دانیال خراسانی زاده - 9922393 - تکلیف هفتم سیگنال ها و سیستم ها

۱- الف) اگر نرخ نایکوئیست $\omega_s = 2\omega_m$ باشد حداکثر پریود نمونه برداری $T < \frac{2\pi}{2\omega_m} = \frac{\pi}{\omega_m}$ خواهد بود. باتوجه به این حداکثر T نمونه برداری برای این سیگنال $\frac{\pi}{5000\pi} = 2\times10^{-4}$ خواهد بود که از T داده شده بیشتر است پس سیگنال قابل بازسازی خواهد بود.

ب) $T > T_{max} = \frac{\pi}{1.1\times10^{4}\pi}$ پس سیگنال قابل بازسازی نیست.

ج) با توجه به اینکه مقدار $Im\{X(j\omega)\}$ را نمی دانیم نمی توان نظر داد.

د) با توجه به اینکه سیگنال حقیقی است $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$ پس $X(j\omega) = 0$ برای $5000\pi < |\omega|$ و جواب مانند قسمت الف خواهد بود.

و) مانند قسمت قبل می توان دید که $X(j\omega) = 0$ برای $|\omega| > 15000\pi$ و جواب مانند قسمت ب خواهد بود.

هـ) اگر $X(j\omega) * X(j\omega) = 0$ برای $|\omega| > \omega_1$ آنگاه $X(j\omega) = 0$ برای $|\omega| > \frac{\omega_1}{2}$ و با توجه به این نرخ نایکوئیست برای این سیگنال $\omega_1 = 2\frac{\omega_1}{2} = 15000\pi$ و حداکثر پریود نمونه برداری $\frac{2\pi}{15000\pi} = 1.33\times10^{-4}$ است پس با این پریود داده شده سیگنال قابل بازسازی است.

ی) با توجه به اینکه در بازه $\omega < -5000\pi$ چیزی نمی دانیم نمی توان نظر داد.

۲-۱)

$$y(t) = x(t)\cdot x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(j\omega) * X(j\omega)\right)$$

$$Y(j\omega) = 0 \text{ for } |\omega| > \omega_s \Rightarrow \text{Nyquist Rate} = 2\omega_s$$

2)

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \overset{FT}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = 0 \text{ for } |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \Rightarrow \text{Nyquist Rate} = \omega_s$$

3)

$$y(t) = x(t) * x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = X^2(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = 0 \text{ for } |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \Rightarrow \text{Nyquist Rate} = \omega_s$$

4)

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_s t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{\pi}{2\pi}\left(X(j\omega) * \left(\delta(\omega-\omega_s) + \delta(\omega+\omega_s)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(X(j(\omega-\omega_s)) + X(j(\omega+\omega_s))\right)$$

$$Y(j\omega) = 0 \text{ for } |\omega| > \omega_s + \frac{\omega_s}{2} \Rightarrow \text{Nyquist Rate} = 3\omega_s$$

(5

$$y(t) = x(t) + x(t-1) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)(1+e^{-j\omega})$$

$Y(j\omega) = 0$ for $|\omega| > \omega_s/2 \Rightarrow$ Nyquist Rate $= \omega_s$

-3

$Y(j\omega) = 0$ for $|\omega| > \omega_2 \Rightarrow$ Nyquist Rate $= 2\omega_2$

$T < \frac{2\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{\omega_2}$, $\omega_2 < \omega_c < \omega_s - \omega_2$

-4

الف) با توجه به اینکه $X_d(e^{j\Omega})$ مجموع چنین مقدار $X_c(j\omega)$ است اگر X_d حقیقی باشد، X_c نیز حقیقی است.

ب) $1 > X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - 2k\pi)/T) > \frac{1}{T} X_c(j\omega)$

$\Rightarrow X_c(j\omega) < T = 5\times10^{-4}$

ج) $X_d(e^{j\Omega}) = 0$ for $\frac{3\pi}{4} \leq |\Omega| \leq \pi \Rightarrow X_c(j\omega) = 0$ for $\frac{3\pi}{4T} \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{T}$

$\Rightarrow X_c(j\omega) = 0$ for $1500\pi \leq |\omega| \leq 2000\pi$ and $X_c(j\omega) = 0$ for $|\omega| \geq 2000\pi$

$\Rightarrow X_c(j\omega) = 0$ for $1500\pi \leq |\omega|$

د) $X_c(j\omega) = X_c(j(\omega - 2000\pi))$

-5

$$w(t) = x_1(t)\,x_2(t) \xleftrightarrow{FT} W(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X_1(j\omega) * X_2(j\omega)\right)$$

$W(j\omega) = 0$ for $|\omega| > \omega_1 + \omega_2$

$\omega_s = 2(\omega_1 + \omega_2)$ and $T < \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$

6- الف)

$$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) + \frac{1}{4} z^{-2} Y(z) = X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

Poles: $1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2} = 0 \Rightarrow z = (\frac{1}{4}) \pm (\frac{\sqrt{3}}{4})j$

با توجه به اینکه سیستم علی است ROC برابر $|z| > |\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}j| = \frac{1}{2}$ خواهد بود.

ب)

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2})} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$y[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{2}{\sqrt{3}} (\frac{1}{2})^n \sin(\frac{n\pi}{3}) u[n]$$

7- با توجه به اینکه $x[n]$ حقیقی است صفرها و قطب های آن مزدوج مختلط هستند در نتیجه قطب های $X(z)$ در $\frac{1}{2}e^{\pm j\pi/3}$ قرار دارند. با توجه به اینکه $X(z)$ در بی نهایت قطب ندارد می توان نتیجه گرفت که تنها صفرهای آن همان دو صفر در مبدا هستند و $X(z) = \frac{az^2}{(z-\frac{1}{2}e^{j\pi/3})(z-\frac{1}{2}e^{-j\pi/3})}$ است که با قرار دادن $\frac{a}{3/4} = X(1) = 8/3$

می توانیم نتیجه بگیریم که $a=2$ و با توجه به اینکه $x[n]$ دست راستی است $|z| > \frac{1}{2}$

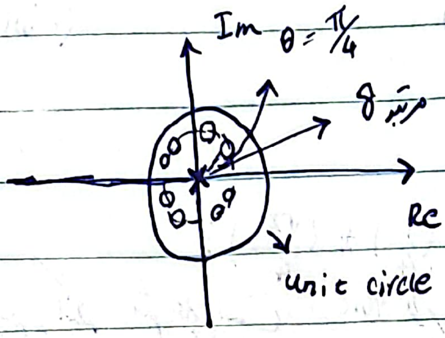
8-

$$X(z) = S(z) - e^{-7a} z^{-8} S(z)$$

$$H(z) = \frac{X(z)}{S(z)} = 1 - e^{-7a} z^{-8} = \frac{z^8 - e^{-7a}}{z^8}$$

$H(z)$ یک قطب مرتبه 8 در $z=0$ و 8 صفر روی دایره به شعاع $e^{-\frac{7}{8}a}$ دارد.

و ROC تمام صفحه بجز $z=0$ است.



ب)

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{S(z)}{X(z)} = \frac{1}{H(z)} = \frac{z^8}{z^8 - e^{-7a}}$$

اگر Roc در $|z| < e^{-\frac{7}{8}a}$ باشد سیستم به دلیل قرار نگرفتن دایره واحد در Roc علی و پایدار نیست. و اگر Roc در $|z| > e^{-\frac{7}{8}a}$ باشد Roc دایره واحد و بی‌نهایت را شامل شده و سیستم علی و پایدار خواهد بود.