به‌نام آفریننده بیت‌ها

دانشکده‌ی برق و کامپیوتر

دانشگاه صنعتی اصفهان

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ - ۱۴۰۲

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین ششم

نام:

دانیال خراسانی‌زاده

شماره دانشجویی:

۹۹۲۲۳۹۳

استاد درس:

دکتر نقش

۱

۱.۱

$$u(t-a) = \frac{1}{2}(1 + sign(t-a))$$
$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(1 + sign(t-a))e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} sign(t-a)e^{-j\omega t}\,dt)$$
$$= \frac{1}{2}(2\pi\delta(\omega) + \frac{2e^{-j\omega a}}{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{e^{-j\omega a}}{j\omega}$$

$$D(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j\omega a}$$

۲.۱

$$\mathfrak{FT}\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\} = \mathfrak{FT}\{x(t) * u(t)\} = X(j\omega)U(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

۳.۱

$$u(t-a) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - a)\,d\tau$$
$$\mathfrak{FT}\{u(t-a)\} = \frac{D(j\omega)}{j\omega} + \pi D(0)\delta(\omega) = \frac{e^{-j\omega a}}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

۲

۱.۲

$$x_1[n] = \frac{sin(\frac{n\pi}{5})}{n\pi} \xLeftrightarrow{\mathfrak{FT}} X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{5} \\ 0 & \frac{\pi}{5} < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$x_2[n] = cos(\frac{7n\pi}{2}) \xrightarrow{Discrete\ time\ cos\ is\ 2\pi\ periodic} = cos(\frac{n\pi}{2})$$

$$x_2[n] \xLeftrightarrow{\mathfrak{FT}} X_2(e^{j\omega}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi l) + \delta(\omega + \frac{\pi}{2} - 2\pi l)$$

$$x[n] = x_1[n]x_2[n] \xLeftrightarrow{\mathfrak{FT}} X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \frac{3\pi}{10} \leq |\omega| \leq \frac{7\pi}{10} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

۲.۲

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (n-k-3)(\frac{1}{7})^{|k|}$$

$$= n - 3 + \sum_{k=-\infty}^{-1} (n-k-3)(\frac{1}{7})^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty}(n-k-3)(\frac{1}{7})^{k}$$

$$= n - 3 + \sum_{k=1}^{\infty}(n+k-3)(\frac{1}{7})^{k} + \sum_{k=1}^{\infty}(n-k-3)(\frac{1}{7})^{k}$$

$$= n - 3 + \frac{n}{6} - \frac{11}{36} + \frac{n}{6} - \frac{25}{36} = \frac{4n}{3} - 4$$

تابع تبدیل فوریه ندارد.

۳.۲

$$x[n] = (\frac{1}{3})^{|n|}u[-n-2] \xLeftrightarrow{\mathfrak{FT}} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{3})^{|n|}u[-n-2]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-2} (\frac{e^{j\omega}}{3})^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty}(\frac{e^{j\omega}}{3})^{n} = \frac{\frac{e^{2j\omega}}{9}}{1 - \frac{e^{j\omega}}{3}}$$

۳

۱.۳

$$X(e^{j\omega}) = \frac{7}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$
$$x[n] = \frac{7}{9}(-\frac{1}{4})^n u[n] + \frac{2}{9}(\frac{1}{2})^n u[n]$$

۲.۳

این سیگنال تبدیل فوریه یک سیگنال پریودیک با پریود ۵ و ضرایب $a_k = \frac{(-1)^k}{2\pi}$ است.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{4}(-1)^k e^{jk\frac{2pi}{5}n}$$

۳.۳

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{n_0-1}\frac{e^{-j\omega m}}{3^m}$$
$$x[n] = \sum_{m=0}^{n_0-1}\frac{\delta[n-m]}{3^m}$$

۴.۳

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$
$$= -\frac{j}{\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{j\omega n}\,d\omega + \frac{j}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{j\omega n}\,d\omega$$
$$= \frac{2(cos(n\pi)-1)}{n\pi}$$

۴

$$x[n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

۱.۴

$$x_1[n] = x[1-n] + x[-1-n]$$
$$x[-n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$$
$$x[1-n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} e^{j\omega}X(e^{-j\omega})$$
$$x[-1-n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} e^{-j\omega}X(e^{-j\omega})$$
$$x_1[n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} e^{j\omega}X(e^{-j\omega}) + e^{-j\omega}X(e^{-j\omega}) = 2\cos(\omega)X(e^{-j\omega})$$

۲.۴

$$x_2[n] = \frac{x^*[-n] + x[n]}{2}$$
$$x[-n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$$
$$x^*[-n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} X^*(e^{j\omega})$$
$$x[n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$
$$x_2[n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} \Re X(e^{j\omega})$$

۳.۴

$$x_3[n] = (n-1)^2x[n] = n^2x[n] - 2nx[n] + x[n]$$
$$nx[n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$
$$n^2x[n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} -\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2}$$
$$x_3[n] \stackrel{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} -\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2} - 2j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} + X(e^{j\omega})$$

۵

۱.۵

سیگنال $\sum_{k=1}^{10} sin(k\omega)$ یک سیگنال حقیقی و فرد است و طبق دوگانی تبدیل فوریه، می‌توانیم بگوییم که زوج تبدیل فوریه آن یک سیگنال کاملا موهومی و فرد است. سیگنال داده شده یک شیفت زمانی بر روی زوج فوریه سیگنال بالا ایجاد می‌کند پس در نهایت سیگنال حاصل، موهومی است ولی زوج یا فرد نیست.

۲.۵

سیگنال داده شده از ترکیب دو سیگنال زوج و فرد ساخته شده پس فرد است و با توجه به ضریب j موهومی نیز هست. پس زوج تبدیل فوریه آن حقیقی و فرد است.

۳.۵

۶

۱.۶

۱.۱.۶

$$x[n] \xrightarrow{System} y[n] \overset{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \xrightarrow{System} Y(e^{j\omega})$$

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = 2X_1(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X_1(e^{j\omega}) - \frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = 2X_2(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X_2(e^{j\omega}) - \frac{dX_2(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$aY_1(e^{j\omega}) + bY_2(e^{j\omega}) = a(2X_1(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X_1(e^{j\omega}) - \frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega}) + b(2X_2(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X_2(e^{j\omega}) - \frac{dX_2(e^{j\omega})}{d\omega})$$

$$= 2(aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})) + e^{-j\omega}(aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})) - \frac{d(aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}))}{d\omega} = Y(e^{j\omega})$$

سیستم خطی است.

۲.۱.۶

$$x[n] \overset{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$x_1[n] = x[n-n_0] \overset{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = 2X_1(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X_1(e^{j\omega}) - \frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$= 2e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}) - \frac{de^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})}{d\omega} \quad = e^{-j\omega n_0}(2X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}) + je^{-j\omega}X(e^{j}$$

سیستم تغییر ناپذیر با زمان نیست.

۲.۶

$$x[n] = \delta[n] \overset{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = 1$$

$$H(e^{j\omega}) = 2 + e^{-j\omega} \overset{\mathfrak{FT}}{\Longleftrightarrow} h[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1]$$

۳.۶

۷

۱.۷

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{1}{8}(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{8}\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1-\frac{1}{8}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{8}e^{-j\omega})} = \frac{-4}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{9}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{8}e^{-j\omega}}$$

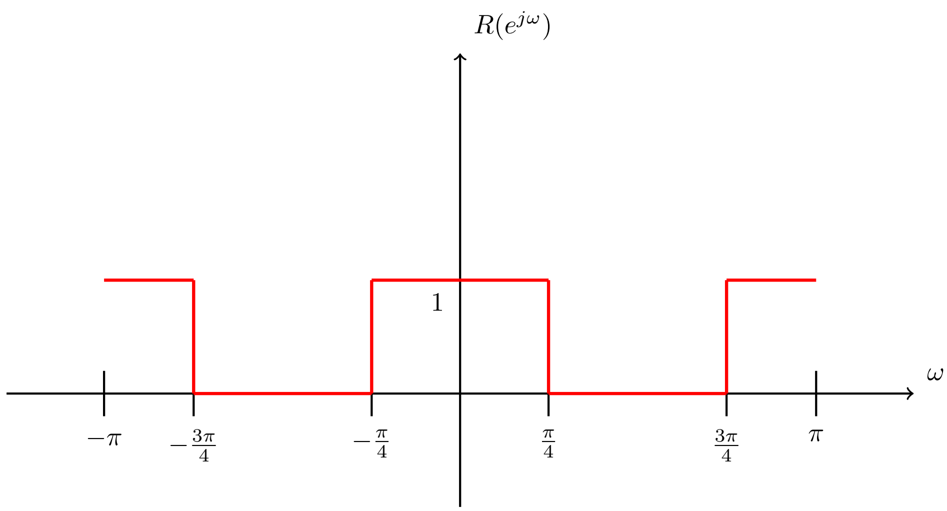
$$h[n] = \frac{-4}{5}(\frac{1}{3})^n u[n] + \frac{9}{5}(\frac{1}{8})^n u[n]$$

۲.۷

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{8}e^{-j\omega})}$$
$$(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})X(e^{j\omega}) = (1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{8}e^{-j\omega})Y(e^{j\omega})$$
$$= X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) - \frac{11}{24}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{24}e^{-2j\omega}Y(e^{j\omega})$$
$$x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] = y[n] - \frac{11}{24}y[n-1] + \frac{1}{24}y[n-2]$$

۸

$$x_1[n] = (-1)^n(h[n]*((-1)^n x[n])) = e^{jn\pi}(h[n]*(e^{jn\pi}x[n])) = (e^{jn\pi}h[n])*(e^{2jn\pi}x[n]) = (e^{jn\pi}h[n])*x[n]$$
$$X_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega})$$
$$X_2(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$
$$Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega}) + H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})(H(e^{j(\omega-\pi)}) + H(e^{j\omega}))$$
$$R(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j(\omega-\pi)}) + H(e^{j\omega})$$



یک فیلتر bandpass است که فرکانس‌های بین $-\frac{3\pi}{4}$ تا $-\frac{\pi}{4}$ و بین $\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ را از بین می‌برد.