Appunti molto belli di Calculus

Floppy Loppy

March 2022

Contents

1 Numeri Reali

Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}^*\}$

Osservazione 1.1. In particolare $\mathbb{Q}$ è detto **denso** ovvero presi due qualunque punti $x, y \in \mathbb{R}$ esiste sempre un razionale $\mathbb{Q}$ tra di essi.

Esempio 1.1. *Proviamo a dimostrarlo attraverso unaretta:*

Aggiungere esempio con una retta

Proprietà 1.1. Fondamentale Proprietà di $\mathbb{R}$ è un insieme **totalmente ordinato**.

Lemma 1.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$

1.1 Sottoinsiemi particolari di $\mathbb{R}$

Esistono diversi tipi di intervalli, elenchiamoli per categoria

1.1.1 Intervalli limitati

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < b\}$ intervallo aperto
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq b\}$ intervallo chuso
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x < b\}$ intervallo semi-aperti
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x \leq b\}$ itervallo semi-aperti

1.1.2 Intervalli illimitati

Gli intervalli illimitati sono rappresentate geometricamente da semirette

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < +\infty\}$ intervallo aperto
- $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq +\infty\}$ intervallo chuso
- $[-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\infty \wedge x < b\}$ intervallo semi-aperti
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > -\infty \wedge x \leq b\}$ itervallo semi-aperti

1.2 Dominio e Codominio

recuperare lezione mannaggia il cazzo

Definizione 1.1. (Funzione) Una funzione $f : A \to R$ non è altro che una associazione univoca di un elemento di A con uno di $\mathbb{R}$.

In particolare:

$$\forall x \in A \quad \exists! y \in \mathbb{R} : f(x) = g.$$

Proprietà 1.2. Una particolarità dei reali è che possiamo rappresentare il grafico della funzione:

Disegnare retta

Come la retta rappresenta l'insieme $\mathbb{R}$ il piano rappresenta l'insieme:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Il grafico di f non è altro che:

$$graph(f) = \{(x, f(x)) : x \in A = dom(f)\} \leq \mathbb{R}^2$$

Osservazione 1.2. Data una curva $M \subseteq \mathbb{R}^2$, essa è grafico di una funzione solo se $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste al più un punto y tale che $(x, y) \in M$, cioè M intergetta le rette verticali al più di un punto

Inserire Esempio grafico 10:30

2 Proprietà Funzioni

2.1 Iniettività

Definizione 2.1. $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definizione 2.2. Graficamente possiamo dare più definizioni con lo stesso significato:

- graficamente diciamo che se due punti x_1, x_2 hanno i realtivi punti sul grafico alla stessa altezza, allora in realta $x_1 = x_2$ sono lo stesso punto.
- Presa una qualunque altezza, c'è al più un punto sul grafico quell'altezza.
- $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in al più un punto.
- f è iniettiva se interseca rette orizzontali in al più un punto.
- $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha al più una soluzione.

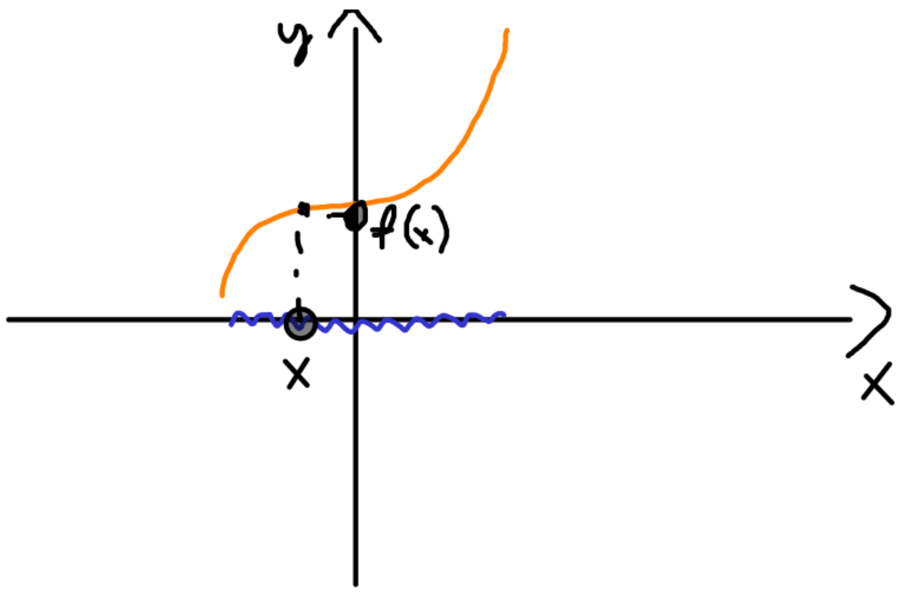

Figure 1: Dimostrazione Iniettività

dove $f(x)$ è la distanza (con segno) del punto sul grafico dall'asse dell'ascisse

2.2 Surriettività

Definizione 2.3. $f : A \to \mathbb{R}$ è surriettiva se $\forall y \in \mathbb{R} \exists$

Definizione 2.4. graficamente possiamo dire che $f : A \to \mathbb{R}$ è surriettiva se $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto.

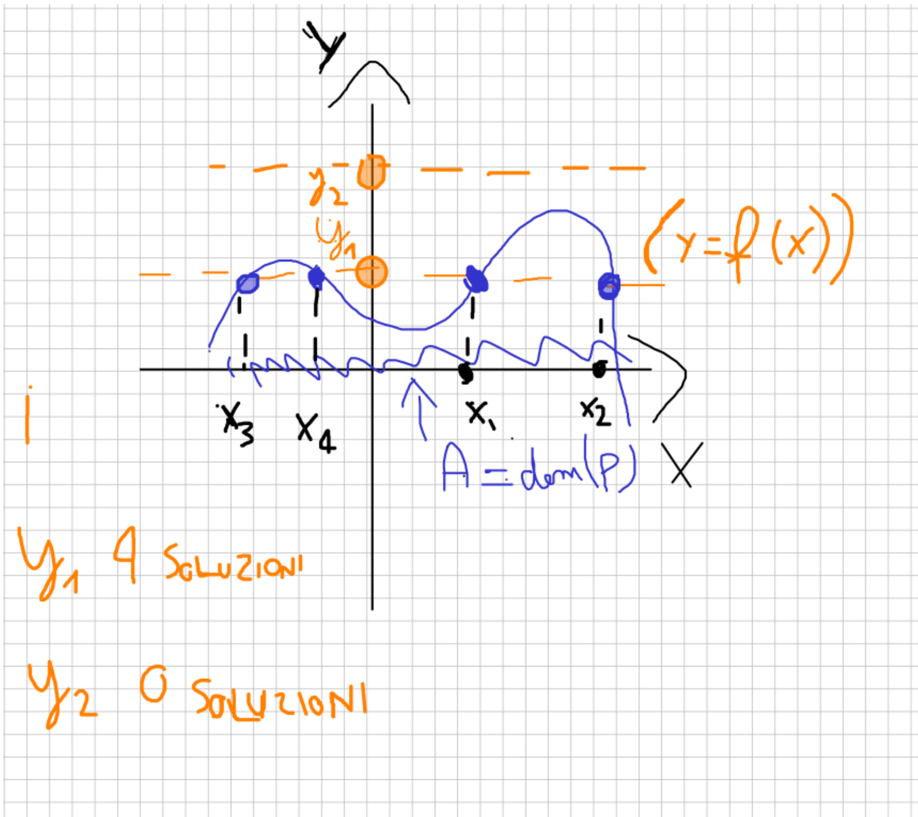

Figure 2: Dimostrazione grafica surriettività

2.3 Biiettiva

$f : A \to \mathbb{R}$ è biiettiva se:

- $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto.
- ogni retta orizzontale intersca il grafico di f in un punto.
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$ ha al più una soluzione

2.4 Operazioni tra funzioni

date $f, g : A \to \mathbb{R}$ (posso avere anche domini diversi ma allora la funzione che risulterà alla fine avrà come dominio l'intersezione di $dom(f)$ e $dom(g)$).

- $(f + y)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - y)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f * y)(x) = f(x) * g(x)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- $(\lambda f)(x) = \lambda * f(x)$
- $f \circ g(x) = f(g(x))$

> Possiamo immaginare le funzioni come una black box nella quale inseriamo una valore ed essa ci restituisce un altro valore in base a quello che accade all'intero della black box.

Il dominio di $f \circ g$ è quel numero che:

Aggiungere il dominio della funzione composta LEZ:4/3

Esempio 2.1. *Mostriamo alcuni esempi di funzioni composte:*

$$e^{x^2} = (f \circ g)(x)$$
$$g(x) = x^2 \quad f(y) = e^y$$
$$f(y(x)) = f(x^2) = e^{x^2}$$

2.5 Funzioni inverse

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva possiamo costruire la funzione inversa, vedi figura 1.
Data $y \in Im(f)$ posso definire $x = g(y)$ come l'unica soluzione di $y = f(x)$

$$dom(f^{-1}) = Im(f)$$
$$Im(f^{-1}) = dom(f)$$

Una funzione inversa molto comune è l'operazione di radice.

Esempio 2.2. *se* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$