

Das klassische N-Körperproblem

Computational Physics Praktikum WS24/25

Sascha Eckstein, Jannis Hollmann
Version 1 abgegeben am 30. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Auswertung	3
2.1	Das Zwei-Körper-Problem	3
2.1.1	für Exzentrizität 0, Kreisbahn	3
2.1.2	für Exzentrizität 1, Parabel	6
2.1.3	für Exzentrizität 8, Hyperbel	9
2.2	Für 100 Körper	12
3	Fazit	13
4	Quellen	13

1 Einleitung

Das klassische N-Körper-Problem ist ein fundamentales Problem der Himmelsmechanik und beschreibt die Bewegung von N Massenpunkten unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen gravitativen Anziehung. Es findet Anwendung in der Astrophysik zur Modellierung von Planetensystemen, Sternhaufen und Galaxien. Da eine analytische Lösung für $N > 2$ in der Regel nicht existiert, sind numerische Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen essenziell.

In diesem Protokoll werden verschiedene numerische Integrationsmethoden zur Lösung des N-Körper-Problems untersucht. Ein besonderer Fokus liegt auf der Genauigkeit und Stabilität, durch Untersuchung der Energieerhaltung, Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors und der Erhaltung der Halbachse, der Zeitintegratoren. Darunter das Euler-Verfahren, das Leap-Frog-Verfahren, der Velocity-Verlet-Algorithmus. Durch Tests am Zwei-Körper-Problem und Simulationen mit größeren Teilchenzahlen wird die Leistungsfähigkeit der Methoden evaluiert.

Das Ziel dieser Untersuchung ist es, die Stärken und Schwächen der verschiedenen Algorithmen zu analysieren und eine geeignete Methode für realistische Simulationen von Vielteilchensystemen auszuwählen.

2 Auswertung

2.1 Das Zwei-Körper-Problem

Um die Eigenschaften der verschiedenen Zeitintegratoren zu analysieren, wird zunächst eine Simulation des Zwei-Körper-Problems durchgeführt. Dabei werden mehrere Szenarien mit unterschiedlichen Exzentrizitäten der Bahn untersucht, um den Einfluss der Bahnform auf die Stabilität und Genauigkeit der Integrationsmethoden zu bewerten.

Während der Simulation werden in jedem Zeitschritt mehrere Erhaltungsgrößen berechnet, darunter die Gesamtenergie des Systems, der spezifische Drehimpuls, der Runge-Lenz-Vektor sowie die große Halbachse der Bahn. Diese Größen dienen als Indikatoren für die Qualität der numerischen Integration, da physikalisch korrekte Integratoren diese Größen mit hoher Genauigkeit erhalten sollten.

2.1.1 für Exzentrizität 0, Kreisbahn

Die Anfangsparameter der Kreisbahn sind in Tabelle 1 dargestellt.

Abbildung 1 zeigt die Energieerhaltung für verschiedene Zeitschrittparameter der untersuchten Integrationsmethoden, wobei jede Simulation über 200 Iterationen durchgeführt wurde. Es ist erkennbar, dass der Euler-Integrator unabhängig vom Zeitschrittparameter die höchste Stabilität aufweist, gefolgt vom Heun-Integrator. Das Euler-Cromer- und das Velocity-Verlet-Verfahren zeigen hingegen periodische Schwankungen in der Stabilität. Der Runge-Kutta-4-Integrator sowie das Hermite-Verfahren neigen bei kleineren Zeitschrittparametern zu zunehmender Instabilität, ein Effekt, der jedoch bei allen Integratoren in abgeschwächter Form beobachtet werden kann. Der iterierte Hermite-Integrator liefert in diesem Szenario kein zuverlässiges Ergebnis.

Die Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors ist in Abbildung 2 dargestellt. Die Ergebnisse zeigen ein ähnliches Verhalten wie bei der Energieerhaltung, wobei hier der Euler-Cromer-Integrator eine höhere Stabilität als zuvor aufweist.

Die Erhaltung der großen Halbachse ist in Abbildung 3 dargestellt. In diesem Fall entsprechen die Ergebnisse weitgehend denen des Runge-Lenz-Vektors, allerdings liefert der iterierte Hermite-Integrator hier ein konsistentes Ergebnis.

Körper	x	y	z	vx	vy	vz	m
1	1	0	0	0	0	0	0.5
2	0	0	0	0	-1	0	0.5

Tabelle 1: Anfangsparameter für $e = 0$

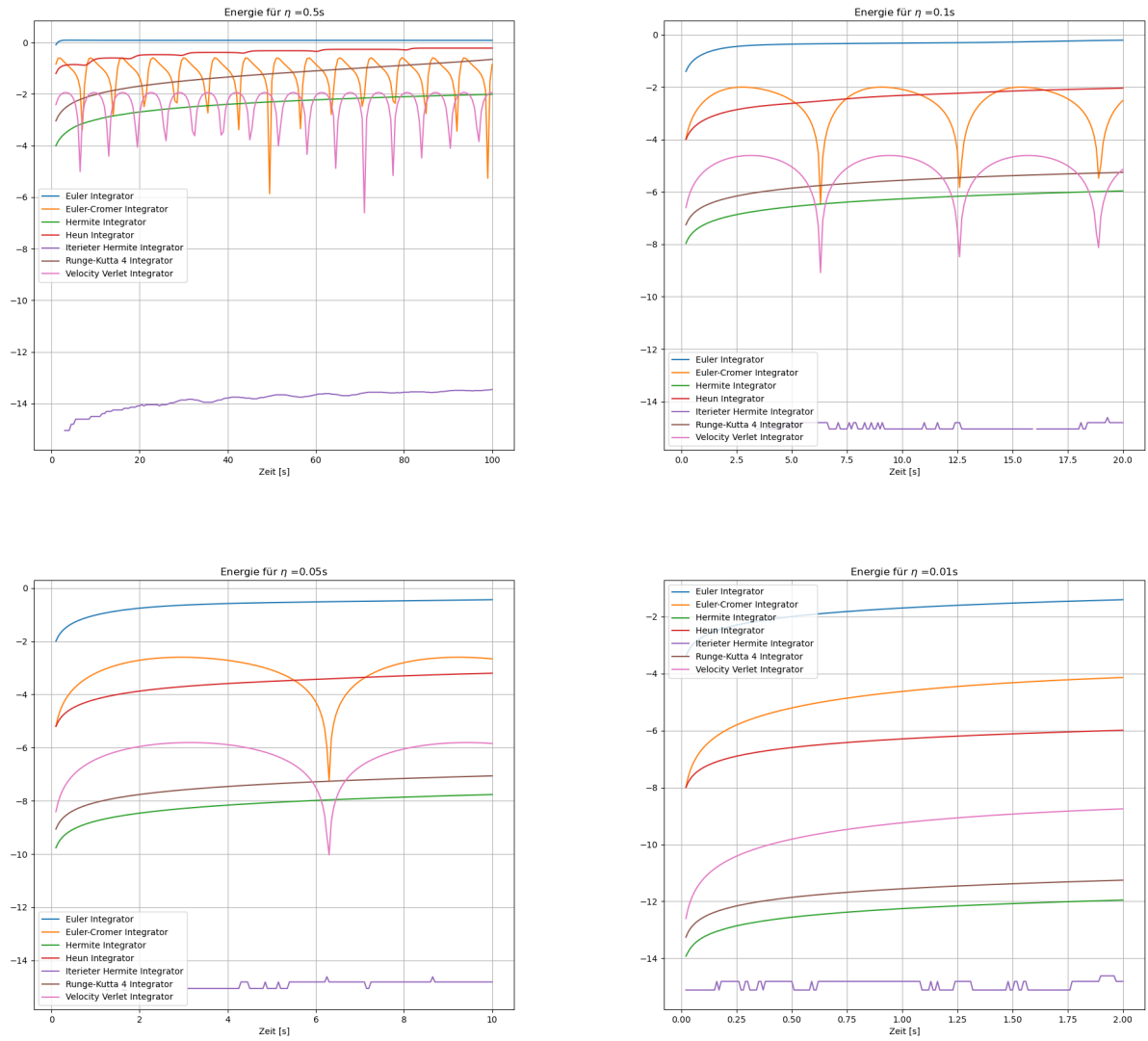


Abbildung 1: Energieerhaltung für verschiedene Zeitschrittparameter

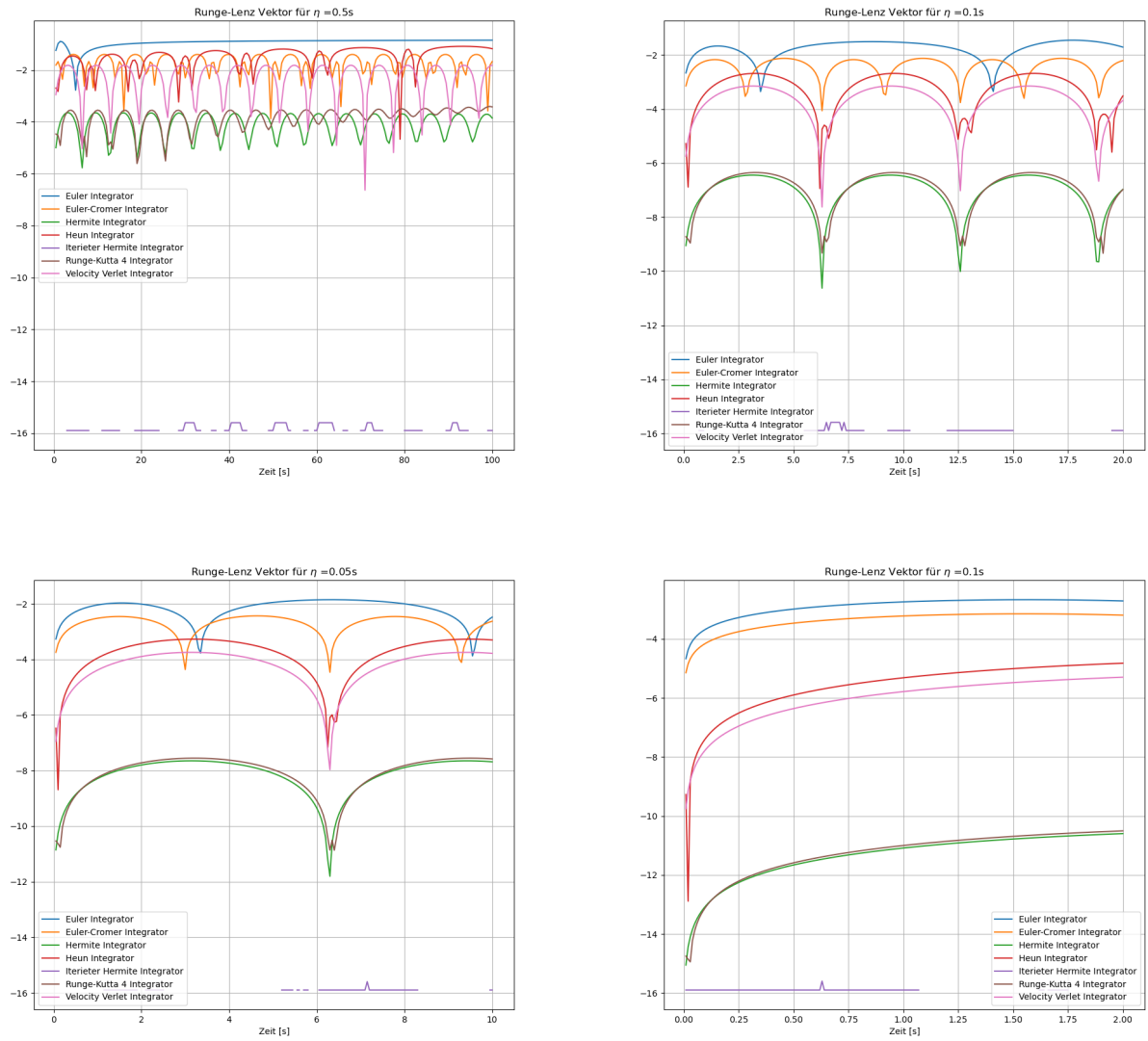


Abbildung 2: Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors für verschiedene Zeitschrittparameter

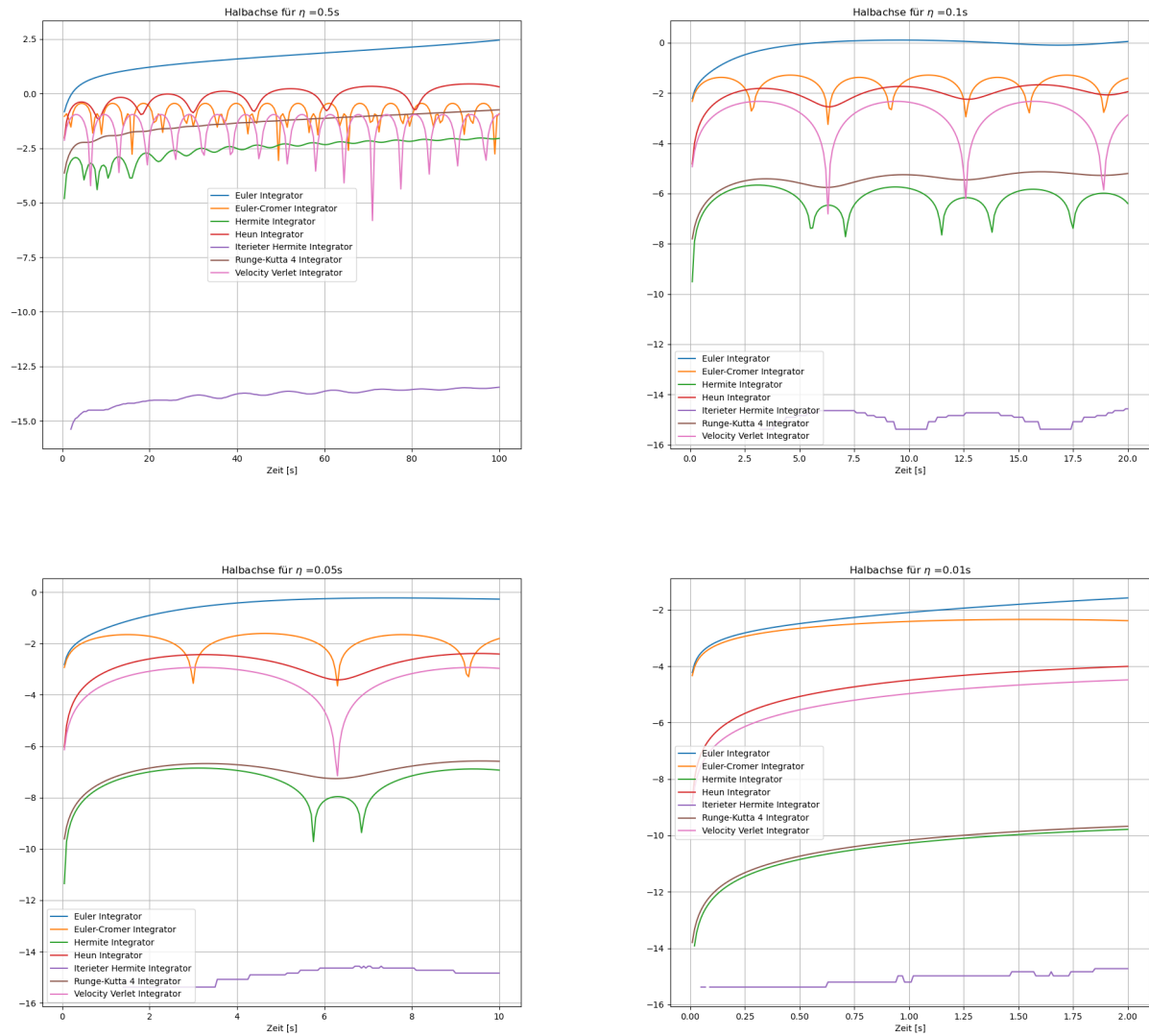


Abbildung 3: Erhaltung der Halbachse für verschiedene Zeitschrittparameter

2.1.2 für Exzentrizität 1, Parabel

Die Startparameter der Körper für eine Parabelbahn mit Exzentrizität 1 sind in Tabelle 2 dargestellt. In Abbildung 4 ist die Energieerhaltung der Integratoren für verschiedene Integratoren und Zeitschrittparameter dargestellt. Wie zuvor scheint der Euler-Integrator am stabilsten zu laufen, während der Runge-Kutta-4-Integrator die größten Abweichungen aufweist. Jedoch zeigen die Euler-Integratoren starke Einbrüche bei einem Zeitschrittparameter von $\eta = 0.1s$ und $\eta = 0.05s$.

Für den Runge-Lenz-Vektor und die Halbachse, dargestellt in Abbildung 5 und 6, weisen alle Integratoren, abgesehen von gewissen anfänglichen Instabilitäten, ein vergleichbares Verhalten auf.

Körper	x	y	z	vx	vy	vz	m
1	1	0	0	0	$\sqrt{2}$	0	0.5
2	-1	0	0	0	$-\sqrt{2}$	0	0.5

Tabelle 2: Anfangsparameter für $e = 1$

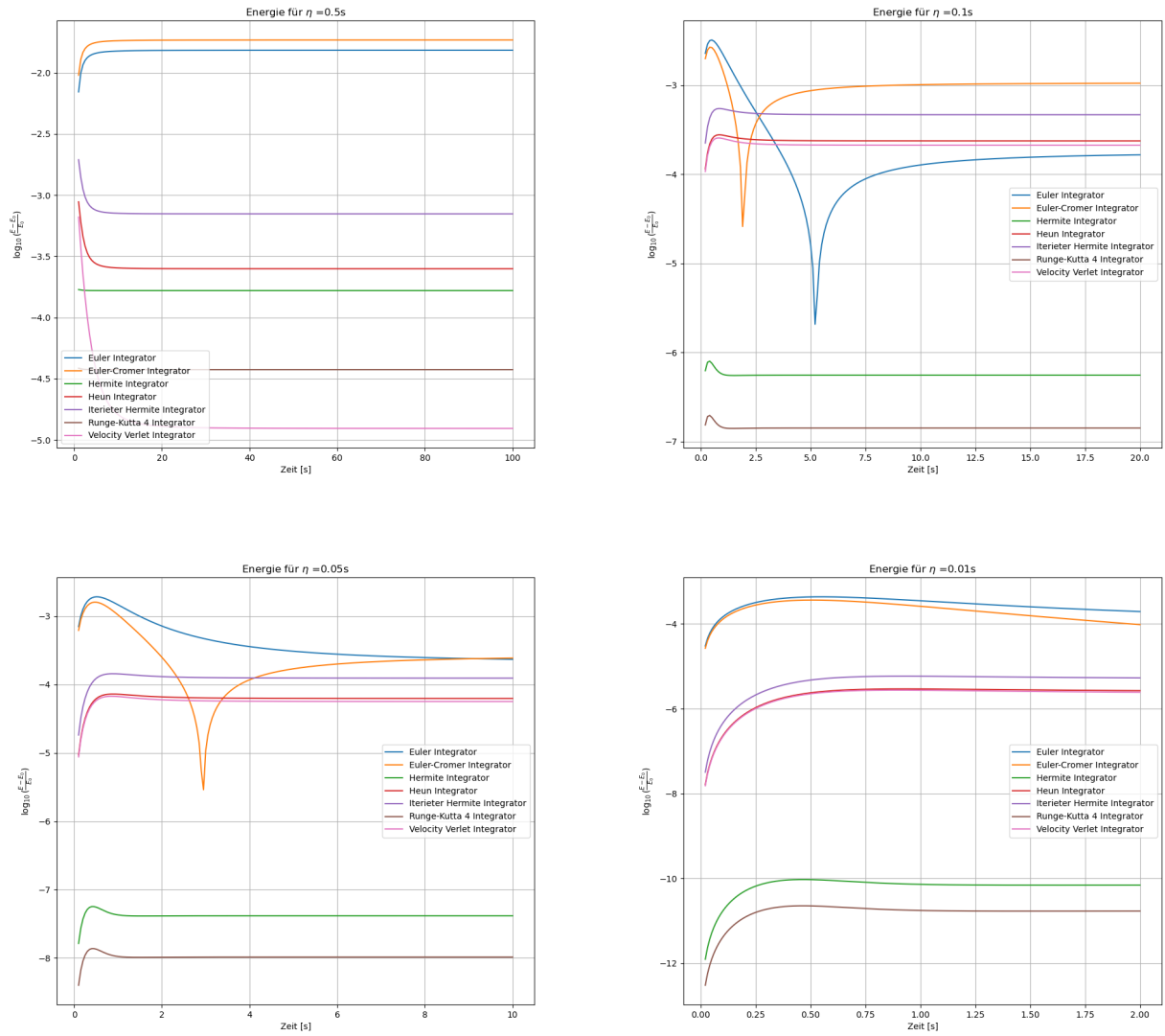


Abbildung 4: Energieerhaltung für verschiedene Zeitschrittparameter

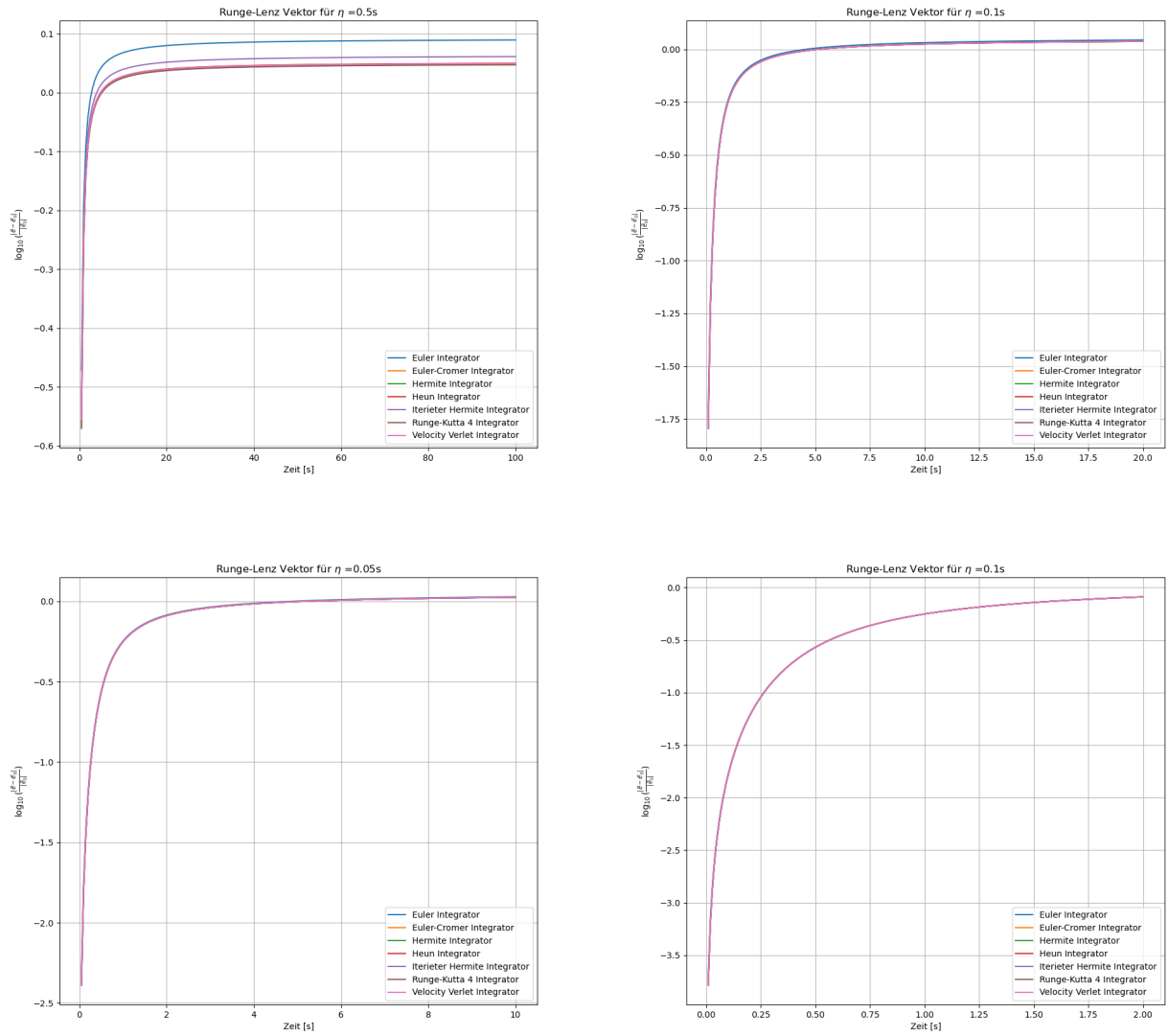


Abbildung 5: Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors für verschiedene Zeitschrittparameter

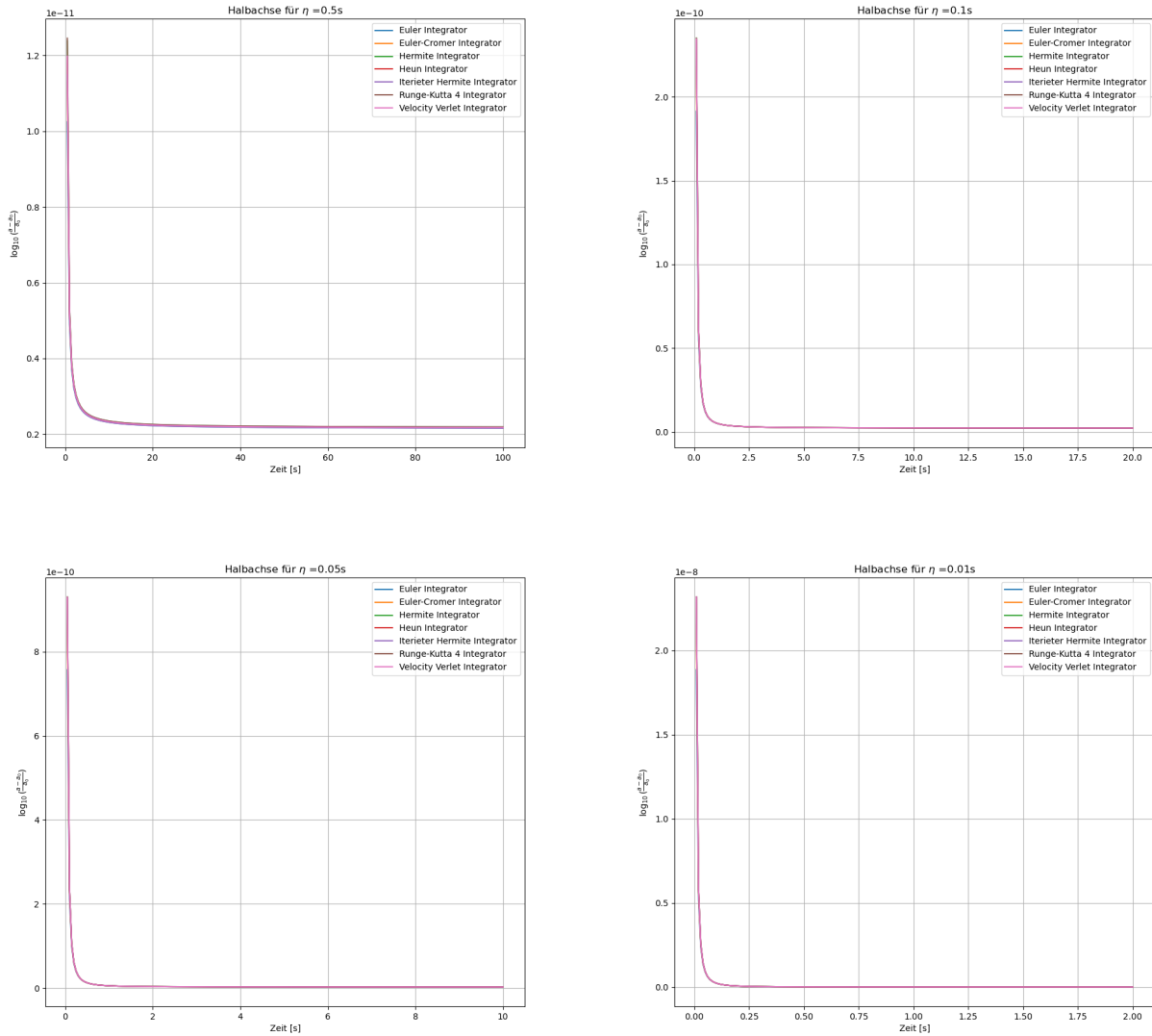


Abbildung 6: Erhaltung der Halbachse für verschiedene Zeitschrittparameter

2.1.3 für Exzentrizität 8, Hyperbel

Die Startparameter der Körper für eine Parabelbahn mit Exzentrizität 1 sind in Tabelle 3 dargestellt. Auch in Abbildung 7 zeigt sich für die Energieerhaltung ein identisches Verhalten wie in den vorherigen Fällen. Jedoch treten in der Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors (Abbildung 8) sowie der Halbachse in Abbildung 9 deutlich stärkere Abweichungen auf, die auf größere Instabilitäten der Integratoren hinweisen.

Körper	x	y	z	vx	vy	vz	m
1	0.5	0	0	0	1.5	0	0.5
2	-0.5	0	0	0	-1.5	0	0.5

Tabelle 3: Anfangsparameter für $e = 8$

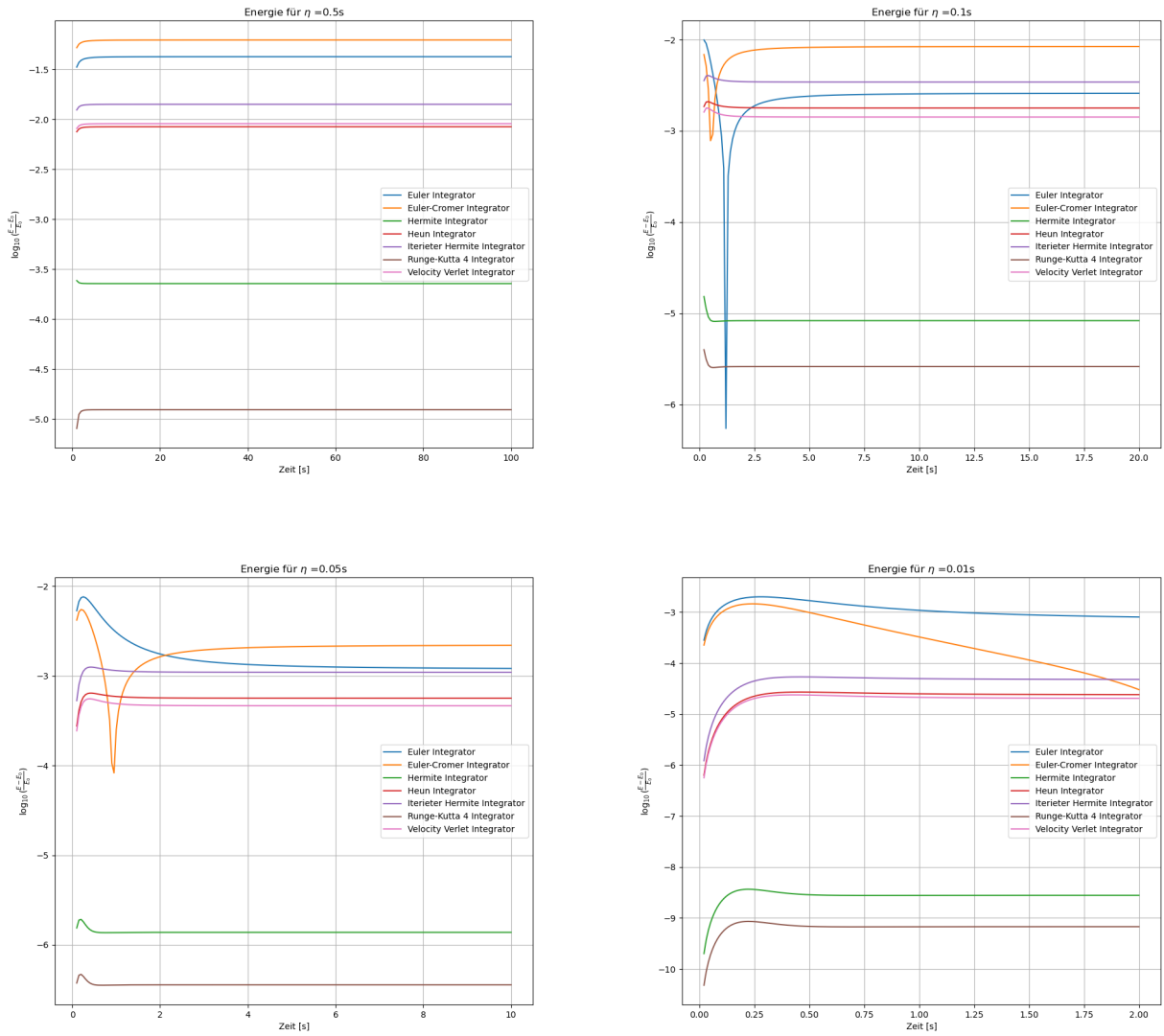


Abbildung 7: Energieerhaltung für verschiedene Zeitschrittparameter

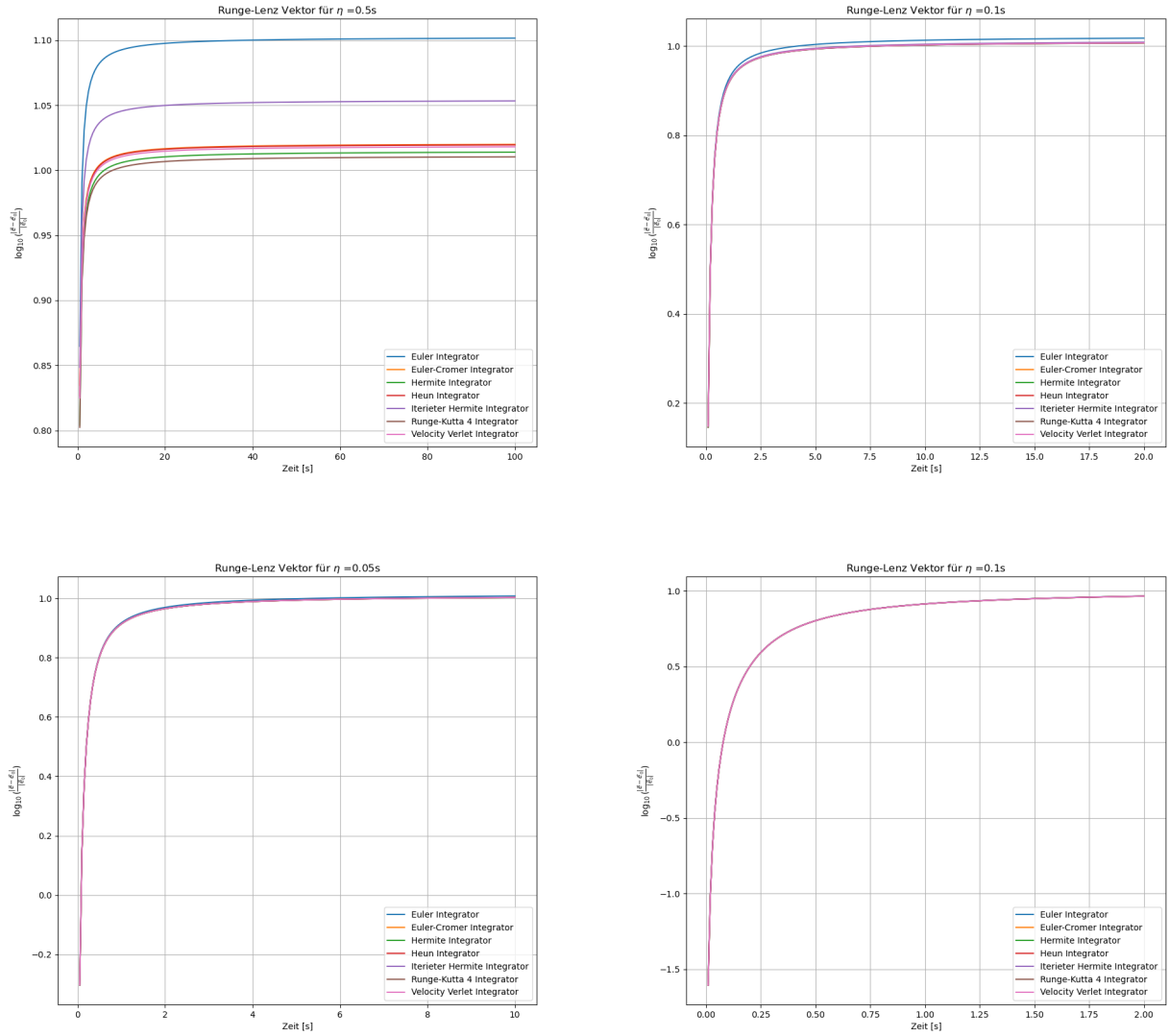


Abbildung 8: Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors für verschiedene Zeitschrittparameter

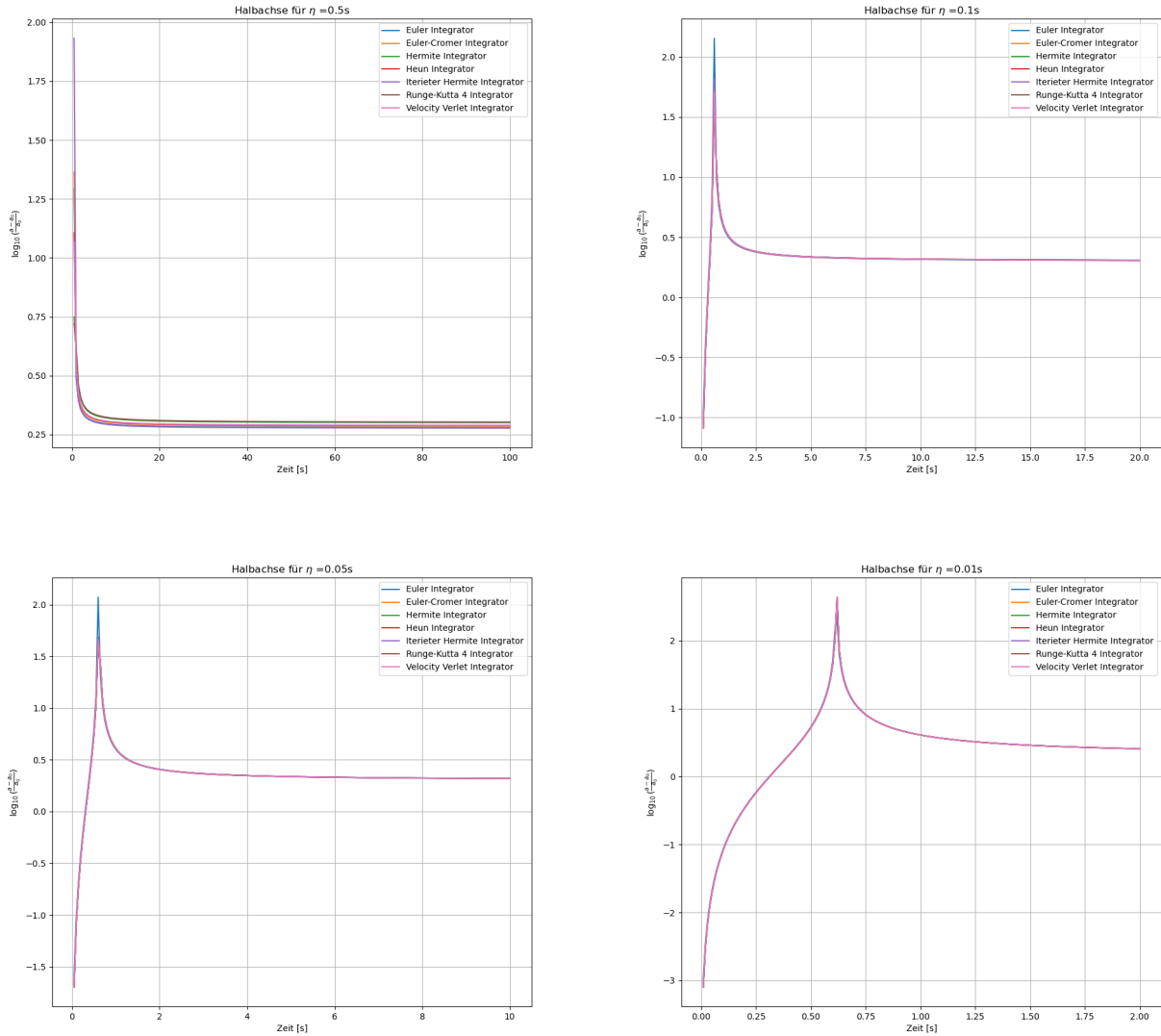


Abbildung 9: Erhaltung der Halbachse für verschiedene Zeitschrittparameter

2.2 Für 100 Körper

Da die Rechenzeit für eine Simulation mit 1000 Körpern exponentiell ansteigt, werden hier lediglich die Ergebnisse für 100 Körper diskutiert. Die Anfangsparameter sind in der Datei 100body.txt aufgeführt.

In Abbildung 10 ist die Energieerhaltung für verschiedene Zeitschrittparameter dargestellt. Auffällig ist, dass die größten Unterschiede zwischen den Integratoren hauptsächlich zu Beginn der Simulation auftreten, während sich die Stabilität mit zunehmender Iterationszahl verbessert.

Allgemein weisen die Runge-Kutta-4- und Heun-Integratoren die geringsten Energieabweichungen auf, zeigen jedoch mit kleineren Zeitschrittparametern eine zunehmende Instabilität. Die beiden auf der Hermite-Methode basierenden Integratoren schneiden im Vergleich am schlechtesten ab und liefern die unzuverlässigsten Ergebnisse.

Die numerische Laufzeit skaliert für die meisten Integratoren, mit Ausnahme des iterierten Hermite-Integrators, mit $O(n^2)$, da maximal zwei ineinander verschachtelte Schleifen für die Berechnungen verwendet wurden. Der iterierte Hermite-Integrator hingegen erfordert drei verschachtelte Schleifen, wodurch seine Laufzeit auf $O(n^3)$ ansteigt.

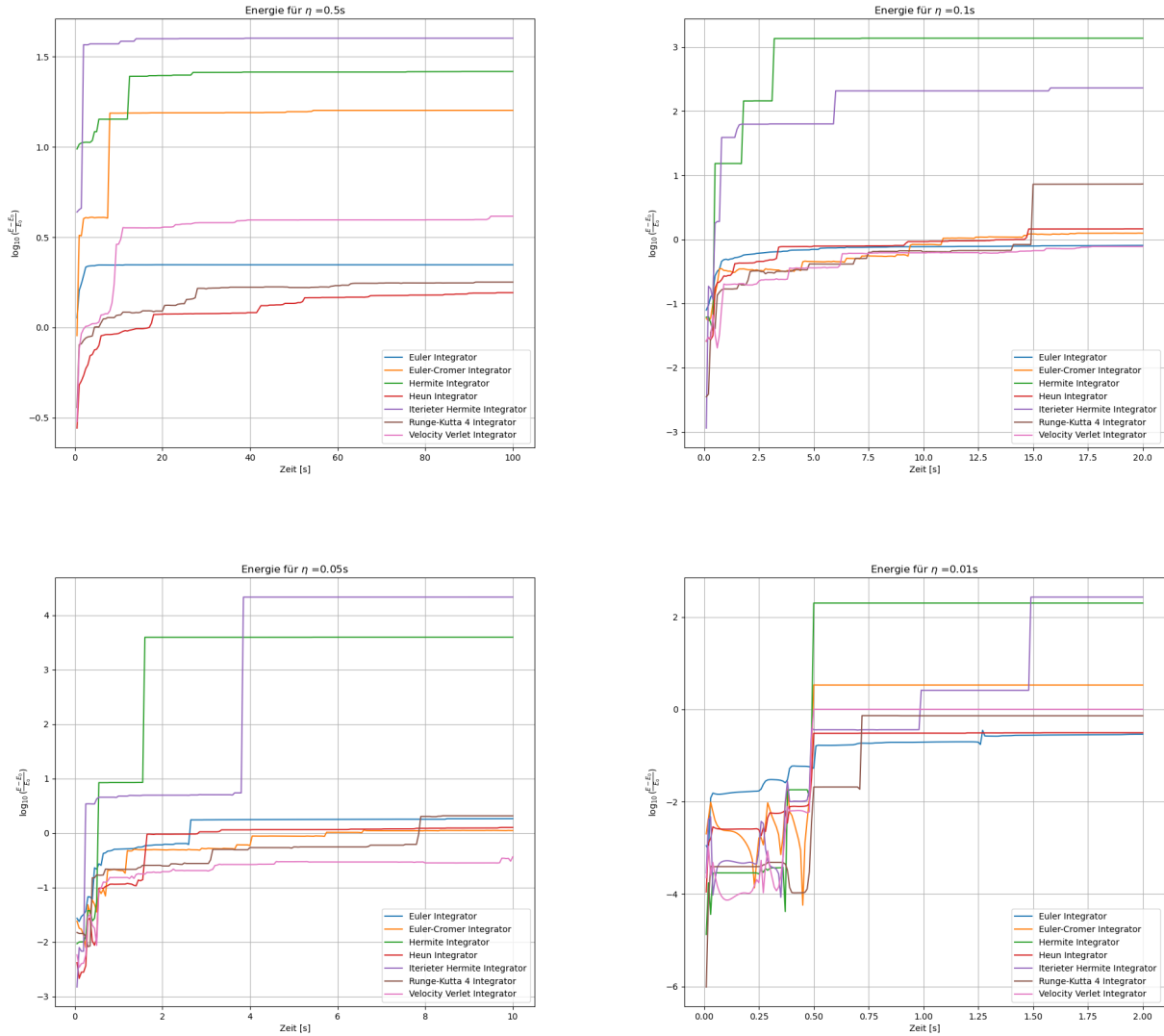


Abbildung 10: Energieerhaltung für verschiedene Zeitschrittparameter

3 Fazit

In diesem Versuch wurden verschiedene numerische Integrationsverfahren hinsichtlich ihrer Stabilität in Mehrkörpersimulationen untersucht. Die Ergebnisse zeigen, dass die Wahl des Integrators sowie des Zeitschrittparameters einen erheblichen Einfluss auf die Genauigkeit und numerische Stabilität der Simulation hat.

Zusätzlich konnte gezeigt werden, dass die Rechenzeit der meisten Methoden mit $O(n^2)$ skaliert, während der iterierte Hermite-Integrator aufgrund seiner dreifach verschachtelten Schleifen eine höhere Laufzeitkomplexität von $O(n^3)$ aufweist. Dies macht ihn für größere Systeme ineffizient.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es keinen universell besten Integrator gibt. Die Wahl des geeigneten Verfahrens hängt stark vom spezifischen Problem, der gewünschten Genauigkeit und den verfügbaren Rechenressourcen ab.

4 Quellen

1. [NBody Anleitung](#)