

Appunti molto belli di Calculus

Floppy Loppy

March 2022

Contents

1	Numeri Reali	2
1.1	Sottoinsiemi particolari di \mathbb{R}	2
1.1.1	Intervalli limitati	2
1.1.2	Intervalli illimitati	2
1.2	Dominio e Codominio	3
2	Proprietà Funzioni	4
2.1	Iniettività	4
2.2	Suriettività	4
2.3	Biiettiva	5
2.4	Operazioni tra funzioni	6
2.5	Funzioni inverse	7
2.6	Monotonia	7
2.7	Proprietà delle funzioni monotone	9
3	Trasformazioni geometriche	11
3.1	traslazioni verticali	11
3.2	traslazioni orizzontali	11
3.3	dilatazioni e contrazioni verticali	11
3.4	dilatazioni e contrazioni orizzontali	11
4	Funzioni elementari	11
4.1	Proprietà dell'esponenziale e del logaritmo	11
4.2	Funzioni trigonometriche	12

1 Numeri Reali

Sottoinsiemi di \mathbb{R} sono:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}^*\}$

Osservazione 1.1. In particolare \mathbb{Q} è detto **denso** ovvero presi due qualunque punti $x, y \in \mathbb{R}$ esiste sempre un razionale \mathbb{Q} tra di essi.

Esempio 1.1. *Proviamo a dimostrarlo attraverso unaretta:*

Proprietà 1.1. Fondamentale Proprietà di \mathbb{R} è un insieme **totalmente ordinato**.

Aggiungere
esempio
con una
retta

Lemma 1.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$

1.1 Sottoinsiemi particolari di \mathbb{R}

Esistono diversi tipi di intervalli, elenchiамoli per categoria

1.1.1 Intervalli limitati

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < b\}$ intervallo aperto
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq b\}$ intervallo chiuso
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x < b\}$ intervallo semi-aperti
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x \leq b\}$ intervallo semi-aperti

1.1.2 Intervalli illimitati

Gli intervalli illimitati sono rappresentate geometricamente da semirette

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < +\infty\}$ intervallo aperto
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq +\infty\}$ intervallo chiuso
- $[-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\infty \wedge x < b\}$ intervallo semi-aperti
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > -\infty \wedge x \leq b\}$ intervallo semi-aperti

1.2 Dominio e Codominio

Definizione 1.1. (Funzione) Una funzione $f : A \rightarrow R$ non è altro che una associazione univoca di un elemento di A con uno di \mathbb{R} .

In particolare:

$$\forall x \in A \quad \exists! y \in \mathbb{R} : f(x) = y.$$

Proprietà 1.2. Una particolarità dei reali è che possiamo rappresentare il grafico della funzione:

Come la retta rappresenta l'insieme \mathbb{R} il piano rappresenta l'insieme:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Il grafico di f non è altro che:

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A = \text{dom}(f)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Osservazione 1.2. Data una curva $M \subseteq \mathbb{R}^2$, essa è grafico di una funzione solo se $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste al più un punto y tale che $(x, y) \in M$, cioè M intergetta le rette verticali al più di un punto

recuperare
lezione
mannaggia
il cazzo

Disegnare
retta

Inserire
Esempio
grafico
10:30

2 Proprietà Funzioni

2.1 Iniettività

Definizione 2.1. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definizione 2.2. Graficamente possiamo dare più definizioni con lo stesso significato:

- graficamente diciamo che se due punti x_1, x_2 hanno i relativi punti sul grafico alla stessa altezza, allora in realtà $x_1 = x_2$ sono lo stesso punto.
- Presa una qualunque altezza, c'è al più un punto sul grafico quell'altezza.
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in al più un punto.
- f è iniettiva se interseca rette orizzontali in al più un punto.
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha al più una soluzione.

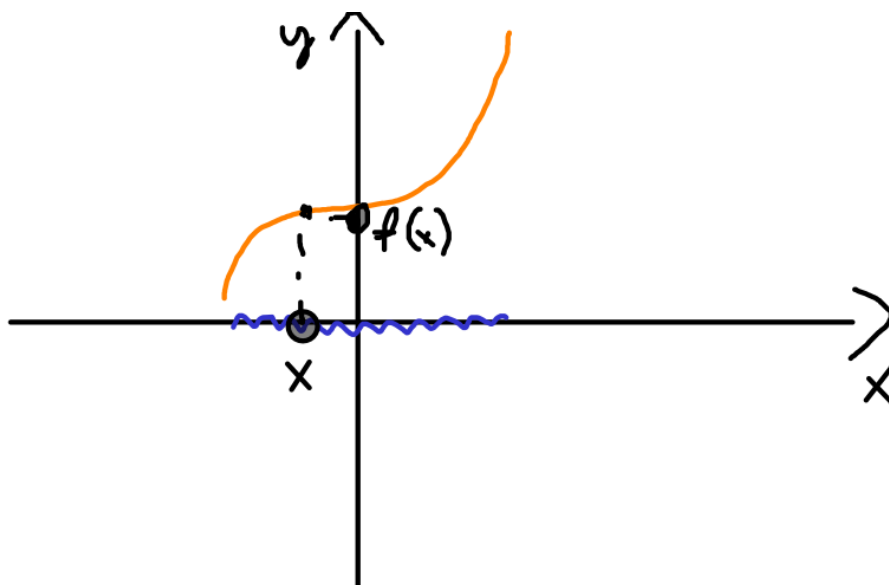


Figure 1: Dimostrazione Iniettività

dove $f(x)$ è la distanza (con segno) del punto sul grafico dall'asse dell'ascisse

2.2 Surriettività

Definizione 2.3. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è surriettiva se $\forall y \in \mathbb{R} \exists$

Definizione 2.4. graficamente possiamo dire che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è surriettiva se $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto.

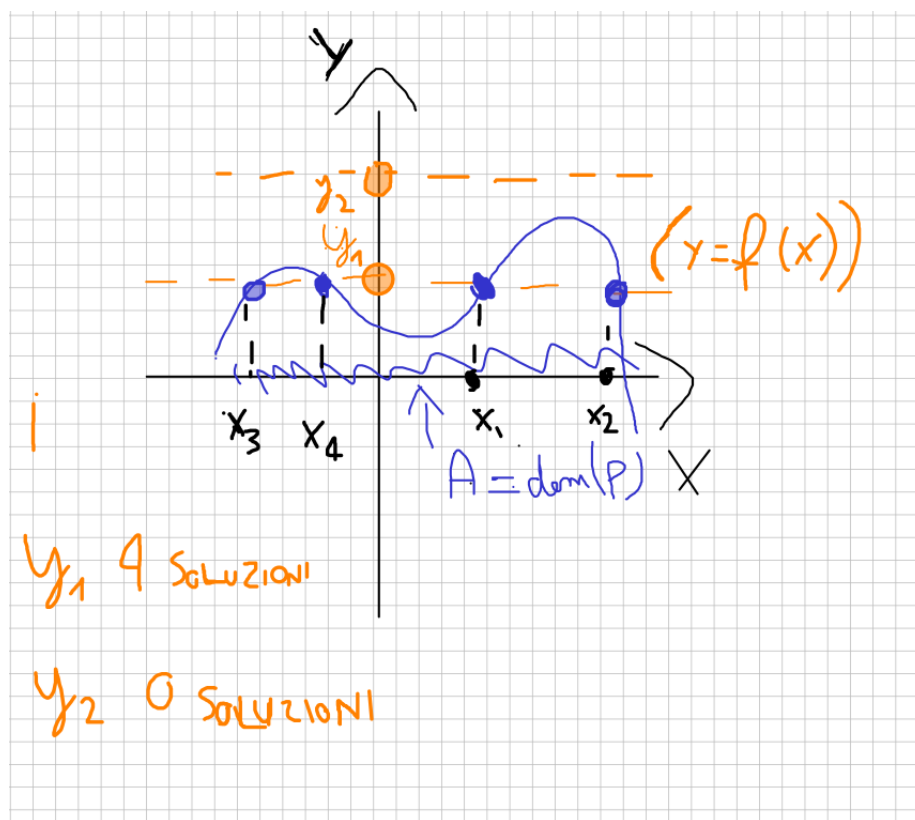


Figure 2: Dimostrazione grafica surriettività

2.3 Biiettiva

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è biiettiva se:

- $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto.
- ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in un punto.
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$ ha al più una soluzione

2.4 Operazioni tra funzioni

date $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ (posso avere anche domini diversi ma allora la funzione che risulterà alla fine avrà come dominio l'intersezione di $\text{dom}(f)$ e $\text{dom}(g)$).

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $(\lambda f)(x) = \lambda * f(x)$
- $f \circ g(x) = f(g(x))$

Possiamo immaginare le funzioni come una black box nella quale inseriamo un valore ed essa ci restituisce un altro valore in base a quello che accade all'interno della black box.

Il dominio di $f \circ g$ è quel numero che:

Esempio 2.1. *Mostriamo alcuni esempi di funzioni composte:*

$$\begin{aligned}e^{x^2} &= (f \circ g)(x) \\ g(x) &= x^2 \quad f(y) = e^y \\ f(g(x)) &= f(x^2) = e^{x^2}\end{aligned}$$

Aggiungere
il dominio
della
funzione
composta
LEZ:4/3

2.5 Funzioni inverse

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva possiamo costruire la funzione inversa, vedi figura 1.

Data $y \in \text{Im}(f)$ posso definire $x = g(y)$ come l'unica soluzione di $y = f(x)$

$$\text{dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f)$$

$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$$

Una funzione inversa molto comune è l'operazione di radice.

Esempio 2.2. se $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

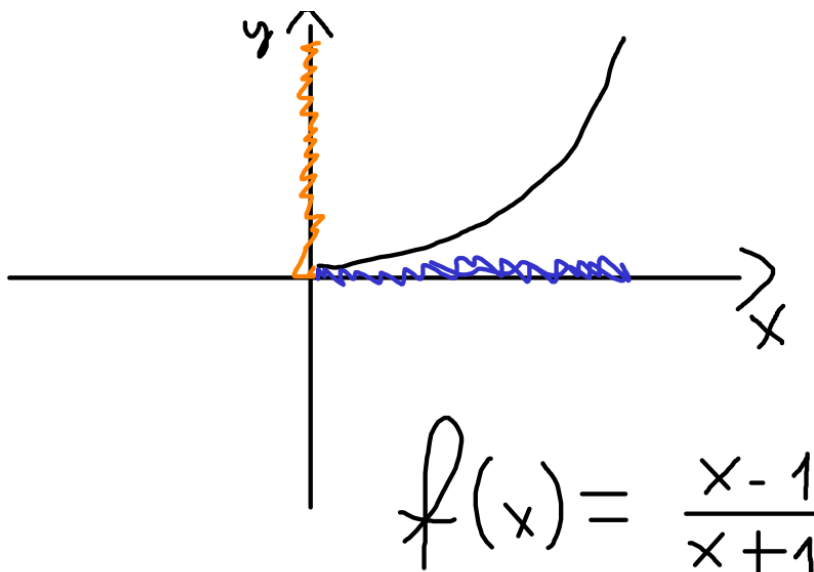


Figure 3

Vediamo se è iniettiva:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1}$$

2.6 Monotonia

Definizione 2.5. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice monotona crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ si ha:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definizione 2.6. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice monotona decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ si ha:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

aggiungere
di-
mostrazione
LEZ:4/3

Esempio 2.3. *Crescente spostandosi verso destra del grafico devo salire:*

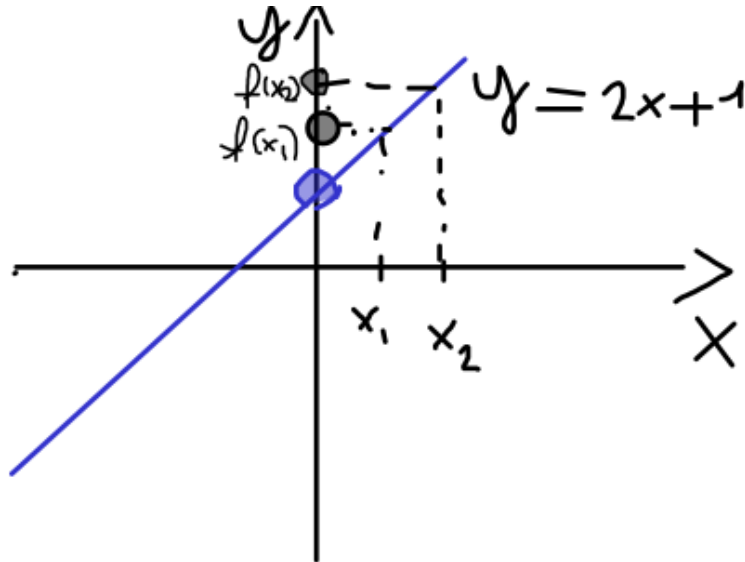


Figure 4: Esempio di monotonia crescente

Decrescente spostandosi verso destra devo andare verso il basso:

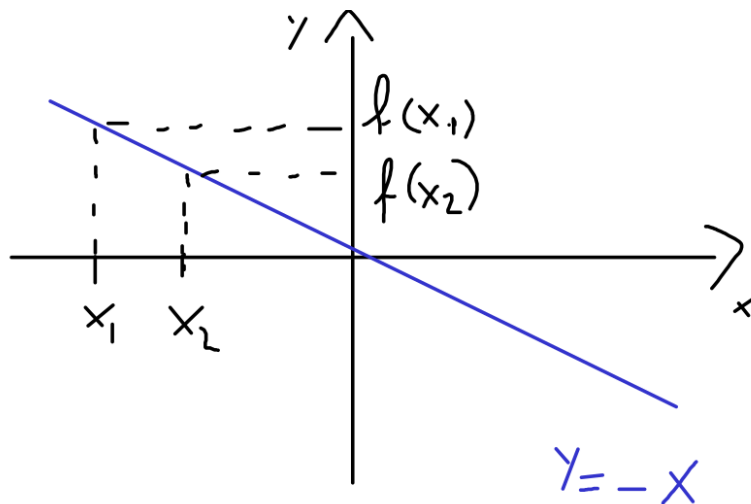


Figure 5: Esempio di monotonia decrescente

Esistono casi in cui una funzione è crescente per un intervallo e decrescente per un altro intervallo, per esempio $f(x) = x^2$

*Crescente nell'intervallo $(0, +\infty)$
Decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$*

Osservazione 2.1. se f è sia crescente che decrescente in A

Proprietà 2.1. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente monotona allora f è iniettiva (dunque invertibile).

Proof. presi $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ possiamo assumere che:

1. $x_1 < x_2$ avremo che $f(x_1) < f(x_2)$. In particolare se strettamente crescente $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. $x_2 < x_1$ avremo che $f(x_2) < f(x_1)$, in particolare se strettamente decrescente $f(x_2) \neq f(x_1)$

□

2.7 Proprietà delle funzioni monotone

Se $f(x), g(x)$ sono finiti crescente:

- $f(x) + g(x)$ è funzione crescente
- $\lambda * f(x)$ è crescente per $\lambda > 0$ e decrescente per $\lambda < 0$
- se $f(x) > 0$ sempre e $g(x) > 0$ sempre allora $f(x) * g(x)$ è crescente

Osservazione 2.2. In generale se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe monotone e non cambiano segno allora $f(x) * g(x)$ è anch'essa monotona;

Se f e g sono monotone, anche $f \circ g$ è monotona e segue la regola dei segni ($\nearrow = +, \searrow = -$).

Esempio 2.4. Con $f(x) = \frac{1}{x}$ che ha $A = \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus 0$
Avremo che la funzione è decrescente:

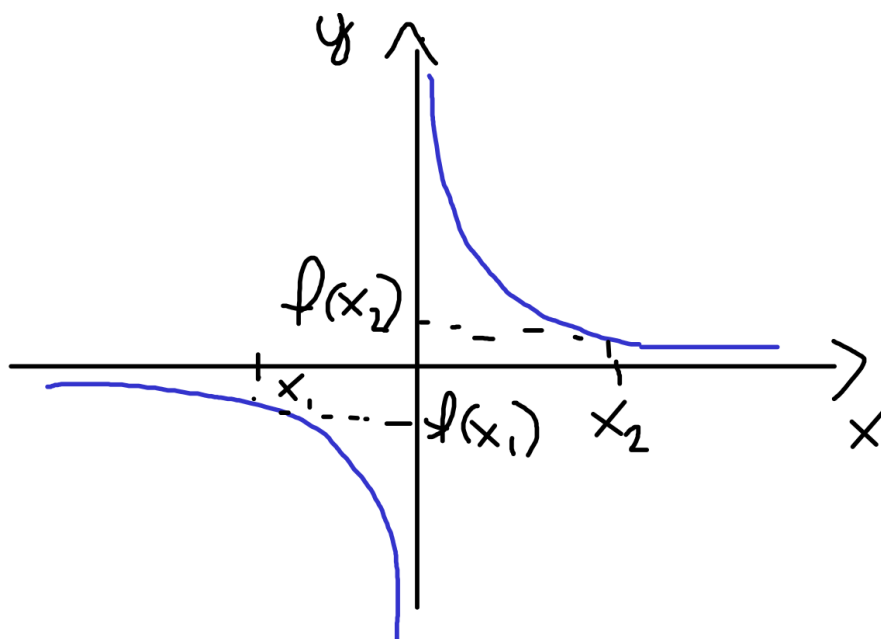


Figure 6: Esempio iperbole

Dove $x_1 < x_2$ e quindi $f(x_1) < f(x_2)$.

3 Trasformazioni geometriche

Possiamo considerare le traslazioni come somme e le dilatazione-contrazioni come moltiplicazioni.

3.1 traslazioni verticali

Consideriamo $y = f(x)$ la sua traslazione verticale sarà la somma di un k con il valore di $f(x)$ in quanto la funzione si sposterà sull'asse della y .

Per ottenere $\{y = f(x) + 1\}$ devo traslare $\{y = f(x)\}$ verso l'alto di 1 unità.

Per ottenere $\{y = f(x) + a\}$ devo traslare $\{y = f(x)\}$ verso l'alto di $|a|$ unità se $a > 0$ verso il basso di $|a|$ unità se $a < 0$.

3.2 traslazioni orizzontali

Consideriamo $y = f(x)$ la sua traslazione orizzontale sarà la somma di un k con il valore di x in quanto la funzione si sposterà sull'asse della x .

3.3 dilatazioni e contrazioni verticali

Consideriamo $y = f(x)$ la sua dilatazione e contrazione sarà il prodotto di un k con il valore di $f(x)$ in quanto la funzione si dilaterà-contrarrà sull'asse della y .

3.4 dilatazioni e contrazioni orizzontali

4 Funzioni elementari

4.1 Proprietà dell'esponenziale e del logaritmo

Alcune proprietà degli esponenziali

- $a^{x+y} = a^x + a^y$
- $a^{x*b} = (a^x)^b$
- $a^{-x} = (a^x)^{-1}$
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$

Alcune proprietà dei logaritmi:

- $\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
-
- $\log = 0$
- $\log_a(a) = 1$

Aggiungere
esempio
traslazione
orizzontale

Aggiungere
esempio
dilatazioni
e con-
trazioni
verticali

Aggiungere
esempio
dilatazioni
e con-
trazioni
orizzontale

$\log(x)$ è stato introdotto come funzione inversa dell'esponenziale a^x infatti dire: $\log a(y)$ vuol dire trovare x tale che:

$$\log_2(3) = 2^x = 3$$

Una base a particolare è la \lceil ovvero **Numero di Nepero**.

In particolare:

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

i Dove \ln è il logaritmo naturale

$$\log_a(x) = \log_b * \log_a(b)$$

Alcune proprietà dell'inversione sono:

- $a^{\log_a(x)} = x$

Proprietà
mancante
9:33

4.2 Funzioni trigonometriche

α misura x radianti se x è la lunghezza dell'arco di cerchio presente dentro l'angolo sapendo che la circonferenza è 2π .

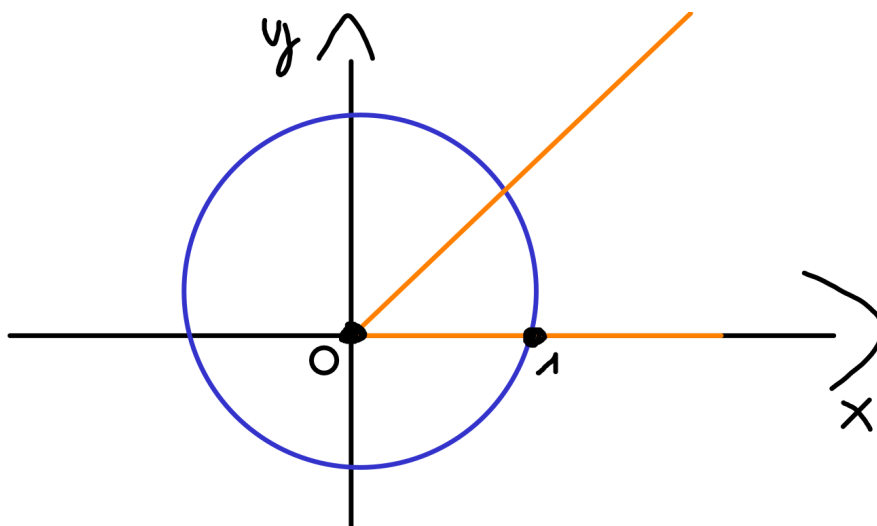


Figure 7

Esempio 4.1. Per esempio un angolo retto che è $\frac{1}{4}$ della circonferenza sarà

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

In generale un angolo in radianti è:

$$\frac{\text{Angolo in gradi sessadecimali}}{360} * 2\pi$$

- $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Aggiungere
9:45 esepi
seno
coseno
tangente

- $\cot g(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- geometricamente noto che $PH \leq PA \leq QA$ e $\sin(x)$