Computerstøttet beregning

Lektion 5. Repetition

Martin Qvist

qvist@math.aau.dk

Det Ingeniør-, Natur-, og Sundhedsvidenskabelige Basisår

Aalborg Universitet

17. marts 2009

people.math.aau.dk/~qvist/teaching/csb-09

Newtons metode

Hurtig metode til at løse $f(x) = 0$. Vi benytter lineær appproksimation af f omkring begyndelsesgæt x_0 (svarende til 1. Taylorpolynomium)

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Newton iteration er derfor givet ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Svarer til fikspunkts-metoden med

$$g(y) = y - \frac{f(y)}{f'(y)}.$$

Egenskaber

Sætning: Lad f være to gange kontinuert differentiabel på $I = [a, b]$. Antag

1. $f(a)f(b) \leq 0$;
2. $f'(x) \neq 0$ for $x \in I$;
3. f'' har fast fortegn i I;
4. $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b - a$.

Da har $f(x) = 0$ en entydig løsning $s \in [a, b]$, og Newton iterationen konvergerer mod s for enhver begyndelsesværdi $x_0 \in [a, b]$.

Egenskaber

Sætning: Lad f være to gange kontinuert differentiabel på $I = [a, b]$. Antag

1. $f(a)f(b) \leq 0$;
2. $f'(x) \neq 0$ for $x \in I$;
3. f'' har fast fortegn i I;
4. $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b - a$.

Da har $f(x) = 0$ en entydig løsning $s \in [a, b]$, og Newton iterationen konvergerer mod s for enhver begyndelsesværdi $x_0 \in [a, b]$.
Kvadratisk konvergens: Hvis $e_n = |x_n - s|$ er

$$e_{n+1} \leq K e_n^2.$$

Følger af, at $f(s) = 0 \Rightarrow g'(s) = 0$.
Dette betyder omtrent at antallet af rigtige cifre fordobles for hver iteration.