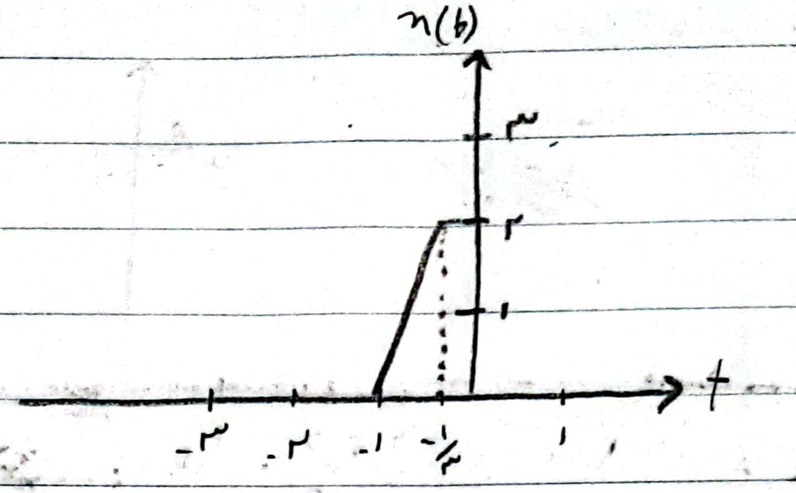
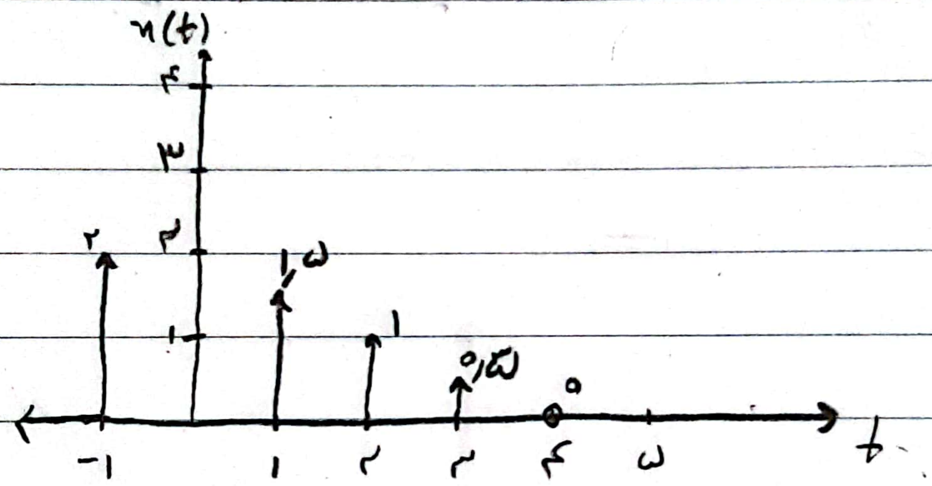
Day.... Month.... Year.........   Subject. ۹۸۲۲۴۵۳

-1

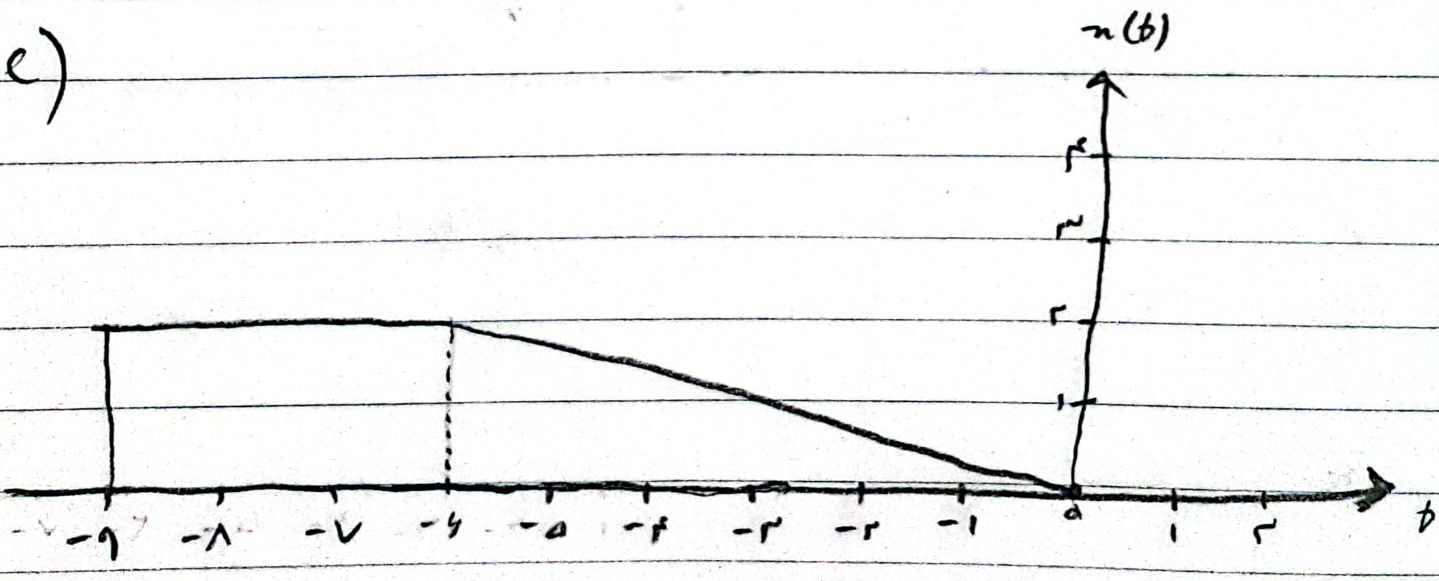
a)



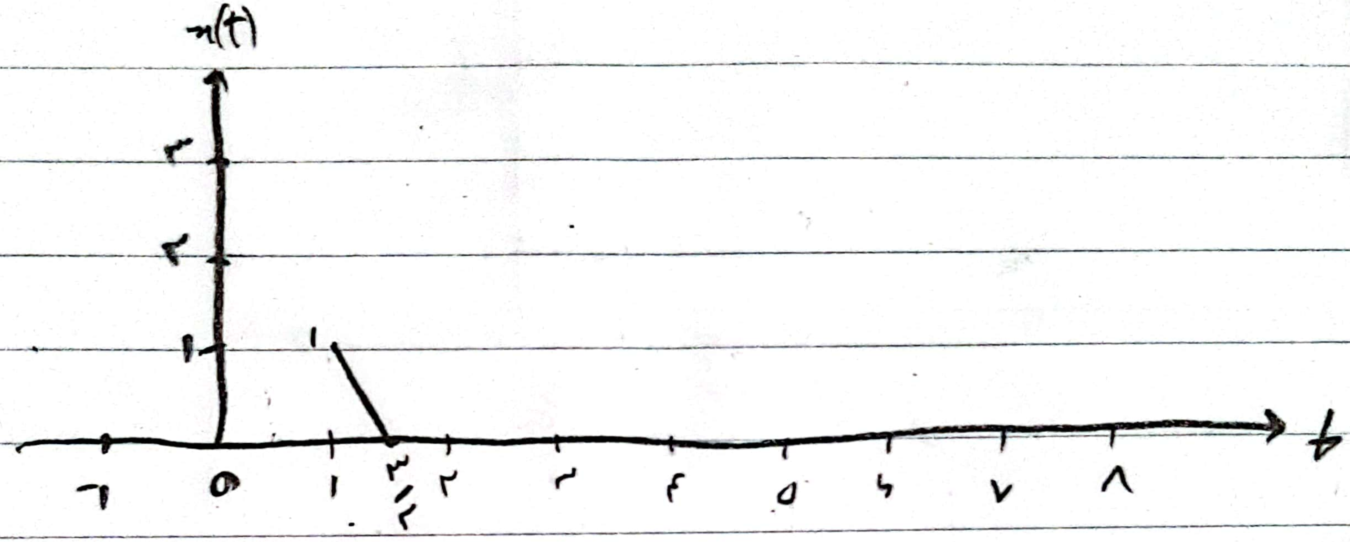
b)



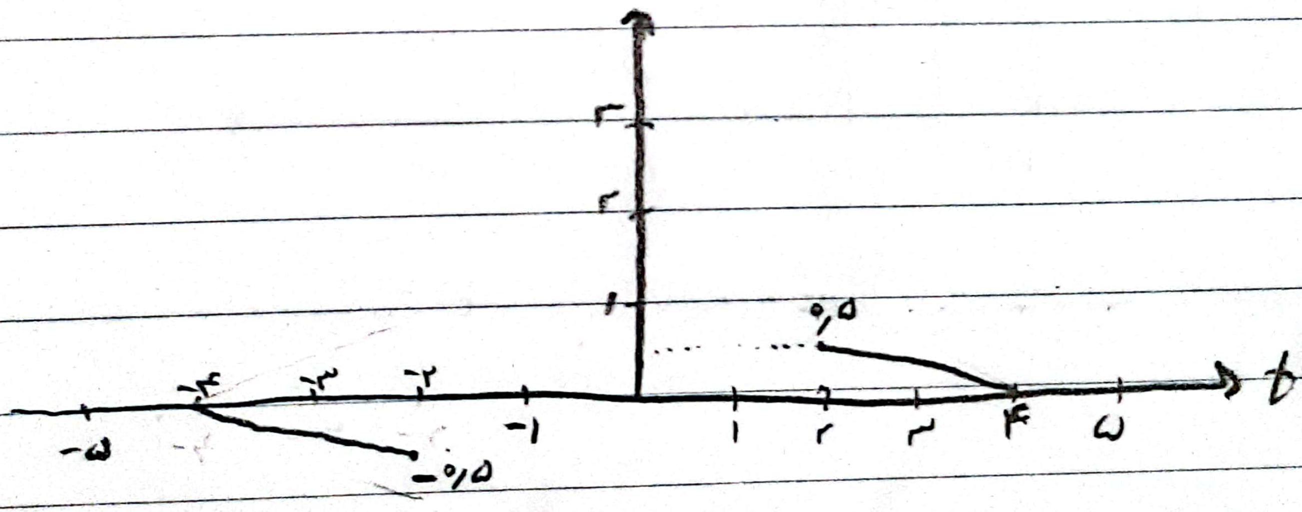
c)



d)



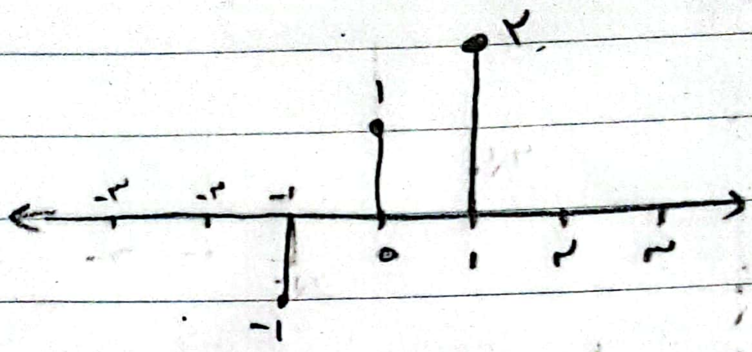
e)



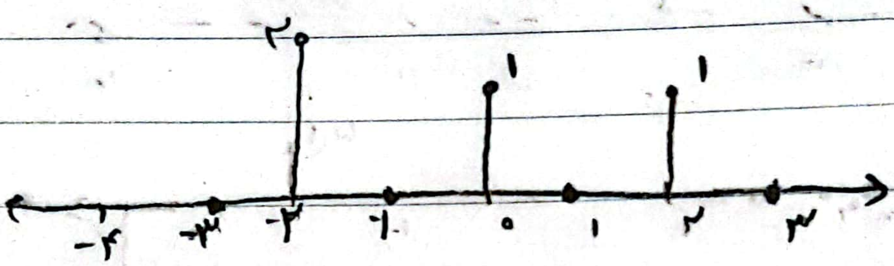
Day..... Month..... Year.......... Subject..........

-۲

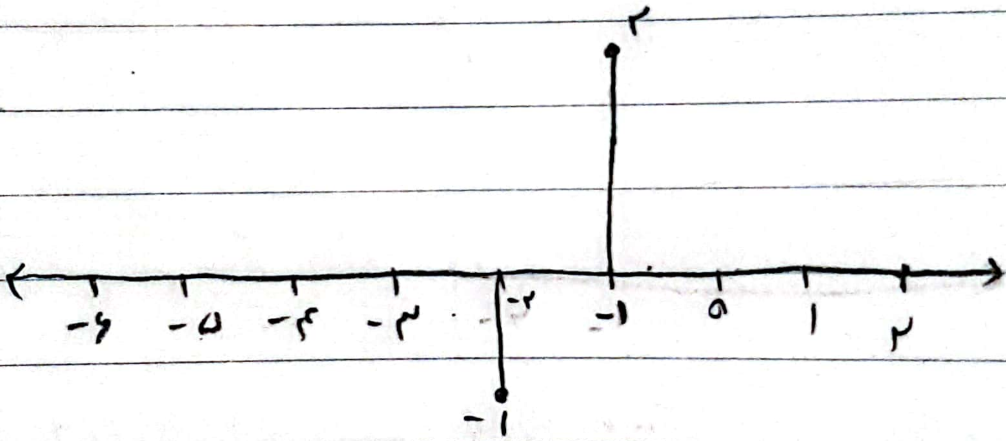
a)



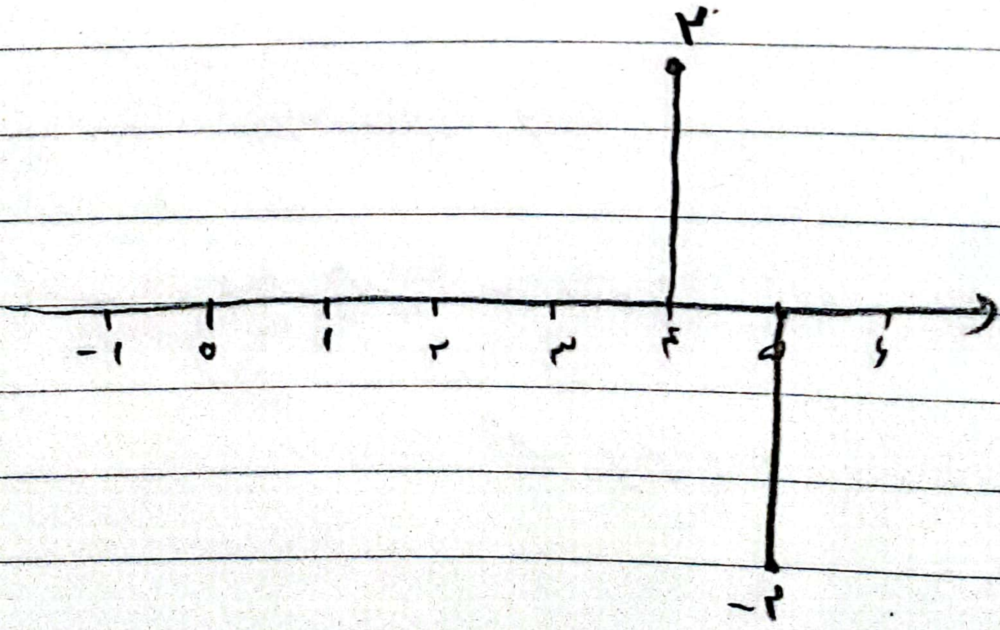
b)



c)



d)



۳ـ

a) ① ابتدا ثابت می کنیم اگر $x[n]$ یک سیگنال فرد آنگاه: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] + \underbrace{x[0]}_{0} + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n] = \sum_{n=1}^{+\infty} x[-n] + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n]$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} x[n] + x[-n] = \sum_{n=1}^{+\infty} x[n] - x[n] = 0$$

در سیگنال های فرد $x[-n] = -x[n]$

② ثابت می کنیم ضرب یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد، سیگنالی فرد است

$f[n]$: odd $\quad g[n]$: even $\longrightarrow (f.g)[n]$: odd

☆ می دانیم سیگنالی فرد است که $x[-n] = -x[n]$ و سیگنالی زوج است که $x[-n] = x[n]$

$$(f.g)[-n] = f[-n].g[-n] = -f[n].g[n] = -(f.g)[n] \Rightarrow$$

$$(f.g)[-n] = -(f.g)[n] \checkmark$$

حال پاسخ مسئله اصلی

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x_e[n]+x_o[n]\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + x_o^2[n] + \dots$$

$$\dots\ 2\underbrace{\left(x_e \cdot x_o\right)}_{\text{② سیگنال فرد}}[n] \overset{①}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n]+x_o^2[n] \quad \checkmark$$

س۳ ـ ط

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = 5 \qquad x_e = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n] = ?$$

$$\sum_{\infty} x^2[n] = \sum_{\infty} x_e^2[n] + \sum_{\infty} x_o^2[n] = 5 \Longrightarrow$$

$$\sum_{\infty} x_o^2[n] = 5 - \sum_{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = 5 - 1 - 2\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}_{2} = 5 - 1 - 4 = 0$$

(b_۴

$$x(t)=x(t+T) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{0} e^{-(2t-n)} = \sum_{n=-\infty}^{0} e^{-(2(t+T)-n)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{0} e^{n-2t} = \sum_{n=-\infty}^{0} e^{n-2t-2T} \Rightarrow e^{-2t}\sum_{n=-\infty}^{0} e^{n} = e^{-2t-2T}\sum_{-\infty}^{0} e^{n}$$

$$\xrightarrow[e^{-2t}\neq 0]{e^{n}\neq 0} e^{-2T}=1 \Rightarrow T=0 \Longrightarrow$$ پریودیک نیست

(c_۴

$$x[n]=x[n+N] \Rightarrow \cancel{3}e^{j\frac{3}{5}(n+\frac{1}{2})} = \cancel{3}e^{j\frac{3}{5}(n+\frac{1}{2}+N)} \Rightarrow$$

$$e^{j\frac{3}{5}(n+\frac{1}{2})} = e^{j\frac{3}{5}(n+\frac{1}{2})}\, e^{j\frac{3}{5}N} \Rightarrow e^{j\frac{3}{5}N}=1 \Rightarrow \frac{3}{5}N=2m\pi$$

× پریودیک نیست

(d_۴

$$\sin(\pi t) \rightarrow T\pi = 2\pi \Rightarrow T=2$$

$$\cos(\tfrac{3}{2}\pi t) \Rightarrow T\tfrac{3}{2}\pi = 2\pi \Rightarrow T=3$$

$$\sin(\tfrac{16}{3}\pi t) \Rightarrow T\tfrac{16}{3}\pi = 2\pi \Rightarrow T=\tfrac{3}{8}$$

$T_0(x(t)) = LCM(LCM(۲,۳), LCM(\frac{۳}{۸},۲)) =$

$\boxed{LCM(۶,۶) = ۶}$

(e-۲

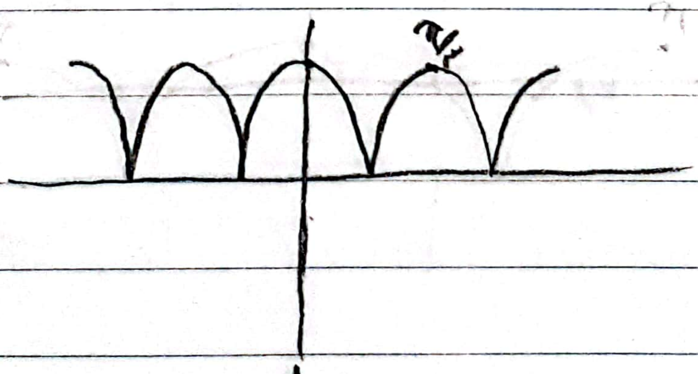
$\cos(\frac{\pi}{۶} n) \Rightarrow N\frac{\pi}{۶} = ۲\pi \Rightarrow N = ۱۲$

$\cos(\frac{۵}{۶}\pi n) \Rightarrow N\frac{۵}{۶}\pi = ۲\pi \Rightarrow N = ۱۲$

$\boxed{T_0 = LCM(۱۲,۱۲) = ۱۲}$

(f-۲

$\cos(۳t) \Rightarrow T \times ۳ = ۲\pi \Rightarrow T = \frac{۲}{۳}\pi$



$\boxed{|\cos(۳t)| \Rightarrow T_0 = \pi/۳}$

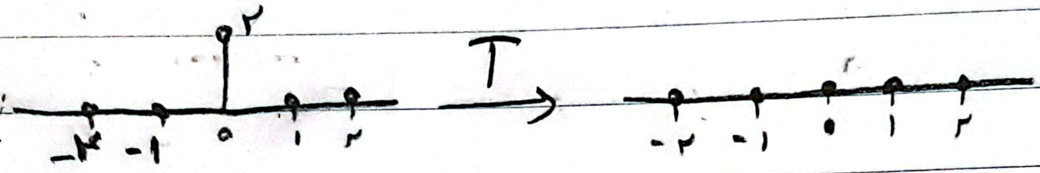
a-۵)

نیاز به مقدار $x(-t)$ در $t \geq |x(t)|$ $\Leftarrow$ حافظه دارد

با توجه به اینکه $x(-t)$ فقط برای $+t$ مثبت است $\Leftarrow$ علّی

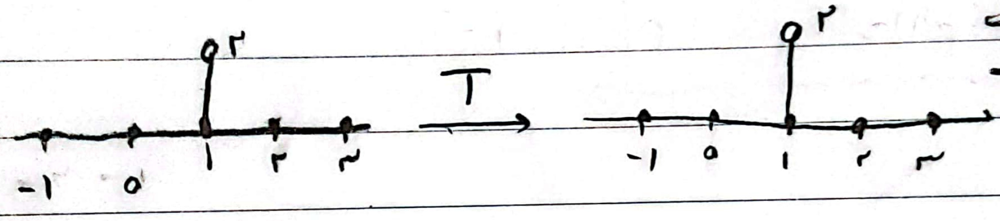
$t \to -\infty \Rightarrow t\,x(t) \to -\infty \Rightarrow$ سیستم ناپایدار

$2\delta(t)$:



سیستم TI نیست

$2\delta(t-1)$:



$x_1 \equiv 2 \qquad x_2 \equiv 4$

بررسی خطی بودن در نقطه $t=3$

$y_1(3) = x_1(-3) = 2 \qquad y_2(3) = 3 \times 4 = 12 \qquad y_1(3) + y_2(3) = 14$

$x_1 + x_2 \equiv 6 \xrightarrow[t=3]{T} y(3) = 3 \times 6 = 18 \neq 14$

سیستم خطی نیست X

ب ـ b) با توجه به sum بر روی کل $x[0]$، حافظه دارد

به دلیل مشتق به ، سیستم غیر علّی

$$\delta[n] \xrightarrow{T} \delta[n]$$

$$\delta[n-1] \xrightarrow{T} \delta[n-2]$$

TI نیست

ب ـ c) با توجه به به sum بر کل $\underset{k>0}{x[k]}$ ⇐ سیستم حافظه دارد و غیر علّی

اگر $n \to \infty$ میل کند، مقدار خروجی با توجه به 3^n بی نهایت خواهد شد

در نتیجه سیستم پایدار نیست

$$y_2 = y_1[n-N] = 3^{n-N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x[k]}{4^k}$$

$\neq$ سیستم TI نیست

$$x_2 = x_1[n-N] \xrightarrow{T} 3^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1[k]}{4^k}$$

$$a x[n] \xrightarrow{T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^k} x[k] a = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^k} x[k] = a y[n] \quad (1)$$

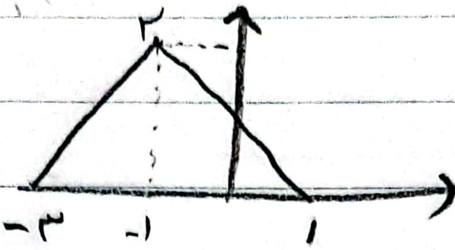
$$(x_1+x_2) \xrightarrow{T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^k} \left(x_1[k]+x_2[k]\right) = 3^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1[k]}{4^k} + 3^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_2[k]}{4^k} =$$

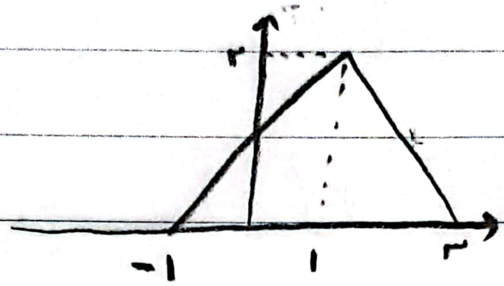
$y_1[n]+y_2[n]$ (2) سیستم خطی است

۶-الف)

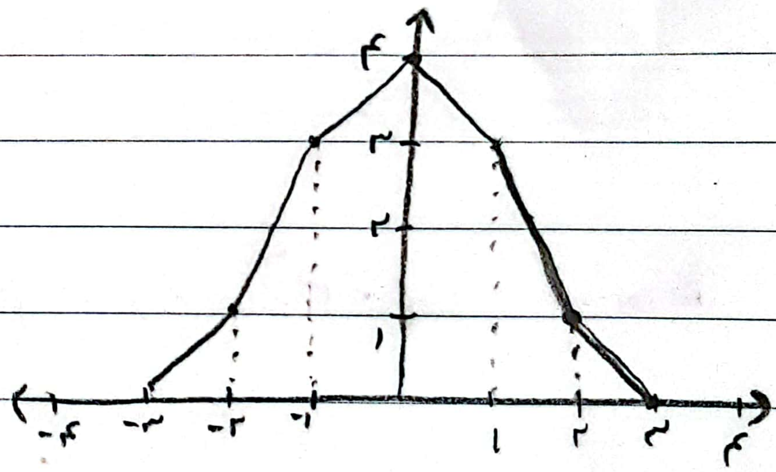
$x_2(t) = x_1(t) + x_1(t+1) + x_1(t-1)$

۶-ب)

$x_1(t+1) \xrightarrow{T}$  y_2

$x_1(t-1) \xrightarrow{T}$  y_3

$x_2(t) \xrightarrow{T} [y_1 + y_2 + y_3](t)$



۶-ج) سیستم غیرعلّی و حافظه دار است، زیرا $x(t) = 0$ $\forall t < -1$

اما $y_1(t)$ در نقطه $t=-2$ شروع به تغییر کرده است.

۷-a)

$x_1 \equiv ۲ \Rightarrow y[-۵] = ۰ \times x_1[-۵] = ۰$

$x_2 \equiv ۳ \Rightarrow y[-۵] = ۰ \times x_2[-۵] = ۰$

وارون ناپذیر

۷-b)

$x_1(t) = \begin{cases} -۲ & t \geq ۰ \\ ۰ & t < ۰ \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} ۲ & t \geq ۰ \\ ۰ & t < ۰ \end{cases}$

$y_1(t) = \begin{cases} ۱۶ & t \geq ۰ \\ ۰ & t < ۰ \end{cases} = y_2(t) = \begin{cases} ۱۶ & t \geq ۰ \\ ۰ & t < ۰ \end{cases}$

وارون ناپذیر

۷-c)

$x_1(t) \equiv \pi \Rightarrow y_1(t) = ۰$

$x_2(t) \equiv ۲\pi \Rightarrow y_2(t) = ۰$

وارون ناپذیر

۷-d)

$x_1[n] = \begin{cases} ۲ & n < ۰ \\ ۴ & n > ۰ \end{cases} \Rightarrow y_1[۲] = x[۱]\,x[-۱] = ۴ \times ۲ = ۸$

$n = ۲$

وارون ناپذیر

$x_2[n] = \begin{cases} ۴ & n < ۰ \\ ۲ & n > ۰ \end{cases} \Rightarrow y_2[۲] = x[۱]\,x[-۱] = ۲ \times ۴ = ۸$

(e-۷

$$\overset{T_2}{y_2[n]} = \begin{cases} x[n-3] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

وارون پذیر

$$x[n] \xrightarrow{T_1} \begin{cases} x[n+3] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases} \xrightarrow{T_2} \begin{cases} x[n+3-3] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq 1 \end{cases} = x[n]$$

(f-۷

$$y_2(t) = x(t+a)$$

وارون پذیر