Dynamik for konkurerende varianter af en infektiøs sygdom uden kryds-immunitet

Rasmus Kristoffer Pedersen Christian Berrig Viggo Andreasen

January 29, 2021

Abstract

I denne note betragtes to konkurerende varianter af en infektiøs sygdom uden kryds-immunitet. Dynamikken af denne konkurrence undersøges ved at benytte en førsteordens differential ligning som basis for sygdomsudviklingen af den enkelse variant. Denne antagelse er nok til at vise at den evolutionære dynamik mellem disse varianter er logistisk-lignende i sin karakteristik; altså at den variant med det højeste kontakttal vil udkonkurrere den anden variant.

Model:

Den grundlæggende antagelse for denne model for to konkurrerende varianter af en infektiøs sygdom uden kryds-immunitet mellem varianterne, er at antallet af inficerede personer med en given variant, udvikler sig efter en førsteordens diff. lign. som for constant kontakttal giver anledning til en exponentiel vækst:

$$\frac{d}{dt}I_v(t) = \frac{R_{e,v}(t)-1}{T_g}I_v(t) = r_v(t)I_v(t) \tag{1}$$

Antagelsen om konstant kontakttal er endnu ikke gjort, men denne antagelse betragtes senere som et special tilfælde. Vi antager at generationstiden T_g for begge varianter er identisk og konstant. Subscriptet v indikerer blot, hvilken variant der er tale om. Denne førsteordens diff. lign. (1) kan nu løses:

$$I_v(t) = I_{0,v}\exp\left(\frac{1}{T_g}\int_0^t R_{e,v}(t') - 1dt'\right) \tag{2}$$

Ved at bruge denne antagede form (2) for antallet af inficerede personer for en given variant, kan vi definere hyppighderen af, eksempelvis, variant 1 v_1

$$p_{v_1}(t) = \frac{I_{v1}(t)}{I_{v_1}(t) + I_{v_2}(t)} \tag{3}$$

og ligeledes den samme form for v_2.

Varianternes Hyppighed

En Differential lign. kan nu sættes op for denne kvantitet:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_{v_1}(t) =& \frac{\frac{d}{dt}(I_{v1}(t))}{I_{v_1}(t) + I_{v_2}(t)} - \frac{I_{v1}(t)}{(I_{v_1}(t) + I_{v_2}(t))^2}\frac{d}{dt}(I_{v_1}(t) + I_{v_2}(t)) \\
=& \frac{r_{v_1}(t)I_{v1}(t))}{I_{v_2}(t) + I_{v_2}(t)} - \frac{I_{v1}(t)}{(I_{v_1}(t) + I_{v_2}(t))^2}(r_{v_1}(t)I_{v_1}(t) + r_{v_2}(t)I_{v_2}(t)) \\
=& r_{v_1}(t)p_{v_1}(t) - p_{v_1}(t)(r_{v_1}(t)p_{v_1}(t) + r_{v_2}(t)p_{v_2}(t)) \\
=& p_{v_1}(t)(1 - p_{v_1}(t))(r_{v_1}(t) - r_{v_2}(t))
\end{aligned} \tag{4}$$

hvor relationen mellem hyppighederne $p_{v_2}(t) = 1 - p_{v_1}(t)$ er brugt, da der kun er tale om to varianter. Denne ligningsform har samme karakteristik som den logistiske ligning, med Malthus-parameter (til første orden) $\frac{d}{dt}r(t)$, hvor $r(t)$ er defineret ud fra differensen af infektionernes vækstrate som:

$$r(t) = r_{v_1}(t) - r_{v_2}(t) = \int_0^t \frac{(R_{v_1}(t) - 1) - (R_{v_2}(t) - 1)}{T_g}dt = \int_0^t \frac{R_{v_1}(t) - R_{v_2}(t)}{T_g}dt \tag{5}$$

Formen af diff. ligning (4) bliver ægte logistisk for konstante kontakt-tal Den logistiske form for løsningen til denne diff. lign kan også findes direkte, ved at indsætte de antagne ligningsudtryk fot infektionstilfælde:

$$p_{v_1} = \frac{I_{v_1}(t)}{I_{v_1}(t) + I_{v_2}(t)} = \frac{1}{1 + \frac{I_{v_2}(t)}{I_{v_1}(t)}} = \frac{1}{1 + \frac{I_{0,v_2}}{I_{0,v_1}} \exp\left(r_{v_2}(t) - r_{v_1}(t)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{I_{0,v_2}}{I_{0,v_1}} \exp\left(-r(t)\right)} \tag{6}$$

I det specielle tilfælde for constante kontakt-tal, fås altså:

$$\frac{d}{dt}p_{v_1}(t) = p_{v_1}(t)(1 - p_{v_1}(t))\left(\frac{R_{v_1} - R_{v_2}}{T_g}\right) \tag{7}$$

$$p_{v_1} = \frac{1}{1 + \frac{I_{0,v_2}}{I_{0,v_1}} \exp\left(-\left(\frac{R_{v_1} - R_{v_2}}{T_g}\right)t\right)} \tag{8}$$