Appunti molto belli di Calculus

Floppy Loppy

March 2022

Contents

Todo list

/

1 Numeri Reali

Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}^*\}$

Osservazione 1.1. In particolare $\mathbb{Q}$ è detto **denso** ovvero presi due qualunque punti $x, y \in \mathbb{R}$ esiste sempre un razionale $\mathbb{Q}$ tra di essi.

Proprietà 1.1. Fondamentale proprietà di $\mathbb{R}$ è un insieme **totalmente ordinato**.

Lemma 1.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$

1.1 Sottoinsiemi particolari di $\mathbb{R}$

Esistono diversi tipi di intervalli, elenchiamoli per categoria

1.1.1 Intervalli limitati

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < b\}$ intervallo aperto
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq b\}$ intervallo chuso
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x < b\}$ intervallo semi-aperti
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x \leq b\}$ itervallo semi-aperti

1.1.2 Intervalli illimitati

Gli intervalli illimitati sono rappresentate geometricamente da semirette

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < +\infty\}$ intervallo aperto
- $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq +\infty\}$ intervallo chuso
- $[-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\infty \wedge x < b\}$ intervallo semi-aperti
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > -\infty \wedge x \leq b\}$ itervallo semi-aperti

1.2 Dominio e Codominio

Tratteremo funzioni f che hanno un dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ e sottointendiamo che si parla di funzioni reali:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

e che quindi il dominio è il più grande insieme di definizione.

Definizione 1.1. (Funzione) Una funzione $f : A \to R$ non è altro che una associazione univoca di un elemento di A con uno di $\mathbb{R}$.

In particolare:

$$\forall x \in A \quad \exists! y \in \mathbb{R} : f(x) = g.$$

Proprietà 1.2. Una particolarità dei reali è che possiamo rappresentare il grafico della funzione:

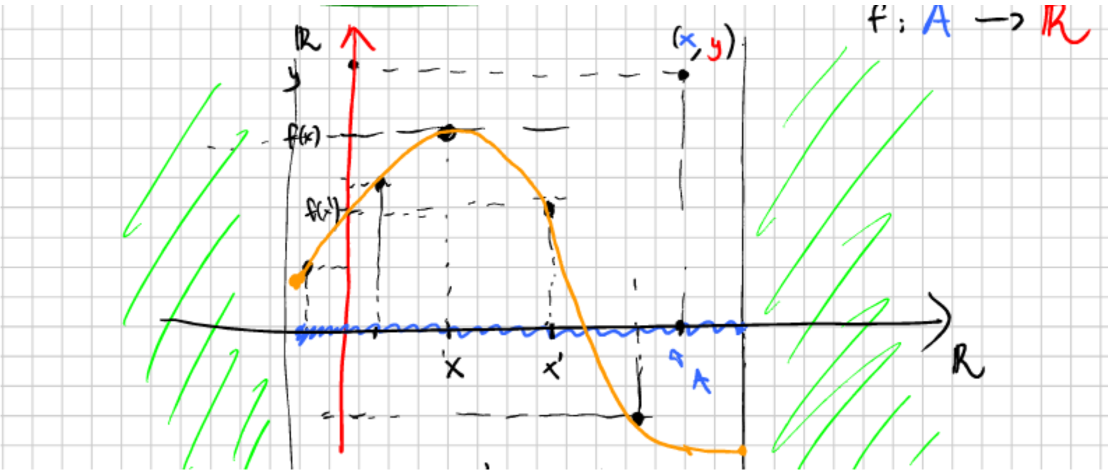

Figure 1

Come la retta rappresenta l'insieme $\mathbb{R}$ il piano rappresenta l'insieme:

$$\boxed{\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}}$$

Il grafico di f non è altro che:

$$\boxed{graph(f) = \{(x, f(x)) : x \in A = dom(f)\} \leq \mathbb{R}^2}$$

Osservazione 1.2. Data una curva $M \subseteq \mathbb{R}^2$, essa è grafico di una funzione solo se $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste al più un punto y tale che $(x, y) \in M$, cioè M intergetta le rette verticali al più di un punto

Immaginiamo per esempio le parabole nella forma $ax^2 + bx + c$.

2 Proprietà Funzioni

In questo capitolo andremo a descrivere alcune proprietà fondamentali delle funzioni.

2.1 Iniettività

Definizione 2.1. $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definizione 2.2. Graficamente possiamo dare più definizioni con lo stesso significato:

- graficamente diciamo che se due punti x_1, x_2 hanno i realtivi punti sul grafico alla stessa altezza, allora in realta $x_1 = x_2$ sono lo stesso punto.
- Presa una qualunque altezza, c'è al più un punto sul grafico quell'altezza.
- $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in al più un punto.
- f è iniettiva se interseca rette orizzontali in al più un punto.
- $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva se $\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha al più una soluzione.

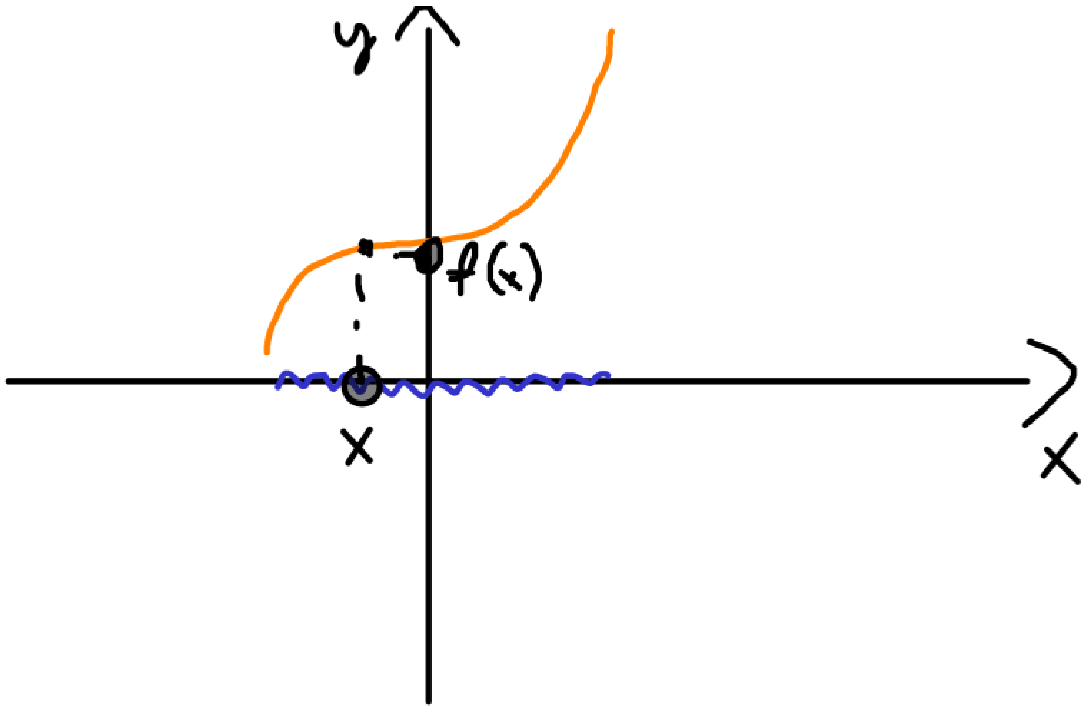

Figure 2: Dimostrazione Iniettività

dove $f(x)$ è la distanza (con segno) del punto sul grafico dall'asse dell'ascisse

2.2 Surriettività

Definizione 2.3. $f : A \to \mathbb{R}$ è surriettiva se $\forall y \in \mathbb{R} \exists$

Definizione 2.4. graficamente possiamo dire che $f : A \to \mathbb{R}$ è surriettiva se $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto.

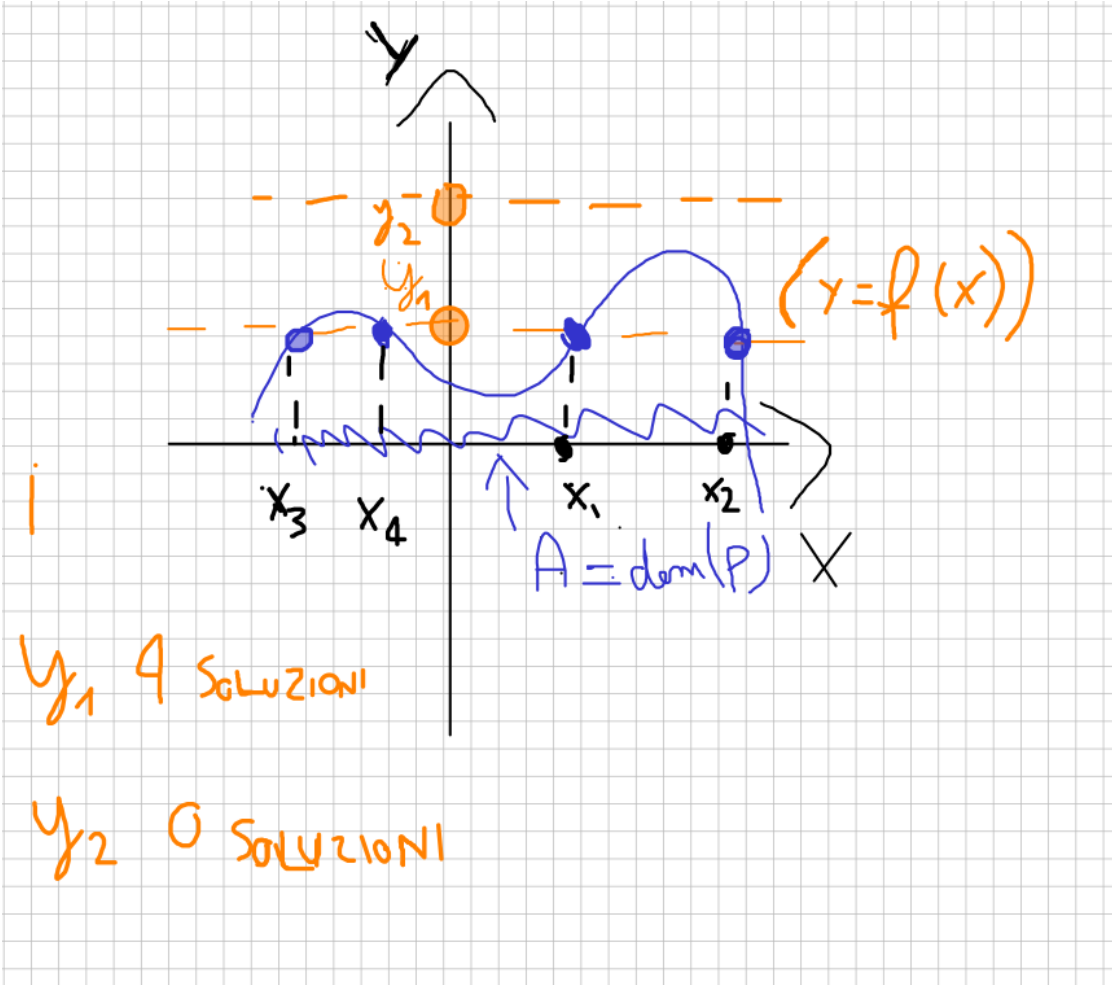

Figure 3: Dimostrazione grafica surriettività

2.3 Biiettiva

$f : A \to \mathbb{R}$ è biiettiva se:

- $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $\{y = y_0\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto.
- ogni retta orizzontale intersca il grafico di f in un punto.
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$ ha al più una soluzione

Essenzialmente una funzione è biietiva quando f è sia iniettiva 2.1 che surriettiva 2.2.

2.4 Operazioni tra funzioni

Date due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ (posso avere anche domini diversi ma allora la funzione che risulterà alla fine avrà come dominio l'intersezione di $dom(f)$ e $dom(g)$).

- $(f + y)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - y)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f * y)(x) = f(x) * g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $(\lambda f)(x) = \lambda * f(x)$
- $f \circ g(x) = f(g(x))$

> Possiamo immaginare le funzioni come una black box nella quale inseriamo una valore ed essa ci restituisce un altro valore in base a quello che accade all'intero della black box.

Il dominio di $f \circ g$ è quel numero che:

$$\boxed{(f \circ g) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\}}$$

2.4.1 Funzione composta

Esempio 2.1. *Mostriamo alcuni esempi di funzioni composte:*

$$e^{x^2} = (f \circ g)(x)$$
$$g(x) = x^2 \quad f(y) = e^y$$
$$f(y(x)) = f(x^2) = e^{x^2}$$

2.5 Funzioni inverse

Definizione 2.5. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva possiamo costruire la funzione inversa, vedi figura 2.

Data $y \in Im(f)$ posso definire $x = g(y)$ come l'unica soluzione di $y = f(x)$

$$dom(f^{-1}) = Im(f)$$
$$Im(f^{-1}) = dom(f)$$

Una funzione inversa molto comune è l'operazione di radice.

Esempio 2.2. *se* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

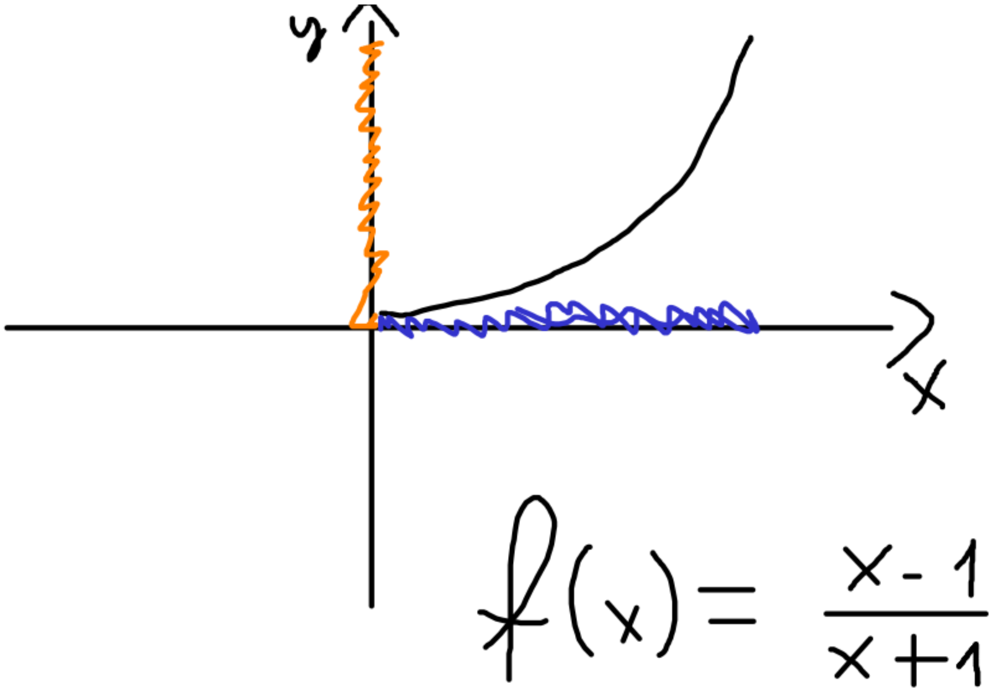

Figure 4

Vediamo se è iniettiva:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} =$$
$$(y+1)(x+1) * \frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} * (x+1)(y+1) =$$
$$xy - y + x - 1 = xy - x + y - 1 =$$
$$2x = 2y =$$
$$\boxed{x = y}$$

2.6 Monotonia

Definizione 2.6. $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **monotona crescente** se $\forall x_1, x_2 \in A$ si ha:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definizione 2.7. $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **monotona decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in A$ si ha:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Esempio 2.3. *Crescente spostandosi verso destra del grafico devo salire:*

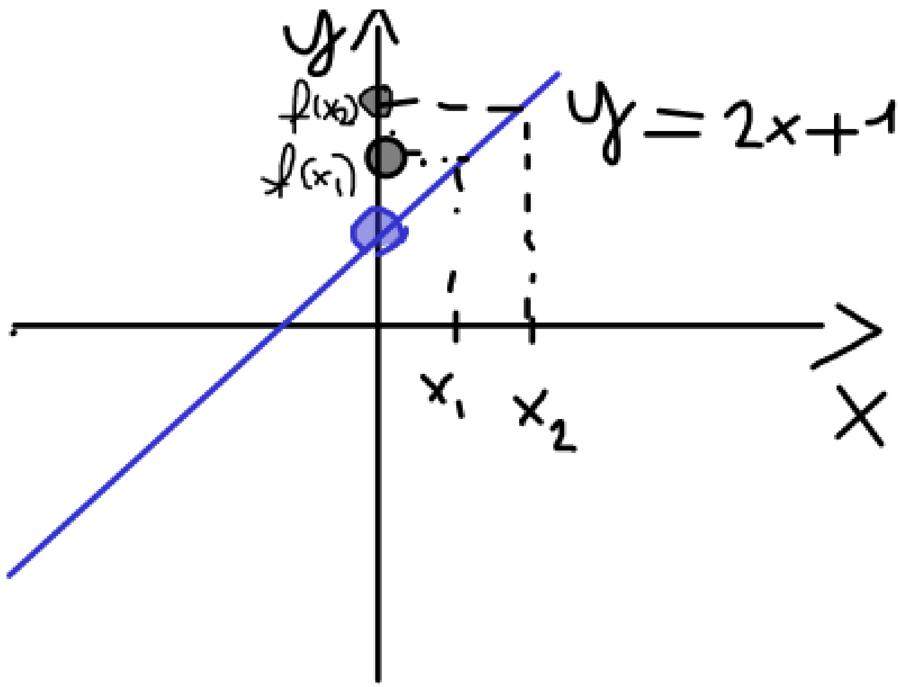

Figure 5: Esempio di monotonia crescente

Decrescente spostandosi verso destra devo andare verso il basso:

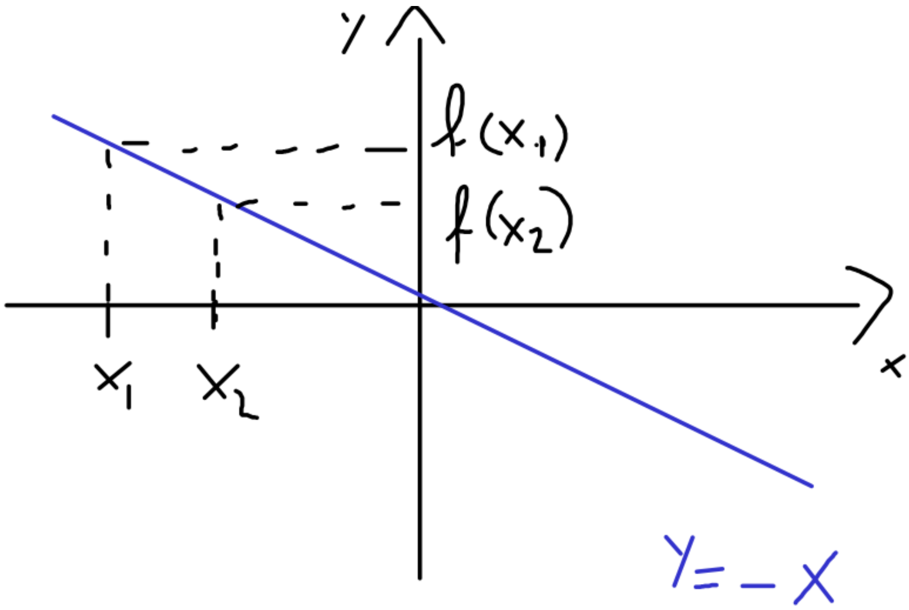

Figure 6: Esempio di monotonia decrescente

Esistono casi in cui una funzione è crescente per un intervallo e decrescente per un altro intervallo, per esempio $f(x) = x^2$

$$\begin{array}{ll} \textit{Crescente nell'intervallo} & (0, +\infty) \\ \textit{Decrescente nell'intervallo} & (-\infty, 0) \end{array}$$

Osservazione 2.1. se f è sia crescente che decrescente in A

Proprietà 2.1. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona allora f è iniettiva (dunque invertibile).

Proof. presi $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ possiamo assumere che:

1. $x_1 < x_2$ avremo che $f(x_1) < f(x_2)$. In particolare se strettamente crescente $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. $x_2 < x_1$ avremo che $f(x_2) < f(x_1)$, in particolare se strettamente decrescente $f(x_2) \neq f(x_1)$

□

2.7 Proprietà delle funzioni monotone

Se $f(x), g(x)$ sono finiti crescente:

- $f(x) + g(x)$ è funzione crescente
- $\lambda * f(x)$ è crescente per $\underline{\lambda > 0}$ e decrescente per $\underline{\lambda < 0}$
- se $f(x) > 0$ sempre e $g(x) > 0$ sempre allora $f(x) * g(x)$ è crescente

Osservazione 2.2. In generale se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe monotone e non cambiano segno allora $f(x) * g(x)$ è anch'essa monotona;

Se f e g sono monotone, anche $f \circ g$ è monotona e segue la regola dei segni ($\nearrow = +, \searrow = -$).

Esempio 2.4. *Con* $f(x) = \frac{1}{x}$ *che ha* $A = dom(f) = \mathbb{R}\ 0$
Avremo che la funzione è decrescente:

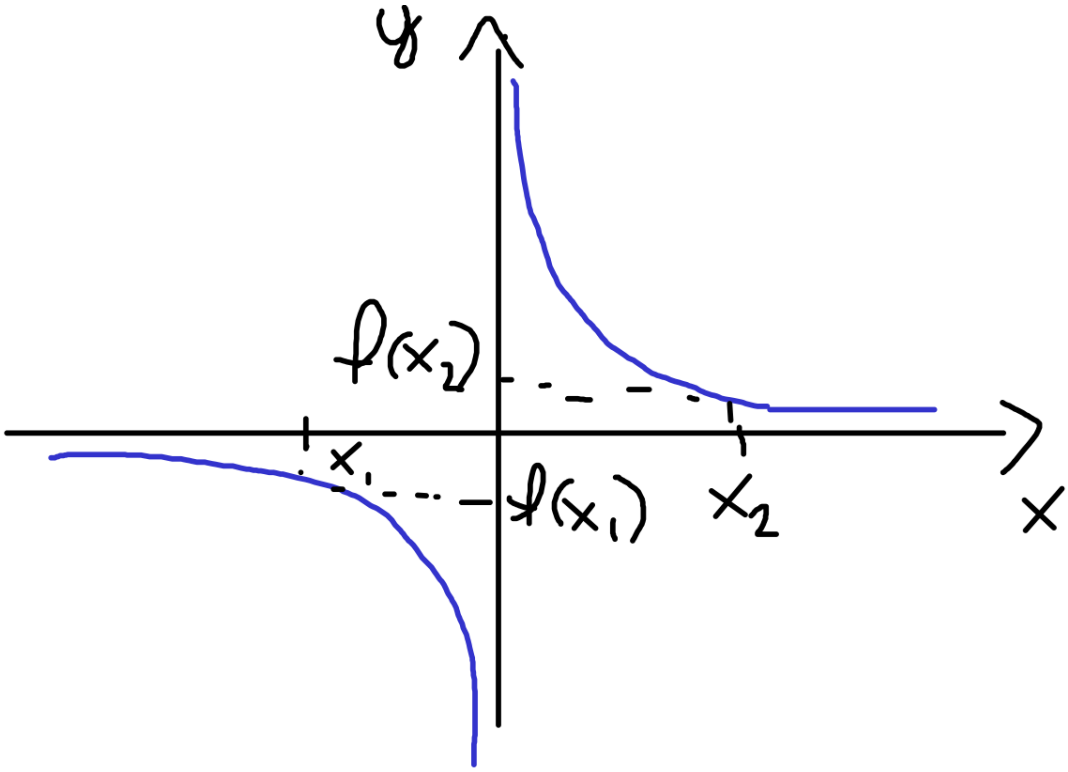

Figure 7: Esempio iperbole

Dove $x_1 < x_2$ *e quindi* $f(x_1) < f(x_2)$.

3 Trasformazioni geometriche

Algebricamente possiamo considerare le le tralsazioni come somme e le dilatazione-contrazioni come moltiplicazioni.

3.1 traslazioni verticali

dato un $y_0 > 0$ il grafico della funzione $y = f(x) + y_0$ si ottiene traslando in alto di y_0 ed il grafico della funzione $y = f(x) - y_0$ si ottiene traslando verso il basso di $y_0 > 0$.

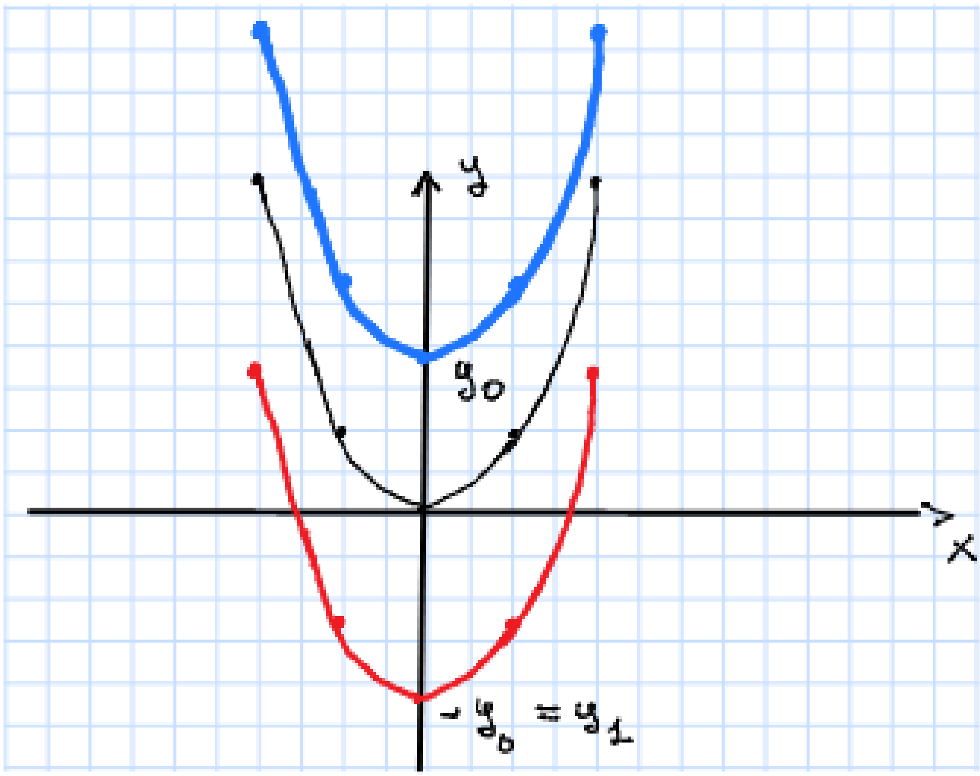

Figure 8: ROSSO: $y = f(x) + y_0$, BLU: $f(x) - y_0 = f(x) + y_1$

3.2 traslazioni orizzontali

dato un $x_0 > 0$ il grafico della funzione $y = f(x) + x_0$ si ottiene traslando in alto di x_0 ed il grafico della funzione $y = f(x) - x_0$ si ottiene traslando verso il basso di $x_0 > 0$.

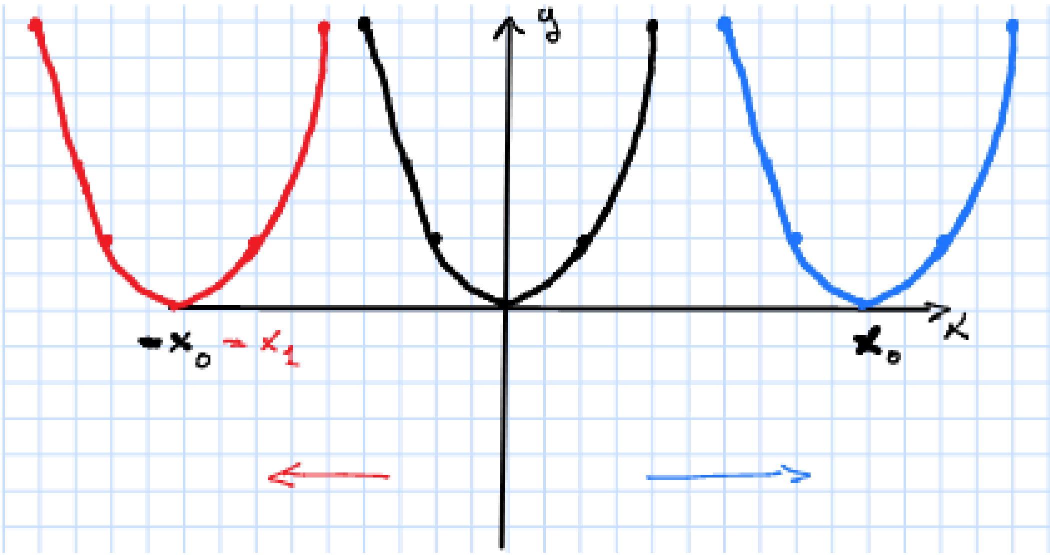

Figure 9: ROSSO: $f(x + x_0) = f(x - x_1)$, BLU: $f(x - x_0)$

3.3 dilatazioni e contrazioni verticali

dato un $k > 1$ il grafico della funzione $y = f(x)/k$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse y ed il grafico della funzione $y = af(x)$ si ottiene dilatando di a lungo l'asse delle y.

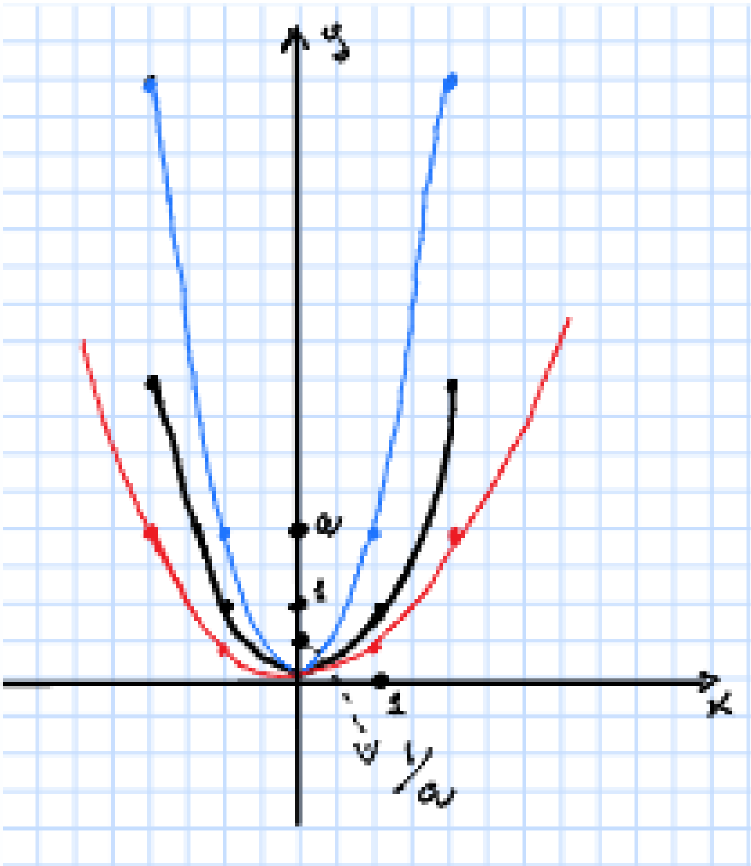

Figure 10

3.4 dilatazioni e contrazioni orizzontali

dato un $k > 1$ il grafico della funzione $y = f(x/k)$ si ottiene dilatandoi di a lungo l'asse x ed il grafico della funzione $y = f(ax)$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse delle x.

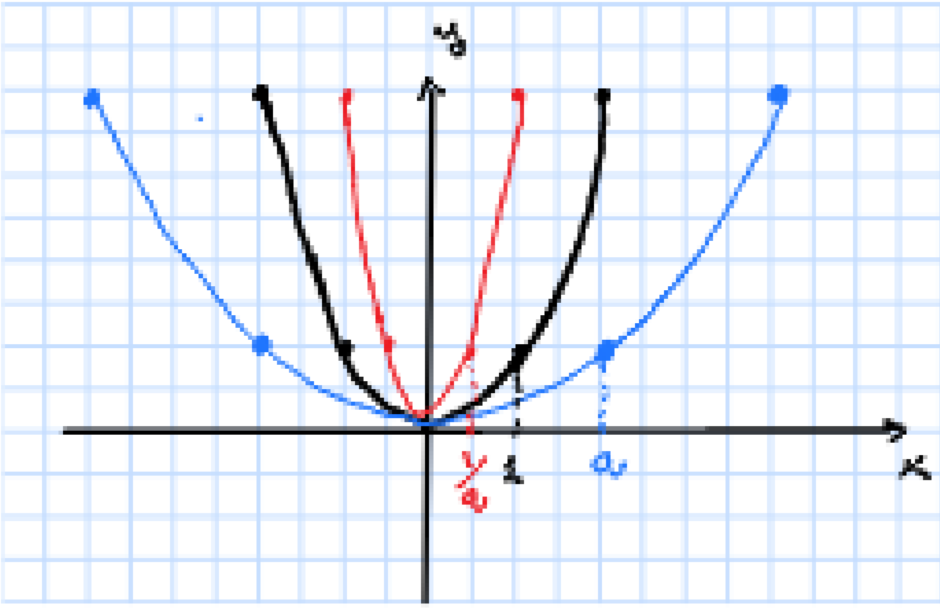

Figure 11

3.5 Simmetrie

Definizione 3.1. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è detta:

- pari $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ e $f(-x) = f(x)$.
- dispari $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ e $f(-x) = -f(x)$.

4 Funzioni elementari

4.1 Funzioni tipo potenza

Una funzione tipo potenza è una funzione nella forma:

$$f(x) = x^n$$

dove $x^n = \underbrace{x * x * x * x * x \ldots * x}_{\text{n volte}}$.

Aggiungere lezione 4

4.2 Proprietà dell'esponenziale e del logaritmo

Alcune proprietà degli esponenziali:

- $a^{x+y} = a^x * a^y$
- $a^{x*b} = (a^x)^b$
- $a^{-x} = (a^x)^{-1} = \frac{1}{a^x}$
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$

Alcune proprietà dei logaritmi:

- $\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(x^b) = b * \log_a(x)$
- $\log_a(\frac{1}{x}) = \log_a(x^{-1}) = -\log_a(x)$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

$\log(x)$ è stato introdotto come funzione inversa dell'esponenziale a^x infatti dire: $\log a(y)$ vuol dire trovare x tale che:

$$\log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$$
$$\log_2(4) = x \Leftrightarrow 2^x = 4$$

Una base a particolare è la e ovvero **Numero di Nepero** 6, in particolare:

$$\log_e(x) = ln(x)$$

Dove ln è il **logaritmo naturale**

$\log_a(x) = \log_b * \log_a(b)$

Alcune propiretà dell'inversione sono:

- $a^{\log_a(x)} = x$

Proprietà mancante 9:33

4.3 Funzioni trigonometriche

α misura x radianti se x è la lunghezza dell'arco di cerchio presente dentro l'angolo sapendo che la circonferenza è $\boxed{2\pi}$.

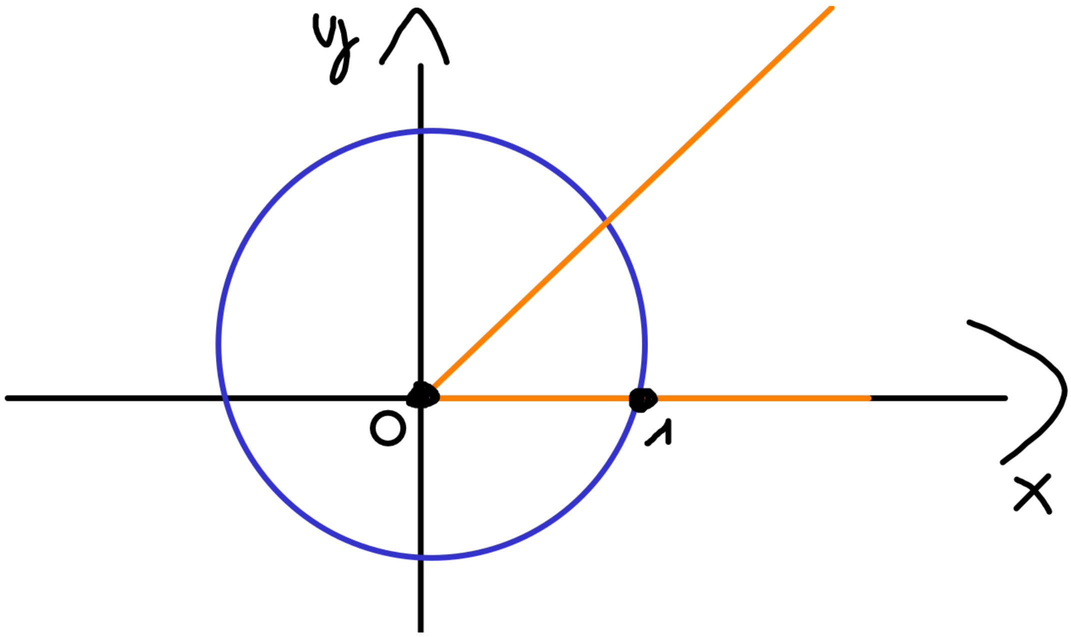

Figure 12

Esempio 4.1. *Per esempio un angolo retto che è* $\frac{1}{4}$ *della circonferenza sarà* $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

In generale un angolo in radianti è:

$$\frac{\text{Angolo in gradi sessadecimali}}{360} * 2\pi$$

Aggiungere 9:45 esepi seno coseno tangente

- $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- geometricamente noto che $PH \leq PA \leq QA$ e $\sin(x)$

5 Limiti

Controllare il componente della vunzione vicino a $x_0 \in dom(f)$ e confrontarlo con $f(x_0)$.

Definizione 5.1. Controllare il comportamento della funzione vicino ad un punto x_0 che sia di accumulazione per $dom(f)$.

Definizione 5.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}\quad x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto di accumulazione di A se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in A - \{x_0\}$ tale che:

$$x_0 \epsilon \leq x \leq x_0 + \epsilon$$

Esempio 5.1. *$A = (0,1), x_0 = 5$ è un punto di accumulazione per A.*

25/3/22: Aggiungere retta esempio

.

In questo caso per $\epsilon < 1$ non trovo elementi di A che siano dentro $(5-\epsilon, 5+\epsilon)$.

Esempio 5.2.

Aggiungere esempi accumulazione

- Se $A = \mathbb{N}$ i punti di accumulazione saranno:

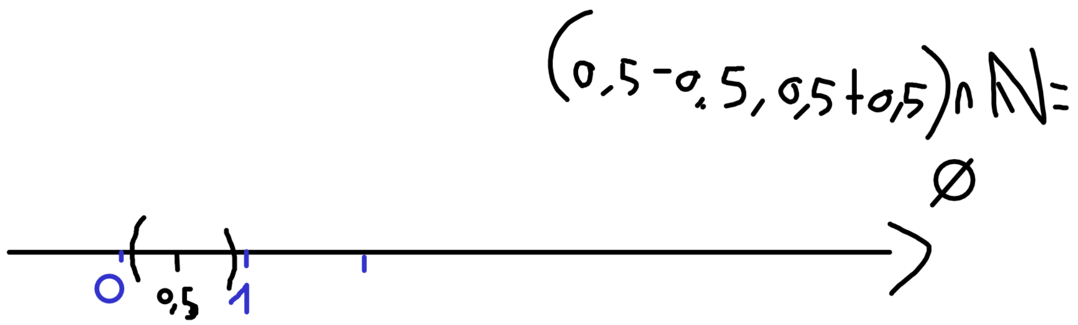

Figure 13: Esempio

- Se $x \notin \mathbb{N}$ allora non è di accumulazione.
- Se $x \in \mathbb{N}$ non è di accumulazione se:

  $\epsilon < 1$ e $g \in \mathbb{N} \quad x - \epsilon \leq g \leq \epsilon + x \Rightarrow g = x$ che non va bene per la definizione.

NOTA:

Aggiungere nota

Definizione 5.3. un'altra definizione:

- $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice che $a + \infty$ è punto di accumulazione di A se $\forall M > 0 \quad \exists x \in A$ tale che $x \geq M$.
- $-\infty$ è punto di accumulazione di A se $\forall M > 0 \quad \exists x \in A$ tale che $x \leq -M$.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A.

5.1 Definizione di un limite

Avendo un limite nella forma:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Possiamo ottenere quattro diverse definizioni:

1. $\boxed{l \in \mathbb{R}}$
2. $\boxed{+\infty}$
3. $\boxed{-\infty}$
4. **non esiste** (tipo il Molise)

In questi casi si può considerare $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 = +\infty, x_0 = -\infty$.

5.1.1 Esempi con $x_0 = +\infty$

Esempio 5.3. *2:*

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

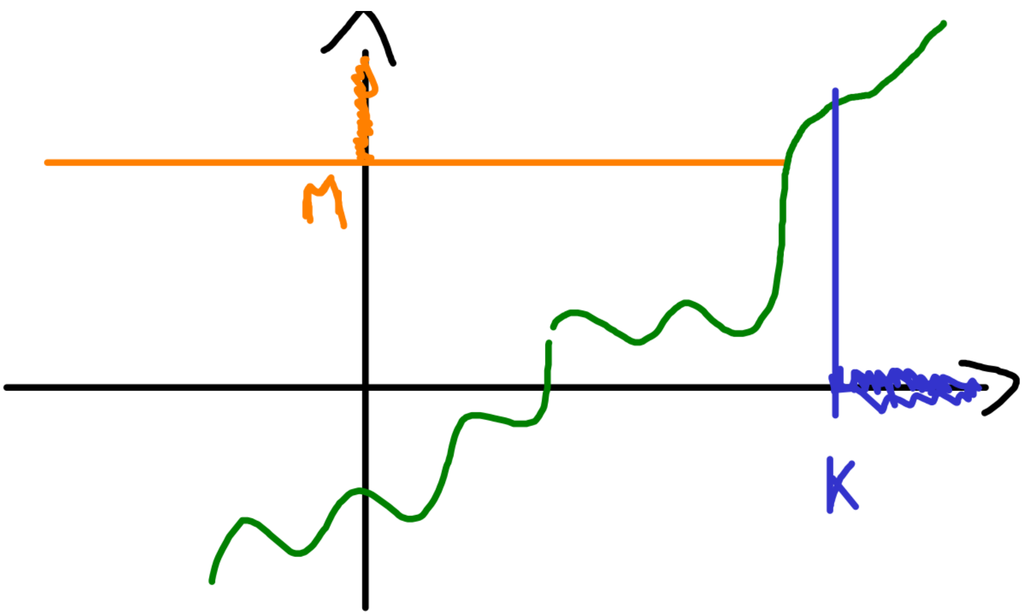

Figure 14

$\forall M > 0 \quad \exists k > 0$ *tale che* $\forall x \in A, x > k$ *si ha:*
$f(x) > M$.
In parole semplici possiamo dire che:
DA UN CERTO PUNTO IN POI RESTO SEMPRE SOPRA QUALUNQUE ALTITUDINE

Esempio 5.4. *3:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

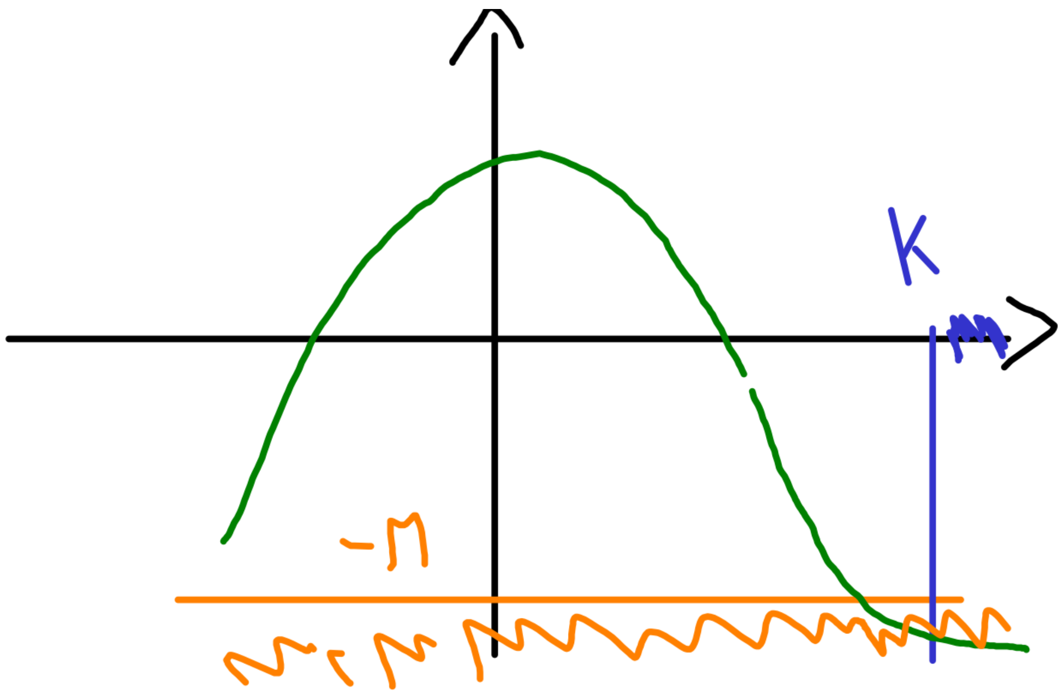

Figure 15

$\forall M > 0 \quad \exists k > 0$ *tale che se* $x \in A, x > k$ *si ha:*
$\boxed{f(x) < -M}$.

Esempio 5.5. *1:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0$ *tale che se* $\forall x \in A, x > k$ *si ha:*
$\boxed{l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon}$.

Esempio 5.6. *4:*

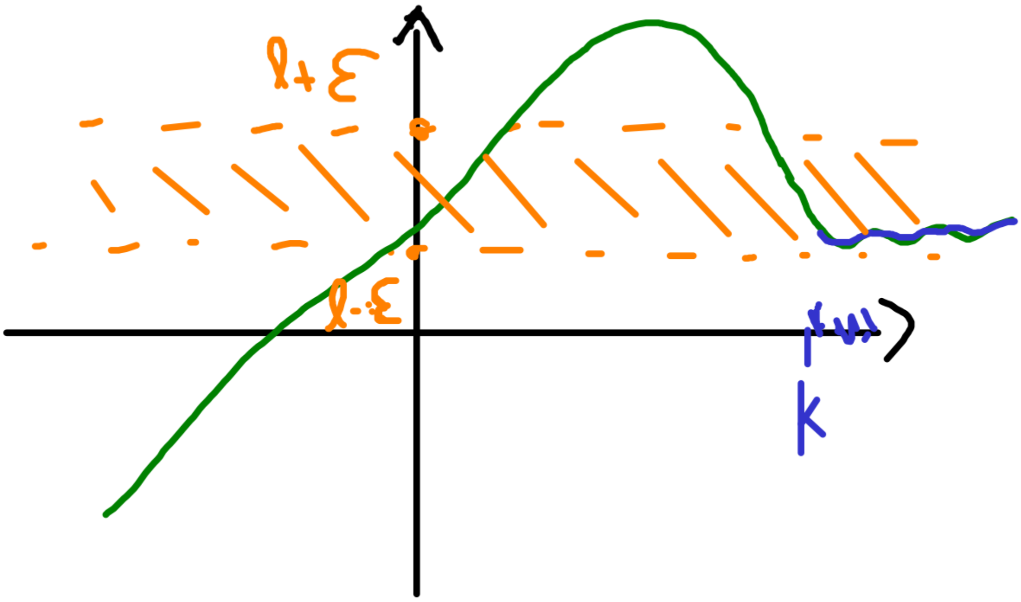

Figure 16

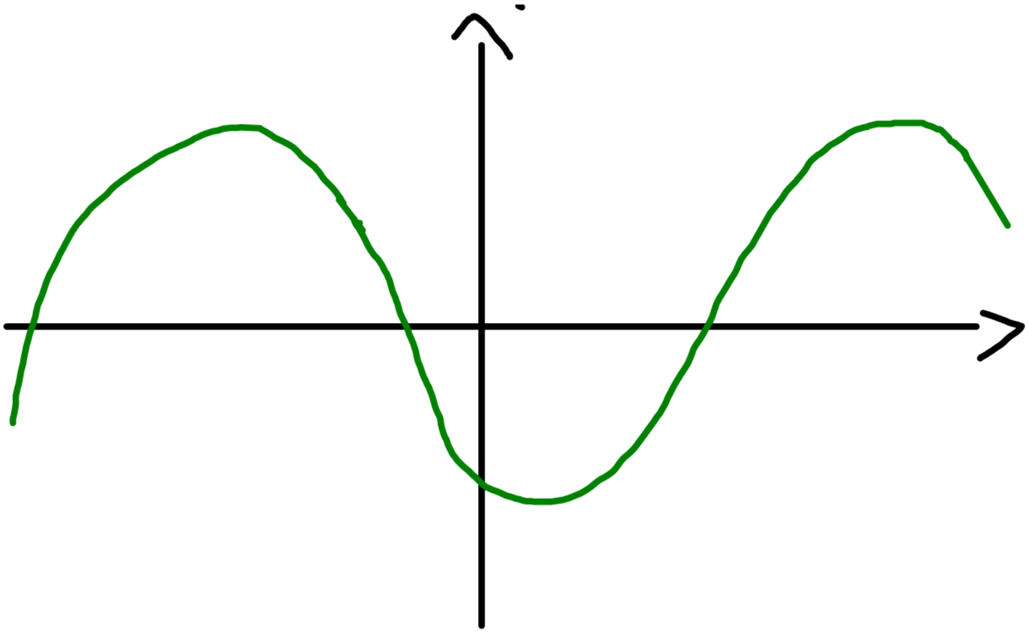

Figure 17

La funzione è continua non ha limite

5.1.2 Esempi con $x_0 = -\infty$

Esempio 5.7. *1:*

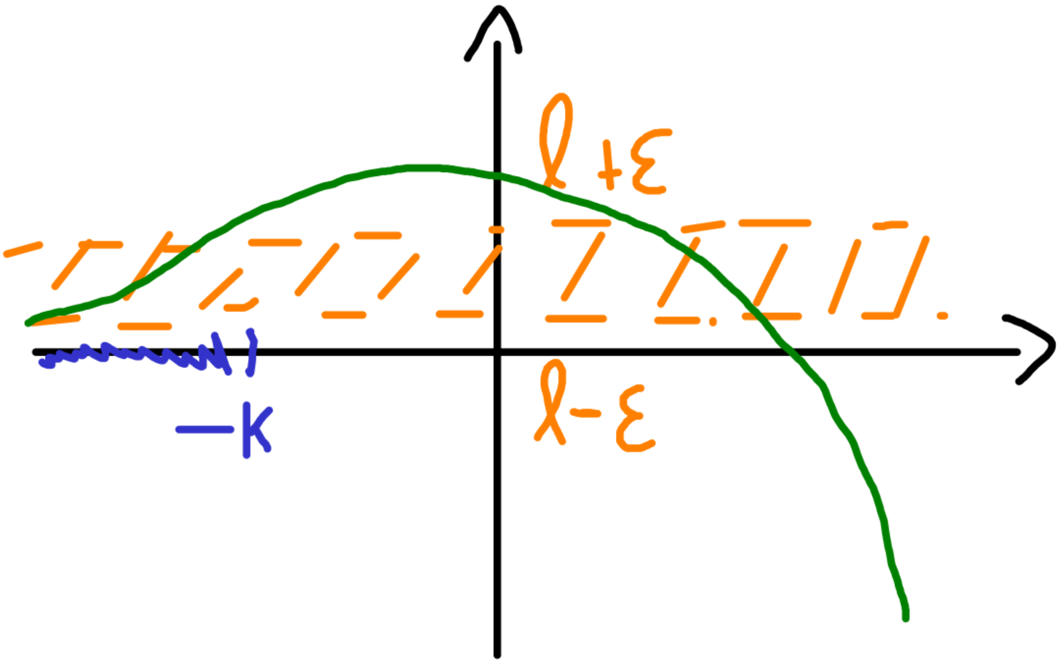

Figure 18

Esempio 5.8. *2:*

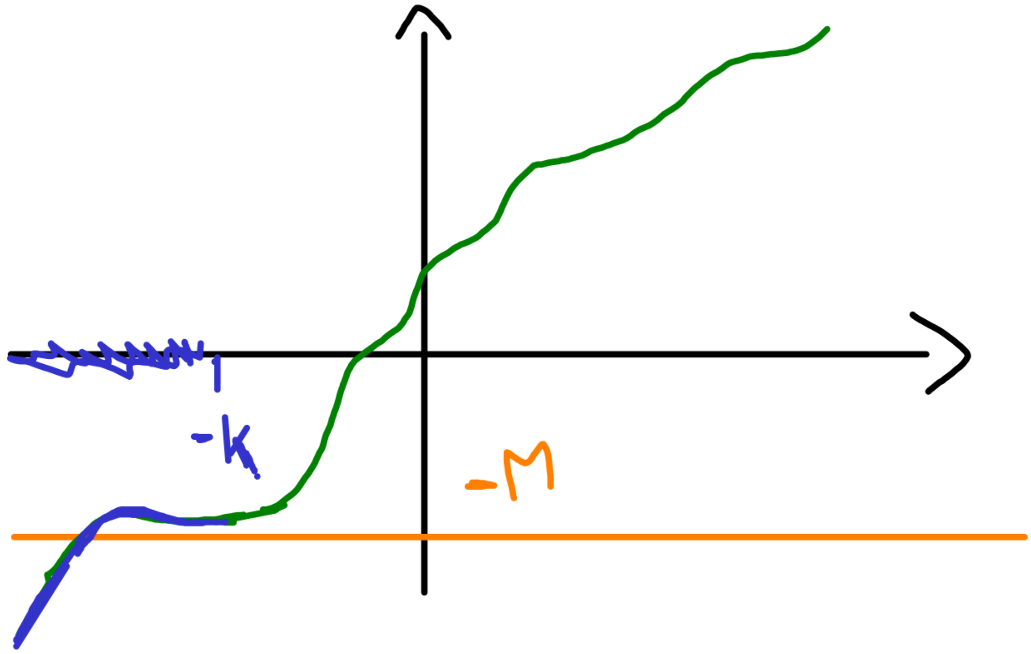

Figure 19

Esempio 5.9. *3:*

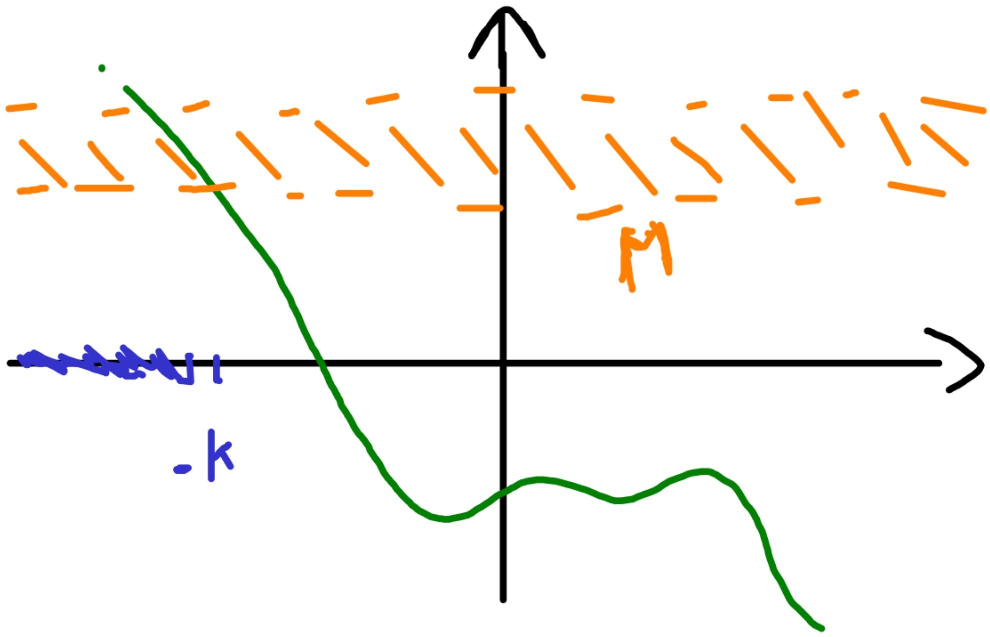

Figure 20

Aggiungere esempi 10:15

$\lim_{x\to 0} \neq 0$ perchè nelle definizioni di limite non cosidero **MAI** il valore in $x = x_0$ perchè non mi interessa chi è $f(x_0)$.

Definizione 5.4. (Continuita II)
$x_0 \in A$ punto di accumulazione per A, f è continua in x_0 se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

5.2 Limiti di funzioni elementari

Con le potenze di $x^n \quad n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} x^n > +\infty \forall n \geq 1$$
$$\lim_{x\to -\infty} x^n > +\infty \quad \forall n \geq 1$$

Dobbiamo prima vedere se la funzione è pari o dispari

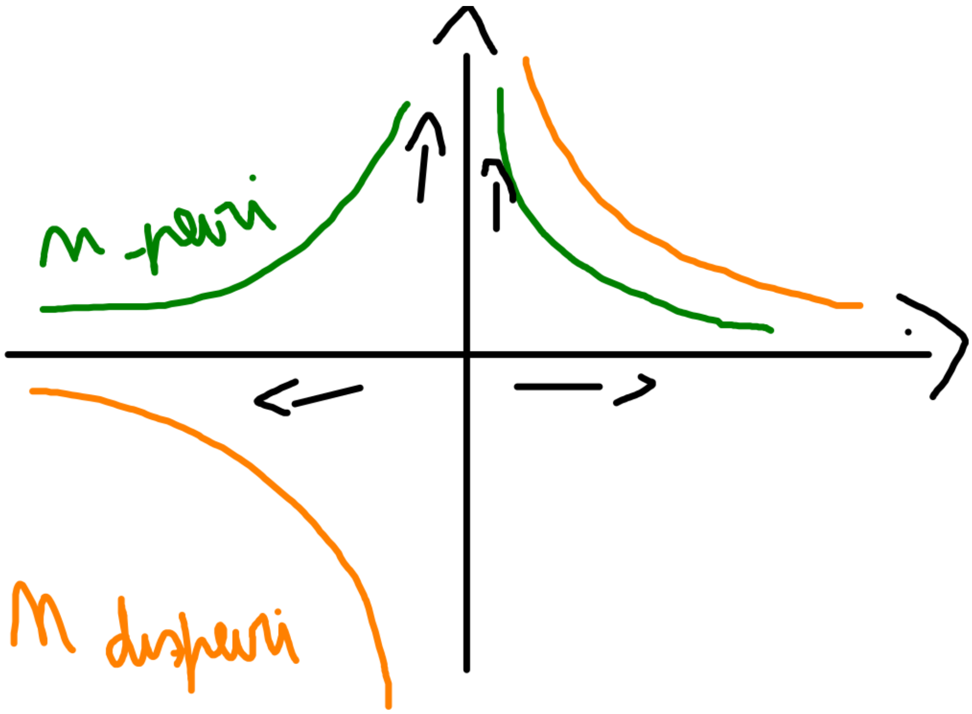

Figure 21

Recuperare i limiti

Corollario 5.1. $\exists$ intorno Idx_0, $\exists M > 0$ tale che:

$$|f(x)| \leq M \quad \forall I, x \neq x_0$$

5.3 Successioni e limiti di successioni

Definizione 5.5. Una successione la possiamo immaginare come:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

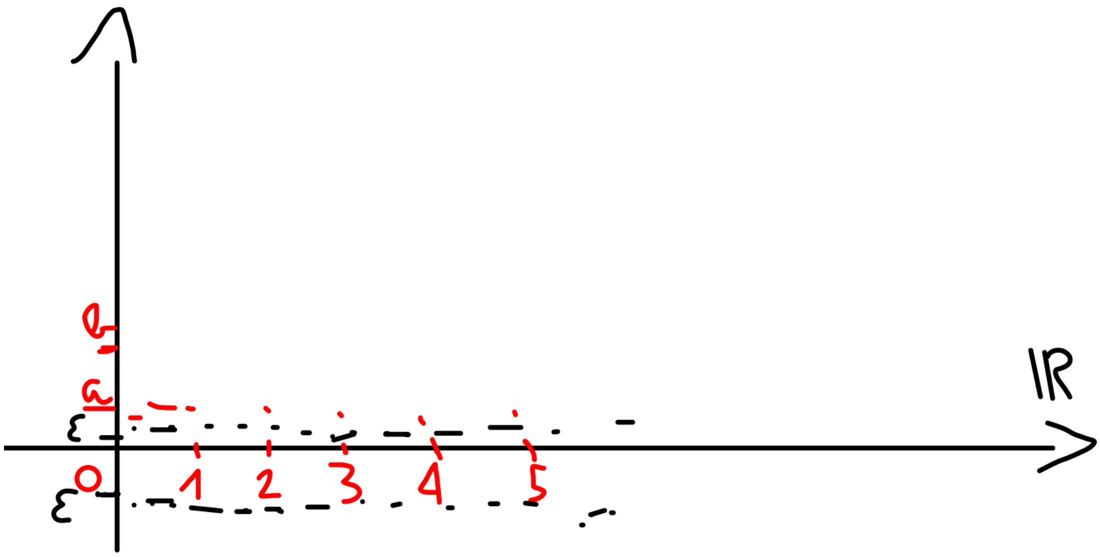

Figure 22

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad f(n) = a_n \quad dom(f) = \mathbb{N}$$

con $+\infty$ che è punto di accumulazione per $A = \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

1. a
2. b
3. c

Valgono le stesse proprietà di limiti di funzioni, vale il teorema del confronto, teorema di permanenza del segno.

LEZ 7/4: Aggiungere esempio successioni 10:30

6 Numero di Nepero

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Teorema 6.1. *Se $f(x)$ è una funzione crescente allora:*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*Se in particolare $f(x)$ è **limitataa** allora:*

$$\exists \lim_{x \to 0} f(x)$$

ed è un numero finito.

6.1 Binomio di Newton

Definizione 6.1. Il binomio di Newton risponde alla domanda:

$$(x + y)^n = ?$$

Che sarebbe:

$$\begin{aligned}
&(x + 1)^1 = x + y \\
&(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\
&(x + y)^3 = (x + y)^2 * (x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
\end{aligned}$$

Possiamo notare un certo pattern nel risultato delle varie equazioni, questo pattern viene definito dal **triangol di Tartaglia**:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Figure 23: Triangolo di Tartaglia

7 Limiti inferiori e superiori

Definizione 7.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una fuzione

- f si dice superiormente limitata su A se $\exists M > 0$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$.
- f si dice inferiormente limitata su A se $\exists M : f(x) \geq -M$ per ogni $x \in A$.
- $x_m \in A$ si dice punto di massimo di f in A se $f(x) \leq f(x_m) \forall x \in A$.
- $x_m \in A$ si dice punto di minimo di f in A se $f(x_m) \leq f(x)$ per ogni $x \in A$.
- $M \in \mathbb{R}$ è detto estremo superiore di f in A se:

LEZ 8/4: :Aggiungere sottoliste

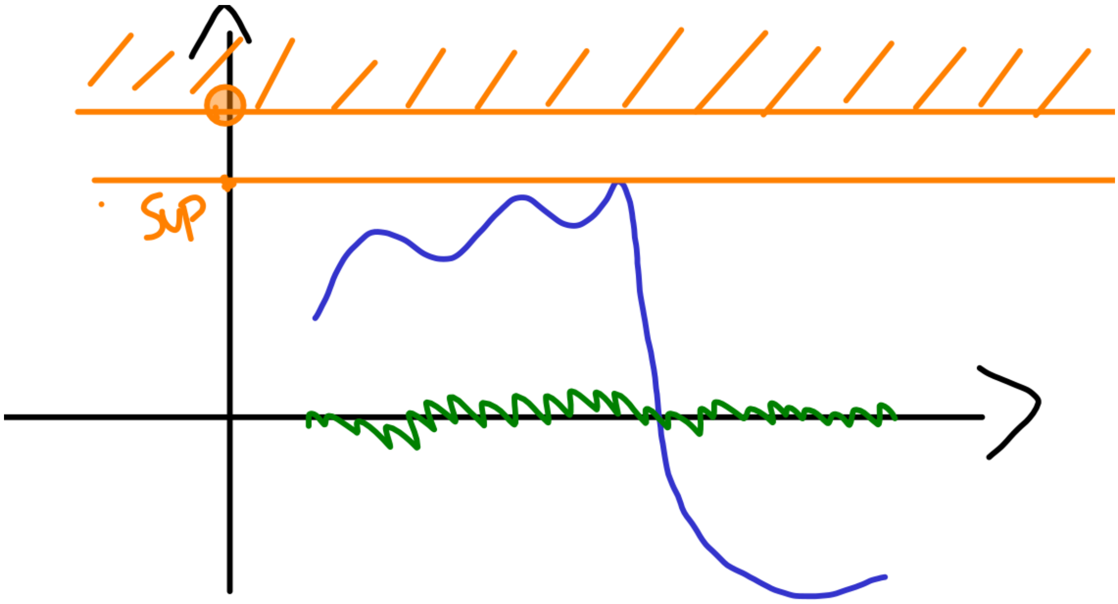

Figure 24

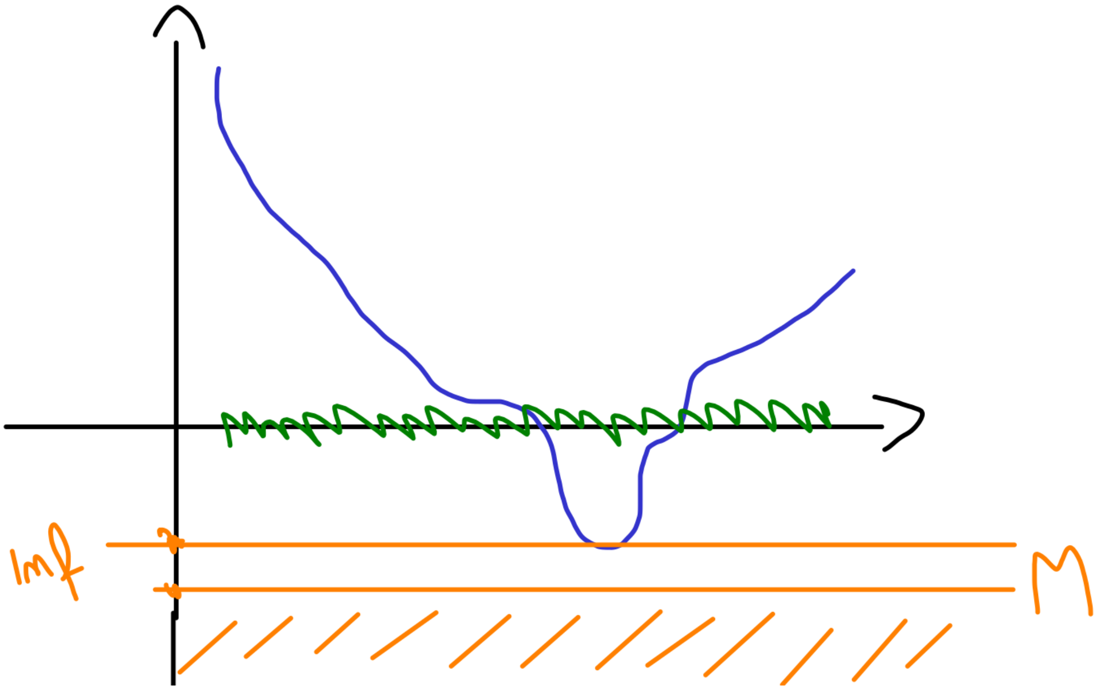

Figure 25

Una funzione si dice realizzare il massimo se $\exists x_m$ punto di massimo. In questo caso si dice $sup(f) = max(f)$.

Una funzione si dice realizzare il minimo se $\exists x_m$ punto di massimo. In questo caso si dice $inf(f) = min(f)$.

Teorema 7.1. *Supponiamo f sia superiormente limitata, allora* $\exists \sup(f) \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.2. *Supponiamo f sia inferiormente limitata, allora* $\exists \inf(f) \in \mathbb{R}$

LEZ 8/4: dividere il testo in due sezioni

7.1 Teorema di Weierstrass

Teorema 7.3. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*continua*</u>*, allora $\exists x_M, x_m$ rispettivamente punto di massimo e punto di minimo, in particolare f realizza il massimo e il minimo.*

Teorema 7.4. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*continua*</u>*, sia $f(x) \leq c \leq f(b)$, allora $\exists x \in [a, b)$ tale che $f(x) = c$.*

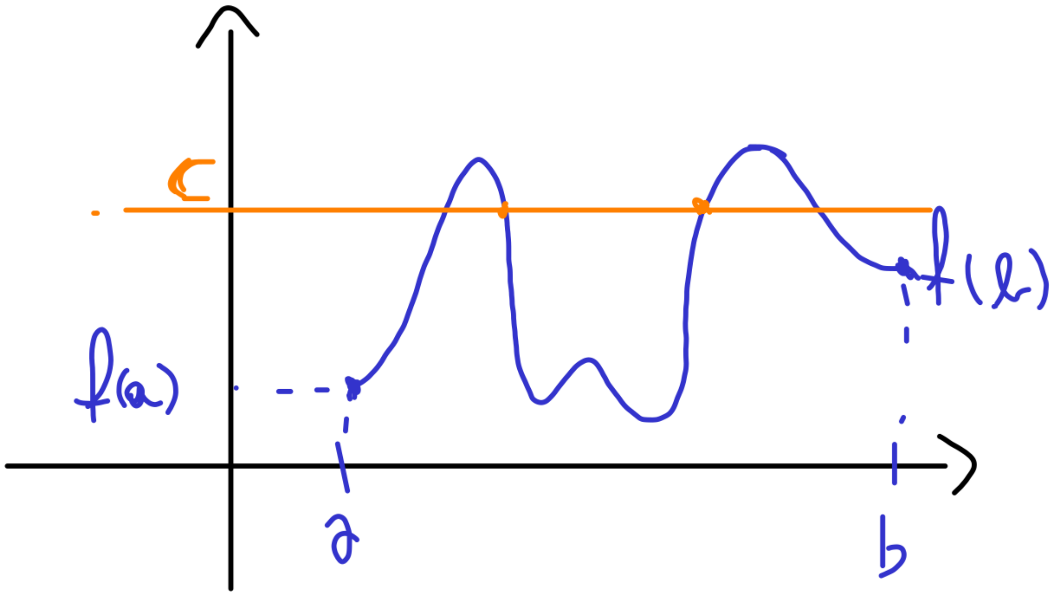

Figure 26

Corollario 7.1. (Weierstrass + valore medio) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua allora $InF = [\inf(f), \sup(f)]$, inoltre $\inf(f) = \min(f) \in \mathbb{R} \quad \sup(f) = \max(f) \in \mathbb{R}$

8 Derivata

8.1 Preliminari

Geometria del piano in particolare rette:

$$y = mx + q$$

Dati due punti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ tali che $P_0 \neq P_1$, qual'è la retta che passa per P_0 e P_1.

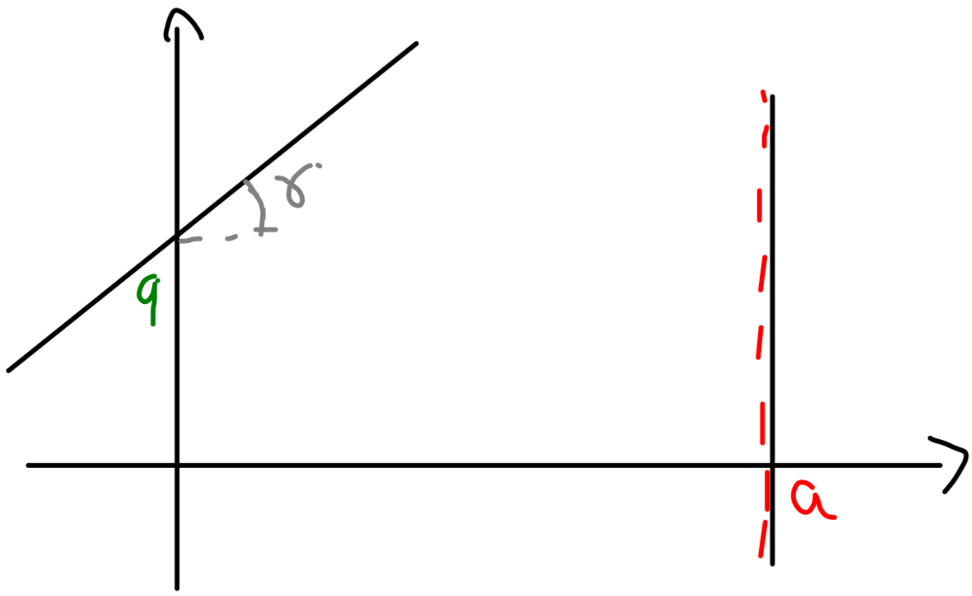

Figure 27

Impongo il passaggio $r = \{y = mx + q\}$ allora $P \in r \Leftrightarrow (x_0, y_0) \in \{y = mx + q\} \Leftarrow x_0, y_0$ verificata l'equazione $y = mx + q$:

$$y = mx + q \rightarrow \begin{cases} P_0 \in r \\ P_1 \in r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_0 = mx_0 + q \\ y_1 = mx_1 + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_0 = mx_0 + q \\ y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0) + q \rightarrow m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} * x_0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_0 = \\ m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} * x_0 \end{cases}$$

LEZ 8/4: Aggiungere lezione 10:3