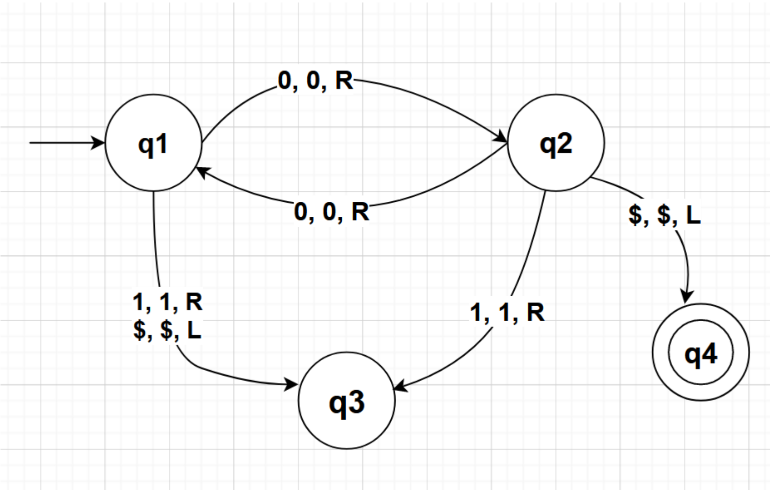
بسمه تعالی

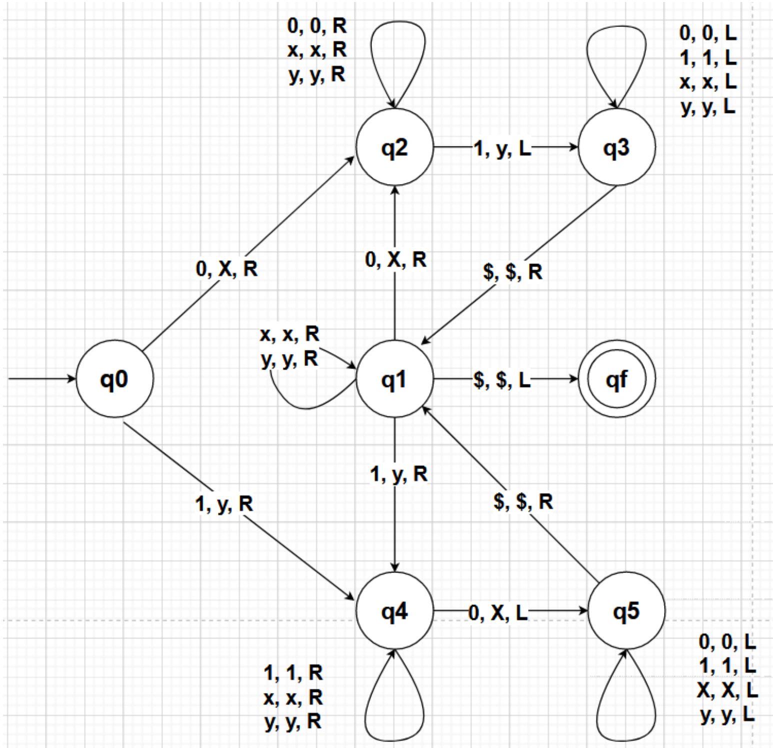
# نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها
## پاسخ تکلیف پنجم

۱- برای هر یک از زبان‌های توصیف شده، یک ماشین تورینگ طراحی کنید. (برای مورد سوم از توصیف سطح بالا استفاده کنید و نیاز به رسم ماشین تورینگ نیست.در توصیف سطح بالا کافیست الگوریتم خود را به طور کامل و دقیق توضیح دهید. برای مشاهده مثال‌هایی از توصیف سطح بالا می‌توانید به کتاب سیپسر مثال‌های ۳.۰۷ تا ۳.۰۱۲ مراجعه کنید)

$L_1 = \{\ 0^{2k+1} : k \geq 0\ \}$




$L_2 = \{\ w \in \{0,1\}^+ \mid n_0(w) = n_1(w)\ \}$

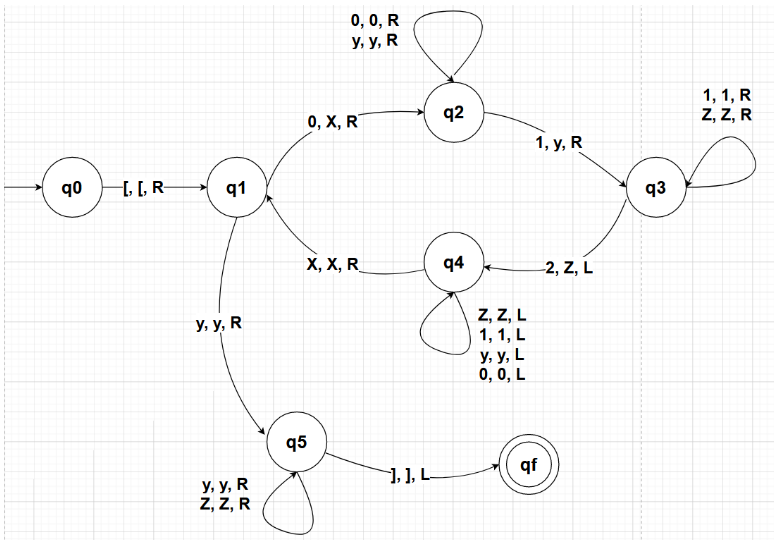


$L_3 = \{ 0^n 1^m 2^k : k = mn \}$ $\Sigma = \{0, 1, 2\}$

برای این مورد می‌توانیم تورینگ ماشین نیز به راحتی طراحی کنیم اما تنها توصیف سطح بالا و توضیحات لازم کافی می باشد. برای طراحی این تورینگ ماشین باید تعداد تکرار های سمبل سوم که ۲ می باشد برابر ضرب تعداد سمبل های ۰ و ۱ باشد، در واقع به ازای هر ۰، هر بار به تعداد ۱ ها از سمبل های ۲ خط بزنیم. پس از ابتدای رشته شروع میکنیم و با دیدن ۰ آن را مارک کرده و به جای آن X میگذاریم. سپس به سمت راست حرکت کرده تا به اولین ۱ برسیم و با مارک کردن آن، جای آن Y میگذاریم. باز به سمت راست حرکت کرده و یک ۲ به ازای ۱ خط خورده خط میزنیم، مثلا با علامت Z آن را خط میزنیم. حال به سمت چپ برگشته و به ازای دیدن هر ۱ همین روال را تکرار کرده و متناظر با آن به راست رفته و یک ۲ خط میزنیم. در این حالت اگر به سمت چپ برگشتیم اما دیگر سمبل ۱ وجود نداشت، این بار به راست حرکت کرده و تمام y ها را دوباره تبدیل به ۱ میکنیم. سپس به سمت چپ رفته و دوباره یک سمبل ۰ خط زده و به راست رفته و حرکات گفته رده را باز تکرار میکنیم. در نهایت در صورت تمام شدن ۰ ها ، اینبار به سمت راست رفته و با دیدن X، Y، Z رد میشویم تا به انتها برسیم. اگر به انتهای رشته رسیده بودیم، رشته را قبول میکنیم در غیر اینصورت آن را رد میکنیم.

۲ - (الف) یک ماشین کران‌دار خطی یا همان $LBA$ نوع خاصی از تورینگ ماشین‌ها است با این تفاوت که مقدار استفاده شده از نوار، تابعی خطی برحسب طول رشته‌ی ورودی بوده و در حالت خاص این فضای مورد استفاده دقیقاً برابر طول رشته‌ی ورودی است. یک $LBA$ طراحی کنید که پذیرنده زبان زیر باشد:(برای این کار فرض کنید رشته را بصورت $[w]$ روی نوار قرار داده و تنها مجاز به استفاده از نوار در محدوده‌ی این کروشه باز و بسته هستیم. درواقع سمبل [ ابتدای رشته و سمبل ] انتهای رشته را مشخص میکند)

$L = \{ 0^n 1^n 2^n : n \geq 1 \}$ $\Sigma = \{0, 1, 2\}$




(ب) گرامر بدون محدودیت زیر چه زبانی را تولید می کند؟ ($\Sigma = \{a, b\}$)

$S \to aAS|bBS|C$
$Aa \to aA$
$Ba \to aB$
$Ab \to bA$
$Bb \to bB$
$BC \to Cb$
$AC \to Ca$
$C \to \lambda$

بعد از چند مرحله اشتقاق و با امتحان کردن چند رشته مختلف معلوم می‌شود که زبان گرامر فوق بصورت زیر است:

$L(G) = \{WW : W \in \{a,b\}^*\}$

۳ - با توجه به خواص بستاری زبان‌ها، بسته بودن یا نبودن دسته زبان های زیر را تحت عملگرهای گفته شده مشخص کنید.

| نوع زبان | اجتماع | اشتراک | الحاق | بستار کلینی | مکمل | معکوس |
|---|---|---|---|---|---|---|
| منظم | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| خطی | ✓ | × | × | × | × | ✓ |
| مستقل از متن | ✓ | × | ✓ | ✓ | × | ✓ |
| حساس به متن | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| تصمیم‌پذیر | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| شمارش‌پذیر بازگشتی (RE) | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | × |

۴ - تصمیم‌پذیری هر یک از زبان‌های زیر را مشخص و اثبات کنید. (برای اثبات تصمیم‌پذیری، شرح یک الگوریتم سطح بالا برای آن زبان کافی است. استفاده از قضیه Rice مجاز نیست. می‌توانید از قضایایی که در کلاس مطرح شده‌است استفاده کنید بدون آن که آن‌ها را اثبات کنید.)

الف) زبانی شامل $\langle M,q,w\rangle$هایی که در آن $M$ یک تورینگ ماشین است، و $q$ یک استیت (حالت) از این ماشین است و ماشین $M$ زمانی که $w$ را به عنوان ورودی دارد، وارد استیت $q$ خواهد شد.

$L_1$ = { $\langle M,q,w\rangle|M$ is a TM and $q \in L(M)$ and $M$ running on input $w$ enters state $q$ }

فرض کنیم $L_1$ تصمیم پذیر است و تصمیم گیر $D_1$ را برای آن در نظر می گیریم. اکنون می‌توان با استفاده از $D_1$ یک تصمیم گیر برای $A_{TM}$ ساخت. کافی است به عنوان ورودی به این ماشین $< M, q_{accept}, w >$ را بدهیم و خروجی $D_1$ را برگردانیم.

ب) زبانی شامل $\langle M\rangle$ هایی که اگر رشته $w$ را قبول کنند، رشته $w^R$ را نیز قبول کنند.

$L_2$ = { $\langle M\rangle|M$ is a TM and $M$ accepts $w^R$ whenever it accepts $w$ }

ب) فرض می‌کنیم $L_2$ تصمیم‌پذیر است و تصمیم‌گیر $R$ را برای آن در نظر می‌گیریم. اکنون با استفاده از $R$، تصمیم‌گیر $S$ را برای $A_{TM}$ می‌سازیم:

ورودی $S$، $\langle M,w\rangle$ است.

ماشین تورینگ $Q$ روی ورودی $x$ به شکل زیر عمل می‌کند:

۱- اگر $x$ به شکل $0^n1^n$ یا $1^n0^n$ نبود، خروجی $reject$ را برگردان.

۲- اگر $x$ به شکل $0^n1^n$ بود، $accept$ برگردان.

۳- اگر $x$ به شکل $1^n0^n$ بود، $M$ را روی $w$ اجرا کن و اگر خروجی $accept$ شد، آن را برگردان.

اکنون $R$ را روی $\langle Q\rangle$ اجرا می‌کنیم و نتیجه را برمی‌گردانیم.

از آنجا که $A_{TM}$ تصمیم‌ناپذیر است ولی $S$ با کمک $R$ می‌تواند درمورد آن تصمیم بگیرد، در نتیجه به تناقض رسیدیم و $L_2$ تصمیم‌ناپذیر است.

ج) زبانی شامل $\langle G_1,G_2\rangle$ هایی که $G_1$ و $G_2$ گرامر های مستقل از متن هستند و $L(G_1) \subseteq L(G_2)$.

$L_3 = \{ \langle G_1, G_2 \rangle | G_1, G_2 \text{ are CFG and } L(G_1) \subseteq L(G_2) \}$

ج) فرض می‌کنیم $L_3$ یک زبان تصمیم‌پذیر باشد. در نتیجه می‌توانیم تصمیم‌گیر $D_3$ را برای آن در نظر بگیریم. با استفاده از این تصمیم‌گیر، یک بار رابطه $L(G_1) \subseteq L(G_2)$ را بررسی می‌کنیم و بار دیگر $L(G_2) \subseteq L(G_1)$ . اگر هر دو بار نتیجه مثبت بگیریم می‌دانیم بدان معناست که $L(G_1) = L(G_2)$ است و در غیر اینصورت $L(G_1) \neq L(G_2)$ حاصل می شود. بدین ترتیب با استفاده از $D_3$ توانستیم مسئله $EQ_{CFG}$ را به یک مسئله تصمیم‌پذیر تبدیل کنیم که تناقض است. چرا که می‌دانیم $EQ_{CFG}$ تصمیم‌ناپذیر است. در نتیجه فرض اولیه باطل است و $L_3$ تصمیم‌ناپذیر است.

د) زبانی شامل $\langle M \rangle$ هایی که تنها تورینگ ماشینی هستند که زبان $L(M)$ را می‌پذیرد.

$L_4 = \{ \langle M \rangle | M \text{ is a TM and } M \text{ is the only TM that accepts } L(M) \}$

د) چون می‌دانیم هر زبان بینهایت TM دارد که می‌توانند آن را بپذیرند. پس این زبان تصمیم پذیر است و کافی است یک تصمیم گیر برای آن در نظر بگیریم که با توجه به ورودی reject برگرداند.

ه) زبانی شامل $\langle M \rangle$ هایی که حداقل یک رشته با طول ۵ دارند.

$L_5 = \{ \langle M \rangle \text{ contains at least one string with length of } 5 \}$

تصمیم پذیر است. با استفاده از $E_{DFA}$ آن را حل می کنیم. یک DFA در نظر بگیرید که تمامی رشته هایی که طولشان حداقل ۵ است را دارد و آن را A بنامید. حال $A\$$

۵- $L_0$ یک زبان تصمیم‌پذیر است. پس حداقل یک تورینگ ماشین وجود دارد که می‌تواند روی آن تصمیم بگیرد. اکنون اگر به زبان $L_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ decides } L_0\}$ توجه کنیم، می‌بینیم که این زبان هم‌ارز $HALT_{TM}$ است. در واقع اگر $L_1$ تصمیم‌پذیر باشد، یک ماشین $R_M$ وجود دارد که می‌تواند روی آن تصمیم بگیرد. اگر $M$ را به $R_M$ بدهیم، اگر خروجی **Yes** باشد یعنی $M$ روی رشته‌های زبان $L_0$، HALT می‌کند و اگر خروجی **No** باشد یعنی $M$ روی رشته‌های زبان $L_0$، HALT نمی‌کند. از آنجا که محدودیتی درمورد زبان $L_0$ نداریم (به جز آنکه زبان تصمیم‌پذیر باشد و برای رفع این موضوع می‌توانیم زبان‌های تک عضوی را در نظر بگیریم)، در نتیجه می‌توان گفت $L_1 \equiv HALT_{TM}$ است. پس $L_1$ تصمیم‌پذیر نیست و این باعث می‌شود که $L_2 = \varnothing$ تصمیم‌پذیر باشد. چرا که اگر یک تورینگ ماشین داشته باشیم که بدون توجه به ورودی تنها خروجی No بدهد، یک تصمیم‌گیر برای زبان $L_2$ است.

پس نتیجه کلی این می‌شود که زبان نمایش‌دهنده تصمیم‌گیرنده‌های یک زبان تصمیم‌پذیر، تصمیم‌ناپذیر است و زبان نمایش‌دهنده تصمیم‌گیرنده‌های یک زبان تصمیم‌ناپذیر، تصمیم‌پذیر است. این نتیجه معادل با آن است که اگر $L_0$ تصمیم‌پذیر باشد، $L_k$ تصمیم‌پذیر است اگر و تنها اگر $k$ زوج باشد.

۶ - نشان دهید هر دو شرط قضیه Rice برای نشان دادن این که زبان موردنظر تصمیم‌پذیر نیست، لازم هستند.
موفق باشید :)