بسمه تعالی

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها
تکلیف پنجم
مهلت تحویل: جمعه ۴ تیر ساعت ۲۳:۵۵

در همه بخش‌های تمامی سؤالات (به غیر از بخش‌هایی که مشخص شده‌است)، $\Sigma = \{0,1\}$ است.
منظور از $n_a(w)$ تعداد وقوع‌های سمبل a در رشته‌ی w می‌باشد.

۱- برای هر یک از زبان‌های توصیف شده، یک ماشین تورینگ طراحی کنید. (برای مورد سوم از توصیف سطح بالا استفاده کنید و نیاز به رسم ماشین تورینگ نیست.در توصیف سطح بالا کافیست الگوریتم خود را به طور کامل و دقیق توضیح دهید. برای مشاهده مثال‌هایی از توصیف سطح بالا می‌توانید به کتاب سیپسر مثال‌های ۳.۰۷ تا ۳.۰۱۲ مراجعه کنید)

$L_1 = \{\ 0^{2k+1} : k \geq 0\ \}$
$L_2 = \{\ w \in \{0,1\}^+ \mid n_0(w) = n_1(w)\ \}$
$L_3 = \{\ 0^n 1^m 2^k : k = mn\ \}\ \Sigma = \{0,1,2\}$

۲ - (الف) یک ماشین کران‌دار خطی یا همان LBA نوع خاصی از تورینگ ماشین‌ها است با این تفاوت که مقدار استفاده شده از نوار، تابعی خطی برحسب طول رشته‌ی ورودی بوده و در حالت خاص این فضای مورد استفاده دقیقاً برابر طول رشته‌ی ورودی است. یک LBA طراحی کنید که پذیرنده زبان زیر باشد:(برای این کار فرض کنید رشته را بصورت $[w]$ روی نوار قرار داده و تنها مجاز به استفاده از نوار در محدوده‌ی این کروشه باز و بسته هستیم. درواقع سمبل] ابتدای رشته و سمبل] انتهای رشته را مشخص میکند)

$L = \{\ 0^n 1^n 2^n : n \geq 1\ \}\ \Sigma = \{0,1,2\}$

(ب) گرامر بدون محدودیت زیر چه زبانی را تولید می‌کند؟ ($\Sigma = \{a,b\}$)

$S \rightarrow aAS|bBS|C$
$Aa \rightarrow aA$
$Ba \rightarrow aB$
$Ab \rightarrow bA$
$Bb \rightarrow bB$
$BC \rightarrow Cb$
$AC \rightarrow Ca$
$C \rightarrow \lambda$

۳ - با توجه به خواص بستاری زبان‌ها، بسته بودن یا نبودن دسته زبان های زیر را تحت عملگرهای گفته شده مشخص کنید.

نوع زبان	اجتماع	اشتراک	الحاق	بستار کلینی	مکمل	معکوس
منظم	✓	✓	✓	✓	✓	✓
خطی						
مستقل از متن						
حساس به متن						
تصمیم‌پذیر						
شمارش‌پذیر بازگشتی (RE)						

۴ - تصمیم‌پذیری هر یک از زبان‌های زیر را مشخص و اثبات کنید. (برای اثبات تصمیم‌پذیری، شرح یک الگوریتم سطح بالا برای آن زبان کافی است. استفاده از قضیه Rice مجاز نیست. می‌توانید از قضایایی که در کلاس مطرح شده‌است استفاده کنید بدون آن که آن‌ها را اثبات کنید.)

الف) زبانی شامل $\langle M, q, w\rangle$هایی که در آن M یک تورینگ ماشین است، و q یک استیت (حالت) از این ماشین است و ماشین M زمانی که w را به عنوان ورودی دارد، وارد استیت q خواهد شد.

$L_1 = \{\ \langle M, q, w\rangle | M$ is a TM and $q \in L(M)$ and M running on input w enters state $q\ \}$

ب) زبانی شامل $\langle M\rangle$ هایی که اگر رشته w را قبول کنند، رشته w^R را نیز قبول کنند.

$L_2 = \{\ \langle M\rangle | M$ is a TM and M accepts w^R whenever it accepts $w\ \}$

ج) زبانی شامل $\langle G_1, G_2\rangle$ هایی که G_1 و G_2 گرامر های مستقل از متن هستند و $L(G_1) \subseteq L(G_2)$.

$L_3 = \{\ \langle G_1, G_2\rangle | G_1, G_2$ are CFG and $L(G_1) \subseteq L(G_2)\ \}$

د) زبانی شامل $\langle M\rangle$ هایی که تنها تورینگ ماشینی هستند که زبان $L(M)$ را می‌پذیرد.

$L_4 = \{\ \langle M\rangle | M$ is a TM and M is the only TM that accepts $L(M)\ \}$

ه) زبانی شامل $\langle M\rangle$ هایی که حداقل یک رشته با طول ۵ دارند.

$L_5 = \{\ \langle M\rangle$ contains at least one string with length of $5\ \}$

۵ - اگر L_0 یک زبان تصمیم‌پذیر باشد، نشان دهید که زبان $L_k = \{\langle M\rangle |\ M\ decides\ L_{k-1}\}$ تصمیم‌پذیر است اگر و تنها اگر k زوج باشد.

۶ - نشان دهید هر دو شرط قضیه Rice برای نشان دادن این که زبان موردنظر تصمیم‌پذیر نیست، لازم هستند.

موفق باشید :)