به‌نام آفریننده بیت‌ها

دانشکده‌ی برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان
نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ - ۱۴۰۲

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین دوم

نام:
دانیال خراسانی‌زاده
شماره دانشجویی:
۹۹۲۲۳۹۳
استاد درس:
دکتر نقش

۱

1.1 $w(t)$

$$
\begin{aligned}
&w(t) = x(t) * h_1(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) h_1(t-\alpha)\, d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\alpha}u(\alpha))(\delta(t-\alpha) - e^{-2(t-\alpha)}u(t-\alpha))\, d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha}u(\alpha)\delta(t-\alpha)\, d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha-2t}u(\alpha)u(t-\alpha)\, d\alpha \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha}\delta(t-\alpha)\, d\alpha - \int_{0}^{t} e^{\alpha-2t}\, d\alpha \\
&= e^{-t}u(t) - e^{-2t}(e^{t}-1)u(t) \\
&= e^{-2t}u(t)
\end{aligned}
$$

1.2 $z(t)$

$$
\begin{aligned}
&z(t) = x(t) * h_2(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) h_2(t-\alpha)\, d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\alpha}u(\alpha))(\delta(t-\alpha) - e^{(t-\alpha)}u(\alpha-t))\, d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha}u(\alpha)\delta(t-\alpha)\, d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-2\alpha}u(\alpha)u(\alpha-t)\, d\alpha \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha}\delta(t-\alpha)\, d\alpha - u(t)\int_{t}^{\infty} e^{t-2\alpha}\, d\alpha - u(-t)\int_{0}^{\infty} e^{t-2\alpha}\, d\alpha \\
&= e^{-t}u(t) - \frac{e^{-t}u(t)}{2} - \frac{e^{t}u(-t)}{2} \\
&= \frac{e^{-t}u(t)}{2} - \frac{e^{t}u(-t)}{2}
\end{aligned}
$$

1.3 $h(t)$

$$
\begin{aligned}
&h(t) = h_1(t) * h_2(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(t-\alpha)\, d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\alpha) - e^{-2\alpha}u(\alpha))(\delta(t-\alpha) - e^{(t-\alpha)}u(\alpha - t))\, d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha)\delta(t-\alpha)\, d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-\alpha)}\delta(\alpha)u(\alpha-t)\, d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha}\delta(t-\alpha)u(\alpha)\, d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-3\alpha}u(\alpha)u(\alpha-t)\, d\alpha \\
&= \delta(t) - \int_{t}^{\infty} e^{(t-\alpha)}\delta(\alpha)\, d\alpha - \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha}\delta(t-\alpha)\, d\alpha + u(t)\int_{t}^{\infty} e^{t-3\alpha}\, d\alpha + u(-t)\int_{0}^{\infty} e^{t-3\alpha}\, d\alpha \\
&= \delta(t) - e^{t}u(-t) - e^{-2t}u(t) + \frac{e^{-2t}u(t)}{3} + \frac{e^{t}u(-t)}{3} \\
&= \delta(t) - \frac{2}{3}(e^{-2t}u(t) + e^{t}u(-t))
\end{aligned}
$$

1.4 $y_1(t)$

$$
\begin{aligned}
&y_1(t) = w(t) * h_2(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha) h_2(t-\alpha)\, d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2\alpha}u(\alpha))(\delta(t-\alpha) - e^{(t-\alpha)}u(\alpha-t))\, d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha}\delta(t-\alpha)u(\alpha)\, d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-3\alpha)}(\alpha)u(\alpha-t)\, d\alpha \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha}\delta(t-\alpha)\, d\alpha - u(t)\int_{t}^{\infty} e^{t-3\alpha}\, d\alpha - u(-t)\int_{0}^{\infty} e^{t-3\alpha}\, d\alpha \\
&= e^{-2t}u(t) - \frac{e^{-2t}u(t)}{3} - \frac{e^{t}u(-t)}{3} \\
&= \frac{2e^{-2t}u(t)}{3} - \frac{e^{t}u(-t)}{3}
\end{aligned}
$$

1.5 $y_2(t)$

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= z(t) * h_1(t)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} z(\alpha)h_1(t-\alpha)\,d\alpha\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\alpha}u(\alpha) - e^{\alpha}u(-\alpha))(\delta(t-\alpha) - e^{-2(t-\alpha)}u(t-\alpha))\,d\alpha\\
&= \frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha}\delta(t-\alpha)u(\alpha)\,d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha-2t}u(\alpha)u(t-\alpha)\,d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha}\delta(t-\alpha)u(-\alpha)\,d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} e^{3\alpha-2t}u(\alpha)u(t-\alpha)\,d\alpha)\\
&= \frac{1}{2}(\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha}\delta(t-\alpha)\,d\alpha - u(t)\int_{0}^{t} e^{\alpha-2t}\,d\alpha - \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha}\delta(t-\alpha)\,d\alpha + u(t)\int_{-\infty}^{0} e^{3\alpha-2t}\,d\alpha + u(-t)\int_{-\infty}^{t} e^{3\alpha-2t}\,d\alpha)\\
&= \frac{1}{2}(e^{-t}u(t) - u(t)(e^{-t} - e^{-2t}) - e^{t}u(-t) + \frac{e^{-2t}u(t)}{3} + \frac{e^{t}u(-t)}{3})\\
&= \frac{2e^{-2t}u(t)}{3} - \frac{e^{t}u(-t)}{3}
\end{aligned}
$$

1.6 $y_3(t)$

$$
\begin{aligned}
y_3(t) &= x(t) * h(t)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)h(t-\alpha)\,d\alpha\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\alpha}u(\alpha))(\delta(t-\alpha) - \frac{2}{3}(e^{-2(t-\alpha)}u(t-\alpha) + e^{t-\alpha}u(\alpha-t)))\,d\alpha\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha}\delta(t-\alpha)u(\alpha)\,d\alpha - \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha-2t}u(\alpha)u(t-\alpha)\,d\alpha - \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t-2\alpha}u(\alpha)u(\alpha-t)\,d\alpha\\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha}\delta(t-\alpha)\,d\alpha - \frac{2}{3}u(t)\int_{0}^{t} e^{\alpha-2t}u(\alpha)u(t-\alpha)\,d\alpha - \frac{2}{3}u(t)\int_{t}^{\infty} e^{t-2\alpha}\,d\alpha - \frac{2}{3}u(-t)\int_{0}^{\infty} e^{t-2\alpha}\,d\alpha\\
&= e^{-t}u(t) - \frac{2}{3}u(t)(e^{-t} - e^{-2t}) - \frac{e^{-t}u(t)}{3} - \frac{e^{t}u(-t)}{3}\\
&= \frac{2e^{-2t}u(t)}{3} - \frac{e^{t}u(-t)}{3}
\end{aligned}
$$

بله، با توجه به خصوصیات کانولوشن می‌دانستیم که حاصل این سه عملیات برابر است و مشاهده می‌کنیم که همینطور است.

۲

$h[n] = u[n] - 3u[n-4] + 2u[n-7]$

2.1

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-3](u[n-k] - 3u[n-k-4] + 2u[n-k-7]) \\
y[n] &= \sum_{k=3}^{\infty} u[n-k] - 3u[n-k-4] + 2u[n-k-7] \\
y[n] &= \sum_{k=3}^{\infty} u[n-k] - 3\sum_{k=3}^{\infty} u[n-k-4] + 2\sum_{k=3}^{\infty} u[n-k-7] \\
y[n] &= \sum_{k=3}^{n} 1 - 3\sum_{k=3}^{n-4} 1 + 2\sum_{k=3}^{n-7} 1 \\
y[n] &= (n-2)u[n-3] - 3(n-6)u[n-7] + 2(n-9)u[n-10] \\
y[n] &= \begin{cases} 0 & n < 3 \\ n-2 & 3 \leq n \leq 6 \\ -2n+16 & 7 \leq n \leq 9 \\ -2 & 10 \leq n \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.2

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-k}u[k](u[n-k] - 3u[n-k-4] + 2u[n-k-7]) \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}(u[n-k] - 3u[n-k-4] + 2u[n-k-7]) \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}u[n-k] - 3\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}u[n-k-4] + 2\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}u[n-k-7] \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{n} a^{-k} - 3\sum_{k=0}^{n-4} a^{-k} + 2\sum_{k=0}^{n-7} a^{-k} \\
y[n] &= (\frac{a-a^{-n}}{a-1})u[n-3] - 3(\frac{a-a^{4-n}}{a-1})u[n-7] + 2(\frac{a-a^{7-n}}{a-1})u[n-10]
\end{aligned}
$$

۳

3.1

$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_3[n] + h_4[n] * h_5[n])$

$$\begin{aligned}
h_2[n] * h_3[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]h_3[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ku[k]\delta[n-k-1] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\delta[n-k-1] \\
&= (n-1)u[n-1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_4[n] * h_5[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_4[k]h_5[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k]\delta[n-k+1] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a^k\delta[n-k+1] \\
&= a^{n+1}u[n+1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h[n] &= h_1[n] * (h_2[n] * h_3[n] + h_4[n] * h_5[n]) \\
&= h_1[n] * ((n-1)u[n-1] + a^{n+1}u[n+1]) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta[n-k] - \delta[n-k-1])((k-1)u[k-1]) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta[n-k] - \delta[n-k-1])(a^{k+1}u[k+1]) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-1)\delta[n-k]u[k-1] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-1)\delta[n-k-1]u[k-1] \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k+1}\delta[n-k]u[k+1] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k+1}\delta[n-k-1]u[k+1] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\delta[n-k] - \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\delta[n-k-1] + \sum_{k=-1}^{\infty} a^{k+1}\delta[n-k] - \sum_{k=-1}^{\infty} a^{k+1}\delta[n-k-1] \\
&= (n-1)u[n-1] - (n-2)u[n-2] + a^{n+1}u[n+1] - a^n u[n]
\end{aligned}$$

۲.۳

۱.۲.۳ حافظه

با توجه به اینکه پاسخ ضربه سیستم به صورت $h[n] = k\delta[n]$ نیست، سیستم حافظه دار است.

۲.۲.۳ علیت

با توجه به اینکه $h[-1] \neq 0$ سیستم علی نیست.

۳.۲.۳ پایداری

با توجه به اینکه $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]|$ واگرا می‌شود سیستم پایدار نیست.

۴

4.1

$$(\frac{1}{5})^n u[n] - A(\frac{1}{5})^{n-1}u[n-1] = \delta[n]$$
$$\xrightarrow{n=1} \frac{1}{5} - A = 0 \rightarrow A = \frac{1}{5}$$

4.2

$$h[n] - \frac{1}{5}h[n-1] = \delta[n]$$
$$\rightarrow h[n] * (\delta[n] - \frac{1}{5}\delta[n-1]) = \delta[n]$$
$$h_{S_1^{-1}}[n] = \delta[n] - \frac{1}{5}\delta[n-1]$$

۵

برای پایدار بودن سیستم باید $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

5.1

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t)|\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-(1-2j)t}u(t)|\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} |e^{-t}|\, dt \\
&= 1 < \infty
\end{aligned}
$$

سیستم پایدار است.

5.2

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\cos(\frac{n\pi}{4})u[n]| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |n\cos(\frac{n\pi}{4})| \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

سیستم ناپایدار است.

۶

۱.۶

۱.۱.۶

* تغییر ناپذیری با زمان

$$
\begin{aligned}
&y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau \\
&x'(t) = x(t - t_0) \\
&y'(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - t_0 - 1)\, d\tau \\
&\xrightarrow[dT=d\tau]{T=\tau-t_0} y'(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-2(t-t_0-T)} x(T - 1)\, dT \\
&y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-2(t-t_0-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau = y'(t)
\end{aligned}
$$

* خطی بودن

- همگنی

$$
\begin{aligned}
&y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau \\
&x'(t) = ax(t) \\
&y'(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} ax(\tau - 1)\, d\tau \\
&= a\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau = ay(t)
\end{aligned}
$$

- جمع آثار

$$
\begin{aligned}
&y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau \\
&x'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\
&y'(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} (x_1(\tau - 1) + x_2(\tau - 1))\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x_1(\tau - 1)\, d\tau + \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau - 1)\, d\tau \\
&= y_1(t) + y_2(t)
\end{aligned}
$$

۲.۱.۶

برای بدست آوردن پاسخ ضربه، تابع ضربه را به عنوان ورودی به سیستم می‌دهیم.

$$x(t) = \delta(t) \to y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\delta(\tau-1)\,d\tau = e^{-2(t-1)}u(t-1)$$

۳.۱.۶

* پایداری
برای پایداری باید $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2(t-1)}u(t-1)|\,dt \\
&= e^2 \int_{1}^{\infty} e^{-2t}\,dt \\
&= e^2(0 - (-\frac{e^{-2}}{2})) \\
&= \frac{1}{2} < \infty
\end{aligned}$$

سیستم پایدار است.

* علیت
برای علی بودن سیستم باید $\forall t < 0 : h(t) = 0$ و با توجه به اینکه در مورد این سیستم، این شرط برقرار است پس سیستم علی است.

۲.۶

۱.۲.۶

* تغییر ناپذیری با زمان

$$
\begin{aligned}
&y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau \\
&x'(t) = x(t - t_0) \\
&y'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - t_0 - 1)\, d\tau \\
&\xrightarrow[dT = d\tau]{T = \tau - t_0} y'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-t_0-T)} x(T - 1)\, dT \\
&y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-t_0-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau = y'(t)
\end{aligned}
$$

* خطی بودن

- همگنی

$$
\begin{aligned}
&y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau \\
&x'(t) = ax(t) \\
&y'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} ax(\tau - 1)\, d\tau \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau = ay(t)
\end{aligned}
$$

- جمع آثار

$$
\begin{aligned}
&y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1)\, d\tau \\
&x'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\
&y'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} (x_1(\tau - 1) + x_2(\tau - 1))\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} x_1(\tau - 1)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau - 1)\, d\tau \\
&= y_1(t) + y_2(t)
\end{aligned}
$$

۲.۲.۶

برای بدست آوردن پاسخ ضربه، تابع ضربه را به عنوان ورودی به سیستم می‌دهیم.

$$x(t) = \delta(t) \to y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)}\delta(\tau - 1)\, d\tau = e^{-2(t-1)}$$

۳.۲.۶

* پایداری
برای پایداری باید $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2(t-1)}|\, dt\\ &= e^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\, dt\\ &= \infty\end{aligned}$$

سیستم پایدار نیست.

* علیت
برای علی بودن سیستم باید $\forall t < 0 : h(t) = 0$ و با توجه به اینکه در مورد این سیستم، این شرط برقرار نیست پس سیستم علی نیست.

۷

$$u(at) = \begin{cases} u(t) & a > 0 \\ u(-t) & a < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\delta(T) = \frac{du(T)}{dT} &\xrightarrow[dT=adt]{T=at} \delta(at) = \frac{du(at)}{adt}\\ &= \begin{cases} \frac{du(t)}{adt} = \frac{\delta(t)}{a} & a > 0 \\ \frac{du(-t)}{adt} = \frac{-du(t)}{adt} = \frac{\delta(t)}{-a} & a < 0 \end{cases}\\ &= \frac{\delta(t)}{|a|}\end{aligned}$$

۸

$$
\begin{aligned}
s[n] &= h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1)a^k u[k]u[n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)a^k \\
&= \frac{d}{da}\sum_{k=0}^{n+1} a^k \\
&= u[n]\frac{d}{da}(\frac{1-a^{n+2}}{1-a}) \\
&= (\frac{1}{(a-1)^2} - \frac{a}{(a-1)^2}a^n + \frac{a}{a-1}(n+1)a^n)u[n]
\end{aligned}
$$

۹

اگر خروجی سیستم S را به وارون آن که آن را با S' نمایش می‌دهیم بدهیم داریم:

$$
\begin{aligned}
& ax(t) \xrightarrow[LTI]{S} ay(t) \xrightarrow{S'} ax(t) \\
& x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow[LTI]{S} y_1(t) + y_2(t) \xrightarrow{S'} x_1(t) + x_2(t) \\
& x(t-t_0) \xrightarrow[LTI]{S} y(t-t_0) \xrightarrow{S'} x(t-t_0)
\end{aligned}
$$

با توجه به این روابط، می‌بینیم که خواص همگنی، جمع آثار و تغییر ناپذیری با زمان برای سیستم S' نیز برقرار است و در نتیجه این سیستم نیز LTI است.