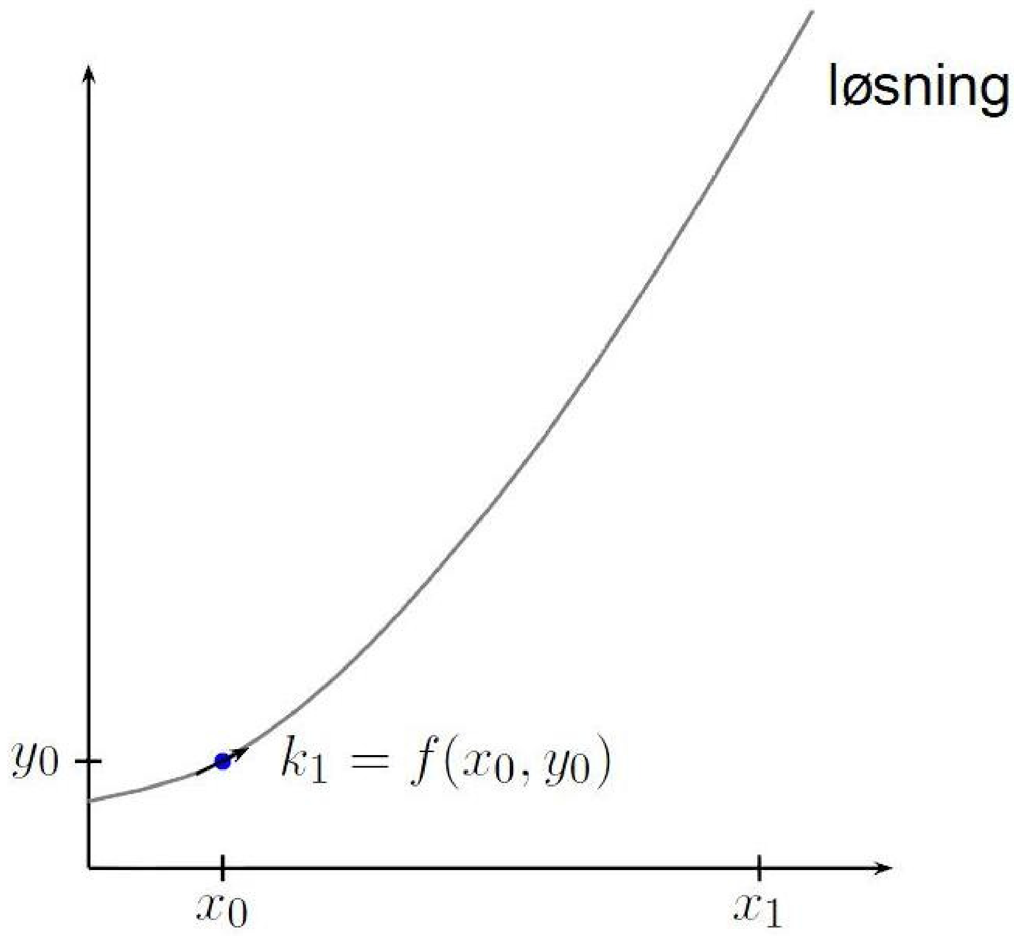
Vi skal nu se på numeriske løsninger af sædvanlige differentiale ligninger. Disse er skrevet på formen:

$$y'(x) = f(x, y) = f(x, y(x))$$

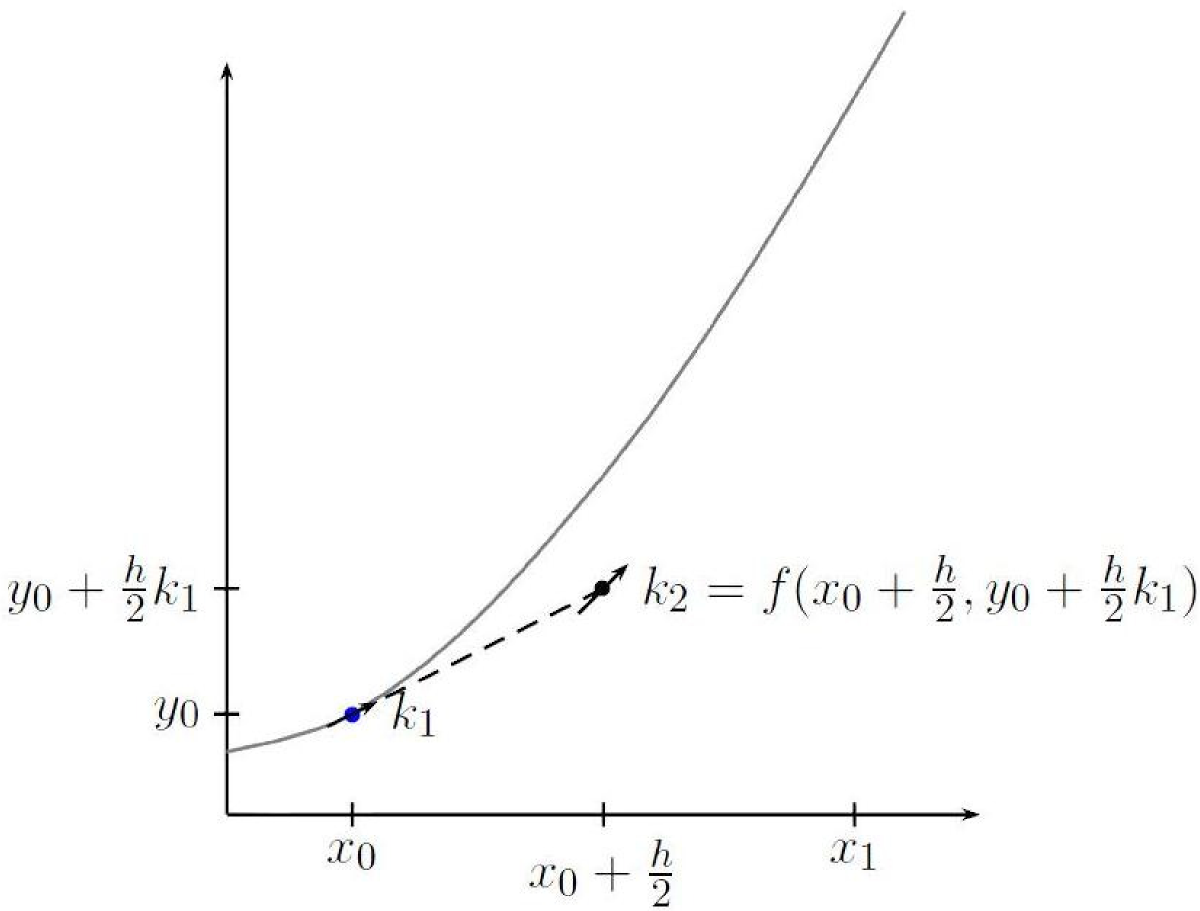
Med begyndelsesbetingelsen:

$$y(x_0) = y_0$$

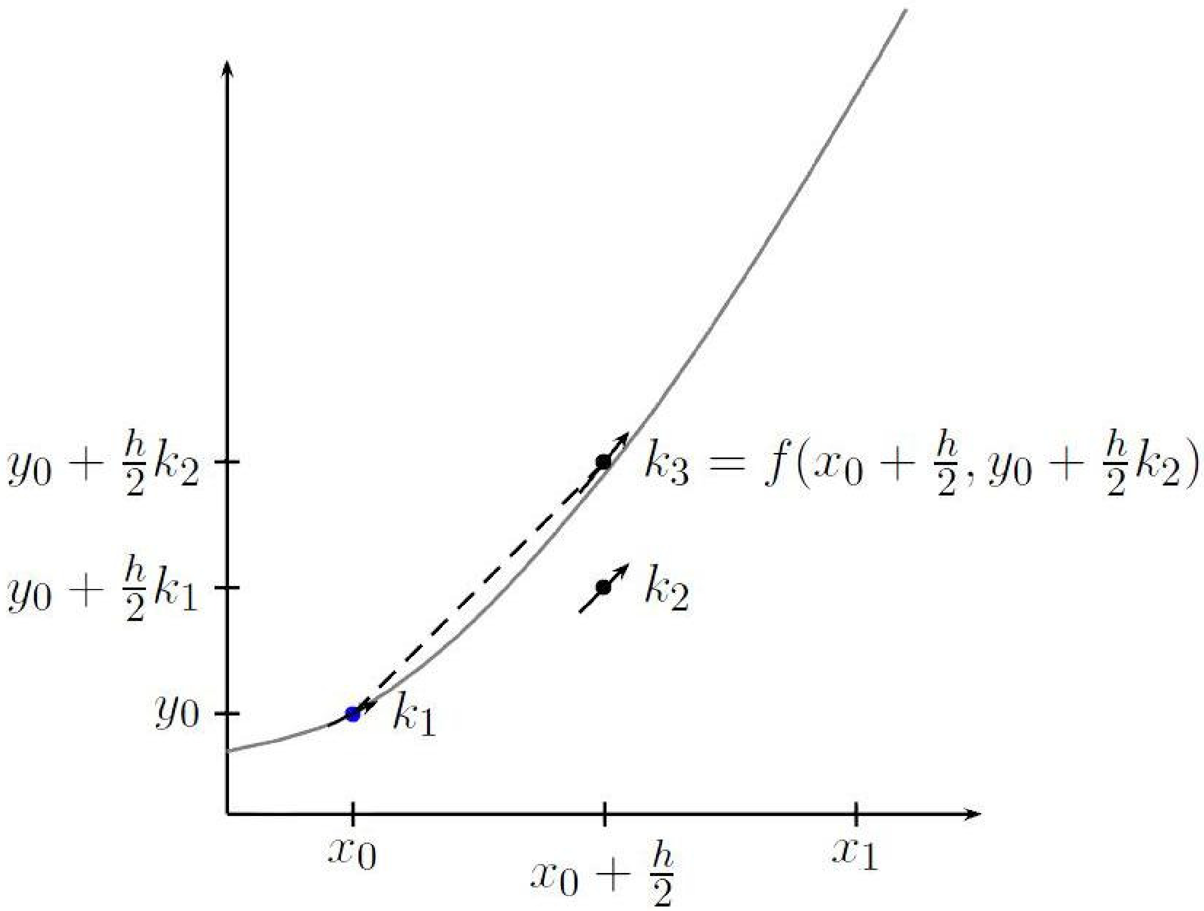
Hvis vores funktion f er en glat funktion (dvs. at den kan differentieres bare én gang) i intervallet I da har vores $y'(x)$ med tilhørende begyndelsesbetingelse en entydig løsning for ethvert $x_0 \in I$ og $y_0 \in R$.



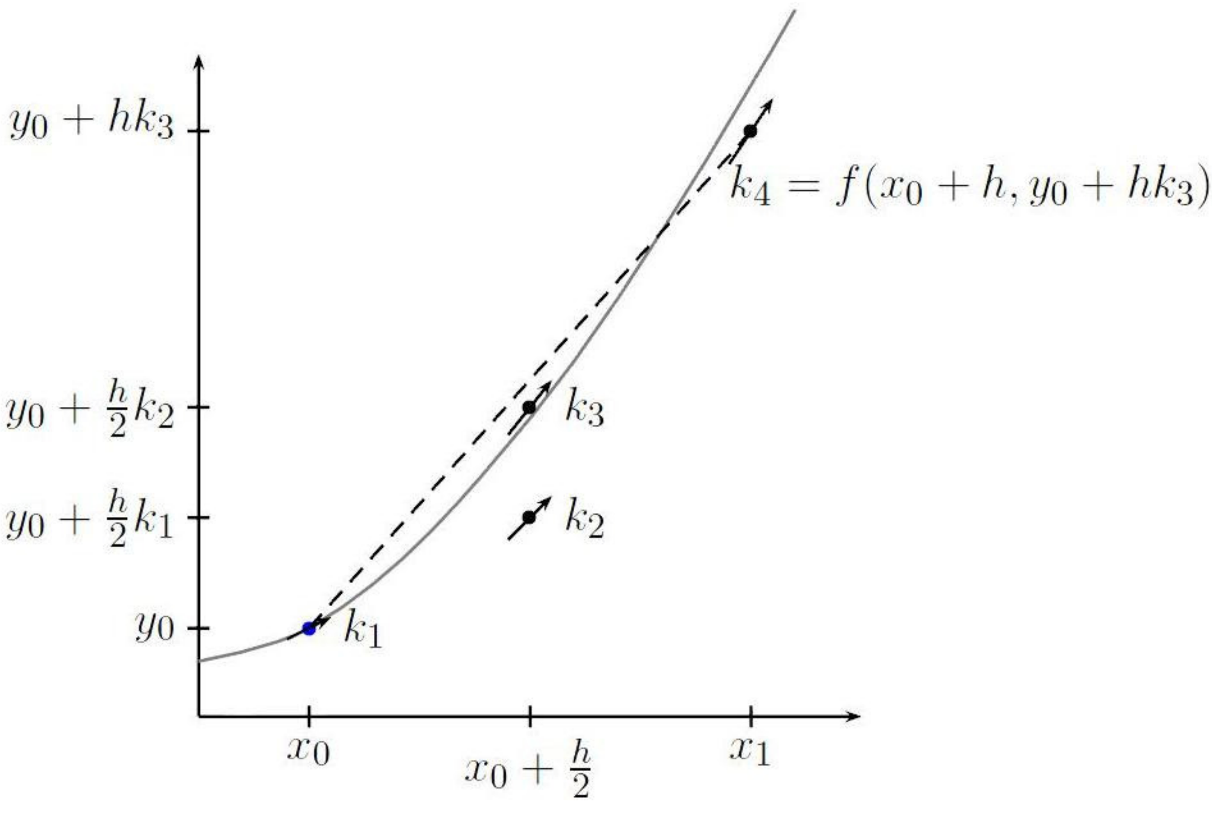
løsning
y_0
$k_1 = f(x_0, y_0)$
x_0
x_1



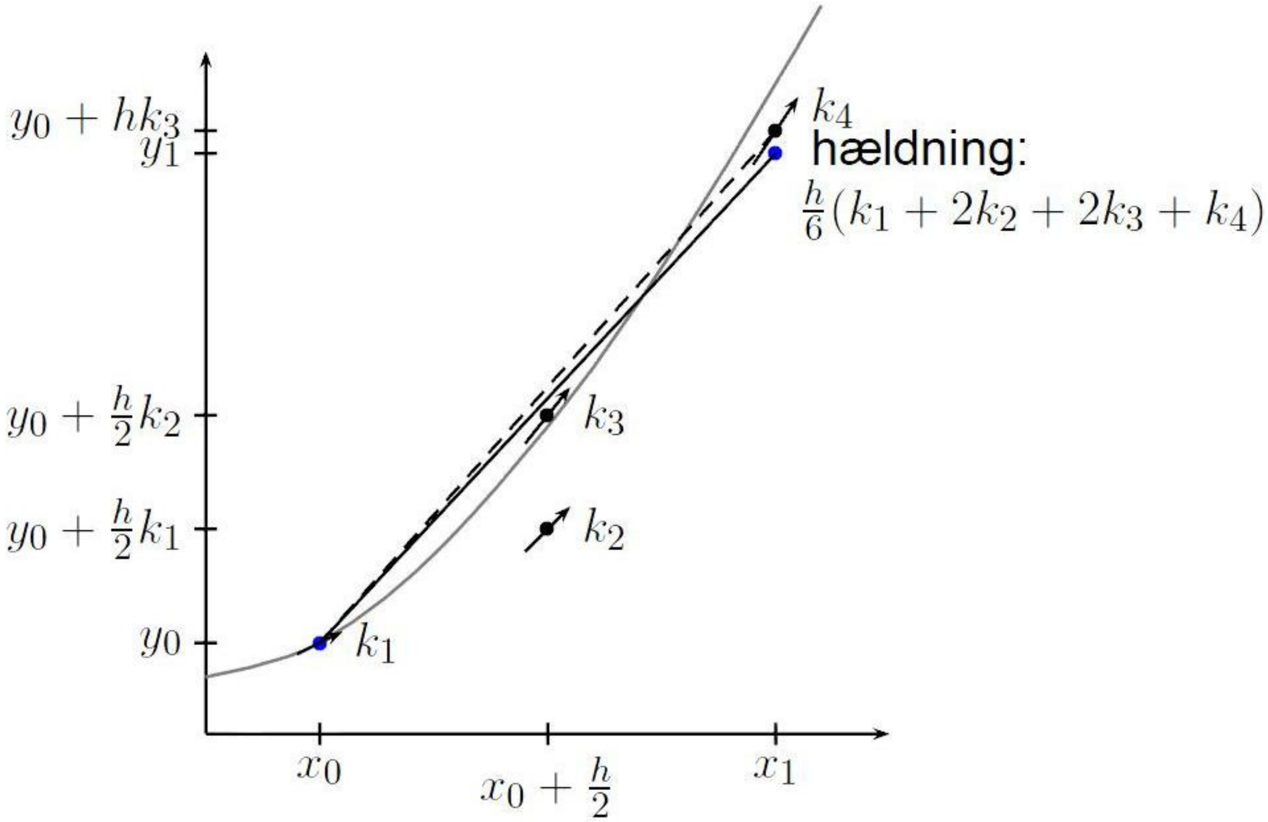
$y_0 + \frac{h}{2}k_1$
$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1)$
y_0
k_1
x_0
$x_0 + \frac{h}{2}$
x_1



$y_0 + \frac{h}{2}k_2$
$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2)$
$y_0 + \frac{h}{2}k_1$
k_2
y_0
k_1
x_0
$x_0 + \frac{h}{2}$
x_1



$y_0 + hk_3$
$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3)$
$y_0 + \frac{h}{2}k_2$
k_3
$y_0 + \frac{h}{2}k_1$
k_2
y_0
k_1
x_0
$x_0 + \frac{h}{2}$
x_1



Generelt:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{6}\big[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\big],
\end{aligned}
$$

hvor

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f\big(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\big), \\
k_3 &= f\big(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\big), \\
k_4 &= f(x_{n+1}, y_n + hk_3).
\end{aligned}
$$

Metoden er en fjerdeordens metode, dvs.

$$E_N = |y_N - y(b)| \leq Ch^4$$

hvor $h = \frac{b-a}{N}, \quad x_0 = a.$

Convergens

Da det er en fjerde ordensmetode gælder det at $E_N = |y_N - y(b)| \leq Ch^4$ og da $h = \frac{b-a}{N}$ vil det gælde at:

$$E_N \leq C\frac{(b-a)^4}{N^4}$$

Det medfører at hvis

$$\frac{\frac{(b-a)^4}{N^4}}{\frac{(b-a)^4}{(2N)^4}} = 16$$