Appunti molto belli di Calculus

Floppy Loppy

March 2022

Contents

1 Numeri Reali

Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}^*\}$

Osservazione 1.1. In particolare $\mathbb{Q}$ è detto **denso** ovvero presi due qualunque punti $x, y \in \mathbb{R}$ esiste sempre un razionale $\mathbb{Q}$ tra di essi.

Esempio 1.1. *Proviamo a dimostrarlo attraverso unaretta:*

Aggiungere esempio con una retta

Proprietà 1.1. Fondamentale Proprietà di $\mathbb{R}$ è un insieme **totalmente ordinato**.

Lemma 1.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$

1.1 Sottoinsiemi particolari di $\mathbb{R}$

Esistono diversi tipi di intervalli, elenchiamoli per categoria

1.1.1 Intervalli limitati

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < b\}$ intervallo aperto
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq b\}$ intervallo chuso
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x < b\}$ intervallo semi-aperti
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x \leq b\}$ itervallo semi-aperti

1.1.2 Intervalli illimitati

Gli intervalli illimitati sono rappresentate geometricamente da semirette

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < +\infty\}$ intervallo aperto
- $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq +\infty\}$ intervallo chuso
- $[-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\infty \wedge x < b\}$ intervallo semi-aperti
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > -\infty \wedge x \leq b\}$ itervallo semi-aperti

1.2 Dominio e Codominio

recuperare lezione mannaggia il cazzo

Definizione 1.1. (Funzione) Una funzione $f : A \to R$ non è altro che una associazione univoca di un elemento di A con uno di $\mathbb{R}$.

In particolare:

$$\forall x \in A \quad \exists! y \in \mathbb{R} : f(x) = g.$$

Proprietà 1.2. Una particolarità dei reali è che possiamo rappresentare il grafico della funzione:

Disegnare retta

Come la retta rappresenta l'insieme $\mathbb{R}$ il piano rappresenta l'insieme:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Il grafico di f non è altro che:

$$graph(f) = \{(x, f(x)) : x \in A = dom(f)\} \leq \mathbb{R}^2$$

Osservazione 1.2. Data una curva $M \subseteq \mathbb{R}^2$, essa è grafico di una funzione solo se $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste al più un punto y tale che $(x, y) \in M$, cioè M intergetta le rette verticali al più di un punto

Inserire Esempio grafico 10:30

2 Proprietà Funzioni

2.1 Iniettività

Definizione 2.1. $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definizione 2.2. Graficamente possiamo dare più definizioni con lo stesso significato:

- graficamente diciamo che se due punti x_1, x_2 hanno i realtivi punti sul grafico alla stessa altezza, allora in realta $x_1 = x_2$ sono lo stesso punto.
- Presa una qualunque altezza, c'è al più un punto sul grafico quell'altezza.
- $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in al più un punto.
- f è iniettiva se interseca rette orizzontali in al più un punto.
- $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha al più una soluzione.

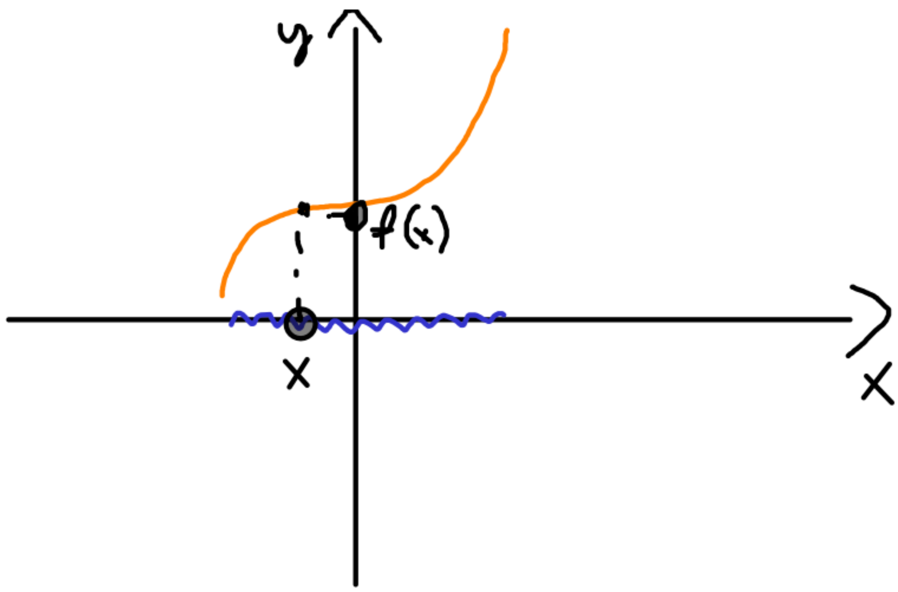

Figure 1: Dimostrazione Iniettività

dove $f(x)$ è la distanza (con segno) del punto sul grafico dall'asse dell'ascisse

2.2 Surriettività

Definizione 2.3. $f : A \to \mathbb{R}$ è surriettiva se $\forall y \in \mathbb{R} \exists$

Definizione 2.4. graficamente possiamo dire che $f : A \to \mathbb{R}$ è surriettiva se $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto.

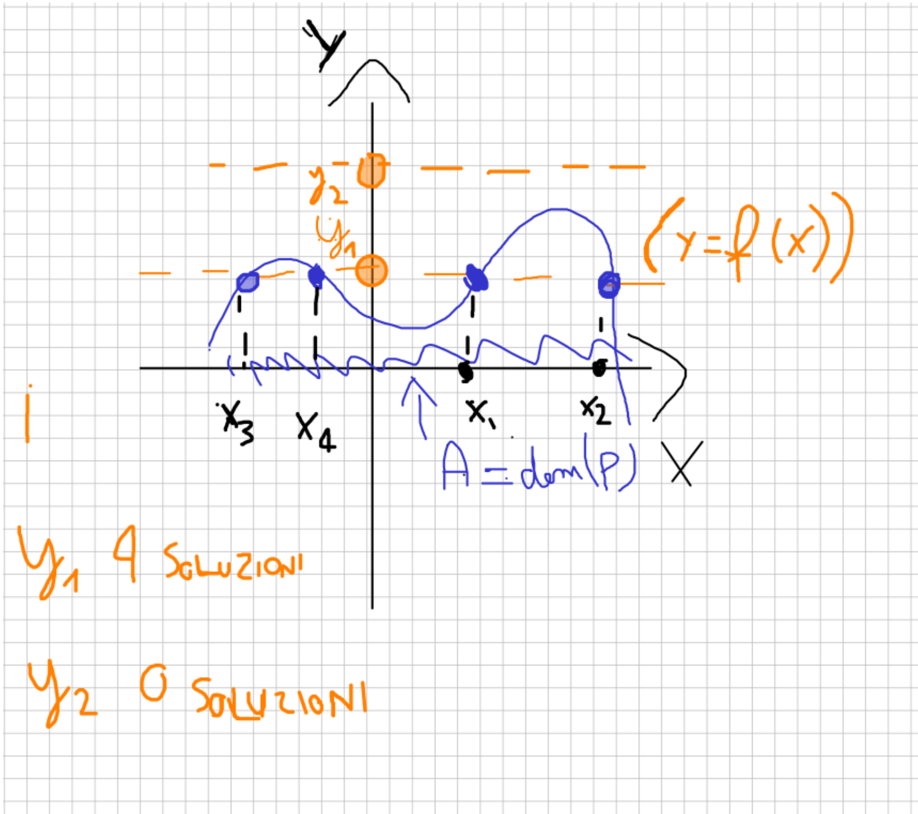

Figure 2: Dimostrazione grafica surriettività

2.3 Biiettiva

$f : A \to \mathbb{R}$ è biiettiva se:

- $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto.
- ogni retta orizzontale intersca il grafico di f in un punto.
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$ ha al più una soluzione

2.4 Operazioni tra funzioni

date $f, g : A \to \mathbb{R}$ (posso avere anche domini diversi ma allora la funzione che risulterà alla fine avrà come dominio l'intersezione di $dom(f)$ e $dom(g)$).

- $(f + y)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - y)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f * y)(x) = f(x) * g(x)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- $(\lambda f)(x) = \lambda * f(x)$
- $f \circ g(x) = f(g(x))$

> Possiamo immaginare le funzioni come una black box nella quale inseriamo una valore ed essa ci restituisce un altro valore in base a quello che accade all'intero della black box.

Il dominio di $f \circ g$ è quel numero che:

Aggiungere il dominio della funzione composta LEZ:4/3

Esempio 2.1. *Mostriamo alcuni esempi di funzioni composte:*

$$e^{x^2} = (f \circ g)(x)$$
$$g(x) = x^2 \quad f(y) = e^y$$
$$f(y(x)) = f(x^2) = e^{x^2}$$

2.5 Funzioni inverse

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva possiamo costruire la funzione inversa, vedi figura 1.

Data $y \in Im(f)$ posso definire $x = g(y)$ come l'unica soluzione di $y = f(x)$

$$dom(f^{-1}) = Im(f)$$
$$Im(f^{-1}) = dom(f)$$

Una funzione inversa molto comune è l'operazione di radice.

Esempio 2.2. *se* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

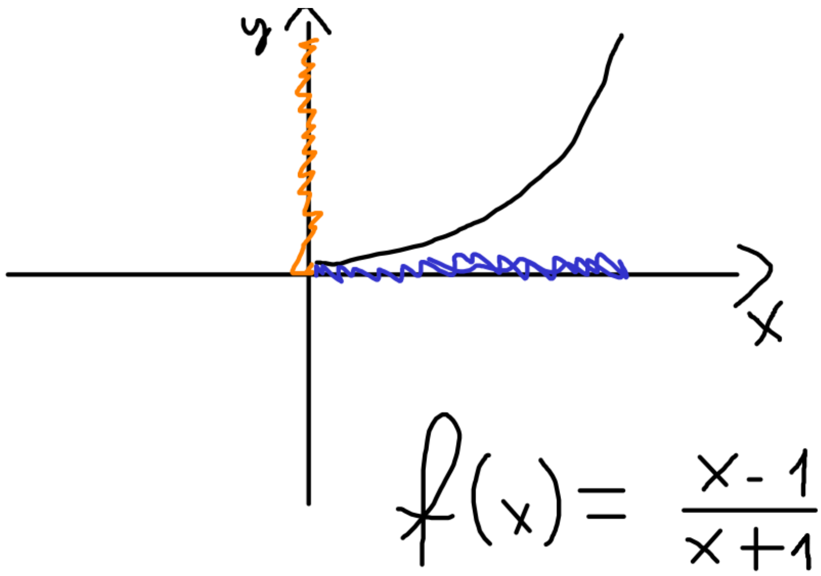

Figure 3

Vediamo se è iniettiva:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1}$$

aggiungere dimostrazione LEZ:4/3

2.6 Monotonia

Definizione 2.5. $f : A \to \mathbb{R}$ si dice monotona crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ si ha:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definizione 2.6. $f : A \to \mathbb{R}$ si dice monotona decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ si ha:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Esempio 2.3. *Crescente spostandosi verso destra del grafico devo salire:*

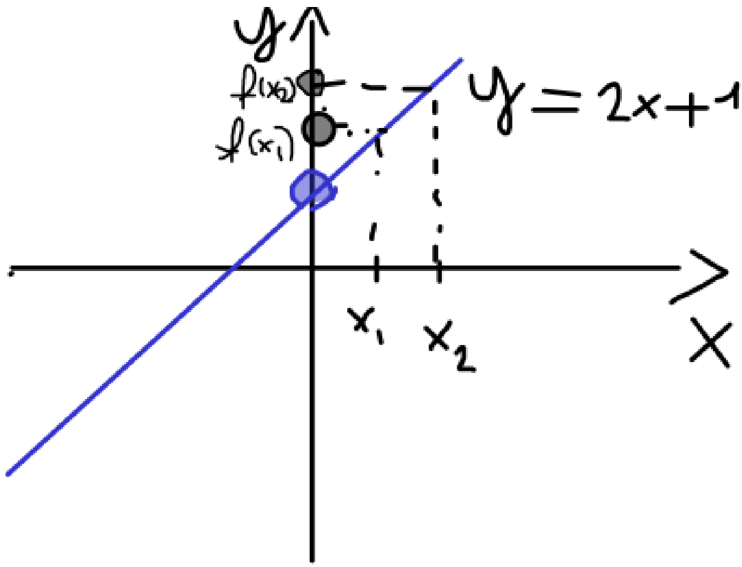

Figure 4: Esempio di monotonia crescente

Decrescente spostandosi verso destra devo andare verso il basso:

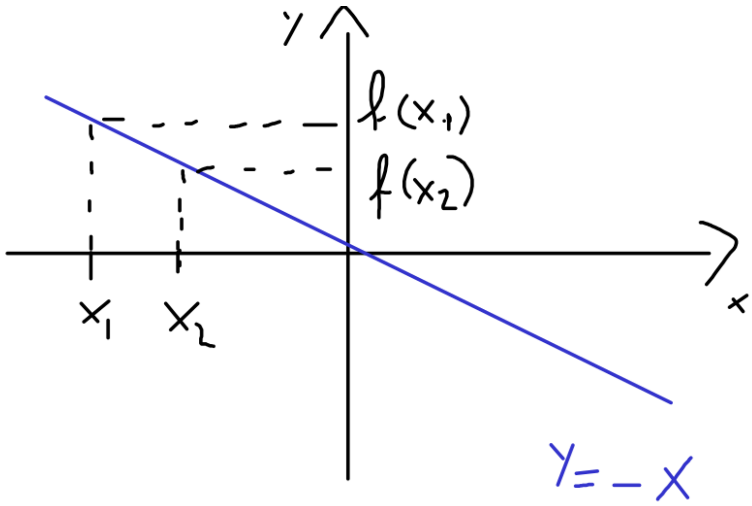

Figure 5: Esempio di monotonia decrescente

Esistono casi in cui una funzione è crescente per un intervallo e decrescente per un altro intervallo, per esempio $f(x) = x^2$

$$\textit{Crescente nell'intervallo} \quad (0, +\infty)$$
$$\textit{Decrescente nell'intervallo} \quad (-\infty, 0)$$

Osservazione 2.1. se f è sia crescente che decrescente in A

Proprietà 2.1. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona allora f è iniettiva (dunque invertibile).

Proof. presi $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ possiamo assumere che:

1. $x_1 < x_2$ avremo che $f(x_1) < f(x_2)$. In particolare se strettamente crescente $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. $x_2 < x_1$ avremo che $f(x_2) < f(x_1)$, in particolare se strettamente decrescente $f(x_2) \neq f(x_1)$

□

2.7 Proprietà delle funzioni monotone

Se $f(x), g(x)$ sono finiti crescente:

- $f(x) + g(x)$ è funzione crescente
- $\lambda * f(x)$ è crescente per $\lambda > 0$ e decrescente per $\lambda < 0$
- se $f(x) > 0$ sempre e $g(x) > 0$ sempre allora $f(x) * g(x)$ è crescente

Osservazione 2.2. In generale se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe monotone e non cambiano segno allora $f(x) * g(x)$ è anch'essa monotona;

Se f e g sono monotone, anche $f \circ g$ è monotona e segue la regola dei segni ($\nearrow = +, \searrow = -$).

Esempio 2.4. *Con $f(x) = \frac{1}{x}$ che ha $A = dom(f) = \mathbb{R}\ 0$*
Avremo che la funzione è decrescente:

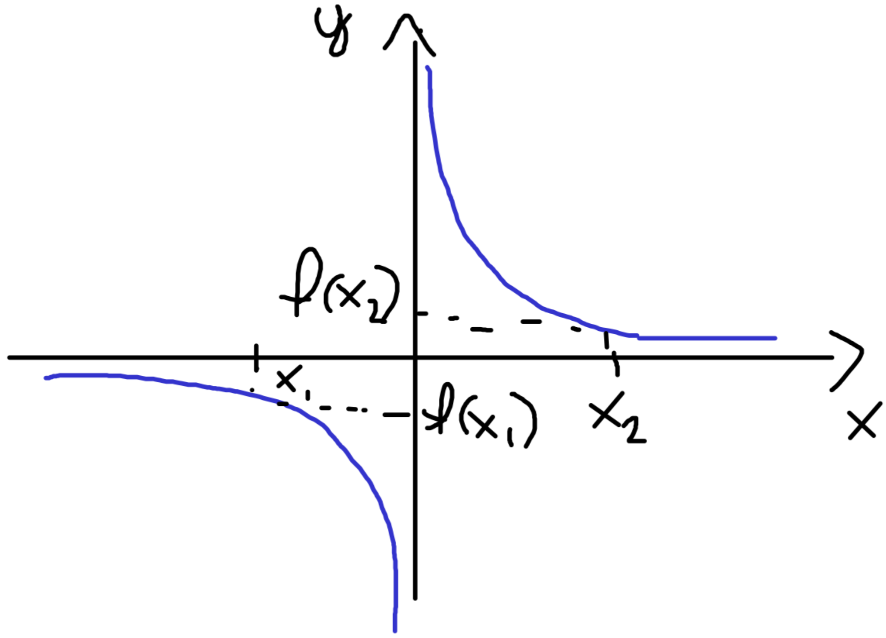

Figure 6: Esempio iperbole

Dove $x_1 < x_2$ *e quindi* $f(x_1) < f(x_2)$.

3 Trasformazioni geometriche

Possiamo considerare le tralsazioni come somme e le dilatazione-contrazioni come moltiplicazioni.

3.1 traslazioni verticali

Consideriamo $y = f(x)$ la sua traslazione verticale sarà la somma di un k con il valore di $f(X)$ in quanto la funzione si sposterà sull'asse della y.

Per ottenere $\{y = f(x) + 1\}$ devo traslare $\{y = f(x)\}$ verso l'alto di 1 unità.

Per ottenere $\{y = f(x) + a\ \}$ devo traslare $\{y = f(x)\}$ verso l'alto di $|a|$ unità se $a > 0$ verso il basso di $|a|$ unità se $a < 0$.

3.2 traslazioni orizzontali

Consideriamo $y = f(x)$ la sua traslazione orizzontale sarà la somma di un k con il valore di x in quanto la funzione si sposterà sull'asse della x.

Aggiungere esempio traslazione orizzontale

3.3 dilatazioni e contrazioni verticali

Consideriamo $y = f(x)$ la sua dilatazione e contrazione sarà il prodotto di un k con il valore di $f(X)$ in quanto la funzione si dilaterà-contrarrà sull'asse della y.

Aggiungere esempio dilatazioni e contrazioni verticali

3.4 dilatazioni e contrazioni orizzontali

Aggiungere esempio dilatazioni e contrazioni orizzontali

4 Funzioni elementari

4.1 Proprietà dell'esponenziale e del logaritmo

Alcune proprietà degli esponenziali

- $a^{x+y} = a^x + a^y$
- $a^{x*b} = (a^x)^b$
- $a^{-x} = (a^x)^{-1}$
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$

Alcune proprietà dei logaritmi:

- $\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
-
- $\log = 0$
- $\log_a(a) = 1$

$\log(x)$ è stato introdotto come funzione inversa dell'esponenziale a^x infatti dire: $\log a(y)$ vuol dire trovare x tale che:

$$\log_2(3) = 2^x = 3$$

Una base a particolare è la $\rceil$ ovvero **Numero di Nepero**.

In particolare:

$$\log_e(x) = ln(x)$$

i Dove ln è il logaritmo naturale

$\log_a(x) = \log_b * \log_a(b)$

Alcune propiretà dell'inversione sono:

- $a^{\log_a(x)} = x$

Proprietà mancante 9:33

4.2 Funzioni trigonometriche

α misura x radianti se x è la lunghezza dell'arco di cerchio presente dentro l'angolo sapendo che la circonferenza è $\boxed{2\pi}$.

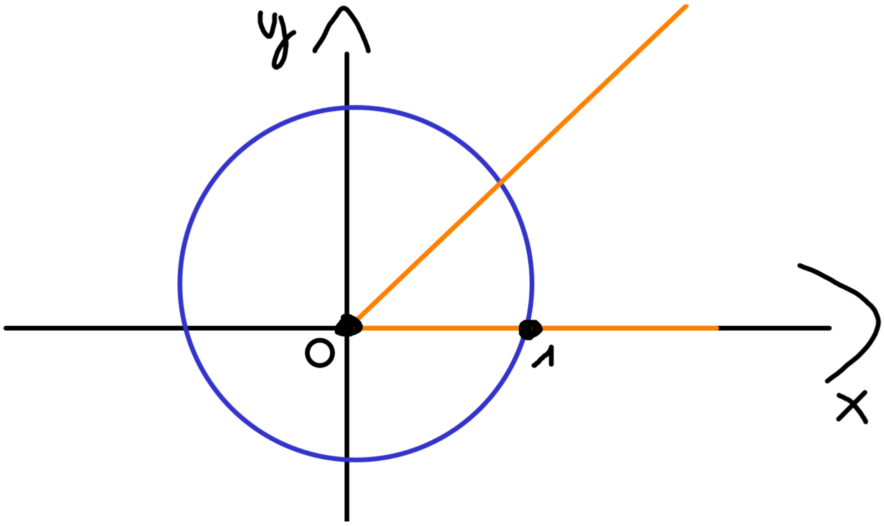

Figure 7

Esempio 4.1. *Per esempio un angolo retto che è* $\frac{1}{4}$ *della circonferenza sarà* $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

In generale un angolo in radianti è:

$$\frac{\text{Angolo in gradi sessadecimali}}{360} * 2\pi$$

Aggiungere 9:45 esepi seno coseno tangente

- $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- geometricamente noto che $PH \leq PA \leq QA$ e $\sin(x)$

5 Limiti

Controllare il componente della vunzione vicino a $x_0 \in dom(f)$ e confrontarlo con $f(x_0)$.

Definizione 5.1. Controllare il comportamento della funzione vicino ad un punto x_0 che sia di accumulazione per $dom(f)$.

Definizione 5.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto di accumulazione di A se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in A - \{x_0\}$ tale che:

$$x_0 \epsilon \leq x \leq x_0 + \epsilon$$

Esempio 5.1. *$A = (0, 1), x_0 = 5$ è un punto di accumulazione per A.*

25/3/22: Aggiungere retta esempio

.

In questo caso per $\epsilon < 1$ non trovo elementi di A che siano dentro $(5 - \epsilon, 5 + \epsilon)$.

Esempio 5.2.

Aggiungere esempi accumulazione

- Se $A = \mathbb{N}$ i punti di accumulazione saranno:

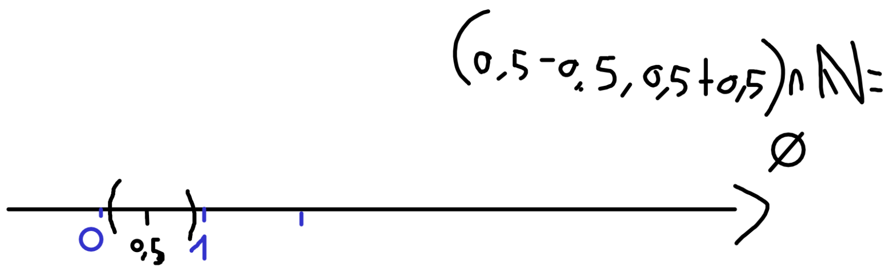

Figure 8: Esempio

- Se $x \notin \mathbb{N}$ allora non è di accumulazione.
- Se $x \in \mathbb{N}$ non è di accumulazione se:
  $\epsilon < 1$ e $g \in \mathbb{N} \quad x - \epsilon \leq g \leq \epsilon + x \Rightarrow g = x$ che non va bene per la definizione.

NOTA:

Aggiungere nota

Definizione 5.3. un'altra definizione:

- $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice che $a +\infty$ è punto di accumulazione di A se $\forall M > 0 \quad \exists x \in A$ tale che $x \geq M$.
- $-\infty$ è punto di accumulazione di A se $\forall M > 0 \quad \exists x \in A$ tale che $x \leq -M$.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A.

5.1 Definizione di un limite

Avendo un limite nella forma:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Possiamo ottenere quattro diverse definizioni:

1. $\boxed{l \in \mathbb{R}}$
2. $\boxed{+\infty}$
3. $\boxed{-\infty}$
4. **non esiste** (tipo il Molise)

In questi casi si può considerare $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 = +\infty, x_0 = -\infty$.

5.1.1 Esempi con $x_0 = +\infty$

Esempio 5.3. *2:*

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

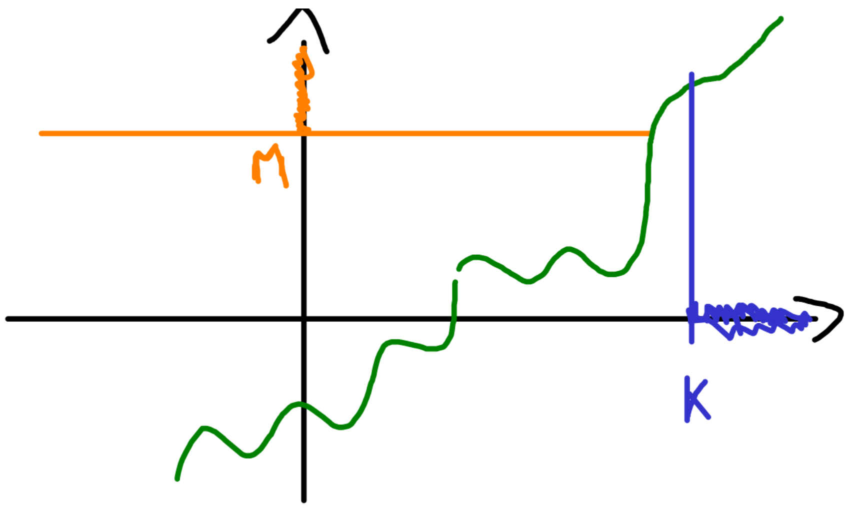

Figure 9

$\forall M > 0 \quad \exists k > 0$ *tale che* $\forall x \in A, x > k$ *si ha:*
$f(x) > M$.
In parole semplici possiamo dire che:
DA UN CERTO PUNTO IN POI RESTO SEMPRE SOPRA QUALUNQUE ALTITUDINE

Esempio 5.4. *3:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

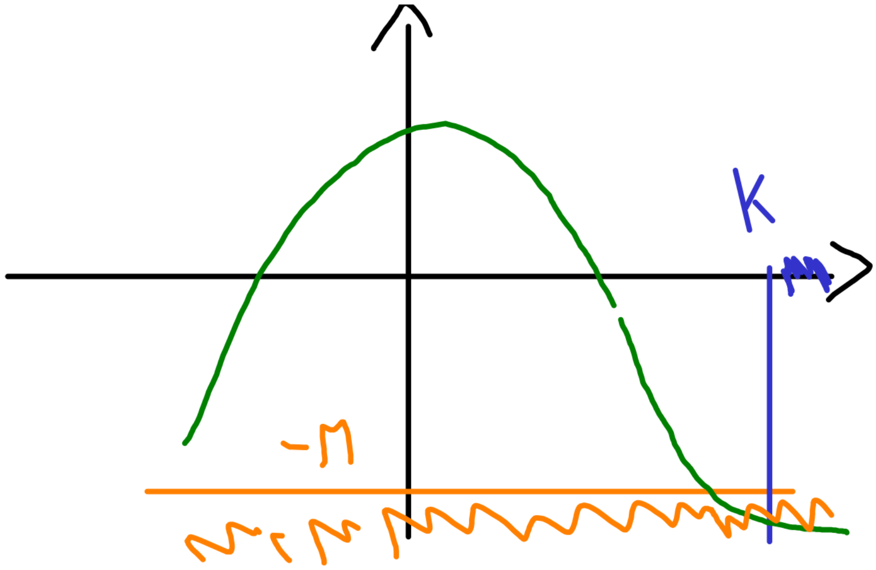

Figure 10

$\forall M > 0 \quad \exists k > 0$ tale che se $x \in A, x > k$ si ha:
$\boxed{f(x) < -M}$.

Esempio 5.5. *1:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

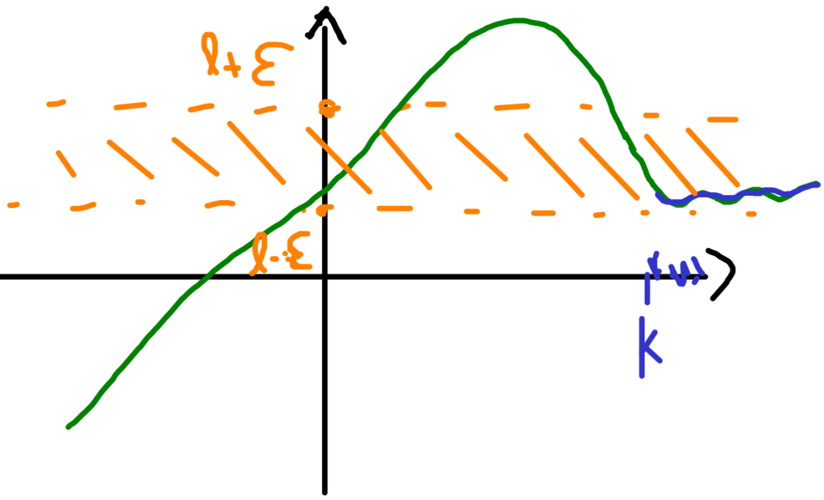

Figure 11

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0$ tale che se $\forall x \in A, x > k$ si ha:
$\boxed{l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon}$.

Esempio 5.6. *4:*

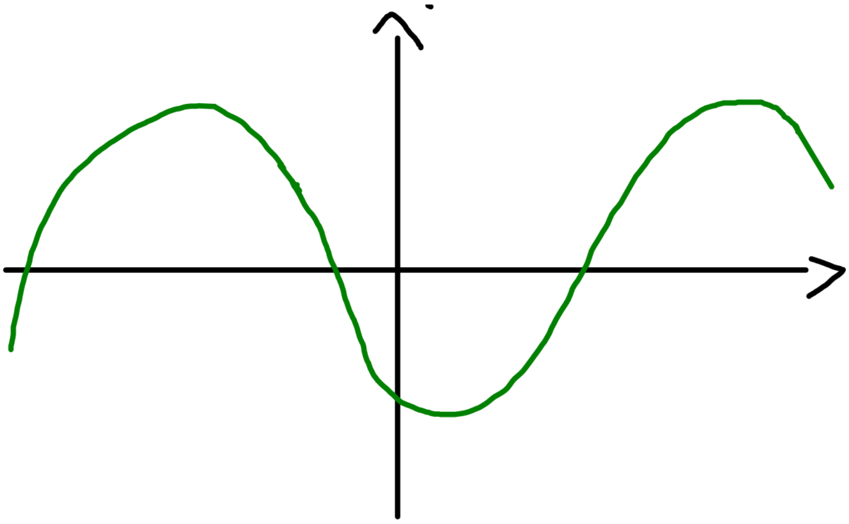

Figure 12

La funzione è continua non ha limite

5.1.2 Esempi con $x_0 = -\infty$

Esempio 5.7. *1:*

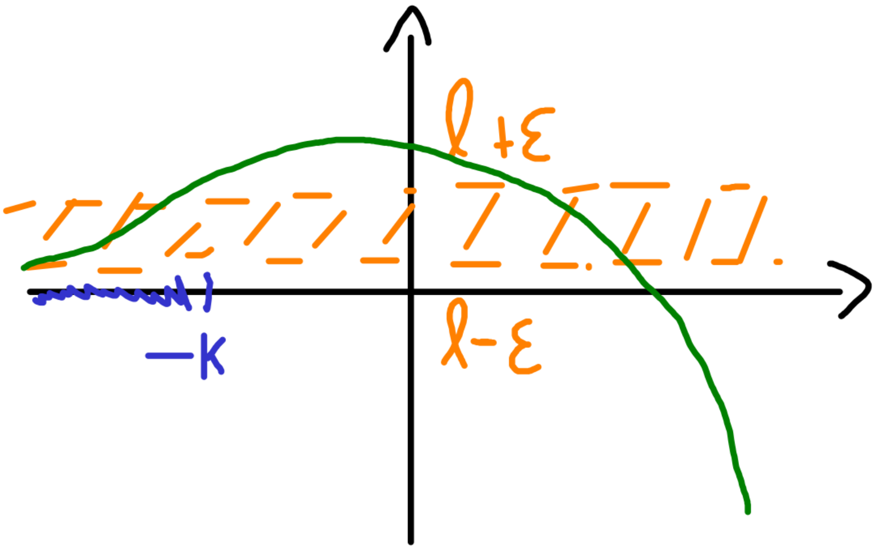

Figure 13

Esempio 5.8. *2:*

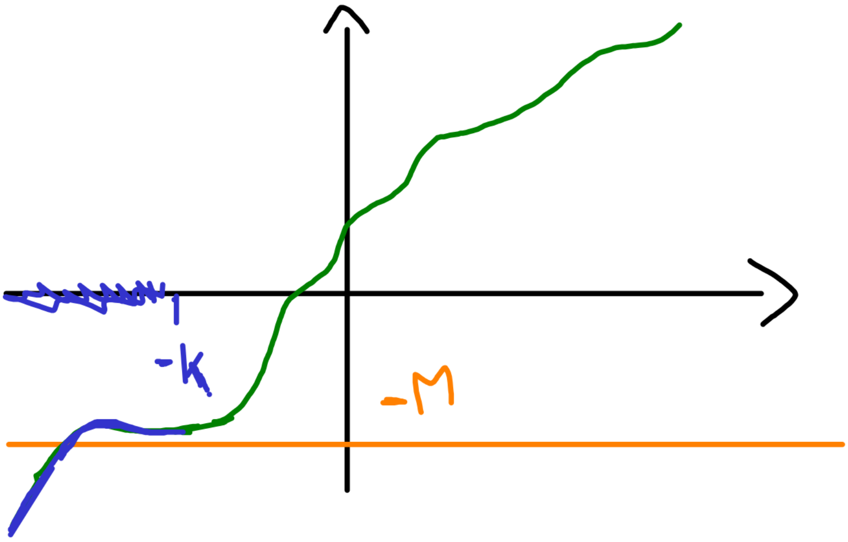

Figure 14

Esempio 5.9. *3:*

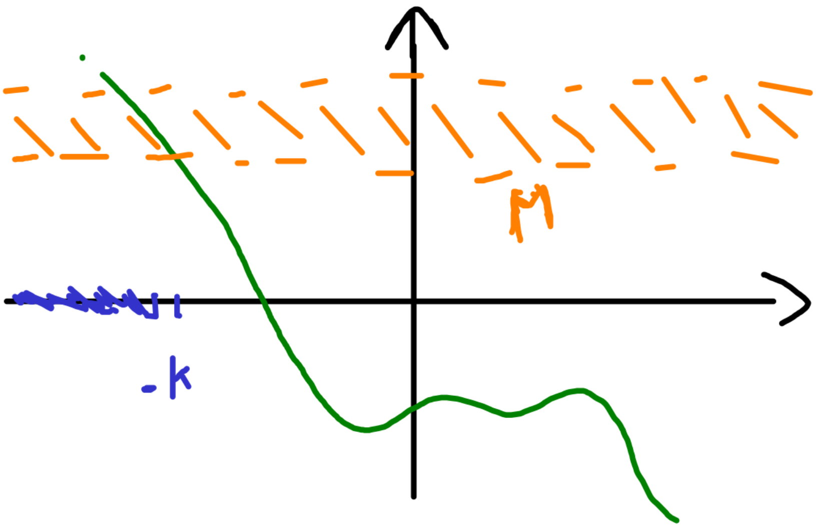

Figure 15

$\lim_{x \to 0} \neq 0$ perchè nelle definizioni di limite non cosidero **MAI** il valore in $x = x_0$ perchè non mi interessa chi è $f(x_0)$.

Aggiungere esempi 10:15

Definizione 5.4. (Continuita II)

$x_0 \in A$ punto di accumulazione per A, f è continua in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$