Tekninen testi

15. maaliskuuta 2018

Ohjeet:

- Vastaa niin moneen kysymykseen kuin ehdit.
- Voit halutessasi käyttää eri tehtävissä eri ohjelmointikieliä. Voit käyttää Internetiä ja muita lähteitä apunasi, kunhan mainitset lähteet. Ratkaisuihin voi päätyä usealla tavalla. Kaverilta kysyminen ei ole sallittua.
- Arviointikriteerit: oikeiden vastauksien lukumäärä, lupaavat ratkaisuluonnokset, hyvät perustelut, hyvä ohjelmointityyli ja näytöt teknisen osaamisen monipuolisuudesta.
- Palauta ohjelmointitehtävien ratkaisut lähdekoodina tekstitiedostoissa. Muihin tehtäviin voit vastata koneella tai halutessasi myös paperilla. Kuvaa tai skannaa vastauspaperit ja lähetä ne. Valmistaudu perustelemaan ratkaisusi haastattelussa.
- Kysy.

1 Matematiikka

1. Onko matriisi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ kääntyvä? Jos on, niin anna sen käänteismatriisi; jos ei, niin perustele miksi.

2. Olkoon $f(x, y) = xe^x + yx^2 + y^2$. Laske osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3. Blackin, Scholesin ja Mertonin hinnoittelukaava[1] call-optioille[2] on

$$C(S, K, r, q, \tau, \sigma) = Se^{-q\tau}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2),$$

missä parametrit S, K, τ ja σ ovat positiivisia ja

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \\ d_2 &= \frac{\ln(S/K) + (r - q - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}, \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy \quad \text{(standardinormaalijakauman kertymäfunktio).} \end{aligned}$$

Laske seuraavat raja-arvot.

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \lim_{\tau \to 0+} C(S, K, r, q, \tau, \sigma) \\ &\text{b)} \quad \lim_{\sigma \to 0+} C(S, K, r, q, \tau, \sigma) \end{aligned}$$

4. Suomessa pesii noin 90 000 naurulokkiparia ja 10 000 pikkulokkiparia. Molempien kohdalla pystyt tunnistamaan lajin 80 % todennäköisyydellä oikein. Näet linnun, joka on varmasti joko naurulokki tai pikkulokki. Mikä on todennäköisyys, että pikkulokiksi tunnistamasi lintu on myös todellisuudessa pikkulokki?

5. Tarkastellaan mittaustuloksia, joihin liittyy satunnaisuutta. Mittaustulokset ovat samoin jakautuneita ja toisistaan riippumattomia. Yhteensä 400 mittaustuloksen otoksesta on estimoitu yksittäisen mittaustuloksen odotusarvoksi 10,0 ja keskihajonnaksi 2,0. Kuvaa valitsemillasi tavoilla virhettä, joka liittyy otoksesta estimoituun odotusarvoon.

[1] Parametreihin kuuluvat kohde-etuuden nykyhinta S, option toteutushinta K, korkokanta r, osinkokanta q, aika option erääntymiseen τ ja kohde-etuuden volatiliteetti σ.

[2] Call-optiolla tarkoitetaan sopimusta, jossa haltija saa halutessaan ostaa eräpäivänä kohde-etuuden ennalta sovitulla hinnalla K. Call-option arvo ei ole koskaan negatiivinen.

2 Ohjelmointi

1. Esitä säännöllinen lauseke (regex) tai automaatti, joka hyväksyy sellaiset merkkijonot, joissa on parillinen lukumäärä `a`-kirjaimia. Aakkosto on $\mathcal{A} = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

2. Toteuta satunnaislukugeneraattori, joka tuottaa *tasaisesti* jakautuneita satunnaispisteitä

   (a) pisteiden $a = (x_a, y_a)$ ja $b = (x_b, y_b)$ määrittämän suorakulmion alalta eli joukosta $\{(x, y) : x_a \leqslant x \leqslant x_b \wedge y_a \leqslant y \leqslant y_b\}$

   (b) pisteen $a = (x_a, y_a)$ ja säteen r määrittämän ympyrän alalta eli joukosta $\{(x, y) : (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 \leqslant r^2\}$

   (c) pisteen $a = (x_a, y_a, z_a)$ ja säteen r määrittämän pallon pinnalta eli joukosta $\{(x, y, z) : (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2 = r^2\}$

   Voit käyttää apuna ohjelmointiympäristön tarjoamaa satunnaislukugeneraattoria, joka tuottaa tasaisesti jakautuneita satunnaislukuja annetulla välillä.

3. Tarkastellaan n kokonaisluvun monijoukkoa Z, jonka alkiot on esitetty vektorina $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$. Suunnittele tehokkaat ohjelmafunktiot:

   (a) Alkiot ovat järjestyksessä suurimmasta pienimpään. Etsi osajoukko $S \subseteq Z$, jonka alkioiden summa $\sum_{z \in S} z$ on maksimaalinen.

   (b) Alkiot eivät ole missään tietyssä järjestyksessä. Etsi osajono $(i \ldots j)$, jolle alkioiden summa $\sum_{k=i}^{j} z_k$ on maksimaalinen. Osajono tarkoittaa peräkkäisten alkioiden muodostamaa osajoukkoa.

4. Kirjoita ohjelmafunktio, joka approksimoi funktion $f(x) = x^2 - x + \sin(2x)$ arvoa. Funktio saa käyttää vain aritmeettisia perusoperaatioita ($+$, $-$, $\times$, $\div$ ja potenssi). Valmiita trigonometrisiä funktioita, kuten sin, ei saa käyttää suoraan. Toteutuksella tulee olla ainakin viiden merkitsevän numeron tarkkuus

   (a) alueella $x \in [2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}]$

   (b) koko reaalilukujen alueella $x \in \mathbb{R}$.

5. Kirjoita ohjelmafunktio, joka ottaa argumentikseen taulukon kokonaislukuja ja palauttaa sen sisällön satunnaisessa järjestyksessä. Toteuta sekoitusalgoritmi itse äläkä käytä toteutuskielen omia sekoitus- tai järjestysfunktioita.

6. Toteuta luokka `Poly`, joka edustaa polynomeja. Yleisesti n asteen polynomi esitetään summana $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n$, jossa $(c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ ovat termien reaalikertoimet. Polynomin derivointi tapahtuu tunnetusti termeittäin seuraavasti:

$$D(c_i \cdot x^i) = \begin{cases} i \cdot c_i \cdot x^{i-1}, & \text{jos } i \geqslant 1 \\ 0, & \text{jos } i = 0 \end{cases}$$

   Luokan tulee toteuttaa seuraavat metodit.

   - Konstruktori saa argumenttina polynomin kertoimet mielivaltaisen kokoisena taulukkona $[c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n]$.
   - Metodi `valueAt(x)` saa argumentikseen reaaliluvun x ja palauttaa polynomin evaluoidun arvon pisteessä x.
   - Metodi `derivative()` palauttaa derivaattapolynomin.
   - Polynomien yhteenlaskumetodi vapaalla tyylillä.

3 SQL-kyselyt

Tarkastellaan seuraavaa SQLite-relaatiotietokannan tietomallia:

```
Taulu     Sarake         Tyyppi    Selitys
------------------------------------------
Client:                            asiakastiedot
          ID             int       asiakkaan ID-numero
          NAME           varchar   asiakkaan nimi
          DATE_OF_BIRTH  date      asiakkaan syntymäaika

Trade:                             kaupan perustiedot
          TRADE_ID       int       kaupan tunniste
          CLIENT_ID      int       asiakasviittaus
          TYPE           varchar   kaupan tyyppi
          NOTIONAL       numeric   kaupan nimellisarvo

Trade_Tag:                         kaupan lisätiedot
          TAG_ID         int       tagin tunnistenumero
          TRADE_ID       int       kauppatunniste, johon tag liittyy
          NAME           varchar   tagin hakusana
          VALUE          varchar   tagin arvo
```

Kirjoita SQL-kyselyt, jotka tuottavat seuraavat tulokset:

1. Listaus asiakkaiden kauppamääristä: ensimmäinen sarake sisältää kaikkien asiakkaiden nimet nousevassa aakkosjärjestyksessä, toinen sarake sisältää kauppojen lukumäärät asiakkaittain.

2. `TRADE_ID`-kentät niistä kaupoista, joille ei ole asetettu 'Trader'-lisätietoa.
3. Nimellisarvojen summa kaupoista, joissa 'Trader' on 'Nick Leeson'.

4 Ongelmat

1. Mikä on 5000. luvuilla 2, 3 tai 5 jaollinen luonnollinen luku ($\mathbb{N}_{\geqslant 1}$)?
2. Kahden pelaajan noppapelissä on käytössä kolme kuusitahkoista noppaa, joilla on seuraavat pisteluvut.

   (a) $2, 2, 2, 5, 5, 5$
   (b) $3, 3, 3, 3, 3, 6$
   (c) $?, ?, ?, ?, ?, ?$

   Pelissä ensimmäinen pelaaja valitsee jonkin nopan (a)–(c). Sen jälkeen toinen pelaaja valitsee jommankumman jäljelle jääneistä nopista. Molemmat pelaajat heittävät valitsemaansa noppaa kerran (nopan kuusi tahkoa esiintyvät kaikki samalla todennäköisyydellä). Korkeamman pisteluvun heittänyt voittaa; tasapelitilanteessa heitto uusitaan.

   Aseta nopalle (c) pisteluvut niin, että kukin pisteluku kuuluu välille 1–6 ja jälkimmäiselle pelaajalle syntyy yli 50 % mahdollisuus voittoon pelissä. Jos tämä on mahdotonta, esitä sille todistus.
3. Olkoon $Z = (A, B, C)$ yksikkökuution $[0, 1]^3$ sisälle tasaisesti jakautunut satunnaismuuttuja. Määritellään indikaattorimuuttuja

   $$\mathbf{1}_Z = \begin{cases} 1, & \text{jos polynomin } Ax^2 + Bx + C \text{ kaikki juuret ovat reaalisia} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

   Laske seuraavat odotusarvot analyyttisesti tai numeerisella approksimaatiolla:

   (a) $\mathbb{E}[\mathbf{1}_Z]$
   (b) $\mathbb{E}[\mathbf{1}_Z \mid A > B]$
   (c) $\mathbb{E}[\mathbf{1}_Z \mid A > C]$
4. Pyöräilykilpailun karsinnassa radalla ajetaan kolme kierrosta. Jatkoon pääsee, jos koko matkan keskinopeus on 40 km/h. Kilpailijalle tapahtuu kisan alussa rengasrikko, minkä vuoksi ensimmäisen kierroksen keskinopeus on 13 km/h. Millä nopeudella kilpailijan on ajettava kaksi seuraavaa kierrosta, jotta hän pääsee karsinnasta jatkoon?