

# **Numerische Hydrodynamik**

## Computational Physics Praktikum WS24/25

Sascha Eckstein, Jannis Hollmann  
Version 1 abgegeben am 30. März 2025

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Gleichungen</b>	<b>3</b>
2.1	Lineare Advektion . . . . .	3
2.2	Euler Gleichungen . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>3</b>
3.1	Lineare Advektion . . . . .	3
3.2	Stoßwelle . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Fazit</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Quellen</b>	<b>6</b>

# 1 Einleitung

Die Untersuchung hydrodynamischer Systeme ist ein fundamentales Problem in der Physik und Astrophysik. Aufgrund der nichtlinearen Natur der Euler-Gleichungen sind analytische Lösungen in vielen realistischen Szenarien nicht verfügbar, sodass numerische Methoden eine essenzielle Rolle spielen. In diesem Versuch werden numerische Verfahren zur Lösung hydrodynamischer Gleichungen angewendet und analysiert.

Besonderes Augenmerk liegt auf der Implementierung und Evaluierung verschiedener numerischer Schemata zur Lösung der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Die Simulationsergebnisse werden hinsichtlich ihrer Stabilität, Genauigkeit und physikalischen Konsistenz untersucht.

Das Ziel dieses Versuchs ist es, die Leistungsfähigkeit der numerischen Methoden zu evaluieren, ihre Vor- und Nachteile herauszuarbeiten und Einblick in die praktische Umsetzung von hydrodynamischen Simulationen zu gewinnen. Zunächst wird die lineare Transportgleichung untersucht, daraufhin das 1 dimensionale Stoßrohr.

## 2 Gleichungen

### 2.1 Lineare Advektion

Für einfache Test-Systeme in der numerischen Hydrodynamik wird die sogenannte lineare Transportgleichung verwendet,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Dabei ist  $a$  eine beliebige konstante und  $\psi(x, t)$  eine Transportgröße, sie wird häufig für die Dichteadvektion eingesetzt. Die Lösung der Gleichung mit der Anfangsbedingung,

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad (2)$$

ist gegeben durch,

$$\psi(x, t) = \psi_0(x - at). \quad (3)$$

$\psi(x, t)$  ist also eine Welle, die sich mit Geschwindigkeit  $a$  nach rechts ausbreitet.

### 2.2 Euler Gleichungen

Die Eulergleichungen beschreiben die zeitliche und räumliche Entwicklung eines eindimensionalen idealen Gases,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \epsilon u)}{\partial x} = -p \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6)$$

Hierbei ist  $\rho$  die Dichte,  $u$  die Geschwindigkeit,  $p$  der Druck und  $\epsilon$  die innere spezifische Energie. Die Terme links der Gleichung werden Advektionsterme genannt und rechts ist die durch den Druck verursachte Kraft und Arbeit. Die Zustandsgleichung für ein ideales Gas lautet,

$$p = (\gamma - 1) \cdot \rho \epsilon. \quad (7)$$

Mit  $\gamma$ , dem konstanten Adiabatenindex.

## 3 Auswertung

### 3.1 Lineare Advektion

Zunächst muss sichergestellt werden, dass Gleichung 3 auch wirklich Gleichung 1 löst. Dazu setzen wir 3 in 1 ein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0(x - at)}{\partial t} + a \frac{\partial \psi_0(x - at)}{\partial x} &= \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial(x - at)} \cdot \frac{\partial(x - at)}{\partial t} + a \frac{\partial \psi_0}{\partial(x - at)} \cdot \frac{\partial(x - at)}{\partial x} &= \\ -a \frac{\partial \psi_0}{\partial(x - at)} + a \frac{\partial \psi_0}{\partial(x - at)} &= 0. \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass Gleichung 3 tatsächlich eine Lösung der linearen Transportgleichung ist. Um die Advektionsgleichung für einen Rechteckimpuls,

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} 1.0, & \text{für } |x| \leq \frac{1}{3} \\ 0.0, & \text{für } \frac{1}{3} < |x| \leq 1, \end{cases}$$

Numerisch zu bestimmen wird das erweiterte Upwind verfahren verwendet. Im Vergleich zum regulären Upwind verfahren, verhindert das erweiterte Upwind verfahren Oszillationen und somit auch eine unphysikalische Entleerung der einzelnen Zellen, indem für  $\Delta\psi$  das geometrische Mittel genommen wird. Für die Simulation ist  $a = 1$ , der Rechenbereich ist wie folgt definiert  $[-1, 1]$  und es werden periodische Randbedingungen angewendet  $\psi(-1, t) = \psi(1, t)$ . Wichtig für die Stabilität der Simulation ist die Counterzahl  $\sigma$ , mit der die Zeitschrittgröße  $dt$  berechnet wird.

$$\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (8)$$

In Abbildung 1 ist die numerische Lösung für 40 Gitterpunkte für unterschiedliche Counterzahlen dargestellt. Dabei wird ersichtlich, dass bei Erhöhung der Counterzahl über 0.8 die Simulation sehr instabil wird. Bei Erhöhung der Gitterzahl  $N$  auf 400, scheint die Simulation sehr stabil zu laufen und gute Ergebnisse zu liefern. Diese können in Abbildung 2 eingesehen werden.

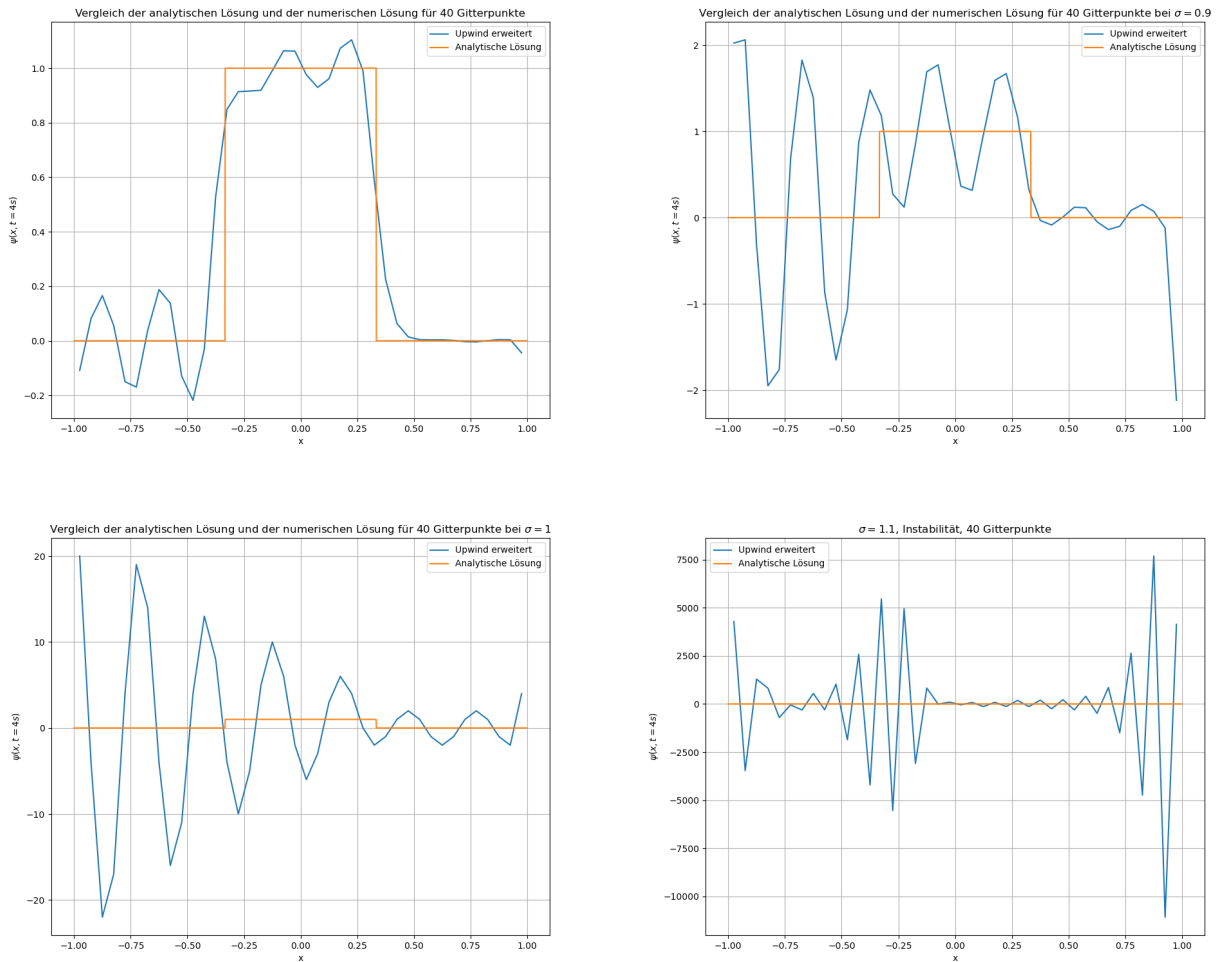


Abbildung 1: Erweitertes Upwind verfahren für 40 Gitterpunkte nach 4s

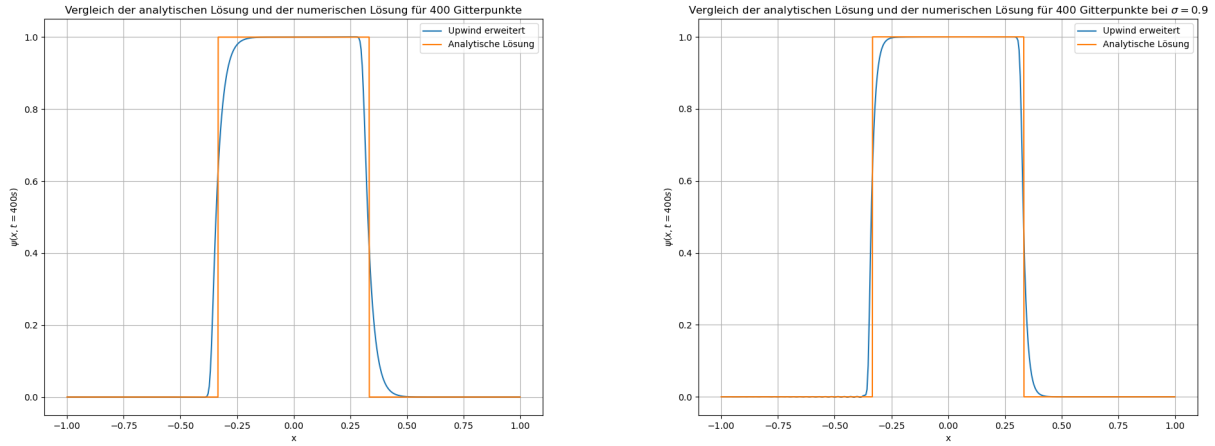


Abbildung 2: Erweitertes Upwind verfahren für 400 Gitterpunkte nach 400s

### 3.2 Stoßwelle

Um die Euler Gleichungen, 6, wird auch das erweiterte Upwind verfahren wie zuvor verwendet. Der Anfangszustand ist durch zwei konstante Bereiche gegeben,

$$\xi(\vec{x}, 0) = \begin{cases} \vec{\xi}_l, & \text{für } x \leq x_0 \\ \vec{\xi}_r, & \text{für } x > x_0. \end{cases} \quad (9)$$

Dabei sind  $\vec{\xi}_{l,r} = (\rho_{l,r}, u_{l,r}, \epsilon_{l,r})$  die konstanten Anfangsbedingungen auf der rechten und linken Seite von  $x_0$ . Die Ergebnisse der Simulation sind in Abbildung 3 dargestellt.

Die numerischen Ergebnisse stimmen qualitativ mit der analytischen Lösung überein. Insbesondere sind die fundamentalen Strukturen der Lösung, die Expansion, die Kontaktdiskontinuität und die Stoßfront, deutlich erkennbar. Die Dichteverteilung zeigt eine scharfe Stoßfront, gefolgt von einer Expansion mit einem glatten Übergang zur ungestörten Region. Auch die Geschwindigkeit und der Druck folgen dem erwarteten Profil und zeigen die charakteristischen Sprünge an den Diskontinuitäten. Ein auffälliger Unterschied zwischen der analytischen und der numerischen Lösung liegt in der Glättung der Diskontinuitäten.

Während die analytische Lösung scharfe Sprünge an den Stoß- und Kontaktflächen zeigt, weisen die numerischen Ergebnisse eine gewisse Aufweitung dieser Strukturen auf.

Trotz der vorhandenen numerischen Dissipation bleibt die Gesamtstruktur der Lösung erhalten.

Die Simulation bleibt stabil über den gesamten Berechnungszeitraum, ohne dass numerische Instabilitäten auftreten. Dies deutet darauf hin, dass die gewählte numerische Methode geeignet ist, die Erhaltungsgleichungen korrekt zu lösen.

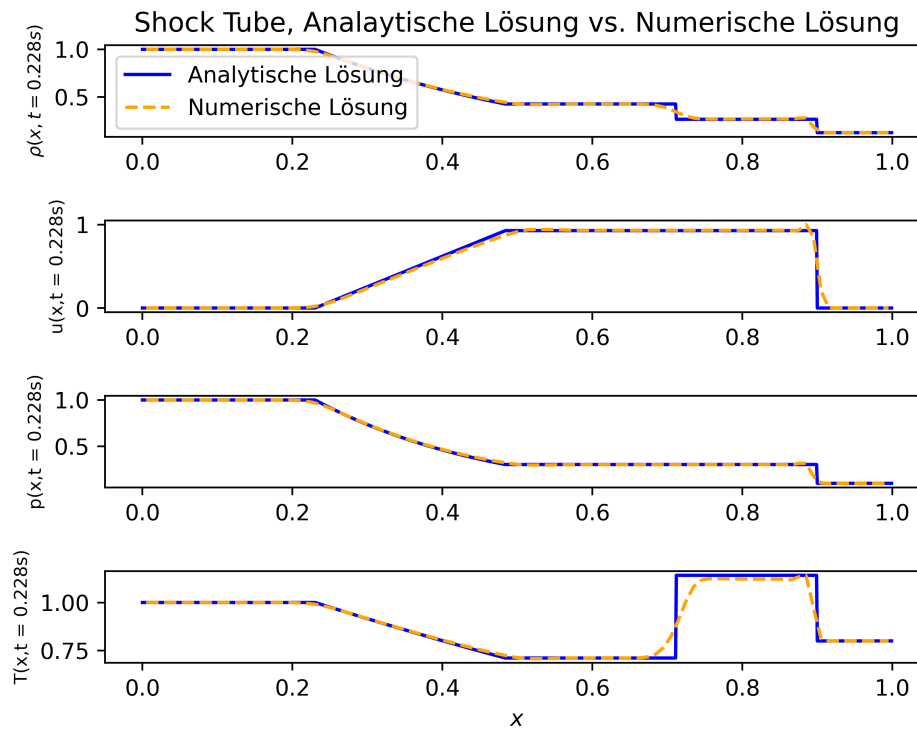


Abbildung 3: Lösung der Stoßwelle

## 4 Fazit

In diesem Versuch wurde die numerische Lösung der Euler-Gleichungen für das eindimensionale Stoßwellen, sowie die lineare Advektionsgleichung untersucht.

Die Simulationsergebnisse der linearen Advektion zeigten, dass das erweiterte Upwind Verfahren numerische Oszillationen effektiv unterdrückt und stabile Lösungen liefert. Die Untersuchung der Stoßwelle verdeutlichte die Herausforderungen bei der numerischen Behandlung von Diskontinuitäten, insbesondere in Bezug auf numerische Dissipation und die Glättung von Schocks. Dennoch blieben die wesentlichen physikalischen Eigenschaften der Lösung erhalten, und die Simulation erwies sich als stabil.

Insgesamt hat der Versuch einen praxisnahen Einblick in numerische Hydrodynamik-Verfahren gegeben und die Relevanz solcher Methoden für wissenschaftliche und technische Anwendungen unterstrichen.

## 5 Quellen

1. [Anleitung Numerische Hydroynamik, Christoph Schäfer & Wilhelm Kley](#)
2. [Riemann Problem Solver, Bert Vandenbroucke](#)