FEUILLES D'EXERCICES DE TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

JOÃO LOURENÇO

1.

(1) Soient X et Y deux espaces topologiques. On définit la topologie produit sur le produit ensembliste $X \times Y$ comme celle engendrée en déclarant les produits $\{U \times V\}$ d'ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$ comme une base. Vérifiez que cela satisfait les axiomes d'une base

(2) Montrez que X est séparé si et seulement si la diagonale $\{(x,x), x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.

(3) Montrez que si X est quasi-compact, alors le quotient X/R de X par n'importe quelle relation d'équivalence R est quasi-compact.

(4) Identifiez les espaces topologiques quotients suivants :
  (a) $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0)\}/\mathbb{R}^\times$ est homéomorphe à S^1.
  (b) $S^{n-1} \times [0,1]/S^{n-1} \times \{0\}$ est homéomorphe à B^n.
  (c) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est homéomorphe à quel espace ?

(5) Notons A et B les parties de la sphère S^n avec $n = p + q$ définies par

$$A = \{X = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \colon \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \geq 1/2\},$$

$$B = \{X = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \colon \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \leq 1/2\}.$$

Montrez que l'on a des homéomorphisme $A \cong S^{p-1} \times [0,1]^{q+1}$ et $B \cong S^p \times [0,1]^q$ et en déduisez que S^3 est la réunion de 2 copies de $S^1 \times [0,1]^2$.

(6) Montrez que les groupes topologiques $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, SU_n et U_n sont compacts connexes et que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact à deux composantes connexes.

2.

(1) Soit G un groupe topologique séparé et H un sous-groupe discret de G. Notons $q \colon G \to G/H$ la surjection canonique.
  (a) Exhiber deux voisinages W et V de 1 tels que $W \cap H = 1$, $V = V^{-1}$ et $VV^{-1} \subset W$. Montrer que $hV \cap h'V = \emptyset$ pour $h \neq h' \in H$.
  (b) Montrer que H est un fermé de G. En déduire que G/H est séparé.
  (c) Si G est connexe, montrer que $H \subset Z(G)$, donc H est commutatif.
  (d) Supposons H distingué dans G. Montrer que $1 \in G/H$ admet un voisinage U tel que $q^{-1}(U) = \sqcup U_i$ où les U_i sont disjoints deux à deux et s'identifient à U par q. En déduire qu'il en est de même pour chaque $\bar{g} \in G/H$.

(2) Montrer que l'application qui associe à un espace vectoriel son orthogonal induit un homéomorphisme $\mathrm{Vect}_k(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{Vect}_{n-k}(\mathbb{R}^n)$.
(3) Donner une décomposition cellulaire finie du tore.
(4) Montrer que un complexe CW fini est connexe par arcs lorsque son 1-squelette l'est.
(5) Montrer que tout complexe CW fini est compacte.