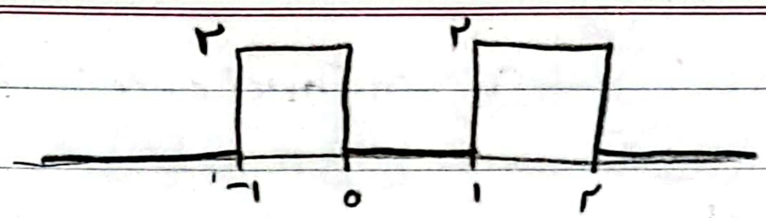
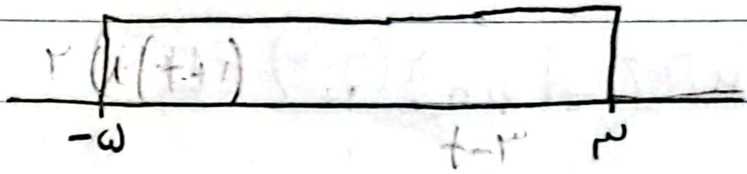
۵-

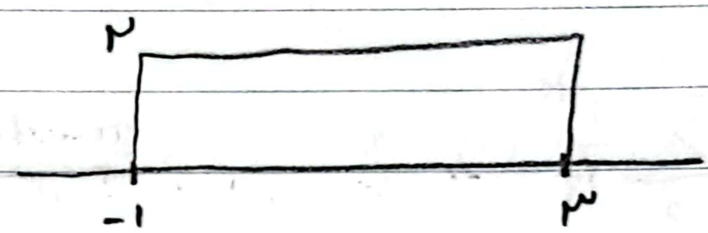
$x(t)$:



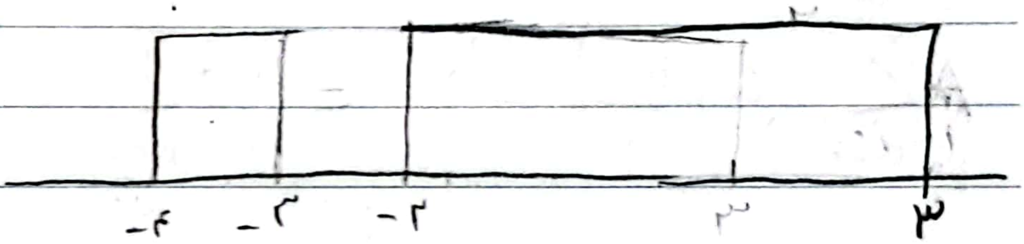
$x_1(t)$:



$x(t-1)+x(t)$:

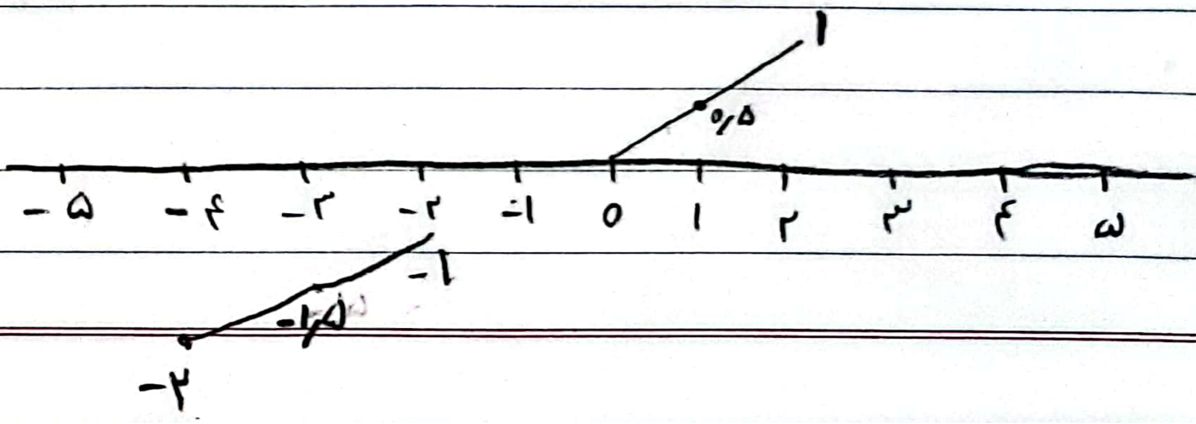


$x(t-1)+x(t)+x(t+3)$:



$$x_1(t) = \frac{x(t-1)+x(t)+x(t+3)+x(t+4)}{۳} \Rightarrow \text{LTI} \rightarrow$$

$$y_1(t) = \frac{y(t-1)+y(t)+y(t+3)+y(t+4)}{۲}$$



۶- الف) اثبات خطی بودن

جمع پذیری:

$$x'(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$y'(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau-1)\, d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} \big(x_1(\tau-1) + x_2(\tau-1)\big) d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x_1(\tau-1)\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau-1)\, d\tau = y_1(t) + y_2(t)$$

همگنی:

$$x'(t) = a\,x(t)$$

$$y'(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} a\,x(\tau-1)\, d\tau = a\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau-1)\, d\tau$$

$$= a\,y(t)$$

خطی است ✓

$$x'(t) = x(t-t_0)$$

$$y'(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-r(t-\tau)} x(\tau-1-t_0)\, d\tau \xrightarrow[dT=d\tau]{T=\tau-t_0}$$

$$\int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-r(t-T-t_0)} x(T-1)\, d\tau$$

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-r(t-t_0-T)} x(\tau-1) = y'(t)$$

TI

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-r(t-\tau)} \delta(\tau-1)\, d\tau =$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-rt} e^{r\tau} \delta(\tau-1)\, d\tau = e^{-rt} \int_{-\infty}^{t} e^{r\tau} \delta(\tau-1)\, d\tau \Rightarrow$$

$$h(t) = e^{r-rt} u(t-1)$$

پ) سیستم علّی است، زیرا انتگرال تا t است و حداکثر x(t+1)

استفاده می‌شود

پایداری: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2-2t}\, u(t-1)\, dt = e^{2}\int_{1}^{+\infty} e^{-2t}\, dt = \frac{e^{2}}{2e^{2}} = \frac{1}{2} < \infty$$

پایدار است

۶ ـ ت ـ الف) خطی بودن : جمع پذیری

$$x'(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$y'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)} x'(\tau-1)\, d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)} \left(x_1(\tau-1) + x_2(\tau-1) \right) d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)} x_1(\tau-1)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau-1)\, d\tau =$$

$$y_1(t) + y_2(t)$$

همگنی:

$$x'(t) = A\, x(t)$$

$$y'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)} \left(A\, x(\tau-1) \right) d\tau =$$

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)} x(\tau-1)\, d\tau = A\, y(t)$$

تغییر ناپذیر با زمان :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, x(\tau-1)$$

$$x'(t)=x(t-t_0)$$

$$y'(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, x'(\tau-1)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, x(\tau-1-t_0)\,d\tau$$

$$\xrightarrow[d\alpha=d\tau]{\alpha=\tau-t_0} y'(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-t_0-\alpha)}\, x(\alpha-1)\,d\alpha$$

$$y(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-t_0-\tau)}\, x(\tau-1)\,d\tau=y'(t)$$

۲-ج-ب)

$$h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, \delta(\tau-1)\,d\tau$$

$$h(t)=e^{2-2t}$$

۶- ج- ب- ج)

پایداری: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2-2t}\, dt =$$

$$e^{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} = e^{2}\left(\frac{e^{\infty}}{-2} - 0\right) = \infty$$

پایدار نیست

با توجه به عبارت $x(\tau-1)$ و $\tau \to \infty$ سیستم علّی نیست.

۳- الف) برای بی‌حافظگی، پاسخ ضربه باید به فرم زیر باشد

$h[n] = k\,\delta[n]$

با حافظه دار

علیت : $h[n]=0 \quad \forall n<0$

$$h[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \end{cases} \quad (u[n])$$

علی است

پایداری : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

$$\sum_{0}^{+\infty} \left|\frac{1}{2}\right|^n = 2 < \infty$$

پایدار است

۷ - ب) حافظه دار (به جز $k\delta[n]$ نیست)

$$h[n]=\begin{cases} 0 & n<0 \quad (u[n-3]=0 \ , \ u[n]=0) \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n & n\geq 0 \ , \ n<3 \\ \ldots & n\geq 3 \end{cases}$$

علی است

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{3}^{\infty}(1.01)^n = k+\infty \not< \infty$$

پایدار نیست

۷ - ج) را حافظه دار (به فرم $k\delta(t)$ نیست)

$$h(-1) = -1^{10} e^{1} = e^{1} \neq 0$$

علّی نیست

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-1}^{\infty} t^{10} e^{-t}\, dt \approx 3{,}6 \times 10^{6}$$

پایدار است

۷- د) ب) فقط داراست

$$h(-1) = e^{-2t} u(2) = e^{-2t}$$

علّی نیست

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{1} e^{-3t}\, dt = \frac{e^{2t}}{-2}\Big|_{-\infty}^{1} = -\frac{e^{-2}}{2} < \infty$$

پایدار است