



# Vysoké učení technické v Brně

Fakulta informačních technologií

Elektronika pro informační technologie

2020 / 2021

## Semestrální projekt IEL

# Obsah

<b>1</b>	<b>Príklad č. 1</b>	<b>2</b>
1.1	Zadanie . . . . .	2
1.2	Zjednodušovanie obvodu . . . . .	2
1.3	Riešenie . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Príklad č. 2</b>	<b>6</b>
2.1	Zadanie . . . . .	6
2.2	Riešenie . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Príklad č. 3</b>	<b>9</b>
3.1	Zadanie . . . . .	9
3.2	Riešenie . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Príklad č. 4</b>	<b>11</b>
4.1	Zadanie . . . . .	11
4.2	Riešenie . . . . .	11
4.3	Výpočet v Pythone (pomocou numpy) . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Príklad č. 4</b>	<b>14</b>
5.1	Zadanie . . . . .	14
5.2	Riešenie . . . . .	14
5.3	Overenie . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Výsledky</b>	<b>17</b>

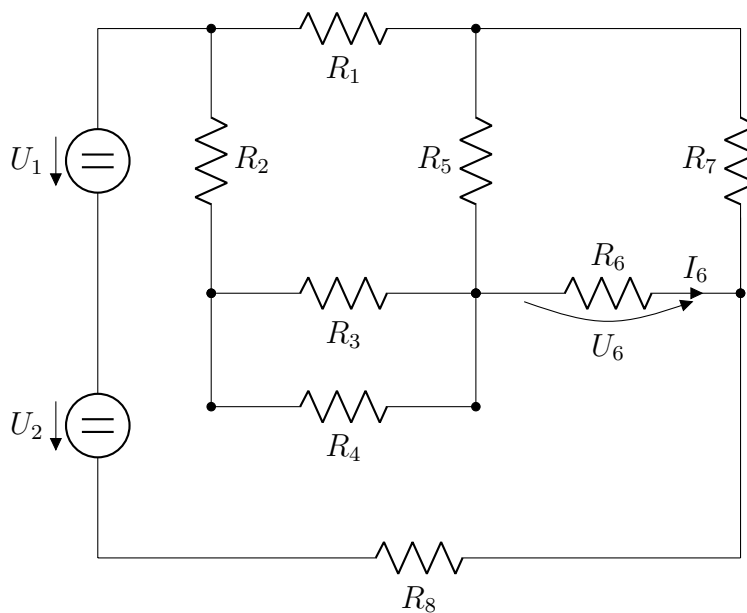
# 1 Príklad č. 1

## 1.1 Zadanie

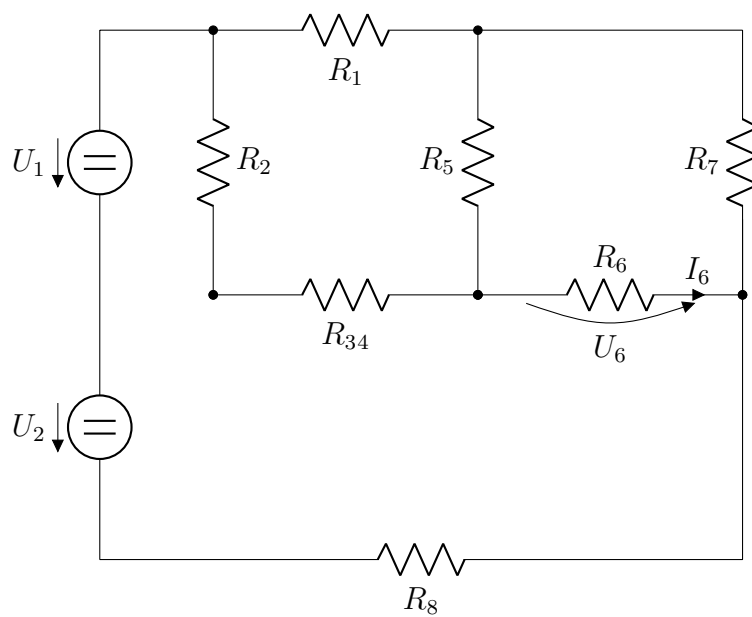
Stanovte napätie  $U_{R_6}$  a prúd  $I_{R_6}$  s použitím metódy zjednodušovania.

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]	$R_7$ [ $\Omega$ ]	$R_8$ [ $\Omega$ ]
A	80	120	350	650	410	130	360	750	310	190

## 1.2 Zjednodušovanie obvodu

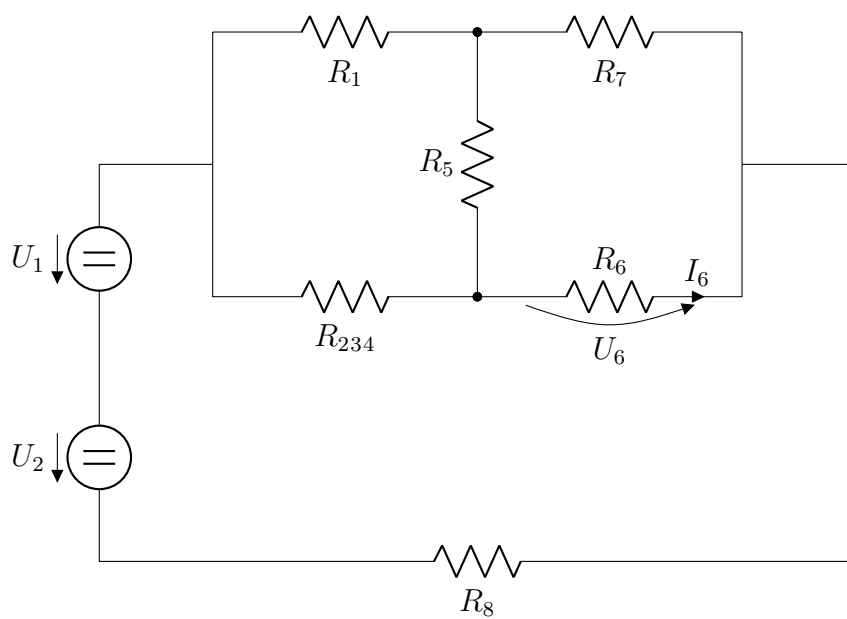


Obr. 1: Pôvodný obvod



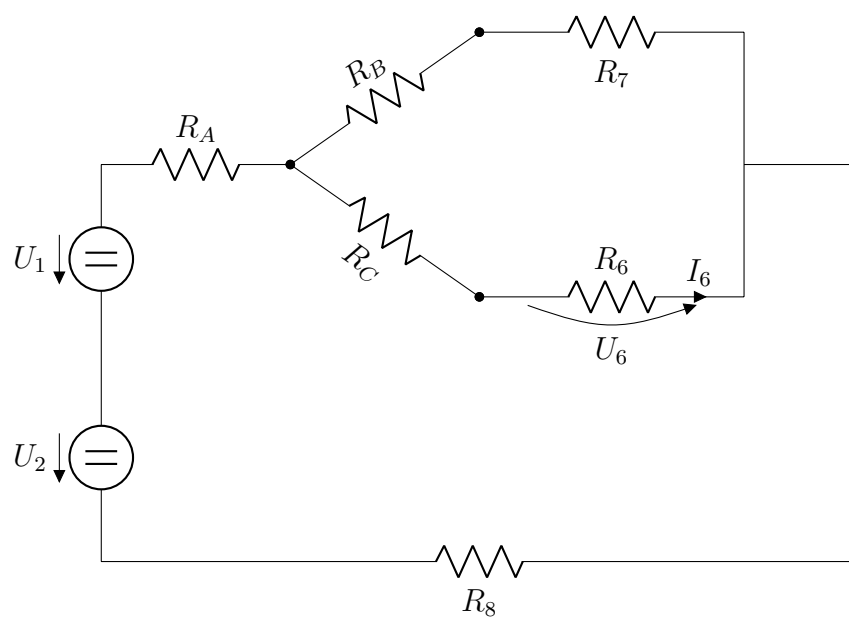
Obr. 2: Spojenie  $R_3$  a  $R_4$

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$



Obr. 3: Spojenie  $R_2$  a  $R_{34}$

$$R_{234} = R_{34} + R_2$$



Obr. 4: Trojuholník -> hviezda

Vytvorenie rovníc na prevod trojuholník -> hviezda:

$$R_A = \frac{R_1 R_{234}}{R_1 + R_{234} + R_5}$$

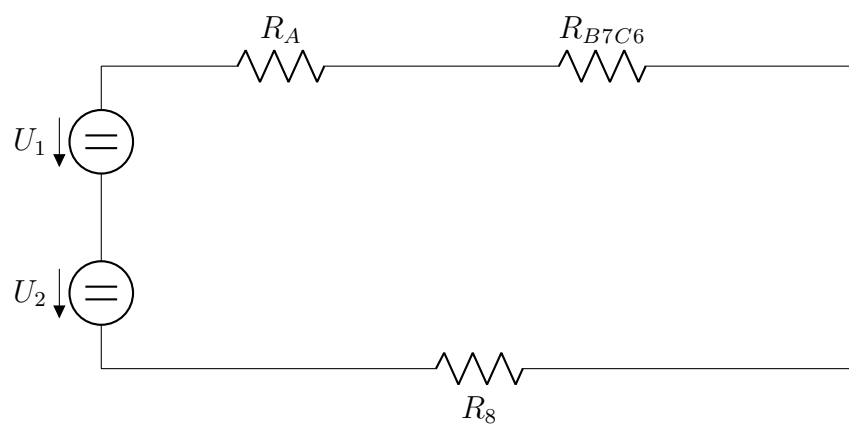
$$R_B = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_{234} + R_5}$$

$$R_C = \frac{R_5 R_{234}}{R_1 + R_{234} + R_5}$$

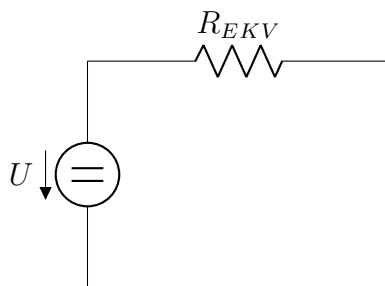
$$R_{B7} = R_B + R_7$$

$$R_{C6} = R_C + R_6$$

$$R_{B7C6} = \frac{R_{B7} R_{C6}}{R_{B7} + R_{C6}}$$



Obr. 5: Sériové spojenie  $R_B$  a  $R_7$ ,  $R_C$  a  $R_6$ ; paralelné spojenie  $R_{B7}$  a  $R_{C6}$ .



Obr. 6: Výsledný zjednodušený obvod.

$$U = U_1 + U_2$$

### 1.3 Riešenie

Získavame celkový odpor. Z neho dostávame celkový prúd prechádzajúci obvodom  $I_{celk}$ . Z neho už vieme získať prúd  $I_{RC6}$  prechádzajúci vetvou, na ktorej sa nachádza aj odpor  $U_{R6}$ .

$$R_{EKV} = R_A + R_{B7C6} + R_8$$

$$I_{celk} = \frac{U}{R_{EKV}} = \frac{U_1 + U_2}{R_{EKV}}$$

$$U_{R_{B7C6}} = I_{celk} R_{B7C6}$$

$$U_{R_{B7C6}} = \frac{U}{R_{EKV}} \times \frac{R_{B7} R_{C6}}{R_{B7} + R_{C6}}$$

$$U_{R_{B7C6}} = \frac{U}{R_A + \frac{R_{B7} R_{C6}}{R_{B7} + R_{C6}} + R_8} \times \frac{R_{B7} R_{C6}}{R_{B7} + R_{C6}}$$

$$I_{RC6} = \frac{U_{R_{B7C6}}}{R_{C6}} = I_{R6} \approx 0.0919 \text{ A}$$

$$U_{R6} = R_6 \times I_{R6} \approx 68.929 \text{ V}$$

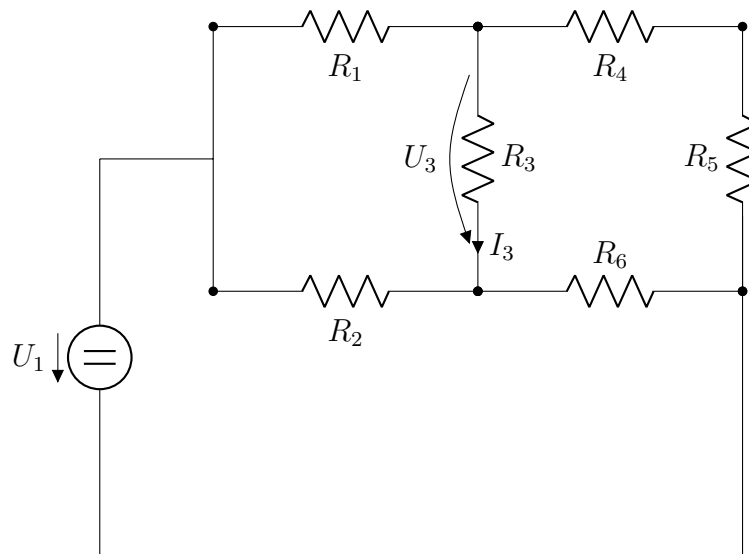
## 2 Príklad č. 2

### 2.1 Zadanie

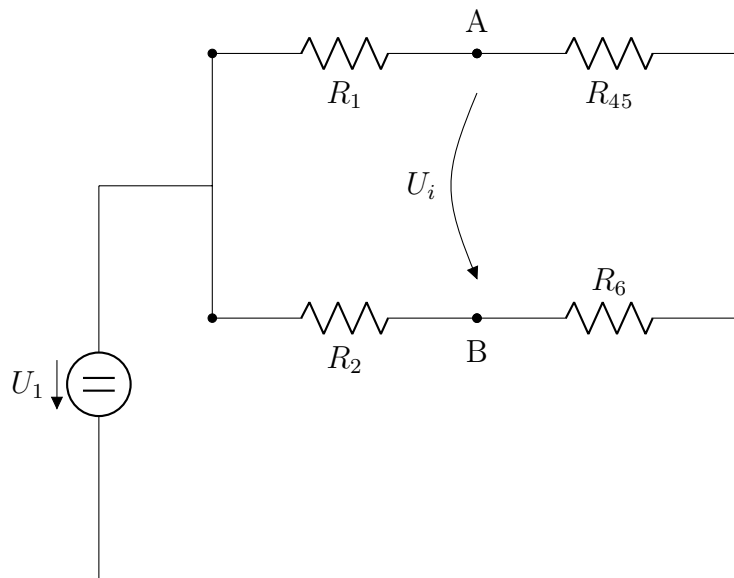
Stanovte napätie  $U_{R_3}$  a prúd  $I_{R_3}$ . Použite metódu Théveninovej vety.

sk.	$U_1$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]
B	100	50	310	610	220	570	200

### 2.2 Riešenie



Obr. 7: Pôvodný obvod



Obr. 8: Obvod bez  $R_3$

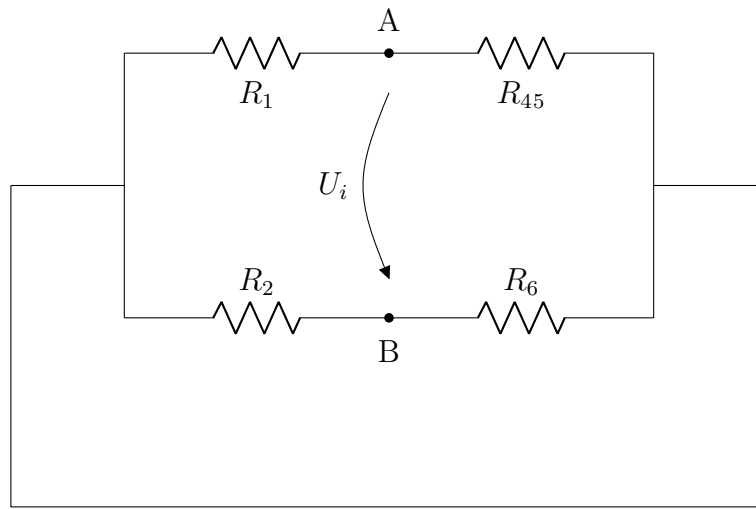
$$R_{45} = R_4 + R_5$$

Napätie  $U_i$  je rovné rozdielu napätí pred rezistormi  $R_6$  a  $R_{45}$  (proti zemi). Pre výpočet je možné použiť postup pre napäťový delič.

$$U_B = \frac{R_6}{R_2 + R_6} U_1$$

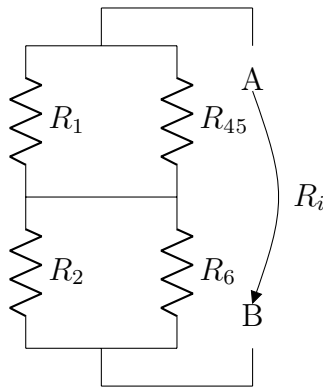
$$U_A = \frac{R_{45}}{R_1 + R_{45}} U_1$$

$$U_i = |U_{R_A} - U_{R_B}|$$



Obr. 9: Nahradenie zdroja skratom

Ďalej je potrebné zistiť odpor  $R_i$  medzi bodmi A a B. Obr. 10 sa dá ešte zjednodušiť.

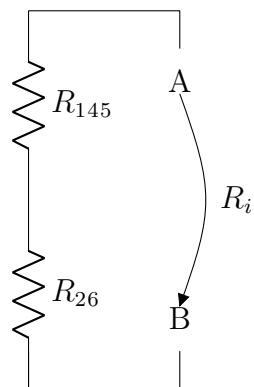


Obr. 10: Zistenie  $R_i$

$$R_{145} = \frac{R_1 R_{45}}{R_1 + R_{45}}$$

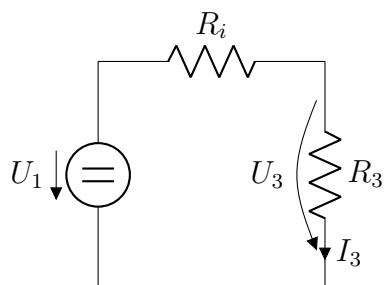
$$R_{26} = \frac{R_2 R_6}{R_2 + R_6}$$





Obr. 11: Zistenie  $R_i$

$$R_i = R_{12456} = R_{145} + R_{26}$$



Obr. 12: Výpočet  $U_{R3}$

$$I_{R3} = \frac{U_i}{R_i + R_3}$$

$$I_{R3} = \frac{\left| \frac{R_6}{R_2+R_6}U_1 - \frac{R_4+R_5}{R_1+R_4+R_5}U_1 \right|}{\frac{R_1(R_4+R_5)}{R_1+R_4+R_5} + \frac{R_2R_6}{R_2+R_6} + R_3} \approx 70.424mA$$

$$U_{R3} = I_3 R_3 \approx 42.9586V$$

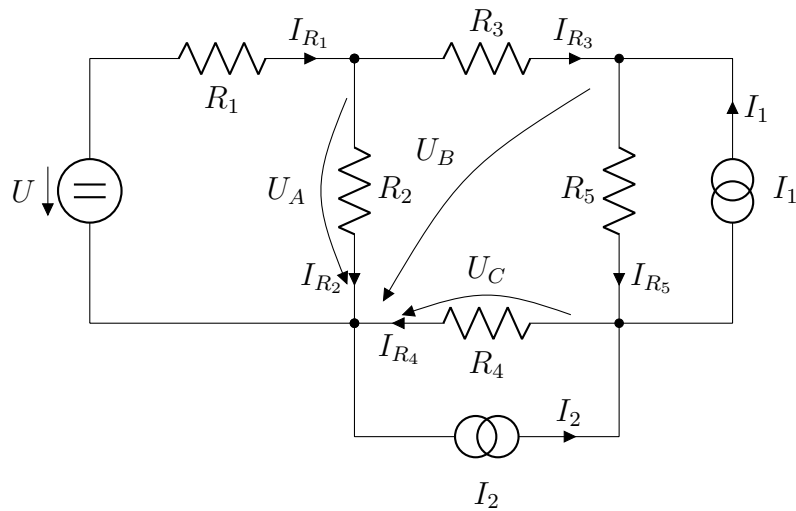
### 3 Príklad č. 3

#### 3.1 Zadanie

Stanovte napätie  $U_{R_2}$  a prúd  $I_{R_2}$ . Použite metódu uzlových napätí ( $U_A, U_B, U_C$ ).

sk.	$U$ [V]	$I_1$ [A]	$I_2$ [A]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]
G	160	0.65	0.45	46	41	53	33	29

#### 3.2 Riešenie



Obr. 13: Pôvodný obvod

$$\begin{aligned}
 I_{R_1} &= I_{R_2} + I_{R_3} \\
 I_1 + I_{R_3} &= I_{R_5} \\
 I_2 + I_{R_5} &= I_{R_4} + I_1
 \end{aligned}$$

Zostavíme rovnice podľa jednotlivých uzlov.

$$\begin{aligned}
 \frac{U - U_A}{R_1} &= \frac{U_A}{R_2} + \frac{U_A - U_B}{R_3} \\
 I_1 + \frac{U_A - U_B}{R_3} &= \frac{U_B - U_C}{R_5} \\
 I_2 + \frac{U_B - U_C}{R_5} &= \frac{U_C}{R_4} + I_1
 \end{aligned}$$

Z rovníc zostavíme maticu:

$$\begin{pmatrix} R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3 & -R_1 R_2 & 0 \\ R_5 & -R_5 - R_3 & R_3 \\ 0 & R_4 & -R_4 - R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 R_3 U \\ -R_3 R_5 I_1 \\ R_4 R_5 I_1 - R_4 R_5 I_2 \end{pmatrix}$$

Po dosadení číselných hodnôt:

$$\begin{pmatrix} 6497 & -1886 & 0 \\ 29 & -82 & 53 \\ 0 & 33 & -61 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 347680 \\ -999.05 \\ 191.4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 18276467$$

Výpočet determinantov:

$$\det_{U_A} = \begin{vmatrix} 347680 & -1886 & 0 \\ -999.05 & -82 & 53 \\ 191.4 & 33 & -61 \end{vmatrix} = 1257201753.4$$

$$\det_{U_B} = \begin{vmatrix} 6497 & 347680 & 0 \\ 29 & -999.05 & 53 \\ 0 & 191.4 & -61 \end{vmatrix} = 961653099.3$$

$$\det_{U_C} = \begin{vmatrix} 6497 & -1886 & 347680 \\ 29 & -82 & -999.05 \\ 0 & 33 & 191.4 \end{vmatrix} = 455426395.05$$

$$U_A = \frac{\det_{U_A}}{\det(A)} = \frac{1257201753.4}{18276467} = 68.788 \text{ V}$$

$$U_B = \frac{\det_{U_B}}{\det(A)} = \frac{961653099.3}{18276467} = 52.617 \text{ V}$$

$$U_C = \frac{\det_{U_C}}{\det(A)} = \frac{455426395.05}{18276467} = 24.9187 \text{ V}$$

Z rovníc dostávame  $U_A$ ,  $U_B$  a  $U_C$ . Z  $U_A$  dopočítame  $U_{R_2}$  a  $I_{R_2}$ .

$$U_{R_2} = U_A \approx 68.788 \text{ V}$$

$$I_{R_2} = \frac{U_A}{R_2} \approx 1.6778 \text{ A}$$

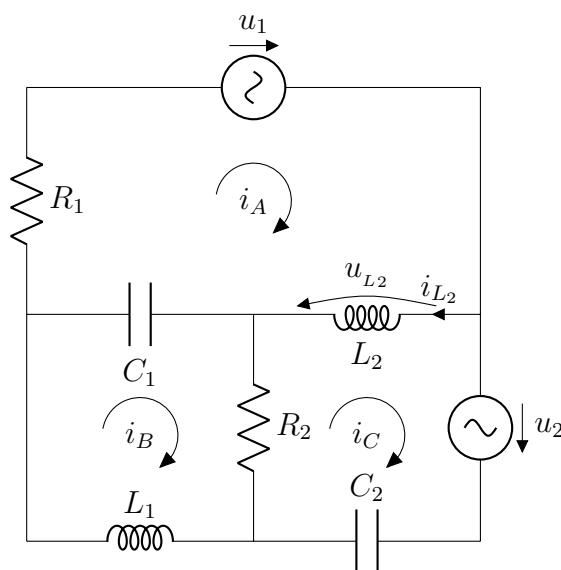
## 4 Príklad č. 4

### 4.1 Zadanie

Pre napájacie napätie platí  $u_1 = U_1 \sin(2\pi ft)$ ,  $u_2 = U_2 \sin(2\pi ft)$ . Vo vzťahu pre napätie  $u_{L_2} = U_2 \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$  určte  $|U_{L_2}|$  a  $\varphi_{L_2}$ . Použite metódu slučkových prúdov. Pomocné smery šípiek napájacích zdrojov platia pre špeciálny čas ( $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ).

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$L_1$ [mH]	$L_2$ [mH]	$C_1$ [ $\mu$ F]	$C_2$ [ $\mu$ F]	$f$ [Hz]
A	35	55	12	14	120	100	200	105	70

### 4.2 Riešenie



Obr. 14: Pôvodný obvod

Zostavíme rovnice podľa jednotlivých slučiek:

$$i_A : U_1 + Z_{L_2}(I_A - I_C) + Z_{C_1}(I_A - I_B) + R_1 I_A = 0$$

$$i_B : R_2(I_B - I_C) + Z_{L_1} I_B + Z_{C_1}(I_B - I_A) = 0$$

$$i_C : U_2 + Z_{C_2} I_C + R_2(I_C - I_B) + Z_{L_2}(I_C - I_A) = 0$$

Zostavíme maticu podľa rovníc:

$$\begin{pmatrix} Z_{L_2} + Z_{C_1} + R_1 & -Z_{C_1} & -Z_{L_2} \\ -Z_{C_1} & R_2 + Z_{L_1} + Z_{C_1} & -R_2 \\ -Z_{L_2} & -R_2 & Z_{C_2} + R_2 + Z_{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ 0 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Po dosadení číselných hodnôt:

$$\begin{pmatrix} 2\pi f j \times 0.1 - \frac{j}{2\pi f \times 0.0002} + 12 & \frac{j}{2\pi f \times 0.0002} & -2\pi f j \times 0.1 \\ \frac{j}{2\pi f} \times 0.0002 & 14 + 2\pi f j \times 0.12 - \frac{j}{2\pi f \times 0.0002} & -14 \\ -2\pi f j \times 0.1 & -14 & -\frac{j}{2\pi f \times 0.000105} + 14 + 2\pi f j \times 0.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 0 \\ -55 \end{pmatrix}$$

Ďalej upravujeme:

$$\begin{pmatrix} 12 + 32.6141j & 11.3682j & -43.9823j \\ 11.3682j & 14 + 41.4105j & -14 \\ -43.9823j & -14 & 14 + 22.3286j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 0 \\ -55 \end{pmatrix}$$

Pomocou Cramerovho pravidla zistíme jednotlivé prúdy:

$$I_A = -1.4823 - 1.4954j$$

$$I_B = -0.3114 + 0.842j$$

$$I_C = -1.5876 - 1.2826j$$

$$u_{L_2} = Z_{L_2}(I_A - I_C) = 9.3593 + 4.6336j$$

$$|u_{L_2}| = \sqrt{9.3593^2 + 4.6336^2} = 10.4435 \text{ V}$$

Zostáva nám dopočítať  $\varphi_{C_2}$  z imaginárnej a reálnej zložky  $u_{L_2}$ :

$$\tan \varphi = \frac{4.6336}{9.3593}$$

$$\tan \varphi \approx 0.4597 \text{ rad} \approx 26.339^\circ$$

Výsledný uhol zodpovedá zhruba  $26.339^\circ$ , takže vieme s istotou povedať, že sa nachádza v 1. kvadrante a teda sa jedná o konečný výsledok.

### 4.3 Výpočet v Pythone (pomocou numpy)

```
1 # imports
2 import numpy as np
3 from math import *
4 j = np.complex(0, 1)
5
6 # known values
7 U1, U2 = 35, 55
8 R1, R2 = 12, 14
9 L1, L2 = 120*10**(-3), 100*10**(-3)
10 C1, C2 = 200*10**(-6), 105*10**(-6)
11 f = 70
12 ZL1, ZL2 = j*2*pi*f*L1, j*2*pi*f*L2
13 ZC1, ZC2 = -(j/(2*pi*f*C1)), -(j/(2*pi*f*C2))
14
15 # creation of numpy array for complex number matrix solver
16 A, B = np.array([[ZL2+ZC1+R1, -ZC1, -ZL2], [-ZC1, R2+ZL1+ZC1, -R2], [-ZL2, -
    R2, ZC2+R2+ZL2]]), np.array([-U1, 0, -U2])
17
18 # solver, definition of each resulting current
19 IA, IB, IC = np.linalg.solve(A, B)
20
21 # calculation of voltage on L2
22 UL2 = ZL2 * (IA-IC)
23
24 # amplitude of UL2
25 amp = sqrt(UL2.real**2 + UL2.imag**2)
26
27 # calculation of angle
28 angle = atan(imag/real)
```

$$U_{L_2} \approx 10.443\,454\,432\,618\,116\text{ V}$$

$$\varphi_{C_2} \approx 0.459\,703\,799\,790\,636\,25\text{ rad}$$

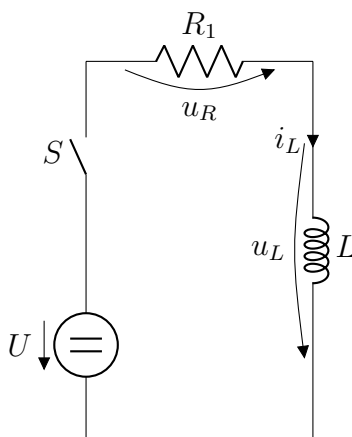
Pre overenie môžeme skontrolovať amplitúdu napätia na cievke  $Z_{L_2}$  v obvode namodelovanom vo [Falstad-e](#). Zistíme, že sedí s našimi výpočtami.

## 5 Príklad č. 4

### 5.1 Zadanie

V obvode na obrázku nižšie v čase  $t = 0$  s zopne spínač S. Zostavte diferenciálnu rovnicu popisujúcu správanie obvodu na obrázku, ďalej ju upravte dosadením hodnôt parametrov. Vypočítajte analytické riešenie  $i_L = f(t)$ . Spravte kontrolu výpočtu dosadením do zostavenej diferenciálnej rovnice.

sk.	$U$ [V]	$L$ [H]	$R$ [ $\Omega$ ]	$i_L(0)$ [A]
B	30	10	20	15



Obr. 15: Pôvodný obvod

### 5.2 Riešenie

Po zopnutí spínača bude podľa II.KZ. platiť:

$$-U + u_R + u_L = 0$$

Vieme že:

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$u_R = Ri$$

Vyjadrenie  $u_R$  a  $u_L$  z Ohmovho zákona:

$$-U + Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U$$

Vytvoríme charakteristickú rovnicu:

$$L\lambda + R = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

Očakávame riešenie v tvare:

$$i(t) = Ke^{\lambda t} + i_L$$

Výpočet:

$$i_L = \frac{U}{R} \quad i_L(0) = 15 \text{ A} \quad t = 0$$

$$i_L(t) = K e^{\lambda * 0} + i_L$$

$$i_L(0) = K + i_L$$

$$15 = K + i_L$$

$$K = 15 - i_L = 15 - \frac{U}{R}$$

$$i_L(t) = \left(15 - \frac{U}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}$$

$$i_L(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) + 15 e^{-\frac{R}{L}t}$$

V našom prípade teda dostávame rovnicu:

$$i_L(t) = \frac{30}{20} (1 - e^{-\frac{20}{10}t}) + 15 e^{-\frac{20}{10}t}$$

Tú vieme ešte zjednodušiť:

$$i_L(t) = e^{-2t} \times \frac{27}{2} + \frac{3}{2}$$

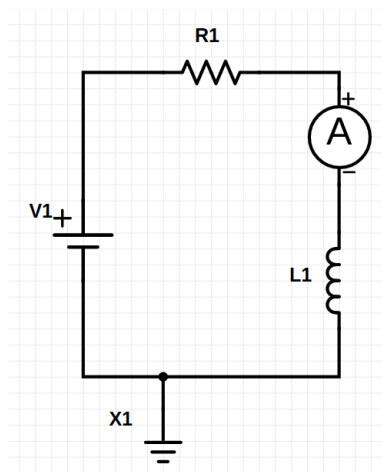
### 5.3 Overenie

Skontrolovanie výslednej rovnice dosadením hodnôt:

$$i_L(0) = \frac{30}{20} (1 - e^{-\frac{20}{10} * 0}) + 15 e^{-\frac{20}{10} * 0}$$

$$15 = 15$$

Analytická rovnica bola správna. Pre ďalšie overenie som namodeloval obvod v Partsim a vybral arbitrárny čas  $t = 1.5 \text{ s}$ :



Obr. 16: Zapojenie obvodu v Partsim

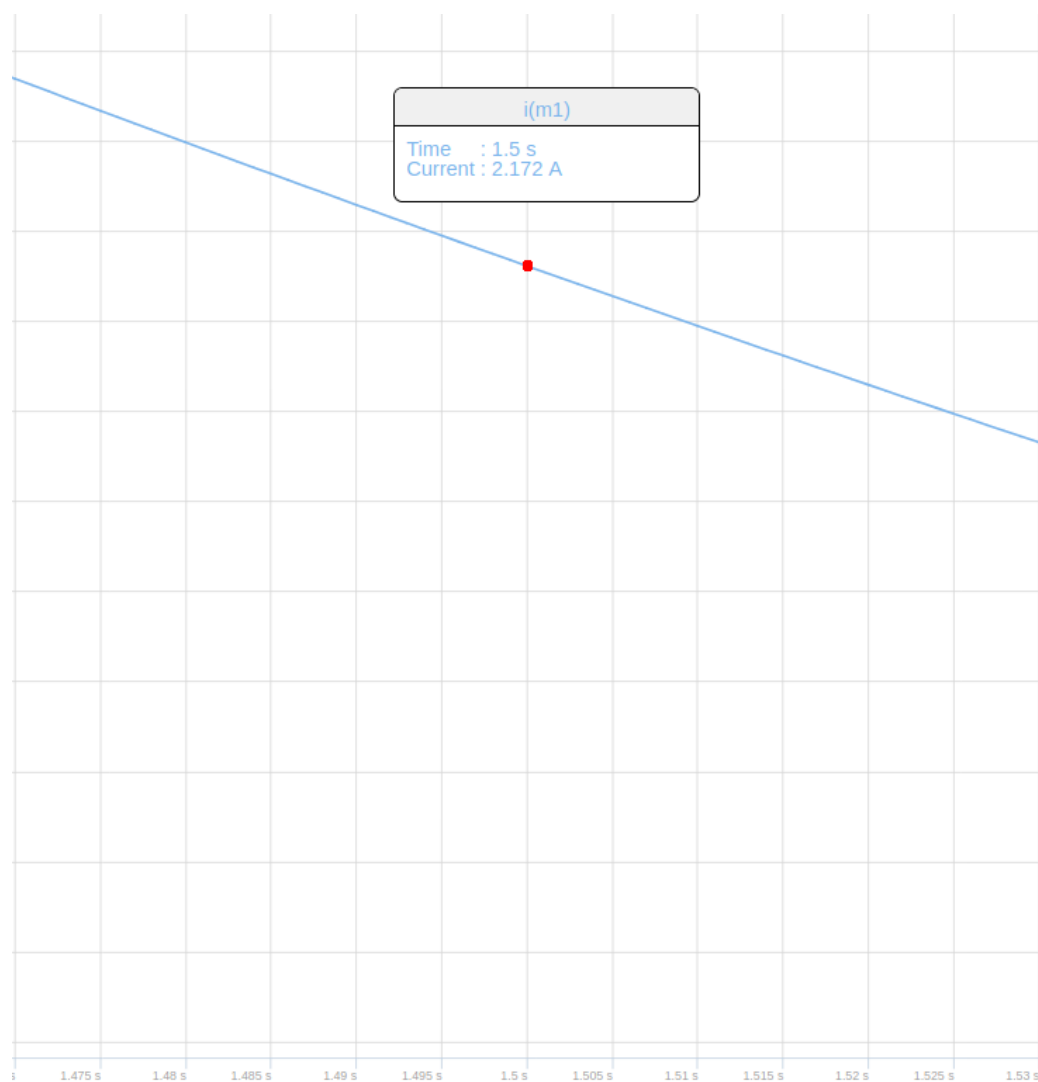
Výpočet rovnicou ( $t = 1.5 \text{ s}$ ):

$$i_L(1.5) = \frac{30}{20} (1 - e^{-\frac{20}{10} * 1.5}) + 15 e^{-\frac{20}{10} * 1.5}$$

$$i_L(1.5) \approx 2.172 \, 125 \, 423 \text{ A}$$



Výsledok v Partsim:



Obr. 17:  $i_L(1.5\text{ s})$

## 6 Výsledky

Úloha	Skupina	Výsledok
1	A	$U_{R_6} \approx 68.929 \text{ V}$ $I_{R_6} \approx 0.0919 \text{ A}$
2	B	$U_{R_3} \approx 42.9586 \text{ V}$ $I_{R_3} \approx 70.424 \text{ mA}$
3	G	$U_{R_2} \approx 68.788 \text{ V}$ $I_{R_2} \approx 1.6778 \text{ A}$
4	A	$ U_{L_2}  \approx 10.443 \text{ V}$ $\varphi_{L_2} \approx 0.459 \text{ rad}$
5	B	$i_L(t) = e^{-2t} \times \frac{27}{2} + \frac{3}{2}$