Computerstøttet beregning

Lektion 4. Repetition

Martin Qvist

`qvist@math.aau.dk`

Det Ingeniør-, Natur-, og Sundhedsvidenskabelige Basisår

Aalborg Universitet

10. marts 2009

`people.math.aau.dk/~qvist/teaching/csb-09`

Fejl og fejlvurdering

- x approksimeres med $\hat{x}$
- Fejl: $|x - \hat{x}| = e_N$ (absolut fejl)
- Fejlvurdering: $e_N \leq \beta^{E-N}$
- Taylor: $y = f(x)$ approksimeres med $\hat{y} = P_N(x)$
- Fejl: $|y - \hat{y}| = e_N$ (absolut fejl)
- Fejlvurdering: $e_N \leq \frac{M}{(N+1)!} |x - x_0|^{N+1}$
- Ligeledes med bisektionsmetoden og fikspunktsmetoden: x som giver $f(x) = 0$ approksimeres med $\hat{x}$.

Konvergens

- $e_n = K^n e_0$ eller $e_n = K e_{n-1}$
- Konvergerer mod nul $\Leftrightarrow$ metoden virker.
- Mindre K (tættere på 0) giver hurtigere konvergens, dvs. vi skal bruge færre iterationer på at opnå en given tolerance.

Bisektionsmetoden

Udgangspunktet er:

Sætning: Lad f være en kontinuert funktion på intervallet $I = [a, b]$ og antag at $f(a)f(b) \leq 0$. Da findes et punkt $c \in I$ med $f(c) = 0$.

Bisektionsmetoden til løsning af $f(x) = 0$ på $I = [a, b]$ med $f(a)f(b) \leq 0$

Input: $f, a, b, tol;$

While$(b - a) > 2 * tol$ do

$$m = \frac{b + a}{2};$$

If $f(a)f(m) \leq 0$ then $b = m$ else $a = m;$

Output: $\hat{x} = \dfrac{b + a}{2}$

Konvergens for bisektionsmetoden

Introducer

- x_n : Midtpunktet efter n tvedelinger (dvs. $x_1 = (a+b)/2$)
- $e_n = |x_n - c|$: Den n'te fejl

Da har vi vurderingen

$$e_n \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Fikspunkts-metoden

Til løsning af fikspunkt-ligningen $x = g(x)$. (Altså $f(x) = x - g(x) = 0$.)

Algoritme

Input: g, N, x_0;

For $i = 1$ to N do

$$x_i = g(x_{i-1})$$

Output: $\hat{x} = x_N$

Hvis $x_n \to s$ for $n \to \infty$ og g er en kontinuert funktion, da er $s = g(s)$.

Kriterium for konvergens

Sætning: Lad g være en differentiabel funktion på intervallet $I = [a, b]$. Antag, at

1. $g(x) \in I$ for alle $x \in I$
2. der findes konstant $K < 1$ sådan $|g'(x)| \leq K$ for alle $x \in I$.

Kriterium for konvergens

Sætning: Lad g være en differentiabel funktion på intervallet $I = [a, b]$. Antag, at

1. $g(x) \in I$ for alle $x \in I$
2. der findes konstant $K < 1$ sådan $|g'(x)| \leq K$ for alle $x \in I$.

Da findes der i I et entydigt fikspunkt s for g (altså $s = g(s)$), og fikspunkts-metoden ($x_n = g(x_{n-1})$) vil konvergere mod s for en hvilken som helst begyndelsesværdi $x_0 \in I$.

Kriterium for konvergens

Sætning: Lad g være en differentiabel funktion på intervallet $I = [a, b]$. Antag, at

1. $g(x) \in I$ for alle $x \in I$
2. der findes konstant $K < 1$ sådan $|g'(x)| \le K$ for alle $x \in I$.

Da findes der i I et entydigt fikspunkt s for g (altså $s = g(s)$), og fikspunkts-metoden ($x_n = g(x_{n-1})$) vil konvergere mod s for en hvilken som helst begyndelsesværdi $x_0 \in I$.

Hvis vi som tidligere indfører den n'te fejl $e_n = |x_n - s|$, da er *konvergensraten* (mindst) lineær

$$e_n \le K e_{n-1}.$$