

(Quase) Todo semestre de Cálculo

Pequeno estudo sobre a maioria dos tópicos abordados durante o semestre do curso de cálculo II

Rasteli

23 de maio de 2023

1	Área entre funções	2
1.1	Exercícios	5
2	Integração por frações parciais	6
2.1	Exercícios	10
3	Funções multivariáveis e derivadas parciais	11
3.1	Exercícios	13
4	Integrais múltiplas	15
4.1	Exercícios	17
A	Respostas dos exercícios	18
B	Código Fonte	19

CAPÍTULO 1

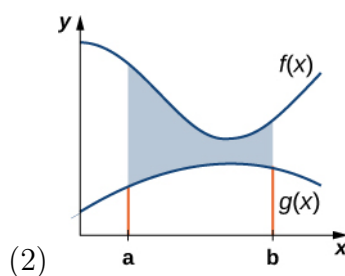
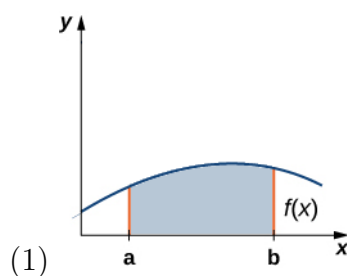
ÁREA ENTRE FUNÇÕES

De fato, quando integra-se uma função num intervalo $[a, b]$, obtém-se a área da região sob esta função no dado intervalo. Seja f uma função contínua em I tal que $I \supseteq [a, b]$, a área A da região sob f em $[a, b]$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x) \, dx \quad (1.1)$$

De modo similar, sejam f e g funções contínuas em I tal que $I \supseteq [a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$, a área A da região entre f e g em $[a, b]$ é dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx \quad (1.2)$$



Entretanto, para funções f e g que se intersectam no intervalo de interesse (a, b) , a área A da região entre elas **delimitada pelas retas** $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \quad (1.3)$$

porém cada caso pode requerir sua própria estratégia.

É importante frisar que, caso a região cuja área deve ser calculada esteja abaixo do eixo de referência, a área A é a integral negativa.

EXEMPLO 1 Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$. Encontre a área da região delimitada pela função e pelas retas $x = 5$ e $x = 20$.

Sabemos que a área $A = \int_a^b f(x) \, dx$, $f(x) = \sqrt{x}$ e $[a, b] = [5, 20]$, então

$$A = \int_5^{20} \sqrt{x} \, dx = \frac{14\sqrt{125}}{3} u^2$$

■

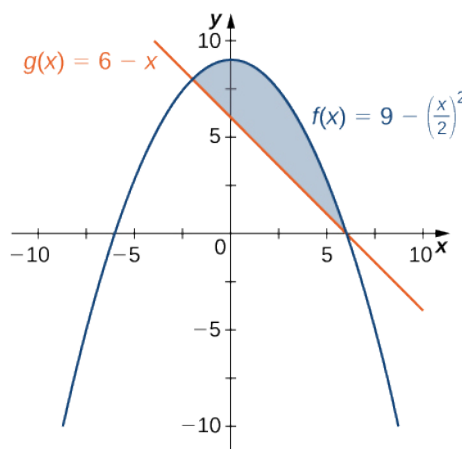
EXEMPLO 2 Considere as funções $f(x) = 9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ e $g(x) = 6 - x$. Encontre a área da região delimitada pelas funções.

Como nenhum intervalo de integração foi dado, consideremos os pontos de intersecção.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= 6 - x \\ 3 + x - \frac{x^2}{4} &= 0 \\ x^2 - 4x - 12 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação de 2º grau, concluímos que $f(x)$ e $g(x)$ se intersectam em $x = -2$ e $x = 6$. Logo, estes compõem o intervalo.

Faça o gráfico:



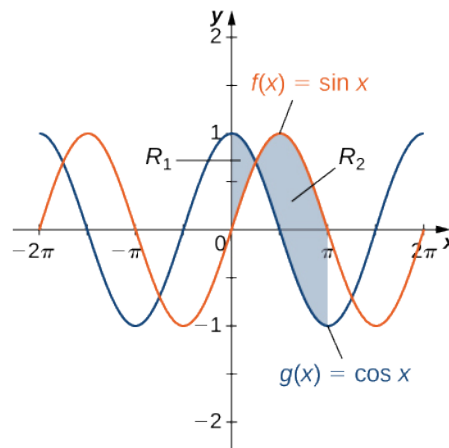
Perceba que $f(x) \geq g(x)$ em $[-2, 6]$, portanto a área

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^6 [f(x) - g(x)] \, dx \\ &= \int_{-2}^6 \left[9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - (6 - x) \right] \, dx \\ &= \int_{-2}^6 \left(3 + x - \frac{x^2}{4} \right) \, dx \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

■

EXEMPLO 3 Considere as funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$. Encontre a área entre as funções no intervalo $[0, \pi]$.

O gráfico com as duas funções é o que segue:



Perceba que a região cuja área foi requisitada não é única, mas composta por duas subregiões (R_1 e R_2). Isto é devido a não existir uma função que seja maior por todo o intervalo. Na verdade, para $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $g(x) \geq f(x)$. E, para $x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$, $f(x) \geq g(x)$ ¹.

A fórmula em (1.3) parece resolver este problema, pois as funções se cruzam no intervalo $(0, \pi)$ e a área entre elas está, de fato, delimitada pelas retas $x = 0$ e $x = \pi$. Então

$$A = \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)| dx$$

mas $|f(x) - g(x)| = |\sin(x) - \cos(x)|$ e, para $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $g(x) \geq f(x)$, então

$$|\sin(x) - \cos(x)| = \cos(x) - \sin(x)$$

e, para $x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$, $f(x) \geq g(x)$, então

$$|\sin(x) - \cos(x)| = \sin(x) - \cos(x)$$

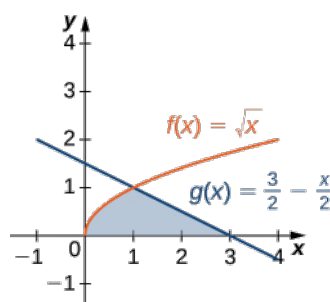
Portanto

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} |\sin(x) - \cos(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(x) - \sin(x)] dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} [\sin(x) - \cos(x)] dx \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

■

EXEMPLO 4 Considere as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$. Encontre a área entre as funções em $[0, 3]$.

Tal é o gráfico:



¹ $\frac{\pi}{4}$ é a abscissa da intersecção das funções no intervalo $(0, \pi)$. É onde f sobrepassa g em x .

Tentemos algo diferente: integrar em relação a y . De fato, é mais fácil calcular a área em termos de y , pois só precisamos resolver uma integral.

Seja $y = f(x)$ e $x = v(y)$, então $v(y) = y^2$ e seja $y = g(x)$ e $x = w(y)$, então $w(y) = 3 - 2y$. Note que o intervalo de interesse agora é $[0, 1]$ no eixo y , pois redefinimos as funções em termos de y , portanto $w(y) \geq v(y)$ em $[0, 1]$. Podemos aplicar (2), pois todas nossas formulações ainda se mantêm. Então

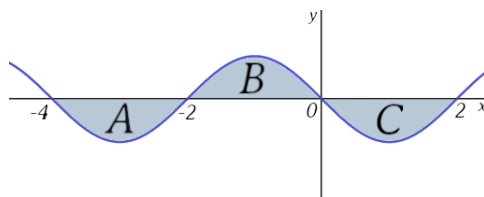
$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [w(y) - v(y)] dy \\ &= \int_0^1 (3 - 2y - y^2) dy \\ &= \frac{5}{3} u^2 \end{aligned}$$



1.1 Exercícios

1. Considere as funções $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = x$. Encontre a área delimitada pelas funções.
2. Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2 - x$. Determine a área delimitada pelas funções e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.
3. Considere as funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = \sqrt{-x}$. Encontre a área delimitada pelas funções em $[-2, 0]$ e pelo eixo x . Faça em termos de x e em termos de y .
4. Cada uma das regiões A , B e C delimitadas por f e pelo eixo x tem área 3. Determine o valor de

$$\int_{-4}^2 [f(x) + 2x + 5] dx$$



CAPÍTULO 2

INTEGRAÇÃO POR FRAÇÕES PARCIAIS

A técnica de integração por frações parciais consiste em expressar uma integral de uma função racional (divisão de polinômios) como uma integral da soma de frações mais simples, *frações parciais*, que sabemos integrar. Como exemplo, se levamos as frações $\frac{2}{x-1}$ e $\frac{1}{x+2}$ a um denominador comum, temos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Revertendo o procedimento, vemos como integrar a função:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 2 \ln |x-1| - \ln |x+2| + C$$

Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (2.1)$$

onde P e Q são polinômios e um polinômio qualquer $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, então, se $a_n \neq 0$, dizemos que o grau de A é n e escrevemos $gr(A) = n$. É possível expressar f como a soma de frações mais simples se $gr(P) < gr(Q)$. Então f é chamada *própria*.

Se f for *imprópria*, isto é, $gr(P) \geq gr(Q)$, devemos antes dividir P por Q (divisão de polinômios) até um resto $R(x)$ tal que $gr(R) < gr(Q)$. Então f pode ser expressa como

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad (2.2)$$

onde S e R também são polinômios. A seguir, no exemplo, vemos que, por vezes, esta etapa preliminar é tudo de que precisamos.

EXEMPLO 1 Determine $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$

Note que o grau do numerador é maior que o grau do denominador, então devemos primeiro realizar a divisão.

$$\begin{array}{r} x^3 \quad +x \quad |x-1 \\ -[x^3 - x^2] \quad \hline x^2 + x \quad \hline -[x^2 - x] \quad \hline 2x \quad \hline -[2x - 2] \quad \hline 2 \end{array}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx &= \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x - 1| + C\end{aligned}$$

Quando $Q(x)$ é fatorável, o próximo passo é fatorá-lo tanto quanto possível. Devemos ser capazes de fatorá-lo como um produto de fatores lineares (da forma $ax + b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$). Por exemplo, seja $Q(x) = x^4 - 16$, pode ser fatorado como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

O terceiro passo consiste em expressar a função racional própria $\frac{R(x)}{Q(x)}$ em uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{A}{ax + b} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

CASO I $Q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos

Isto é,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

onde nenhum fator é repetido. Portanto existem constantes A_1, A_2, \dots, A_k tais que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k} \quad (2.3)$$

EXEMPLO 2 Determine $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

Não é necessário realizar divisão, pois o grau do numerador é menor que o grau do denominador. Primeiramente precisamos fatorar o denominador

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Em seguida, decompomos o integrando em frações parciais

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Para obtermos os valores de A , B e C , multiplicamos toda a equação pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Expandindo os termos e evidenciando os fatores comuns do lado direito da equação, temos

$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Ora, isto é uma equação, portanto, o polinômio do lado esquerdo é idêntico ao polinômio do lado direito. Isto quer dizer que os coeficientes de fatores correspondentes devem ser iguais. Do

lado esquerdo, o coeficiente de x^2 é 1; do lado direito, $2A + B + 2C$, ou seja, $2A + B + 2C = 1$. Do mesmo modo, os coeficientes de x e os termos constantes são iguais. Obtemos, então, o sistema

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 1 \\ 3A + 2B - C = 2 \\ 2A = 1 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$. Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{5(2x-1)} - \frac{1}{10(x+2)} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{10} \ln |2x-1| - \frac{1}{10} \ln |x+2| + K \end{aligned}$$



MÉTODO DA COBERTURA (COVER-UP)

O método da cobertura consiste em descobrir os termos dos numeradores das frações parciais de uma função racional própria multiplicando a equação (3) pelo denominador da fração cujo numerador contém o termo a ser obtido. Em seguida, atribui-se um valor a x de modo que a equação possa ser simplificada, onde a única incógnita é o termo a ser obtido. Por exemplo, considere

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Para obtermos o valor de A , multiplicamos a equação por $x-2$, seu denominador, obtendo

$$\frac{x+3}{x+2} = A + \frac{B}{x+2}(x-2)$$

Perceba que $x-2$ é um fator de $\frac{B}{x+2}$, portanto, se $x=2$, todo o termo resulta em 0, restando

$$A = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$$

Do mesmo modo, para obtermos B , multiplicamos a equação por $x+2$, obtendo

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{A}{x-2}(x+2) + B$$

Se $x=-2$, então

$$B = \frac{-2+3}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

Saiba, entretanto, que este método não é infalível. Para ilustrarmos esta tragédia, consideremos a seguinte função racional própria

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 - 16}$$

Devemos fatorar o denominador. Então obtemos

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

Decompondo a função em frações parciais

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Perceba que o denominador $x^2 + 4$ é quadrático, portanto um linear ($Cx + D$, nesse caso) deve ser o numerador. Suponha que queiramos obter o valor de C ou D , multiplicaríamos a equação por seu denominador, a saber, $x^2 + 4$, que resulta em

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}(x^2+4) + \frac{B}{x+2}(x^2+4) + Cx + D$$

Veja que $\forall x, x^2 + 4 > 0$ (lê-se "para todo valor de x , $x^2 + 4$ é sempre maior que 0"), portanto não conseguimos simplificar a equação para C ou D (para A e B , cobertura ainda funciona).

CASO II $Q(x)$ é um produto de fatores lineares, alguns dos quais se repetem

Suponha que o k -ésimo fator linear $a_k x + b_k$ seja repetido r vezes, isto é, $(a_k x + b_k)^r$ ocorre em $Q(x)$. Então precisaríamos, como chamo, construir a potência, de modo que o termo com tal fator seja decomposto em

$$\frac{A_k}{a_k x + b_k} + \frac{A_{k+1}}{(a_k x + b_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k+r-1}}{(a_k x + b_k)^r}$$

EXEMPLO 3 Determine $\int \frac{x^4 - 2x^2 - 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

O primeiro passo é dividir $P(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ por $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, pois $gr(Q) < gr(P)$. O resultado desta divisão é

$$\frac{x^4 - 2x^2 - 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 - \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

O segundo passo é fatorar $Q(x)$. Como $Q(1) = 0$, $x - 1$ é um fator e, por divisão, encontramos o outro. Então

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2 - 1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x+1)(x-1)^2 \end{aligned}$$

Como $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Por cobertura, obtemos $B = 2$ e $C = -1$. Para A , multiplicamos a equação pelo m.m.c. dos denominadores e substituímos os valores de B e C , obtendo

$$\begin{aligned} 4x &= A(x+1)(x-1) + 2(x+1) - (x-1)^2 \\ 4x &= Ax^2 - A + 2x + 2 - x^2 + 2x - 1 \\ 4x &= (A-1)x^2 + 4x - A + 1 \end{aligned}$$

Então $A - 1 = 0$, $\therefore A = 1$. Voltando à integral, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - 2x^2 - 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \int \left\{ x + 1 - \left[\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] \right\} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + \ln|x+1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x-1} + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + K\end{aligned}$$



2.1 Exercícios

1-6 Calcule as integrais:

1. $\int \frac{x-12}{x^2-4x} dx$

3. $\int_{-1}^0 \frac{x^3-4x+1}{x^2-3x+2} dx$

5. $\int_1^2 \frac{x^3+4x^2+x-1}{x^3+x^2} dx$

2. $\int \frac{5}{x^2+3x-4} dx$

4. $\int \frac{1}{y(y-a)} dy$

6. $\int \frac{1}{(t^2-1)^2} dt$

CAPÍTULO 3

FUNÇÕES MULTIVARIÁVEIS E DERIVADAS PARCIAIS

Uma função f de várias variáveis é uma relação onde cada ênupla ordenada (par, tripla, quádrupla *etc*) de números reais (x_1, x_2, \dots, x_n) de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ associa-se a um único número real, denotado por $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Diz-se que D é o domínio de f e sua imagem é o conjunto de valores possíveis de f , isto é, $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) | (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$. Por exemplo, se representarmos o domínio D como um subconjunto de um plano xy , a imagem será um conjunto de números na reta real, representada pelo eixo z .

A derivada de f , diferentemente da diferenciação implícita, onde consideramos cada variável como uma função, é em relação a uma de suas variáveis, onde todas as outras são consideradas constantes. Esta derivada é denominada *parcial*.

Considere uma função f de duas variáveis x e y e suponha que deixemos só x variar e mantemos fixa y . Consideramos, então, uma função de uma única variável, $g(x) = f(x, y)$. A derivada de g é, portanto, a derivada parcial de f em relação a x e a denotaremos por $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$. Pela definição de derivada, temos

$$\frac{d}{dx} g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

De modo similar, deixemos agora que somente y varie. Assim $g(y) = f(x, y)$ e dizemos que a derivada de g é a derivada parcial de f em relação a y , denotada por $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$. Temos

$$\frac{d}{dy} g(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h}$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

De modo geral, se u é uma função de n variáveis, isto é, $u = f(x_1, \dots, x_n)$, sua derivada em relação a i -ésima variável x_i é

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

OBSERVAÇÃO

Existe uma miríade de notações para uma derivada parcial. Abaixo estão escritas algumas considerando $z = f(x, y)$.

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \partial_x f = \partial_x f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \partial_y f = \partial_y f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

EXEMPLO 1 Seja $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Derivando em relação a x e mantendo y constante, temos

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 3x^2 + 2xy^3 \\f_x(2, 1) &= 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16\end{aligned}$$

Derivando em relação a y e mantendo x constante, temos

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= 3x^2y^2 - 4y \\f_y(2, 1) &= 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8\end{aligned}$$



OBSERVAÇÃO

O que foi pedido no *Exemplo 1*, $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$, é chamado gradiente de $f(2, 1)$. Representado pelo símbolo ∇ (*nabla*), o gradiente de uma função num ponto p é um vetor que indica a direção de maior incremento de uma grandeza a partir de p e cujo módulo é a taxa de incremento nessa direção e é dado por

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f(p)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(p)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} \right)$$

No *Exemplo 1*, poderia ter sido pedido, de outra forma, $\nabla f(2, 1)$.

EXEMPLO 2 Seja $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$, determine $\nabla f(1, 2, e)$.

Derivando em relação a x e mantendo y e z constantes, temos

$$\begin{aligned}f_x(x, y, z) &= ye^{xy} \ln z \\f_x(1, 2, e) &= 2 \cdot e^2 \cdot \ln e = 2e^2\end{aligned}$$

Derivando em relação a y e mantendo x e z constantes, temos

$$\begin{aligned}f_y(x, y, z) &= xe^{xy} \ln z \\f_y(1, 2, e) &= 1 \cdot e^2 \cdot \ln e = e^2\end{aligned}$$

Derivando em relação a z e mantendo x e y constantes, temos

$$\begin{aligned}f_z(x, y, z) &= \frac{e^{xy}}{z} \\f_z(1, 2, e) &= \frac{e^2}{e} = e\end{aligned}$$

$$\therefore \nabla f(1, 2, e) = (2e^2, e^2, e)$$



DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Se f é uma função de n variáveis, suas derivadas parciais $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ também são funções de n variáveis, de modo que podemos derivá-las parcialmente outra vez, chamadas *derivadas parciais de segunda ordem*, a que eu me refiro como dp^2 (de modo geral, às *derivadas parciais*

de enésima ordem, eu me refiro como dp^n). Se $z = f(x, y)$, denotamos suas dp^2 , igualmente às dp^1 , entre outras maneiras, por

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \partial_x \partial_x f$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \partial_y \partial_x f$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \partial_x \partial_y f$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \partial_y \partial_y f$$

Saiba que a notação $\partial^2 f / \partial y \partial x$ ou f_{xy} significa que primeiro devemos derivar parcialmente a função em relação a x e, em seguida, em relação a y . $\partial^2 f / \partial x \partial y$ ou f_{yx} significa o inverso.

EXEMPLO 3 Determine todas as dp^2 de

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$$

No *Exemplo 1*, descobrimos que

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3 \quad \text{e} \quad f_y = 3x^2 y^2 - 4y$$

Logo

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x + 2y^3 \\ f_{yx} &= 6xy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy} &= 6xy^2 \\ f_{yy} &= 6x^2 y - 4 \end{aligned}$$

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ no *Exemplo 3*. Isto é verdade para a maioria das funções. O matemático francês Alexis Clairaut formulou um teorema que nos permite afirmar a igualdade $f_{xy} = f_{yx}$.

Teorema de Clairaut Suponha que f esteja definida em um disco D que contenha o ponto (a, b) , isto é, $(a, b) \in D$. Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D , então $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

EXEMPLO 4 Seja $f(x, y, z) = \cos(x + 2yz)$, calcule f_{xxyz} .

$$\begin{aligned} f_x &= -\sin(x + 2yz) \\ f_{xx} &= -\cos(x + 2yz) \\ f_{xxy} &= 2z \sin(x + 2yz) \\ f_{xxyz} &= 4yz \cos(x + 2yz) + 2 \sin(x + 2yz) \end{aligned}$$

3.1 Exercícios

1-2 Encontre $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ utilizando a definição de derivadas parciais como limites e determine $\nabla f(1, -1)$.

1. $f(x, y) = \frac{x}{y^2+x}$

2. $f(x, y) = 2x^2y - xy^2 + y$

3-8 Determine **todas** as derivadas parciais de segunda ordem.

3. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$

6. $z = \frac{x+y}{1-xy}$

4. $f(x, y) = \sin^2(mx + my)$

7. $v = e^{xe^y}$

5. $v = \frac{xy}{x-y}$

8. $f(x, y) = \ln(mxy + y^2)$

9-12 Verifique se as funções satisfazem o Teorema de Clairaut, isto é, se $z_{xy} = z_{yx}$.

9. $z = x^4y^3 - y^4$

11. $z = e^{xy} \sin y$

10. $z = \cos(x^2y)$

12. $z = \ln(x + 2y)$

Seja f uma função de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

O gráfico de f é a superfície de equação $z = f(x, y)$. Seja $f(x, y) \geq 0$ e S o sólido acima da região R e abaixo do gráfico de f , isto é,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

Concluimos que o volume V de S , a partir de uma demonstração semelhante à integral unidimensional expressa como o valor limite da soma de Riemann, é

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A$$

onde $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Usualmente calculamos uma integral dupla expressando-a como uma *integral iterada*, calculando duas integrais unidimensionais. Se integrarmos a função f em relação a y em $[c, d]$ mantendo x constante, isto é, $\int_c^d f(x, y) \, dy$, obteremos um resultado dependente de x , portanto uma função de x :

$$\phi(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

Em seguida, se integrarmos a função ϕ em relação a x em $[a, b]$, obteremos

$$\int_a^b \phi(x) \, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx \quad (4.1)$$

A integral do lado direito de (4.1) é denominada *integral iterada*. Em geral, os colchetes são omitidos. Assim a integral

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx \quad (4.2)$$

indica que devemos primeiro integrar em relação a y de c até d , depois, em relação a x de a até b . Do mesmo modo, a integral

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy \quad (4.3)$$

indica que devemos primeiro integrar em relação a x de a até b , depois, em relação a y de c até d .

EXEMPLO 1 Determine o valor das integrais iteradas

(a). $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$

(b). $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

(a) Integramos primeiro em relação a y mantendo x constante

$$\int_1^2 x^2 y \, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \frac{2^2}{2} - x^2 \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2} x^2$$

Isto é, a função $\phi(x) = \frac{3}{2}x^2$. Agora integramos ϕ em relação a x de 0 a 3

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

(b) Integramos primeiro em relação a x mantendo y constante

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \int_1^2 9y \, dy = \left[9 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Semelhantemente ao teorema de Clairaut, o resultado das integrais no *Exemplo 1* foi o mesmo independentemente da ordem de integração. ■

Teorema de Fubini Se f for contínua no retângulo

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax \leq b, c \leq y \leq d\}$, então

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R , f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista.

EXEMPLO 2 Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2) \, dA$, onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Pelo teorema de Fubini, podemos dizer

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) \, dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left[\int_1^2 (x - 3y^2) \, dy \right] dx = \int_0^2 \left[xy - y^3 \right]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 (x - 7) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_{x=0}^{x=2} = -12 \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_R y \sin(xy) \, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Será muito mais fácil calcular esta integral se primeiro o fizermos em relação a x (se fizermos em relação a y primeiro, teremos que lidar com integração por partes), então temos

$$\begin{aligned} \iint_R y \sin(xy) \, dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} \, dy \\ &= \int_0^\pi [\cos y - \cos(2y)] \, dy = 0 \end{aligned}$$



Não sei quanto mais de cálculo multivariável a Helô irá passar. Até o momento, estamos em integrais triplas, que, em geral, são calculadas do mesmo modo que integrais duplas. Se virmos mais conteúdo daqui para frente, este meu texto deixará a desejar; já foram muitas horas dedicadas a este escrito. Enfim, terminemos com os últimos exercícios.

4.1 Exercícios

1-8 Calcule as integrais iteradas.

1. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x) \, dy \, dx$
2. $\int_0^1 \int_0^1 u(u - v^2)^4 \, du \, dv$
3. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy \, dx$
4. $\int_0^2 \int_0^\pi r \sin^2 \theta \, d\theta \, dr$
5. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s+t} \, ds \, dt$
6. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2} \, dy \, dx$
7. $\int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 \, dx \, dy \, dz$
8. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \, dz \, dy \, dx$

9-12 Calcule as integrais duplas.

9. $\iint_R \sin(x+y) \, dA$, $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$
10. $\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2} \, dA$, $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
11. $\iint_R ye^{-xy} \, dA$, $R = [0, 2] \times [0, 3]$
12. $\iint_R (3y^2 - x^2 + 2) \, dA$, $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$

APÊNDICE A

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Área entre funções

1. $\frac{9}{2}u^2$

2. $3u^2$

3. $\frac{7}{6}u^2$

4. 15

Integração por frações parciais

1. $3 \ln |x| - 2 \ln |x - 4| + C$

3. $\frac{5}{2} - \ln(6)$

5. $\frac{1}{2} + \ln(6)$

2. $\ln \left| \frac{x-1}{x+4} \right| + C$

4. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{y-a}{y} \right| + C$

6. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{t}{2t^2-2} + K$

Funções multivariáveis e derivadas parciais

Os exercícios desta seção não têm suas repostas neste texto, pois eu, o autor, estava com muita dificuldade de formatá-las corretamente. Em contraste, estava com pouco tempo. Talvez futuramente eu trabalhe nisso. Enquanto isso, use <https://www.derivative-calculator.net/>, <https://www.symbolab.com/>, <https://www.wolframalpha.com/>, entre outros para verificar suas repostas. Como última medida, o leitor pode entrar em contato comigo e me pedir a solução.

Integrais múltiplas

1. 222

4. π

7. $\frac{27}{4}$

10. $\frac{\pi}{3}$

2. $\frac{41}{630}$

5. $\frac{16\sqrt{2}-8}{15}$

8. $\frac{1}{24}$

11. $\frac{5e^6+1}{2e^6}$

3. 2

6. $\frac{4\sqrt{2}-2}{15}$

9. 2

12. $\frac{136}{3}$

APÊNDICE B

CÓDIGO FONTE

Escrevi este texto utilizando a linguagem de marcação \LaTeX , que já queria aprender há algum tempo. A vontade de escrever um texto matemático relativamente rigoroso e a prova de cálculo se avizinhandos foram o estopim para eu deixar a preguiça de lado. E, claro, assim como quase tudo que escrevo, este texto é *código livre* (*free as in freedom and in free beer*). Aos curiosos, deixo o link do repositório no GitHub (é a primeira vez que escrevo, então tá uma bagunça): <https://github.com/rasteli/TeX/blob/main/calc-semester/calc-semester.tex>