

Computerstøttet beregning

Lektion 1. Introduktion

Martin Qvist

`qvist@math.aau.dk`

Det Ingeniør-, Natur-, og Sundhedsvidenskabelige Basisår, Aalborg
Universitet, 3. februar 2009

`people.math.aau.dk/~qvist/teaching/csb-09`

Hvad er CSB?

Computerstøttet beregning (på engelsk, Scientific Computing), er:

- Et matematikkursus: Vi arbejder med matematiske problemer, matematiske begreber og giver matematiske argumenter

Hvad er CSB?

Computerstøttet beregning (på engelsk, Scientific Computing), er:

- Et matematikkursus: Vi arbejder med matematiske problemer, matematiske begreber og giver matematiske argumenter
- Et datalogikursus: Vil vil beskæftige os med algoritmer til løsning af problemerne, analysere algoritmerne (kompleksitet og konvergensrate) og implementere algoritmerne

Hvad er CSB?

Computerstøttet beregning (på engelsk, Scientific Computing), er:

- Et matematikkursus: Vi arbejder med matematiske problemer, matematiske begreber og giver matematiske argumenter
- Et datalogikursus: Vil vil beskæftige os med algoritmer til løsning af problemerne, analysere algoritmerne (kompleksitet og konvergensrate) og implementere algoritmerne
- Et fysikkursus: Problemstillingerne vil (bl.a.) være motiveret udfra fysiske fænomener

Hvad er CSB?

Computerstøttet beregning (på engelsk, Scientific Computing), er:

- Et matematikkursus: Vi arbejder med matematiske problemer, matematiske begreber og giver matematiske argumenter
- Et datalogikursus: Vil vil beskæftige os med algoritmer til løsning af problemerne, analysere algoritmerne (kompleksitet og konvergensrate) og implementere algoritmerne
- Et fysikkursus: Problemstillingerne vil (bl.a.) være motiveret ud fra fysiske fænomener

Det handler om **algoritmer** til beregning af **approksimationer** til eksakte matematiske objekter og om **vurdering** af den følgende **fejl**

Tværfagligt snit

CSB er et hastigt voksende felt indenfor anvendt matematik, som indeholder elementer af

- Ingeniørvidenskab: Problemerne er hentet fra virkelighedens verden og formuleret i matematisk terminologi (differentialligninger, integralligninger etc.)
- Datalogi: Problemerne kan ikke løses eksakt (i modsætning til det I har set på Matematik 1!), så derfor må vi bruge computere til at beregne en numerisk løsning
- Matematik: Matematikken fortæller os hvordan en numerisk løsning kan beregnes og hvor god den er. Eller måske vigtigere: at det ikke går galt.

Eks. på CSB

- Vejrudsigt: Gigantisk dynamisk system.
Begyndelsesbetingelserne er kendt (vejret lige nu) og dynamikken er (delvis) fastlagt af systemer af differentialligninger (www.dmi.dk)
- Simulering af komplekse mekaniske systemer: Ballistik, fjedersystemer, stive legemers bevægelse.
Fænomenets fysik er beskrevet ud fra Newtons mekanik (www.myphysicslab.com/collision.html)
- Computerspil og animerede tegnefilm: “Physically based modelling”. For at lave realistiske animationer modelleres fysiske fænomener og deres interaktion (delvist) ved differentialligninger.
- CERN

Fra studieordningen

Formålet med CSB er

Teori: *At de studerende opnår et grundlæggende kendskab til nogle metoder og algoritmer for computerstøttede beregninger...*

Praktisk: *...at de opnår erfaring med anvendelsen af disse metoder og algoritmer på konkrete store beregninger*

Indhold

- Introduktion til Maple og Matlab
- Repræsentation af tal i en computer. Afrundingsfejl
- Løsning af ikke-lineære ligninger
- Taylors formel og approksimation af funktioner
- Interpolation
- Numerisk integration
- Numerisk løsning af differentiaalligninger
- Numerisk lineær algebra
- Eksempler på store beregninger

Materialer

- Peter R. Turner, *Guide to Scientific Computing*, Macmillan Press 2000
- Maple og Matlab. Kan hentes gratis på `tnb.aau.dk/EDB/software`
- Hjemmeside med spisesedler, eksempler osv.: `people.math.aau.dk/~qvist/teaching/csb-09`

Form og forventninger

- Samme form som i andre matematikkurser: Repetition - Opgaveregning - Forelæsning

Form og forventninger

- Samme form som i andre matematikkurser: Repetition - Opgaveregning - Forelæsning
- Hvordan du kommer igennem kurset:
 - Arbejd seriøst under opgaveregning

Form og forventninger

- Samme form som i andre matematikkurser: Repetition - Opgaveregning - Forelæsning
- Hvordan du kommer igennem kurset:
 - Arbejd seriøst under opgaveregning
 - Spørg hjælpelæreren og mig

Form og forventninger

- Samme form som i andre matematikkurser: Repetition - Opgaveregning - Forelæsning
- Hvordan du kommer igennem kurset:
 - Arbejd seriøst under opgaveregning
 - Spørg hjælpelæreren og mig
 - Frygt ikke Maple (eller Matlab)

Form og forventninger

- Samme form som i andre matematikkurser: Repetition - Opgaveregning - Forelæsning
- Hvordan du kommer igennem kurset:
 - Arbejd seriøst under opgaveregning
 - Spørg hjælpelæreren og mig
 - Frygt ikke Maple (eller Matlab)
 - Imellem to kursusgange: Studer i dybden allerede gennemgået stof og læs kursorisk det nye stof

Form og forventninger

- Samme form som i andre matematikkurser: Repetition - Opgaveregning - Forelæsning
- Hvordan du kommer igennem kurset:
 - Arbejd seriøst under opgaveregning
 - Spørg hjælpelæreren og mig
 - Frygt ikke Maple (eller Matlab)
 - Imellem to kursusgange: Studer i dybden allerede gennemgået stof og læs kursorisk det nye stof
- Feedback: Kommentarer og spørgsmål omkring form og indhold modtages med glæde!

Form og forventninger

- Samme form som i andre matematikkurser: Repetition - Opgaveregning - Forelæsning
- Hvordan du kommer igennem kurset:
 - Arbejd seriøst under opgaveregning
 - Spørg hjælpelæreren og mig
 - Frygt ikke Maple (eller Matlab)
 - Imellem to kursusgange: Studer i dybden allerede gennemgået stof og læs kursorisk det nye stof
- Feedback: Kommentarer og spørgsmål omkring form og indhold modtages med glæde!
- Eksamen: SE-kursus = eksamen.

Repræsentation af reelle tal

Problem:

- Repræsentation af et reelt tal på computer.
- Balancegang mellem præcision og hukommelse.

Repræsentation af reelle tal

Problem:

- Repræsentation af et reelt tal på computer.
- Balancegang mellem præcision og hukommelse.

Eksempel

$$x = e^5 = 148,413159102577 \dots$$

Med 4 betydende cifre:

$$x \approx 148,4$$

Notation:

$$\begin{aligned} 148,4 &= +1,484 \times 10^2 \\ &= 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

Repræsentation af reelle tal

Problem:

- Repræsentation af et reelt tal på computer.
- Balancegang mellem præcision og hukommelse.

Eksempel

$$x = e^5 = 148,413159102577 \dots$$

Med 4 betydende cifre:

$$x \approx 148,4$$

Notation:

$$\begin{aligned} 148,4 &= +1,484 \times 10^2 \\ &= 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

fortegn mantissa base eksponent

Binær repræsentation

Binær repræsentation:

$$x \approx +1,001010001101 \times 2^7$$

Det vil sige:

$$\begin{aligned} x &= \left(2^7 + 2^4 + 2^2 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} \right) \\ &= 148,40625 \\ &= +1,4840625 \times 10^2 \end{aligned}$$

Binær repræsentation benyttes i de fleste computere.

Generel base

Sætning: Givet et grundtal $\beta \in \mathbb{N}, \beta > 1$. Da findes for ethvert reelt tal x en repræsentation

$$\begin{aligned} x &= \pm f \times \beta^E = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \beta^{-k+E} \\ &= d_0 \cdot \beta^E + d_1 \cdot \beta^{-1+E} + d_2 \cdot \beta^{-2+E} + \dots, \end{aligned}$$

hvor mantissaen

$$f = d_0, d_1 d_2 d_3 \dots, \quad d_k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq d_k < \beta, \quad d_0 \neq 0$$

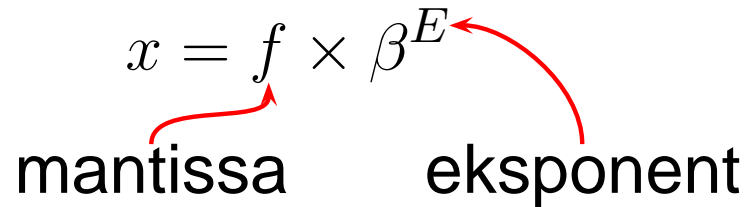
og eksponenten $E \in \mathbb{Z}$.

Flydende tal

Givet en base β (eks.: 2, 10, 16, ...) og $x > 0$,

$$x = f \times \beta^E$$

mantissa eksponent



Repræsentationen kaldes **normaliseret** hvis

$$1 \leq f < \beta$$

Opgave: Angiv den **normaliserede flydende decimaltals-repræsentation** af

$$x = \frac{25}{2}$$

og den binære ...

Afrunding af flydende tal

Der opereres med fire typer af afrunding. I Maple er det styret af system-variablen **Rounding**.

Type	Maple	retning
symmetrisk	Rounding:=nearest	\updownarrow
afskære	Rounding:=0	$\rightarrow 0$
nedrunde	Rounding:=-infinity	$\downarrow -\infty$
oprunde	Rounding:=infinity	$\uparrow \infty$

IEEE standard

Acceptabel løsning: IEEE-standard for (binær) repræsentation af flydende tal, der benyttes i mange arkitekturer.

single-precision: bruger 32 bits per tal

double-precision: bruger 64 bits per tal

Fordeling:

Antal bits	Single-precision	Double-precision
Fortegn	1	1
Eksponent	8	11
Mantissa	24	53

Bemærk: Det første 1-tal i den normaliserede binære repræsentation er unødvendig at gemme (implicit bit).

Flydende tal i Maple

- I Maple håndteres tallene helst eksakt som brøker
- Med kommandoen **evalf(x)** konverteres tallet x til et flydende tal, et såkaldt software float. Antal betydende cifre er styret af variabelen **Digits**; basen er 10.
- Med kommandoen **evalhf(x)** konverteres tallet x til et flydende tal, et såkaldt hardware float. Repræsentationen afhænger da af maskinens arkitektur. Basen vil typisk være 2.

Opgavereregning

Vi ses igen kl. 15:30.