Feedback: Details Report

[PRINT]

2010 Matematik 2A hold 4, Prøveeksamen juni 2010
Rasmus Veiergang Prentow, 5/31/10 at 8:38 AM

Question 1: *Score 10/10*

Der er givet en lineær afbildning fra $\boldsymbol{R}^n$, $n=$ 2, til $\boldsymbol{R}^m$, $m=$ 4 ved

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2\,x_1 \\ -x_1 - 2\,x_2 \\ -2\,x_1 \\ 2\,x_2 \end{pmatrix}$$

(i)

Bestem standardmatricen for denne lineære afbildning.
Svaret skal gives under brug af Maple syntax. En 3×4 matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

CORRECT

indtastes som
`Matrix([[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,11,12]])`

Your Answer: Matrix([[-2,0],[-1,-2],[-2,0],[0,2]])

Comment: Det korrekte svar er

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii)

Afgør, om den lineære afbildning T ovenfor er injektiv (på engelsk 'one-to-one'). Hvis T er injektiv, skriv `ja` i svarfeltet nedenfor. Hvis T ikke er injektiv, skriv `nej` i svarfeltet.
Bemærk, at svaret skal skrives som enten `ja` eller `nej` , altså små bogstaver. Svar som `Ja` og `JA` og `jA` vil være forkerte.

CORRECT

Your Answer: ja
Comment: No feedback provided with this question

(iii)

Afgør, om den lineære afbildning T ovenfor er surjektiv (på engelsk 'onto'). Hvis T er surjektiv, skriv `ja` i svarfeltet nedenfor. Hvis T ikke er surjektiv, skriv `nej` i svarfeltet.
Bemærk, at svaret skal skrives som enten `ja` eller `nej` , altså små bogstaver. Svar som `Ja` og `JA` og `jA` vil være forkerte.

CORRECT

Your Answer: nej
Comment: No feedback provided with this question

Comments:

Den reducerede echelonform af standardmatricen for T er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 2: *Score 0/15*

Der er givet en $n \times n$ matrix A med den egenskab, at søjlerne i A udspænder $\boldsymbol{R}^n$.
Markér alle sande udsagn nedenfor.

Choice	Selected	✔/✘	Points
A er diagonaliserbar.	Yes	✘	-1
Nul er ikke en egenværdi for A.	No	✘	
Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en ikke-triviel løsning.	No		
A er invertibel.	Yes	✔	+1

INCORRECT

Number of available correct choices: 2

Partial Grading Explained

Question 3: *Score 10/10*

Der er givet en matrix A ved

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og to elementære matricer E_1 og E_2 ved

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CORRECT

Matricen B fremkommer ved at anvende først rækkeoperationen givet ved E_1 og dernæst rækkeoperationen givet ved E_2.

Markér matricen B nedenfor.

Your Answer:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 4: *Score 15/15*

Der er givet en 3 $\times$ 4 matrix A. Besvar følgende to spørgsmål.

(a)

Angiv den største værdi, som dimensionen af søjlerummet for A, $\dim \operatorname{Col} A$, kan antage.
Skriv svaret som et tal nedenfor, for eksempel
3

CORRECT

Your Answer: 3

Comment: Svaret er 3.

(b)

Angiv den mindste værdi, som dimensionen af nulrummet for A, $\dim \operatorname{Nul} A$, kan antage.
Skriv svaret som et tal nedenfor, for eksempel
3

CORRECT

Your Answer: 1

Comment: Svaret er 1.

Question 5: *Score 15/15*

Der er givet et sæt $S = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ af vektorer i $\boldsymbol{R}^3$, hvor

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Besvar følgende to spørgsmål.

(a)

Er vektorerne i S lineært *uafhængige*?

CORRECT

Your Answer: Nej

(b)

Bestem dimensionen af $\mathrm{Span}S$. Skriv svaret som et tal nedenfor, for eksempel
`2`

CORRECT

Your Answer: 2

Comment: Dimensionen er 2

Question 6: *Score 15/15*

Der er givet et underrum

$$H = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Besvar følgende to spørgsmål.

(i)

Bestem en basis for H.
Svaret skal angives i Maple syntax som en komma-separeret liste af vektorer, for eksempel som
`Vector([1,0,0]),Vector([2,3,0])`

CORRECT

Your Answer: Vector([-1, 1, 1, 0]), Vector([0, -1, 1, 1]), Vector([0, 0, 0, -1]), Vector([-1, 0, 1, 1])

Comment:

Et muligt valg af basis er

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Der er mange andre baser.

(ii)

Find dimensionen af H. Skriv svaret som et tal nedenfor.

CORRECT

Your Answer: 4

Comment: Dimensionen er 4.

Question 7: *Score 10/10*

Der er givet en matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Besvar følgende tre spørgsmål.

(i)

Markér den matrix nedenfor, som er den reducerede echelon form af matricen A

CORRECT

Your Answer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

Find dimensionen af søjlerummet $\operatorname{Col} A$. Skriv svaret som et tal nedenfor.

CORRECT

Your Answer: 2

Comment: Dimensionen er 2.

(iii)

Find dimensionen af nulrummet $\operatorname{Nul} A$. Skriv svaret som et tal nedenfor.

CORRECT

Your Answer: 1

Comment: Dimensionen er 1.

Question 8: *Score 10/10*

Der er givet følgende lineære ligningssystem, bestående af tre ligninger i fire variable.

$$2\,x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 - x_4 = -1$$
$$-2\,x_1 - x_2 + 2\,x_4 = -4$$

Find den udvidede koefficientmatrix (totalmatricen) for dette system.
Svaret skal gives i Maple syntax for en matrix. Et eksempel er
`Matrix([[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,11,12]])`
Tryk på `preview` for at se matricen du har tastet ind.

CORRECT

Your Answer: Matrix([[2, 1, 1, 0, -1], [1, -2, 2, -1, -1], [-2, -1, 0, 2, -4]])

Comment: Den udvidede koefficientmatrix er $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Question 9: *Score 15/15*

Der er givet to invertible 3×3 matricer A og B ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgaven går ud på at bestemme den 3×3 matrix X, som opfylder ligningen
$AX^{-1} = B$.
Besvar følgende to spørgsmål.

(a)

Markér den korrekte formel for X.

CORRECT

Your Answer: $X = B^{-1}A$

(b)

Bestem løsningen X.
Svaret skal gives i Maple syntax. En $3x3$ matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

indtastes som
`Matrix([[1,2,3],[0,4,0],[5,0,6]])`

Your Answer: Matrix([[1, 3, 3], [1, 4, 0], [1, 3, 4]])

Comment: Løsningen er

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Question 10: *Score 15/15*

Der er givet en diagonaliserbar 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Besvar nedenstående to spørgsmål.

(i)

Bestem egenværdierne for A.

Svaret skal gives som tal adskilt af komma. Hvis egenværdierne er 1, -1, og 2, skal svaret gives som
`1,-1,2`
Hvis 1 er egenværdi med multiplicitet 2, og den tredje egenværdi er -4 skal svaret gives som
`-4,1,1`
altså gentagelse svarende til multiplicitet. Rækkefølgen betyder ikke noget.

Your Answer: 1,2,-2

Comment: Egenværdierne er -2, 1 og 2.

(ii)

Sorter de fundne egenværdier efter størrelse, og lad D betegne den 3×3 diagonalmatrix, der har den mindste egenværdi som indgang D_{11} og den største som indgang D_{33}.

Bestem en 3×3 invertibel matrix P, således at $A = PDP^{-1}$.
Svaret skal gives i Maple syntax for en matrix, for eksempel indtastes matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

som
`Matrix([[1,2,3],[0,4,5],[0,0,6]])`
Pas på, at du ikke bytter om på rækker og søjler. Brug preview funktionen til at se, at du har indtastet det, du mente at indtaste.

Your Answer: Matrix([[1, -2, 2], [0, 1, -1], [0, 0, 1]])

Comment: Et muligt korrekt svar er

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der er mange andre korrekte svar.

Question 11: *Score 10/10*

Der er givet en 3×3 matrix A ved

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1-a & a & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Her er a et vilkårligt reelt tal.
Besvar følgende to spørgsmål.

(a)

Beregn determinanten af A, $\det A$.

Svaret skal givet i Maple syntax. Et udtryk som $2a-4$ indtastes som
`2*a-4`

og et udtryk som $2a^2-3a+7$ indtastes som
`2*a^2-3*a+7`

CORRECT

Your Answer: a^2-a

Comment: Determinanten er lig med a^2-a.

(b)

Bestem den eller de værdier af a, for hvilke matricen A *ikke* er invertibel (*ikke* er regulær).

Svaret skal gives i Maple syntax. Hvis svaret er for eksempel $a=4$, skal tallet indtastes. Hvis svaret er for eksempel $a=4$ og $a=-2$, skal de to tal indtastes, separeret af et komma, som i
`4,-2`
Rækkefølgen betyder ikke noget.

CORRECT

Your Answer: 0,1

Comment: A er ikke invertibel for værdierne
$a=0$ og $a=1$

Question 12: *Score 10/10*

Der er givet et lineært ligningssystem bestående af to ligninger med fire ubekendte.

$$-x_1+x_2-2x_3-x_4=0$$
$$-x_1+x_2-2x_3+x_4=6$$

Besvar følgende to spørgsmål.

(i)

Bestem en løsning til dette *inhomogene* ligningssystem.
Svaret skal gives i Maple syntax, som en vektor, hvor alle indgange er tal. En vektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

indtastes som
`Vector([1,2,3])`

CORRECT

Your Answer: Vector([-3,0,0,3])

Comment: Et korrekt svar er

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der kan være mange andre korrekte svar.

(ii)

Bestem den fuldstændige løsning til det tilsvarende *homogene* ligningssystem. Svaret skal gives på parametriseret vektorform.

Hvis svaret for eksempel er $c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b}$, skal de to vektorer indtastes i Maple syntax, adskilt af et komma. For eksempel
`Vector([1,1,0,1]),Vector([-3,1,1,0])`

Koefficienterne c_1 og c_2 skal ikke indtastes. Hvis den eneste løsning er nulvektoren, skal en nulvektor med det rigtige antal komponenter indtastes som svar.

CORRECT

Your Answer: Vector([1,1,0,0]),Vector([-2,0,1,0])

Et korrekt svar er alle linearkombinationer af vektorerne i mængden

Comment: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Der kan være mange andre korrekte svar.
