Computerstøttet beregning

Lektion 3. Repetition

Martin Qvist

qvist@math.aau.dk

Det Ingeniør-, Natur-, og Sundhedsvidenskabelige Basisår

Aalborg Universitet

24. februar 2009

`people.math.aau.dk/~qvist/teaching/csb-09`

Taylors Formel

Lad f være en $N+1$ gange kontinuert differentiabel funktion på $I=(a,b)$.
Lad udviklingspunktet $x_0 \in I$ være fast, og lad evalueringspunktet $x \in I$.
Så gælder Taylors formel

$$f(x) = P_N(x) + R_N(x), \quad \text{hvor}$$

$$\begin{aligned} P_N(x) = f(x_0) &+ \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N \end{aligned}$$

kaldes det N'te *Taylorpolynomium* for f omkring udviklingspunktet x_0, og

$$R_N(x) = f(x) - P_N(x)$$

kaldes *restleddet* af orden N.

Restleddet

Man kan vise, at restleddet kan skrives på Lagrange formen

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(z)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}, \quad z \in \begin{cases} [x_0, x], & \text{hvis } x > x_0, \\ [x, x_0], & \text{hvis } x < x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Bemærk, at tallet z er ukendt; vi ved blot, at der findes et $z \in [x_0, x]$ (for $x > x_0$) så restleddet har formen (1).

Restleddet

Man kan vise, at restleddet kan skrives på Lagrange formen

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(z)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}, \quad z \in \begin{cases} [x_0, x], & \text{hvis } x > x_0, \\ [x, x_0], & \text{hvis } x < x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Bemærk, at tallet z er ukendt; vi ved blot, at der findes et $z \in [x_0, x]$ (for $x > x_0$) så restleddet har formen (1).

Intuition

- Jo mindre $|x - x_0|$ er, jo mindre er restleddet
- Jo større N er, jo mindre er restleddet

Evaluering af funktioner

Problem:

- En computer/lommeregner kan basalt set kun foretage addition og multiplikation
- Hvad sker der så inde i maskinen, når man beder sin computer/lommeregner om at beregne $e^2, \ln(3)$ eller lignende?

Evaluering af funktioner

Problem:

- En computer/lommeregner kan basalt set kun foretage addition og multiplikation
- Hvad sker der så inde i maskinen, når man beder sin computer/lommeregner om at beregne $e^2, \ln(3)$ eller lignende?

Løsning:

- Man kan anvende Taylorpolynomier til approksimativt at beregne elementære funktioner såsom $e^x, \ln(x) \ldots$ i en computer/lommeregner, idet evaluering af polynomier kun kræver addition og multiplikation.

Evaluering af funktioner

Problem:

- En computer/lommeregner kan basalt set kun foretage addition og multiplikation
- Hvad sker der så inde i maskinen, når man beder sin computer/lommeregner om at beregne $e^2, \ln(3)$ eller lignende?

Løsning:

- Man kan anvende Taylorpolynomier til approksimativt at beregne elementære funktioner såsom $e^x, \ln(x) \ldots$ i en computer/lommeregner, idet evaluering af polynomier kun kræver addition og multiplikation.
- I virkeligheden bruges mere effektive algoritmer, se eksempelvis afsnit 3.3 i Turners bog om CORDIC.

Funktionsevaluering - to spørgsmål

1. Hvor god en approksimation er Taylorpolynomiet $P_N(x)$ til $f(x)$?
   Vurdering på restleddet:

$$|f(x) - P_N(x)| = |R_N(x)| \leq \frac{M}{(N+1)!} |x - x_0|^{N+1} ,$$

   hvor M opfylder, at $|f^{(N+1)}(y)| \leq M$ for alle $y \in [x, x_0]$.

Funktionsevaluering - to spørgsmål

1. Hvor god en approksimation er Taylorpolynomiet $P_N(x)$ til $f(x)$? Vurdering på restleddet:

$$|f(x) - P_N(x)| = |R_N(x)| \leq \frac{M}{(N+1)!} |x - x_0|^{N+1},$$

hvor M opfylder, at $|f^{(N+1)}(y)| \leq M$ for alle $y \in [x, x_0]$.

2. Hvilket Taylorpolynomium skal vi bruge for approksimativt at evaluere f i et punkt $x \in I$ med en given *tolerance* ϵ? Dvs.

$$|f(x) - P_N(x)| \leq \epsilon.$$

Find konstanten M (udfra funktionen $f^{(N+1)}$; bemærk, at M kan afhænge af N), og bestem N sådan

$$\frac{M}{(N+1)!}|x - x_0|^{N+1} \leq \epsilon.$$

Praktiske valg

1. Vælg af udviklingspunkt x_0 sådan at $f(x_0), f'(x_0), f^{(2)}(x_0), \ldots, f^{(N)}(x_0)$ nemt kan beregnes.
2. Brug *Range Reduction*: Til evaluering af $\exp(2)$ kan vi enten direkte bruge Taylors formel med $x_0 = 0$, $x = 2$ eller udnytte at $\exp(2) = \exp(1)^2$, og således approksimere $\exp(1)$ med $x_0 = 0, x = 1$.
3. Smart valg af formel til approksimation.
   Eksempel: Til beregning af $\ln(2)$ kan vi tage udgangspunkt i
   (a) $f_1(x) = \ln(x+1)$, udviklingspunkt $x_0 = 0$ og evalueringspunkt $x = 1$.
   (b) $f_2(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, udviklingspunkt $x_0 = 0$ og evalueringspunkt $x = 1/3$.