نوید نفیری ۹۸۲۹۵۴۴

Subject: تکلیف هفتم :
Year: Month: Day: page: ( )

۱) $x[n] = (-1)^n = e^{j\pi n} = \cos(\pi n) \longrightarrow$ ضرایب فرد πn

$x(t) = \cos(\omega_0 t)$, $T_s = 10^{-3}$

در رابطه برقرار است.

نمونه‌برداری از $x(t) \longrightarrow x[n \times T_s] = \cos(\omega_0 n \times T_s)$

که مقدار نمونه‌برداری شده باید به جای $\cos((2k+1)\pi n)$ شود (ضرایب فرد n در $\cos(\pi n)$)

$\Rightarrow \cos(\omega_0 . n . T_s) = \cos((2k+1) n \pi)$

$\Rightarrow \omega_0 T_s = (2k+1)\pi \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{(2k+1)\pi}{T_s}$

$\Rightarrow k = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{3\pi}{10^{-3}} = 3\pi \times 10^3 \\ \omega_0 = 5\pi \times 10^3 \\ \omega_0 = 7\pi \times 10^3 \\ \vdots \end{cases}$

$T_s = 10^{-4}$, $X(\omega)$, $x(t)$ $\qquad \omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s} = 20000\pi$

الف) $X(\omega) = 0$ for $|\omega| > 5000\pi$ ✓

طبق قضیه نمونه‌برداری داریم:

$\omega_s > 2\omega_M$

$20000\pi > 2 \times 5000\pi \Rightarrow$ سیگنال قابل بازیابی است ✓

ب) $X(\omega) = 0$ for $|\omega| > 15000\pi$ ✗

شرط بازیابی $\longrightarrow \omega_s > 2\omega_M$

$20000\pi \not> 2 \times 15000\pi \Rightarrow$ تضمینی برای قابل بازیابی بودن نیست

ج) $Re\{X(\omega)\} = 0$ for $|\omega| > 5000\pi$ ✗

چون $Im\{X(\omega)\}$ محدود نشده است ← چون از شرط‌های بازیابی ← داشتن باند محدود است

← تضمینی به بازیابی قابل نیست

Arman

د) حقیقی $x(t)$, $X(w)=0$ for $w > 5000\pi$

چون $x(t)$ حقیقی و $2\times 5000\pi < 20000\pi$ ⟸ شرط برقرار است

⟸ $x(t)$ قابل بازیابی است.

ه) $x(t)$ حقیقی ، $X(w)=0$ for $w < -15000\pi$

چون w باند بالا ندارد و از سمت مثبت محدود نشده است

← پس تضمینی به قابل بازیابی بودن $x(t)$ نیست

$2\times 15000\pi \not< 20000\pi$

و) $X(w) * X(w) = 0$ for $|w| > 15000\pi$

چون $X(w)$ با خودش کانوالو شده است ← اگر $X(w)$ مقدارش بین

$|w|<w_1$ باشد ← با کانوالو آن با خودش ← محدوده به صورت $|w|<2w_1$ می‌شود

← پس برای $X(w)$ ← داریم: $|w| > 7500\pi$ ⟸ شرط برقرار است

↳ $20000\pi > 2\times 7500\pi$ ⟹ قابل بازیابی است

ز) $|X(w)| = 0$ for $w > 5000\pi$

در این کنش فقط محدوده مثبت شرط دارد و مقادیر $w < -5000\pi$ گفته نشده که

کلا صفر است ← پس تابع از دو سمت دارای باند محدود نیست

⟸ شرط برقرار نیست ⟸ قابل بازیابی نیست

---

3) نرخ نایکوییست w_s برای $x(t)$ باشد.

الف) $x(2t)$ ⟶ در حوزه زمان جمع می‌شود ⟶ در حوزه فرکانس باز می‌شود

← $w_s' = 2w_s$

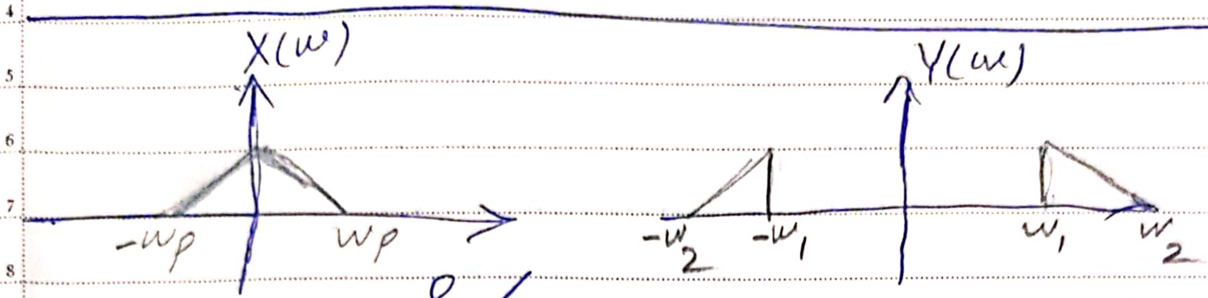
ب) $x^2(t) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} X(w) * X(w)$ ⟹ کانوالو باعث می‌شود دامنه دو برابر شود ⟹ $w_s' = 2w_s$

ج) $x(t) * x(t) \Rightarrow X^2(w)$ ⟹ تاثیری ندارد ⟹ $w_s' = w_s$ Arman

ز) $\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow j\omega X(\omega) \longrightarrow$ تاثیری ندارد $\longrightarrow \omega_s' = \omega_s$

و) $x(t) - x(t+2)$ تاثیری روی محدوده ندارد $\longrightarrow \omega_s' = \omega_s$

(4



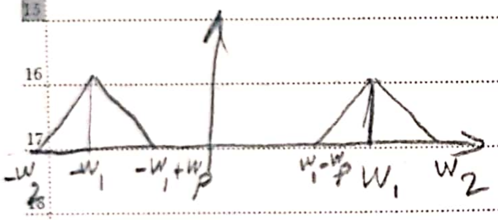
مقادیر T و ω_c = ؟ تا بتوان x(t) را بازیابی کرد

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_p = \omega_2 - \omega_1$

طبق قضیه نایکوییست اگر بخواهیم پس از نمونه برداری از y(t) بتوانیم دوباره به همین y(t) برگردیم در این صورت کافی است که قضیه نایکوییست را برای y(t) رعایت کنیم یعنی $\frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_2$ باشد.

اما اگر بخواهیم مستقیم به x(t) برگردیم می توانیم $\omega_s = \omega_1$ قرار دهیم که در آن صورت شکلی مانند زیر خواهیم داشت:



شرط: $\omega_1 - \omega_p > -\omega_1 + \omega_p \Rightarrow \omega_1 - \omega_p > 0$

در این صورت: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_1}$

با یک شیفت و LPF با $\omega_c = \omega_2 - \omega_1 = \omega_p$ $\longleftarrow$ می توانیم به x(t) برسیم.

(5 $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(20k\pi t)$, $\omega_c = 4\pi$, $T = 5\times10^{-3}$

فرمول اویلر: $\cos w_0 n = \frac{1}{2} e^{jw_0 n} + \frac{1}{2} e^{-jw_0 n}$

page: (   )

Subject:
Year: Month: Day:

$$x[n] = (a)^n \cos(w_0 n)\, u[n] \quad , \quad 0 < a < 1 \qquad (6$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a)^n \cos(w_0 n)\, u[n]\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a)^n \cos(w_0 n)\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a)^n \left(\frac{1}{2} e^{jw_0 n}\right) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (a)^n \left(\frac{1}{2} e^{-jw_0 n}\right) z^{-n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{jw_0} z^{-1}\right)^n} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-jw_0} z^{-1}\right)^n}$$

همگرایی: $|a e^{jw} z^{-1}| < 1$ — $a e^{jw} < |z|$

همگرایی: $|a e^{-jw} z^{-1}| < 1$ — $a e^{-jw} < |z|$

از دو ناحیه بالا اشتراک می‌گیریم تا ناحیه همگرایی را بیابیم:

$$ROC: \max(a e^{jw}, a e^{-jw}) < |z|$$

که در این صورت داریم:

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(a e^{jw_0} z^{-1}\right)^{\infty+1}}{1 - a e^{jw_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1 - \left(a e^{-jw_0} z^{-1}\right)^{\infty+1}}{1 - a e^{-jw} z^{-1}}$$

$\to 0$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - a e^{jw} z^{-1}} + \frac{1}{1 - a e^{-jw} z^{-1}}\right)$$

$$ROC: \max(a e^{jw}, a e^{-jw}) < |z|$$

Arman

(7

$$X(z) = \frac{6-13z^{-1}}{3z^{-2}-7z^{-1}+2} = \frac{6-13z^{-1}}{(3z^{-1}-1)(z^{-1}-2)}$$

$$= \frac{X}{3z^{-1}-1} + \frac{Y}{z^{-1}-2} \Longrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ Y = -4 \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{-1}{3z^{-1}-1} + \frac{-4}{z^{-1}-2} = \frac{1}{1-3z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\xrightarrow[\text{تبدیل وارون } Z]{Z^{-1}} x[n] = 3^n u[n] + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

به شرطی که ناحیه همگرایی در $X(z)$ به این صورت باشد

$$|z| > |3| \cap |z| > \left|\tfrac{1}{2}\right|$$

$$\rightarrow \text{ROC}: |z| > |3|$$

(8

$$x[n] = y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2]$$

(الف

$$X(z) = Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z)$$

$$\Longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

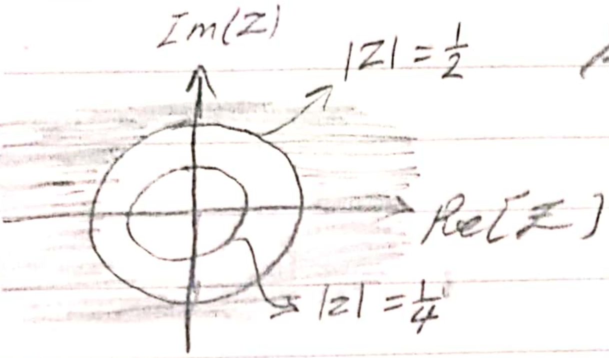
$$= \frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Longrightarrow$$

قطب : $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$

$$\text{ROC}: |z| > \tfrac{1}{2} \text{ و } |z| > \tfrac{1}{4}$$

$$\rightarrow h[n] = -\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

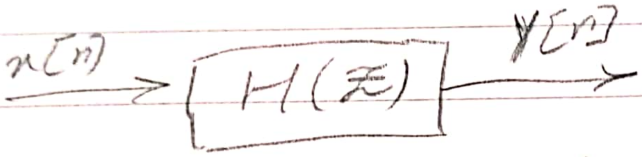
ب) ROC 8 درخارج خارجی‌ترین قطب قرار دارد.



به‌ازای هیچ مقداری $X(z)=0$ نمی‌شود ← صفر ندارد.

ج) پاسخ به :

$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$



$x[n]$ را به فضای z تبدیل می‌کنیم:

$X(z) = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})z^{-1}}$ $\quad |z| > \frac{1}{2}$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{-1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$= \frac{-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{+1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$\rightarrow y[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$, بشرطی که $|z| > \frac{1}{4}$