x = \sqrt{2}.$$

```
>iterate("s",~1,2~)
```

```
~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n} \right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
        2.60401
        2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

```
              1             3       2.61803       2.60403       2.60401
              5       2.23607       2.59002       2.60399       2.60401
```

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[~1~;~5~],4)
```

```
  Interval 2 x 5 matrix

  ~0.99999999999999778,1.0000000000000022~     ...
  ~4.9999999999999911,5.0000000000000089~     ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
[2,  1.41421,  1.18921,  1.09051,  1.04427,  1.0219,  1.01089,
1.00543,  1.00271,  1.00135,  1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepatdengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
[1.04888,  1.00028,  1,  1]
```

Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
1.41421356237
```

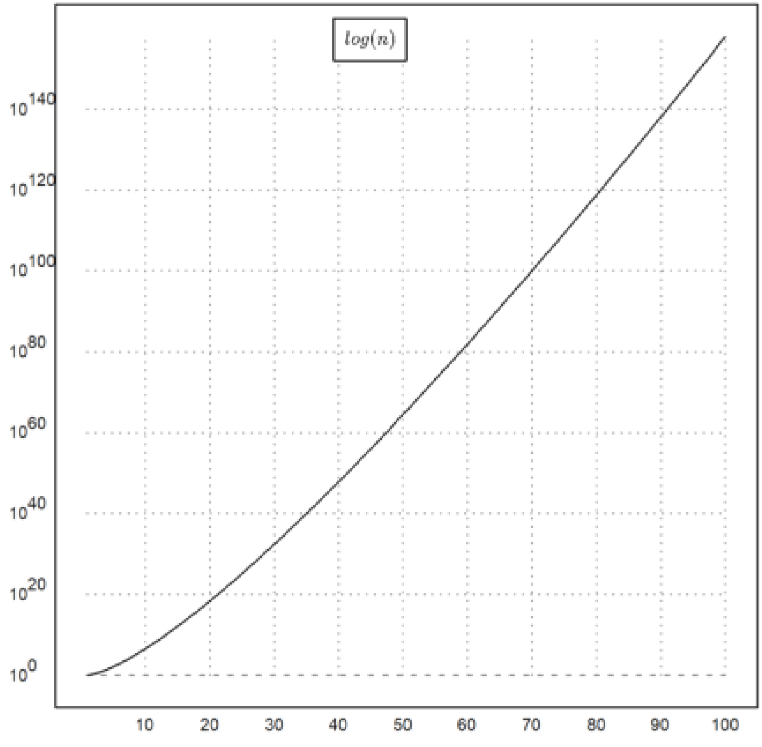
Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
[1,  2,  6,  24,  120,  720,  5040,  40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
>plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```



```
>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
>x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...
>x,
```

```
-7.09677
-7.74194
```

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.

Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
```

```
x=x0;
maxiter=0;
repeat
  xnew=f$(x);
  maxiter=maxiter+1;
  until xnew~=x;
  x=xnew;
end;
return maxiter;
endfunction
```

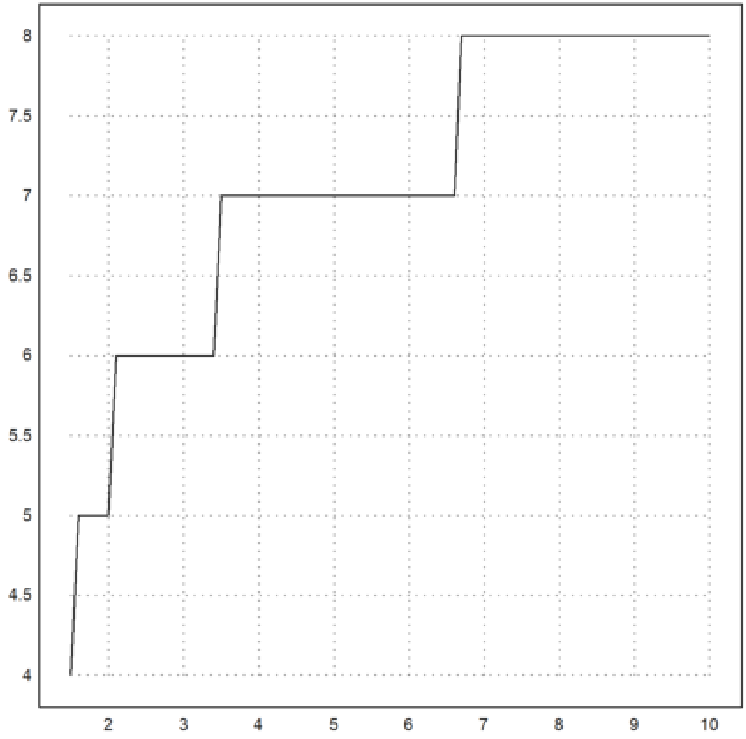
Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>hiter("(x+2/x)/2",2)
```

```
5
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...
>  plot2d(x,hasil):
```



Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahnnya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
[4,  5,  5,  5,  5,  5,  6,  6,  6,  6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
[1.5,  2,  3.4,  6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.

Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton ...
                                   ^
```

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
```

```
loop 1 to n; x=f$(x); end;
return x;
endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

```
Function newton needs at least 3 arguments!
Use: newton (f$: call, df$: call, x: scalar complex {, y: number, eps: none})
Error in:
...  x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z); ...
                                                     ^
```

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

```
>z=&solve(p)()
```

```
Maxima said:
solve: more unknowns than equations.
Unknowns given :
[t,r]
Equations given:
[r^3*(t-sin(t))^3-1]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
z=&solve(p)() ...
           ^
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.

Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

```
>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
>  plot2d(none,-r,r,-r,r); plotrgb(C):
```

```
Variable W not found!
Error in:
C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1) ...
                    ^
```

Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpangkat terkecil
```

```
true
```

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Taylor untuk e^x
```

```
Maxima said:
taylor: r*(t-sin(t)) cannot be a variable.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // baris ...
                                               ^
```

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor eskpresi pada EMT.

```
>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampiran fungsi tersebut
```

```
Maxima said:
length: argument cannot be a symbol; found deret
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxm2str:
    n=mxmeval("length(VVV)");
```

Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

```
>$deret[3]
```

$$deret_3$$

```
>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):
```

```
deret is not a variable!
Error in expression: deret[1]
 %ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    u=u_(%ploteval(xx[#],t;args()));
```

```
>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)
```

$$\sin\left(r\,\left(t-\sin t\right)\right)+\frac{\sin\left(2\,r\,\left(t-\sin t\right)\right)}{2}+\frac{\sin\left(3\,r\,\left(t-\sin t\right)\right)}{3}+\frac{\sin\left(4\,r\,\left(t-\sin t\right)\right)}{4}+\frac{\sin\left(5\,r\,\left(t-\sin t\right)\right)}{5}$$

Berikut adalah cara menggambar kurva

$$y=\sin(x)+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots.$$

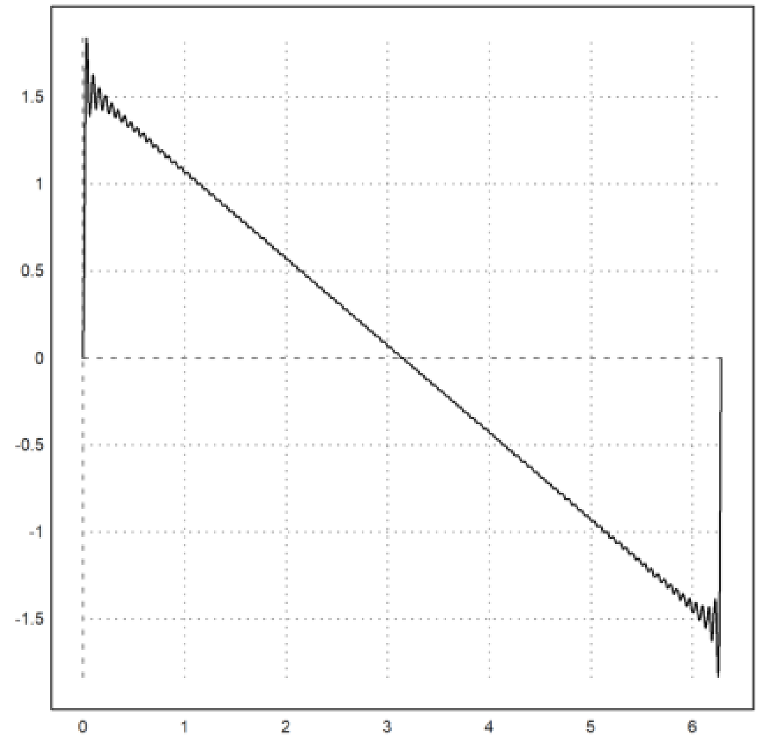
```
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):
```

```
Maxima output too long!
Error in:
plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi): ...
                                             ^
```

Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

$$y = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):
```



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.

Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di x=1.

```
>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
#0: diffat(expr=r^(r*(t-sin(t)))*(t-sin(t))^(r*(t-sin(t))),x=[r*(t-sin(t)) = 1,1])
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

 %mxmevtable:
    return mxm("@expr,@var=@value")();
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmtable:
    y[#,1]=%mxmevtable(expr,var,x[#]);
```

```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret secara sim
```

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(1+n)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{k+3^{k}}}=\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{k+3^{k}}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi
```

$$\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{1}{x^{2}}}=\frac{\pi^{2}}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{-1+k}}{k}}=-\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{x}}{x}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{-1+2\,k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{-1+2\,k}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget(abs(x)<1
```

```
Answering "Is -1+abs(-r*t+r*sin(t)) positive, negative or zero?" with "positive"
Maxima said:
sum: sum is divergent.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget(abs ...
                                                     ^
```

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

```
>$'sum(x^k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x^k/k!,k,0,inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{r^{k}\,\left(t-\sin t\right)^{k}}{k!}}=\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{r^{k}\,\left(t-\sin t\right)^{k}}{k!}}$$

```
>$limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)
```

$$\lim_{n\rightarrow\infty}{\sum_{k=0}^{n}{\frac{r^{k}\,\left(t-\sin t\right)^{k}}{k!}}}$$

```
>function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)
```

$$d\left(n\right)=\sum_{k=2}^{n}{\frac{1}{-k+k^2}}$$

```
>$d(10)=ev(d(10),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{10}{\frac{1}{-k+k^2}}=\frac{9}{10}$$

```
>$d(100)=ev(d(100),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{-k+k^2} = \frac{99}{100}$$

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

```
Maxima said:
taylor: r*(t-sin(t)) cannot be a variable.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x= ...
                             ^
```

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

```
Maxima said:
taylor: r*(t-sin(t)) cannot be a variable.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1 ...
                              ^
```

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Rasdiana Putri
NIM : 23030630033
Kelas : Matematika E

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh. ax+by=c.
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan c2
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan y dengan titik A pada
sisi positif (kanan/atas) garis
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni sin(alpha)^2 dengan
alpha sudut yang menghadap sisi a.
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a, b, c.
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk suatu segitiga
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan sa=sin(phi)^2 spread a.
```

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang tetapkan tiga titik dan gambarkan.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Lalu tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran.
Format garisnya adalah [a,b,c] yang mewakili garis dengan persamaan ax+by=c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A di BC.

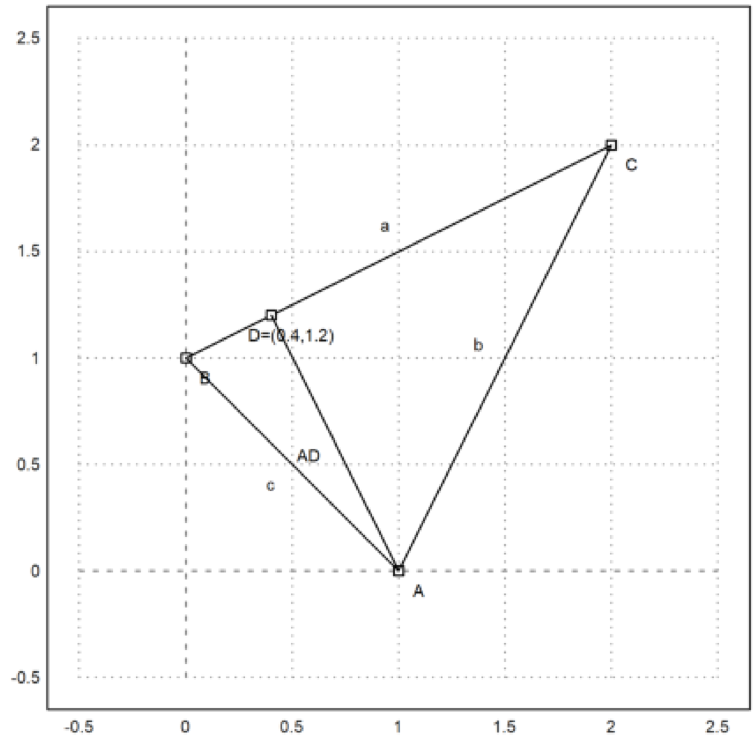
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan perpotongannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plotkan itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

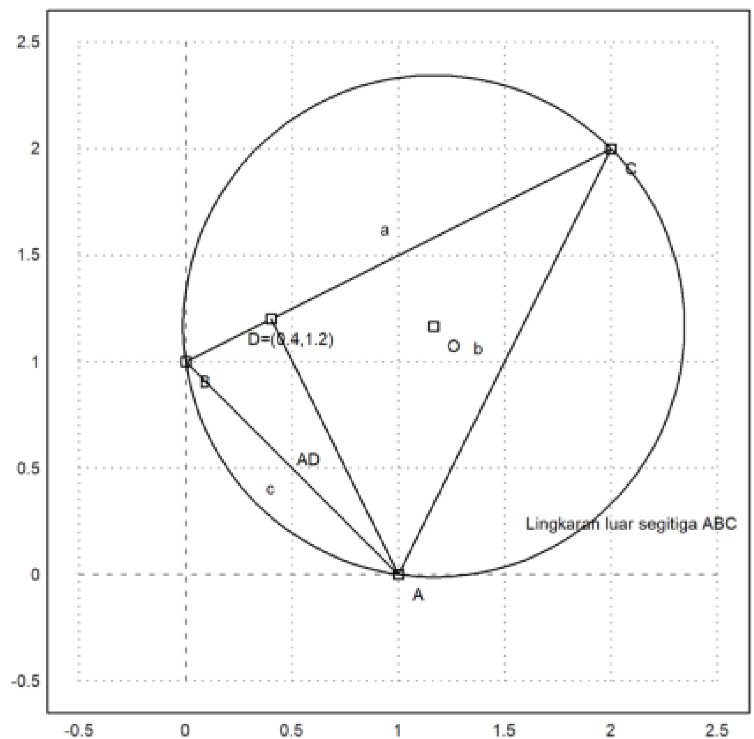
Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang lingkaran luar segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

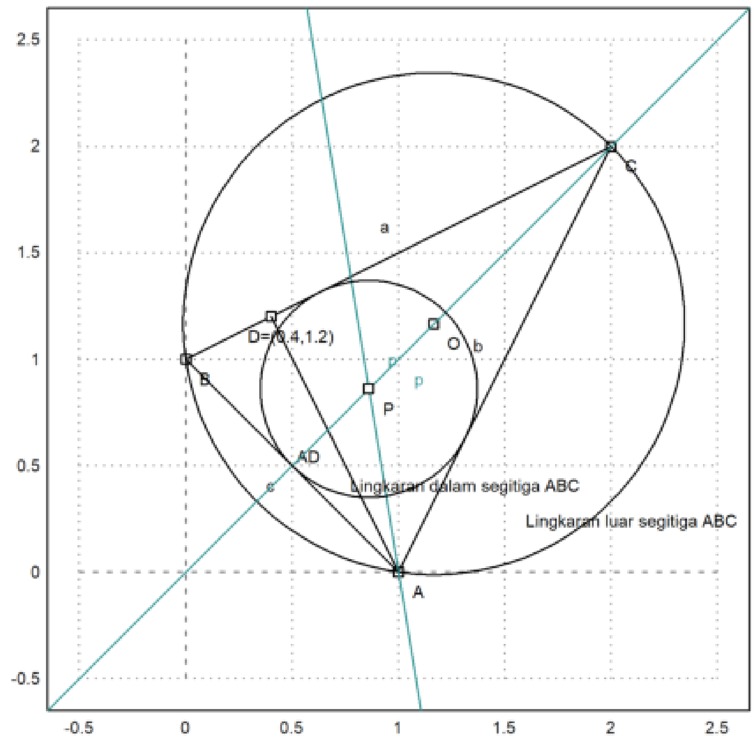
```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam
```



1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>m:=lineThrough(B,C)
```

```
[-1,  2,  2]
```

```
>s:=circleWithCenter(P,r);
>X:=lineCircleIntersections(m,s)
```

```
[0.632456,  1.31623]
```

Titik singgung garis BC dengan lingkaran dalam ABC

```
>p:=lineThrough(A,C)
```

```
[-2,  1,  -2]
```

```
>Y:=lineCircleIntersections(p,s)
```

```
[1.31623,  0.632456]
```

Titik singgung garis AC dengan lingkaran dalam ABC

```
>q:=lineThrough(A,B)
```

```
[-1,  -1,  -1]
```

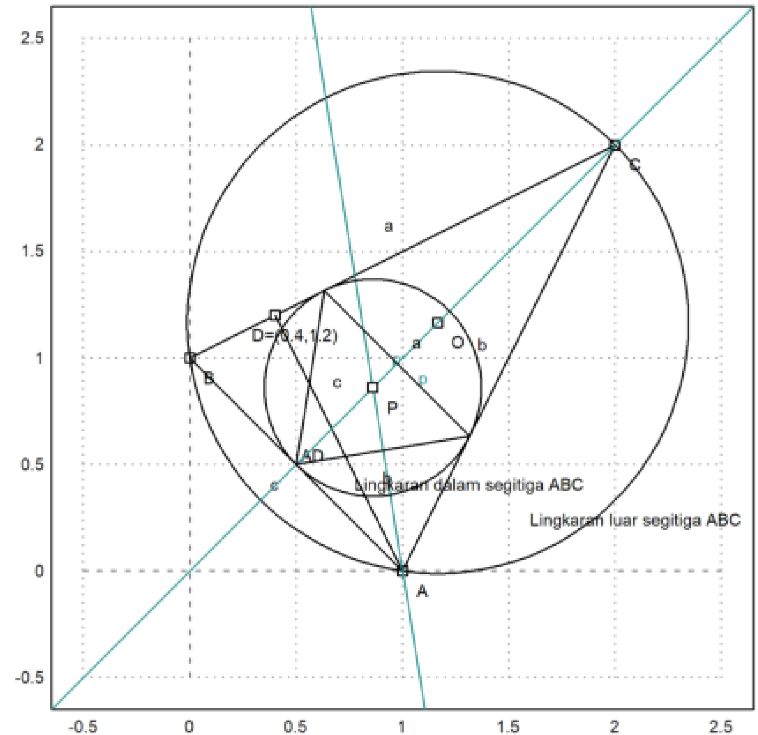
```
>Z:=lineCircleIntersections(q,s)
```

```
[0.5,  0.5]
```

Titik singgung garis AB dengan lingkaran dalam ABC.
Jadi, ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC adalah [0.632456, 1.31623], [1.31623, 0.632456], dan [0.5, 0.5]

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?

```
>plotSegment(X,Y,"a");
>plotSegment(Y,Z,"b");
>plotSegment(X,Z,"c"):
```



Segitiga yang terbentuk adalah segitiga sama kaki.

3. Hitung luas segitiga tersebut.

```
>areaTriangle(X,Y,Z)
```

```
0.324341649025
```

Jadi, luas segitiga tersebut adalah 0.324341649025

4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

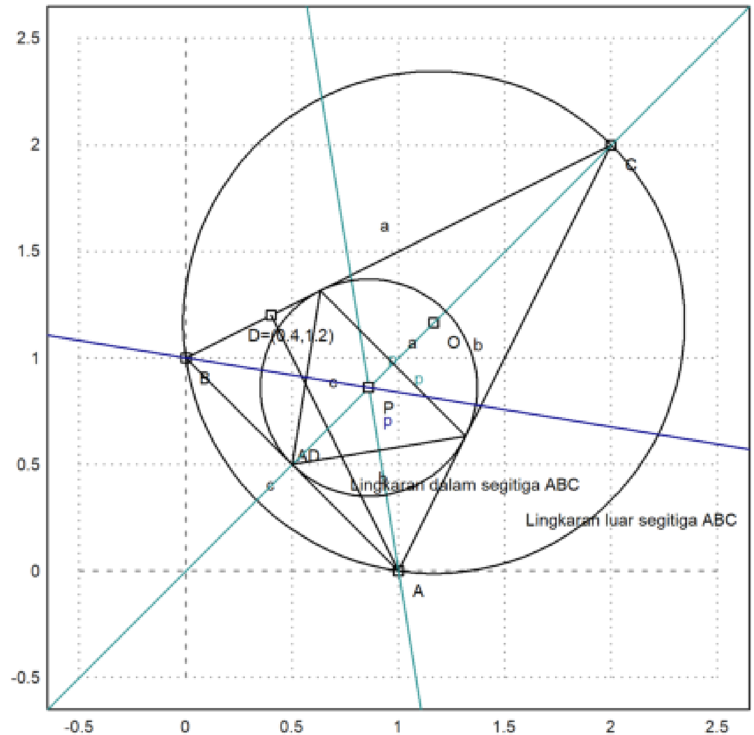
```
>P, r
```

```
[0.86038,  0.86038]
0.509653732104
```

```
>k=angleBisector(A,B,C)
```

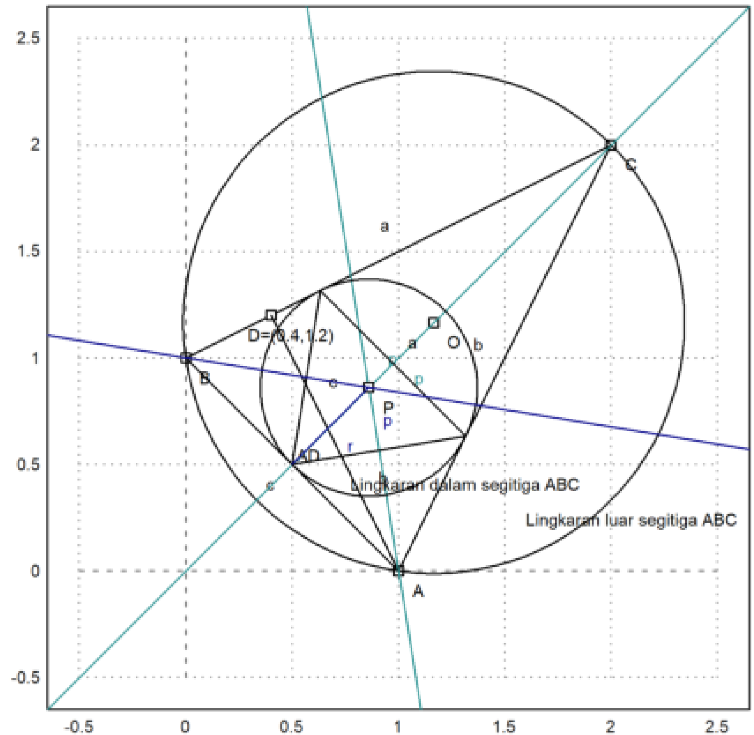
```
[-0.264911,  -1.63246,  -1.63246]
```

```
>color(4); plotLine(k):
```



5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>plotSegment(P,Z,"r"):
```



6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?
Jari-jari lingkaran luar

```
>r1 = distance(O,C)
```

```
1.17851130198
```

Luas lingkaran luar

```
>L1 = pi*r1^2
```

```
4.36332312999
```

Jari-jari lingkaran dalam

```
>r2 = distance(P,Y)
```

```
0.509653732104
```

Luas lingkaran dalam

```
>L2 = pi*r2^2
```

```
0.81601903655
```

Jadi, luas lingkaran luar segitiga ABC adalah 4.36332312999, sedangkan luas lingkaran dalam segitiga ABC adalah 0.81601903655

Contoh 2: Geometri Simbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan kombinasi simbolik sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi
menyediakan komputasi simbolik.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalui(x1, y1)
```

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
 2  6
[-, -]
 5  5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6},\frac{7}{6},\frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y=x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 garis bagi s
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6},\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

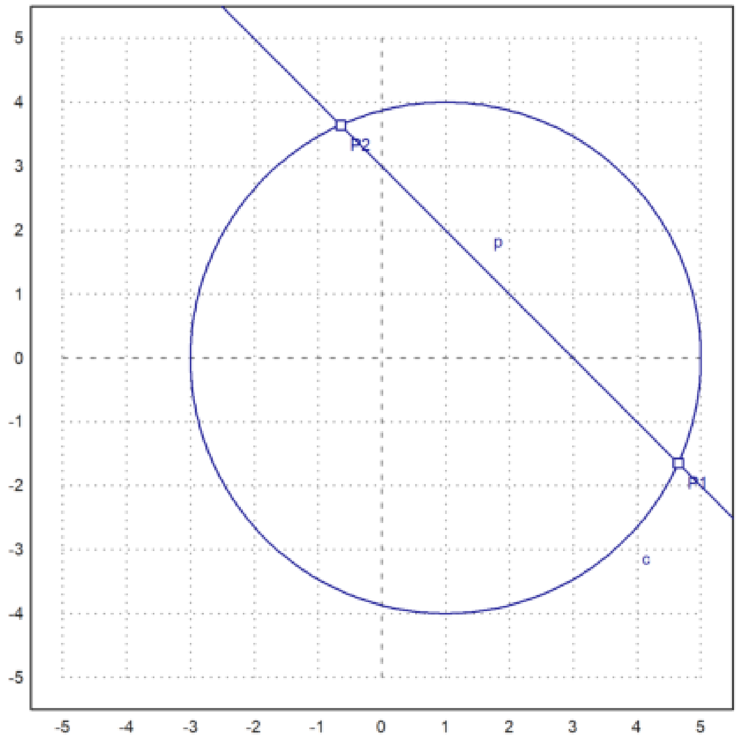
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2, f
```

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Hal yang sama pada Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2,1-\sqrt{7}\right],\left[2-\sqrt{7},\sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

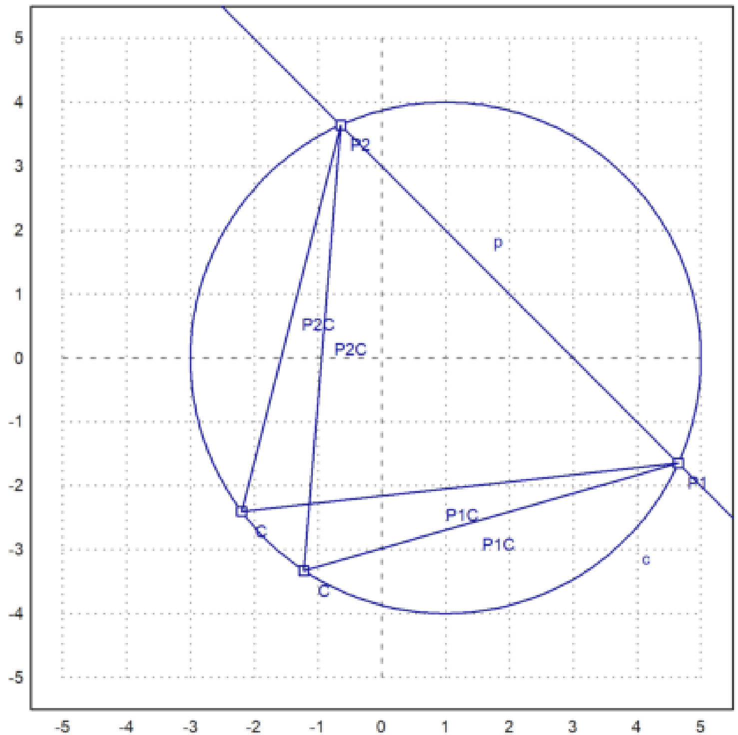
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17’42.68’’
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17’42.68’’
```

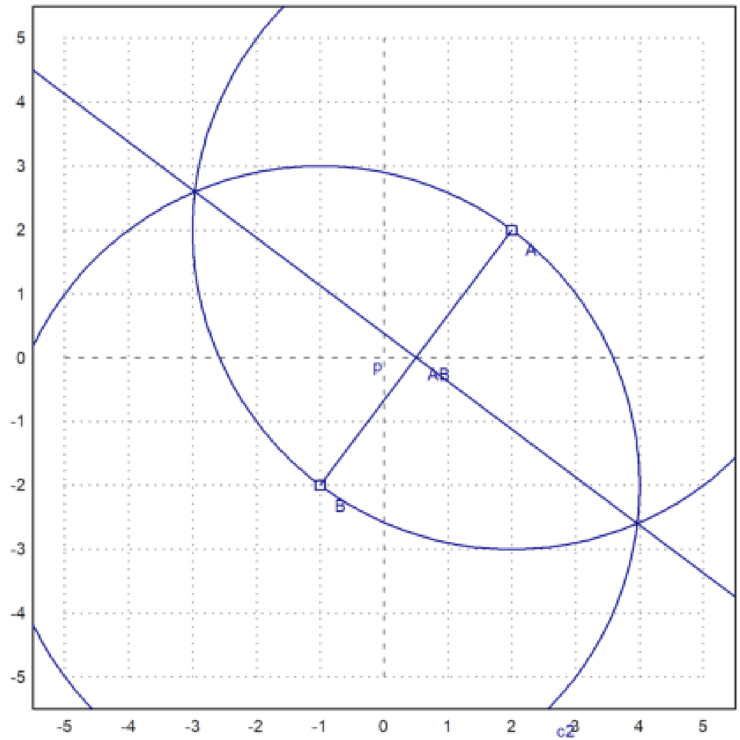
```
>insimg;
```


P2
p
P2C
P2C
P1
P1C
P1C
C
C
c

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Selanjutnya, kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita menyelesaikan untuk y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan garis tengah tegak lurus, yang dihitung dengan cara yang sangat berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

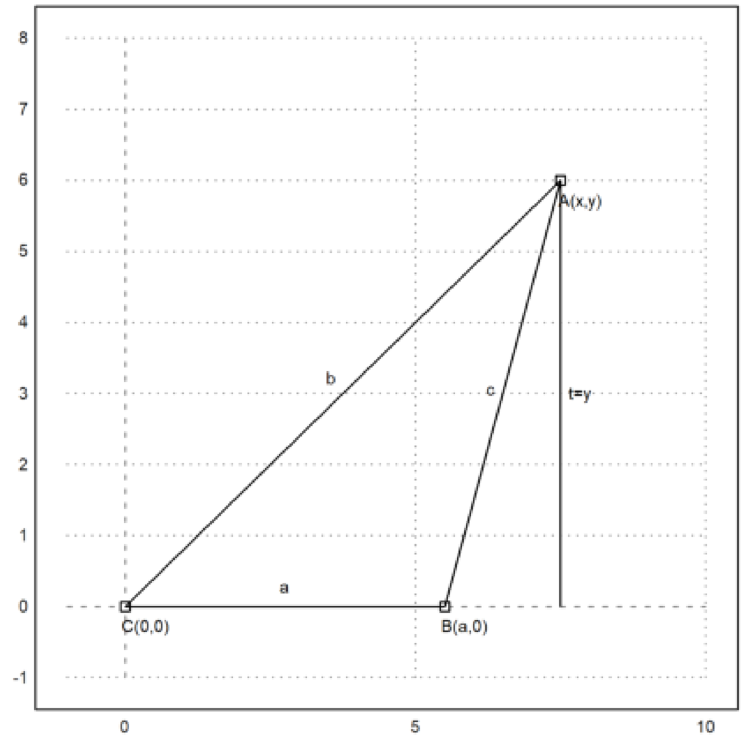
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");  ...
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);  ...
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                2     2     2
             - c  + b  + a
       [[x = --------------, y =
```

```
                   2 a
         4       2  2       2  2     4       2  2     4
   sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
 - --------------------------------------------------],
                               2 a
        2    2    2
     - c  + b  + a
 [x = --------------, y =
           2 a
        4       2  2       2  2     4       2  2     4
 sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
 --------------------------------------------------]]
                             2 a
```

Ekstrak solusi dari y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

$$y = \frac{\sqrt{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}}{2\,a}$$

Kita dapatkan rumus heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a , b , c\right)=\frac{\sqrt{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}}{4}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

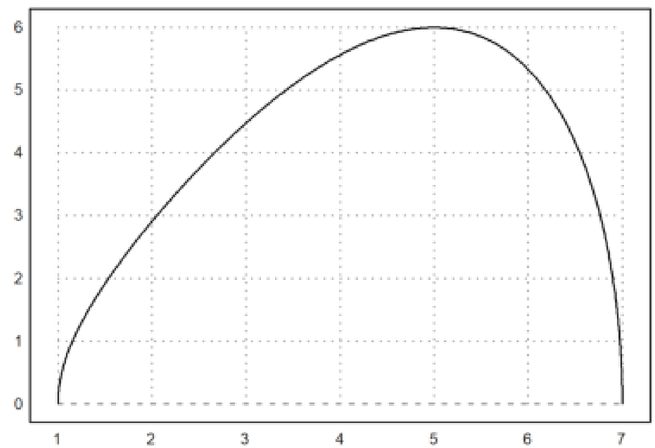
$$Luas=\frac{3\,\sqrt{39}}{4}$$

Tentu saja, setiap segitiga siku-siku adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

Dan jelas juga bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)
```



Kasus umum juga bisa digunakan.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c=-\sqrt{b^2+a^2}, c=\sqrt{b^2+a^2}, c=0\right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Sudah diketahui bahwa ini adalah sebuah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$\left[x=\frac{\left(d-c\right)^2-c^2+a^2}{2\,a} , y=\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a} \right]$$

Dan buatlah fungsi-fungsi dari hal ini.

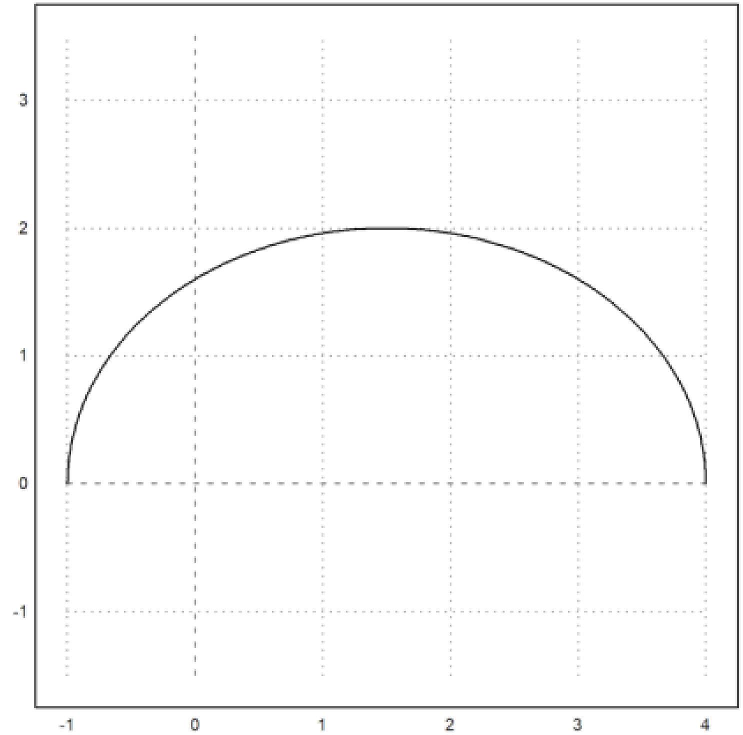
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

$$\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

$$\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

Sekarang kita dapat menggambar himpunan tersebut. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Sudah diketahui bahwa kita mendapatkan sebuah elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm, ym) adalah pusat, dan u serta v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$1$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Dengan demikian, luas segitiga dengan a+b+c=d adalah maksimal, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin membuktikannya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{d\,\left(d-2\,a\right)\,\left(d-2\,b\right)}{8}-\frac{\left(-d+2\,b+2\,a\right)\,d\,\left(d-2\,b\right)}{8}=0 , \frac{d\,\left(d-2\,a\right)\,\left(d-2\,b\right)}{8}-\frac{\left(-d+2\,b+2\,a\right)\,d\,\left(d-2\,a\right)}{8}=0\right]$$

Kita mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$\left[\left[a=\frac{d}{3},b=\frac{d}{3}\right],\left[a=0,b=\frac{d}{2}\right],\left[a=\frac{d}{2},b=0\right],\left[a=\frac{d}{2},b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan H(a,b,c)^2 sehubungan dengan a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
                       d      d
         [[a = 0, b = -, c = -, la = 0],
                       2      2
     d              d                 d      d
 [a = -, b = 0, c = -, la = 0], [a = -, b = -, c = 0, la = 0],
     2              2                 2      2
                             3
     d      d      d       d
 [a = -, b = -, c = -, la = ---]]
     3      3      3       108
```

Kita bisa membuat plot situasinya.

Pertama-tama tetapkan titik-titik di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

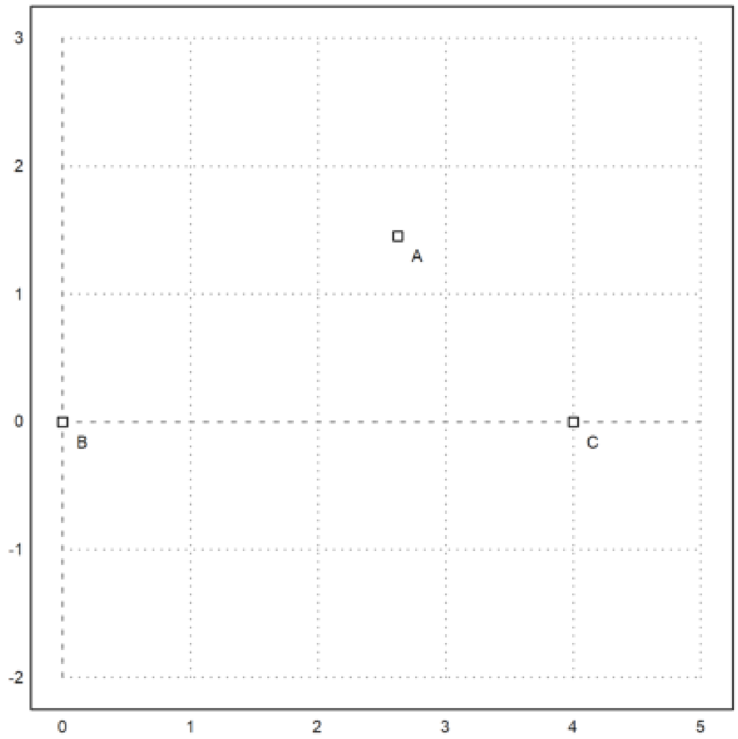
$$\left[\frac{-c^2+b^2+a^2}{2\,a} , \frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[a,0]$$

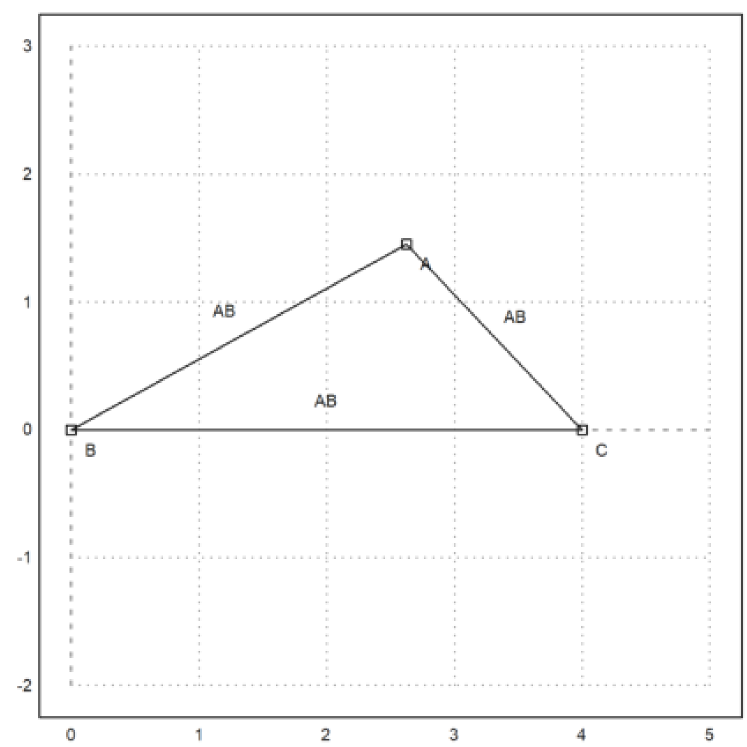
Kemudian, tetapkan range plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```



Plot segmen-segmen tersebut.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```



Hitung garis tegak lurus tengah dalam Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan bagian tengah keliling.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

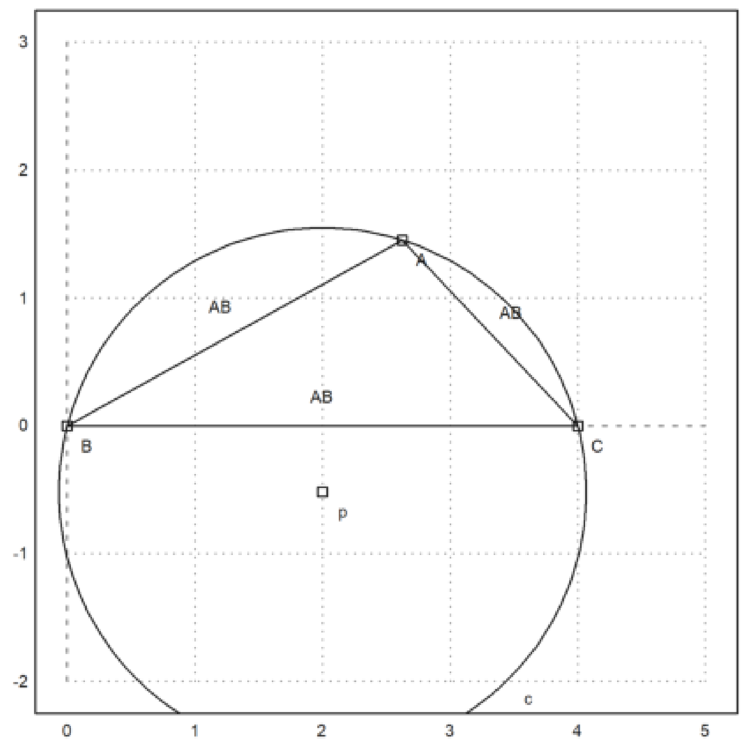
Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{c-b-a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```



Dengan menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita bisa mengecek, apakah hal ini benar dengan Maxima. Maxima akan memperhitungkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(c-b-a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga apa pun yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk ortosentrum, circumcenter, centroid, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Sebagai demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga dalam Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

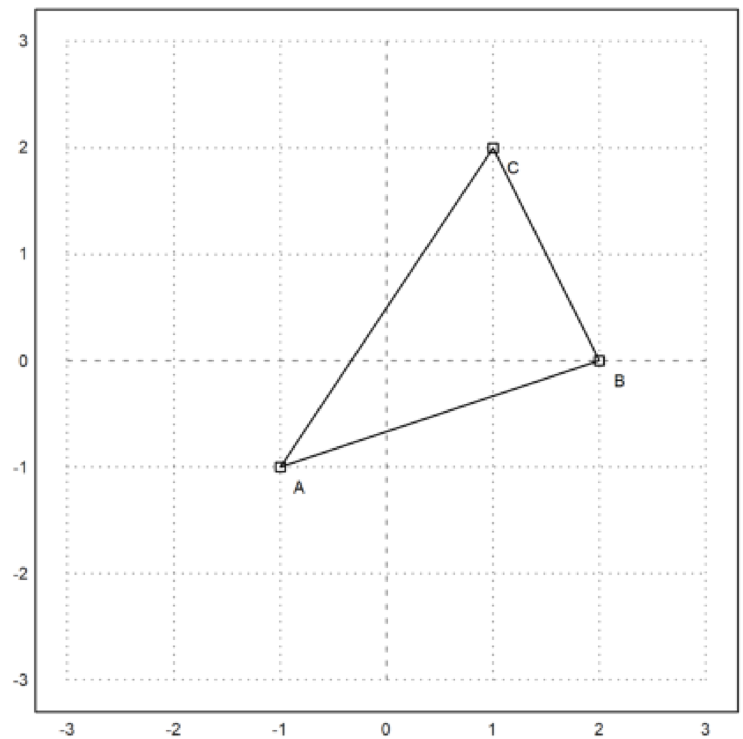
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titiknya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke
plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut ini adalah luas area segitiga, dengan menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien dari sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan juga mendapatkan rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik tersebut akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung keliling ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

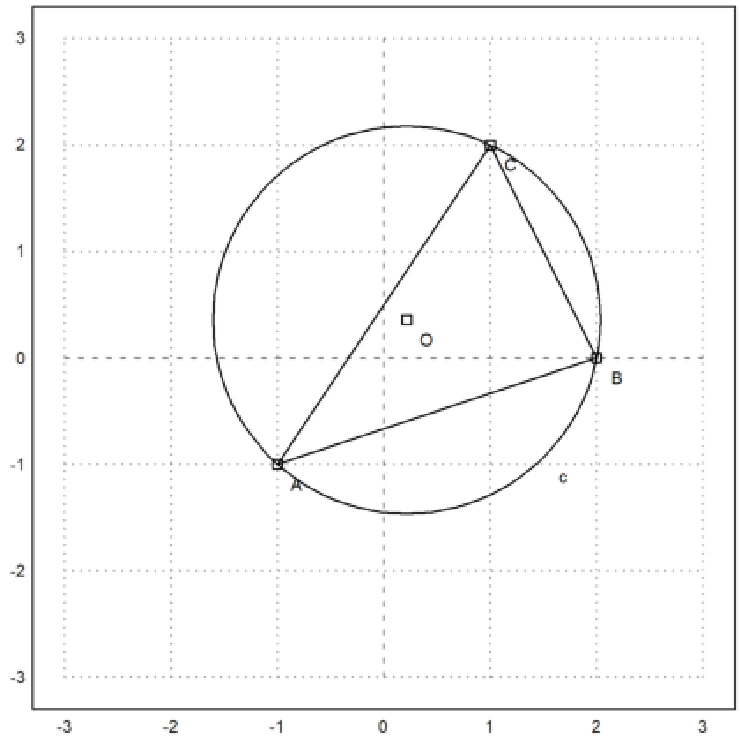
$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (orthocenter) secara numerik dengan rumus berikut ini.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right]$$

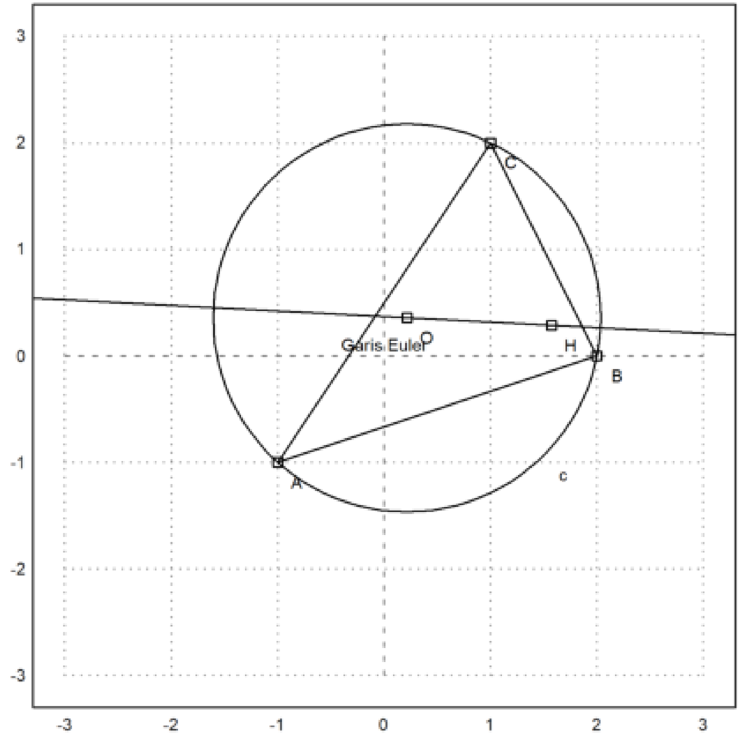
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14}-\frac{x}{14}=-\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kita.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

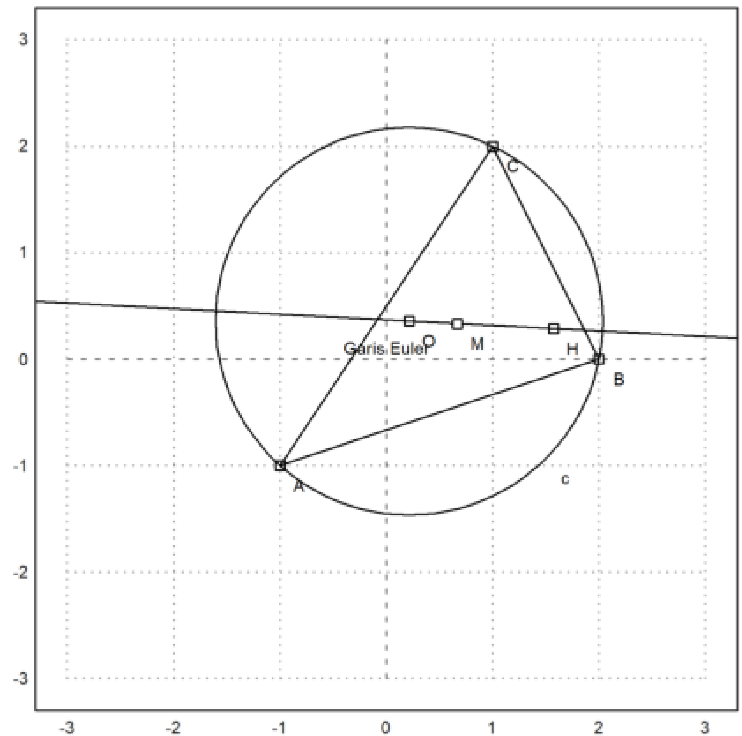


Pusat gravitasi harus berada pada garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teori mengatakan bahwa MH = 2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsi-fungsi ini juga mencakup fungsi untuk sudut.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

Persamaan untuk bagian tengah lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14},\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

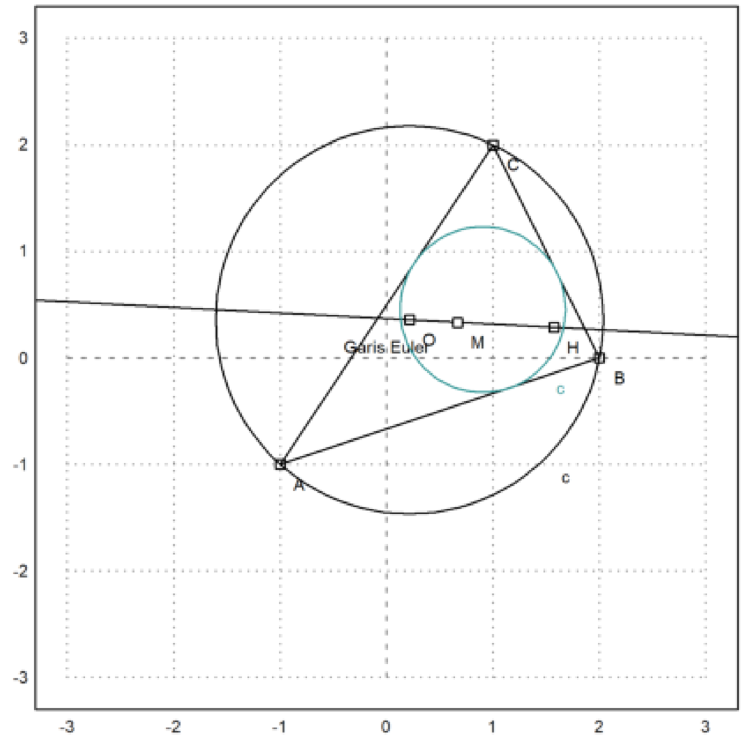
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

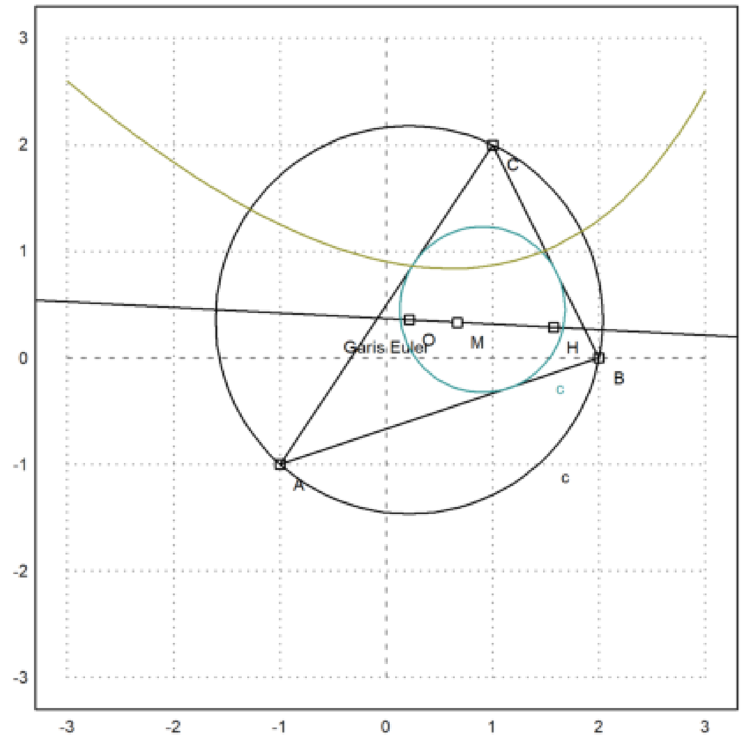
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi solver default Maxima hanya bisa menemukan solusinya jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

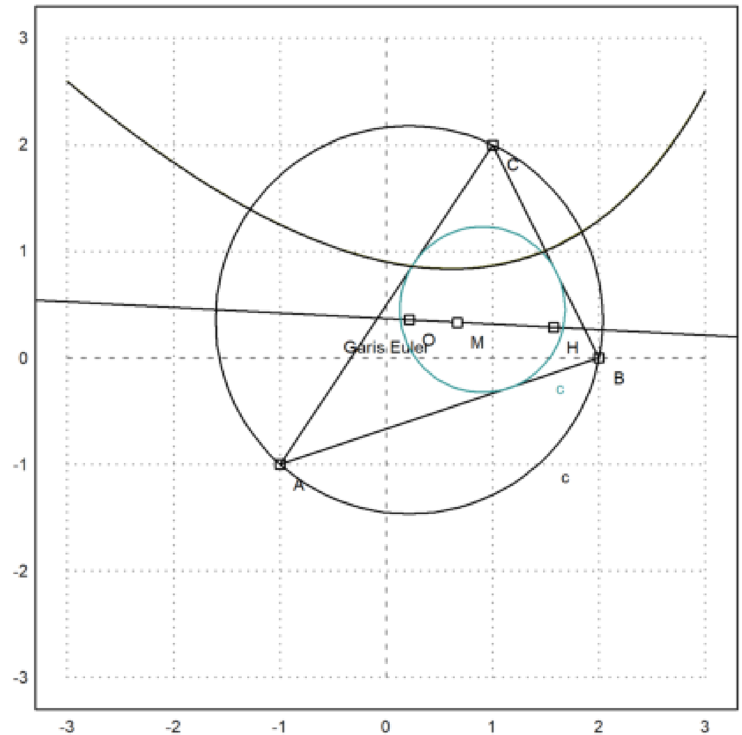
```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                      y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah

maxima: akar[1]

Menambahkan solusi pertama ke dalam plot menunjukkan, bahwa itu memang jalur yang kita cari. Teori mengatakan bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3\,x - \sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x} + 26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10},\frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari sebuah ceramah N.J. Wildberger. Dalam bukunya "Proporsi Ilahi", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadransi dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

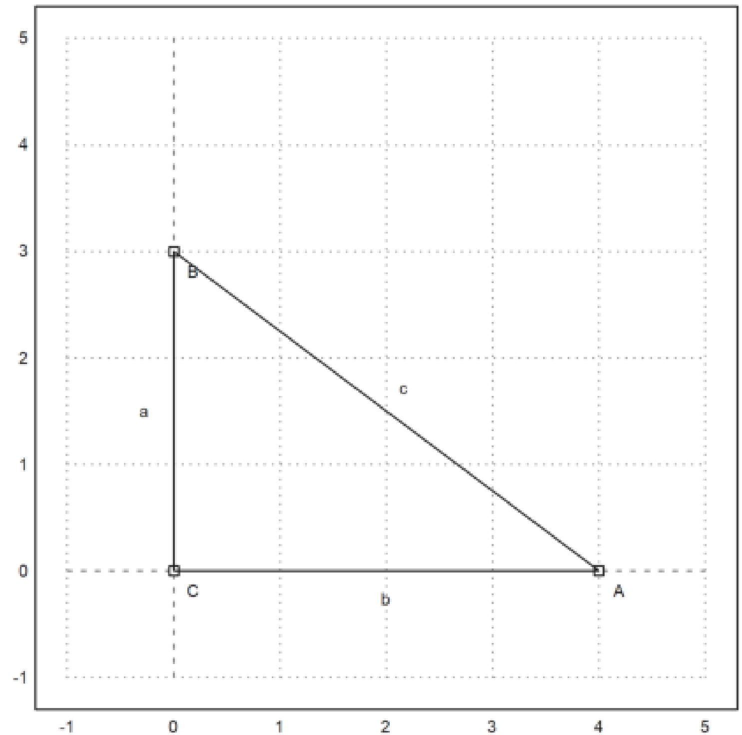
Berikut ini, saya akan memperkenalkan konsep-konsep tersebut, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan komputasi simbolik Max- ima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional yang komputasinya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda diundang untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa komputasi rasional simbolis sering kali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang dievaluasi dengan perkiraan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kita menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4, dan 5. Perintah berikut ini adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat pada file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadrat, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, ini hanyalah jarak yang dikuadratkan.
Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a+b=c. Maka, teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Penyebaran mengukur bukaan di antara garis- garis. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadran dari segitiga persegi panjang dengan satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja, hal ini lebih mudah dihitung daripada sudut. Tetapi Anda kehilangan sifat bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita bisa mengonversi nilai perkiraan kita untuk sudut wa ke sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan ke dalam "hukum silang" berikut ini.

$$(c+b-a)^2 = 4bc\,(1-s_a)$$

HDi sini, a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah penyebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diimplementasikan dalam file geometry.e yang kita muat ke dalam Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[\left(bb-aa+\frac{7}{6}\right)^2,\left(bb-aa+\frac{7}{6}\right)^2,\left(bb-aa+\frac{5}{3\,\sqrt{2}}\right)^2\right]=\left[\frac{14\,bb\,\left(1-saa\right)}{3},\frac{14\,bb\,\left(1-saa\right)}{3},\frac{5\,2^{\frac{3}{2}}\,bb\,\left(1-saa\right)}{3}\right]$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk sebaran sa yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasil yang sudah kami dapatkan.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

Kita sudah mengetahui hal ini. Definisi spread adalah kasus khusus dari crosslaw.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum. Hasilnya adalah sebuah rumus yang menghitung penyebaran sudut segitiga dengan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[\left[\frac{168\,bb\,x+36\,bb^2+\left(-72\,aa-84\right)\,bb+36\,aa^2-84\,aa+49}{36},\frac{168\,bb\,x+36\,bb^2+\left(-72\,aa-84\right)\,bb+36\,aa^2-84\,aa+4}{36}\right.\right.$$

Kita dapat membuat sebuah fungsi dari hasil tersebut. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometry.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi.

$$a,\quad a,\quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

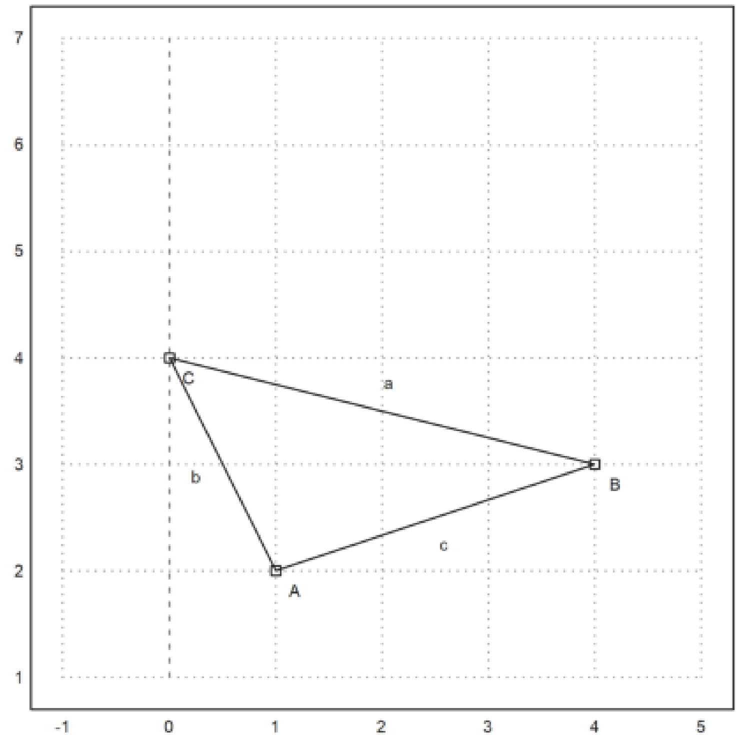
```
67°47'32.44''
```

Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju.

Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga mengandung fungsi untuk kuadran antara dua titik.

Dalam contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga itu bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan hasil kali titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

$$A =< 1, 2 > \quad B =< 4, 3 >, \quad C =< 0, 4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4, 1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3, -1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos\beta$$

$$\cos\angle ABC = \cos\beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kami memasukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan menyelesaikan x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Yaitu, apa yang dilakukan oleh penyebaran fungsi yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksanya. Itu menyelesaikan istilah sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki spread di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut telah dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadrat dan menyebar.

image: (20) Rational_Geometry_CaR.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadratnya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berhadapan dengan kuadrat!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama kita hitung spread di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), faktorkan dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}{16}$$

$$\frac{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut yang sama. Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc+sb+sa)^2 = 2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk setiap tiga sudut yang menambah 180 °.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Sejak menyebar

$$\alpha,\pi-\alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran rangkap tiga juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Misalnya, kita dapat menghitung penyebaran sudut 60°. Ini 3/4. Persamaan memiliki solusi kedua, bagaimanapun, di mana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x = \frac{3}{4}, x = 0\right]$$

Sebaran 90° jelas 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, sebarannya menyelesaikan persamaan sebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$[x = 1 - y]$$

Karena sebaran 180°-t sama dengan sebaran t, rumus sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut berlipat ganda. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami membuat ini fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

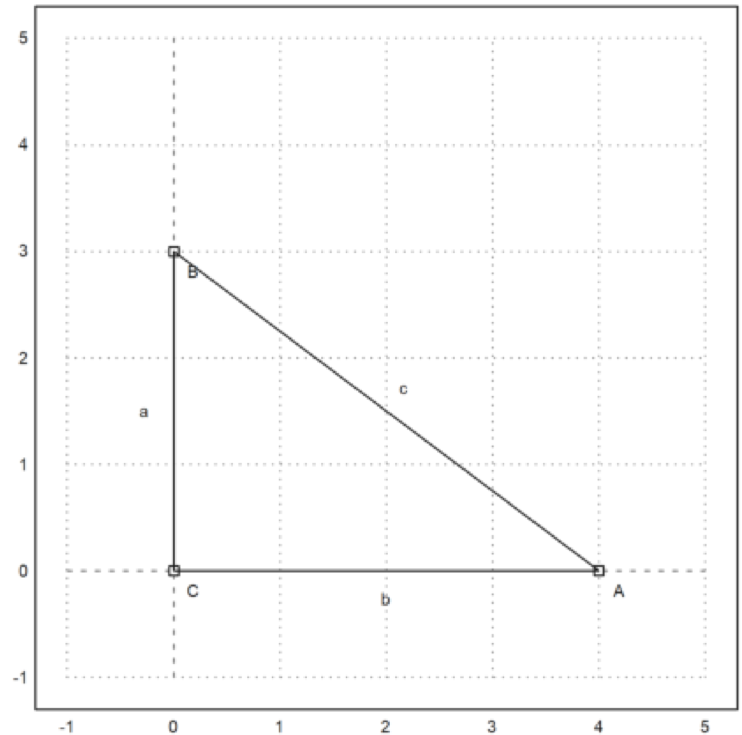
$$\left[x=4\,a-4\,a^2 , x=0 \right]$$

```
- 4 (a - 1) a
```

Sudut Pembagi

Ini situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk umum a,b,c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita hitung penyebaran sudut yang dibagi dua di A, dengan menggunakan rumus sebaran rangkap tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbelah 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a} , x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kami dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

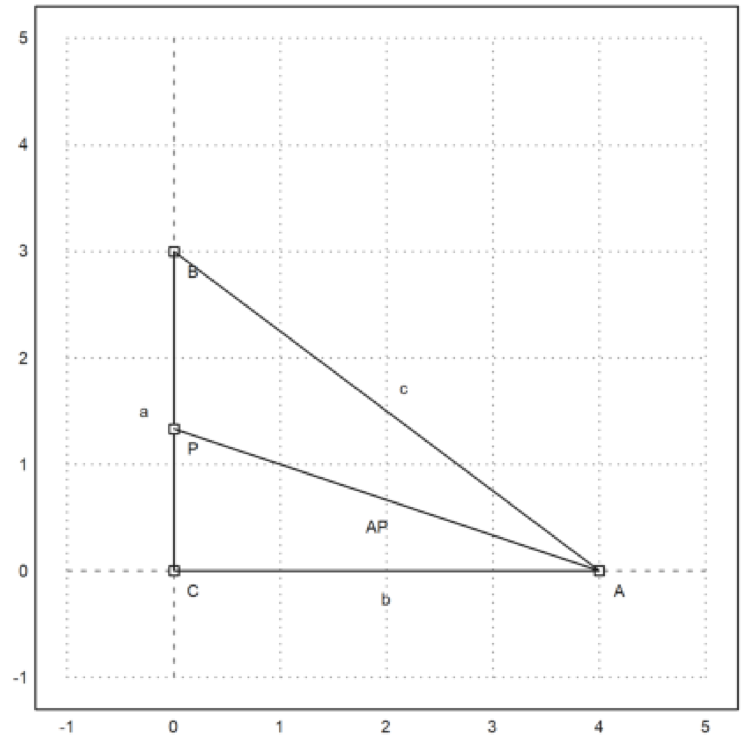
```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kami menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, itu diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a,b,c menunjukkan qudrances.

Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita dapatkan darinya bisa/1=b/(1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran dari garis-bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

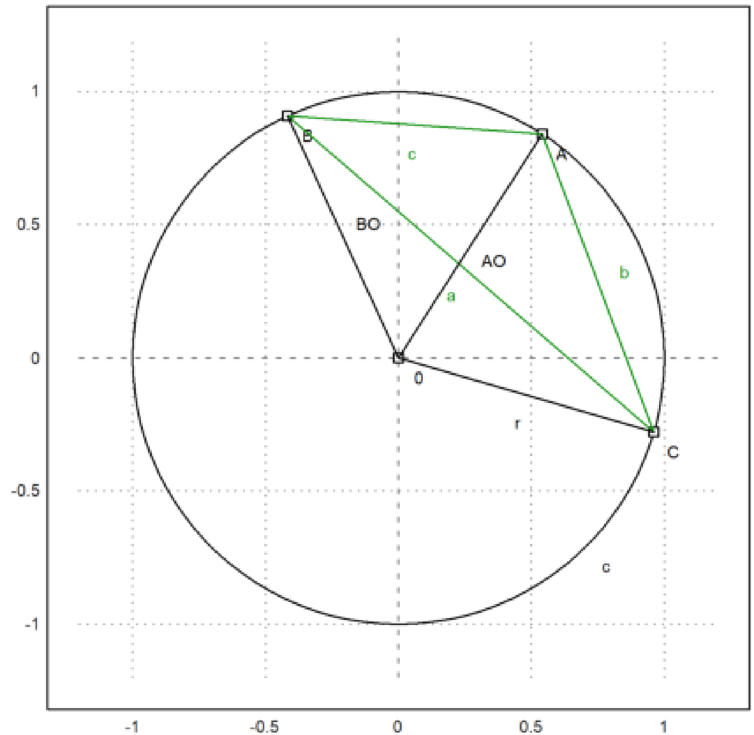
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akord

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"O"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadrat dari sisi.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jarinya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

```
1
```

Faktanya, spread CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut chord.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya spreadnya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut chord dari chord b adalah setengah dari sudut pusat.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

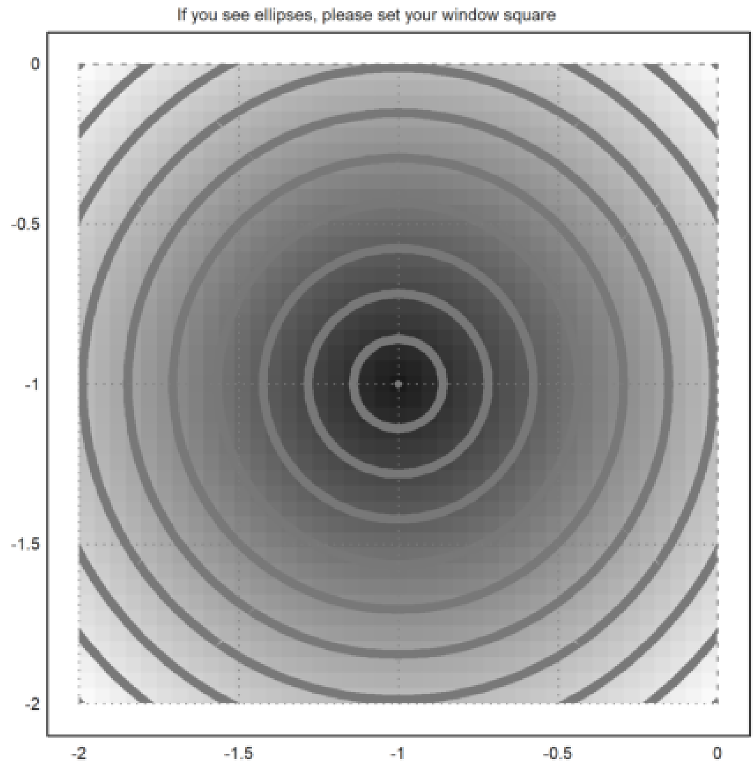
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal

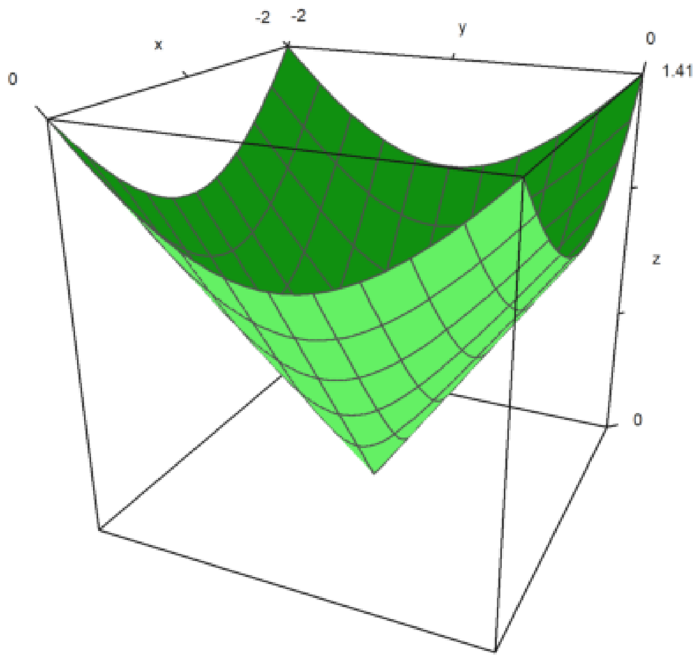
Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

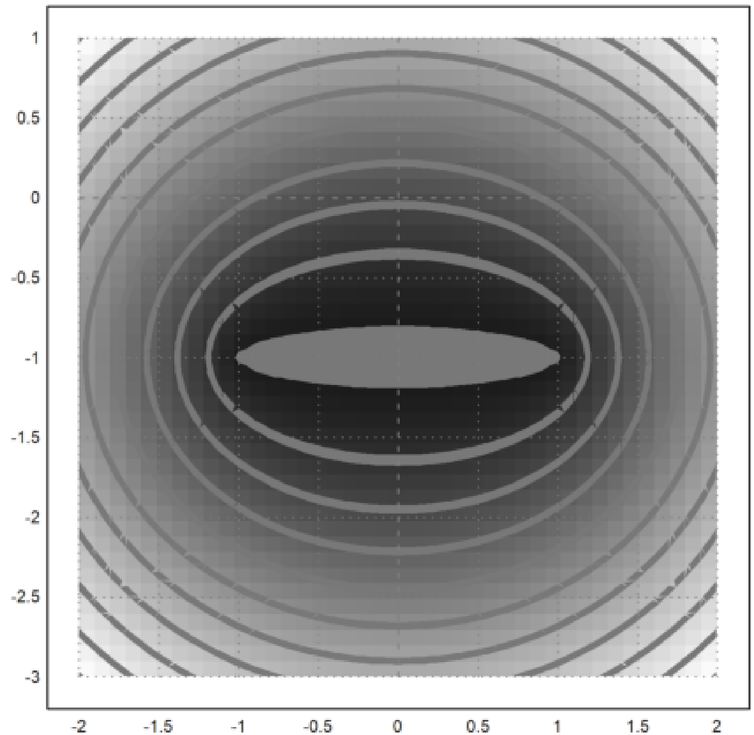


Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Poin Dua

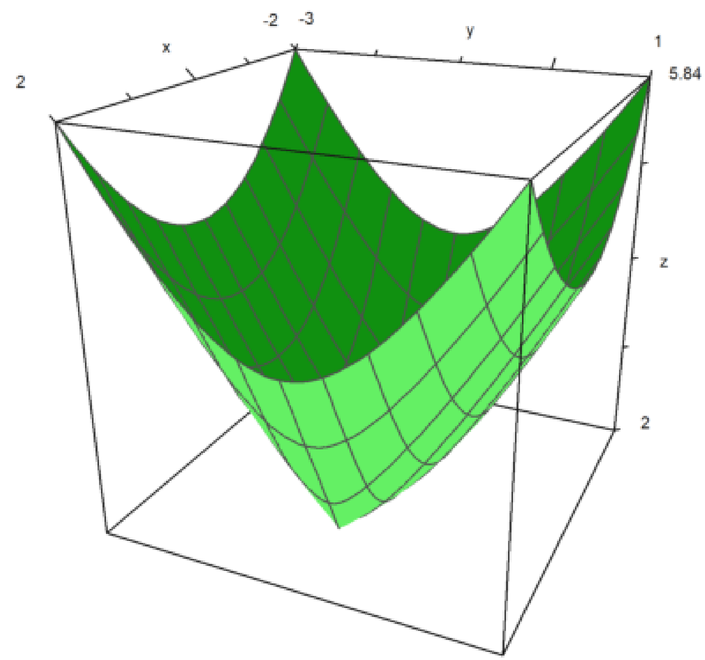
Sekarang kita lihat fungsi MA+MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang diketahui" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk AB minimum yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



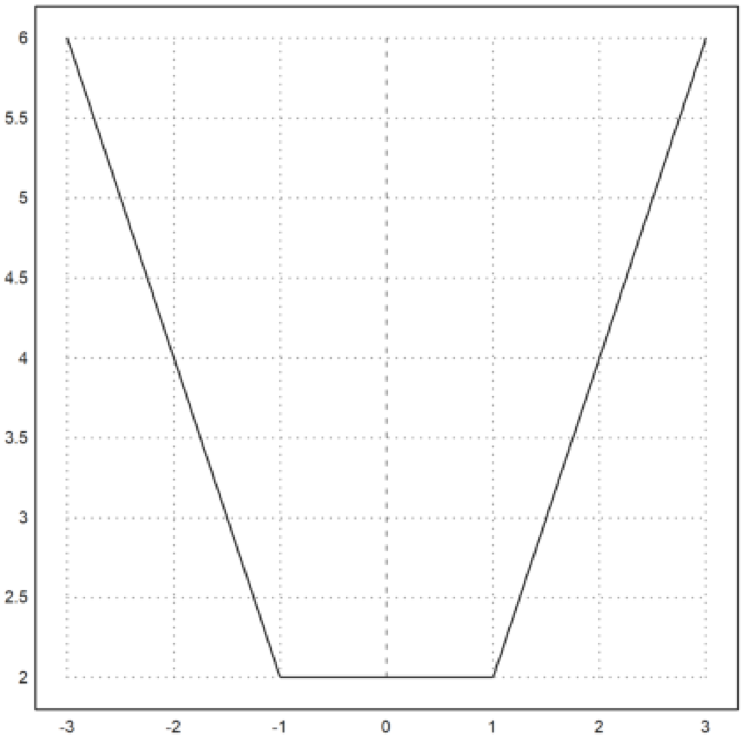
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

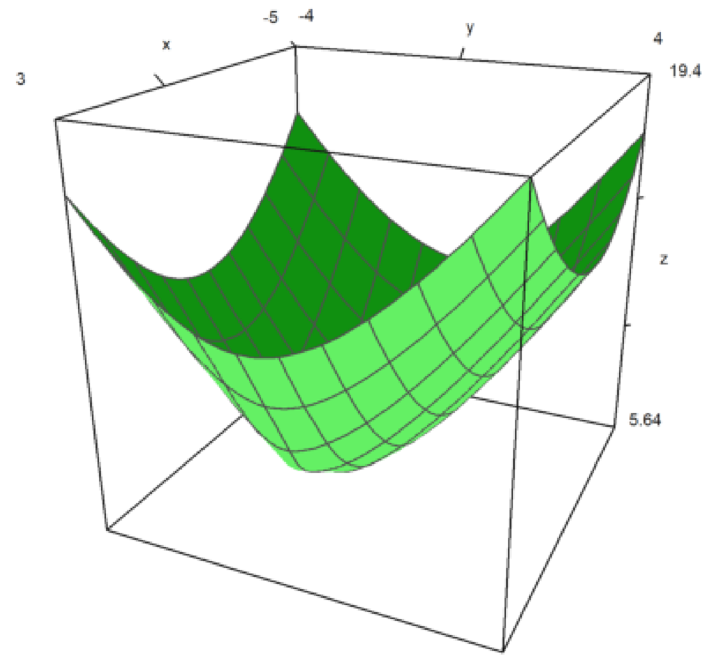


Sekarang hal-hal yang kurang sederhana: Ini sedikit kurang terkenal bahwa MA+MB+MC mencapai minimum pada satu titik pesawat tetapi untuk menentukan itu kurang sederhana:

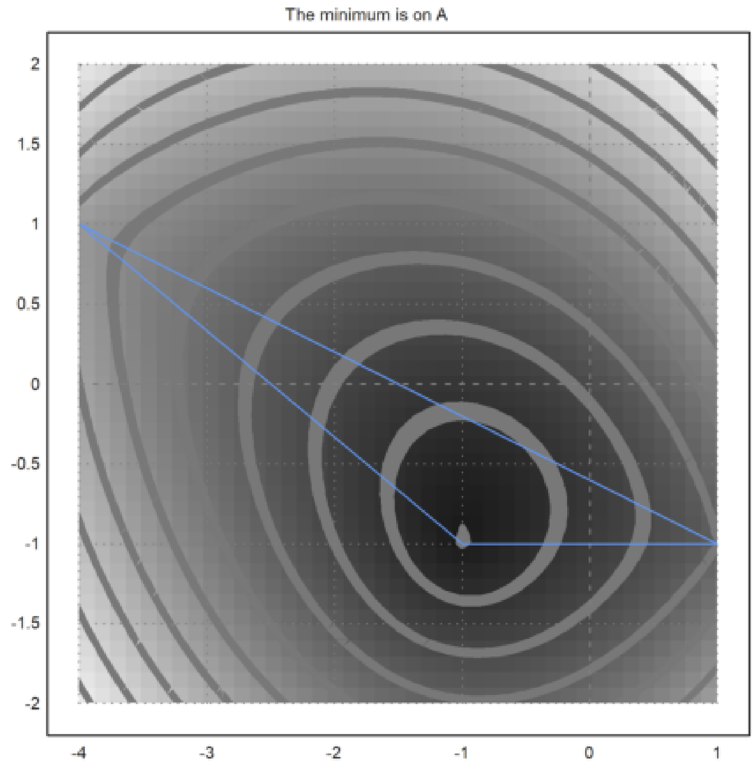
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (misalnya AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

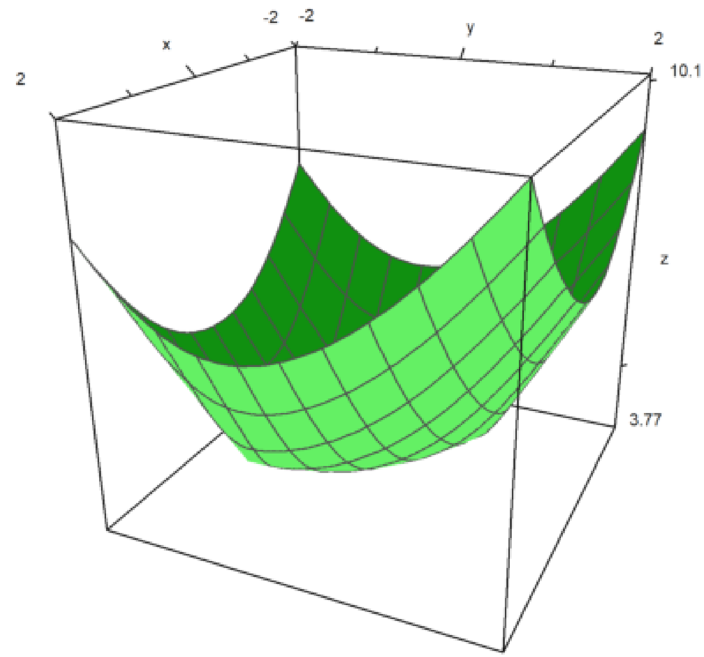



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

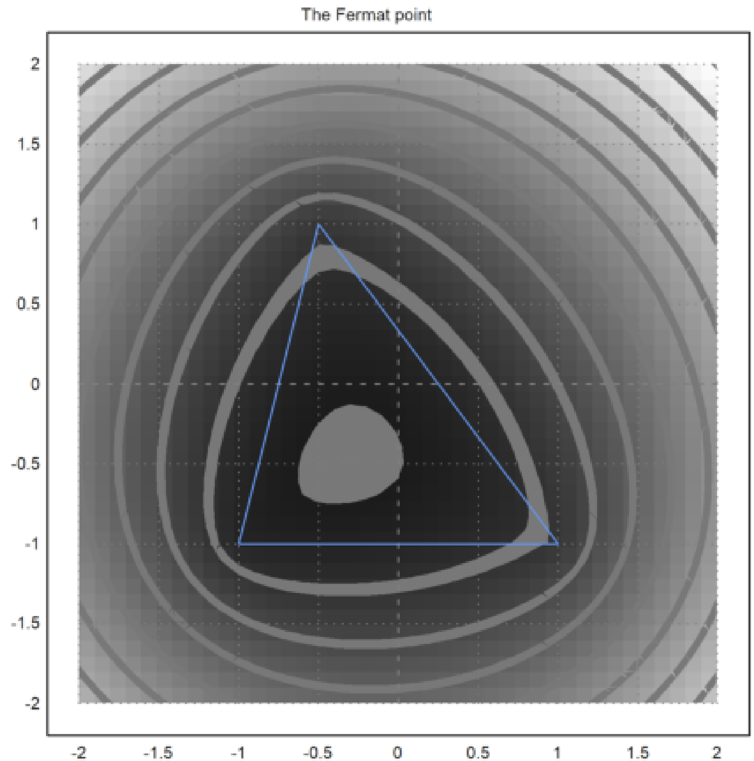


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing 120°):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```




```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

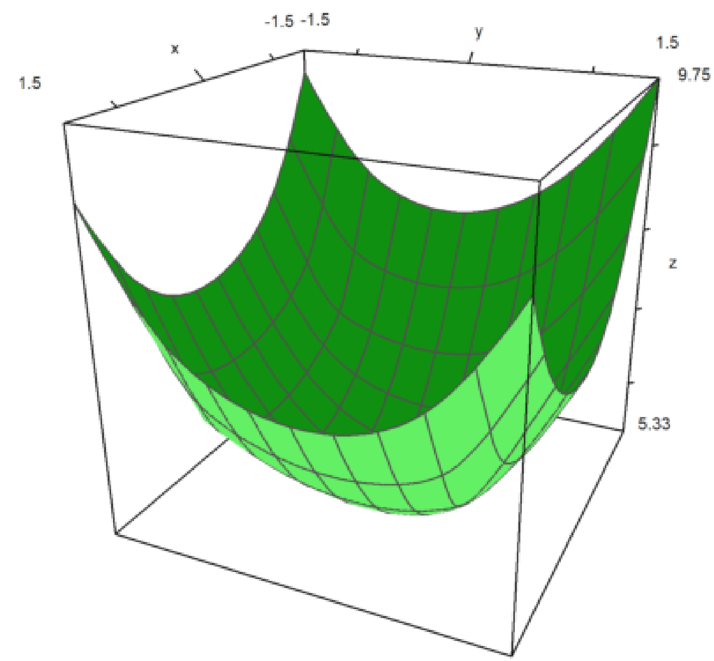


Merupakan kegiatan yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu soft yang ditulis di Jawa yang memiliki instruksi ”garis kontur” ...

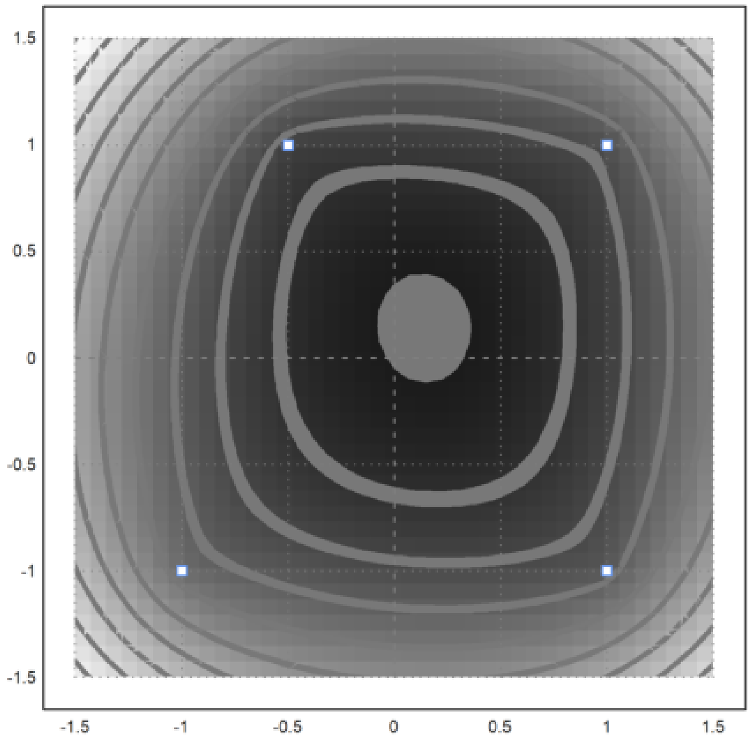
Semua ini di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada dilettants lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di pajak penghasilan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat segitiga. Tetapi tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat melakukannya! Bagaimanapun tradisinya adalah mencatat poin ini F...

Langkah selanjutnya adalah menambahkan 4 titik D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakan bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



Masih ada minimum dan tidak tercapai di salah satu simpul A, B, C atau D:

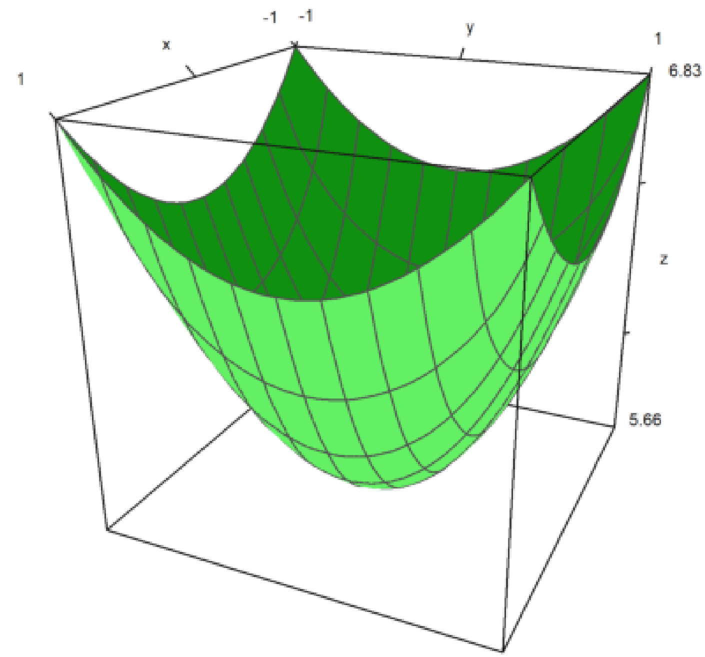
```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

```
[0.142858,  0.142857]
```

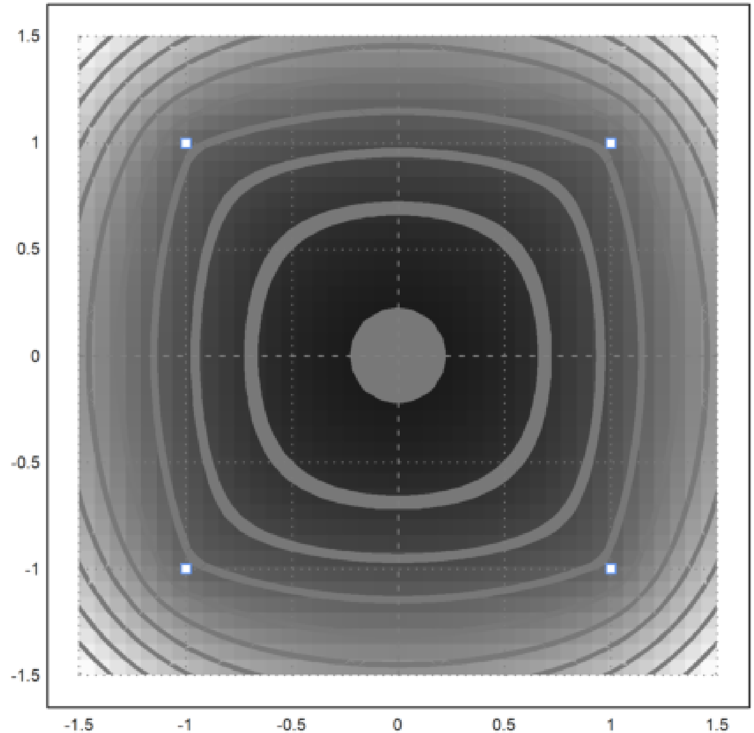
Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...

Sekarang ABCD adalah persegi, kami berharap bahwa titik optimal akan menjadi pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama kita hitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometri.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[- a, - 1, 0]
```

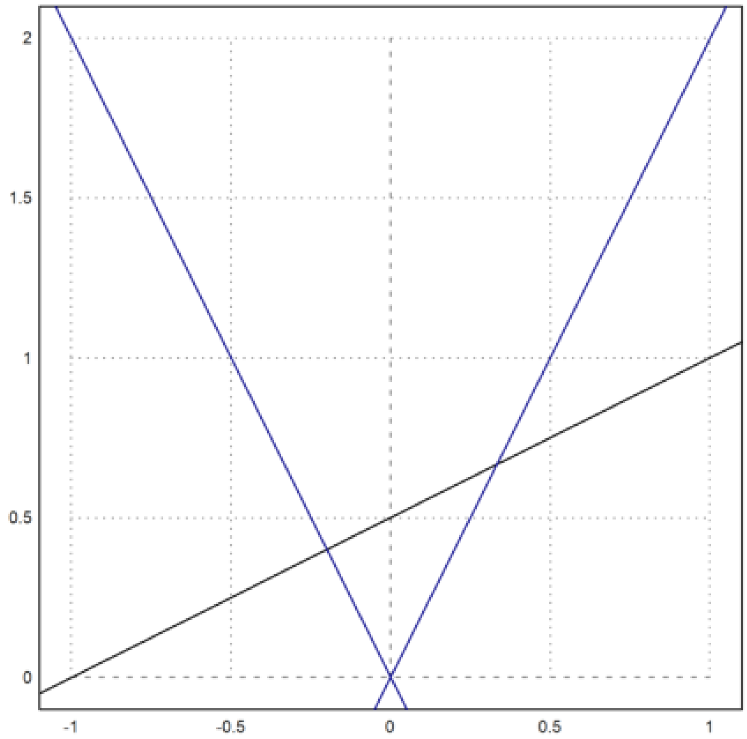
Kemudian baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1} , u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

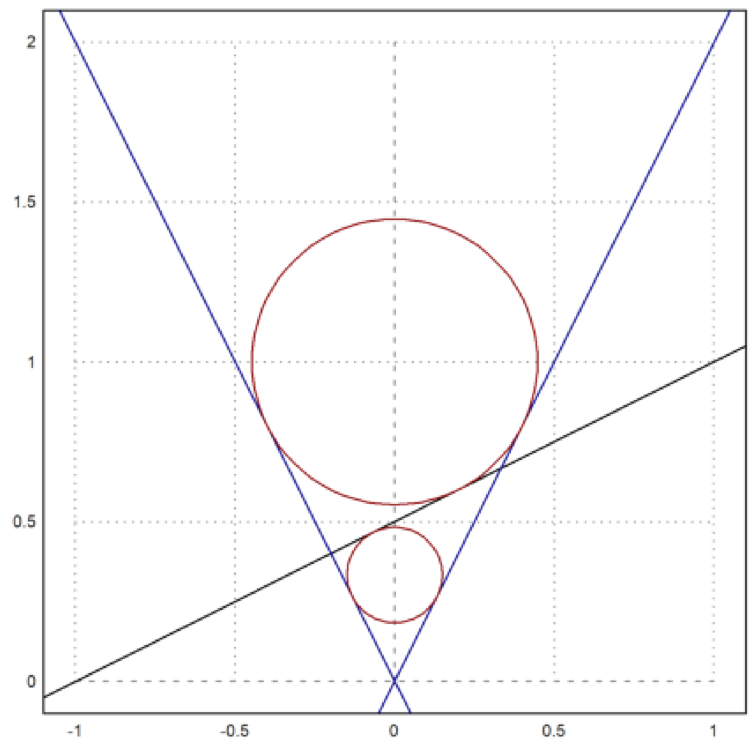
```
[0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kami merencanakan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bidang ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus dari elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

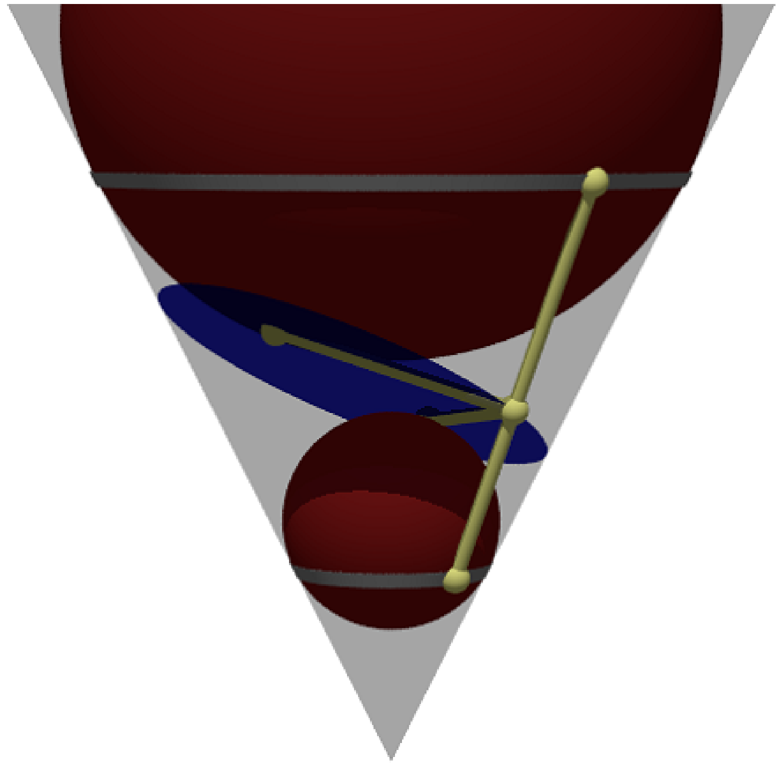
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



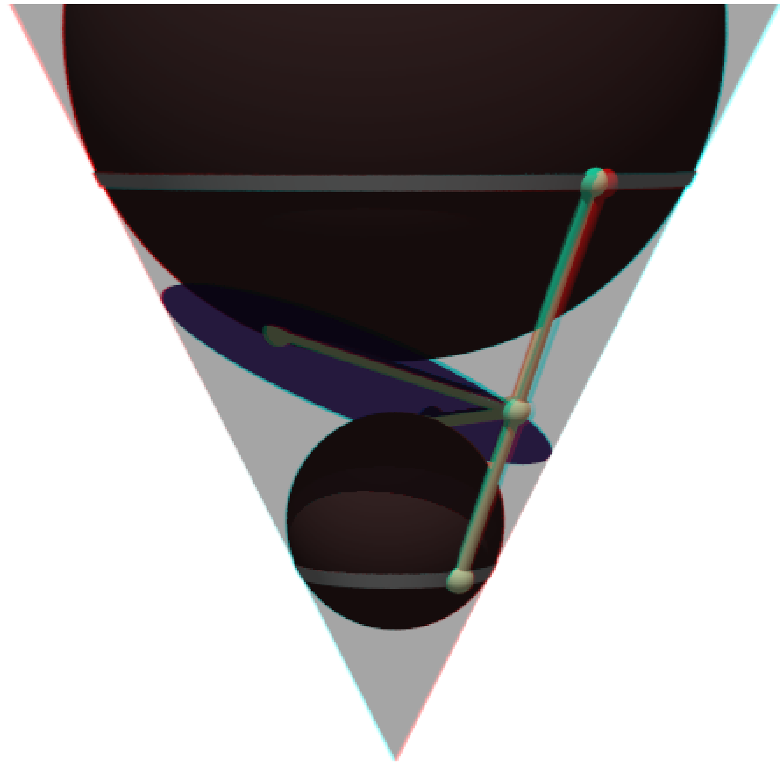
Untuk mendapatkan Anaglyph ini kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda membutuhkan kacamata merah/sian untuk menghargai efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan sferis. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi spherical).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu ke yang lain pada bola ideal. Vektor ini [pos,jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu pendek hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)-> "km", // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
88.0114026318km
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
      65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degprint(
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
2116.02948749 km^2
```

There is a function for this, which uses the mean latitude of the triangle to compute the earth radius, and takes care of rounding errors for very small triangles.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola ideal. Hal yang sama terjadi di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita lihat contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998’ E 110°21.966’
S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

Menurut Google Earth, jaraknya 429,66km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
431.565659488 km
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17’2.85’’
```

Namun kita tidak lagi mendapatkan posisi sasaran yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, namun melakukan perkiraan jari-jari bumi di sepanjang lintasan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana saja di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kita jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan tujuan yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambah 10 kali sepersepuluh jarak, pakai jurusan Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh sekali.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
 S 6°11.250' E 106°48.372'
      1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran dengan garis lintang 30°, melainkan jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
      79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah perjalanan kita. Untuk tujuan kasarnya, kita sesuaikan pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kita mendapatkan perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugun ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998’ E 110°21.966’
S 7°37.422’ E 110°0.573’
S 7°27.829’ E 109°39.196’
S 7°18.219’ E 109°17.834’
S 7°8.592’ E 108°56.488’
S 6°58.948’ E 108°35.157’
S 6°49.289’ E 108°13.841’
S 6°39.614’ E 107°52.539’
S 6°29.924’ E 107°31.251’
S 6°20.219’ E 107°9.977’
S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

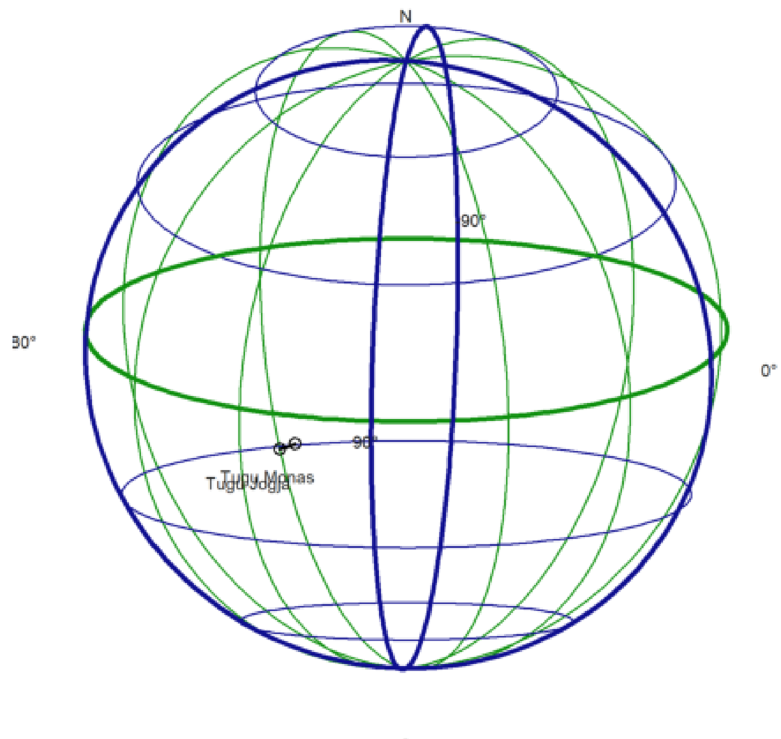
Kita menulis sebuah fungsi yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

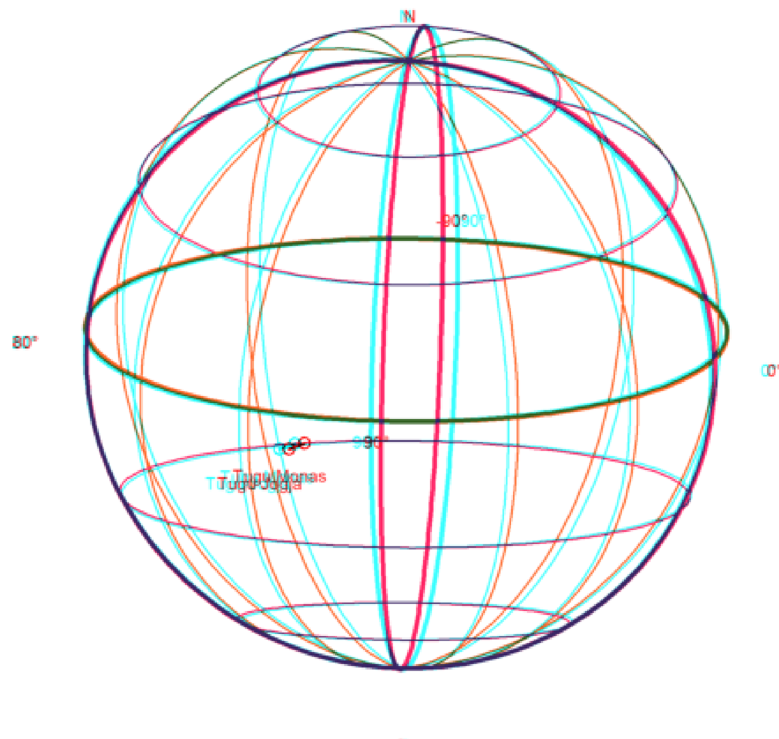
Sekarang plot semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```


N
Tugu Monas
Tugu Jogja
0°

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

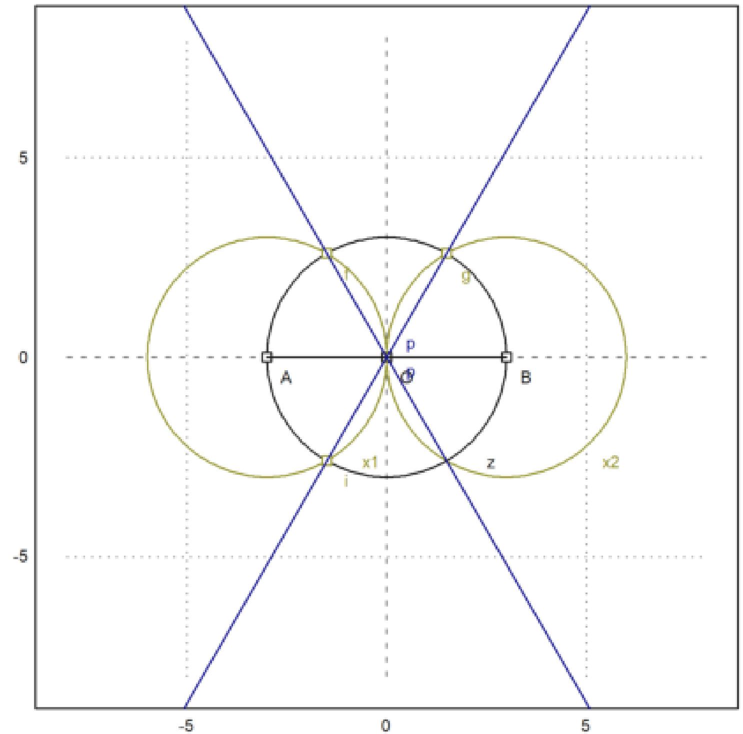
Disini saya akan menggambarkan segi-6 dengan menggunakan tiga lingkaran dengan jari-jari 3.

```
>load geometry
```

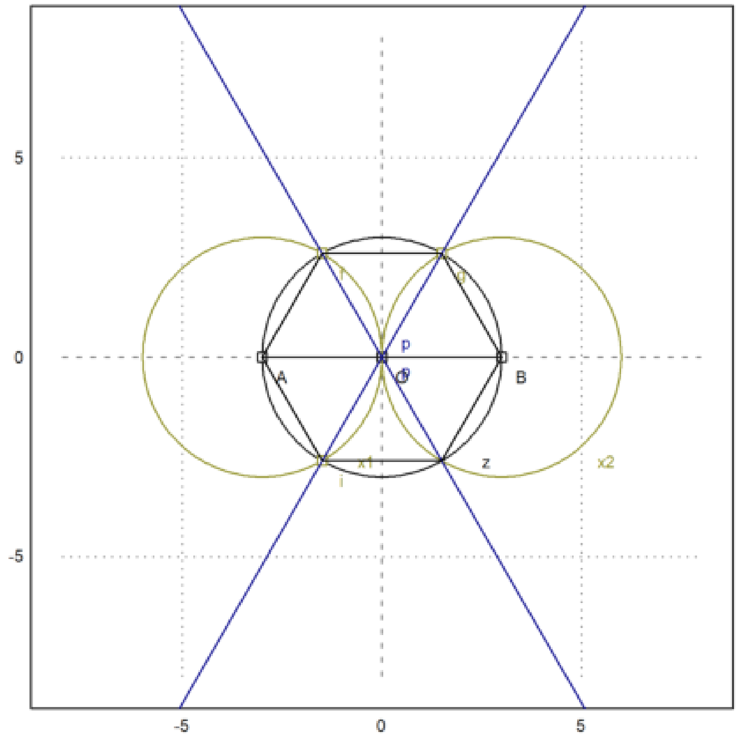
```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5);
>O &:= [0,0]; z=circleWithCenter(O,3);
>A=[-3,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,0]; plotPoint(B,"B");
>plotSegment(A,B,"");
>x1=circleWithCenter(A,distance(A,O));
>x2=circleWithCenter(B,distance(B,O));
>f=circleCircleIntersections(x1,z);
>g=circleCircleIntersections(z,x2);
```

```
>h=circleCircleIntersections(x2,z);
>i=circleCircleIntersections(z,x1);
>r=lineThrough(f,h); s=lineThrough(g,i);
>setPlotRange(8); plotPoint(O); plotCircle(z); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotSegment(A,B,"
>color(6); plotCircle(x1); plotCircle(x2); plotPoint(f); plotPoint(g); plotPoint(i);
>color(4); plotLine(r); plotLine(s):
```



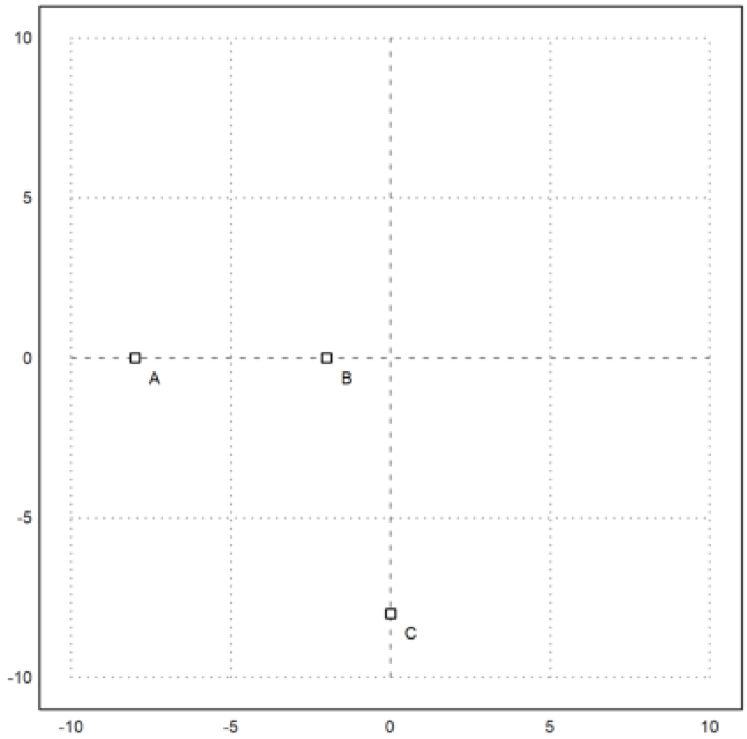
```
>color(100); plotSegment(A,f,""); plotSegment(A,i,""); plotSegment(f,g,"");
>plotSegment(g,B,""); plotSegment(B,h,""); plotSegment(h,i,""):
```



2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

```
>setPlotRange(-10,10,-10,10); A=[-8,0]; B=[-2,0]; C=[0,-8];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"):
```



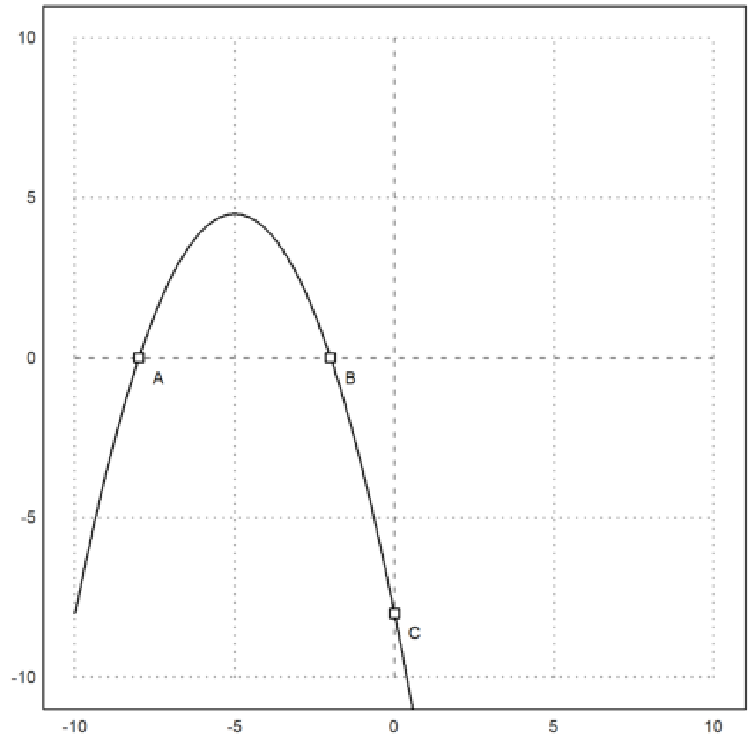

```
>sol&=solve([64*a-8*b=-c, 4*a-2*b=-c, c=-8],[a,b,c])
```

```
          1
[[a = - -, b = - 5, c = - 8]]
          2
```

```
>function y&=-0.5*x^2-5*x-8
```

```
                   2
             - 0.5 x  - 5 x - 8
```

```
>plot2d("-0.5*x^2-5*x-8", -10,10,-10,10); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"):
```



3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

```
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar
```

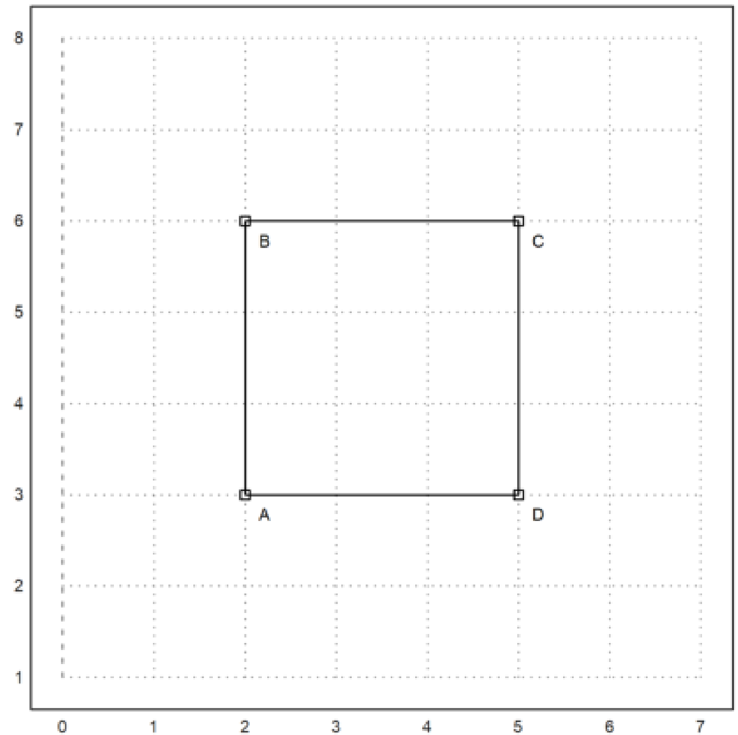
lingkaran dalamnya.

```
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis
```

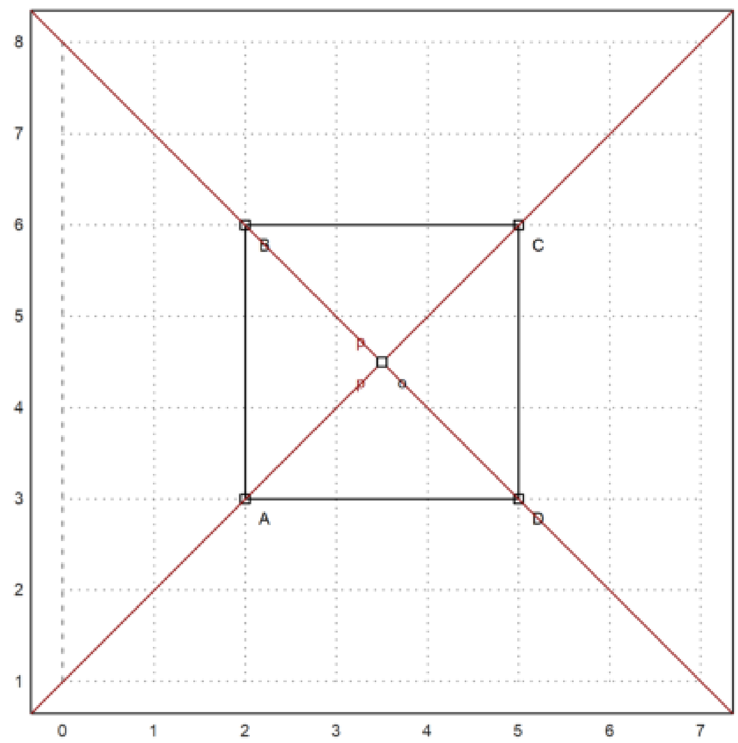
singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

Misal:
A = [2,3], B = [2,6], C = [5,6], dan D [5,3]

```
>setPlotRange(0,7,1,8);
>A=[2,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,6]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,6]; plotPoint(C,"C");
>D=[5,3]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"");
>plotSegment(B,C,"");
>plotSegment(C,D,"");
>plotSegment(D,A,"");
>aspect(1):
```



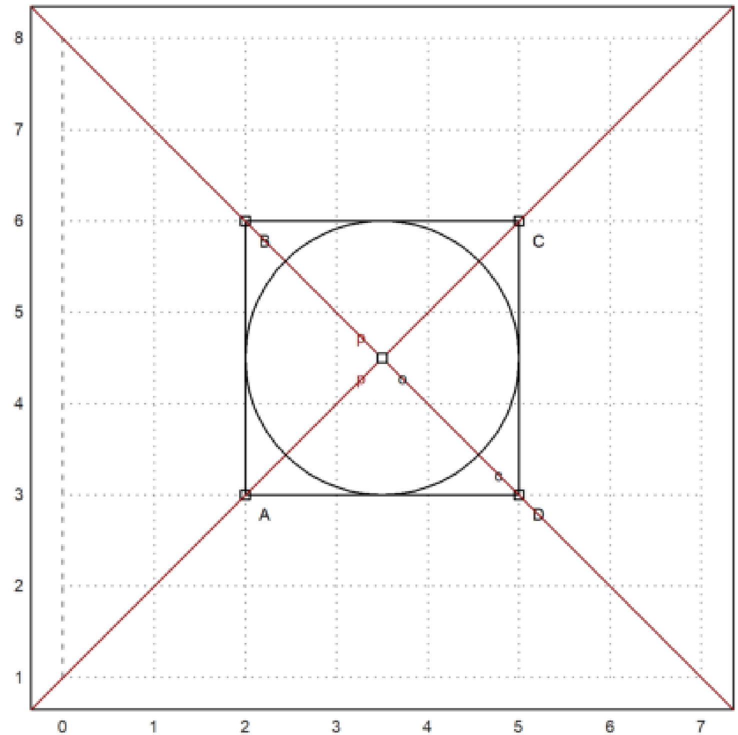

```
>r=angleBisector(A,B,C);
>m=angleBisector(B,C,D);
>o=lineIntersection(r,m);
>color(2); plotLine(r); plotLine(m); color(1);
>plotPoint(o,"o"):
```



Gambar di atas menunjukkan garis bagi sudutnya bertemu di satu titik yaitu titik o.

Gambar lingkaran dalam

```
>r = norm(o-projectToLine(o,lineThrough(A,B)));
>plotCircle(circleWithCenter(o,r)):
```



Melalui gambar di atas, benar bahwa segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung yang dapat digambar lingkaran di dalamnya.

Selanjutnya akan dibuktikan hasil kali sisi-sisi yang berhadapan sama.

Panjang semua sisi:

```
>AB=norm(A-B) // panjang sisi AB
```

3

```
>BC=norm(B-C) // panjang sisi BC
```

3

```
>CD=norm(C-D) // panjang sisi CD
```

3

```
>DA=norm(D-A) // panjang sisi DA
```

3

```
>AB*CD
```

9

```
>DA*BC
```

```
9
```

Terbukti hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Misal P = [-6,0] dan Q = [6,0]

```
>a = 10; C := [0,0]
```

```
[0,  0]
```

```
>P = [-6,0];
>Q = [6,0];
>d &= 2*c;
>d = distance(P,Q)
```

```
12
```

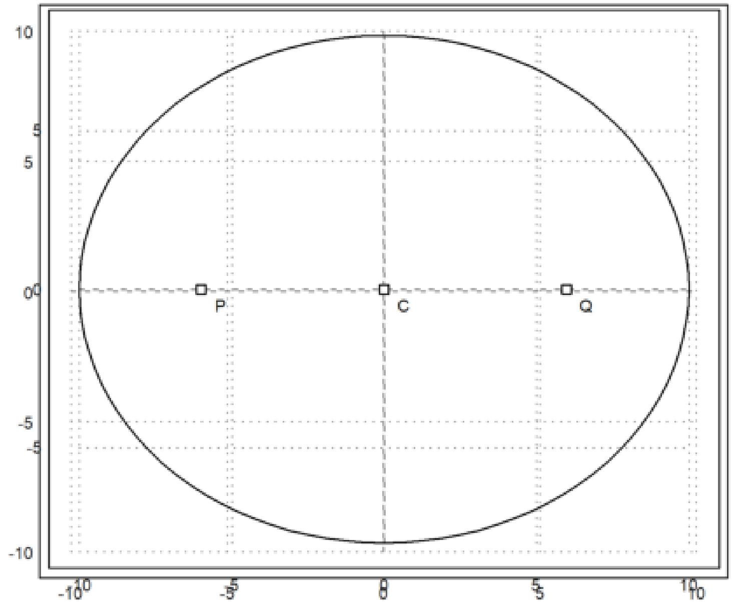
```
>c := d/2
```

6

```
>b := sqrt(a^2-c^2)
```

8

```
>t := linspace(0,2pi,100);
>x := a*cos(t);
>y := b*sin(t);
>setPlotRange(10);
>aspect(1.2); plot2d(x, y); plotPoint(P); plotPoint(Q); plotPoint(C):
```



5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Misal Hiperbola dengan fokus P[3,0] dan Q[-3,0] dan a adalah 4

```
>setPlotRange(20)
```

```
[-20,  20,  -20,  20]
```

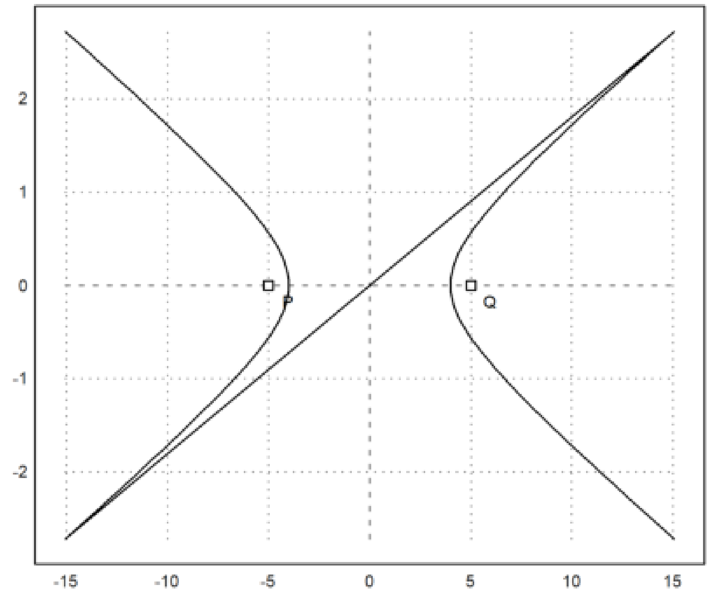
```
>a = 4; C = [0,0];
>P = [-5,0];
>Q = [5,0];
>d = distance(P,Q)
```

```
10
```

```
>c=d/2
```

```
5
```

```
>b = sqrt(c^2 - a^2);
>t := linspace(-2,2,100);
>x1 := a * cosh(t);
>x2 := -a * cosh(t);
>y := (b/a)*sinh(t);
>plot2d([x1, x2], [y, y]); plotPoint(P); plotPoint(Q):
```



[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Rasdiana Putri
NIM : 23030630033
Kelas : Matematika E

Di buku catatan ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, pengujian, dan distribusi di Euler.

Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukan pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan latar belakang untuk memahami detailnya.

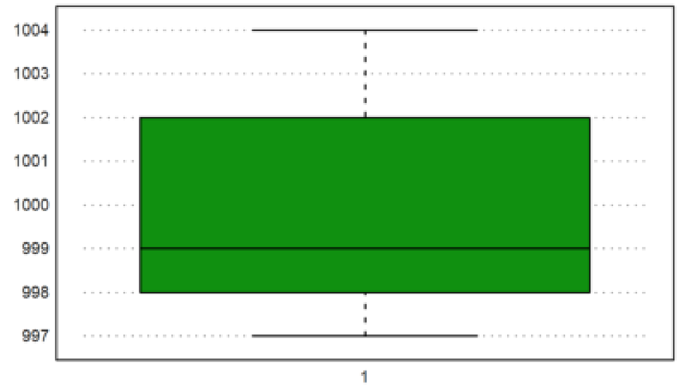
Asumsikan pengukuran berikut. Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan deviasi standar yang diukur.

```
>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...
>median(M), mean(M), dev(M),
```

```
999
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat memplot plot kotak-dan-kumis untuk datanya. Dalam kasus kami, tidak ada outlier.

```
>aspect(1.75); boxplot(M):
```



Kami menghitung probabilitas suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan asumsi nilai terukur berdistribusi normal.

Semua fungsi untuk distribusi di Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2}\ dt.$$

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi print.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

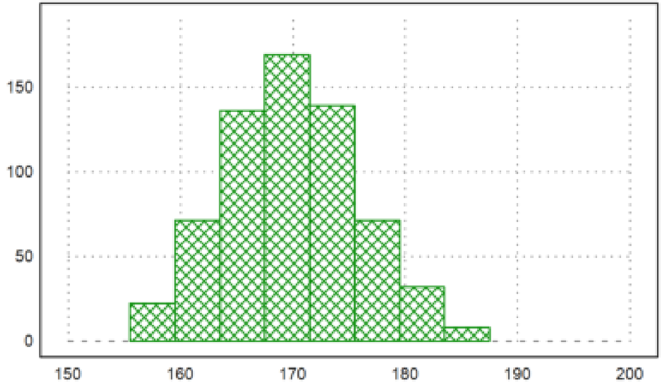
```
3.07 %
```

Untuk contoh berikutnya, kita asumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran tertentu.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut ini adalah plot distribusinya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="\/"):
```



Kita dapat memasukkan data mentah tersebut ke dalam tabel.

Tabel adalah sebuah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal rentang, akhir rentang, jumlah orang dalam rentang.

Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["BB","BA","Frek"])
```

```
        BB        BA      Frek
     155.5     159.5        22
     159.5     163.5        71
     163.5     167.5       136
     167.5     171.5       169
     171.5     175.5       139
     175.5     179.5        71
     179.5     183.5        32
     183.5     187.5         8
```

Jika kita memerlukan nilai rata-rata dan ukuran statistik lainnya, kita perlu menghitung titik tengah rentang tersebut. Kita bisa menggunakan dua kolom pertama tabel kita untuk ini.

Simbol "|" digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi "writetable" digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi "labc" untuk menentukan header kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
157.5
161.5
165.5
169.5
173.5
177.5
181.5
185.5
```

Tetapi akan lebih mudah, untuk melipat rentang dengan vektor [1/2,1/2].

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
[157.5,  161.5,  165.5,  169.5,  173.5,  177.5,  181.5,  185.5]
```

Sekarang kita dapat menghitung rata-rata dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

```
>{m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

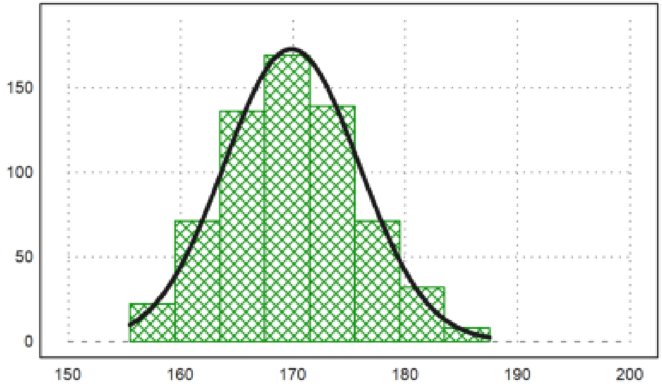
```
169.901234568
5.98912964449
```

Mari kita tambahkan distribusi normal dari nilai-nilai tersebut ke dalam diagram batang di atas. Rumus untuk distribusi normal dengan rata-rata m dan deviasi standar d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya antara 0 dan 1, untuk memplotnya pada diagram batang, nilai tersebut harus dikalikan dengan 4 kali jumlah data.

```
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
>  xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```



Dalam direktori buku catatan ini, Anda dapat menemukan file dengan tabel. Data tersebut merupakan hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama file tersebut. Datanya berasal dari buku online Jerman "Einführung in die Statistik mit R" oleh A. Handl.

```
>printfile("table.dat",4);
```

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.80 n
2 f 23 y g 1.80 n
3 f 26 y g 1.80 y
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kita ingin membaca tabel dari file. Pertama, kita menggunakan terjemahan kita sendiri untuk token-token tersebut.

Untuk ini, kita mendefinisikan kumpulan token. Fungsi strtokens() mendapatkan vektor string token dari string yang diberikan.

```
>mf:=["m","f"]; yn:=["y","n"]; ev:=strtokens("g vg m b vb");
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.

Argumen tok2, tok4, dan lain-lain adalah terjemahan dari kolom-kolom tabel. Argumen-argumen ini tidak ada dalam daftar parameter readtable(), jadi Anda perlu memberikannya dengan":=".

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
>load over statistics;
```

Untuk mencetak, kita perlu menentukan kumpulan token yang sama. Kami mencetak empat baris pertama saja.

```
>writetable(MT[1:10],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
  Person  Sex  Age Titanic Evaluation  Tip Problem
       1    m   30       n          .  1.8       n
       2    f   23       y          g  1.8       n
       3    f   26       y          g  1.8       y
       4    m   33       n          .  2.8       n
       5    m   37       n          .  1.8       n
       6    m   28       y          g  2.8       y
       7    f   31       y         vg  2.8       n
       8    m   23       n          .  0.8       n
       9    f   24       y         vg  1.8       y
      10    m   26       n          .  1.8       n
```

Titik "." mewakili nilai-nilai, yang tidak tersedia.

Jika kita tidak ingin menentukan token yang akan diterjemahkan terlebih dahulu, kita hanya perlu menentukan, kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

Fungsi readtable() sekarang mengembalikan satu set token.

```
>tok
```

```
m
n
f
y
g
vg
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan ke dalam angka.

String khusus NA = "." diartikan sebagai "Tidak Tersedia", dan mendapatkan NAN (bukan angka) di tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

```
>MT[1]
```

```
[1,  1,  30,  2,  NAN,  1.8,  2]
```

Berikut ini adalah isi tabel dengan angka yang tidak diterjemahkan.

```
>writetable(MT,wc=5)
```

```
    1    1   30    2    .  1.8    2
    2    3   23    4    5  1.8    2
    3    3   26    4    5  1.8    4
    4    1   33    2    .  2.8    2
    5    1   37    2    .  1.8    2
    6    1   28    4    5  2.8    4
    7    3   31    4    6  2.8    2
    8    1   23    2    .  0.8    2
    9    3   24    4    6  1.8    4
   10    1   26    2    .  1.8    2
   11    3   23    4    6  1.8    4
   12    1   32    4    5  1.8    2
   13    1   29    4    6  1.8    4
   14    3   25    4    5  1.8    4
   15    3   31    4    5  0.8    2
   16    1   26    4    5  2.8    2
   17    1   37    2    .  3.8    2
   18    1   38    4    5    .    2
   19    3   29    2    .  3.8    2
   20    3   28    4    6  1.8    2
   21    3   28    4    1  2.8    4
   22    3   28    4    6  1.8    4
   23    3   38    4    5  2.8    2
   24    3   27    4    1  1.8    4
   25    1   27    2    .  2.8    4
```

Untuk kenyamanan, Anda dapat memasukkan keluaran readtable() ke dalam daftar.

```
>Table={{readtable("table.dat",ctok=ctok)}};
```

Dengan menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. atau menggunakan tabel daftar.

```
>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);
```

```
   Person  Sex  Age Titanic Evaluation  Tip Problem
        1    m   30       n          .  1.8       n
        2    f   23       y          g  1.8       n
        3    f   26       y          g  1.8       y
        4    m   33       n          .  2.8       n
        5    m   37       n          .  1.8       n
        6    m   28       y          g  2.8       y
        7    f   31       y         vg  2.8       n
        8    m   23       n          .  0.8       n
        9    f   24       y         vg  1.8       y
       10    m   26       n          .  1.8       n
       11    f   23       y         vg  1.8       y
       12    m   32       y          g  1.8       n
       13    m   29       y         vg  1.8       y
       14    f   25       y          g  1.8       y
       15    f   31       y          g  0.8       n
       16    m   26       y          g  2.8       n
       17    m   37       n          .  3.8       n
       18    m   38       y          g    .       n
```

```
19    f    29         n           .  3.8        n
20    f    28         y          vg  1.8        n
21    f    28         y           m  2.8        y
22    f    28         y          vg  1.8        y
23    f    38         y           g  2.8        n
24    f    27         y           m  1.8        y
25    m    27         n           .  2.8        y
```

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom tabel, melewatkan baris apa pun dengan nilai NAN (”.” dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

We can use this to extract columns from the table for a new table.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

```
Person Evaluation       Tip
     2          g       1.8
     3          g       1.8
     6          g       2.8
     7         vg       2.8
     9         vg       1.8
    11         vg       1.8
    12          g       1.8
    13         vg       1.8
    14          g       1.8
```

```
15          g       0.8
16          g       2.8
20         vg       1.8
21          m       2.8
22         vg       1.8
23          g       2.8
24          m       1.8
```

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakannya untuk menentukan nilai rata-rata suatu kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT,6))
```

```
2.175
```

Fungsi getstatistics() mengembalikan elemen dalam vektor, dan jumlahnya. Kami menerapkannya pada nilai "m" dan "f" di kolom kedua tabel kami.

```
>{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count,
```

```
[1,  3]
[12,  13]
```

Kita dapat mencetak hasilnya di tabel baru.

```
>writetable(count',labr=tok[xu])
```

```
          m        12
          f        13
```

Fungsi selecttable() mengembalikan tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama kita mencari indeks dari dua nilai kita di tabel token.

```
>v:=indexof(tok,["g","vg"])
```

```
[5,  6]
```

Sekarang kita dapat memilih baris tabel, yang memiliki salah satu nilai v pada baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5);
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstraksi dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7);
```

```
 Person    Sex    Age Titanic Evaluation    Tip Problem
      2      f     23       y          g    1.8       n
      3      f     26       y          g    1.8       y
      6      m     28       y          g    2.8       y
     18      m     38       y          g      .       n
     16      m     26       y          g    2.8       n
     15      f     31       y          g    0.8       n
     12      m     32       y          g    1.8       n
     23      f     38       y          g    2.8       n
     14      f     25       y          g    1.8       y
      9      f     24       y         vg    1.8       y
      7      f     31       y         vg    2.8       n
     20      f     28       y         vg    1.8       n
     22      f     28       y         vg    1.8       y
     13      m     29       y         vg    1.8       y
     11      f     23       y         vg    1.8       y
```

Untuk statistik selanjutnya, kami ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kita ekstrak kolom 2 dan 4 dan urutkan tabelnya.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]);  ...
>  writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

```
         m         n
         m         n
         m         n
         m         n
         m         n
         m         n
         m         n
         m         y
         m         y
         m         y
         m         y
         m         y
         f         n
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
```

Dengan getstatistics(), kita juga bisa menghubungkan jumlah dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
>{xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

```
                 n         y
     m           7         5
     f           1        12
```

Sebuah tabel dapat ditulis ke file.

```
>filename="test.dat"; ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
```

Kemudian kita dapat membaca tabel dari file tersebut.

```
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
>writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

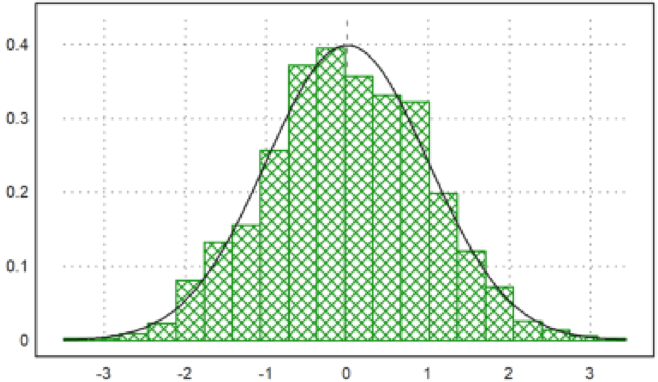
```
                 n         y
     m           7         5
     f           1        12
```

Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
```

Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot sebaran data eksperimen.

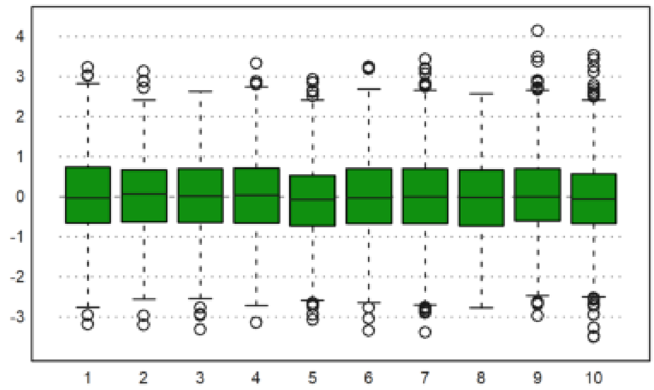
```
>p=normal(1,1000); //1000 random normal-distributed sample p
>plot2d(p,distribution=20,style="\/"); // plot the random sample p
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1): // add the standard normal distribution plot
```



Perlu diperhatikan perbedaan antara bar plot (sampel) dan kurva normal (distribusi sebenarnya). Masukkan kembali ketiga perintah untuk melihat hasil pengambilan sampel lainnya.

Berikut adalah perbandingan 10 simulasi dari 1000 nilai terdistribusi normal menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, serta outlier.

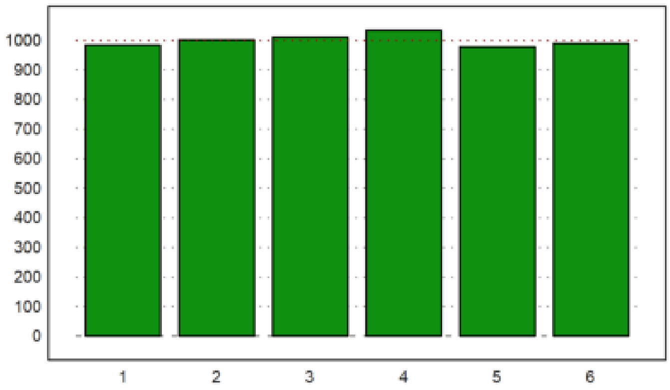
```
>p=normal(10,1000); boxplot(p):
```



Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki intrandom. Mari kita simulasikan lemparan dadu dan plot distribusinya.

Kita menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen v muncul di x. Kemudian kita plot hasilnya menggunakan columnsplot().

```
>k=intrandom(1,6000,6);  ...
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,k));  ...
>ygrid(1000,color=red):
```



Sementara intrandom(n,m,k) mengembalikan bilangan bulat yang terdistribusi secara seragam dari 1 hingga k, distribusi bilangan bulat lainnya dapat digunakan dengan randpint().

Dalam contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 masing-masing adalah 0,4,0.1,0.5.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

```
[378,  102,  520]
```

Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Lihat referensinya.

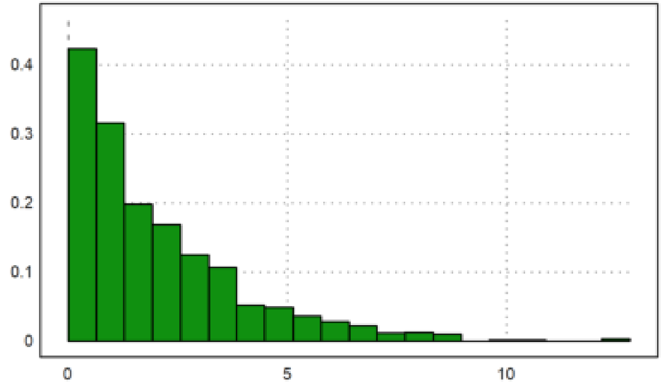
Misalnya, kita mencoba distribusi eksponensial. Variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

dengan parameter

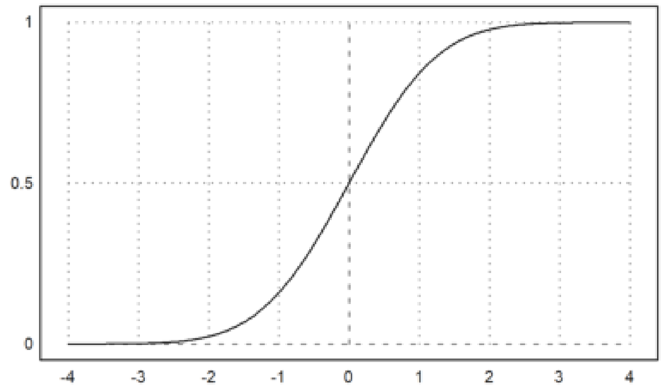
$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ is the mean, and denoted by } X \sim \text{Exponential}(\lambda).$$

```
>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):
```



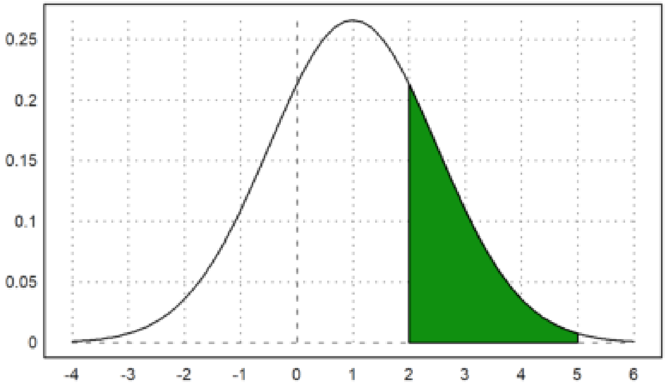
Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan inversnya.

```
>plot2d("normaldis",-4,4):
```



Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

```
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6);  ...
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):
```



$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2}\ dt.$$

Peluang berada di kawasan hijau adalah sebagai berikut.

```
>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)
```

```
0.248662156979
```

Ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut.

$$\int_2^5 \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{1.5}\right)^2}\, dx.$$

```
>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)
```

```
0.248662156979
```

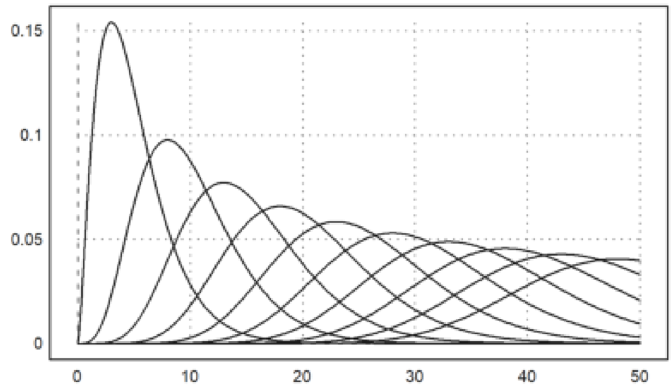
Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal yang mean dan deviasinya sama. Fungsi invbindis() menyelesaikan interpolasi linier antara nilai integer.

```
>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))
```

```
525.516721219
526.007419394
```

Fungsi qdis() adalah kepadatan distribusi chi-kuadrat. Seperti biasa, Euler memetakan vektor ke fungsi ini. Dengan demikian kita mendapatkan plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 sampai 30 dengan mudah dengan cara berikut.

```
>plot2d("qchidis(x,(5:5:50)')",0,50):
```



Euler memiliki fungsi akurat untuk mengevaluasi distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan integral.

Penamaannya mencoba untuk konsisten. Misalnya.,

- distribusi chi-kuadratnya adalah chidis(),
- fungsi kebalikannya adalah invchidis(),
- kepadatannya adalah qchidis().

Pelengkap distribusi (ekor atas) adalah chicdis().

```
>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)
```

```
0.527633447259
0.527633447259
```

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut.

Pertama kita atur fungsi distribusinya.

```
>wd = 0|((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6
```

```
[0,  0.165,  0.335,  0.5,  0.666667,  0.833333,  1]
```

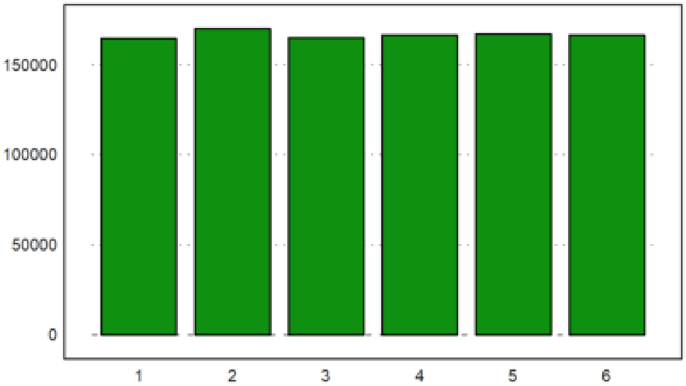
Artinya dengan probabilitas wd[i+1]-wd[i] kita menghasilkan nilai acak i.

Ini hampir merupakan distribusi yang seragam. Mari kita tentukan generator nomor acak untuk ini. Fungsi find(v,x) mencari nilai x pada vektor v. Fungsi ini juga berfungsi untuk vektor x.

```
>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))
```

Kesalahannya sangat halus sehingga kita hanya melihatnya dengan banyak iterasi.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):
```



Berikut adalah fungsi sederhana untuk memeriksa keseragaman distribusi nilai 1...K dalam v. Kita menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left|f_i - \frac{1}{K}\right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
K=max(v); n=cols(v);
fr=getfrequencies(v,1:K);
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
endfunction
```

Memang fungsinya menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1,1000000))
```

```
0
```

Dan ia menerima generator acak bawaan.

```
>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))
```

```
1
```

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama ada binomialsum(), yang mengembalikan probabilitas i atau kurang hit dari n percobaan.

```
>bindis(410,1000,0.4)
```

```
0.751401349654
```

Fungsi Beta terbalik digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Tingkat defaultnya adalah alfa.

Arti dari interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil pengamatan 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410,1000)
```

```
[0.37932,  0.441212]
```

Perintah berikut adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Namun untuk n yang besar, penjumlahan langsungnya tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i))
```

```
0.751401349655
```

Omong-omong, invbinsum() menghitung kebalikan dari binomialsum().

```
>invbindis(0.75,1000,0.4)
```

```
409.932733047
```

Di Bridge, kami mengasumsikan 5 kartu beredar (dari 52) di dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1, atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1,5,13,26)
```

```
0.321739130435
```

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```

```
        376        91       533
        417        80       503
        440        94       466
        406       112       482
        408        94       498
        395       107       498
        399        96       505
        428        87       485
        400        99       501
        373       109       518
```

Untuk memetakan data, kami mencoba hasil pemilu Jerman sejak tahun 1990, diukur dalam jumlah kursi.

```
>BW := [ ...
>1990,662,319,239,79,8,17; ...
>1994,672,294,252,47,49,30; ...
>1998,669,245,298,43,47,36; ...
>2002,603,248,251,47,55,2; ...
>2005,614,226,222,61,51,54; ...
>2009,622,239,146,93,68,76; ...
>2013,631,311,193,0,63,64];
```

Untuk pesta, kami menggunakan rangkaian nama.

```
>P:=["CDU/CSU","SPD","FDP","Gr","Li"];
```

Mari kita cetak persentasenya dengan baik.

Pertama kita mengekstrak kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah kursi seluruhnya. kolom adalah tahun pemilihan.

```
>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]';
```

Kemudian statistiknya kita cetak dalam bentuk tabel. Kami menggunakan nama sebagai header kolom, dan tahun sebagai header untuk baris. Lebar default untuk kolom adalah wc=10, tetapi kami lebih memilih keluaran yang lebih padat. Kolom akan diperluas untuk label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)
```

```
        CDU/CSU    SPD    FDP     Gr     Li
  1990       48     36     12      1      3
  1994       44     38      7      7      4
  1998       37     45      6      7      5
  2002       41     42      8      9      0
  2005       37     36     10      8      9
  2009       38     23     15     11     12
  2013       49     31      0     10     10
```

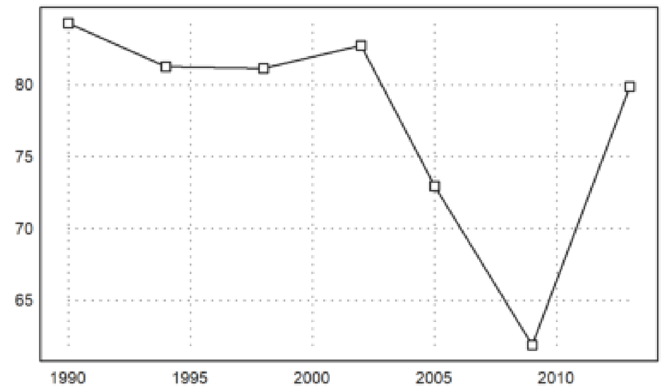
Perkalian matriks berikut ini menjumlahkan persentase dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil berhasil memperoleh suara di parlemen hingga tahun 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])'*100
```

```
[84.29,  81.25,  81.1659,  82.7529,  72.9642,  61.8971,  79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kami menggunakannya untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatifnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

```
>statplot(YT,BT1,"b"):
```

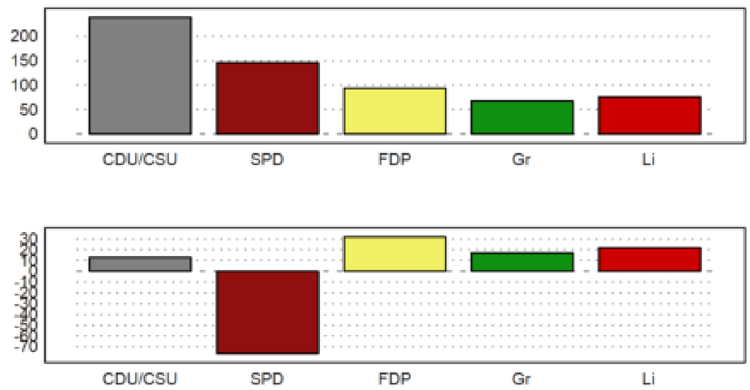


Tentukan beberapa warna untuk setiap partai.

```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

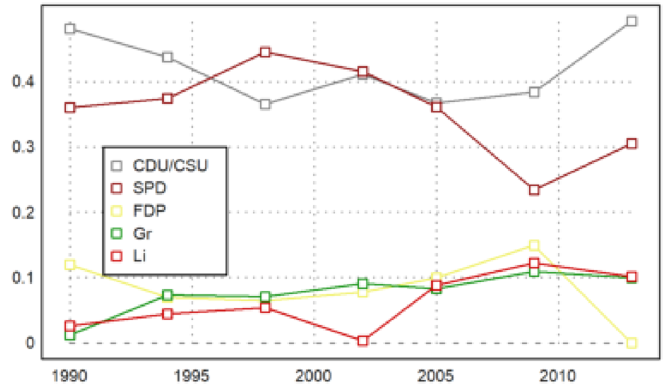
Sekarang kita bisa memplot hasil pemilu 2009 dan perubahannya menjadi satu plot dengan menggunakan gambar. Kita dapat menambahkan vektor kolom ke setiap plot.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
>figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP);  ...
>figure(0):
```



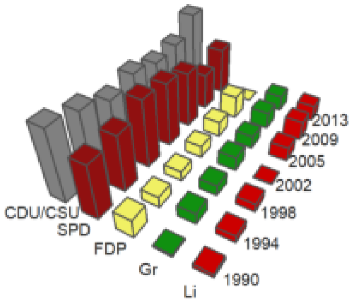
Plot data menggabungkan deretan data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]'; DP:=BW[,3:7]'; ...
>dataplot(YT,BT',color=CP);  ...
>labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):
```



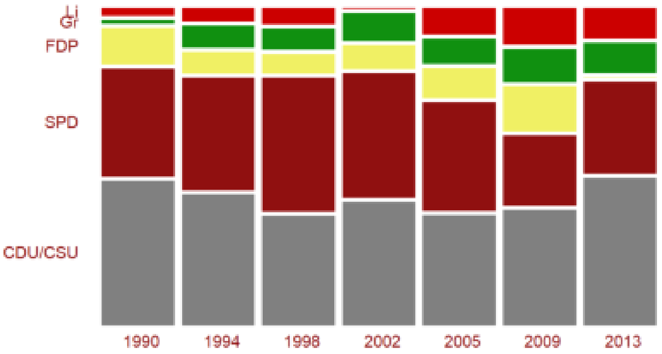
Plot kolom 3D memperlihatkan baris data statistik dalam bentuk kolom. Kami memberikan label untuk baris dan kolom. sudut adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, ...
>  angle=30°,ccols=CP):
```



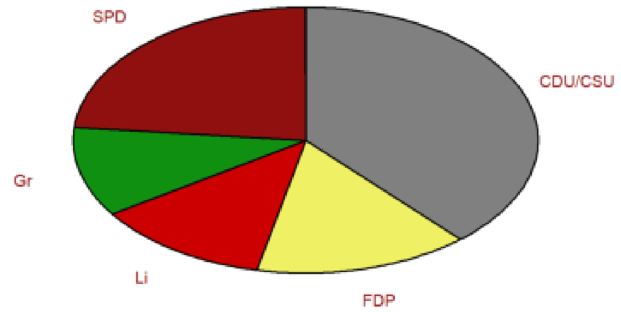
Representasi lainnya adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom plot mewakili kolom matriks di sini. Karena panjang label CDU/CSU, kami mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

```
>shrinkwindow(>smaller); ...
>mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#"); ...
>shrinkwindow():
```



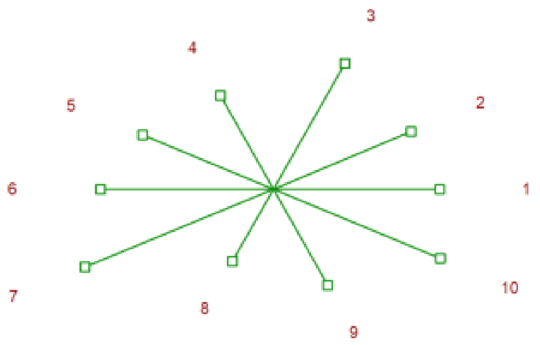
Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena hitam dan kuning membentuk koalisi, kami menyusun ulang elemen-elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```



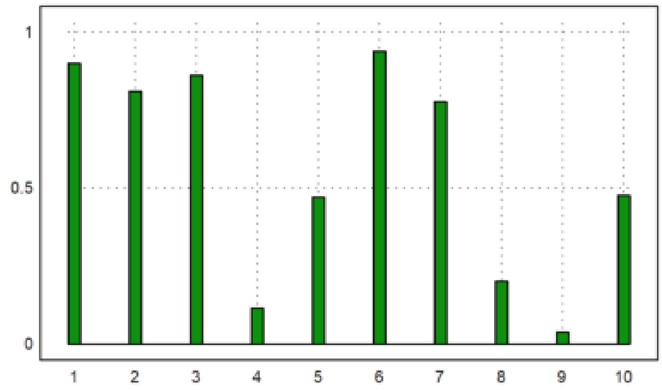
Ini adalah jenis plot lainnya.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):
```



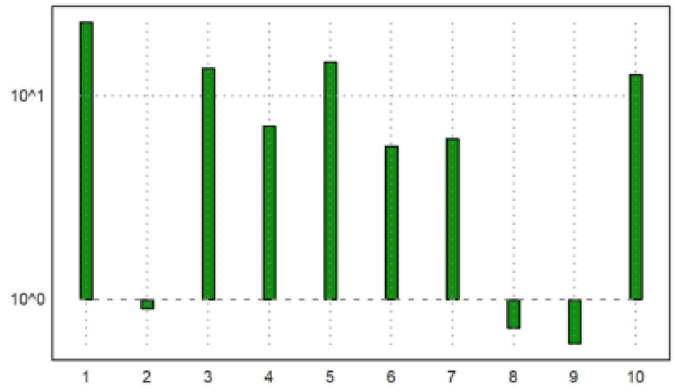
Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut adalah plot impuls dari data acak, terdistribusi secara seragam di [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):
```



Namun untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

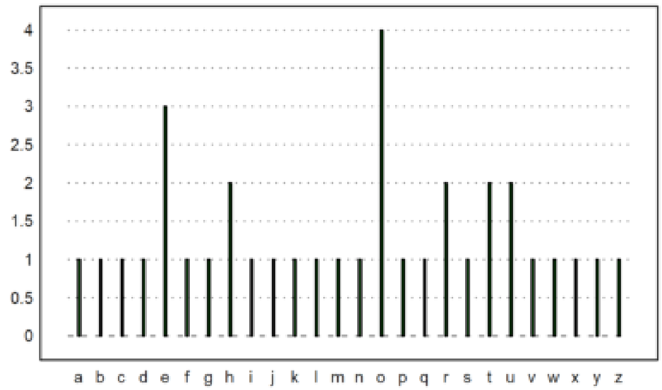
```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```



Fungsi columnsplot() lebih mudah digunakan, karena hanya memerlukan vektor nilai. Selain itu, ia dapat mengatur labelnya ke apa pun yang kita inginkan, kami telah mendemonstrasikannya di tutorial ini.

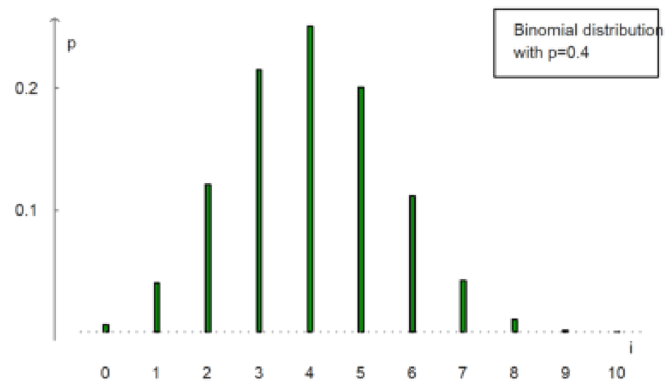
Ini adalah aplikasi lain, di mana kita menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan membuat statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
>w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
>cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
>columnsplot(x,lab=cw,width=0.05):
```



Dimungkinkan juga untuk mengatur sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i); ...
>columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
>yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
>label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
>textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```



Berikut ini cara memplot frekuensi bilangan dalam suatu vektor.

Kami membuat vektor bilangan acak bilangan bulat 1 hingga 6.

```
>v:=intrandom(1,10,10)
```

```
[8,  4,  1,  8,  5,  10,  2,  10,  2,  5]
```

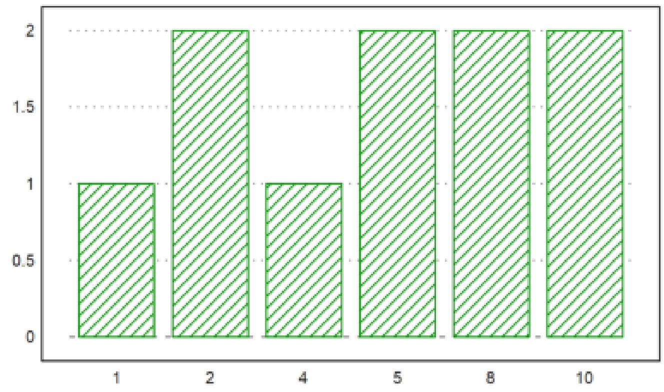
Kemudian ekstrak nomor unik di v.

```
>vu:=unique(v)
```

```
[1,  2,  4,  5,  8,  10]
```

Dan plot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):
```



Kami ingin mendemonstrasikan fungsi distribusi nilai empiris.

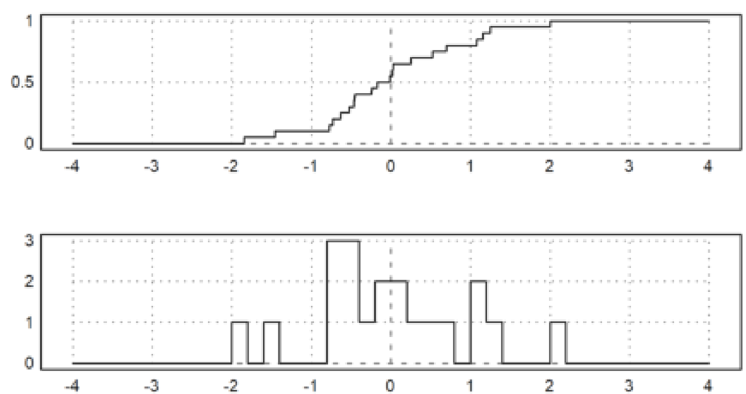
```
>x=normal(1,20);
```

Fungsi empdist(x,vs) memerlukan array nilai yang diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan x sebelum kita dapat menggunakannya.

```
>xs=sort(x);
```

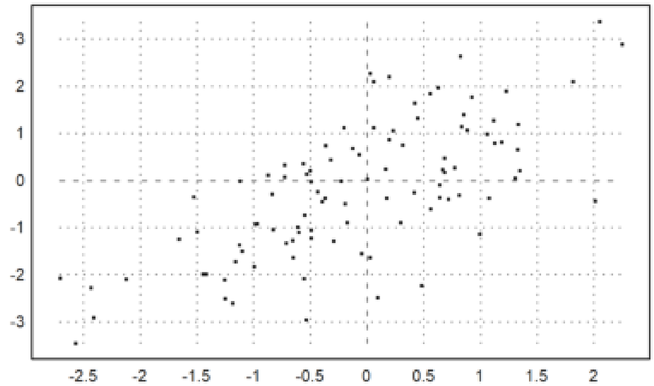
Kemudian kita plot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan ke dalam satu plot. Alih-alih plot batang untuk distribusi kali ini kami menggunakan plot gigi gergaji.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
>figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar));  ...
>figure(0):
```



Plot sebar mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut menunjukkan bahwa X dan X+Y jelas berkorelasi positif.

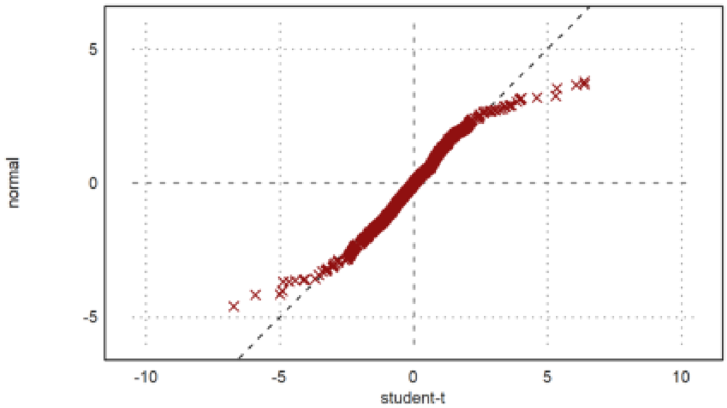
```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style=".."):
```



Seringkali kita ingin membandingkan dua sampel dengan distribusi yang berbeda. Hal ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.

Untuk pengujiannya, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
>plot2d("x",r=6,style="--",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
>plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



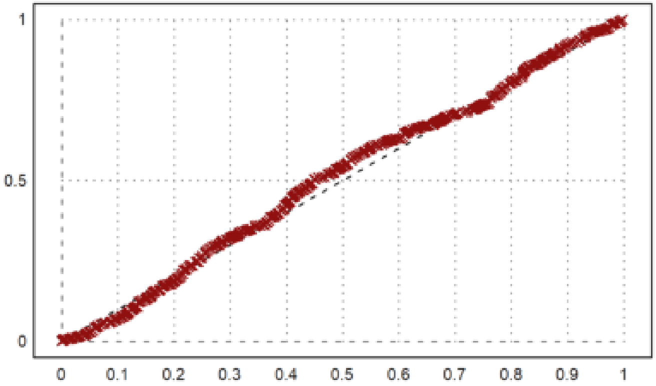
Plot tersebut dengan jelas menunjukkan bahwa nilai terdistribusi normal cenderung lebih kecil di ujung ekstrim.

Jika kita mempunyai dua distribusi yang ukurannya berbeda, kita dapat memperluas distribusi yang lebih kecil atau mengecilkan distribusi yang lebih besar. Fungsi berikut ini baik untuk keduanya. Dibutuhkan nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```

Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...
>plot2d("x",0,1,style="--"); ...
>plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi fit.

Sebagai permulaan kita menemukan garis regresi untuk data univariat dengan polyfit(x,y,1).

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x'|y',labc=["x","y"])
```

```
         x         y
         1         2
         2         3
         3         1
         4         5
         5         6
         6         3
         7         7
         8         8
         9         9
        10         8
```

Kami ingin membandingkan kecocokan yang tidak berbobot dan berbobot. Pertama koefisien kecocokan linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
[0.733333,  0.812121]
```

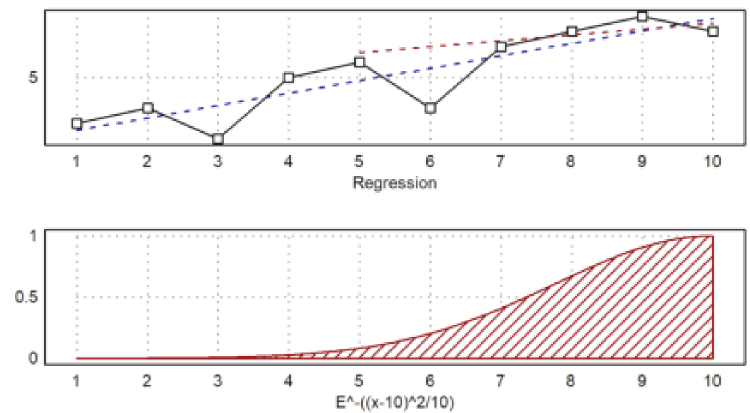
Sekarang koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```

```
[4.71566,  0.38319]
```

Kami memasukkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="--"); ...
>figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
>figure(0):
```



Contoh lain kita membaca survei siswa, usia mereka, usia orang tua mereka dan jumlah saudara kandung dari sebuah file.

Tabel ini berisi "m" dan "f" di kolom kedua. Kami menggunakan variabel tok2 untuk mengatur terjemahan yang tepat alih-alih membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahannya.

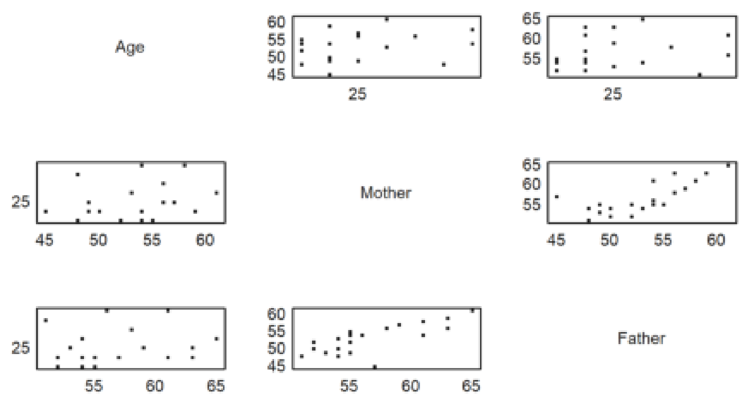
```
>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=["m","f"]);  ...
>writetable(MS,labc=hd,tok2:=["m","f"]);
```

Person	Sex	Age	Mother	Father	Siblings
1	m	29	58	61	1
2	f	26	53	54	2
3	m	24	49	55	1
4	f	25	56	63	3
5	f	25	49	53	0
6	f	23	55	55	2
7	m	23	48	54	2

8	m	27	56	58	1
9	m	25	57	59	1
10	m	24	50	54	1
11	f	26	61	65	1
12	m	24	50	52	1
13	m	29	54	56	1
14	m	28	48	51	2
15	f	23	52	52	1
16	m	24	45	57	1
17	f	24	59	63	0
18	f	23	52	55	1
19	m	24	54	61	2
20	f	23	54	55	1

Bagaimana usia bergantung satu sama lain? Kesan pertama muncul dari plot sebar berpasangan.

```
>scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]):
```



Jelas terlihat bahwa usia ayah dan ibu saling bergantung satu sama lain. Mari kita tentukan dan plot garis regresinya.

```
>cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1)
```

```
[17.3789,  0.740964]
```

Ini jelas merupakan model yang salah. Garis regresinya adalah s=17+0,74t, dengan t adalah umur ibu dan s adalah umur ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tapi tidak terlalu banyak.

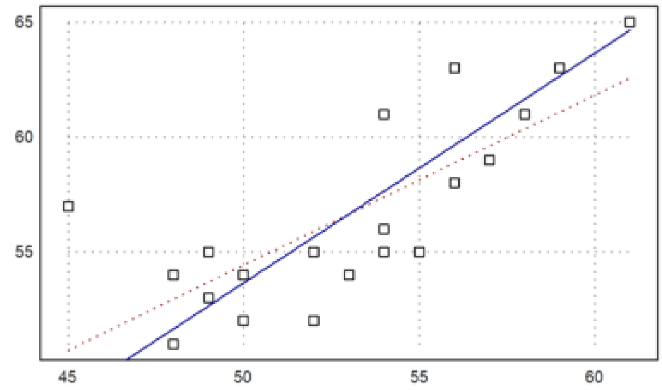
Sebaliknya, kami mencurigai fungsi seperti s=a+t. Maka a adalah mean dari s-t. Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

```
>da:=mean(cs[2]-cs[1])
```

```
3.65
```

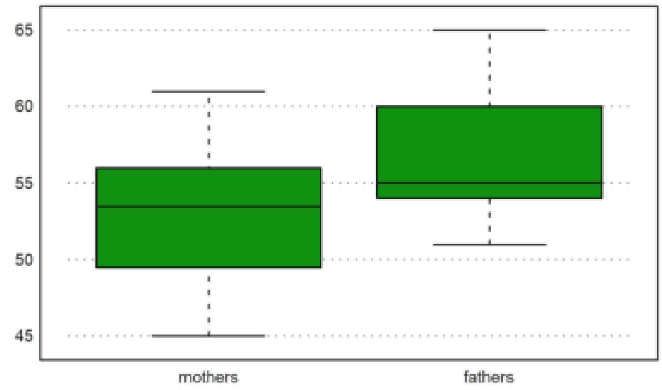
Mari kita plot ini menjadi satu plot sebar.

```
>plot2d(cs[1],cs[2],>points);  ...
>plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add);  ...
>plot2d("x+da",color=blue,>add):
```



Berikut adalah plot kotak dari dua zaman tersebut. Ini hanya menunjukkan, bahwa usianya berbeda-beda.

```
>boxplot(cs,["mothers","fathers"]):
```



Menariknya, perbedaan median tidak sebesar perbedaan mean.

```
>median(cs[2])-median(cs[1])
```

```
1.5
```

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>correl(cs[1],cs[2])
```

```
0.7588307236
```

Korelasi pangkat merupakan ukuran keteraturan yang sama pada kedua vektor. Hal ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1],cs[2])
```

```
0.758925292358
```

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi-fungsi baru. Misalnya, kita mendefinisikan fungsi skewness.

$$\mathrm{sk}(x) = \frac{\sqrt{n} \sum_i (x_i - m)^3}{\left(\sum_i (x_i - m)^2\right)^{3/2}}$$

dimana m adalah mean dari x.

```
>function skew (x:vector) ...
```

```
m=mean(x);
return sqrt(cols(x))*sum((x-m)^3)/(sum((x-m)^2))^(3/2);
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

```
0.479209399762
```

Berikut adalah fungsi lainnya, yang disebut koefisien skewness Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)
>skew1(data)
```

```
-0.241875313184
```

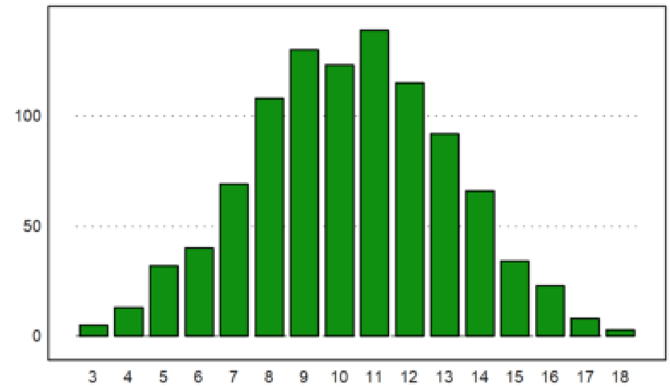
Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Ini satu lagi, yang mensimulasikan 1000 kali lemparan 3 dadu, dan menanyakan pembagian jumlahnya.

```
>ds:=sum(intrandom(1000,3,6))'; fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

```
 [5,  13,  32,  40,  69,  108,  130,  123,  139,  115,  92,  66,  34,
 23,  8,  3]
```

Kita bisa memplotnya sekarang.

```
>columnsplot(fs,lab=3:18):
```



Untuk menentukan distribusi yang diharapkan tidaklah mudah. Kami menggunakan rekursi tingkat lanjut untuk ini.

Fungsi berikut menghitung banyaknya cara bilangan k dapat direpresentasikan sebagai jumlah dari n bilangan dalam rentang 1 sampai m. Ia bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

```
>function map countways (k; n, m) ...
```

```
    if n==1 then return k>=1 && k<=m
    else
      sum=0;
      loop 1 to m; sum=sum+countways(k-#,n-1,m); end;
      return sum;
    end;
  endfunction
```

Berikut hasil pelemparan dadu sebanyak tiga kali.

```
>countways(5:25,5,5)
```

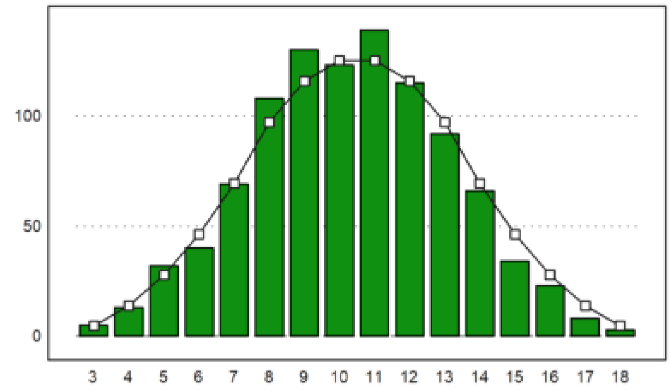
```
[1,  5,  15,  35,  70,  121,  185,  255,  320,  365,  381,  365,  320,
255,  185,  121,  70,  35,  15,  5,  1]
```

```
>cw=countways(3:18,3,6)
```

```
[1,  3,  6,  10,  15,  21,  25,  27,  27,  25,  21,  15,  10,  6,  3,
1]
```

Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

```
>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):
```



Untuk simulasi lain, deviasi nilai rata-rata n 0-1-variabel acak terdistribusi normal adalah 1/sqrt(n).

```
>longformat; 1/sqrt(10)
```

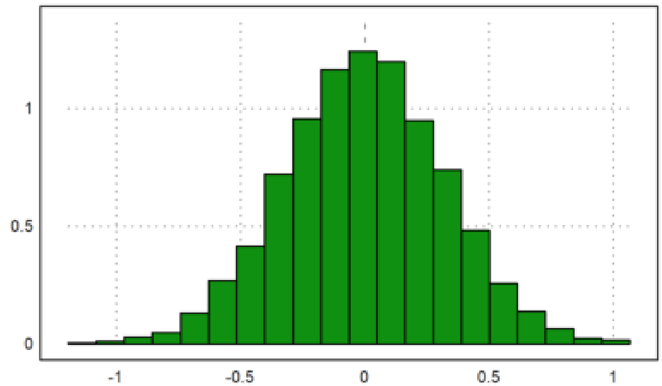
```
0.316227766017
```

Mari kita periksa ini dengan simulasi. Kami menghasilkan 10000 kali 10 vektor acak.

```
>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')
```

```
0.318932043078
```

```
>plot2d(mean(M)',>distribution):
```



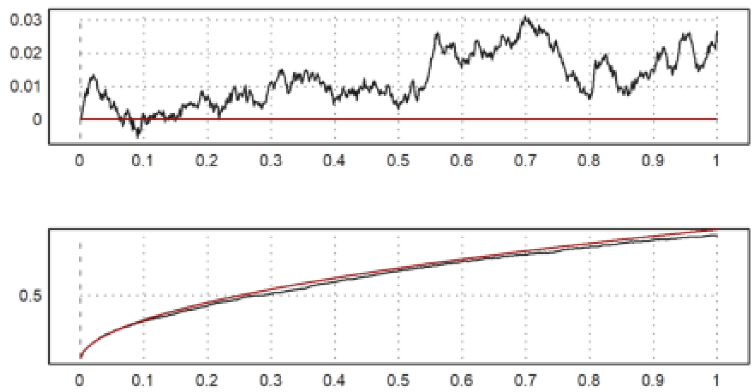
Median dari 10 bilangan acak berdistribusi normal 0-1 mempunyai deviasi yang lebih besar.

```
>dev(median(M)')
```

```
0.376712244247
```

Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot deviasi standar dan rata-rata langkah ke-n dari proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan berwarna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
>t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d(t,mean(M')'); plot2d(t,0,color=red,>add); ...
>figure(2); plot2d(t,dev(M')'); plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
>figure(0):
```



Tes adalah alat penting dalam statistik. Di Euler, banyak tes yang diterapkan. Semua pengujian ini mengembalikan kesalahan yang kita terima jika kita menolak hipotesis nol.

Misalnya, kami menguji lemparan dadu untuk distribusi yang seragam. Pada 600 kali lemparan, kami mendapatkan nilai berikut, yang kami masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

```
0.498830517952
```

Uji chi-kuadrat juga memiliki mode yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistiknya. Hasilnya seharusnya hampir sama. Parameter >p menafsirkan vektor y sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

```
0.492
```

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak bisa menolak pemerataan. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kita adil. Tapi kita tidak bisa menolak hipotesis kita.

Selanjutnya kita menghasilkan 1000 lemparan dadu menggunakan generator angka acak, dan melakukan tes yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

```
0.254801014515
```

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...
>ttest(mean(s),dev(s),100,200)
```

```
0.27961149542
```

Fungsi ttest() memerlukan nilai mean, deviasi, jumlah data, dan nilai mean yang akan diuji.

Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk mean yang sama. Kami menolak hipotesis bahwa keduanya mempunyai mean yang sama, jika hasilnya <0.05.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10))
```

```
0.0972316266208
```

Jika kita menambahkan bias pada satu distribusi, kita akan mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10)+2)
```

```
6.54093758712e-07
```

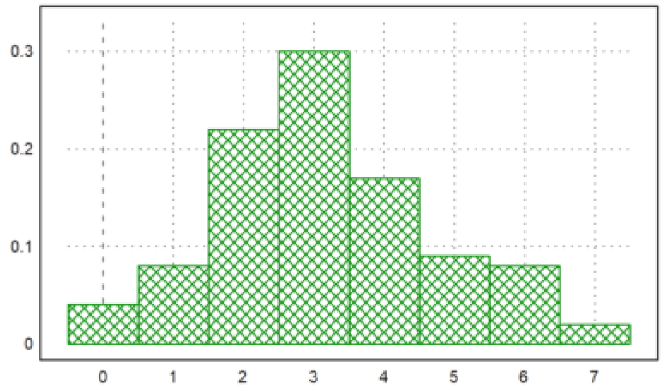
Pada contoh berikutnya, kita membuat 20 lemparan dadu acak sebanyak 100 kali dan menghitung yang ada di dalamnya. Rata-rata harus ada 20/6=3,3.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1)'; mean(R)
```

```
3.17
```

Sekarang kita bandingkan jumlah satuan dengan distribusi binomial. Pertama kita plot distribusinya.

```
>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\/"):
```




```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n*(5/6)^(20-n)*100;
```

Kita harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
>b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-square menolak hipotesis bahwa distribusi kita merupakan distribusi binomial, jika hasilnya <0.05.

```
>chitest(t1,b1)
```

```
0.568502742036
```

Contoh berikut berisi hasil dua kelompok orang (misalnya laki-laki dan perempuan) yang memilih satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76];  ...
>  writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
           1     2     3     4     5     6
     m    23    37    43    52    64    74
     f    27    39    41    49    63    76
```

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Uji tabel chi^2 melakukan hal ini. Dampaknya terlalu besar untuk menolak kemerdekaan. Jadi kita tidak bisa bilang, kalau voting tergantung jenis kelamin dari data tersebut.

```
>tabletest(A)
```

```
0.990701632326
```

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
           1     2     3     4     5     6
    m   24.9  37.9  41.9  50.3  63.3  74.7
    f   25.1  38.1  42.1  50.7  63.7  75.3
```

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang dikoreksi. Karena sangat mendekati 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak bergantung pada jenis kelamin.

```
>contingency(A)
```

```
0.0427225484717
```

Selanjutnya kita menggunakan analisis varians (uji F) untuk menguji tiga sampel data yang berdistribusi normal untuk nilai mean yang sama. Metode tersebut disebut ANOVA (analisis varians). Di Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

```
>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),
```

```
106.545454545
```

```
>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),
```

```
119.111111111
```

```
>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)
```

```
116.3
```

```
>varanalysis(x1,x2,x3)
```

```
0.0138048221371
```

Artinya, kami menolak hipotesis nilai mean yang sama. Kami melakukan ini dengan probabilitas kesalahan 1,3%.

Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata yang berbeda, menguji median dari sampel yang disatukan.

```
>a=[56,66,68,49,61,53,45,58,54];
>b=[72,81,51,73,69,78,59,67,65,71,68,71];
>mediantest(a,b)
```

```
0.0241724220052
```

Tes kesetaraan lainnya adalah tes peringkat. Ini jauh lebih tajam daripada tes median.

```
>ranktest(a,b)
```

```
0.00199969612469
```

Pada contoh berikut, kedua distribusi mempunyai mean yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

```
0.453978735731
```

Sekarang mari kita coba mensimulasikan dua perlakuan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0,7.4,5.9,9.4,8.6,8.2,7.6,8.1,6.2,8.9];
>b=[6.8,7.1,6.8,8.3,7.9,7.2,7.4,6.8,6.8,8.1];
```

Tes signum memutuskan, apakah a lebih baik dari b.

```
>signtest(a,b)
```

```
0.0546875
```

Ini kesalahan yang terlalu besar. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.

Uji Wilcoxon lebih tajam dibandingkan uji ini, namun mengandalkan nilai kuantitatif perbedaannya.

```
>wilcoxon(a,b)
```

```
0.0296680599405
```

Mari kita coba dua tes lagi menggunakan rangkaian yang dihasilkan.

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

```
0.13136112342
```

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

```
0.195266435017
```

Berikut ini adalah pengujian pembangkit bilangan acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan adanya masalah.

Pertama kita menghasilkan sepuluh juta angka acak di [0,1].

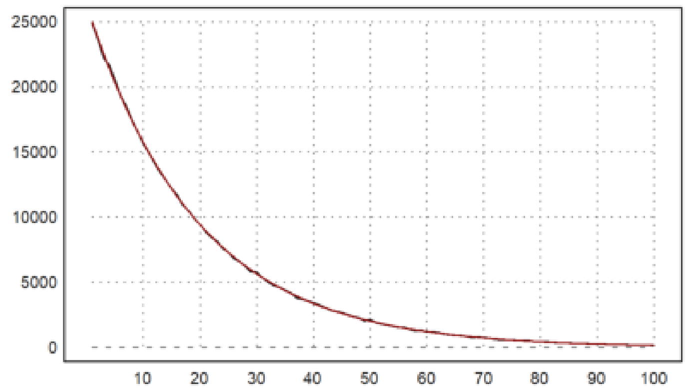
```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

Selanjutnya kita hitung jarak antara dua angka yang kurang dari 0.05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Terakhir, kami memplot berapa kali, setiap jarak terjadi, dan membandingkannya dengan nilai yang diharapkan.

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...
>  plot2d("n*(1-a)^(x-1)*a^2",color=red,>add):
```



Hapus datanya.

```
>remvalue n;
```

Pengantar untuk Pengguna Proyek R

Jelasnya, EMT tidak bersaing dengan R sebagai paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Bagaimanapun, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Notebook ini cocok untuk Anda yang sudah familiar dengan R, namun perlu mengetahui perbedaan sintaksis EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran umum tentang hal-hal yang sudah jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami mencari cara untuk bertukar data antara kedua sistem.

Perhatikan bahwa ini masih dalam proses.

Sintaks Dasar

Hal pertama yang Anda pelajari di R adalah membuat vektor. Dalam EMT, perbedaan utamanya adalah operator : dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, ia mempunyai daya ikat yang rendah.

```
>n=10; 0:n/20:n-1
```

```
 [0,  0.5,  1,  1.5,  2,  2.5,  3,  3.5,  4,  4.5,  5,  5.5,  6,  6.5,
 7,  7.5,  8,  8.5,  9]
```

Fungsi c() tidak ada. Dimungkinkan untuk menggunakan vektor untuk menggabungkan sesuatu.

Contoh berikut, seperti banyak contoh lainnya, berasal dari ”Interoduksi ke R” yang disertakan dengan proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti jalurnya dalam tutorial ini.

```
>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
 [10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  0,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT digantikan oleh fungsi seq() di R. Kita dapat menulis fungsi ini di EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
>seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0,  -0.1,  -0.2,  -0.3,  -0.4,  -0.5,  -0.6,  -0.7,  -0.8,  -0.9,  -1]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada di EMT. Untuk masukan vektor dapat dituliskan sebagai berikut.

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...
>rep(x,2)
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Perhatikan bahwa "=" atau ":=" digunakan untuk tugas. Operator "->" digunakan untuk satuan dalam EMT.

```
>125km -> " miles"
```

```
77.6713990297 miles
```

Operator ”<-” untuk penugasan memang menyesatkan, dan bukan ide yang baik untuk R. Berikut ini akan membandingkan a dan -4 di EMT.

```
>a=2; a<-4
```

```
0
```

Di R, ”a<-4<3” berfungsi, tetapi ”a<-4<-3” tidak. Saya juga memiliki ambiguitas serupa di EMT, tetapi saya mencoba menghilangkannya sedikit demi sedikit.

EMT dan R memiliki vektor bertipe boolean. Namun dalam EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk mewakili salah dan benar. Di R, nilai benar dan salah tetap bisa digunakan dalam aritmatika biasa seperti di EMT.

```
>x<5, %*x
```

```
[0,  0,  1,  0,  0]
[0,  0,  3.1,  0,  0]
```

EMT memunculkan kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada tanda ”errors”.

```
>errors off; 0/0, isNAN(sqrt(-1)), errors on;
```

```
NAN
1
```

Stringnya sama di R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.

Di R ada paket untuk Unicode. Di EMT, string dapat berupa string Unicode. String unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u"..." dapat berisi entitas HTML.

```
>u"&#169; Ren&eacut; Grothmann"
```

```
© René Grothmann
```

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar pada sistem Anda sebagai A dengan titik dan garis di atasnya. Itu tergantung pada font yang Anda gunakan.

```
>chartoutf([480])
```

Penggabungan string dilakukan dengan "+" atau "|". Ini dapat mencakup angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

```
>"pi = "+pi
```

```
pi = 3.14159265359
```

Seringkali, ini akan berfungsi seperti di R.

Namun EMT akan menafsirkan indeks negatif dari belakang vektor, sedangkan R menafsirkan x[n] sebagai x tanpa elemen ke-n.

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
[10.4,  5.6,  3.1]
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan drop().

```
>drop(x,2)
```

```
[10.4,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Vektor logika tidak diperlakukan berbeda sebagai indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda perlu mengekstrak elemen bukan nol terlebih dahulu di EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
[1,  1,  0,  1,  1]
[10.4,  5.6,  6.4,  21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
>x[[1,2,2,1]]
```

```
[10.4,  5.6,  5.6,  10.4]
```

Namun penamaan indeks tidak dimungkinkan di EMT. Untuk paket statistik, hal ini sering kali diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen vektor.

Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan suatu fungsi sebagai berikut.

```
>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ...
>s=["first","second","third","fourth"]; sel(x,["first","third"],s)
```

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
             ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
             ^
[10.4,  3.1]
```

EMT memiliki lebih banyak tipe data tetap daripada R. Jelasnya, di R terdapat vektor yang berkembang. Anda dapat mengatur vektor numerik kosong v dan memberikan nilai ke elemen v[17]. Hal ini tidak mungkin dilakukan di EMT.

Berikut ini agak tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

EMT sekarang akan membuat vektor dengan v dan i ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor tersebut kembali ke variabel global v.

Semakin efisien vektor telah ditentukan sebelumnya.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah tipe tanggal di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti complex().

```
>complex(1:4)
```

```
 [ 1+0i ,  2+0i ,  3+0i ,  4+0i  ]
```

Konversi ke string hanya dimungkinkan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk penggabungan string sederhana. Tapi ada fungsi seperti print() atau frac().

Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
s="[";
loop 1 to length(v);
   s=s+print(v[#],2,0);
   if #<length(v) then s=s+","; endif;
end;
return s+"]";
endfunction
```

```
>tostr(linspace(0,1,10))
```

```
[0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, terdapat fungsi convertmxm(), yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk output.

```
>convertmxm(1:10)
```

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Latex perintah tex dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

```
>tex(&[1,2,3])
```

```
\left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

Dalam pengantar R ada contoh yang disebut faktor.

Berikut ini adalah daftar wilayah 30 negara bagian.

```
>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...
>"qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...
>"sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...
>"sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];
```

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
>61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
>59, 46, 58, 43];
```

Sekarang, kami ingin menghitung rata-rata pendapatan di suatu wilayah. Menjadi program statistik, R memiliki faktor() dan tappy() untuk ini.

EMT dapat melakukan hal ini dengan menemukan indeks wilayah dalam daftar wilayah unik.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Pada titik itu, kita dapat menulis fungsi perulangan kita sendiri untuk melakukan sesuatu hanya untuk satu faktor.

Atau kita bisa meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

```
>function map tappl (i; f$:call, cat, x) ...
```

```
u=sort(unique(cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

Ini agak tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berhasil.

```
>tappl(auterr,"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333,  55.5,  53.6,  55,  60.5,  56,  52.25]
```

Perhatikan bahwa ini berfungsi untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappl(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti di R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.

Sehingga kita bisa mencetak rata-rata pendapatan negara di daerah secara bersahabat.

```
>writetable(tappl(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

Kita juga bisa mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.

Faktor-faktor tersebut harus disimpan dengan jelas dalam kumpulan beserta jenis dan kategorinya (negara bagian dan teritori dalam contoh kita). Untuk EMT, kami menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef (t) ...
```

```
## Factor data
## Returns a collection with data t, unique data, indices.
## See: tapply
u=sort(unique(t));
return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
endfunction
```

```
>statef=makef(austates);
```

Sekarang elemen ketiga dari koleksi akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Sekarang kita bisa meniru tapply() dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...
```

```
## Makes a table of data and factors
## tf : output of makef()
## See: makef
uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
for i=1 to length(uf);
   ind=nonzeros(f==i);
   if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
   else x[i]=f$(t[ind]);
   endif;
end;
return {{x,uf}};
endfunction
```

Kami tidak menambahkan banyak pengecekan tipe di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan menyangkut kategori (faktor) yang tidak memiliki data. Tetapi kita harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran pengumpulan tf.

Tabel ini dapat dicetak sebagai tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe datanya disebut matriks. Namun, akan mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau perpustakaan C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Di R array adalah vektor dengan bidang dimensi.

Dalam EMT, vektor adalah matriks dengan satu baris. Itu dapat dibuat menjadi matriks dengan redim().

```
>shortformat; X=redim(1:20,4,5)
```

```
      1         2         3         4         5
      6         7         8         9        10
     11        12        13        14        15
     16        17        18        19        20
```

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, mirip dengan R.

```
>X[,2:3]
```

```
      2         3
      7         8
     12        13
     17        18
```

Namun, di R dimungkinkan untuk menyetel daftar indeks vektor tertentu ke suatu nilai. Hal yang sama mungkin terjadi di EMT hanya dengan satu putaran.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```
loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
   M[i{#},j{#}] = v{#};
end;
endfunction
```

Kami mendemonstrasikan hal ini untuk menunjukkan bahwa matriks dilewatkan dengan referensi di EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks M asli, Anda perlu menyalinnya ke dalam fungsi.

```
>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,
```

```
          1           2           0           4           5
          6           0           8           9          10
          0          12          13          14          15
         16          17          18          19          20
```

Perkalian luar dalam EMT hanya dapat dilakukan antar vektor. Ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus berupa vektor kolom dan vektor lainnya harus berupa vektor baris.

```
>(1:5)*(1:5)'
```

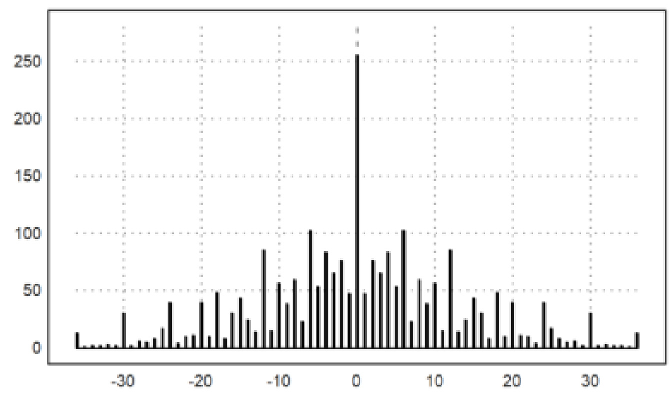
```
       1         2         3         4         5
       2         4         6         8        10
       3         6         9        12        15
       4         8        12        16        20
       5        10        15        20        25
```

Dalam PDF pendahuluan untuk R terdapat contoh yang menghitung distribusi ab-cd untuk a,b,c,d yang dipilih dari 0 hingga n secara acak. Solusi dalam R adalah membentuk matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.

Tentu saja, hal ini dapat dicapai dengan satu putaran. Tapi loop tidak efektif di EMT atau R. Di EMT, kita bisa menulis loop di C dan itu akan menjadi solusi tercepat.

Namun kita ingin meniru perilaku R. Untuk melakukannya, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat matriks ab-cd.

```
>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
>u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
>statplot(u,f,"h"):
```



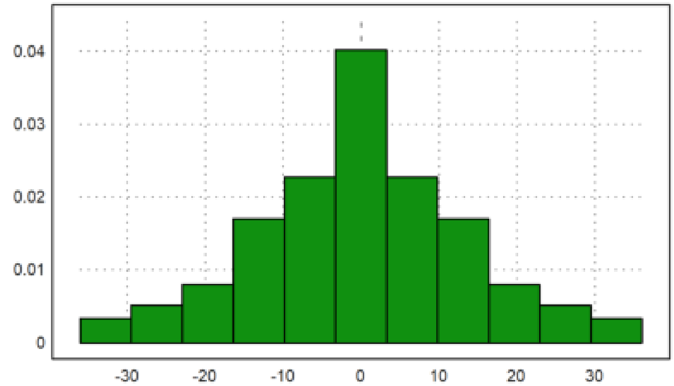
Selain multiplisitas eksak, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

```
>getfrequencies(q,-50:10:50)
```

```
[0,  23,  132,  316,  602,  801,  333,  141,  53,  0]
```

Cara paling mudah untuk memplotnya sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

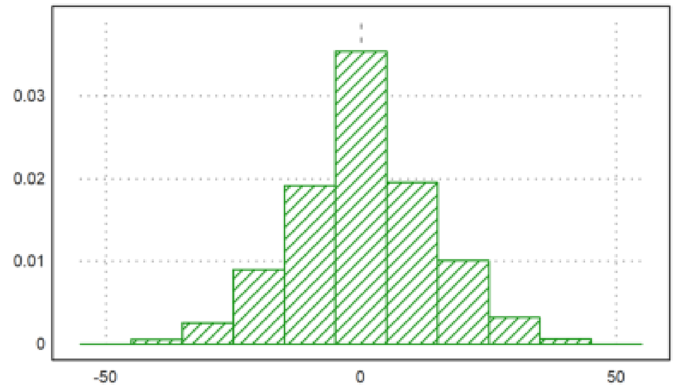
```
>plot2d(q,distribution=11):
```



Namun dimungkinkan juga untuk menghitung terlebih dahulu penghitungan dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.

Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

```
>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...
>plot2d(x,y,>bar,style="/"):
```


0.03
0.02
0.01
0
-50
0
50

List

EMT memiliki dua jenis daftar. Salah satunya adalah daftar global yang bisa berubah, dan yang lainnya adalah tipe daftar yang tidak bisa diubah. Kami tidak peduli dengan daftar global di sini.

Tipe daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi di EMT. Ini berperilaku seperti struktur di C, tetapi elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

```
>L={{"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]}}
```

```
Fred
Flintstone
40
[1990,  1992]
```

Saat ini unsur-unsur tersebut tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Mereka diakses dengan nomor.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```

File Input dan Output (Membaca dan Menulis Data)

Anda sering kali ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini memberi tahu Anda tentang banyak cara untuk mencapai hal ini. Fungsi sederhananya adalah writematrix() dan readmatrix().

Mari kita tunjukkan cara membaca dan menulis vektor real ke file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.50211
0.29459
```

Untuk menulis data ke file, kita menggunakan fungsi writematrix().

Karena pengenalan ini kemungkinan besar ada di direktori, di mana pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori home pengguna. Untuk buku catatan sendiri, hal ini tidak diperlukan, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita menulis vektor kolom a' ke file. Ini menghasilkan satu nomor di setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename);
```

Untuk membaca data, kami menggunakan readmatrix().

```
>a=readmatrix(filename)';
```

Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
>mean(a), dev(a),
```

```
0.50211
0.29459
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.

Misalnya, jika Anda memiliki sistem Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda memerlukan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan dengan titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan koma). File berikut "test.csv" akan muncul di folder saat ini Anda.

```
>filename="test.csv"; ...
>writematrix(random(5,3),file=filename,separator=",");
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel bahasa Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut.

```
>s1:="f m m f m m m f f f m m f";  ...
>s2:="f f f m m f f";
```

Untuk melakukan tokenisasi ini, kami mendefinisikan vektor token.

```
>tok:=["f","m"]
```

```
f
m
```

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))_ ...
>  getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Tulis tabel dengan header token.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

```
               f       m
       1       6       7
       2       5       2
```

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...
>writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...
>close();
```

Filenya terlihat seperti ini.

```
>printfile(file)
```

```
A,B,C
0.7906038030988179,0.4803433189304462,0.01562723532706266
0.5322177080616844,0.6195470335248382,0.7709411906683823
0.09018286162314156,0.2018229850358114,0.1390461869625961
```

Fungsi readtable() dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan kumpulan nilai dan baris judul.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke buku catatan, atau ke file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```

```
         A         B         C
    0.7906   0.48034   0.01563
   0.53222   0.61955   0.77094
   0.09018   0.20182   0.13905
```

Matriks nilai adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa mean() di EMT menghitung nilai rata-rata baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
 0.42886
  0.6409
 0.14368
```

Pertama, mari kita menulis matriks ke dalam file. Untuk outputnya, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv"; ...
>M=random(3,3); writematrix(M,file);
```

Berikut isi file ini.

```
>printfile(file)
```

```
0.8564087263283979,0.3912878540621454,0.864831054820977
0.7128229805221564,0.1952340908324801,0.01590601557493737
0.825825089679627,0.5991820585590205,0.7960280262224293
```

CVS ini dapat dibuka pada sistem berbahasa Inggris ke Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu di sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal.

Namun titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca matriks dari file dengan readmatrix().

```
>readmatrix(file)
```

```
    0.85641          0   0.39129          0   0.86483
    0.71282          0   0.19523          0  0.015906
    0.82583          0   0.59918          0   0.79603
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke satu file. Perintah open() dapat membuka file untuk ditulis dengan parameter ”w”. Standarnya adalah ”r” untuk membaca.

```
>open(file,"w"); writematrix(M); writematrix(M'); close();
```

Matriks dipisahkan oleh garis kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil readmatrix() beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

```
          1          1          0          1          0
          0          1          1          1          0
          0          1          0          1          1
```

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan koma). Di Excel 2007, gunakan "save as" dan "other format", lalu pilih "CSV". Pastikan tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.

Ini sebuah contoh.

```
>printfile("excel-data.csv")
```

```
0;1000;1000
1;1051,271096;1072,508181
2;1105,170918;1150,273799
3;1161,834243;1233,67806
4;1221,402758;1323,129812
5;1284,025417;1419,067549
6;1349,858808;1521,961556
7;1419,067549;1632,31622
8;1491,824698;1750,6725
9;1568,312185;1877,610579
10;1648,721271;2013,752707
```

Seperti yang Anda lihat, sistem bahasa Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubahnya di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi hal ini tidak diperlukan untuk membaca matriks menjadi EMT.

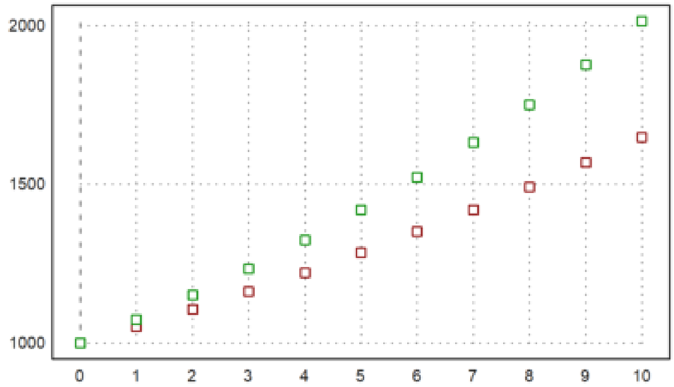
Cara termudah untuk membaca ini ke dalam Euler adalah readmatrix(). Semua koma diganti dengan titik dengan parameter >koma. Untuk CSV bahasa Inggris, hilangkan saja parameter ini.

```
>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)
```

0	1000	1000
1	1051.3	1072.5
2	1105.2	1150.3
3	1161.8	1233.7
4	1221.4	1323.1
5	1284	1419.1
6	1349.9	1522
7	1419.1	1632.3
8	1491.8	1750.7
9	1568.3	1877.6
10	1648.7	2013.8

Mari kita plot ini.

```
>plot2d(M'[1],M'[2:3],>points,color=[red,green]'):
```



Ada cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari suatu file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi getvectorline() akan membaca angka dari sebaris data. Secara default, ini mengharapkan titik desimal. Tapi bisa juga menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil setdecimaldot(",") sebelum Anda menggunakan fungsi ini.

Fungsi berikut adalah contohnya. Itu akan berhenti di akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```
open(file);
M=[];
repeat
   until eof();
   v=getvectorline(3);
   if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
end;
return M;
close(file);
endfunction
```

```
>myload(file)
```

```
   0.85641         0    0.39129         0    0.86483
   0.71282         0    0.19523         0   0.015906
   0.82583         0    0.59918         0    0.79603
```

Dimungkinkan juga untuk membaca semua angka dalam file itu dengan getvector().

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
    0.85641          0   0.39129
          0    0.86483   0.71282
          0    0.19523         0
```

Oleh karena itu sangat mudah untuk menyimpan suatu vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

```
>v=random(1000); mean(v)
```

```
0.50268
```

```
>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')
```

```
0.50268
```

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Misalnya, kita menulis tabel dengan header baris dan kolom ke sebuah file.

```
>file="test.tab"; M=random(3,3);  ...
>open(file,"w");  ...
>writetable(M,separator=",",labc=["one","two","three"]);  ...
>close(); ...
>printfile(file)
```

```
one,two,three
      0.25,      0.86,      0.95
      0.98,      0.28,      0.98
      0.84,      0.96,      0.56
```

Ini dapat diimpor ke Excel.

Untuk membaca file di EMT, kami menggunakan readtable().

```
>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...
>writetable(M,labc=headings)
```

```
        one       two     three
       0.25      0.86      0.95
       0.98      0.28      0.98
       0.84      0.96      0.56
```

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki baris dengan format berikut.

```
>line="2020-11-03,Tue,1’114.05"
```

```
2020-11-03,Tue,1’114.05
```

Pertama, kita dapat memberi token pada garis tersebut.

```
>vt=strtokens(line)
```

```
2020-11-03
Tue
1’114.05
```

Kemudian kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]),  ...
>indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])),  ...
>strrepl(vt[3],"'","")()
```

```
7.3816e+05
2
1114
```

Dengan menggunakan ekspresi reguler, dimungkinkan untuk mengekstrak hampir semua informasi dari sebaris data.

Asumsikan kita memiliki baris berikut sebuah dokumen HTML.

```
>line="<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>"
```

```
<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>
```

Untuk mengekstraknya, kami menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

```
 - tanda kurung tutup >,
 - string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung dengan
```

sub-pencocokan "(...)",

```
- braket pembuka dan penutup menggunakan solusi terpendek,
- sekali lagi string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan tanda kurung buka <.
```

Ekspresi reguler agak sulit dipelajari tetapi sangat ampuh.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,">([^<>]+)<.+?>([^<>]+)<");
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-kecocokan.

```
>for k=1:length(vt); vt[k](), end;
```

```
1145.5
5.6
```

Berikut adalah fungsi yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

```
>function readtd (line) ...
```

```
v=[]; cp=0;
repeat
   {pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
   until pos==0;
   if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
   cp=pos+strlen(s);
end;
return v;
endfunction
```

```
>readtd(line+"<td>non-numerical</td>")
```

```
1145.45
5.6
-4.5
non-numerical
```

Membaca dari Web

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.

Dalam contoh, kita membaca versi terkini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai "Versi ..." dalam sebuah judul.

```
>function readversion () ...
```

```
urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
repeat
  until urleof();
  s=urlgetline();
  k=strfind(s,"Version ",1);
  if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
end;
urlclose();
endfunction
```

```
>readversion
```

```
Version 2024-01-12
```

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi,"mypi");
```

```
mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="test.e"; ...
>writevar(random(2,2),"M",file); ...
>printfile(file,3)
```

```
M = [ ..
0.6304090272564289, 0.1400939602907685;
0.4634452706169561, 0.2218543341651645];
```

Sekarang kita dapat memuat file tersebut. Ini akan mendefinisikan matriks M.

```
>load(file); show M,
```

```
M = 
  0.63041   0.14009
  0.46345   0.22185
```

Omong-omong, jika writevar() digunakan pada suatu variabel, definisi variabel dengan nama variabel tersebut akan dicetak.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
M = [ ..
0.6304090272564289, 0.1400939602907685;
0.4634452706169561, 0.2218543341651645];
inch$ = 0.0254;
```

Kita juga bisa membuka file baru atau menambahkan file yang sudah ada. Dalam contoh kita menambahkan file yang dibuat sebelumnya.

```
>open(file,"a"); ...
>writevar(random(2,2),"M1"); ...
>writevar(random(3,1),"M2"); ...
>close();
>load(file); show M1; show M2;
```

```
M1 =
  0.52207   0.17048
  0.36652   0.96732
M2 =
 0.066657
  0.95288
  0.43348
```

Untuk menghapus file apa pun, gunakan fileremove().

```
>fileremove(file);
```

Vektor baris dalam suatu file tidak memerlukan koma, jika setiap angka berada pada baris baru. Mari kita buat file seperti itu, tulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

```
>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
>for i=1 to 5; writeln(""+random()); end; ...
>writeln("];"); close(); ...
>printfile(file)
```

```
M = [
0.480887298414
0.522739554026
0.493039925074
0.959403025242
0.836988233563
];
```

```
>load(file); M
```

```
[0.48089,  0.52274,  0.49304,  0.9594,  0.83699]
```

Latihan Soal

1. Lama reaksi terhadap suatu rangsangan tertentu dari sembilan individu yang diambil secara acak adalah 2.5, 3.6, 3.1, 4.3, 2.9, 2.3, 2.6, 4.1, dan 3.4 detik. Hitunglah rata-rata dan mediannya.

```
>Z=[2.5,3.6,3.1,4.3,2.9,2.3,2.6,4.1,3.4]; // mendeskripsikan data
>mean(Z) // mencari rata-rata
```

```
3.2
```

```
>median(Z) // mencari median atau nilai tengah
```

```
3.1
```

2. Tinggi 10 sampel tanaman jagung yang ada di sawah adalah 25,30,28,23,27,26,25,29,24,22. Dengan menganggap data tersebut sebagai populasi. Hitunglah simpangan baku atau standar deviasi dan rata-ratanya.

```
>X=[25,30,28,23,27,26,25,29,24,22]; // mendeskripsikan data
>dev(X) // mencari standar deviasi
```

```
2.6013
```

```
>mean(X) // mencari rata-rata
```

```
25.9
```

3. Seorang peneliti ingin mengetahui apakah terdapat perbedaan dalam rata-rata hasil ujian matematika antara tiga kelompok siswa yang diberi metode pembelajaran yang berbeda. Tiga kelompok siswa yang diuji dengan hasil ujian matematika nya adalah:
Kelompok A (Pembelajaran Daring) : [76, 82, 85, 78, 90, 88, 80]
Kelompok B (Pembelajaran Luring) : [88, 90, 87, 86, 79, 91, 83]
Kelompok C (Blended Learning) : [78, 84, 86, 90, 82, 85, 87]

Gunakan analisis varians (ANOVA) dengan taraf signifikansi 0.05

```
>A = [76, 82, 85, 78, 90, 88, 80]; mean(A), // rata-rata A
```

```
82.714
```

```
>B = [88, 90, 87, 86, 79, 91, 83]; mean(B), // rata-rata B
```

```
86.286
```

```
>C = [78, 84, 86, 90, 82, 85, 87]; mean(C), // rata-rata C
```

```
84.571
```

```
>varanalysis(A,B,C) // mencari p value
```

```
0.3418
```

Dengan analisis ANOVA diperoleh p-value 0.341795248579 > 0,05 (tingkat signifikansi) maka dapat disimpulkan tidak ada perbedaan yang signifikan antara rata-rata hasil ujian matematika dari ketiga metode pembelajaran tersebut.

4. Seorang petani memiliki 4 jenis tanaman di kebunnya. Petani tersebut mencatat jumlah hasil panen dari masing-masing jenis tanaman selama satu tahun yaitu sebagai berikut:

Tomat : 40 keranjang dengan berat rata-rata 12 kg/keranjang
Cabai : 30 keranjang dengan berat rata-rata 8 kg/keranjang
Terong : 50 keranjang dengan berat rata-rata 6 kg/keranjan
Ubi : 35 keranjang dengan berat rata-rata 15 kg/keranjang

Berapa rata-rata hasil panen pertani tersebut?

```
>x = [12,8,6,15], y = [40,30,50,35]
```

```
[12,  8,  6,  15]
[40,  30,  50,  35]
```

```
>mean(x,y)
```

```
9.9677
```

jadi, rata-rata hasil panen petani tersebut adalah 9.96774193548 kg per keranjang.

5. Diketahui data mengenai tinggi 10 siswa dalam suatu kelas yaitu:
160,165,155,172,162,158,175,152,161,177
Tentukan kuartil pertama, kedua, dan ketiga

```
>t = [160,165,155,172,162,158,175,152,161,177];
>q1 = quantile(t, 0.25) // kuartil pertama
```

```
158.5
```

```
>q2 = quantile(t, 0.5) // kuartil kedua
```

```
161.5
```

```
>q3 = quantile(t, 0.75) // kuartil ketiga
```

```
170.25
```

Jadi, diperoleh kuartil pertama 158.5, kuartil kedua(median) 161.5, dan kuartil ketiga 170.25

6. Buat tabel dengan data soal no 4 yaitu
Tomat : 40 keranjang dengan berat rata-rata 12 kg/keranjang
Cabai : 30 keranjang dengan berat rata-rata 8 kg/keranjang
Terong : 50 keranjang dengan berat rata-rata 6 kg/keranjan
Ubi : 35 keranjang dengan berat rata-rata 15 kg/keranjang

```
>x = [12,8,6,15];
>y = [40,30,50,35];
>writetable((x'|y'),labc=["rata-rata","banyak keranjang"], labr=["tomat","cabai","terong","ubi"])
```

```
          rata-rata banyak keranjang
   tomat         12               40
   cabai          8               30
  terong          6               50
     ubi         15               35
```

7. Diketahui berat badan 6 siswa pada 3 kelas yang berbeda adalah
kelas1 = [55,58,52,60,57,59]
kelas2 = [52,65,50,60,64,66]
kelas3 = [50,54,53,51,52,50]
Apakah ada perbedaan yang signifikan dari ketiga data di atas? Gunakan taraf signifikansi 0.05

```
>kelas1 = [55,58,52,60,57,59]; mean(kelas1),
```

```
56.833
```

```
>kelas2 = [52,65,50,60,64,66]; mean(kelas2),
```

```
59.5
```

```
>kelas3 = [50,54,53,51,52,50]; mean(kelas3),
```

```
51.667
```

```
>varanalysis(kelas1,kelas2,kelas3)
```

```
0.024057
```

Dengan analisis ANOVA diperoleh p-value 0.024057 $<$ 0,05 (tingkat signifikansi) maka dapat disimpulkan hipotesis nilai rata-rata sama ditolak, terdapat perbedaan yang signifikan antara berat badan siswa pada kelas tersebut.

8. Lakukan uji median untuk mengetahui apakah 2 sampel data di bawah ini memiliki distribusi rata-rata yang berbeda.
j = [10,8,18,20,14,18];
k = [18,28,32,20,28,30,35,40,27]

```
>j = [10,8,18,20,14,18];
>k = [18,28,32,20,28,30,35,40,27];
>mediantest(j,k)
```

```
0.034965
```

dapat disimpulkan ada perbedaan yang signifikan antara kedua kelompok.

9. Tentukan kuartil 3 pada data kelompok k yang terdapat pada no 8
k = [18,28,32,20,28,30,35,40,27]

```
>k = [18,28,32,20,28,30,35,40,27]
```

```
[18,  28,  32,  20,  28,  30,  35,  40,  27]
```

```
>Q3 = quantile(k, 0.75) // kuartil ketiga
```

```
32
```

10. Sebuah perusahaan memiliki 6 mesin yang digunakan untuk memproduksi produk setiap harinya. Jumlah produk yang dihasilkan oleh masing-masing mesin adalah sebagai berikut:
250,260,245,220,270,230,255
Hitunglah rata-rata jumlah produk yang dihasilkan oleh mesin, dan berapa simpangan baku nya?

```
>P = [250,260,245,220,270,230,255]
```

```
[250,  260,  245,  220,  270,  230,  255]
```

```
>mean(P)
```

```
247.14
```

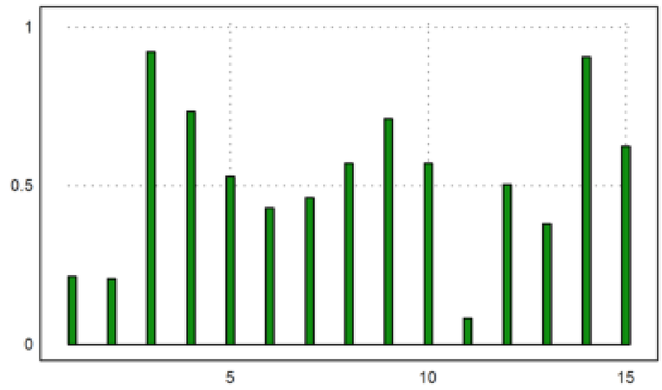
```
>dev(P)
```

```
17.286
```

jadi, rata-rata nya adalah 247.142857143 dan standar deviasi nya 17.2861078271

11. Buat plot impuls dari data acak, yang terdistribusi secara seragam dalam [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:15,random(1,15)),>bar):
```

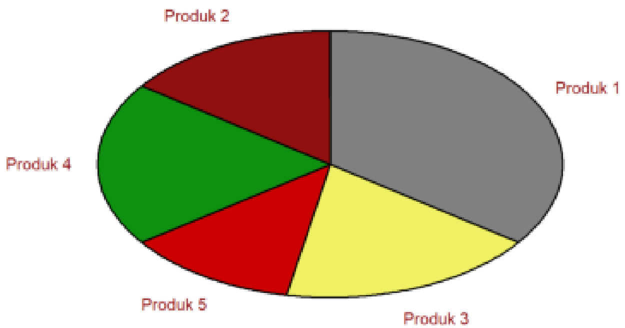


12. Buat diagram lingkaran dengan data
Produk 1 = 35
Produk 2 = 15
Produk 3 = 18
Produk 4 = 20
Produk 5 = 12

```
>data1=[35,15,18,20,12]
```

```
[35,  15,  18,  20,  12]
```

```
>P:=["Produk 1","Produk 2","Produk 3","Produk 4","Produk 5"];
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(data1[i],color=CP[i],lab=P[i]):
```



13. Lakukan uji signum untuk 2 data berikut ini
x1 = [8,9,7,10,6,4]
x2 = [5,7,10,9,7,8]

```
>x1 = [8,9,7,10,6,5]
```

```
[8,  9,  7,  10,  6,  5]
```

```
>x2 = [5,7,10,8,7,8]
```

```
[5,  7,  10,  8,  7,  8]
```

```
>signtest(x1,x2)
```

```
0.65625
```

Ini adalah kesalahan yang terlalu besar. Jadi, kita tidak dapat menolak hipotesis 0 yaitu x1 sama baiknya dengan x2.

14. Tentukan median dari
65,78,92,56,84,74,88,91,77,85,68,80,79,90,72,67,66,82,70,89

```
>y1=[65,78,92,56,84,74,88,91,77,85,68,80,79,90,72,67,66,82,70,89]
```

```
[65,  78,  92,  56,  84,  74,  88,  91,  77,  85,  68,  80,  79,  90,
72,  67,  66,  82,  70,  89]
```

```
>median(y1)
```

```
78.5
```

15. Tentukan selisih rata-rata dari
k = [17,26,32,27,28,30,32,22,27] dan
m = [23,27,16,33,27,18,35,24,21]

```
>k = [17,26,32,27,28,30,32,22,27]; mean(k)
```

```
26.778
```

```
>m = [23,27,16,33,27,18,35,24,21]; mean(m)
```

```
24.889
```

```
>selisih= mean(k)-mean(m)
```

```
1.8889
```

jadi, selisih rata-rata kedua data tersebut adalah 1.88888888889