# FEUILLES D'EXERCICES D'ALGÈBRE COMMUTATIVE

JOÃO LOURENÇO

## 1. 1ème semaine

## 2. 2ème semaine

(1) Déterminez trois nombres réels $a \in \mathbb{R}$, de sorte que le système d'équations linéaires suivant sur $\mathbb{R}$ soit à solution unique, à plusieurs solutions ou sans solution :

$$\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & 1 \\ 4x & + & ay & = & 2 \end{array}$$

(2) Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 5y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 8. \end{array}$$

Résolvez le système d'équations. Comment sont situés les trois plans dans l'espace les uns par rapport aux autres ?

(3) Soit donné le système d'équations linéaires suivant sur les nombres réels $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

(a) Résolvez le système d'équations par le calcul.
(b) Résolvez le système d'équations graphiquement, en considérant chaque équation séparément.

(4) Résolvez à l'aide de l'algorithme de Gauss le système d'équations linéaires suivant sur les réels $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 9x_2 & + & 10x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 12x_3 & = & 10 \end{array}$$

(5) Les vecteurs suivants engendrent-ils l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^3$ ?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(6) Dans le groupe $G = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$, considérons le sous-groupe $H$ engendré par $(-5, 1)$ et $(1, -5)$. Montrez que $G/H$ est cyclique. À quel groupe cyclique standard est-il isomorphe ?

(7) Dans le groupe $G = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$, considérons le sous-groupe $H$ engendré par $(a, b)$ et $(c, d)$.

(a) Montrez que $\mathbb{Z}^{\oplus 2}/H$ est un groupe fini si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
(b) Dans chacun des cas suivants, déterminez si $G/H$ est cyclique. S'il est cyclique, déterminez à quel groupe cyclique standard il est isomorphe :
  (i) $(a, b) = (3, 4)$, $(c, d) = (6, 7)$
  (ii) $(a, b) = (3, 4)$, $(c, d) = (5, 7)$

(8) Soient $A, B$ des sous-groupes du groupe abélien $C$. On définit $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.
  (a) Montrez que $A + B$ est un sous-groupe de $C$.
  (b) Il existe un homomorphisme naturel $\varphi : A \oplus B \to A + B$, défini par $\varphi(a, b) = a + b$. Montrez que $\varphi$ est surjectif, et que $\varphi$ est un isomorphisme si et seulement si $A \cap B = 0$. En général, quel est $\ker(\varphi)$ ?
  (c) Supposons maintenant que $A$ et $B$ soient tous deux finis. Si $A \cap B$ est non nul, combien d'éléments le sous-groupe $A + B$ possède-t-il ?

(9) (a) Supposons que $A$ soit un groupe abélien. Montrez que l'ensemble $T = \{a \in A \mid \#\langle a\rangle < \infty\}$ est un sous-groupe. On l'appelle le « sous-groupe de torsion » de $A$.
  (b) Montrez que dans le groupe quotient $A/T$, tout élément non nul est d'ordre infini. Ainsi $A/T$ est « sans torsion ».
  (c) Soit $A$ un groupe abélien. Expliquez comment définir un sous-groupe $H$ tel que dans le quotient $A/H$, chaque élément $a + H$ satisfasse $3a + H = 0$. Existe-t-il un plus petit tel sous-groupe ?

(10) Soient $A$ et $B$ des sous-groupes d'un groupe abélien $C$. Cet exercice étudie le sous-groupe $A + B$ et son quotient $(A + B)/B$.
  (a) Montrez que tout élément de $(A + B)/B$ peut s'écrire sous la forme $a + B$ pour un certain $a \in A$.
  (b) Construisez un homomorphisme surjectif $A \to (A + B)/B$.
  (c) Prouvez qu'il existe un isomorphisme $A/(A \cap B) \to (A + B)/B$.

## 3. 3ème semaine

(1) Calculez le déterminant des matrices suivantes:
  (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
  (b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & (x_2 + \cdots + x_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & (x_1 + \cdots + x_{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$
  (c)
$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_2 \dots x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_1 \dots x_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) Calculez le polynôme caractéristique de la matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(3) Calculez le déterminant de la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}$$

(4) Prouvez que pour $n \geq 3$, les termes dans le développement d'un déterminant d'ordre $n$ ne peuvent pas être tous positifs.

(5) (a) Existe-t-il des matrices réelles $A$ et $B$ telles que $AB - BA = I$ ?
   (b) Prouvez que si $AB - BA = A$ avec matrices réelles, alors $\det(A) = 0$.

(6) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \lambda_i/\lambda_j$.

(7) Prouvez que les valeurs propres d'une matrice dépendent continûment de ses éléments.

(8) La somme des éléments de chaque ligne d'une matrice inversible $A$ est égale à $s$. Prouvez que la somme des éléments de chaque ligne de $A^{-1}$ est égale à $1/s$.

(9) Soit $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, où $A$ est une matrice d'ordre $n$. Prouvez que $f'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \det(\lambda I - A_i)$, où $A_i$ est la matrice obtenue à partir de $A$ en supprimant la $i$-ème ligne et la $i$-ème colonne.