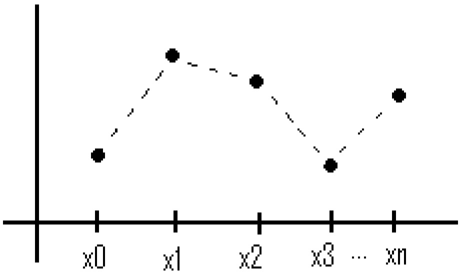
Interpolerende Lagrange-polynomier

Hvis vi om en funktion *f* kender nogle punkter $x_0, x_1, ..., x_n$ med tilhørende funktionsværdier $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ vil vi gerne kende forskriften for f(x) for således at kunne bestemme $x \notin \{x_0, x_1, ... x_n\}$

Altså x-værdier imellem punkterne, markeret som stiplede områder nedenfor:



Vi er derfor ude på at finde en approksimation sådan at følgende kommer til at være opfyldt:

$$\begin{aligned} &\hat{f}(x_0) = f(x_0) \\ &\vdots \\ &\hat{f}(x_n) = f(x_n) \end{aligned}$$

Til at finde disse approksimationer af polynomier benyttes Lagrange polynomier.

Hvis vi har en funktion med de kendte punkter $x_0, x_1, ..., x_n$ bliver polynomiet i n'te grad:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$$

Dvs. at der i ovenstående polynomium skal gælde:

$$\begin{aligned} &P(x_0) = a_n x_0^{\ n} + a_{n-1} x_0^{\ n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0) \\ &P(x_1) = a_n x_1^{\ n} + a_{n-1} x_1^{\ n-1} + ... + a_1 x_1 + a_0 = f(x_1) \\ &\vdots \\ &P(x_n) = a_n x_n^{\ n} + a_{n-1} x_n^{\ n-1} + ... + a_1 x_n + a_0 = f(x_n) \end{aligned}$$

Det nederste polynomium kaldes for Lagranges interpolerende polynomium.

Disse polynomier kan skrives på matrix form som:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\ 2} & \cdots & x_0^{\ n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\ 2} & \cdots & x_1^{\ n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Hvis vi kan finde polynomier l_j *(j=0,1,…,N)* af højest N'te orden så at

$$l_j(x_k) = \begin{Bmatrix} 1 & if\ j = k \\ 0 & if\ j \neq k \end{Bmatrix}$$

Kan vi opskrive polynomiet *p* som

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) l_j(x)$$

Hvor l_j er givet ved

$$l_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdots (x - x_N)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_N)}$$

Fejl ved Lagrange interpolation

$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_N)}{(N + 1)!} f^{(N+1)}(z)$$

For et eller andet $z \in [a, b]$, som afhænger af *x*.

Fejlen for $x \in [a, b]$ er givet ved

$$e_N = |f(x) - p(x)| \leq \frac{|x - x_0||x - x_1| \cdots |x - x_N|}{(N + 1)!} M \leq \frac{|b - a|^{N+1}}{(N + 1)!} M$$

Hvor

$$M = \max\left|f^{(N+1)}(y)\right|. \quad | \quad y \in [a, b]$$