Introduziam i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}^*\}$

```
title: Osservazione
icon: eye
In particolare $\mathbb{Q}$ è detto **denso** ovvero presi due qualunque
punti $x,y \in \mathbb{R}$ esiste sempre un razionale $\mathbb{Q}$ tra
di essi.
```

```
title: Proprietà
icon: clipboard-list
Fondamentale proprietà di $\mathbb{R}$ è un insieme **totalmente
ordinato**.
```

```
title: Lemma
icon: spider
$\forall x,y \in \mathbb{R}$ con $x < y$
```

Sottoinsiemi particolari di $\mathbb{R}$

Esistono diversi tipi di intervalli, elenchiamoli per categoria

Intervalli limitati

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < b\}$ **intervallo aperto**
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq b\}$ **intervallo chuso**
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x < b\}$ **intervallo semi-aperti**
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x \leq b\}$ **itervallo semi-aperti**

Intervalli illimitati

Gli intervalli illimitati sono rappresentate geometricamente da semirette

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < +\infty\}$ **intervallo aperto**
- $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq +\infty\}$ **intervallo chuso**
- $[-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\infty \wedge x < b\}$ **intervallo semi-aperti**
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > -\infty \wedge x \leq b\}$ **itervallo semi-aperti**

Dominio e Codominio

Tratteremo funzioni f che hanno un dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ e sottointendiamo che si parla di funzioni reali:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

e che quindi il dominio è il più grande insieme di definizione.

```
title: Definizione *(Funzione)*
Una funzione $f:A \to R$ non è altro che una associazione
univoca di un elemento di $A$ con uno di $\mathbb{R}$.

In particolare:
$$\forall x \in A \quad \exists! y\in\mathbb{R} : f(x) = g.$$
```

```
title: Proprietà
icon: clipboard-list
Una particolarità dei reali è che possiamo rappresentare il grafico
della funzione:
```

Come la retta rappresenta l'insieme $\mathbb{R}$ il piano rappresenta l'insieme:

$$\boxed{\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}}$$

Il grafico di f non è altro che:

$$\boxed{graph(f) = \{(x, f(x)) : x \in A = dom(f)\} \leq \mathbb{R}^2}$$

```
title: Osservazione
icon: eye
Data una curva $M \subseteq \mathbb{R}^2$, essa è grafico di una
funzione solo se $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste al più un punto $y$
tale che $(x,y) \in M$, cioè $M$ intergetta le rette verticali al più di
un punto

Immaginiamo per esempio le parabole nella forma $ax^2 + bx + c$.
```

In questo capitolo andremo a descrivere alcune proprietà fondamentali delle funzioni.

Iniettività

```
title: Definizione
$f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall x_1,x_2 \in A$ se
$x_1 \not = x_2 \Rightarrow f(x_1) \not = f(x_2)$.
```

```
title: Definizione
Graficamente possiamo dare più definizioni con lo stesso significato:

-   graficamente diciamo che se due punti $x_1,x_2$ hanno i realtivi
```

```
    punti sul grafico alla stessa altezza, allora in realta $x_1 = x_2$
    sono lo stesso punto.

-   Presa una qualunque altezza, c'è al più un punto sul grafico
    quell'altezza.

-   $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$ la
    retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di $f$ in al più un punto.

-   $f$ è iniettiva se interseca rette orizzontali in al più un punto.

-   $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$
    l'equazione $f(x) = y$ ha al più una soluzione.
```

Dimostrazione Iniettività

dove $f(x)$ è la distanza (con segno) del punto sul grafico dall'asse dell'ascisse

Surriettività

```
title: Definizione
$f: A \to \mathbb{R}$ è surriettiva se:
$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

In particolare noi andremo a trattare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$
```

```
title: Definizione
graficamente possiamo dire che $f : A \to \mathbb{R}$ è surriettiva se
$\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico
di $f$ in almeno un punto.
```

Biiettività

$f : A \to \mathbb{R}$ è biiettiva se:

- $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto.
- ogni retta orizzontale intersca il grafico di f in un punto.
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$ ha al più una soluzione

Essenzialmente una funzione è biietiva quando f è sia iniettiva che surriettiva

Operazioni tra funzioni

Date due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ (posso avere anche domini diversi ma allora la funzione che risulterà alla fine avrà come dominio l'intersezione di $dom(f)$ e $dom(g)$).

- $(f + y)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - y)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f * y)(x) = f(x) * g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $(\lambda f)(x) = \lambda * f(x)$
- $f \circ g(x) = f(g(x))$

```
title: Osservazione
icon: eye
Possiamo immaginare le funzioni come una black box nella quale inseriamo
una valore ed essa ci restituisce un altro valore in base a quello che
accade all'intero della black box.
```

Il dominio di $f \circ g$ è quel numero che:

$$\boxed{(f \circ g) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\}}$$

Funzione composta

Mostriamo alcuni esempi di funzioni composte:

$$e^{x^2} = (f \circ g)(x)$$
$$g(x) = x^2 \quad f(y) = e^y$$
$$f(y(x)) = f(x^2) = e^{x^2}$$

Funzioni inverse

```
title: Definizione
Se $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva possiamo costruire la funzione
inversa, vedi figura [1](#fig:dim_iniettivita){reference-type="ref"
reference="fig:dim_iniettivita"}.

Data $y \in Im(f)$ posso definire $x = g(y)$ come l'unica soluzione di
$y = f(x)$ $$\begin{aligned}
        dom(f^{-1}) = Im(f) \\
        Im(f^{-1}) = dom(f) \\\end{aligned}$$
```

Una funzione inversa molto comune è l'operazione di radice.

esempio 1 se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

Vediamo se è iniettiva:

$$\begin{aligned}
&\frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} = \\
&(y+1)(x+1) * \frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} * (x+1)(y+1) = \\
&xy - y + x - 1 = xy - x + y - 1 = \\
&2x = 2y = \\
&\boxed{x = y}
\end{aligned}$$

Monotonia

```
title: Definizione
$f:A \to \mathbb{R}$ si dice **monotona crescente** se
$\forall x_1,x_2 \in A$ si ha:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$
```

```
title: Definizione
$f:A \to \mathbb{R}$ si dice **monotona decrescente** se
$\forall x_1,x_2 \in A$ si ha:
$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$
```

esempio 1 Crescente spostandosi verso destra del grafico devo salire:

Decrescente spostandosi verso destra devo andare verso il basso:

Esistono casi in cui una funzione è crescente per un intervallo e decrescente per un altro intervallo, per esempio $f(x) = x^2$

$$\begin{gathered}\text{Crescente nell'intervallo} \quad (0, +\infty) \\ \text{Decrescente nell'intervallo} \quad (-\infty, 0)\end{gathered}$$

```
title: Osservazione
icon: eye
se $f$ è sia crescente che decrescente in $A$
```

```
title: Proprietà
icon: clipboard-list
Se $f:A \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona allora $f$ è iniettiva
(dunque invertibile).
```

```
title: Dimostrazione
*Proof.* presi $x_1,x_2 \in A$ con $x_1 \not = x_2$ possiamo assumere
che:
1.  $x_1 < x_2$ avremo che $f(x_1) < f(x_2)$. In particolare se
    strettamente crescente $f(x_1) \not = f(x_2)$
2.  $x_2 < x_1$ avremo che $f(x_2) < f(x_1)$, in particolare se
    strettamente decrescente $f(x_2) \not = f(x_1)$
```

Proprietà delle funzioni monotone

Se $f(x), g(x)$ sono finiti crescente:

- $f(x) + g(x)$ è funzione crescente
- $\lambda * f(x)$ è crescente per $\lambda > 0$ e decrescente per $\lambda < 0$
- se $f(x) > 0$ sempre e $g(x) > 0$ sempre allora $f(x) * g(x)$ è crescente

```
title: Osservazione
icon: eye
In generale se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe monotone e non cambiano
segno allora $f(x)*g(x)$ è anch'essa monotona;
```

Se f e g sono monotone, anche $f \circ g$ è monotona e segue la regola dei segni ($\nearrow = +, \searrow = -$).

esempio 1 Con $f(x) = \frac{1}{x}$ che ha $A = dom(f) = \mathbb{R}\ 0$ Avremo che la funzione è decrescente: Esempio iperbole Dove $x_1 < x_2$ e quindi $f(x_1) < f(x_2)$.

Funzioni tipo potenza

Una funzione tipo potenza è una funzione nella forma:

$$f(x) = x^n$$

dove $x^n = \underbrace{x * x * x * x * x \ldots * x}_{\text{n volte}}$.

n pari	n dispari
$dom(f) = \mathbb{R}$	$dom(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [0, +\infty)$	$\Im(f) = \mathbb{R}$
crescente in $[0, +\infty]$	*strettamente crescente*
decrescente in $(-\infty, 0]$	*Iniiettiva*
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$
f è *pari*	f è *dispari*

```
title: Osservazione
icon: eye
La funzione inversa dell'esponenziale $e^x$ è $\log(x)$
```

Proprietà dell'esponenziale e del logaritmo

Proprietà degli esponenziali	Proprietà dei logaritmi
$a^{x+y} = a^x * a^y$	$\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^{x*b} = (a^x)^b$	$\log_a(x^b) = b * \log_a(x)$
$a^{-x} = (a^x)^{-1} = \frac{1}{a^x}$	$\log_a(\frac{1}{x}) = \log_a(x^{-1}) = -\log_a(x)$
$a^0 = 1$	$\log_a(1) = 0$
$a^1 = a$	$\log_a(a) = 1$

$\log(x)$ è stato introdotto come funzione inversa dell'esponenziale a^x infatti dire: $\log a(y)$ vuol dire trovare x tale che:

$$\log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$$

$$\log_2(4) = x \Leftrightarrow 2^x = 4$$

Una base a particolare è la e ovvero **Numero di Nepero**, in particolare:

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

Dove ln è il **logaritmo naturale**

$\log_a(x) = \log_b * \log_a(b)$

Alcune propiretà dell'inversione sono:

- $a^{\log_a(x)} = x$

Funzioni trigonometriche

α misura x radianti se x è la lunghezza dell'arco di cerchio presente dentro l'angolo sapendo che la circonferenza è $\boxed{2\pi}$.

Per esempio un angolo retto che è $\frac{1}{4}$ della circonferenza sarà $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

In generale un angolo in radianti è:

$$\frac{\text{Angolo in gradi sessadecimali}}{360} * 2\pi$$

- $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- geometricamente noto che $PH \leq PA \leq QA$ e $\sin(x)$

Algebricamente possiamo considerare le le tralsazioni come somme e le dilatazione-contrazioni come moltiplicazioni.

traslazioni verticali

dato un $y_0 > 0$ il grafico della funzione $y = f(x) + y_0$ si ottiene traslando in alto di y_0 ed il grafico della funzione $y = f(x) - y_0$ si ottiene traslando verso il basso di $y_0 > 0$.

ROSSO: $$, BLU: $f(x) - y_0 = f(x) + y_1$ |

ROSSO: $y = f(x) + y_0$, *BLU:*$f(x) - y_0 = f(x) + y_1$ |

traslazioni orizzontali

dato un $x_0 > 0$ il grafico della funzione $y = f(x) + x_0$ si ottiene traslando in alto di x_0 ed il grafico della funzione $y = f(x) - x_0$ si ottiene traslando verso il basso di $x_0 > 0$.

ROSSO: $f(x + x_0) = f(x - x_1)$, *BLU:* $f(x - x_0)$

dilatazioni e contrazioni verticali

dato un $k > 1$ il grafico della funzione $y = f(x)/k$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse y ed il grafico della funzione $y = af(x)$ si ottiene dilatando di a lungo l'asse delle y.

dilatazioni e contrazioni orizzontali

dato un $k > 1$ il grafico della funzione $y = f(x/k)$ si ottiene dilatandoi di a lungo l'asse x ed il grafico della funzione $y = f(ax)$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse delle x.

Simmetrie

```
title: Definizione
Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è detta:
-   pari $\forall  x \in A \Rightarrow -x \in A$ e $f(-x) = f(x)$.

-   dispari $\forall  x \in A \Rightarrow -x \in A$ e $f(-x) = -f(x)$.
```