به‌نام آفریننده بیت‌ها

دانشکده‌ی برق و کامپیوتر

دانشگاه صنعتی اصفهان

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ - ۱۴۰۲

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین اول

نام:

دانیال خراسانی‌زاده

شماره دانشجویی:

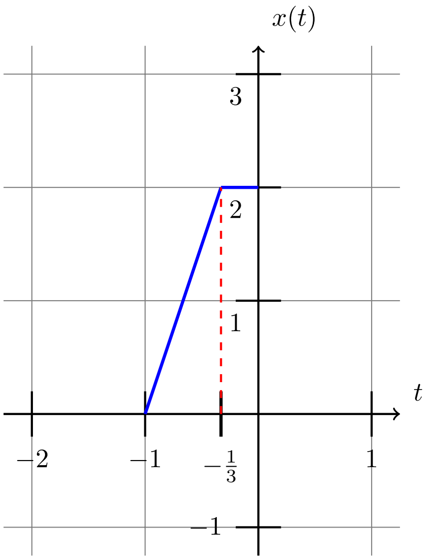
۹۹۲۲۳۹۳

استاد درس:

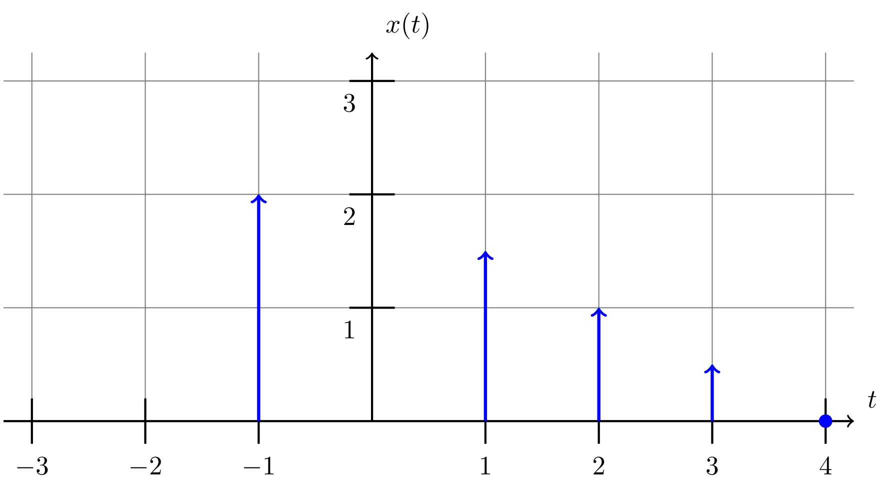
دکتر نقش

۱

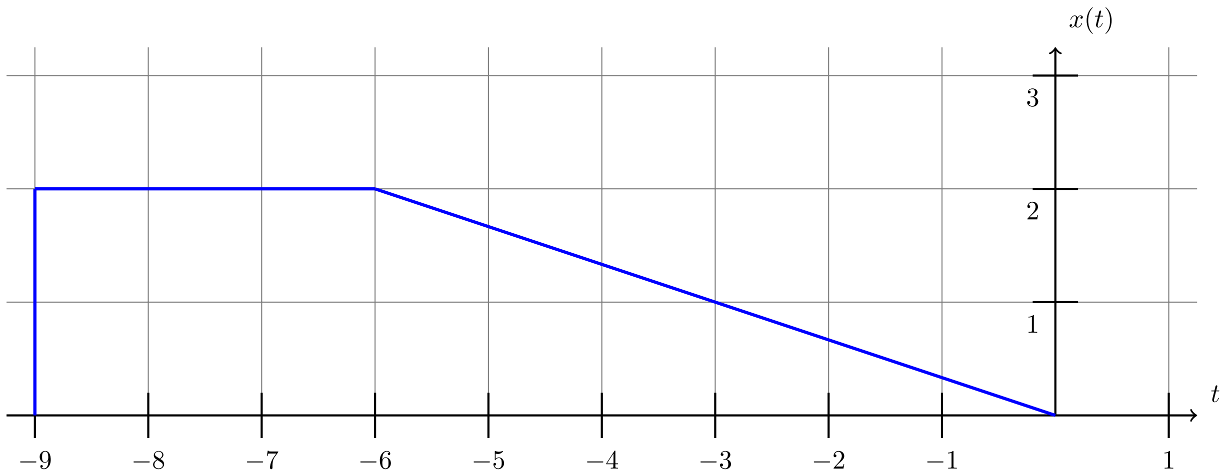
۱.۱



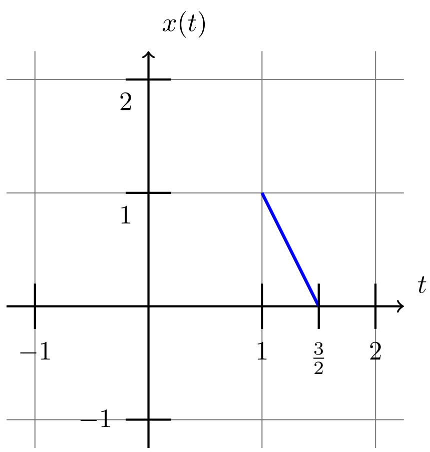
۲.۱



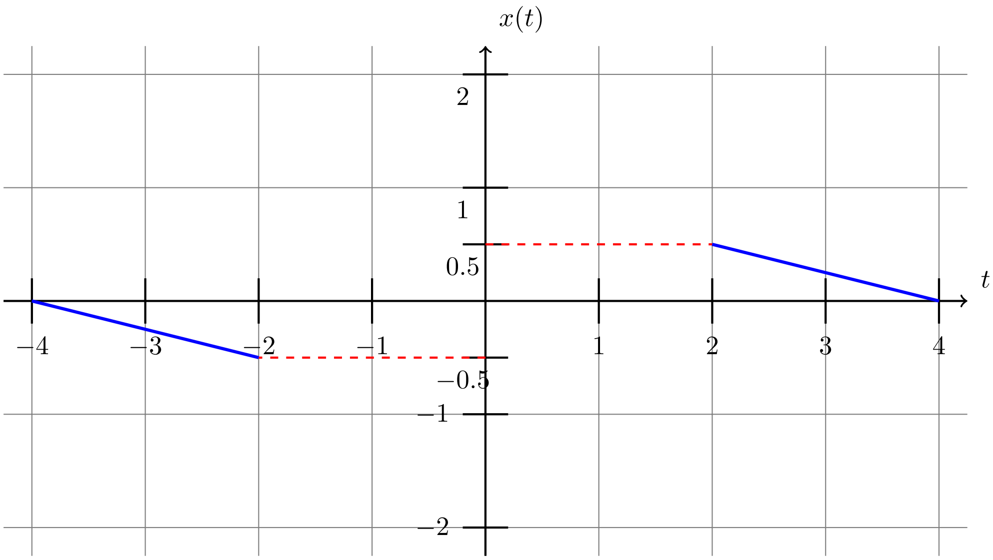
۳.۱



۴.۱

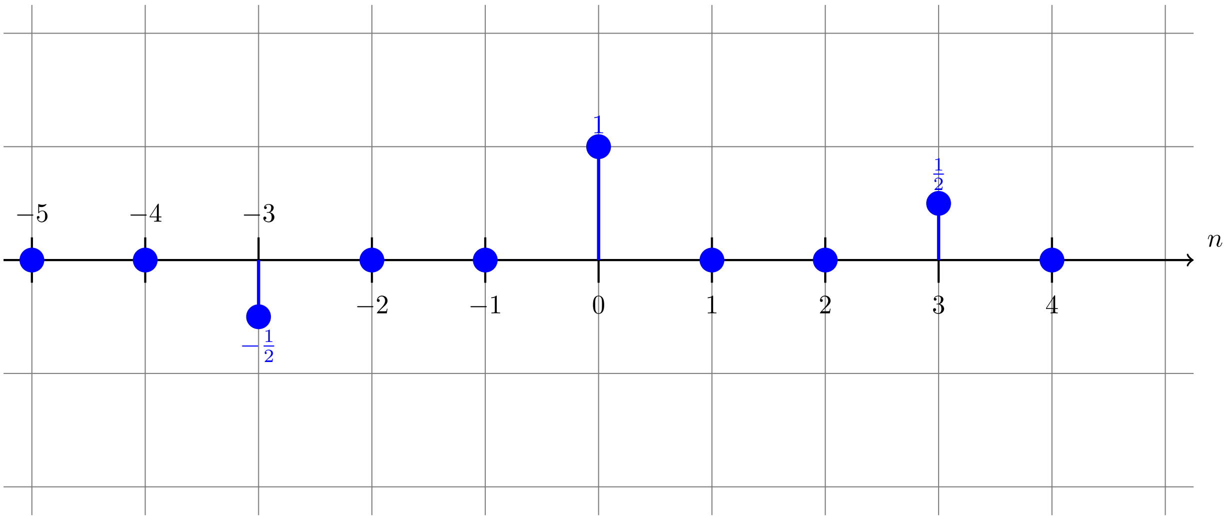


۵.۱

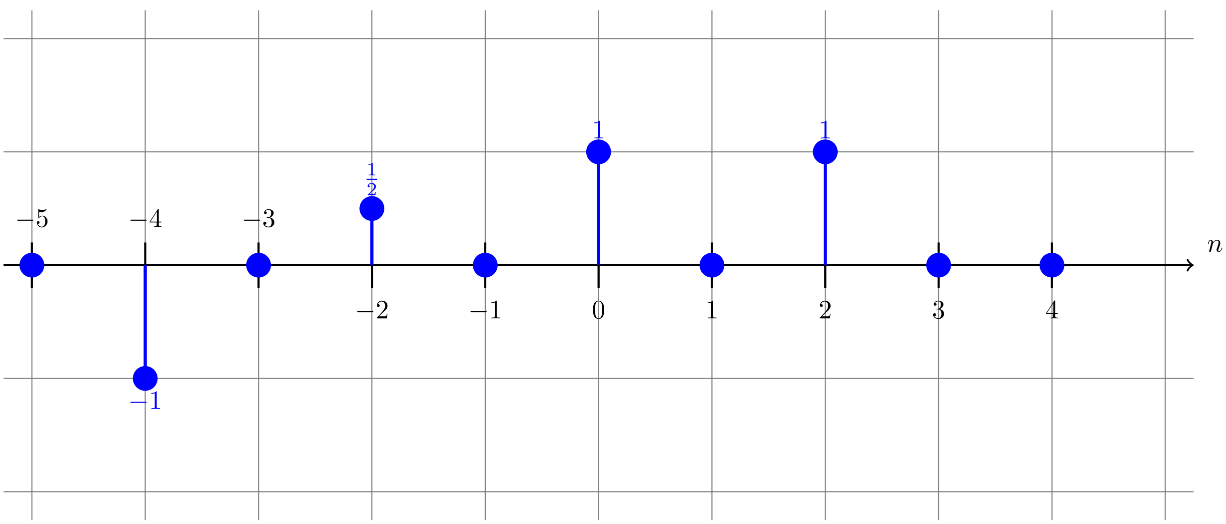


۲

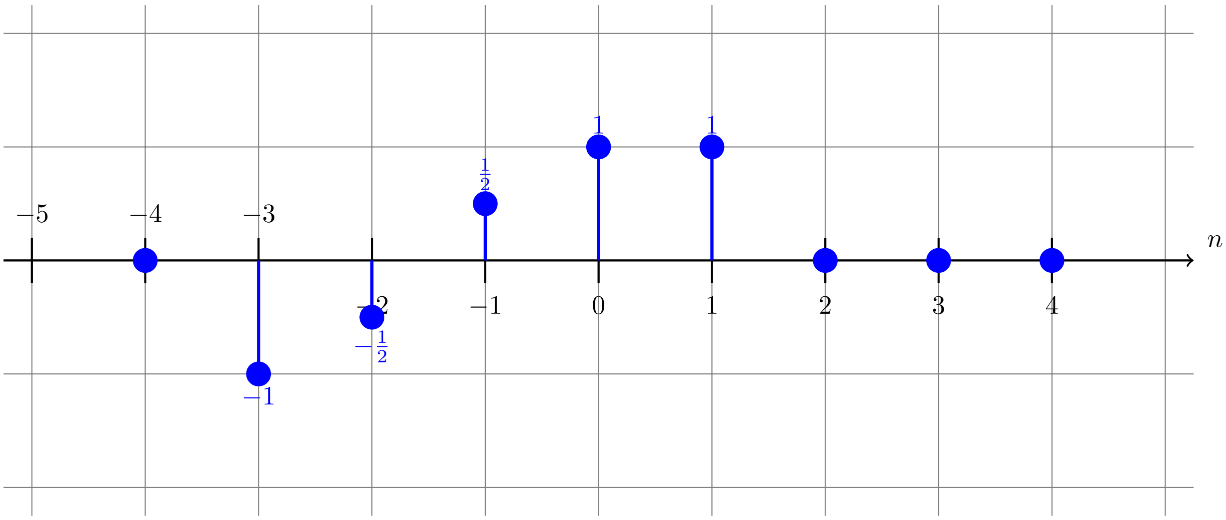
۱.۲



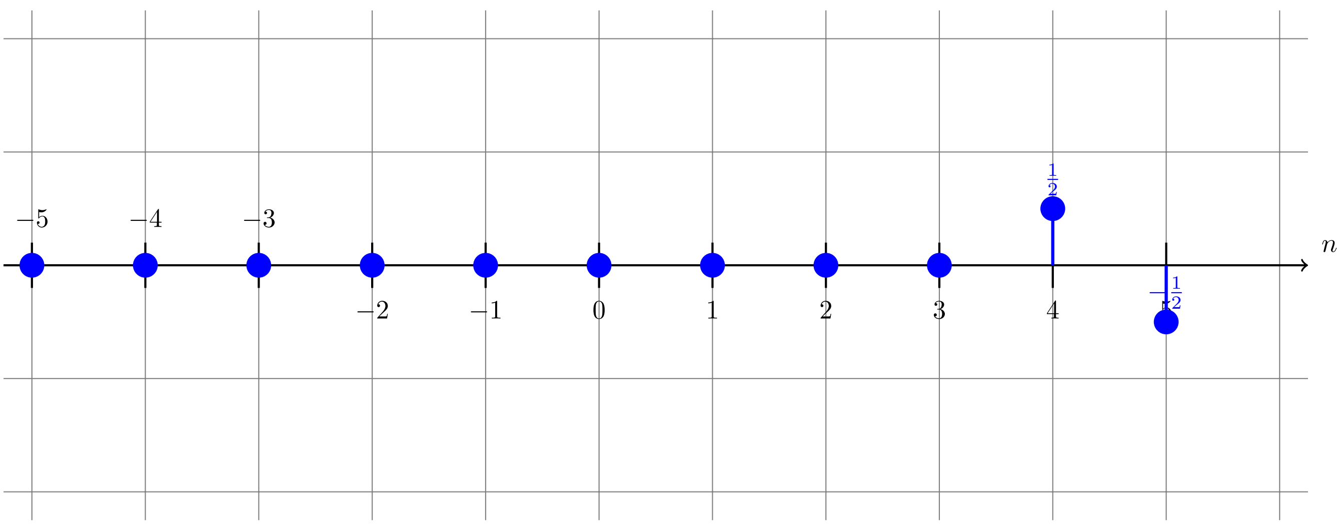
۲.۲



۳.۲



۴.۲



۳

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] + x[0] = \sum_{n=1}^{\infty} x[-n] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] + x[0]$$
$$\xrightarrow{x[n]=-x[-n]} -\sum_{n=1}^{\infty} x[n] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] + x[0] = x[0] = 0 \tag{۱}$$

$$k[n] = x_1[n]x_2[n]$$
$$k[-n] = x_1[-n]x_2[-n]$$
$$\xrightarrow[x_2[-n]=x_2[n]]{x_1[-n]=-x_1[-n]} k[-n] = -x_1[n]x_2[n] = -k[n] \tag{۲}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_e[n] + x_o[n])^2$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} {x_e}^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} {x_o}^2[n] + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_e[n]x_o[n])^2$$
$$\xrightarrow[by\ 1\ sum\ of\ odd\ function\ is\ 0]{by\ 2\ x_e[n]x_o[n]\ is\ odd} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {x_e}^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} {x_o}^2[n] \tag{۳}$$

می‌توان معادلات ۱، ۲ را برای توابع پیوسته زمان به همین شکل اثبات کرد. بر این اساس داریم:

$$\int_{n=-\infty}^{\infty} x^2(t) = \int_{n=-\infty}^{\infty} (x_e(t) + x_o(t))^2$$
$$= \int_{n=-\infty}^{\infty} {x_e}^2(t) + \int_{n=-\infty}^{\infty} {x_o}^2(t) + 2\int_{n=-\infty}^{\infty} (x_e(t)x_o(t))^2$$
$$\xrightarrow[by\ 1\ integral\ of\ odd\ function\ is\ 0]{by\ 2\ x_e(t)x_o(t)\ is\ odd} = \int_{n=-\infty}^{\infty} {x_e}^2(t) + \int_{n=-\infty}^{\infty} {x_o}^2(t) \tag{۴}$$

۴

می‌دانیم که پریود سیگنال‌های سینوسی پیوسته زمان به شکل $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi)$ برابر $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ و پریود جمع چند سیگنال برابر ک.م.م. پریود آن سیگنال‌ها است. همچنین پریود سیگنال‌های سینوسی گسسته زمان به شکل $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \Phi)$ برابر $N = m(\frac{2\pi}{|\omega_0|})$ است.

1. $x(t) = \frac{\cos(4\pi t)}{2}$, Period = $\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$
2. $x(t) = e^{j(\pi t-1)} \rightarrow e^{j(\pi t-1)} = e^{j(\pi(t+T)-1)} \rightarrow e^{j\pi T} = 1 \rightarrow \pi T = 2k\pi \rightarrow T_0 = 2$
3. Period = $LCM(\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}, \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}, \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}) = LCM(8, 16, 4) = 16$
4. $x[n] = \frac{\cos(\frac{3\pi n}{4}) + \cos(\frac{\pi n}{4})}{2}$, Period = $LCM(\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}}, \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}) = LCM(\frac{8}{3}, 8) = 8$

۵

۱.۵

* با توجه به اینکه در $t \geq |x(t)|$ نیاز به مقدار $x(-t)$ داریم حافظه دار است.
* با توجه به اینکه شرط نیاز به حافظه فقط در زمان‌های مثبت برقرار می‌شود، سیستم علی است.
* اگر $t \rightarrow -\infty$ مقدار خروجی از $tx(t)$ بدست می‌آید که نامحدود خواهد شد پس سیستم پایدار BIBO نیست.
* اگر ورودی $x_1(t) = \delta(t)$ را به سیستم بدهیم $y_1(t) = 0$ خواهد بود و اگر ورودی $x_2(t) = \delta(t-1)$ را به سیستم بدیهم $y_2(t) = t\delta(t-1)$ خواهد بود، پس سیستم TI نیست.
* در صورتی که اندازه t از اندازه یکی از سیگنال‌های ورودی بزرگ‌تر و از اندازه دیگری کوچکتر باشد، خاصیت جمع آثار برقرار نخواهد بود پس سیستم خطی نیست.

۲.۵

$y[n] = \begin{cases} x^*[\frac{n}{2}] & n = 2m \\ 0 & n = 2m+1 \end{cases}$

* با توجه به اینکه در هر لحظه به مقدار سیگنال در تمامی لحظات نیاز داریم سیستم حافظه دار است.
* با توجه به اینکه در هر لحظه به مقدار سیگنال در زمان‌های $k > n$ نیز نیاز داریم سیستم علی نیست.
* اگر $|x[n]| < M$ داریم: $if\ n = 2m \rightarrow |y[n]| = |x^*[\frac{n}{2}]| = |x[\frac{n}{2}]| < M,\ if\ n = 2m+1 \rightarrow |y[n]| = 0$ پس سیستم پایدار BIBO است.
* اگر ورودی $x_1[n] = \delta[n]$ را به سیستم بدهیم $y_1[n] = \delta[n]$ خواهد بود و اگر ورودی $x_2[n] = \delta[n-1]$ را به سیستم بدیهم $y_2[n] = \delta[n-2]$ خواهد بود، پس سیستم TI نیست.
* اگر $x[n] = 1+j \xrightarrow{jx[n]} y[n] = \begin{cases} -1-j & n = 2m \\ 0 & n = 2m+1 \end{cases} \neq jy[n] = \begin{cases} 1+j & n = 2m \\ 0 & n = 2m+1 \end{cases}$ پس سیستم خطی نیست.
با توجه به اینکه اپراتور مزدوج مختلط باعث از بین رفتن خاصیت خطی شده، می‌توان با حذف آن یک سیستم خطی ساخت.

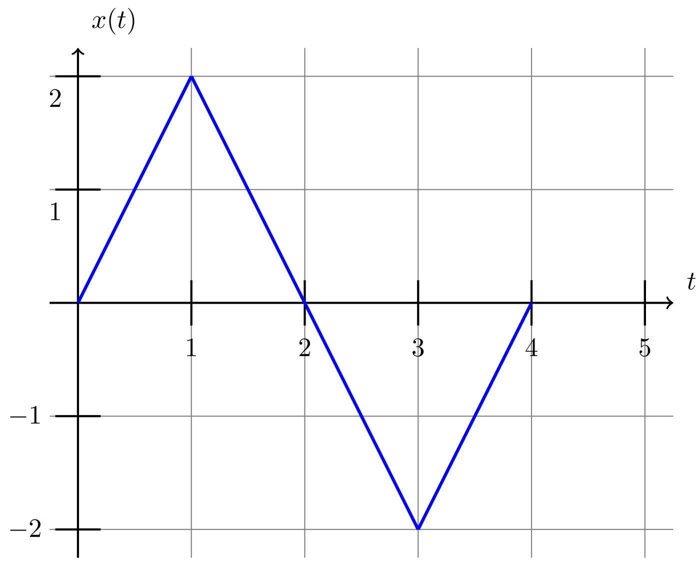
۳.۵

* با توجه به اینکه در هر لحظه به مقدار سیگنال در تمامی لحظات مثبت نیاز داریم سیستم حافظه دار است.
* با توجه به اینکه در هر لحظه به مقدار سیگنال در زمان‌های $k > n$ نیز نیاز داریم سیستم علی نیست.
* اگر $n \rightarrow -\infty$ مقدار خروجی از نامحدود خواهد شد پس سیستم پایدار BIBO نیست.
* با توجه به اینکه $y[n-N] = 3^{n-N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x[k]}{4^k} \neq \xrightarrow{x[n-N]} y[n] = 3^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x[k]}{4^k}$ سیستم TI نیست.
* با توجه به اینکه
$\xrightarrow{ax[n]} y[n] = 3^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ax[k]}{4^k} = ay[n]$
$\xrightarrow{x_1[n]+x_2[n]} y[n] = 3^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1[k]+x_2[k]}{4^k} = (3^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1[k]}{4^k}) + (3^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_2[k]}{4^k}) = y_1[n] + y_2[n]$
پس سیستم خطی است.

۶

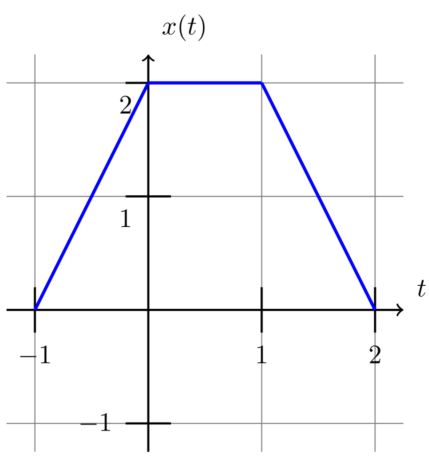
۱.۶

$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$



۲.۶

$x_3(t) = x_1(t) + x_1(t+2)$



۷

۱. وارون پذیر نیست. ورودی‌های $\delta[n], k\delta[n]$ خروجی یکسانی خواهند داشت.

۲. وارون پذیر نیست. برای هر $x[n]$، خروجی دو سیگنال $x[n], -x[n]$ یکسان است.

۳. وارون پذیر است. سیستم وارون: $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n < 0 \end{cases}$

۴. وارون پذیر نیست. برای هر $y(t)$، خروجی دو سیگنال $y(t), -y(t)$ در $t \geq 0$ یکسان است.

۵. وارون پذیر نیست. خروجی برای $x(t), x(t) + 2k\pi$ یکسان است.

۶. وارون پذیر است. سیستم وارون: $y(t) = x(t+a)$