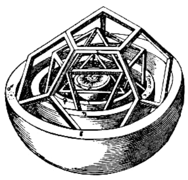


# (Quase) Todo semestre de Cálculo

Pequeno estudo sobre a maioria dos tópicos abordados durante o semestre do curso de cálculo II

*Rasteli*

23 de maio de 2023

# SUMÁRIO

# CAPÍTULO 1

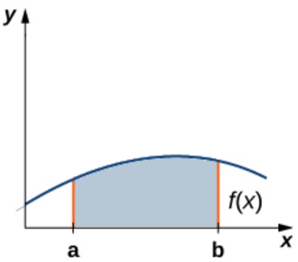
# ÁREA ENTRE FUNÇÕES

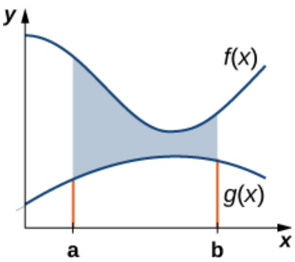
De fato, quando integra-se uma função num intervalo $[a, b]$, obtém-se a área da região sob esta função no dado intervalo. Seja $f$ uma função contínua em $I$ tal que $I \supseteq [a, b]$, a área $A$ da região sob $f$ em $[a, b]$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

De modo similar, sejam $f$ e $g$ funções contínuas em $I$ tal que $I \supseteq [a, b]$ e $f(x) \geqslant g(x)$, a área $A$ da região entre $f$ e $g$ em $[a, b]$ é dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

(1.1) 


(1.2) 


Entretanto, para funções $f$ e $g$ que se intersectam no intervalo de interesse $(a, b)$, a área $A$ da região entre elas **delimitada pelas retas** $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

porém cada caso pode requerir sua própria estratégia.

É importante frisar que, caso a região cuja área deve ser calculada esteja abaixo do eixo de referência, a área $A$ é a integral negativa.

**EXEMPLO 1** Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$. Encontre a área da região delimitada pela função e pelas retas $x = 5$ e $x = 20$.

Sabemos que a área $A = \int_a^b f(x)dx$, $f(x) = \sqrt{x}$ e $[a, b] = [5, 20]$, então

$$A = \int_5^{20} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{14\sqrt{125}}{3}\mathrm{u}^2$$

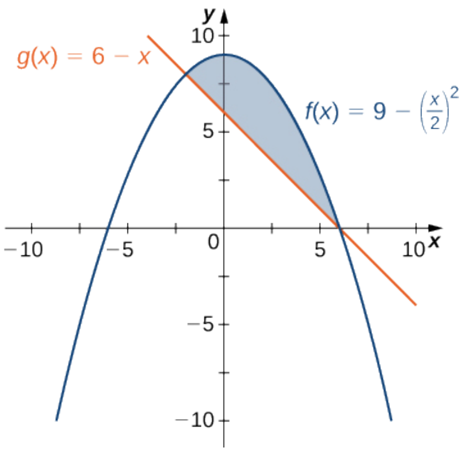
■

**EXEMPLO 2** Considere as funções $f(x) = 9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ e $g(x) = 6 - x$. Encontre a área da região delimitada pelas funções.

Como nenhum intervalo de integração foi dado, consideremos os pontos de intersecção.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= 6 - x \\ 3 + x - \frac{x^2}{4} &= 0 \\ x^2 - 4x - 12 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação de 2° grau, concluímos que $f(x)$ e $g(x)$ se intersectam em $x = -2$ e $x = 6$. Logo, estes compõem o intervalo.
Faça o gráfico:



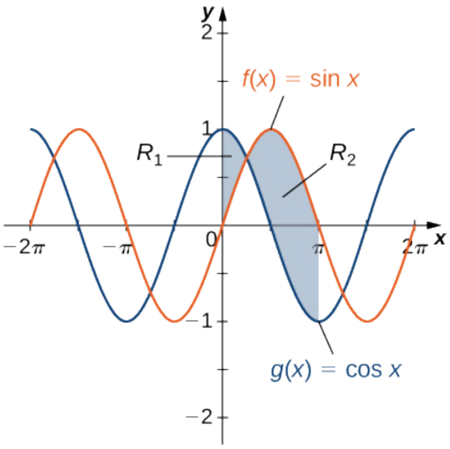

Perceba que $f(x) \geqslant g(x)$ em $[-2, 6]$, portanto a área

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{6} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{6} \left[9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - (6 - x)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{6} \left(3 + x - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{64}{3}\mathrm{u}^2 \end{aligned}$$

■

**EXEMPLO 3** Considere as funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$. Encontre a área entre as funções no intervalo $[0, \pi]$.

O gráfico com as duas funções é o que segue:




Perceba que a região cuja área foi requisitada não é única, mas composta por duas subregiões ($R_1$ e $R_2$). Isto é devido a não existir uma função que seja maior por todo o intervalo. Na verdade, para $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $g(x) \geqslant f(x)$. E, para $x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$, $f(x) \geqslant g(x)$[1].

A fórmula em (1.3) parece resolver este problema, pois as funções se cruzam no intervalo $(0, \pi)$ e a área entre elas está, de fato, delimitada pelas retas $x = 0$ e $x = \pi$. Então

$$A = \int_0^\pi |f(x) - g(x)| \, dx$$

mas $|f(x) - g(x)| = |\sin(x) - \cos(x)|$ e, para $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $g(x) \geqslant f(x)$, então

$$|\sin(x) - \cos(x)| = \cos(x) - \sin(x)$$

e, para $x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$, $f(x) \geqslant g(x)$, então

$$|\sin(x) - \cos(x)| = \sin(x) - \cos(x)$$

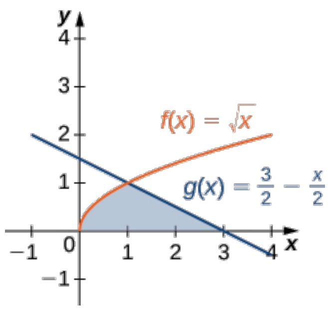
Portanto

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi |\sin(x) - \cos(x)| \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(x) - \sin(x)] \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} [\sin(x) - \cos(x)] \, dx \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} \mathrm{u}^2 \end{aligned}$$

■

**EXEMPLO 4** Considere as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$. Encontre a área entre as funções em $[0, 3]$.

Tal é o gráfico:




[1] $\frac{\pi}{4}$ é a abscissa da intersecção das funções no intervalo $(0, \pi)$. É onde $f$ sobrepassa $g$ em $x$.

Tentemos algo diferente: integrar em relação a $y$. De fato, é mais fácil calcular a área em termos de $y$, pois só precisamos resolver uma integral.

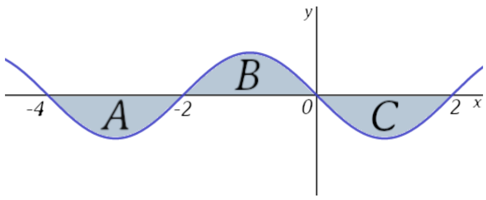
Seja $y = f(x)$ e $x = v(y)$, então $v(y) = y^2$ e seja $y = g(x)$ e $x = w(y)$, então $w(y) = 3 - 2y$. Note que o intervalo de interesse agora é $[0, 1]$ no eixo $y$, pois redefinimos as funções em termos de $y$, portanto $w(y) \geqslant v(y)$ em $[0, 1]$. Podemos aplicar (2), pois todas nossas formulações ainda se mantêm. Então

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [w(y) - v(y)]\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (3 - 2y - y^2)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{5}{3}\mathrm{u}^2 \end{aligned}$$

■

## 1.1 Exercícios

1. Considere as funções $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = x$. Encontre a área delimitada pelas funções.
2. Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2 - x$. Determine a área delimitada pelas funções e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.
3. Considere as funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = \sqrt{-x}$. Encontre a área delimitada pelas funções em $[-2, 0]$ e pelo eixo $x$. Faça em termos de $x$ e em termos de $y$.
4. Cada uma das regiões $A$, $B$ e $C$ delimitadas por $f$ e pelo eixo $x$ tem área 3. Determine o valor de
$$\int_{-4}^{2} [f(x) + 2x + 5]dx$$



# CAPÍTULO 2

# INTEGRAÇÃO POR FRAÇÕES PARCIAIS

A técnica de integração por frações parciais consiste em expressar uma integral de uma função racional (divisão de polinômios) como uma integral da soma de frações mais simples, *frações parciais*, que sabemos integrar. Como exemplo, se levarmos as frações $\frac{2}{x-1}$ e $\frac{1}{x+2}$ a um denominador comum, temos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Revertendo o procedimento, vemos como integrar a função:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{2.1}$$

onde $P$ e $Q$ são polinômios e um polinômio qualquer $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então, se $a_n \neq 0$, dizemos que o grau de $A$ é $n$ e escrevemos $gr(A) = n$. É possível expressar $f$ como a soma de frações mais simples se $gr(P) < gr(Q)$. Então $f$ é chamada *própria*.

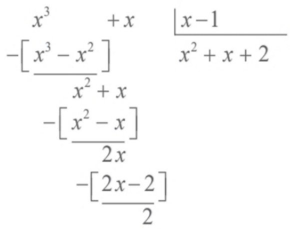
Se $f$ for *imprópria*, isto é, $gr(P) \geqslant gr(Q)$, devemos antes dividir $P$ por $Q$ (divisão de polinômios) até um resto $R(x)$ tal que $gr(R) < gr(Q)$. Então $f$ pode ser expressa como

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{2.2}$$

onde $S$ e $R$ também são polinômios. A seguir, no exemplo, vemos que, por vezes, esta etapa preliminar é tudo de que precisamos.

**EXEMPLO 1** Determine $\int \frac{x^3+x}{x-1}\mathrm{d}x$

Note que o grau do numerador é maior que o grau do denominador, então devemos primeiro realizar a divisão.



Concluímos que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x}{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

Quando $Q(x)$ é fatorável, o próximo passo é fatorá-lo tanto quanto possível. Devemos ser capazes de fatorá-lo como um produto de fatores lineares (da forma $ax+b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2+bx+c$, onde $b^2-4ac<0$). Por exemplo, seja $Q(x)=x^4-16$, pode ser fatorado como

$$Q(x)=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

O terceiro passo consiste em expressar a função racional própria $\frac{R(x)}{Q(x)}$ em uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{A}{ax+b} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

**CASO I Q(x) é um produto de fatores lineares distintos**

Isto é,

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_kx+b_k)$$

onde nenhum fator é repetido. Portanto existem constantes $A_1, A_2, ..., A_k$ tais que

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_k}{a_kx+b_k} \tag{2.3}$$

**EXEMPLO 2** Determine $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\mathrm{d}x$

Não é necessário realizar divisão, pois o grau do numerador é menor que o grau do denominador. Primeiramente precisamos fatorar o denominador

$$2x^3+3x^2-2x=x(2x^2+3x-2)=x(2x-1)(x+2)$$

Em seguida, decompomos o integrando em frações parciais

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Para obtermos os valores de $A$, $B$ e $C$, multiplicamos toda a equação pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores, $x(2x-1)(x+2)$

$$x^2+2x-1=A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)$$

Expandindo os termos e evidenciando os fatores comuns do lado direito da equação, temos

$$x^2+2x-1=(2A+B+2C)x^2+(3A+2B-C)x-2A$$

Ora, isto é uma equação, portanto, o polinômio do lado esquerdo é idêntico ao polinômio do lado direito. Isto quer dizer que os coeficientes de fatores correspondentes devem ser iguais. Do lado esquerdo, o coeficiente de $x^2$ é 1; do lado direito, $2A+B+2C$, ou seja, $2A+B+2C=1$. Do mesmo modo, os coeficientes de $x$ e os termos constantes são iguais. Obtemos, então, o sistema

$$\begin{cases} 2A+B+2C=1 \\ 3A+2B-C=2 \\ 2A=1 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{5}$ e $C=-\frac{1}{10}$. Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{5(2x-1)}-\frac{1}{10(x+2)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln|2x-1|-\frac{1}{10}\ln|x+2|+K \end{aligned}$$

■

## MÉTODO DA COBERTURA (COVER-UP)

O método da cobertura consiste em descobrir os termos dos numeradores das frações parciais de uma função racional própria multiplicando a equação (2.3) pelo denominador da fração cujo numerador contém o termo a ser obtido. Em seguida, atribui-se um valor a $x$ de modo que a equação possa ser simplificada, onde a única incógnita é o termo a ser obtido. Por exemplo, considere

$$\frac{x+3}{x^2-4}=\frac{x+3}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

Para obtermos o valor de $A$, multiplicamos a equação por $x-2$, seu denominador, obtendo

$$\frac{x+3}{x+2}=A+\frac{B}{x+2}(x-2)$$

Perceba que $x-2$ é um fator de $\frac{B}{x+2}$, portanto, se $x=2$, todo o termo resulta em 0, restando

$$A=\frac{2+3}{2+2}=\frac{5}{4}$$

Do mesmo modo, para obtermos B, multiplicamos a equação por $x+2$, obtendo

$$\frac{x+3}{x-2}=\frac{A}{x-2}(x+2)+B$$

Se $x=-2$, então

$$B=\frac{-2+3}{-2-2}=-\frac{1}{4}$$

Saiba, entretanto, que este método não é infalível. Para ilustrarmos esta tragédia, consideremos a seguinte função racional própria

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^4-16}$$

Devemos fatorar o denominador. Então obtemos

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

Decompondo a função em frações parciais

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Perceba que o denominador $x^2 + 4$ é quadrático, portanto um linear ($Cx + D$, nesse caso) deve ser o numerador. Suponha que queiramos obter o valor de $C$ ou $D$, multiplicaríamos a equação por seu denominador, a saber, $x^2 + 4$, que resulta em

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}(x^2+4) + \frac{B}{x+2}(x^2+4) + Cx + D$$

Veja que $\forall x, x^2 + 4 > 0$ (lê-se "para todo valor de $x$, $x^2 + 4$ é sempre maior que 0"), portanto não conseguimos simplificar a equação para $C$ ou $D$ (para $A$ e $B$, cobertura ainda funciona).

**CASO II Q(x) é um produto de fatores lineares, alguns dos quais se repetem**

Suponha que o $k$-ésimo fator linear $a_k x + b_k$ seja repetido $r$ vezes, isto é, $(a_k x + b_k)^r$ ocorre em $Q(x)$. Então precisaríamos, como chamo, construir a potência, de modo que o termo com tal fator seja decomposto em

$$\frac{A_k}{a_k x + b_k} + \frac{A_{k+1}}{(a_k x + b_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k+r-1}}{(a_k x + b_k)^r}$$

**EXEMPLO 3** Determine $\int \frac{x^4 - 2x^2 - 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} \mathrm{d}x$

O primeiro passo é dividir $P(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ por $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, pois $gr(Q) < gr(P)$. O resultado desta divisão é

$$\frac{x^4 - 2x^2 - 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 - \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

O segundo passo é fatorar $Q(x)$. Como $Q(1) = 0$, $x - 1$ é um fator e, por divisão, encontramos o outro. Então

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x+1)(x-1)^2 \end{aligned}$$

Como $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Por cobertura, obtemos $B = 2$ e $C = -1$. Para $A$, multiplicamos a equação pelo m.m.c. dos denominadores e substituímos os valores de $B$ e $C$, obtendo

$$\begin{aligned} 4x &= A(x+1)(x-1) + 2(x+1) - (x-1)^2 \\ 4x &= Ax^2 - A + 2x + 2 - x^2 + 2x - 1 \\ 4x &= (A-1)x^2 + 4x - A + 1 \end{aligned}$$

Então $A - 1 = 0$, $\therefore A = 1$. Voltando à integral, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - 2x^2 - 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x &= \int \left\{ x + 1 - \left[ \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] \right\} \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + \ln|x+1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + K\end{aligned}$$

## 2.1 Exercícios

**1-6** Calcule as integrais:

1. $\int \frac{x-12}{x^2-4x}\,dx$
2. $\int \frac{5}{x^2+3x-4}\,dx$
3. $\int_{-1}^{0} \frac{x^3-4x+1}{x^2-3x+2}\,dx$
4. $\int \frac{1}{y(y-a)}\,dy$
5. $\int_{1}^{2} \frac{x^3+4x^2+x-1}{x^3+x^2}\,dx$
6. $\int \frac{1}{(t^2-1)^2}\,dt$

# CAPÍTULO 3

# FUNÇÕES MULTIVARIÁVEIS E DERIVADAS PARCIAIS

Uma função $f$ de várias variáveis é uma relação onde cada ênupla ordenada (par, tripla, quádrupla *etc*) de números reais $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ associa-se a um único número real, denotado por $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Diz-se que $D$ é o domínio de $f$ e sua imagem é o conjunto de valores possíveis de $f$, isto é, $\{f(x_1, x_2, ..., x_n) | (x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}$. Por exemplo, se representarmos o domínio $D$ como um subconjunto de um plano $xy$, a imagem será um conjunto de números na reta real, representada pelo eixo $z$.

A derivada de $f$, diferentemente da diferenciação implícita, onde consideramos cada variável como uma função, é em relação a uma de suas variáveis, onde todas as outras são consideradas constantes. Esta derivada é denominada *parcial*.

Considere uma função $f$ de duas variáveis $x$ e $y$ e suponha que deixemos só $x$ variar e mantemos fixa $y$. Consideramos, então, uma função de uma única variável, $g(x) = f(x, y)$. A derivada de $g$ é, portanto, a derivada parcial de $f$ em relação a $x$ e a denotaremos por $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$. Pela definição de derivada, temos

$$\frac{d}{dx} g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

De modo similar, deixemos agora que somente $y$ varie. Assim $g(y) = f(x, y)$ e dizemos que a derivada de $g$ é a derivada parcial de $f$ em relação a $y$, denotada por $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$. Temos

$$\frac{d}{dy} g(y) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h}$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

De modo geral, se $u$ é uma função de $n$ variáveis, isto é, $u = f(x_1, ..., x_n)$, sua derivada em relação a $i$-ésima variável $x_i$ é

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{h}$$

### OBSERVAÇÃO

Existe uma miríade de notações para uma derivada parcial. Abaixo estão escritas algumas considerando $z = f(x, y)$.

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \partial_x f = \partial_x f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \partial_y f = \partial_y f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

**EXEMPLO 1** Seja $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$.

Derivando em relação a $x$ e mantendo $y$ constante, temos

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 2xy^3 \\ f_x(2,1) &= 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16 \end{aligned}$$

Derivando em relação a $y$ e mantendo $x$ constante, temos

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= 3x^2y^2 - 4y \\ f_y(2,1) &= 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

■

## OBSERVAÇÃO

O que foi pedido no *Exemplo 1*, $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$, é chamado gradiente de $f(2,1)$. Representado pelo símbolo $\nabla$ (*nabla*), o gradiente de uma função num ponto $p$ é um vetor que indica a direção de maior incremento de uma grandeza a partir de $p$ e cujo módulo é a taxa de incremento nessa direção e é dado por

$$\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f(p)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(p)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} \right)$$

No *Exemplo 1*, poderia ter sido pedido, de outra forma, $\nabla f(2,1)$.

**EXEMPLO 2** Seja $f(x,y,z) = e^{xy} \ln z$, determine $\nabla f(1,2,e)$.

Derivando em relação a $x$ e mantendo $y$ e $z$ constantes, temos

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= ye^{xy} \ln z \\ f_x(1,2,e) &= 2 \cdot e^2 \cdot \ln e = 2e^2 \end{aligned}$$

Derivando em relação a $y$ e mantendo $x$ e $z$ constantes, temos

$$\begin{aligned} f_y(x,y,z) &= xe^{xy} \ln z \\ f_y(1,2,e) &= 1 \cdot e^2 \cdot \ln e = e^2 \end{aligned}$$

Derivando em relação a $z$ e mantendo $x$ e $y$ constantes, temos

$$\begin{aligned} f_z(x,y,z) &= \frac{e^{xy}}{z} \\ f_z(1,2,e) &= \frac{e^2}{e} = e \end{aligned}$$

$\therefore \nabla f(1,2,e) = (2e^2, e^2, e)$ ■

## DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Se $f$ é uma função de $n$ variáveis, suas derivadas parciais $f_{x_1}$, $f_{x_2}$,..., $f_{x_n}$ também são funções de $n$ variáveis, de modo que podemos derivá-las parcialmente outra vez, chamadas *derivadas parciais de segunda ordem*, a que eu me refiro como $dp^2$ (de modo geral, às *derivadas parciais* *de enésima ordem*, eu me refiro como $dp^n$). Se $z = f(x, y)$, denotamos suas $dp^2$, igualmente às $dp^1$, entre outras maneiras, por

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \partial_x \partial_x f$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \partial_y \partial_x f$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \partial_x \partial_y f$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \partial_y \partial_y f$$

Saiba que a notação ${\partial^2 f}/{\partial y \partial x}$ ou $f_{xy}$ significa que primeiro devemos derivar parcialmente a função em relação a $x$ e, em seguida, em relação a $y$. ${\partial^2 f}/{\partial x \partial y}$ ou $f_{yx}$ significa o inverso.

**EXEMPLO 3** Determine todas as $dp^2$ de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

No *Exemplo 1*, descobrimos que

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3 \quad \text{e} \quad f_y = 3x^2y^2 - 4y$$

Logo

$$f_{xx} = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = 6xy^2$$
$$f_{yx} = 6xy^2 \qquad f_{yy} = 6x^2y - 4$$

■

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ no *Exemplo 3*. Isto é verdade para a maioria das funções. O matemático francês Alexis Clairaut formulou um teorema que nos permite afirmar a igualdade $f_{xy} = f_{yx}$.

> Teorema de Clairaut Suponha que $f$ esteja definida em um disco $D$ que contenha o ponto $(a, b)$, isto é, $(a, b) \in D$. Se as funções $f_{xy}$ e $f_{yx}$ forem ambas contínuas em $D$, então $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

**EXEMPLO 4** Seja $f(x, y, z) = \cos(x + 2yz)$, calcule $f_{xxyz}$.

$$\begin{aligned} f_x &= -\sin(x + 2yz) \\ f_{xx} &= -\cos(x + 2yz) \\ f_{xxy} &= 2z \sin(x + 2yz) \\ f_{xxyz} &= 4yz\cos(x + 2yz) + 2\sin(x + 2yz) \end{aligned}$$

■

## 3.1 Exercícios

**1-2** Encontre $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ utilizando a definição de derivadas parciais como limites e determine $\nabla f(1, -1)$.

1. $f(x, y) = \frac{x}{y^2+x}$
2. $f(x, y) = 2x^2y - xy^2 + y$

**3-8** Determine **todas** as derivadas parciais de segunda ordem.

3. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$
4. $f(x, y) = \sin^2(mx + my)$
5. $v = \frac{xy}{x-y}$
6. $z = \frac{x+y}{1-xy}$
7. $v = e^{xe^y}$
8. $f(x, y) = \ln(mxy + y^2)$

**9-12** Verifique se as funções satisfazem o Teorema de Clairaut, isto é, se $z_{xy} = z_{yx}$.

9. $z = x^4y^3 - y^4$
10. $z = \cos(x^2y)$
11. $z = e^{xy}\sin y$
12. $z = \ln(x + 2y)$

# CAPÍTULO 4

# INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Seja $f$ uma função de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\right\}$$

O gráfico de $f$ é a superfície de equação $z = f(x,y)$. Seja $f(x,y) \geqslant 0$ e $S$ o sólido acima da região $R$ e abaixo do gráfico de $f$, isto é,

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leqslant z \leqslant f(x,y), (x,y) \in R\right\}$$

Concluímos que o volume $V$ de $S$, a partir de uma demonstração semelhante à integral unidimensional expressa como o valor limite da soma de Riemann, é

$$V = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A$$

onde $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Usualmente calculamos uma integral dupla expressando-a como uma *integral iterada*, calculando duas integrais unidimensionais. Se integrarmos a função $f$ em relação a $y$ em $[c,d]$ mantendo $x$ constante, isto é, $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$, obteremos um resultado dependente de $x$, portanto uma função de $x$:

$$\phi(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Em seguida, se integrarmos a função $\phi$ em relação a $x$ em $[a,b]$, obteremos

$$\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

A integral do lado direito de (4.1) é denominada *integral iterada*. Em geral, os colchetes são omitidos. Assim a integral

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

indica que devemos primeiro integrar em relação a $y$ de $c$ até $d$, depois, em relação a $x$ de $a$ até $b$. Do mesmo modo, a integral

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{4.3}$$

indica que devemos primeiro integrar em relação a $x$ de $a$ até $b$, depois, em relação a $y$ de $c$ até $d$.

**EXEMPLO 1** Determine o valor das integrais iteradas

(a). $\int_0^3 \int_1^2 x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ (b). $\int_1^2 \int_0^3 x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(a) Integramos primeiro em relação a $y$ mantendo $x$ constante

$$\int_1^2 x^2y\,\mathrm{d}y = \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} = x^2\frac{2^2}{2} - x^2\frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}x^2$$

Isto é, a função $\phi(x) = \frac{3}{2}x^2$. Agora integramos $\phi$ em relação a $x$ de 0 a 3

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_1^2 x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2y\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\ &= \int_0^3 \frac{3}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{27}{2}\end{aligned}$$

(b) Integramos primeiro em relação a $x$ mantendo $y$ constante

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_0^3 x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2y\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=3}\mathrm{d}x\\ &= \int_1^2 9y\ \mathrm{d}y = \left[9\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} = \frac{27}{2}\end{aligned}$$

■

Semelhantemente ao teorema de Clairaut, o resultado das integrais no *Exemplo 1* foi o mesmo independentemente da ordem de integração.

Teorema de Fubini Se $f$ for contínua no retângulo
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, então

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que $f$ seja limitada em $R$, $f$ tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista.

**EXEMPLO 2** Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\,\mathrm{d}A$, onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Pelo teorema de Fubini, podemos dizer

$$\begin{aligned}\iint_R (x-3y^2)\,\mathrm{d}A &= \int_0^2 \int_1^2 (x-3y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 \left[\int_1^2 (x-3y^2)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 (x-7)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - 7x\right]_{x=0}^{x=2} = -12\end{aligned}$$

■

**EXEMPLO 3** Calcule $\iint_R y \sin(xy)\,\mathrm{d}A$, onde $R = [1,2] \times [0,\pi]$.

Será muito mais fácil calcular esta integral se primeiro o fizermos em relação a $x$ (se fizermos em relação a $y$ primeiro, teremos que lidar com integração por partes), então temos

$$\begin{aligned}\iint_R y \sin(xy)\,\mathrm{d}A &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi [\cos y - \cos(2y)]\,dy = 0\end{aligned}$$

■

Não sei quanto mais de cálculo multivariável a Helô irá passar. Até o momento, estamos em integrais triplas, que, em geral, são calculadas do mesmo modo que integrais duplas. Se virmos mais conteúdo daqui para frente, este meu texto deixará a desejar; já foram muitas horas dedicadas a este escrito. Enfim, terminemos com os últimos exercícios.

## 4.1 Exercícios

**1-8** Calcule as integrais iteradas.

1. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \int_0^1 u(u - v^2)^4\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$
3. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^2 \int_0^\pi r \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$
5. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s+t}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$
6. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
8. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

**9-12** Calcule as integrais duplas.

9. $\iint_R \sin(x+y)\,\mathrm{d}A, \quad R = \left\{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$
10. $\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\mathrm{d}A, \quad R = \{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$
11. $\iint_R ye^{-xy}\,\mathrm{d}A, \quad R = [0,2] \times [0,3]$
12. $\iint_R (3y^2 - x^2 + 2)\,\mathrm{d}A, \quad R = [-1,1] \times [-2,2]$

# APÊNDICE A

# RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

## Área entre funções

1. $\frac{9}{2}$u$^2$
2. 3u$^2$
3. $\frac{7}{6}$u$^2$
4. 15

## Integração por frações parciais

1. $3\ln|x| - 2\ln|x-4| + C$
2. $\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right| + C$
3. $\frac{5}{2} - \ln(6)$
4. $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y-a}{y}\right| + C$
5. $\frac{1}{2} + \ln(6)$
6. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{t}{2t^2-2} + K$

## Funções multivariáveis e derivadas parciais

Os exercícios desta seção não têm suas repostas neste texto, pois eu, o autor, estava com muita dificuldade de formatá-las corretamente. Em contraste, estava com pouco tempo. Talvez futuramente eu trabalhe nisso. Enquanto isso, use https://www.derivative-calculator.net/, https://www.symbolab.com/, https://www.wolframalpha.com/, entre outros para verificar suas respostas. Como última medida, o leitor pode entrar em contato comigo e me pedir a solução.

## Integrais múltiplas

1. 222
2. $\frac{41}{630}$
3. 2
4. $\pi$
5. $\frac{16\sqrt{2}-8}{15}$
6. $\frac{4\sqrt{2}-2}{15}$
7. $\frac{27}{4}$
8. $\frac{1}{24}$
9. 2
10. $\frac{\pi}{3}$
11. $\frac{5e^6+1}{2e^6}$
12. $\frac{136}{3}$

# APÊNDICE B

# CÓDIGO FONTE

Escrevi este texto utilizando a linguagem de marcação LaTeX, que já queria aprender há algum tempo. A vontade de escrever um texto matemático relativamente rigoroso e a prova de cálculo se avizinhando foram o estopim para eu deixar a preguiça de lado. E, claro, assim como quase tudo que escrevo, este texto é *código livre* (*free as in freedom and in free beer*). Aos curiosos, deixo o link do repositório no GitHub (é a primeira vez que escrevo, então tá uma bagunça): `https://github.com/rasteli/TeX/blob/main/calc-semester/calc-semester.tex`