Eksamensopgave 2

C: Numerisk løsning af differentialligninger: Modificeret Euler

Eulers metode:

Vi skal nu se på numeriske løsninger af sædvanlige differentiale ligninger. Disse er skrevet på formen:

$$y'(x) = f(x, y) = f(x, y(x))$$

Med begyndelsesbetingelsen:

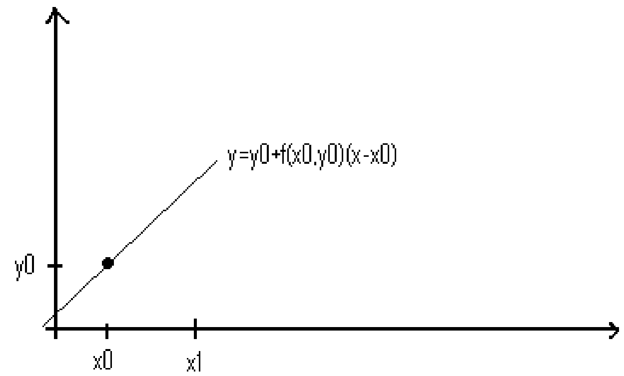
$$y(x_0) = y_0$$

Hvis vores funktion f er en glat funktion (dvs. at den kan differentieres bare én gang) i intervallet I da har vores $y'(x)$ med tilhørende begyndelsesbetingelse en entydig løsning for ethvert $x_0 \in I$ og $y_0 \in R$.

Denne løsning findes ikke eksplicit, men kan tilnærmes med numerisk beregning ved brug af Eulers metode. Man går ud fra at man kender et punkt (x_0, y_0) hvori tangenthældningen bliver:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= f(x_0, y(x_0)) \\ &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Ser vi det på en graf får vi:



Vi kan altså opskrive følgende:

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

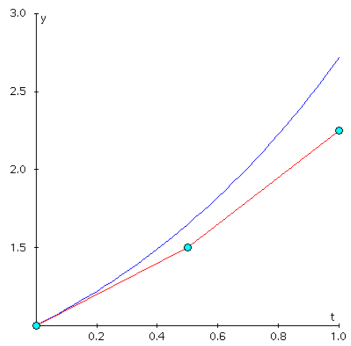
Altså en approksimation til vores graf y(x). Sætter vi $h = (x_1 - x_0)$ får vi:

Eulers første skridt -> $y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$

Eulers andet skridt -> $y(x_2) = y(x_1 + h) \approx y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$

Eulers n'te skridt -> $y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h$

Efter nogle skridt får man:



Som man kan se er der tale om to typer fejl:

1. Lokal fejl i stedet for at følge kurven i det k'te skridt så følger vi en 1. ordens Taylor.
2. Vi starter i et "forkert" punkt i det k'te skridt.

Ved denne metode skal der huskes på at der bliver brugt Taylor, skal der også tages højde for et restled:

$$y(x_1) = y_o + f(x_0, y_0)h + R_1(x_1)$$

Hvor

$$|R_1(x_1)| = \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

Den lokale fejl er dermed

$$|y(x_1) - y_1| = |R_1(x_1)| \le h^2 M$$

Som viser at Eulers metode er af anden orden.

Den globale fejl er derefter N gange lokale fejl

$$E = NMh^2 = M(b-a)h$$

da

$$Nh = b - a$$

Den globale fejl for Eulers metode er derfor af første orden.

Lokale fejl: $E_N = h^2 M = \left(\frac{b-a}{N}\right)^2 M$

$$\frac{E_N}{E_{2N}} = \frac{\left(\frac{b-a}{N}\right)^2 M}{\left(\frac{b-a}{2N}\right)^2 M} = 4$$

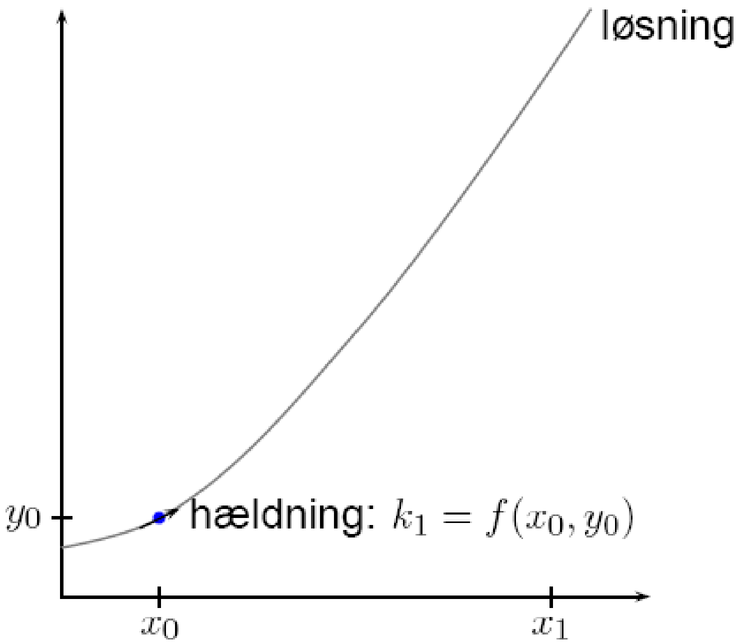
Fejlen bliver altså en faktor 1/4 mindre ved en fordobling af N.

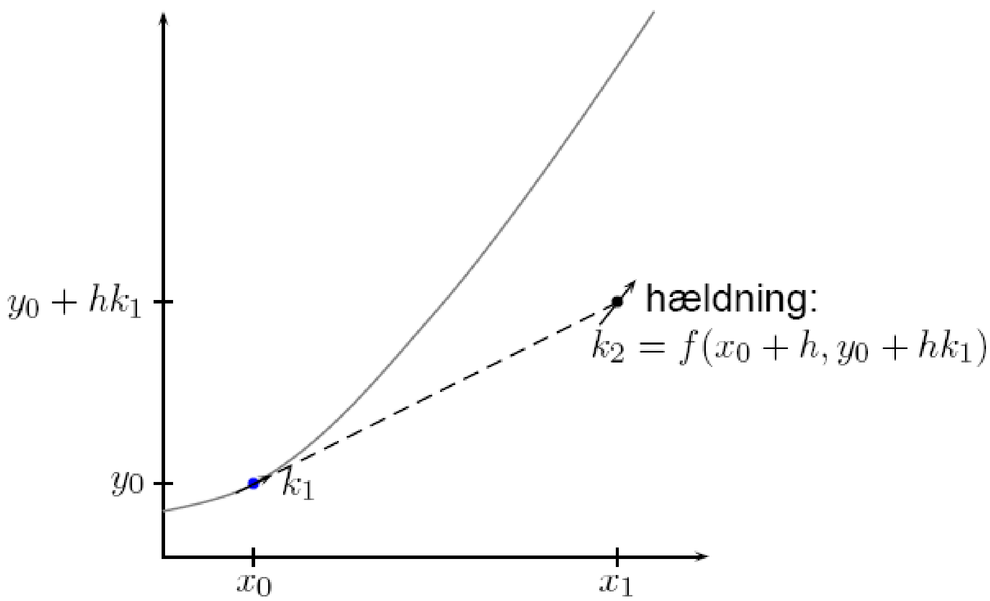
Modificeret Euler

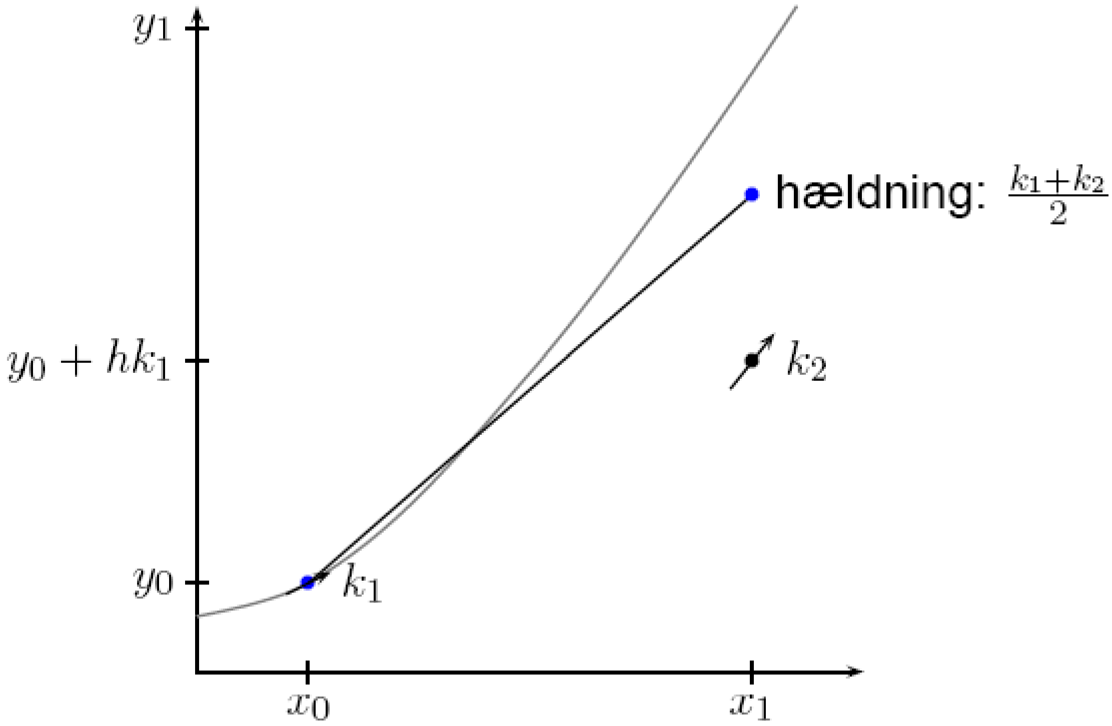
Generelt:

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[k_1 + k_2]$$

Hvor $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_{n+1}, y_n + h \cdot k_1)$.







y_1
hældning: $\frac{k_1+k_2}{2}$
$y_0 + hk_1$
k_2
y_0
k_1
x_0
x_1