به‌نام آفریننده بیت‌ها

دانشکده‌ی برق و کامپیوتر

دانشگاه صنعتی اصفهان

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ - ۱۴۰۲

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین سوم

نام:
دانیال خراسانی‌زاده

شماره دانشجویی:
۹۹۲۲۳۹۳

استاد درس:
دکتر نقش

۱

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{4}t}$$
$$= a_{-5}e^{-5j\frac{\pi}{4}t} + a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{4}t} + a_1 e^{j\frac{\pi}{4}t} + a_5 e^{5j\frac{\pi}{4}t}$$
$$= 2e^{-5j\frac{\pi}{4}t} - je^{-j\frac{\pi}{4}t} + je^{j\frac{\pi}{4}t} + 2e^{5j\frac{\pi}{4}t}$$
$$= 4\cos(5\frac{\pi}{4}t) - 2\cos(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{2})$$

۲

۱.۲

از سوال ۷ ضرایب فوریه تابع $y(t) = t, -1 \le t \le 1 \xleftrightarrow{\mathfrak{FS}} b_k(k \neq 0) = \frac{-e^{-jk\pi}}{jk\pi}, b_0 = 0$ را می‌دانیم. با استفاده از خواص سری فوریه داریم:

$$x(t) = \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{2} \xleftrightarrow{\mathfrak{FS}} a_k(k \neq 0) = \frac{1}{2}b_k, a_0 = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} \frac{-e^{-jk\pi}}{2jk\pi} & k \neq 0 \\ \frac{1}{2} & k = 0 \end{cases}$$

۲.۲

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t}e^{-jk\pi t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{t(-jk\pi-1)}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\frac{e^{(-jk\pi-1)} - e^{(jk\pi+1)}}{-jk\pi-1}$$
$$= \frac{sinh(1+jk\pi)}{1+jk\pi}$$

۳.۲

می‌دانیم که ضرایب فوریه تابع قطار ضربه به صورت $a_k = \frac{1}{T}$ هستند. با استفاده از خاصیت خطی بودن و شیفت زمانی سری فوریه داریم:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\delta(t-2k-1)$$
$$\xrightarrow{\mathfrak{FS}} a_k = \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}e^{-jk\pi} = \frac{1}{2} - (-1)^k$$

۳

۱.۳

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$
$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$
$$\xrightarrow{m=-k} x^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m}^* e^{jm\omega_0 t}$$
$$\xrightarrow[x(t)=x^*(t)]{x(t)\ \ is\ \ Real} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$
$$\Rightarrow a_k = a_{-k}^*$$
$$\xrightarrow{a_0=a_0^*} a_0 \in \mathbb{R}$$

۲.۳

$$x(t) = x(-t)$$
$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk\omega_0 t}$$
$$\Rightarrow a_k = a_{-k}$$
$$\xrightarrow{a_k=a_{-k}^*} a_k \in \mathbb{R}$$

۳.۳

$$
\begin{aligned}
& x(t) = -x(-t) \\
& \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} \\
& \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -a_{-k} e^{jk\omega_0 t} \\
& \Rightarrow a_k = -a_{-k} \\
& \xrightarrow{a_k = a^*_{-k}} \mathfrak{Re}(a_k) = 0 \\
& \xrightarrow[a_0 \in \mathbb{R}]{a_0 = -a_0} a_0 = 0
\end{aligned}
$$

۴.۳

$$
\begin{aligned}
& \mathfrak{Even}(x(t)) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \xleftrightarrow{\mathfrak{FS}} \frac{a_k + a_{-k}}{2} \\
& \xrightarrow{a_k = a^*_{-k}} \frac{a_k + a_{-k}}{2} = \frac{a_k + a^*_k}{2} = \mathfrak{Re}(a_k)
\end{aligned}
$$

۵.۳

$$
\begin{aligned}
& \mathfrak{Odd}(x(t)) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \xleftrightarrow{\mathfrak{FS}} \frac{a_k - a_{-k}}{2} \\
& \xrightarrow{a_k = a^*_{-k}} \frac{a_k - a_{-k}}{2} = \frac{a_k - a^*_k}{2} = j\mathfrak{Im}(a_k)
\end{aligned}
$$

۴

$$
\begin{aligned}
& b_k = \frac{1}{2T} \int_{2T} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{2T}t}\, dt \\
& = \frac{1}{2T} 2 \int_{T} x(t) e^{-j\frac{k}{2}\frac{2\pi}{T}t}\, dt \\
& = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-j\frac{k}{2}\omega_0 t}\, dt \\
& = a_{\frac{k}{2}}
\end{aligned}
$$

۵

۱.۵

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt) \\
&= \frac{1}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}} x(t-\frac{T}{2})e^{-jk\omega_0 (t-\frac{T}{2})}\,dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt) \\
&= \frac{1}{T}(-e^{jk\omega_0 \frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt) \\
&= \frac{1}{T}(1-e^{jk\omega_0 \frac{T}{2}})\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}(1-e^{jk\pi})\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt
\end{aligned}
$$

با توجه به اینکه مقدار $e^{jk\pi} = 1, k = 2n$ پس مقدار ضرایب زوج صفر است.

۲.۵

$$
\begin{aligned}
&x(t) = \sum_{k\in \mathfrak{O}\mathfrak{d}\mathfrak{d}} a_k e^{jk\omega_0 t} \\
&x(t-\frac{T}{2}) = \sum_{k\in \mathfrak{O}\mathfrak{d}\mathfrak{d}} a_k e^{jk\omega_0 (t-\frac{T}{2})} \\
&= \sum_{k\in \mathfrak{O}\mathfrak{d}\mathfrak{d}} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jk\pi} \\
&= \sum_{k\in \mathfrak{O}\mathfrak{d}\mathfrak{d}} -a_k e^{jk\omega_0 t} \\
&= -x(t)
\end{aligned}
$$

۶

$$
\begin{aligned}
&a_k = \frac{1}{6}\int_{T=6} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{6}t}\,dt \\
&b_k = \frac{1}{9}\int_{T=9} y(t)e^{-jk\frac{2\pi}{9}t}\,dt
\end{aligned}
$$

۱.۶

$$
\begin{aligned}
&T_Z = lcm(6,9) = 18 \\
&c_k = \frac{1}{18}\int_{T=18}(3x(t)+y(t))e^{-jk\frac{2\pi}{18}t}\,dt \\
&= \frac{1}{18}\int_{T=18} 3x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{18}t}\,dt + \frac{1}{18}\int_{T=18} y(t)e^{-jk\frac{2\pi}{18}t}\,dt \\
&= 3\frac{1}{6}\int_{T=6} x(t)e^{-j\frac{k}{3}\frac{2\pi}{6}t}\,dt + \frac{1}{9}\int_{T=9} y(t)e^{-j\frac{k}{2}\frac{2\pi}{9}t}\,dt \\
&= 3a_{\frac{k}{3}} + b_{\frac{k}{2}}
\end{aligned}
$$

۲.۶

۳.۶

$$
x^*(t) + x(-t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a^*_{-k} + a_{-k}
$$

۴.۶

$$
\frac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} (jk\frac{\pi}{3})^2 a_k = -(k\frac{\pi}{3})^2 a_k
$$

۷

اگر مشتق سیگنال را حساب کنیم مشاهده می‌کنیم که از یک مقدار DC به همراه یک تابع ضربه با دامنه ‎-۲، شیفت ۱ و پریود ۲ تشکیل شده. با استفاده از خواص سری فوریه مقدار $a_k(k \neq 0)$ را محاسبه و با محاسبه مساحت زیر نمودار a_0 را محاسبه می‌کنیم.

$$x'(t) = (\sum_{k=-\infty}^{\infty} -2\delta(t-2k-1)) + 1 \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a'_k(k \neq 0) = -2\frac{1}{2}e^{-jk\pi} = -e^{-jk\pi}$$

$$x(t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} jk\pi a_k(k \neq 0) = -e^{-jk\pi} \Rightarrow a_k(k \neq 0) = \frac{-e^{-jk\pi}}{jk\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = 0$$

۸

آ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

ب ($a_k = -a_{-k}, a_0 = 0$) a_k is purely imaginary and odd

ج تنها ضرایب سیگنال a_{-1}, a_1 هستند. همچنین بر اساس نتیجه قسمت ب: $a_{-1} = -a_1$

د

$$\int_1^9 |x(t)|^2\,dt = 2$$

$$\xrightarrow{x(t)\ is\ periodic\ with\ period\ 4} \frac{1}{4}\int_0^4 |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{Parseval's\ Relation} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = |a_{-1}|^2 + |a_1|^2$$

$$\xrightarrow{|a_{-1}|=|a_1|} = 2|a_1|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |a_1| = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\xrightarrow[|a_i|=|b_i|]{a_i=b_i j} a_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}j, a_{-1} = \mp\frac{\sqrt{2}}{4}j$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}t} \\
&= a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + a_1 e^{j\frac{\pi}{2}t} \\
&= \begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}j \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{4}je^{-j\frac{\pi}{2}t} + \frac{\sqrt{2}}{4}je^{j\frac{\pi}{2}t} \\ a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}j \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}je^{-j\frac{\pi}{2}t} - \frac{\sqrt{2}}{4}je^{j\frac{\pi}{2}t} \end{cases} \\
&= \pm\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{2}}{2}
\end{aligned}
$$