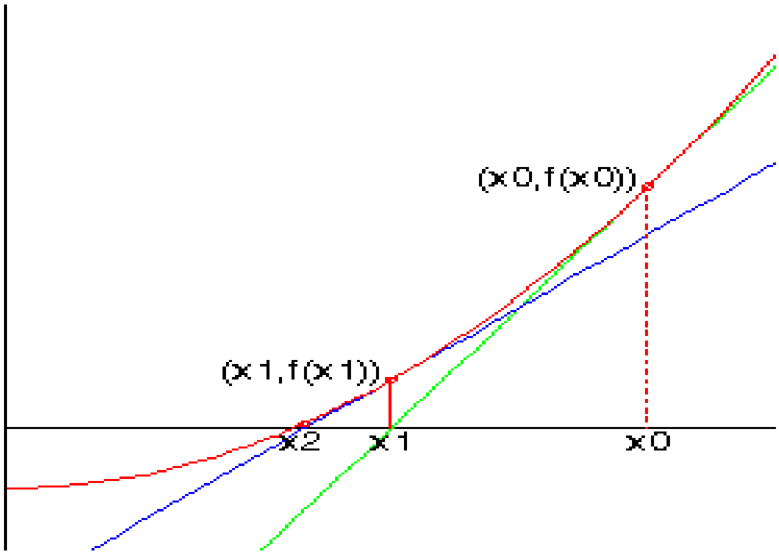
Newtons Metode

Ved Newtons metode benyttes kvadratisk konvergens til løsning af f(x) = 0. Fremgangsmåden er at man starter med et x_0 og i dette punkt laver man en tangent til f(x_0). Ved denne tangent finder man skæringen med x-aksen som nu bliver til x_1.

Vi kan se det som en skitse på følgende:



Den første tangents ligning bliver altså:

$$y_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Og denne sættes lig nul for at finde det næste x:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow$$
$$f(x_0) = -f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$
$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x$$

Dvs. at:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ved at gentage dette får vi Newtons iterations formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, (n = 0,1,2,...)$$

I alle tilfældene gælder der at nævneren ikke må være nul.

Newtons metode bruger altså iterationsfunktionen

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Hvis afledede er givet ved

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{|f'(x)|^2} = \frac{f(x)f''(x)}{|f'(x)|^2}$$

Da

$$f(s) = 0$$

Følger det at

$$g'(s) = 0$$

Altså er funktionen kvadratisk konvergent.