Computerstøttet beregning

Lektion 9. Repetition

Martin Qvist

qvist@math.aau.dk

Det Ingeniør-, Natur-, og Sundhedsvidenskabelige Basisår

Aalborg Universitet

21. april 2009

people.math.aau.dk/~qvist/teaching/csb-09

Differentialligning

Find en funktion $y(x)$ så

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

hvor f er en kendt funktion af to variable og x_0 og y_0 er to reelle tal.

Differentialligning

Find en funktion $y(x)$ så

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

hvor f er en kendt funktion af to variable og x_0 og y_0 er to reelle tal.

Sætning: (Eksistens og entydighed)
Hvis $f(x, y)$ er kontinuert og $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ er kontinuert og begrænset, findes der for ethvert valg af begyndelsesbetingelse (x_0, y_0) én og kun en løsning til (1).

Differentialligning

Find en funktion $y(x)$ så

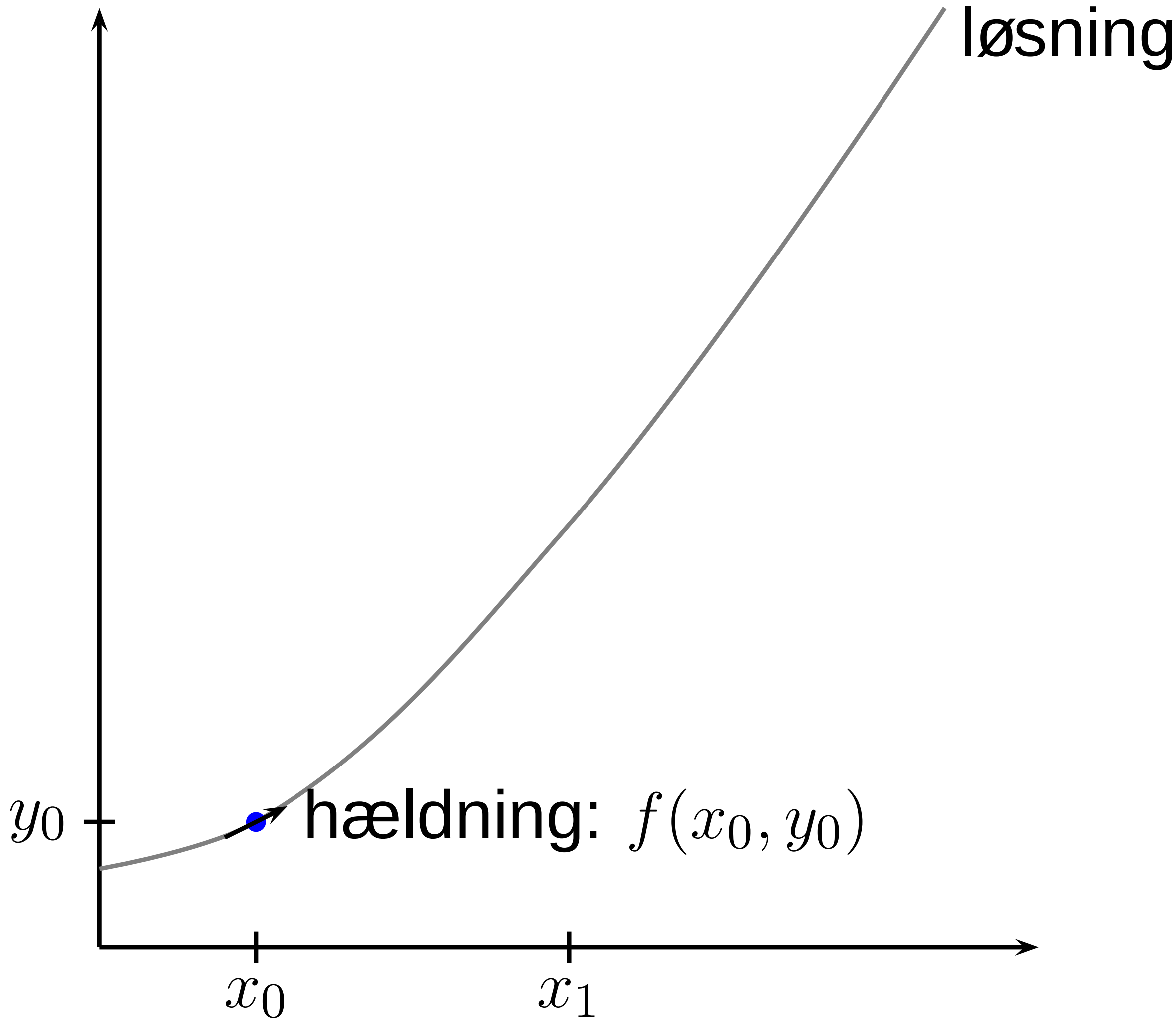
$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

hvor f er en kendt funktion af to variable og x_0 og y_0 er to reelle tal.

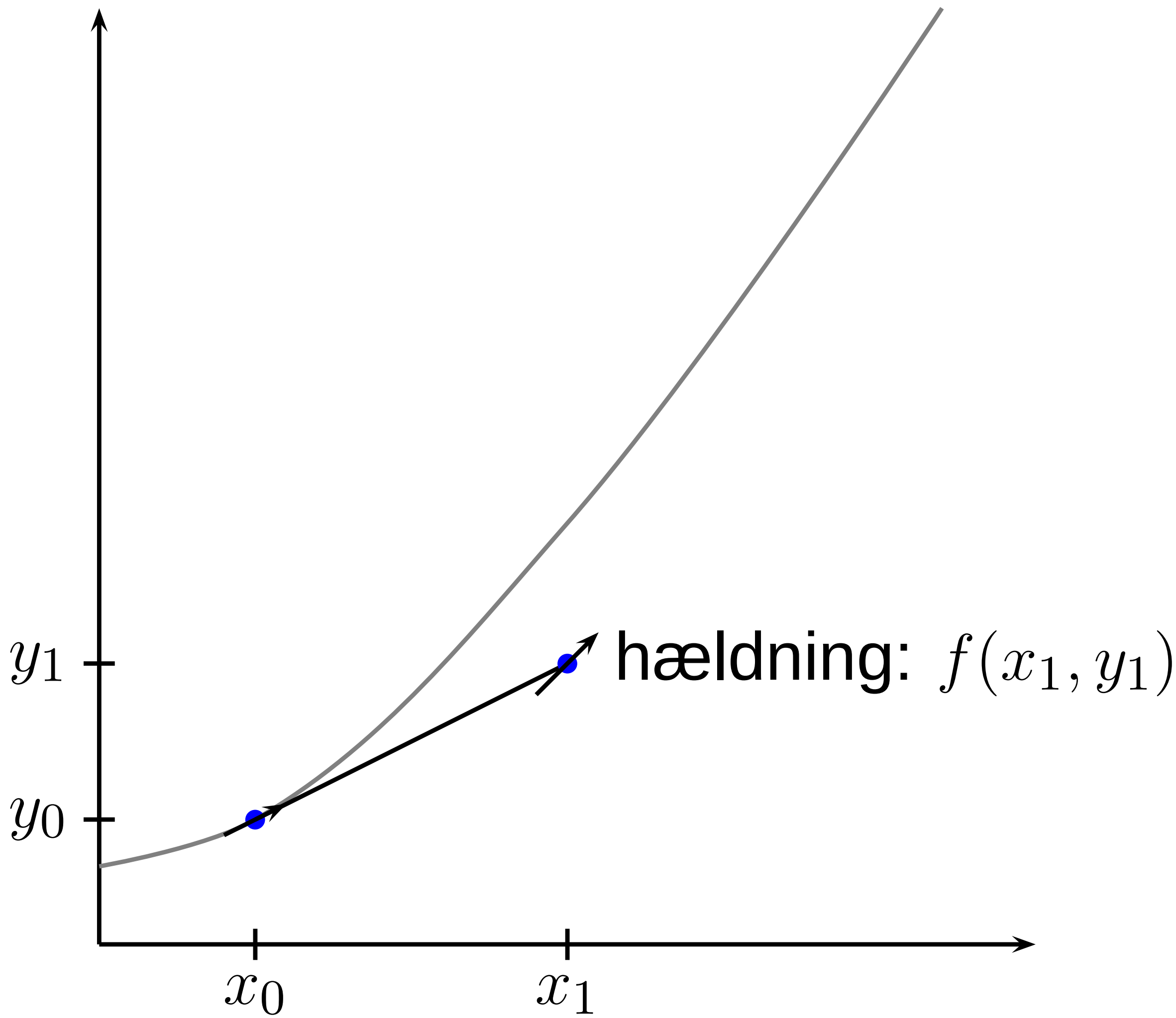
Sætning: (Eksistens og entydighed)
Hvis $f(x, y)$ er kontinuert og $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ er kontinuert og begrænset, findes der for ethvert valg af begyndelsesbetingelse (x_0, y_0) én og kun en løsning til (1).

Problem: Hvordan beregner vi denne løsning?

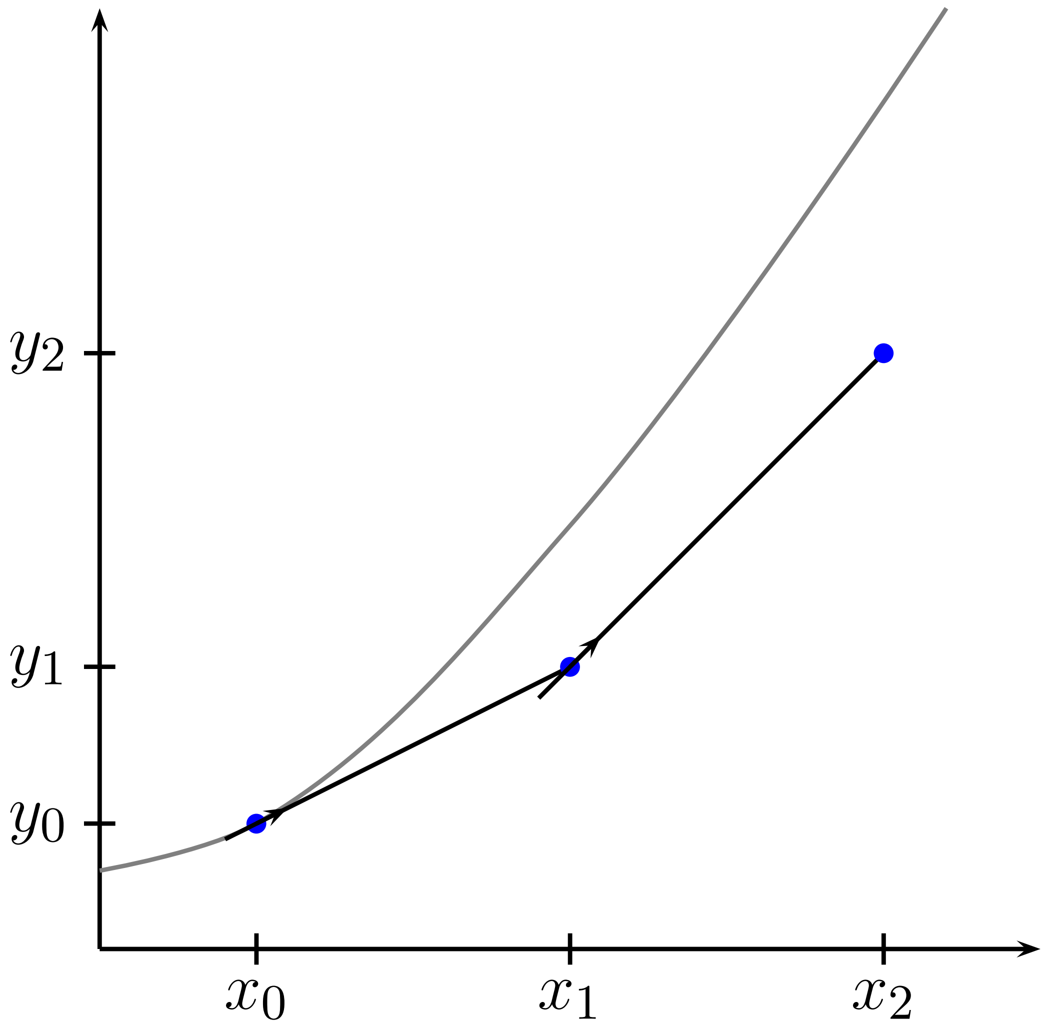
Eulers metode, grafisk



Eulers metode, grafisk



Eulers metode, grafisk



Eulers metode

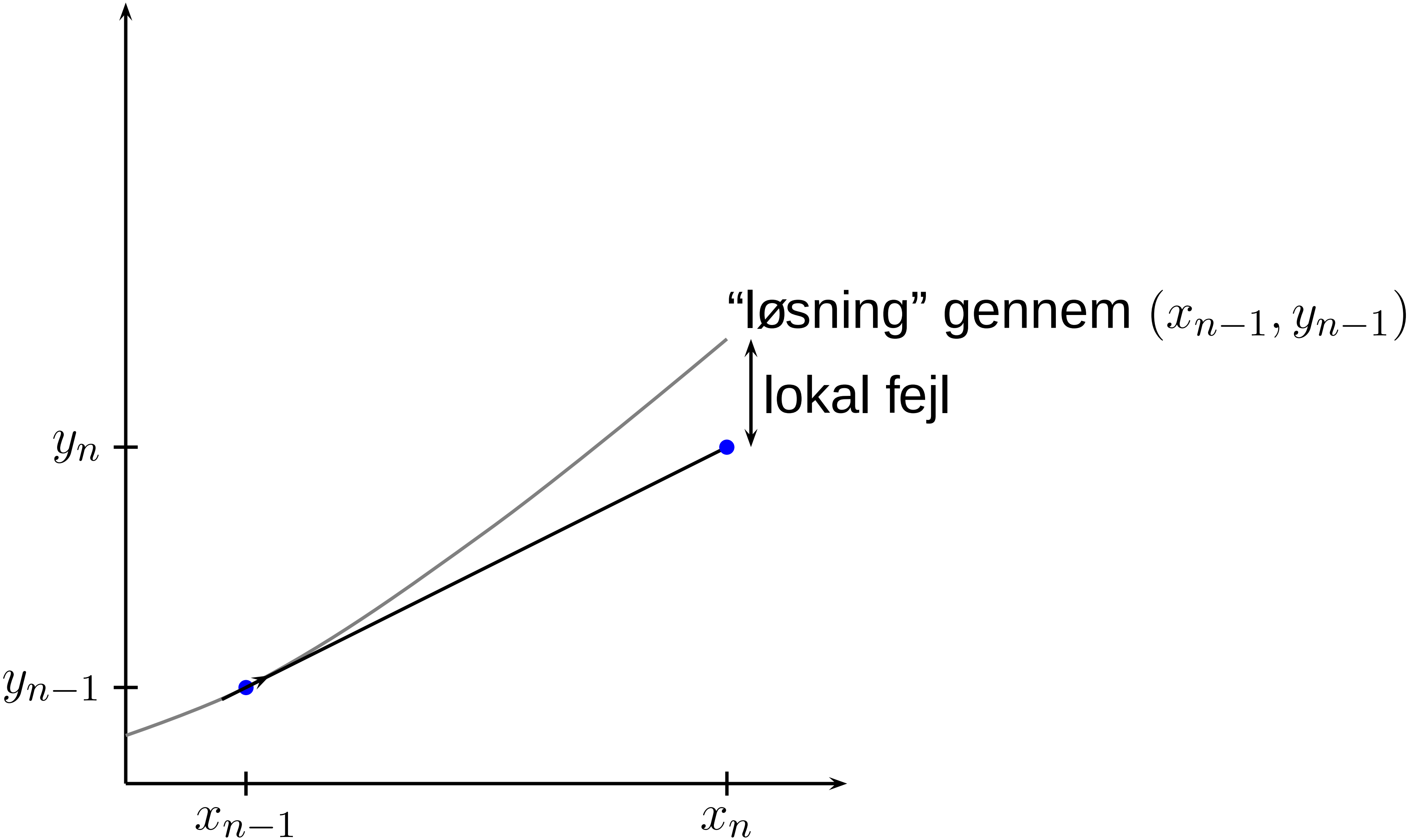
Eulers metode:

$$x_1 = x_0 + h$$
$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

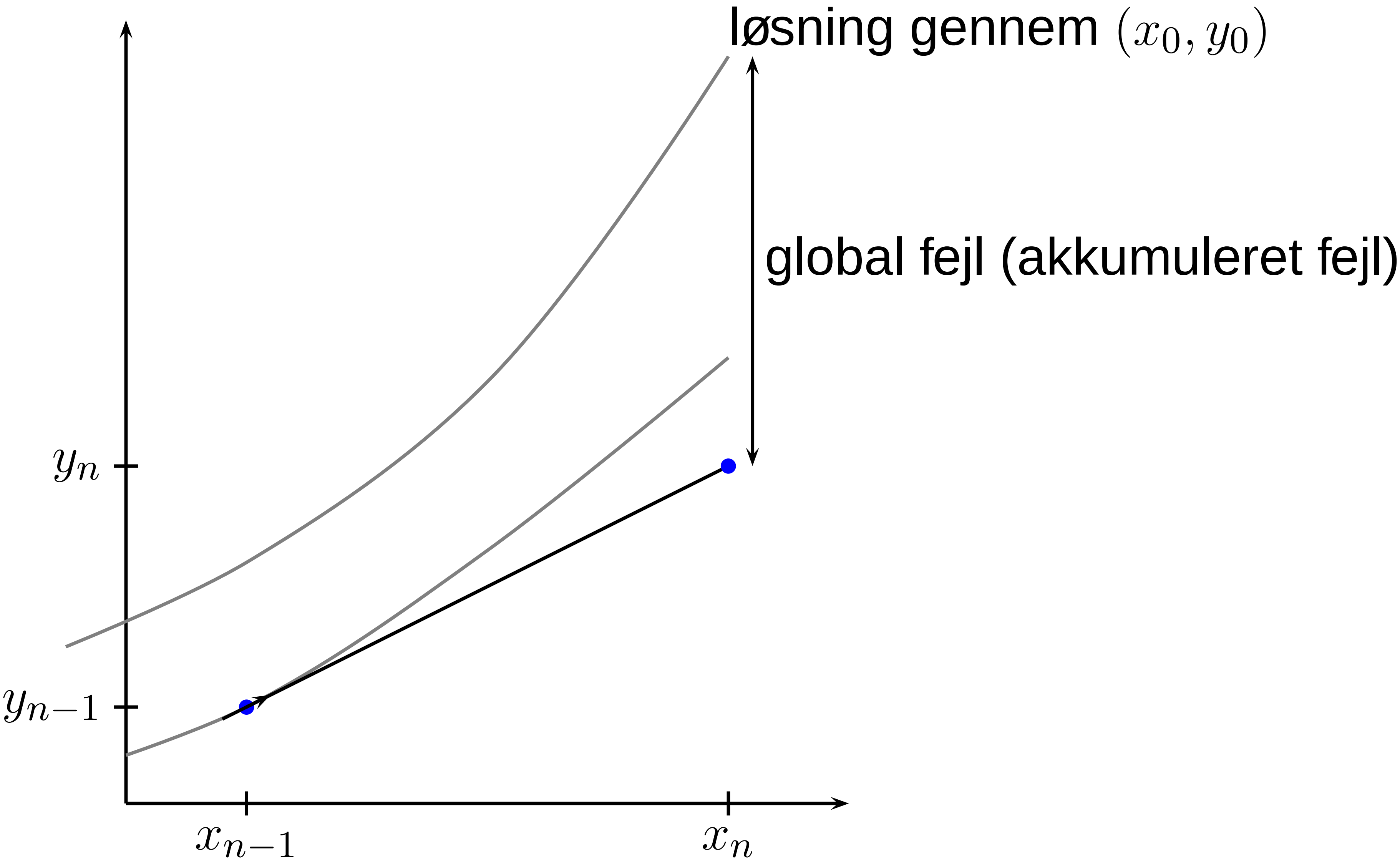
Det n'te Euler skridt:

$$x_n = x_{n-1} + h$$
$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Lokal og global fejl



Lokal og global fejl



Fejl i Eulers metode

- For Eulers metode er den lokale fejl $O(h^2)$, dvs.

$$|y(x_1) - y_1| = |y(x_0 + h) - y_1| \leq Ch^2,$$

hvor C afhænger af y'' på intervallet $[x_0, x_1]$.

Fejl i Eulers metode

- For Eulers metode er den lokale fejl $O(h^2)$, dvs.

$$|y(x_1) - y_1| = |y(x_0 + h) - y_1| \leq Ch^2,$$

hvor C afhænger af y'' på intervallet $[x_0, x_1]$.

- Den globale fejl er $O(h)$, dvs

$$|y(x_N) - y_N| = |y(x_0 + Nh) - y_N| \leq Ch.$$

hvor C afhænger af y'' på intervallet $[x_0, x_N]$.

Fejl i Eulers metode

- For Eulers metode er den lokale fejl $O(h^2)$, dvs.

$$|y(x_1) - y_1| = |y(x_0 + h) - y_1| \leq Ch^2,$$

  hvor C afhænger af y'' på intervallet $[x_0, x_1]$.
- Den globale fejl er $O(h)$, dvs

$$|y(x_N) - y_N| = |y(x_0 + Nh) - y_N| \leq Ch.$$

  hvor C afhænger af y'' på intervallet $[x_0, x_N]$.
- Vi siger, at Eulers metode er en første-ordens metode.

Eulers metode i praksis

I praksis er begyndelsesbetingelsen givet i et punkt $x_0 = a$ og vi ønsker at beregne $y(b)$ for et givet $b > a$.
Vi fastlægger derfor N som antallet af Euler skridt vi vil tage for at gå fra a til b, og derudfra definerer vi skridtlængden

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

Hvis E_N betegner fejlen hørende til N inddelinger

$$E_N = |y(x_N) - y_N| = |y(b) - y_N|,$$

da har vi konvergensen

$$E_N \leq Ch = C' \frac{1}{N}.$$

(Typisk har vi endda $E_N \approx Ch$.)