Computerstøttet beregning

Lektion 8. Repetition

Martin Qvist

qvist@math.aau.dk

Det Ingeniør-, Natur-, og Sundhedsvidenskabelige Basisår

Aalborg Universitet

14. april 2009

people.math.aau.dk/~qvist/teaching/csb-09

Sammensat kvadratur

Ideen er at beregne integralet af f over intervallet $[a, b]$ ved at indskyde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$, bruge

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx,$$

og så beregne hvert enkelt integral i summen ved en af kvadraturreglerne fra sidst (midpunktsreglen, trapezreglen eller Simpsons regel).

Sammensatte kvadraturregler

N inddelinger, $h = \frac{b-a}{N}$, $x_k = a + k \cdot h$, $k = 0, 1, \ldots, N$, og

$$y_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot h, \; k = 1, 2, \ldots, N.$$

Midtpunkts-reglen:

$$M_N = h \cdot \sum_{k=1}^{N} f(y_k).$$

Trapez-reglen:

$$T_N = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right].$$

Sammensatte kvadraturregler (2)

Simpsons regel: $h = \frac{b-a}{N},\ x_k = a + k \cdot h,\ y_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot h.$

Bemærk, at

$$y_k - x_k = \frac{h}{2} = \frac{b-a}{2N}.$$

Simpsons regel med N delintervaller ($2N+1$ punkter):

$$S_{2N} = \frac{h}{6} \cdot \left[f(a) + 4 \sum_{k=1}^{N} f(y_k) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right].$$

Sammensatte kvadraturregler (2)

Simpsons regel: $h = \frac{b-a}{N},\ x_k = a + k \cdot h,\ y_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot h.$

Bemærk, at

$$y_k - x_k = \frac{h}{2} = \frac{b-a}{2N}.$$

Simpsons regel med N delintervaller ($2N+1$ punkter):

$$S_{2N} = \frac{h}{6} \cdot \left[f(a) + 4 \sum_{k=1}^{N} f(y_k) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right].$$

Bemærk:

- S_N er kun defineret for et lige N

Sammensatte kvadraturregler (2)

Simpsons regel: $h = \frac{b-a}{N},\ x_k = a + k \cdot h,\ y_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot h.$
Bemærk, at

$$y_k - x_k = \frac{h}{2} = \frac{b-a}{2N}.$$

Simpsons regel med N delintervaller ($2N + 1$ punkter):

$$S_{2N} = \frac{h}{6} \cdot \left[f(a) + 4 \sum_{k=1}^{N} f(y_k) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right].$$

Bemærk:

- S_N er kun defineret for et lige N
- $S_{2N} = (T_N + 2M_N)/3$

Afvigelse

Midtpunkts-reglen:

$$\int_a^b f(x)\,dx - M_N = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

Trapez-reglen:

$$\int_a^b f(x)\,dx - T_N = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

Simpsons regel:

$$\int_a^b f(x)\,dx - S_N = -\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

Afvigelse, $h = (b-a)/N$

Midtpunkts-reglen:

$$\int_a^b f(x)\,dx - M_N = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

Trapez-reglen:

$$\int_a^b f(x)\,dx - T_N = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

Simpsons regel:

$$\int_a^b f(x)\,dx - S_N = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

Praktisk numerisk integration

Antag at $|f^{(4)}(\xi)| \leq M$ for alle $\xi \in (a,b)$. Så gælder

$$e_N = \left| \int_a^b f(x)\,dx - S_N \right| \leq \frac{|b-a|^5 M}{180 N^4}.$$

Praktisk numerisk integration

Antag at $|f^{(4)}(\xi)| \leq M$ for alle $\xi \in (a, b)$. Så gælder

$$e_N = \left| \int_a^b f(x)\,dx - S_N \right| \leq \frac{|b-a|^5 M}{180 N^4}.$$

Bemærk

$$\frac{|b-a|^5 M}{180 N^4} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad N > |b-a| \left(\frac{|b-a| M}{180 \epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Praktisk numerisk integration

Antag at $|f^{(4)}(\xi)| \leq M$ for alle $\xi \in (a,b)$. Så gælder

$$e_N = \left| \int_a^b f(x)\,dx - S_N \right| \leq \frac{|b-a|^5 M}{180 N^4}.$$

Bemærk

$$\frac{|b-a|^5 M}{180 N^4} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad N > |b-a| \left(\frac{|b-a| M}{180\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Det vil sige at

$$N > |b-a| \left(\frac{|b-a| M}{180\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - S_N \right| < \epsilon.$$

Praktiske bemærkninger

Bemærk

- $$|I - S_{2N}| \approx \frac{|I - S_N|}{16}$$

Praktiske bemærkninger

Bemærk

- $$|I - S_{2N}| \approx \frac{|I - S_N|}{16}$$

- Hvis ikke vi kan finde eksplicit M så $|f^{(4)}(\xi)| \leq M$ for alle $\xi \in (a,b)$: Givet tolerance ϵ, beregn S_N for $N = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ indtil

$$|S_{2N} - S_N| < \epsilon.$$

Da vil vi (omtrent) have

$$|I - S_{2N}| < \frac{\epsilon}{15}.$$