

# **Théorie de Bruhat-Tits, grassmanniennes affines et modèles locaux**

Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades (Dr. Rer. Nat.)  
der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von  
João Nuno Pereira Lourenço  
aus  
Porto

Bonn, 2020

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter : Prof. Dr. Peter Scholze  
2. Gutachter : Prof. Dr. Gerd Faltings  
Tag der mündlichen Prüfung : 23.09.2020  
Erscheinungsjahr : 2020

## Table des matières

Lebenslauf	5
Zusammenfassung	9
Agradecimentos	11
Introduction	13
Chapitre 1. Théorie de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs	35
Chapitre 2. Grassmanniennes affines tordues sur les entiers	69
Chapitre 3. On the normality of Schubert varieties : remaining cases in positive characteristic	115
Chapitre 4. Local models : between two worlds	153



# Lebenslauf

## Persönliche Angaben

Name : João Nuno Pereira Lourenço  
Geburtsdatum : 27. April 1994  
Geburtsort : Porto  
Staatsangehörigkeit : Portugiesisch  
Email : jnunolour@gmail.com

## Schulausbildung

2000-2004 : Escola EB1/JI Caramila, Porto  
2004-2009 : Escola EB 2,3 de Maria Lamas, Porto  
2009-2012 : Escola Secundária Filipa de Vilhena, Porto

## Studium

2012-2015 : Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.  
2014-2015 : Erasmusjahr an der University of Warwick

2015-2017 : MSc Mathematik, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn  
Thema : „Riemann’s extension lemma for adic spaces“ bei Prof. Dr. Peter Scholze.

2017-2020 : Dr. rer. nat. in Mathematik, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn  
Thema : „Théorie de Bruhat-Tits, grassmanniennes affines et modèles locaux“ bei Prof. Dr. Peter Scholze.

## Berufstätigkeit

2017-2020 : Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Mathematisches Institut der Universität Bonn, Arbeitsgruppe Algebraische Arithmetische Geometrie.  
2020-2022 : Research Associate in Number Theory, Imperial College London.

## Aufsätze

1. *A multiparameter family of irreducible representations of the quantum plane and of the quantum Weyl algebra*, mit Samuel A. Lopes, Portugaliae Mathematica, no. 72 (2015), 407-419.
2. *The Riemannian Hebbbarkeitssätze for pseudorigid spaces*, arXiv :1711.06903.
3. *Grassmanniennes affines tordues sur les entiers*, eingereicht, arXiv :1912.11918.
4. *Théorie de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs*, wird bei Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu erscheinen, arXiv :2001.05362.
5. *On the normality of Schubert varieties : remaining cases in positive characteristic*, mit T. J. Haines und T. Richarz, in Vorbereitung.
6. *Local models : between two worlds*, in Vorbereitung.
7. *The special fiber of diamond local models*, mit J. Anschütz und T. Richarz, in Vorbereitung.

## Stipendien

2012-2014 : Fundação Gulbenkian, "Novos Talentos em Matemática"

2015-2017 : BIGS-Stipendium, HCM Bonn

2017-2019 : SFB/Transregio 45 „Perioden, Modulräume und Arithmetik algebraischer Varietäten“.

## Vorträge

20./27. April 2017. The Riemannian Hebbbarkeitssatz for pseudo-rigid spaces I/II, Bonn.

20. Dezember 2018. Local models for some wildly ramified groups, Bonn.

30. August 2019. Twisted Kac-Moody groups over the integers, Luminy.

11. Oktober 2019. Integral affine Grassmannians of twisted groups and local models of Shimura varieties, London.

21. Oktober 2019. Twisted affine Grassmannians over  $\mathbb{Z}$ , Oaxaca.

21. November 2019. Bruhat-Tits theory for pseudo-reductive groups, Bonn.

28. November 2019. Twisted affine Grassmannians in wildly ramified cases, Bonn.

### **Sprachkenntnisse**

Portugiesisch (Muttersprache), Deutsch (verhandlungssicher), Englisch (verhandlungssicher), Französisch (verhandlungssicher), Spanisch (verhandlungssicher)





## Zusammenfassung

Die Theorie von Bruhat-Tits wird für diejenigen quasireduktiven Gruppen über ausgezeichneten, Henselschen und diskret bewerteten Körpern ausgearbeitet, die über der strikten Henselisierung quasizerfallen. Anschließend wird diese Theorie angewandt, um gewisse Familien von Bruhat-Tits-Gruppenschemata in ungleicher Charakteristik aufzubauen, die jeweils frühere Konstruktionen von Pappas-Zhu und Tits verallgemeinern. Mithilfe dieser gruppentheoretischen Erkenntnissen werden die geometrischen Eigenschaften affiner Graßmannschen untersucht, die daraus entstehen, wenn eine der Hauptannahmen der Werke von Pappas-Rapoport und Pappas-Zhu entfernt wird, und zwar die zahme Verzweigung der behandelten Gruppen bzw. die Étaleheit der Überlagerung  $G^{\text{sc}} \rightarrow G^{\text{der}}$  in gleicher Charakteristik. Falls die wild verzweigte Erweiterung durch ein zyklisches Eisenstein-Polynom gegeben ist, gilt die Normalität von Schubertvarietäten, deren Beweis auf einer Verfeinerung eines auf Faltings zurückgehenden Ansatzes basiert, und die Reduziertheit der speziellen Faser lokaler Modelle, die auf Zhus Kohärenzsatzes zurückgeht. Falls die einfach zusammenhängende Überlagerung nicht étale ist, wird in Zusammenarbeit mit T. J. Haines und T. Richarz gezeigt, dass Schubertvarietäten üblicherweise nicht normal sind. Schließlich wendet man die mit reinen charakteristikgemischten Methoden aufgebauten perfektoiden affinen Graßmannschen Scholzes an, um schwach normale lokale Modelle von Shimuravarietäten vom abelschen Typ einzuführen.



## Agradecimentos

Perdi os dias que já aproveitara.  
Trabalhei para ter só o cansaço  
Que é hoje em mim uma espécie de braço  
Que ao meu pescoço me sufoca e ampara.

---

Fernando Pessoa, *Opiário*

Com efeito, esta tese, a menos do alívio e amparo da sua conclusão, pouco mais me proporcionou que um constante estado de desassossego. Livre-se o seu pobre leitor, portanto, de julgar encontrar algo que não um pantâno lamacento no qual chafurdar. Finda a advertência, passo às sóbrias demonstrações de gratidão para com aqueles que me estenderam a mão ao longo do caminho algo atribulado. Em primeiro lugar, devo agradecer sobremaneira ao meu orientador, que se esforçou por ir além dos limites dos seus conhecimentos ou do seu tempo para me auxiliar, sem se aborrecer muito comigo, nem interrompendo constantemente os meus esclarecimentos, quer seja porque percebia tudo logo à primeira, quer porque fingia percebê-lo tão bem quanto eu na minha vez de o escutar. Em segundo lugar, um agradecimento especial é devido ao Timo, pelo seu entusiasmo e por ser uma fonte de inspiração no âmbito da colaboração matemática. Gostaria igualmente de salientar o meu profundo reconhecimento da vastíssima e sempre pertinente obra díspar de Jacques Tits, que se foi cruzando com algumas das minhas humildes ideias nos momentos em que menos esperava. De resto, há muitos outros indivíduos com os quais pude ter discussões valiosas, que ajudaram esta tese a ir para a frente. Pese embora me haja esquecido de alguns deles, ei-los : Johannes, Arthur-César, Alex, Sebastian, Linus, Lucas, Ana Caraiani, Tom Haines, Brian Conrad, Michael Rapoport. Por fim, sobram porventura os mais importantes, aqueles que, tendo também recheado o meu percurso de vários conselhos matemáticos úteis, desempenharam simultaneamente um papel bem mais presente e próximo na minha vida pessoal, vendo-se obrigados a aguentar-me e aturar-me : a minha amada esposa Mafalda, o Serginho, o João e o Zé. A nível das instituições, devo uma palavra de apreço à universidade de Bona, que não só apostou na minha formação durante o último lustro, como também forneceu um ambiente matemático estimulante e difícil de superar - já do sócio-cultural não se pode dizer o mesmo, por vários motivos. Além disso, algumas das minhas estadias mais frutíferas, conquanto breves, incluem passagens por Cartago, Marselha, Lião, Londres, Paris e Oaxaca.



## Introduction

# SCHWERPUNKTE DER VORLIEGENDEN DISSERTATION

JOÃO NUNO PEREIRA LOURENÇO

ZUSAMMENFASSUNG. In der vorliegenden kumulativen Dissertation handelt es sich um unterschiedliche Beiträge und Untersuchungen über die Singularitäten und das geometrische Verhalten verschiedener algebraischer Räume, die letztendlich üblicherweise mit Shimura-Varietäten eng verwandt sind. Hier werden die grundlegenden Ideen erläutert, die eine unentbehrliche Rolle beim Aufbau dieser Arbeit gespielt haben.

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Grundlagen	1
1.1. Shimura-Varietäten	1
1.2. Lokale Modelle	2
1.3. Bruhat-Tits-Theorie	3
1.4. Affine Graßmannsche	4
1.5. Kohärenzsatz	6
1.6. Potenzreihen-Ansatz	7
1.7. Pseudoreduktive Gruppen	8
2. Ergebnisse	10
2.1. Quasireduktive BT-Theorie	10
2.2. Zyklotomische Familien von BT-Gruppenschemata	11
2.3. Zyklotomische affine Graßmannschen	13
2.4. Nichtnormale Schubert-Varietäten	14
2.5. Perioden-Ansatz	15
3. Leitfaden	17
4. Zukunftsmusik	18
Literatur	18

## 1. GRUNDLAGEN

**1.1. Shimura-Varietäten.** Die auf G. Shimura zurückgehenden und von P. Deligne ([De71], [De79]) formal eingeführten Shimura-Varietäten sind wichtige Forschungsobjekte der arithmetischen algebraischen Geometrie, weil sie eine Tür zwischen der automorphen und der Galoisschen Welt öffnen, welche der mathematischen Gemeinschaft ermöglicht hat, einen nicht unerheblichen Anteil des Langlands-Programms zu verifizieren. Sie werden durch das Datum einer (meistens zusammenhängenden) reduktiven  $\mathbb{Q}$ -Gruppe, einer reellen Konjugationsklasse  $X$  von Morphismen  $h : \mathrm{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} G_m \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ , die Delignes Axiome erfüllt, und einer (genügend kleinen) kompakten offenen Untergruppe  $K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$  bestimmt. Die Shimura-Varietät  $S_K(G, X)$  ist ein quasiprojektives glattes  $E$ -Schema, deren komplexwertigen Punkte

über die folgende Uniformisierung verfügen:

$$S_K(G, X)(\mathbb{C}) \cong G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

Hier wird mit  $E$  der Definitionskörper der geometrischen Konjugationsklasse winziger Kogewichte  $\mu_X = \{\mu_h\}$ , wobei

$$\mu_h : \mathbb{G}_m \xrightarrow{(1,0)} \mathbb{G}_m^2 \xrightarrow{h_{\mathbb{C}}} G_{\mathbb{C}}.$$

Zur Konstruktion, fängt man mit diesen Doppelnebenklassen an, versieht sie in natürlicher Weise mit der Struktur eines lokal Hermiteschen symmetrischen Raumes, welcher dann algebraisierbar ist. In den sogenannten PEL-Fällen  $(G, X)$ , lässt sich  $S_K(G, X)$  als Modulraum abelscher Varietäten mit Zusatzstrukturen (wie z. B. Polarisierungen, Endomorphismen und Niveau) auffassen. Ähnliche oder zumindest befriedigende Beschreibungen dieser Varietäten sind noch in den Fällen vom Hodge-Typ zu finden, d. h. wenn das Shimuradatum  $(G, X)$  sich in das Siegelsche Shimura-Datum  $(\mathrm{GSp}_{2g}, X_{\mathrm{Sieg}})$  einbettet.

Das vielfältige Interesse an diesen Räumen hat sich allmählich in der Untersuchung deren Reduktion oder Arithmetik verwirklicht; für die Modulkurven ist der Aufsatz [DR73] von P. Deligne und M. Rapoport besonders nennenswert. Heutzutage wird mit zunehmender Häufigkeit ein „kanonisches“ ganzzahliges Modell  $\mathcal{S}_K(G, X)$  von  $S_K(G, X)$  über  $\mathcal{O}_{E, \mathfrak{p}}$  gesucht, wobei  $\mathfrak{p}$  eine die Primzahl  $p$  überliegende Primstelle von  $E$  ist, sodass  $K$  in ein Produkt  $K^p K_p \subseteq G(\mathbb{A}_f^p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  mit parahorischer Stufe  $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$  zerlegt. Je einfacher die modulräumliche Beschreibung der Shimura-Varietäten (wenn sie vorhanden ist) oder je milder das Verzweigungsverhältnis des zu  $K_p$  zugeordneten parahorischen Gruppenschemas, desto besser wird die Kanonizität und Eigenschaften dieser Konstruktionen verstanden.

**1.2. Lokale Modelle.** Der nächste Schritt in unseren Überlegungen besteht darin, die Singularitäten der speziellen Faser eines kanonischen Modells  $\mathcal{S}_K(G, X)$  zu untersuchen. An dieser Stelle, taucht das Problem auf, dass die Singularitäten sich nicht so leicht unmittelbar aus dem Kenntnis von  $\mathcal{S}_K(G, X)$  (sogar als Funktor) erforschen lassen. Um dieses Hindernis zu umgehen, ist die in der wegberaubenden Arbeit [DP94] von P. Deligne und G. Pappas anwesende Bemerkung angewandt worden, die folgendermaßen lautet. Genau wie man einen natürlichen glatten Morphismus

$$S_K(G, X) \rightarrow [\mathcal{F}_{G, \mu}/G]$$

der relativen Dimension  $\dim G$  hat, wobei durch  $\mathcal{F}_{G, \mu} := G/P_G(-\mu_0)$  die zur Konjugationsklasse winziger Kogewichte  $\mu_0 \in \mu$  standard zugeordnete Fahnenvarietät gekennzeichnet wird, so sollte man ein projektives flaches  $\hat{\mathcal{O}}_{E, \mathfrak{p}}$ -Modell  $\mathbb{M}_{G, \mu}$  von  $\mathcal{F}_{G, \mu}$  finden, das mit einem natürlichen glatten Morphismus der relativen Dimension  $\dim G$  versehen wird:

$$\mathcal{S}_K(G, X) \rightarrow [\mathbb{M}_{G, \mu}/\mathcal{G}].$$

Solche mutmaßliche Räume  $\mathbb{M}_{G, \mu}$  sind die sogenannten lokalen Modelle von Shimura-Varietäten. Deren grundlegende Eigenschaft liefert einen étale-lokalen Isomorphismus mit dem ganzzahligen kanonischen Modell  $\mathcal{S}_K(G, X)$ . Das hat zum Vorteil, dass die lokalen Modelle weitaus weniger komplex sind, insbesondere was die Analyse deren Reduktion angeht.

In den PEL-Fällen wurden zuerst systematisch von M. Rapoport und T. Zink ([RZ96]) gewisse Modulräume  $\mathbb{M}_{\mathcal{G},\mu}^{\text{naiv}}$  eingeführt, welche linearalgebraischen Daten parametrisieren, die in enger Korrespondenz mit den Daten abelscher Varietäten und ihrer Zusatzstrukturen stehen. Gegeben seien z.B. eine endliche Körpererweiterung  $F/\mathbb{Q}_p$ ,  $G = R_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}(V)$ ,  $\mu = (\varpi_{d_\varphi}^\vee)_{\varphi:F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p}$  und  $\mathcal{G} = \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda_\bullet)$ , wobei  $\varpi_{d_\varphi}^\vee$  das  $d_\varphi$ -te fundamentale Kogewicht ist und  $\Lambda_\bullet$  eine periodische  $\mathcal{O}_F$ -Gitterkette von  $V$ . Definiere das naive Modell  $\mathbb{M}_{\mathcal{G},\mu}^{\text{naiv}}$  als den Funktor, dessen  $R$ -wertige Punkte periodische  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ -Modulquotienten  $M$  von  $\Lambda \otimes R$  parametrisiert, die als  $R$ -Moduln endlich projektiv sind und deren  $\mathcal{O}_F$ -Wirkung eine Gleichheit polynomialer Abbildungen

$$\det(a; M) = \prod_{\varphi:F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p} (X - \varphi(a))^{d_\varphi}$$

für alle  $a \in \mathcal{O}_F$  liefert, wobei die rechte Seite gleich dem Bild in  $R[X]$  des in  $\mathcal{O}_E[X]$  liegenden Polynoms ist. Leider sind diese Räume fast nie flach über dem Ganzheitsring  $\mathcal{O}_E$ , sobald  $F$  verzweigt über  $\mathbb{Q}_p$  ist (solche und andere Mängel an Flachheit wurden zuerst von G. Pappas bei [Pa00] hervorgehoben). Zunächst versuchten die sich damit befassenden Mathematiker, die Modulräume leicht zu verbessern, indem sie raffiniertere linearalgebraische Bedingungen forderten ([PRS13]). Aber es gab noch mehrere Schwierigkeiten: abgesehen von der verschwendenden Mühe in die Frage der Flachheit der iterierten Modulräume, konnte man am Ende kaum Sätze über die Reduktion dieser Räume finden. Dafür wurden neue Einfälle benötigt, und zwar wesentliche Beiträge aus der Theorie affiner Graßmannschen.

**1.3. Bruhat-Tits-Theorie.** In den 70er-/80er-Jahren haben F. Bruhat und J. Tits zwei revolutionäre und beeinflussende Aufsätze ([BT72], [BT84a], [BT84b], [BT87a], [BT87b]) zu reduktiven Gruppen über nichtarchimedischen Körpern  $k$  veröffentlicht. Diese Forschungsrichtung wurde initiiert in den Untersuchungen von O. Goldman und N. Iwahori ([GI63]) bzw. N. Iwahori und H. Matsumoto ([IM65]). In dem Aufsatz [GI63] von O. Goldman und N. Iwahori ist das Gebäude von  $\text{SL}(V)$  oder  $\text{PGL}(V)$  eingeführt worden. Das ist der Raum aller Homothetieklassen zerlegbarer (oder kartesischer) additiver Normen auf  $V$ , d.h. die eine orthogonale Basis  $e_i$  besitzen. Auf diese Menge operiert auf natürliche Weise  $\text{SL}(V)$  und sie hat eine kanonische Struktur eines Simplicialkomplexes. Im Fall von  $\text{SL}_2$  erhält man einen Baum im Sinne der Graphentheorie und die Punktfixatoren sind bis auf  $\text{PGL}_2(k)$ -Konjugation gleich  $\text{SL}_2(\mathcal{O})$  oder die übliche Iwahori-Untergruppe  $I$ , d.h. die Automorphismengruppe der periodischen Gitterkette

$$\varpi \mathcal{O}^2 \subseteq \mathcal{O} \oplus \varpi \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^2.$$

N. Iwahori und H. Matsumoto ([IM65]) haben im darauffolgenden Artikel hyperspezielle und Iwahori-Untergruppe von  $G(k)$  definiert, wobei  $G$  eine zerfallende  $k$ -Gruppe ist, um die ringtheoretische Struktur der Iwahori-Hecke-Algebra erfassen zu können. Hierbei wurden diese Untergruppen algebraisch nur noch als Bogen Gruppen verstanden, d.h. man sah nur noch den unendlich-dimensionalen Funktor über dem Restklassenkörper, anstatt des ganzzahligen Gruppenmodells.



Die Bruhat-Tits-Theorie bietet uns einen allgemeinen Begriff des Gebäudes  $\mathcal{J}(G, k)$  und der parahorischen Untergruppen von  $G(k)$ , welche in schematheoretische ganzzahlige Modelle verwandelt werden. Hier wird mit  $k$  ein Henselscher, diskret bewerteter Körper  $k$  bezeichnet und mit  $G$  eine  $k^{\text{nr}}$ -quasizerfallende zusammenhängende reduktive  $k$ -Gruppe. Der erste Teil ([BT72]) des Werkes von Bruhat-Tits kümmert sich fast ausschließlich um die Kombinatorik von Gebäuden, die zu abstrakten Gruppen mit Zusatzstrukturen zugeordnet werden. Im zweiten Teil ([BT84a]) wird die algebraische Ansicht angenommen und die parahorischen Gruppenschemata aufgebaut. Der dritte Teil ([BT87a]) gibt kohomologische Anwendungen der entwickelten Theorie und die zwei letzten Teile ([BT84b], [BT87b]) veranschaulichen die abstrakte Theorie durch ausführliche Beschreibung der zu klassischen Gruppen zugeordneten Gebäude und Gruppenschemata.

Wir erläutern zuerst die Kombinatorik. Ist  $S$  ein maximal zerfallender Untertorus von  $G$ , so liegt im Gebäude  $\mathcal{J}(G, k)$  ein zu  $S$  zugeordnetes Appartement  $\mathcal{A}(G, S, k)$ , d.h. ein affiner Raum versehen mit einer durch Hyperebenen erzeugten Struktur eines Simplicialkomplexes. Die Punkten des Appartements  $\mathcal{A}(G, S, k)$  stehen in Bijektion mit gewissen „Bewertungen“  $(\varphi_a)_{a \in \Phi(G, S)}$  im Sinne von F. Bruhat und J. Tits ([BT72]) des gruppentheoretischen Wurzeldatum  $(Z(k), U_a(k))_{a \in \Phi(G, S)}$ . Hier sind die  $\varphi_a : U_a(k) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  Abbildungen, die sich wie Bewertungen verhalten und die einige aufgelistete Verträglichkeitsaxiome erfüllen, damit die Untergruppe  $N(k)$  auf deren Menge durch die Iwahori-Weyl-Gruppe  $W = N(k)/\mathcal{Z}(\mathcal{O})$  operieren kann, wobei  $\mathcal{Z}$  das eindeutige parahorische Modell des Zentralisators  $Z$  von  $S$  ist. Ist  $G$  eine zerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe und fixiert man eine Chevalleybasis der Lie-Algebra, so lässt sich eine Bewertung durch  $\varphi_a(x_a(c)) = \omega(c)$  definieren. Hierbei liegt  $c$  in  $k$ ,  $\omega : k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ist die normalisierte additive Bewertung von  $k$  und  $x_a : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U_a$  wird durch die Chevalleybasis induziert. Das Gebäude  $\mathcal{J}(G, k)$  ergibt sich aus dem Appartement  $\mathcal{A}(G, S, k)$  mit seinem kanonischen  $N(k)$ -Wirkung, sobald man erfordert dass der Fixator von  $\varphi$  innerhalb  $U_a(k)$  mit der Untergruppe  $\varphi^{-1}([0, +\infty])$  übereinstimmt.

Was die BT-Gruppenschemata angeht, haben sich viele Ansätze bei der Literatur multipliziert. Zur Präzision möchten wir einer nichtleeren beschränkten Teilmenge  $\Omega$  von  $\mathcal{A}(G, S, k)$  ein glattes, affines und faserweise zusammenhängendes Gruppenschema  $\mathcal{G}_\Omega$  zuordnen, dessen ganzzahlige Punkte  $\Omega$  fixieren. Hierfür setzt man immer  $k = k^{\text{nr}}$  voraus. F. Bruhat und J. Tits ([BT84a]) konstruieren zuerst die entsprechenden Modelle  $\mathcal{U}_{a, \Omega}$  der Wurzelgruppen per Hand und nehmen das faserweise zusammenhängende Néron-Modell  $\mathcal{Z}$  des Torus  $Z$ . Sie zeigen dann mithilfe darstellungstheoretischen Überlegungen der ganzzahligen Natur, dass  $\mathcal{Z}$  und  $\mathcal{U}_{a, \Omega}$  sich in das erwünschte  $\mathcal{G}_\Omega$  zusammenstellen lassen. E. Landvogt ([La96]) ersetzt die Darstellungstheorie durch birationale Gruppengesetze. J.-K. Yu ([Yu15]) konstruiert zuerst  $\mathcal{G}_\Omega$  als Verglattung eines beliebigen flachen Modells mit dem richtigen ganzzahligen Punkten, und nur dann untersucht er die abgeschlossenen Untergruppen  $\mathcal{Z}$  und  $\mathcal{U}_{a, \Omega}$ .

**1.4. Affine Graßmannsche.** Lege einen Körper  $k$  zugrunde und setze  $F = k((t))$ ,  $\mathcal{O} = k[[t]]$ . Ist  $\mathcal{G}$  ein glattes, affines  $\mathcal{O}$ -Gruppenschema, so definiert man die affine Graßmannsche  $\text{Gr}_{\mathcal{G}}$  von  $\mathcal{G}$  als den Funktor auf  $k$ -Algebren, der  $\mathcal{G}$ -Torsore über  $k[[t]]$  versehen mit einer Trivialisierung über  $k((t))$  parametrisiert. Die zu  $\mathcal{G}$  zugeordnete affine Graßmannsche ist darstellbar

durch ein indquasiprojektives Indschema, d.h. ein Indobjekt in der Kategorie von Schemata, das eine quasiprojektive Darstellung besitzt, und dessen Übergangsabbildungen abgeschlossene Immersionen sind. Sie trägt auch eine natürliche Operation durch die Bogengruppe  $L^+\mathcal{G} = R_{\widehat{k[[t]]/k}}\mathcal{G}$  und einen natürlichen  $L^+\mathcal{G}$ -Rechtstorsor  $L\mathcal{G} = R_{\widehat{k((t))/k}}\mathcal{G} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ . Hierbei ist  $L\mathcal{G}$  die Schleifengruppe von  $\mathcal{G}$ . Trotz der langen Geschichte dieser Objekte in der Mathematik, die hier nicht vollständig erläutert wird, sollte man zumindest erwähnen, dass sie erst durch die Arbeiten von A. Beauville und Y. Laszlo ([BL94]) und von A. Beilinson und V. Drinfeld ([BD96]) fest in die algebraische Geometrie eingetreten sind.

Die interessantesten Graßmannschen aus geometrischem Sicht sind diejenigen, die zu einem parahorischen  $\mathcal{O}$ -Gruppenmodell  $\mathcal{G}$  einer zusammenhängenden reduktiven Gruppe  $G$  zugeordnet werden, welche häufig in der Literatur affine Fahnenvarietäten genannt werden. Betrachte den Fundamentalfall  $\mathcal{G} = \mathrm{GL}_n$ . Dann klassifiziert die Graßmannsche  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  endliche projektive  $R[[t]]$ -Moduln  $\Lambda \subseteq R((t))^{\oplus n}$ , sodass  $\Lambda[t^{-1}] = R((t))^{\oplus n}$ . Über dem Körper  $k$  existiert die Invariante  $\mu := (\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$  der relativen Position zwischen  $\Lambda$  und  $\Lambda_0$ , aus welcher eine Stratifizierung

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n} = \bigcup_{\mu \in \mathbb{Z}_+^n} \mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n, \mu}$$

in  $L^+\mathrm{GL}_n$ -stabile lokal abgeschlossene glatte quasiprojektive Schemata abgeleitet wird, wobei die obige disjunkte Vereinigung im topologischen Sinne aufgefasst werden muss. Den schematheoretischen Abschluss  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n, \leq \mu}$  der Schubertzelle  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n, \mu}$  innerhalb  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n}$  nennt man die zu  $\mu$  zugeordnete Schubert-Varietät. Die Abschlussrelationen zwischen verschiedenen Schubertzellen lassen sich kombinatorisch durch die Gültigkeit der folgenden Ungleichungen ausdrücken:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ , wobei falls  $i = n$  Gleichheit gilt. In ähnlicher Weise definiert man Stratifizierungen für die affine Graßmannsche eines parahorischen Gruppenschemas  $\mathcal{G}$ , deren geometrischen  $L^+\mathcal{G}$ -Bahnen durch einen Quotient  $W_{\mathcal{G}}$  der sogenannten Iwahori-Weyl-Gruppe  $W$  für die generische Faser  $G$  aufgezehlt werden.

Der größte Lehrsatz bezüglich Schubert-Varietäten, der auf G. Faltings ([Fal03]) für zerfallende Gruppen und G. Pappas und M. Rapoport ([PR08]) für verdrehte Gruppen zurückgeht, besagt dies: ist  $G$  zahm verzweigt über  $F$  und der Kern  $G^{\mathrm{sc}} \rightarrow G$  étale über  $F$ , so sind alle Schubert-Varietäten  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq w}$  der affinen Fahnenvarietät normal (unter anderen wichtigen geometrischen Eigenschaften). Die étale Annahme führt den Satz auf den einfach zusammenhängenden Fall  $G = G^{\mathrm{sc}}$  zurück; o.E. seien noch  $G$  absolut einfach,  $k$  algebraisch abgeschlossen und  $\mathcal{G}$  ein Iwahori-Gruppenschema. Da  $G$  zahm verzweigt ist, ist sein Zerfällungskörper gleich  $F(t^{1/e})$  mit  $e = 1, 2, 3$ . In Charakteristik 0, folgt die Normalität aus analytischen Methoden.

In positiver Charakteristik, nutzt man die Spaltbarkeit der Frobeniusabbildung der Normalisierung  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq w}^n$  in der Kategorie quasikohärenter Garben. Das führt uns zum durch

das Kolimes der Normalisierungen gegebenen Indschema  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^n$  (m.a.W. die Transitionsabbildungen sind Einbettungen). Zunächst hebt man die ganze Lage auf dem Ring  $W(k)$  der  $p$ -typischen Wittvektoren hoch, indem das folgende Gruppenschema über  $W(k)[t]$  aufgebaut wird:

$$\underline{\mathcal{G}} = (\mathrm{R}_{W(k)[t^{1/e}]/W(k)[t]} \underline{\mathcal{H}})^{\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}.$$

Hier wird mit  $H$  die zerfallende Form von  $G$  bezeichnet (aufgefasst als Chevalley-Gruppe) und mit  $\underline{\mathcal{H}}$  ein geeignetes parahorisches Modell für  $H$  über  $W(k)[t]$ . Die Wirkung der zyklischen Gruppe bildet man aus dem Tensorprodukt von Diagrammautomorphismen von  $H$  und den Galoisautomorphismen. Betrachte nun die Normalisierungsabbildung in unendlichem Niveau über  $W(k)$ :

$$\mathrm{Gr}_{\underline{\mathcal{G}}}^n \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$$

Da beide Indschemata indflach über der Basis sind, wäre es genug, die Surjektivität des Monomorphismus von  $W(k)$ -Tangentialmoduln zu belegen. Einerseits wird der Tangentialmodul von  $\underline{\mathcal{G}}$  durch seine von Null verschiedene Wurzeluntermoduln erzeugt. Andererseits wirken die Schleifengruppen  $\underline{LU}_a$  in verträglicher Weise auf der Normalisierung.

**1.5. Kohärenzsatz.** Bei ihrer unvollendeten Arbeit haben A. Beilinson und V. Drinfeld ([BD96]) eine natürliche Deformation der obigen affinen Graßmannschen gegeben, manchmal auch als globale affine Graßmannschen bekannt. Sei  $k$  ein Körper,  $X$  eine glatte geometrisch zusammenhängende Kurve über  $k$  und  $\mathcal{G}$  ein glattes und affines Gruppenschema über  $X$ . Die globale affine Graßmannsche  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, X/k}$  ist der Funktor auf  $X$ -Algebren, der  $\mathcal{G}$ -Torsoren über  $X \otimes_k R$  mit einer Trivialisierung außerhalb des Graphen von  $\mathrm{Spec} R \rightarrow X$  parametrisiert. Aus dem Abstiegslemma von A. Beauville und Y. Laszlo ([BL95]) ergibt sich eine kanonische Identifikation der Faser  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, X/k} \otimes k$  über einem beliebigen rationalen Punkt  $x \in X(k)$  mit der lokalen affinen Graßmannschen von  $\mathcal{G} \otimes_X \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ .<sup>1</sup> Die globale affine Graßmannsche ist darstellbar durch ein indendlich dargestelltes Indschema über  $k$  und verfügt über eine Bogen- $\mathcal{L}^+ \mathcal{G}$  und eine Schleifengruppen  $\mathcal{L} \mathcal{G}$ .

Es werde nun vorausgesetzt, dass  $k$  algebraisch abgeschlossen ist,  $X = \mathrm{Spec} k[t]$ ,  $\mathcal{G}$  ein parahorisches  $k[t]$ -Gruppenmodell eines zahm verzweigten, faserweise zusammenhängenden, reduktiven  $k[t^{\pm 1}]$ -Gruppenschema  $G$  ist, dessen einfache zusammenhängende Überlagerung étale ist. Aufgrund der Parahorizität von  $\mathcal{G}$  ergibt sich die Indprojektivität der globalen affinen Graßmannschen  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, X/k}$ , deren Basiswechsel auf  $k[t^{\pm 1/e}]$ , wobei  $e$  eine genügende große natürliche Zahl ist, gleich der lokalen affinen Graßmannschen der zerfallenden Form von  $G$  ist, und deren Nullfaser die affine Fahnenvarietät von  $\mathcal{G} \otimes k[[t]]$  ist. Insbesondere, ist  $\mu$  eine geometrische Konjugationsklasse von Kogewichten von  $G$ , so erhält man eine globale Schubert-Varietät  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, X/k, \leq \mu}$ , die wenigstens über  $k[t^{1/e}]$  definiert ist. Ihre spezielle Faser enthält alle Schubert-Varietäten von der Form  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G} \otimes k[[t]], \leq [t_\lambda]}$ , wobei  $\lambda \in \mu$  ein Vertreter ist und  $t_\lambda \in W$  eine durch die Kottwitz-Abbildung zu  $\lambda$  zugeordnete Parallelverschiebung. Deren

<sup>1</sup>Vorsicht: die generische Faser von  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, X/k}$  ist nicht unbedingt die lokale affine Graßmannsche der generischen Faser von  $\mathcal{G}$ !

(reduzierte) Vereinigung wird der  $\mu$ -zulässige Ort der affinen Fahnenvarietät genannt und mit  $\mathcal{A}_\mu$  bezeichnet. Der Kohärenzsatz von X. Zhu ([Zhu14]) liefert eine Gleichheit

$$\mathcal{A}_\mu = \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, X/k, \leq \mu} \otimes_{k[t^{1/e}], t \rightarrow 0} k$$

als abgeschlossene Unterschemata der affinen Fahnenvarietät  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G} \otimes k[[t]]}$ . In Angesichts dessen dass die globale Schubert-Varietät als ein lokales Modell für einen Modulraum von Shtuki (Gegenstücke von Shimura-Varietäten in gleichen Charakteristiken) angesehen werden darf, ist diese Aussage genau das, was wir suchten.

Die von G. Pappas und M. Rapoport ([PR08]) ursprünglich formulierte Kohärenzvermutung betraf stattdessen eine Gleichheit von den Dimensionen globaler Schnitte von Geradenbündeln

$$\dim H^0(\mathcal{A}_\mu^0, \mathcal{L}) = \dim H^0(\mathrm{Gr}_{H, \leq \mu}, \mathcal{O}(c(\mathcal{L}))),$$

wobei  $\mathcal{A}_\mu^0$  der ins neutrale Komponente verschobene zulässige Ort ist,  $\mathcal{L}$  ein amples Geradenbündel von  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ ,  $c : \mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{Z}$  der durch die zentrale Ladung gegebene Homomorphismus und  $\mathcal{O}(1)$  der sehr ample Erzeuger von  $\mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}_H)$ . Hiermit wird die Variation der Charakteristik von  $k$  ermöglicht, mithilfe von den Deformationen  $\underline{\mathcal{G}}$  des vorherigen Abschnittes.

In Bezug auf den Beweis des Kohärenzsatzes wird zuerst bewiesen, dass die Reduktion der speziellen Faser mit dem zulässigen Ort übereinstimmt, und nur danach ihre Reduziertheit. Der erste Punkt folgt aus einer Berechnung des Trägers der benachbarten Zyklen von  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, X/k, \leq \mu}$ , die im Wesentlichen weder die Zahmtheits- noch die Étaleheitsannahme gebraucht, wie T. J. Haines und T. Richarz ([HR18]) bemerkt haben. Um die Reduziertheit zu zeigen, verwendet man die Techniken des Konvolutionsproduktes und der Frobeniuspaltung, allerdings unter der Annahme  $p > 2$ . Dabei scheint der Grenzfaktor der noch nicht bewiesene Abstieg von Geradenbündeln der affinen Fahnenvarietät auf dem Modulstack  $\mathrm{Bun}_{\bar{\mathcal{G}}, \mathbb{P}_k^1}$  von  $\bar{\mathcal{G}}$ -Bündel über der projektiven Gerade zu sein, wobei  $\bar{\mathcal{G}}$  eine geeignete Fortsetzung von  $\mathcal{G}$  auf  $\mathbb{P}_k^1$  ist.

**1.6. Potenzreihen-Ansatz.** Zunächst wird die Anwendung der Theorie von affinen Graßmannschen auf lokalen Modellen erläutert. Alles hat mit der Einsicht von U. Görtz ([Go01]) angefangen, dass die spezielle Faser der naiven Modelle für die Skalareinschränkung der  $\mathrm{GL}_n$  entlang einer rein verzweigten Körpererweiterung  $F/\mathbb{Q}_p$  sich in eine affine Fahnenvarietät von  $\mathrm{GL}_n$  einbetten lässt. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass  $F = \mathbb{Q}_p(p^{1/d})$  und die Periode von  $\Lambda_\bullet = p^{\frac{1}{d}\mathbb{Z}} \mathcal{O}^{\oplus n}$  gleich 1 ist. Ist  $R$  eine  $\mathbb{F}_p$ -Algebra und  $M$  ein  $R$ -wertiger Punkt des naiven Modells, so liefert der Kern von

$$R[[t^{1/d}]]^{\oplus n} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mathbb{F}_p[t^{1/d}] \otimes_{\mathbb{F}_p} R^n \rightarrow M$$

ein Gitter in  $R((t^{1/d}))^{\oplus n}$ , also einen  $R$ -wertigen Punkt der affinen Graßmannschen für  $R_{k((t^{1/d}))/k((t))} \mathrm{GL}_n$ . In den darauffolgenden Jahren, wurden noch weitere sehr konkrete Beispiele in dieser Art und Weise behandelt. Dann kam die Arbeit von G. Pappas und X. Zhu ([PZ13]), die zum ersten Mal eine weitgehende und rein gruppentheoretische Theorie lokaler Modelle hervorbrachte. Deren Ansatz verstehen wir unter dem „Potenzreihen-Ansatz“, um ihn von dem

kürzlich eingeführten Ansatz von P. Scholze und J. Weinstein ([SW20]) abzugrenzen, der sich auf  $p$ -adische Periodenringe bezieht.

Diesmal seien  $F$  ein  $p$ -adischer Körper,  $\mathcal{O}$  sein Ganzheitsring,  $\varpi$  ein gewähltes Primelement und  $k$  der Restklassenkörper; der Einfachheit halber wird zusätzlich vorausgesetzt, dass alle  $e$ -ten Einheitswurzeln in  $\mathcal{O}$  liegen, wobei  $e$  eine  $p$ -teilerfremde natürliche Zahl ist. Mit  $G$  werde eine zusammenhängende, reduktive,  $F(\varpi^{1/e})$ -zerfallende, quasizerfallende  $F$ -Gruppe bezeichnet und mit  $S$  ein maximal zerfallender Untertorus von  $G$ . Wir fixieren noch einen quasi-épinglage von  $G$  bezüglich  $S$ , die einen épinglage der zerfallenden Form  $H$  bezüglich der Form  $T_H$  des Zentralisators von  $S$  induziert, sodass die  $F^s$ -lineare Wirkung der absoluten Galoisgruppe auf  $H$  durch Diagrammautomorphismen gegeben ist. Definiere nun das faserweise zusammenhängende reduktive  $\mathcal{O}[t^{\pm 1}]$ -Gruppenschema  $\underline{G}$  als den Funktor der  $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ -Invarianten von  $R_{\mathcal{O}[t^{\pm 1/e}]/\mathcal{O}[t^{\pm 1}]}H$ .

Sei  $x$  ein Punkt des Appartements  $\mathcal{A}(G, S, F)$ . In ähnlicher Weise kann man auch ein  $\mathcal{O}[t]$ -Gruppenmodell  $\underline{G}_x$  von  $\underline{G}$  definieren, das glatt, affin und faserweise zusammenhängend ist, dessen Basiswechsel entlang  $t \mapsto \varpi$  die zu  $x$  zugeordnete parahorische Untergruppe entspricht und dessen andere Basiswechsel auf  $k[[t]]$  oder  $F[[t]]$  auch parahorisch von demselben kombinatorischen Typ ist. Hierbei bemerken wir noch, dass die größte Schwierigkeit daran liegt, zusammenhängende Fasern und Affinität in ein einziges Gruppenmodell zu vereinen.

Bezüglich lokaler Modelle gibt es nicht mehr viel zu sagen. Betrachtet man die globale affine Graßmannsche eines parahorischen Gruppenschemas  $\underline{G}_x$ , das durch ein indprojektives  $\mathcal{O}[t]$ -Indschema darstellbar ist, so definiert man  $\mathbb{M}_{\underline{G}_x, \mu}$  als den Abschluss der Schubert-Varietät  $\text{Gr}_{H, \leq \mu}$  über  $F$ . Die spezielle Faser ist reduziert und stimmt mit dem zulässigen Ort überein, nach dem oben geschilderten Kohärenzsatz. Darüber hinaus, hat B. Levin ([Lev16]) auch den Fall von Skalareinschränkungen zahm verzweigter Gruppen behandelt, indem er Eisenstein-Polynome auf  $\mathcal{O}[t]$  hochhebt.

Letztendlich könnte man durch diese unterschiedlichen Konstruktionen alle vermutlichen lokale Modelle in Restcharakteristik  $p \geq 5$  aufbauen, nach der Klassifikation reduktiver Gruppen. Unsere Motivation sollte trotzdem über die fragwürdige Liebe der kleinen Primzahlen hinausgehen, und sich am Liebsten damit beschäftigen, ob eine Theorie des Potenzreihen-Ansatzes ohne Zahmheitsannahmen überhaupt existiert. Das erste Problem für uns war eher psychologisch: welche Körpererweiterung vom Grad  $e$  sollte in wilder Charakteristik auftreten? Geben wir uns momentan zufrieden mit dem gruseligen Hinweis, dass die Körpererweiterung vom Grad  $e$  nicht mehr separabel zu sein braucht...

**1.7. Pseudoreduktive Gruppen.** Gegeben sei eine glatte, affine und zusammenhängende Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$ . Sie besitzt eine maximale normale zusammenhängende glatte und unipotente  $k$ -Untergruppe  $R_{u,k}G$ , das  $k$ -unipotente Radikal von  $G$ . Die Faktorgruppe  $G^{\text{pr}} := G/R_{u,k}G$  heißt pseudoreduktiv nach A. Borel und J. Tits ([BoT78]), weil sie ein triviales  $k$ -unipotentes Radikal hat. Der Terminologie unterliegt die Tatsache, dass die Bildung des  $k$ -unipotenten Radikales nicht mit beliebigen Körpererweiterungen vertauscht, sondern nur mit separablen. M.a.W., gibt es pseudoreduktive Gruppen, die nicht reduktiv

sind. Das Grundbeispiel solcher Gruppen sind rein inseparable Restriktionen von Skalaren zusammenhängender reduktiver Gruppen.

Es stellt sich heraus, wie A. Borel und J. Tits ([BoT78]) bekannt gaben, dass die meisten der allgemeinen Begriffe der relativen Theorie zusammenhängender reduktiver Gruppen über einem Körper einen entsprechenden Sinn für pseudoreduktive Gruppen bewähren. Insbesondere darf man fast sorgenfrei über maximal zerfallende Untertori, maximale Tori, Wurzelgruppen, (pseudo-)parabolische Untergruppen, Konjugationssätze u.s.w. reden.

Jahrzehntelang wurden pseudoreduktive Gruppen kaum verstanden und keine Klassifizierung war vorhanden. Das hat sich mit dem Buch von B. Conrad, O. Gabber und G. Prasad ([CGP15]) geändert, in dem die Verfasser nicht nur die allgemeine Theorie voranbrachten, mithilfe neuer dynamischer Methoden, sondern gleichzeitig eine prägnante Klassifikation fanden, außer im Fall der Charakteristik 2 wenn  $[k : k^2] > 2$ . Diese Ausnahme wurde dann später durch die Arbeit von B. Conrad und G. Prasad ([CP16]) eliminiert. Um deren Ergebnis erklären zu können, setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass in positiver Charakteristik die Ungleichung  $[k : k^p] \leq p$  gilt. Zuerst muss sich man damit abfinden, kommutative pseudoreduktive Gruppen, die die Rolle der Tori in der reduktiven Theorie spielen, nicht klassifizieren zu können. In die Praxis umgesetzt, bedeutet dies, dass pseudoreduktive Gruppen nur bis auf eine Modifizierung der Cartanschen Untergruppe nachvollzogen werden. Infolgedessen darf o.E. angenommen werden, dass die angegebene pseudoreduktive Gruppe  $G$  gleich ihrer derivierten Gruppe ist und ein irreduzibles Wurzelsystem  $\Phi^s$  über dem separablen Abschluss  $k^s$  hat. Zunächst wird die Abbildung

$$i_G : G \rightarrow R_{k'/k} G_{k'}^{\text{ss}}$$

betrachtet, wobei  $k'$  der Definitionskörper des  $k^a$ -unipotenten Radikales ist und  $G_{k'}^{\text{ss}}$  der halbeinfache Quotient ist. Nach einem leichten Reduktionsschritt, nimmt man an, dass  $G' := G_{k'}^{\text{ss}}$  einfach zusammenhängend ist. Falls  $i_G$  ein Isomorphismus ist, so erhalten wir eine sogenannte standard pseudoreduktive Gruppe. Es gibt allerdings extrem außergewöhnliche und alle unsere Annahme erfüllende pseudoreduktive Gruppen, sodass die assoziierte Abbildung  $i_G$  kein Isomorphismus ist, die nur in kleinen Charakteristiken, also  $p \leq 3$ , auftreten. Sie werden im Anschluss erklärt.

Ist  $i_G$  nicht ein Isomorphismus und  $\Phi^s$  reduziert, so ist  $i_G$  injektiv und bestehen die folgenden Möglichkeiten für das Paar  $(p, \Phi^s)$ :  $(2, B_n)$ ,  $(2, C_n)$ ,  $n \geq 2$ ,  $(2, F_4)$ ,  $(3, G_2)$ . Diese Paare könnten den Liebhaber der kleinen Primzahlen erwecken, denn sie entsprechen genau den möglichen Paaren einer einfach zusammenhängenden Gruppe  $G'$ , die über eine spezielle (d.h. von Null verschiedene Abbildung zwischen den Lie-Algebren) nichtzentrale Isogenie  $G' \rightarrow \overline{G}$  verfügen. Dann ist das Bild von  $G$  entlang der Verknüpfung:

$$G \xrightarrow{i_G} R_{k'/k} G' \rightarrow R_{k'/k} \overline{G}$$

eine Levi-Untergruppe von  $R_{k'/k} \overline{G}$ , und zudem liegt  $G$  in einem kartesischen Viereck. Eine solche Gruppe heißt grundsätzlich exotisch.



Ist  $\Phi^s$  nicht reduziert, so ist  $i_G$  surjektiv, das einzige mögliche Paar ist  $(2, BC_n)$  und  $G'$  ist vom Typ  $C_n$ . Man kann zeigen, dass  $G$  automatisch pseudozerfallend ist. Ferner, induziert  $i_G$  Isomorphismen zwischen den Cartan-Untergruppen und den zu nichtmultiplizierbaren Wurzeln assoziierten Wurzelgruppen. Um die Wurzelgruppen  $U_a$  von multiplizierbaren Wurzeln identifizieren zu können, braucht man das Hilfsdatum einer Zerlegung von  $k' = V^{(2)} \oplus V'$  in  $k'^2$ -Vektorräume, mit denen man setzen kann  $U_a = \underline{V} \times \underline{V}'$ , wobei  $V = V^{(2)} \otimes_{k'^2} k'$ . Der Morphismus  $U_a \rightarrow R_{k'/k} U'_a$  identifiziert sich mit dem Morphismus

$$\underline{V} \times \underline{V}' \rightarrow \underline{k'},$$

der durch  $(v, v') \mapsto v^2 + v'$  gegeben ist. Beim Klassifikationsbuch ([CGP15]) werden diese Gruppen aus kohärenten, wie hier oben dargelegten Beschreibungen zusammengeklebt, mittels eines strikten birationalen Gruppengesetzes. J. Tits ([Ti84]) hat eine ausdrückliche Konstruktion solcher Gruppen mithilfe vertrauter linearer Algebra gegeben.

Manchmal interessiert sich man für das folgende Phänomene. Nicht alle glatte, zusammenhängende und unipotente Gruppen  $U$  über einem allgemeinen Körper  $k$  verfügen über eine Kompositionsreihe sukzessiver  $k$ -Normalteiler mit additiven Subquotienten: falls ja, heißt  $U$  zerfallend; im Gegensatz dazu, findet man sogenannte  $k$ -gewinkelte Gruppen, die keine von Eins verschiedene zerfallende glatte zusammenhängende unipotente Untergruppe haben. Für eine beliebige zusammenhängende, glatte und affine  $k$ -Gruppe  $G$  hat man ein zerfallendes unipotentes  $k$ -Radikal  $R_{ud,k}G$  und die Faktorgruppe  $G^{\text{qr}} := G/R_{ud,k}G$  heißt quasireduktiv.

## 2. ERGEBNISSE

**2.1. Quasireduktive BT-Theorie.** Beim ersten Kapitel ([I], vergleiche auch mit [IV]) der vorliegenden Dissertation vergrößern wir den Umfang der Bruhat-Tits-Theorie auf quasireduktive Gruppen:

**Satz 1.** *Seien  $k$  ein ausgezeichneter Henselscher diskret bewerteter Körper und  $G$  eine  $k^{\text{nr}}$ -quasizerfallende  $k$ -quasireduktive  $k$ -Gruppe. Die Gruppe  $G$  hat ein kanonisches BT-Gebäude  $\mathcal{I}(G, K)$ , worauf  $G(k)$  in natürlicher Weise operiert. Ist  $\Omega$  eine nichtleere beschränkte Teilmenge eines Apartments, so ist ihr zusammenhängender Fixator darstellbar durch das faserweise zusammenhängende, glatte und affine BT-Gruppenmodell  $\mathcal{G}_\Omega$ .*

Es gab in dieser Richtung einen früheren Beitrag von M. Solleveld ([Sol18]), der die Gebäude auf nichtkanonische Weise konstruiert hat, falls der Restklassenkörper endlich ist. Der Beweis unseres Satzes wird, wie bei [BT84a], in zwei Schritten durchgeführt: zuerst für  $k$ -quasizerfallende Gruppen und letztendlich durch unverzweigten Abstieg. Interessant ist, dass man beim unverzweigten Abstieg das Gebäude und die Gruppenschemata nicht getrennt behandeln kann, weil die algebraische Geometrie tatsächlich angewandt wird, um gewisse kombinatorische Lemmata abzuleiten.

Um eine Bewertung im quasizerfallenden Fall zu finden, verfügt man noch über ausführliche und kohärente Beschreibungen der Wurzelgruppen (siehe [I]). Alternativ lassen sich Bewertungen von  $G'(k')$  auf  $G(k)$  zurückziehen (siehe [IV]). In Bezug auf die Gruppenmodelle basiert unser Aufbau auf birationalen Gruppengesetzen und führt die Frage auf die folgenden

Schritte im Fall  $k = k^{\text{nr}}$  zurück: einerseits die Konstruktion der entsprechenden ganzzahligen Gruppenmodelle  $\mathcal{Z}$  von  $Z$  und  $\mathcal{U}_{a,\Omega}$  von  $U_a$ ; und andererseits das Nachprüfen der Axiome eines bewerteten Wurzeldatums im Sinne von Bruhat-Tits ([BT84a]). Nach dem Buch von S. Bosch, W. Lütkebohmert und M. Raynaud ([BLR90]) hat die auflösbare quasireduktive Gruppe  $Z$  ein faserweise zusammenhängendes Néron-Modell  $\mathcal{Z}$ . Das glatte, affine und faserweise zusammenhängende  $\mathcal{O}$ -Gruppenmodell  $\mathcal{U}_{a,\Omega}$  von  $U_a$ , deren  $\mathcal{O}$ -wertige Punkte gleich dem Fixator von  $\Omega$  in  $U_a(k^{\text{nr}})$  sind, lässt sich per Hand ausrechnen. Die Verifizierung der Bruhat-Tits-Axiome ist eher unkompliziert.

Wir können jetzt einsehen, dass das fundamentale Hindernis zur BT-Theorie die additive Gruppe  $\mathbb{G}_a$  ist. Die Gebäude lassen sich für alle zusammenhängende, affine und glatte Gruppen einführen, indem man  $\mathcal{J}(G, k) = \mathcal{J}(G^{\text{qr}}, k)$  definiert, versehen mit der offensichtlichen  $G(k)$ -Wirkung; es gäbe aber im Allgemeinen unbeschränkte zusammenhängende Fixatoren.

Schließlich sprechen wir über den Hauptsatz parahorischer Gruppenschemata (also die  $\mathcal{G}_\Omega$  für eine Facette  $\Omega$ ). Ein Morphismus  $\mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{G}_y$  zwischen parahorischen Gruppenschemata ist eine affine Aufblasung entlang dem pseudoparabolischen Bild in der speziellen Faser. Umgekehrt ist so eine affine Aufblasung eines parahorischen Gruppenschema entlang einer pseudoparabolischen Untergruppe der speziellen Faser parahorisch. Daraus zieht man das geometrische Kriterium für Parahorizität: ist  $\kappa$  algebraisch abgeschlossen, und  $\mathcal{G}$  ein glattes affines und faserweise zusammenhängendes Gruppenschema über  $\mathcal{O} = \kappa[[\varpi]]$ , so ist die lokale affine Graßmannsche  $\text{Gr}_{\mathcal{G}}$  genau dann indprojektiv, wenn  $\mathcal{G}$  parahorisch ist ([Ri16], [I]). Arbeitet man im globalen Rahmen, so sollte die Indeigentlichkeit der generischen Faser von  $\text{Gr}_{\mathcal{G}, X/k}$  dazu äquivalent sein, dass  $G = \mathcal{G}_\eta$  quasireduktiv ist, wie T. Richarz ([Ri19]) vermutet hat. Das haben wir in [I] für pseudoreduktive Gruppen bewiesen.

**2.2. Zyklotomische Familien von BT-Gruppenschemata.** Hier wird das Hauptwerkzeug der Dissertation geschildert, das sich um die Konstruktion gewisser Gruppenschemata über dem Polynomring  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t]$  handelt ([II], [IV]). Deren vertikalen Spezialisierungen sind Bruhat-Tits-Gruppenschemata über  $k[[t]]$ , die kombinatorisch unabhängig von der Wahl des Körpers  $k$  sind. Galoisinvarianten sind hierzu unzureichend, da die Gruppenordnung nicht invertierbar im Grundring ist.

Seien  $e$  eine im Folgenden stets fixierte natürliche Zahl,  $G$  eine zusammenhängende reduktive und quasizerfallende  $\mathbb{Q}(\zeta_e)(t)$ -Gruppe, die über der zyklischen Galoiserweiterung  $\mathbb{Q}(\zeta_e)(t^{1/e})$  zerfällt,  $S$  ein maximal zerfallender Untertorus von  $G$ ,  $Z$  der Zentralisator von  $S$  in  $G$  und  $U_a$  die Wurzelgruppen von  $G$  bezüglich  $S$ . Zudem wählen wir auch ein Tits-System für  $(G, S)$ , das aus vorsichtig gewählten Isomorphismen besteht, wie folgt:

$$x_a : \text{R}_{\mathbb{Q}(\zeta_e)(t_a)/\mathbb{Q}(\zeta_e)(t)} \mathbb{G}_a \rightarrow U_a,$$

für alle weder teilbaren noch multiplizierbaren Wurzeln  $a$ , und

$$x_a : \text{R}_{\mathbb{Q}(\zeta_e)(t_a)/\mathbb{Q}(\zeta_e)(t)} \mathbb{G}_a \times \text{R}_{\mathbb{Q}(\zeta_e)(t_a^2)/\mathbb{Q}(\zeta_e)(t)} t_a \mathbb{G}_a \rightarrow U_a$$

für alle multiplizierbaren Wurzeln, wobei das Gruppengesetz durch

$$(u, v) \cdot (u', v') \mapsto (uu', v + v' + \sigma(u)u' - u\sigma(u')).$$



gegeben ist. Hier schreibt man  $t_a = t^{1/d_a}$  mit  $d_a \mid e$ . Bemerke, dass ein Tits-System sich von einem üblicheren Chevalley-Steinberg-System durch Multiplikation durch Potenzen von 2 unterscheidet, wie J. Tits 1984 in seinem Bonner Arbeitstagungsvortrag ([Ti84]) einführte.

Damals war J. Tits hauptsächlich an affinen Kac-Moody-Gruppen interessiert, weshalb er ein gewisses glattes und faserweise zusammenhängendes Gruppenmodell  $\underline{G}$  von  $G$  über  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t^{\pm 1}]$ , mithilfe der obigen Daten, konstruiert hat. Dennoch liegen bei seiner Arbeit ([Ti84]) die Annahmen, dass  $e = 1, 2$  oder  $3$  und dass  $G$  absolut einfach und einfach zusammenhängend ist. In den nachfolgenden Paragraphen, zeigen wir, wie sich dieses Tits-Gruppenschema  $\underline{G}$  in unserem Grad der Allgemeinheit konstruieren lässt. Wie schon bisher üblich, muss man die dazugehörigen  $\underline{Z}$  und  $\underline{U}_a$  angeben und einige Verträglichkeitsaxiome prüfen.

Für das Gruppenschema  $\underline{Z}$ , nimmt man das faserweise zusammenhängende Néron-Modell von  $Z$  über  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t^{\pm 1}]$ . Um seine Existenz zu erkennen, sind welche Auflösungen von Tori im Sinne von J.-L. Colliot-Thélène und J.-J. Sansuc ([CT77]) zu gebrauchen, wodurch o.V.d.A. angenommen werden darf, dass  $Z$  ein direkter Faktor eines induzierten Torus ist, da die zerfallende Körpererweiterung zyklisch ist. Letztendlich genügt es uns, den Fall  $Z = R_{\mathbb{Q}(\zeta_e)(t^{1/d})/\mathbb{Q}(\zeta_e)(t)} \mathbb{G}_m$  zu betrachten, wobei  $\underline{Z} = R_{\mathbb{Z}[\zeta_e][t^{\pm 1/d}]/\mathbb{Z}[\zeta_e][t^{\pm 1}]} \mathbb{G}_m$  funktioniert. Die Affinität von  $\underline{Z}$  folgt nicht unmittelbar aus der Konstruktion, sobald eine Faktorgruppe auftritt, sondern nur seine Quasiaffinität. Andererseits, trägt  $\underline{Z}$  eine durch  $t \mapsto a^e t$  gegebene halbbilineare  $\mathbb{G}_m$ -Drehoperation, die dann die Affinität überall einschiebt.

Die Gruppenmodelle  $\underline{U}_a$  werden durch Strukturtransport per  $x_a$  mit den natürlichen Gruppenmodellen der linken Seite identifiziert, die aus dem Ersetzen der Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(\zeta_e)(t_a)/\mathbb{Q}(\zeta_e)(t)$  durch die Ringerweiterung  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t_a^{\pm 1}]/\mathbb{Z}[\zeta_e][t^{\pm 1}]$  gezogen werden. Die Axiome für das schematheoretische Wurzeldatum  $(\underline{Z}, \underline{U}_a)$  werden mit relativer Bequemlichkeit überprüft und liefern deshalb ein quasiaffines und glattes  $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ -Gruppenschema  $\underline{G}$  mit zusammenhängenden Fasern. Die Affinität folgt nochmal aus einer  $\mathbb{G}_m$ -Wirkung. Die generischen Fasern  $\underline{G} \otimes k(t)$  sind immer quasireduktive Gruppen, wobei  $k$  ein Körper über  $\mathbb{Z}[\zeta_e]$  ist, und sogar pseudoreduktiv, wenn  $Z$  welk ist. Ist  $G$  einfach zusammenhängend und absolut einfach (sodass  $e = 1, 2, 3$  o.E.) und  $k$  ein Körper der Charakteristik  $e$ , so ist  $\underline{G} \otimes k(t)$  grundsätzlich exotisch, falls  $G$  nicht vom Typ  ${}^2A_{2n}$  ist, oder mit nichtreduziertem Wurzelsystem, ansonsten.

Als nächstes finden wir eine Fortsetzung ([II], [IV]) von  $\underline{G}$  zu einem Gruppenschema  $\underline{G}_\Omega$  über  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t]$ , das vom Datum einer beschränkten nichtleeren Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathcal{A}(G, S, \mathbb{Q}(\zeta_e)((t)))$  abhängt. Wir weisen darauf hin, dass es natürliche Isomorphismen

$$\mathcal{A}(G, S, \mathbb{Q}(\zeta_e)((t))) \cong \mathcal{A}(\underline{G}, S, k((t)))$$

gibt, für alle Körper  $\mathbb{Z}[\zeta_e] \rightarrow k$ , wodurch  $\Omega$  ohne Weiteres als Teilmenge der rechten Seite angesehen werden darf.

**Satz 2.** *Es gibt ein eindeutiges glattes und affines  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t]$ -Gruppenmodell  $\underline{G}_\Omega$  mit zusammenhängenden Fasern des Tits-Gruppenschema  $\underline{G}$ , sodass, für jeden Körper  $k$  über  $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ , der Basiswechsel  $\underline{G}_\Omega \otimes k[[t]]$  gleich dem zu  $\Omega$  zugeordneten Bruhat-Tits-Gruppenschema ist.*

Die Eindeutigkeit von  $\underline{\mathcal{G}}_\Omega$  folgt aus dem Beauville-Laszlo-Abstiegssatz. In Bezug auf die Konstruktion definiert man  $\underline{\mathcal{Z}}$  als das faserweise zusammenhängende Néron-Modell von  $\underline{Z}$  und  $\underline{\mathcal{U}}_{a,\Omega}$  als die gewöhnlichen Modelle von affinen Räumen, die einem gebrochenen Ideal (hier erzeugt durch eine Potenz von  $t^{1/e}$ ) entsprechen. Trotzdem lässt sich die Affinität in diesem Fall mithilfe multiplikativer halblinerer Wirkungen nicht belegen, denn die  $t$ -Achse wird punktweise fixiert. Stattdessen gebrauchen wir einen Satz über allgemeine Gruppenschemata.

Über einer höchstens zweidimensionalen regulären Basis hat M. Raynaud die Glattheit der affinen Hülle eines glatten, faserweise zusammenhängenden und quasiaffinen Gruppenschema bewiesen, das sich als offenes Untergruppenschema seiner affinen Hülle realisieren lässt. In unserem Fall wird die offene Einbettung von Gruppenschemata

$$\underline{\mathcal{G}}_\Omega \rightarrow \underline{\mathcal{G}}_\Omega^{\text{af}}$$

betrachtet, die ein Isomorphismus in allen geometrischen Fasern ist, außer a priori in den Fasern über einem Körper  $\mathbb{Z}[\zeta_e] \xrightarrow{t \rightarrow 0} k$  in positiver Charakteristik in der  $t$ -Achse. Hätte die affine Hülle unseres BT-Gruppenschemas zusätzliche Zusammenhangskomponenten, so würden diese sich durch  $k((t))$ -wertige Punkte des Normalisators  $\underline{N}$  von  $S$  in  $\underline{G}$  vertreten lassen. Es gilt jedoch die Unabhängigkeit der Iwahori-Weyl-Gruppen  $\underline{N}(k((t)))/\underline{\mathcal{Z}}(k[[t]])$  von der Wahl von  $k$  und somit darf keine neue Zusammenhangskomponente in positiver Charakteristik auftauchen, weil sie in Charakteristik Null einfach inexistent sind.

**2.3. Zyklotomische affine Graßmannschen.** Da die parahorischen Gruppenschemata  $\underline{\mathcal{G}}_x$  über  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t]$  vorhanden sind, können deren lokalen und globalen affinen Graßmannschen untersucht werden. Beide sind darstellbar durch indprojektive Indschemata über der Basis, nach einem Satz von G. Pappas und X. Zhu ([PZ13]). Man erhält ([II], [I]) das folgende Resultat über die Schubert-Varietäten im lokalen Fall:

**Satz 3.** *Gilt  $G^{\text{der}} = G^{\text{sc}}$ , so ist  $\text{Gr}_{\underline{\mathcal{G}}_x, \leq w}$  geometrisch normal über  $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ .*

In kurzen Worten, möchten wir zwei Einzelheiten des Beweises des Normalitätssatzes beschreiben. Die erste bezieht sich auf die Spaltung des Frobeniushomomorphismus der Normalisierungen und hat nichts mit den Auswirkungen der wilden Verzweigung zu tun. Der Spaltung in positiver Charakteristik unterliegt eine Konstruktion von Geradenbündeln auf der vollständigen affinen Fahnenvarietät  $\text{Gr}_{\underline{\mathcal{G}}_x}$  mit vorgegebenen Graden auf den fundamentalen projektiven Geraden, wobei  $G$  einfach zusammenhängend ist. Für die Konstruktion benötigt man eine gewisse abgeschlossene Untergruppe  $L^-\underline{\mathcal{G}}_x$  von  $L\underline{G}$ , die zusammen mit  $L^+\underline{\mathcal{G}}_x$  ein Paar entgegengesetzter „Borelscher“ Untergruppen von  $L\underline{G}$  bildet. Die Abschlüsse der durch die affine Weyl-Gruppe nummerierten  $L^-\underline{\mathcal{G}}_x$ -Bahnen in der affinen Fahnenvarietät sind unendlich-dimensionale Zyklen der Kodimension  $l(w)$ . Der philosophische Daseinsgrund von  $L^-\underline{\mathcal{G}}_x$  ist für uns die multiplikative Wirkung  $t^{1/e} \mapsto at^{1/e}$ , die uns erlaubt, die obigen als Attraktor bzw. Repeller bezüglich eines adäquat gewählten Kogewichtes von  $S \times \mathbb{G}_m^{\text{rot}}$  aufzufassen. Anscheinend steht keine Drehwirkung derart zur Verfügung für wild verzweigte reduktive Gruppen und diese Problematik wurde von G. Pappas und M. Rapoport ([PR08]) unbedacht vernachlässigt.

Die zweite Mahnung betrifft die Etappe der formalen Glattheit der Normalisierungsabbildung in der Nullumgebung. In allen zahlm verzweigten Fällen, war die Lie-Algebra von  $L\bar{G}$  durch die von  $LU_a$  erzeugt. Das gilt leider nicht mehr für die unitären Gruppen ungerader Dimension  $\bar{G}$ , denn manche quadratische Gleichungen treten auf. Stattdessen muss man die Erzeugung höheren Differentialoperatoren von  $L\bar{G}$  durch diejenigen von den  $LU_a$  verwenden. Die ausführliche Berechnung von Distributionen liefert eine schon von J. Tits eingeführte assoziative nichtkommutative  $\mathbb{Z}$ -Algebra, nach der ausdrücklichen Beschreibung von D. Mitzman ([Mit85]) als freier  $\mathbb{Z}$ -Modul innerhalb der universellen einhüllenden Algebra. Daraus zieht man einen Vergleichssatz zwischen unseren affinen Graßmannschen (im einfach zusammenhängenden Fall) und den ganzzahligen affinen Kac-Moody-Fahnenvarietäten von O. Mathieu ([Mat88]). In der Tat lassen sich unsere Bogengruppen mit den parabolischen Kac-Moody-Untergruppen identifizieren, die O. Mathieu in Termen von Distributionen definiert hat. Affine Kac-Moody-Schubertvarietäten werden durch projektive Einbettungen mithilfe Darstellungen vom höchsten Gewicht  $\lambda$  definiert, welche auch in unserem Rahmen existieren, nach der Konstruktion von Geradenbündel und der Frobenius-Spaltung.

Schließlich wird der Kohärenzsatz in unserem Rahmen ([II], [I]) dargelegt.

**Satz 4.** *Gilt  $G^{\text{der}} = G^{\text{sc}}$ , so ist  $\text{Gr}_{\bar{G}_x, \mathbb{Z}[\zeta_e][t]/\mathbb{Z}[\zeta_e], \leq \mu}$  geometrisch reduziert über  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t^{1/e}]$  und geometrisch normal über  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t^{\pm 1/e}]$ .*

Die irreduziblen Komponenten in der  $t$ -Achse werden durch die maximalen Elemente der zulässigen Menge indiziert, die hier rein geometrisch durch die Spezialisierungsabbildungen von  $\text{Gr}_{\bar{G}_x, \mathbb{Z}[\zeta_e][t]/\mathbb{Z}[\zeta_e]}$  gegeben wird. Trotz unserer Aussage sollte man nicht denken, dass die geometrischen Fasern außerhalb der  $t$ -Achse alle gleich aussehen (siehe z.B. Skalareinschränkungen zerfallender Gruppen). Das Theorem folgt allerdings nicht aus dem Kohärenzsatz von X. Zhu ([Zhu14]) in der Geradenbündel-Variante, denn die Schubert-Varietät  $\text{Gr}_{\bar{G}_x, \mathbb{Z}[\zeta_e][t]/\mathbb{Z}[\zeta_e], \leq \mu}$  ist möglicherweise nicht flach, da der Grundring zweidimensional ist. Infolgedessen müssen wir zuerst Auskunft über die Topologie sammeln, um die Flachheit der Normalisierung abzuleiten. Man zeigt, dass die Normalisierung in den Fasern eine abgeschlossene Einbettung ist, und dann wendet das Lemma von Nakayama an.

**2.4. Nichtnormale Schubert-Varietäten.** Keine der hier schon erwähnten Personen, die sich mit Schubert-Varietäten befasst haben, hat je die vermutliche Normalität von Schubert-Varietäten bezweifelt, auch wenn  $p \mid |\pi_1(G^{\text{der}})|$ . T. J. Haines und T. Richarz haben zu einem gewissen Zeitpunkt einen Beweis in diesen Fällen angekündigt, der sich später als falsch herausgestellt hat und in gemeinsamer Arbeit ([III]) mit dem Promovierenden korrigiert wird. Selbst der Verfasser dieses Textes ist nicht unschuldig, indem er seine jetzigen Mitautoren monatelang ermuntert hat, deren (falsches) Ergebnis zu verallgemeinern. Das ist je peinlicher, desto besser man versteht, wie dieser Unsinn so leicht aufgeklärt hätte sein können.

In der Tat, ist  $k$  ein Körper der Charakteristik 2, so ist die quasiwinzige Schubert-Varietät von  $\text{Gr}_{\text{PGL}_2}$  nicht normal. Das folgt aus der Berechnung lokaler Gleichungen, die dazu führen,

dass die Ringerweiterung vollständiger lokaler Ring von  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{PGL}_2, \leq a^\vee}$  bzw.  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_2, \leq a^\vee}$  durch

$$k[[x, y, s, t]]/(st - x^2y^2, s^2 - x^3y, t^2 - xy^3) \hookrightarrow k[[x, y, z]]/(z^2 - xy)$$

gegeben ist, wobei  $s = xz$  und  $t = yz$ . Definiert man die Schubert-Varietät über den ganzen Zahlen, so erhält man einen Integritätsbereich mit nichtreduzierter modulo 2 Faser.

Im abstrakten Hintergrund steht der nichtétale Kern der einfach zusammenhängenden Überlagerung und die Reduziertheit von affinen Fahnenvarietäten einfach zusammenhängender Gruppen. Seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p > 0$ ,  $F = k((t))$  der Laurentreihenkörper,  $\mathcal{O} = k[[t]]$  der Potenzreihenring und  $G$  eine zusammenhängende reduktive, zahm verzweigte  $F$ -Gruppe, sodass der Kern  $Z$  von  $G^{\mathrm{sc}} \rightarrow G$  nicht étale ist. Die Abbildung affiner Fahnenvarietäten

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_x^{\mathrm{sc}}, w} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_x, w}^0$$

ist ein universeller Homöomorphismus, der nicht monomorph ist, da die Liealgebra von  $Z$  nicht in einem Gitter liegt. Wären alle Schubert-Varietäten normal, so wäre die obige Abbildung ein Isomorphismus, im Widerspruch mit der vorherigen Aussage. Bisher haben wir in Zusammenarbeit ([III]) mit T. J. Haines und T. Richarz Folgendes festgestellt.

**Satz 5** (mit T. J. Haines und T. Richarz). *Teilt  $p$  die Ordnung von  $\pi_1(G^{\mathrm{der}})$ , so ist  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_x, \leq w}$  nicht normal, für genügend großes  $w$ .*

Genügend groß heißt ein Element  $w \in W_{\mathcal{G}_x}$ , wenn das Minimum der Längenfunktionen  $l_i(w)$  eine genügend große natürliche Zahl ist. Um das Ergebnis zu zeigen, kann man die einfach zusammenhängenden absolut einfachen affinen Fahnenvarietäten analysieren, und zwar den Tangentialraum von Schubert-Varietäten im Ursprung ausrechnen: ist der Durchschnitt mit dem Tangentialraum von  $\mathrm{Gr}_Z$  nichttrivial, so ist das Bild der Schubert-Varietäten nicht normal. Selbst wenn diese Aussage nicht so leicht ist, wie es zunächst klingen könnte, lässt sich trotzdem zeigen, dass genügend viele Vektoren der Liealgebra des maximalen Torus  $T$  im gewünschten Tangentialraum liegen. Obwohl die Klassifizierung normaler Schubert-Varietäten nicht erreichbar scheint, wurde eine darstellungstheoretische Beschreibung des Tangentialraumes doch gegeben, welche von der Charakteristik von  $k$  unabhängig ist.

Dieses Resultat hat weitgehende Folgen für die allgemeine Theorie lokaler Modellen. Nicht nur besagt es, dass die lokalen Modelle der früheren Abschnitte mit  $p \mid \pi_1(G^{\mathrm{der}})$  nicht normal sind, sondern auch, dass die durch Hodge-Einbettungen definierten lokalen Modelle von Shimura-Varietäten nicht normal sein können (falls  $p = 2$  und  $G$  vom Typ  $D^{\mathbb{H}}$  ist).

In der Zusammenarbeit haben wir die Geometrie der affinen Graßmannschen in schlechten Charakteristiken weiter untersucht. Dazu zählt ein Satz über die Nichtreduziertheit (behauptet von G. Pappas und M. Rapoport ([PR08]) für die  $\mathrm{PGL}_2$  ohne ersichtliche Demonstration), den wir mithilfe pseudoreduktiver Gruppen gelöst haben, und der allgemein geltende Satz der Indflachheit.

**2.5. Perioden-Ansatz.** Zu Beginn der vorliegenden Dissertation haben P. Scholze und J. Weinstein ([SW20]) ein Lehrbuch über Diamanten geschrieben, in dem unter anderem ein

neuer perfektoider Ansatz zu der Theorie lokaler Modelle angekündigt wird. Die Mehrheit des in diesem Abschnitt dargestellten Inhaltes ist von deren Ideen fast unmittelbar beeinflusst, obwohl wir uns mit vielen der von den Buchautoren vernachlässigten Einzelheiten jener Grundlagen auseinandersetzen mussten.

Ein vollständiger Tate-Ring  $R$  heißt perfektoid, wenn  $R^\circ$  beschränkt ist und es eine topologisch nilpotente Einheit  $\varpi$  gibt, sodass  $\varpi^p \mid p$  und der Frobeniushomomorphismus

$$R^\circ / \varpi \rightarrow R^\circ / \varpi^p$$

surjektiv ist. Ist  $R^{\circ\circ} \subseteq R^+ \subseteq R^\circ$  ganzabgeschlossen in  $R$ , so definiert  $(R, R^+)$  einen affinoiden perfektoiden Raum  $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ . Entlang rationaler Lokalisierungen lassen sich affinoiden perfektoiden Räume verkleben, der resultierende adische Raum wird perfektoid genannt. Man ordnet einem beliebigen perfektoiden Raum seinen (auch perfektoiden) Tilt in Charakteristik  $p$  zu: im affinoiden Fall setzt man  $R^{b+} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} R^+ / \varpi$  und  $R^b := R^{b+}[1/\varpi^b]$ , wobei  $\varpi^b$  ein Pseudouniformisierendes von  $R^{b+}$  ist. Es gibt eine kanonische Fontaine-Abbildung

$$\theta : W(R^{b+}) \rightarrow R^+$$

mit Hauptidealkern  $(\xi)$ . Viele wichtige Elemente der  $p$ -adischen Hodgetheorie sind mit diesem Homomorphismus verbunden: die (relative) Fargues-Fontaine-Kurve (wobei  $R$  über  $\mathbb{Q}_p$  lebt), unterschiedliche Periodenringe, u.s.w. Hier werden sich für uns die relativen de Rham'schen Periodenringe

$$B_{\mathrm{dR}}^+(R) = \varprojlim_n W(R^{b+})[[\varpi^b]^{-1}]/\xi^n$$

und  $B_{\mathrm{dR}}(R) = B_{\mathrm{dR}}^+(R)[1/\xi]$  sehr nützlich erweisen.

Die Quotientengarbe eines perfektoiden Raumes durch eine proétale perfektoiden Äquivalenzrelation bestimmt einen sogenannten Diamanten. Jeder  $\mathbb{Q}_p$ -adische Raum topologisch vom endlichen Typ lässt sich durch einen perfektoiden Raum in der proétalen Topologie überdecken und bestimmt somit einen Diamanten  $X^\diamond$  mit einem Strukturmorphismus nach  $\mathrm{Spd} \mathbb{Q}_p = \mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)^\diamond$ . K. Kedlaya und R. Liu zeigten, dass der Funktor  $X \mapsto X^\diamond$  sein wesentliches Bild mit der Lokalisierung der linken Seite durch universelle Homöomorphismen (m.a.W. dem Halbnormalisierungsfunktor) identifiziert.

Falls man  $\mathbb{Z}_p$ -adische Räume topologisch vom endlichen Typ analysieren will, so muss man mit kleinen  $v$ -Garben arbeiten. Die letzten sind Funktoren auf affinoiden perfektoiden Ringen in Charakteristik  $p$ , die die Garbeneigenschaft für die  $v$ -Topologie erfüllen, welche durch offene Immersionen und surjektive Morphismen affinoider Räume erzeugt wird. Ist  $X$  ein  $\mathbb{Z}_p$ -adischer Raum topologisch vom endlichen Typ, so bestimmt  $X$  eine  $v$ -Garbe  $X^\diamond$  über der Untiltengarbe  $\mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p$ . Wir haben in [IV] Folgendes gezeigt.

**Satz 6.** *Der Funktor  $X \mapsto X^\diamond$  aus der Kategorie flacher  $\mathbb{Z}_p$ -adischer Räume topologisch vom endlichen Typ lässt sich mit dem schwachen Normalisierungsfunktor identifizieren bis auf eine volltreue Einbettung.*

Sei  $G$  eine zusammenhängende reduktive  $\mathbb{Q}_p$ -Gruppe. Die affine Grassmannsche  $\mathrm{Gr}_G$  über  $\mathrm{Spd} \mathbb{Q}_p$  ist die  $v$ -Garbe, deren  $(R, R^+)$ -wertige Punkte  $G$ -Torsore über  $B_{\mathrm{dR}}^+(R)$  versehen mit

einer Trivialisierung über  $B_{\text{dR}}(R)$  klassifiziert. Sie ist indeigentlich über  $\text{Spd } \mathbb{Q}_p$  und besitzt eine lokal abgeschlossene Stratifizierung  $\text{Gr}_{G,\mu}$ , deren geometrische Punkte Invarianzposition gleich  $\mu$  haben. Die als Abschlüsse definierten Schubert-Varietäten  $\text{Gr}_{G,\leq\mu}$  sind eigentliche Diamanten. Deren Darstellbarkeit durch ein Schema ist äquivalent zur Winzigkeit von  $\mu$ , nach der Theorie von Banach-Colmez-Räume und dem im winzigen Fall geltenden Isomorphismus  $\text{Gr}_{G,\leq\mu} \cong \mathcal{F}_{G,\mu}$ .

Es sei  $\mathcal{G}$  ein parahorisches  $\mathbb{Z}_p$ -Gruppenmodell von  $G$ . In ähnlicher Weise wird eine affine Graßmannsche  $\text{Gr}_{\mathcal{G}}$  über  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$  definiert, die indeigentlich über der Basis ist, kraft eines Fortsetzbarkeitssatzes parahorischer Torsore von J. Anschütz ([Ans18]). Mit J. Anschütz und T. Richarz ([APLR]) haben wir angefangen, die Abschlüsse  $\text{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu}$  der generischen Schubert-Varietäten innerhalb der affinen Fahnenvarietät zu untersuchen, deren unterliegenden topologischen Räume mit den topologischen Abschlüssen übereinstimmen - die Schwierigkeit daran war, dass abgeschlossene Einbettungen perfektoider Räume generalisierbar sind.

Im Fall eines winzigen Kogewichtes vermuteten P. Scholze und J. Weinstein ([SW20]), dass die ganzzahlige Schubert-Varietät darstellbar durch ein normales, projektives und flaches Schema ist. Im Anhang dieser Dissertation wird diese Fragestellung in mehrere präzisere Vermutungen eingeteilt. Wir haben den folgenden Satz gezeigt ([II], [IV]).

**Satz 7.** *Ist  $(G, \mu)$  vom abelschen Typ, so ist  $\text{Gr}_{\mathcal{G},\mu}$  darstellbar durch ein schwach normales projektives flaches Schema  $\mathbb{M}_{\mathcal{G},\mu}$ . Sind die auftretenden quadratischen Erweiterungen gegeben durch zyklische Eisensteinpolynome, so ist  $\mathbb{M}_{\mathcal{G},\mu}$  geometrisch reduziert über  $\mathcal{O}$ .*

Eine ähnliche Bemerkung ist bei einer Arbeit von X. He, G. Pappas und M. Rapoport ([HPR18]) zu finden, mit mehreren einschränkenden Annahmen. Natürlich führt man die Darstellbarkeitsfrage auf  $\text{GL}_n$  zurück, indem man die Unempfindlichkeit der Schubert-Varietäten bzgl. zentraler Erweiterungen bemerkt, sowie dass Hodge-Einbettungen Immersionen lokaler Modelle liefern (in der Kategorie kleiner  $v$ -Garben). Die Reduziertheit der speziellen Faser in den angegebenen Fällen folgt aus dem Kohärenz- und einem Vergleichssatz zwischen dem Potenzreihen- und dem Perioden-Ansatz.

### 3. LEITFADEN

Im ersten Kapitel ([I]), wird die Bruhat-Tits-Theorie für quasireduktive Gruppen entwickelt, unter der Annahme, dass der Restklassenkörper perfekt ist. Das ist völlig ausreichend für unsere geometrische Anwendungen. Das zweite Kapitel ([II]) beschreibt eine wild verzweigte Verallgemeinerung der verschiedenen Arbeiten von G. Pappas, M. Rapoport und X. Zhu ([PR08], [PZ13]). Der Grundring ist hierbei nicht  $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ , im Gegensatz zu dieser Einleitung, sondern  $\mathbb{Z}$ . Zudem behandeln wir nur die Gruppen  $G$ , deren derivierte Gruppe  $G^{\text{sc}} = G^{\text{der}}$  absolut einfach mit reduziertem Wurzelsystem, sodass  $e = 1, 2$  oder  $3$ , und mit residuell zerfallendem induziertem maximalem Torus  $Z$ . Das dritte Kapitel ([III]) ist ein Entwurf einer Zusammenarbeit mit T. J. Haines und T. Richarz, die in dieser Dissertation mit freundlicher Genehmigung der Mitautoren wiedergegeben ist, und die sich mit der Entdeckung nichtnormaler Schubert-Varietäten im Fall  $p \mid |\pi_1(G^{\text{der}})|$  beschäftigt.



Schließlich erfüllt das vierte Kapitel (oder Anhang, [IV]) den Zweck, den Inhalt und einige Argumente der zwei ersten Kapiteln zu verbessern, wie sie schon bei dieser Einleitung dargelegt wurden: die Perfektheitsannahme wird für die Theorie von Bruhat-Tits eliminiert; wir entfernen die vielfältigen Voraussetzungen des Artikels über die affinen Graßmannschen, indem wir z.B. den Fall unitärer Gruppen ungerader Dimension klären; der Perioden-Ansatz wird ausführlich diskutiert und vorangebracht. Diese Lage ist aufgrund der Einreichung beider Aufsätze ([I], [II]) entstanden, die ansonsten einen vollständigen Umbau benötigt hätten.

#### 4. ZUKUNFTSMUSIK

Wir möchten uns nicht von dieser Einleitung verabschieden, ohne zu erläutern, welche künftigen Ziele und Problematiken aus dieser Dissertationsschrift entstanden oder vernachlässigt worden sind. Kurzum: was noch übrig bleibt, zu tun.

Eine interessante Fragestellung betrifft die (perfekte) Kohärenzvermutung für die ganzzahligen Schubert-Varietäten Scholzes. Da die spezielle Faser durch ein perfektes Schema darstellbar ist (sogar wenn das Kogewicht nicht winzig ist), müsste man nur die irreduziblen Komponenten auflisten, die mithilfe benachbarter Zyklen ausgerechnet sein sollten. Dieses Ziel wird in einer Zusammenarbeit ([APLR]) mit J. Anschütz und T. Richarz verfolgt.

Die Vermutung Scholzes bzw. unsere Ersatzvermutungen bleiben noch offen für verzweigte außergewöhnliche Gruppen. Es besteht eine Chance, dass sie in den folgenden Schritten und in der Anwesenheit eines guten Kandidaten (z.B. eines aus dem Potenzreihen-Ansatz stammenden lokalen Modells) gelöst werden könnte: die irreduziblen Komponenten der speziellen Fasern werden verglichen mithilfe kanonischer Auflösungen im Sinne von Demazure; die Spezialisierungsabbildungen vertauschen mit den Identifikationen der Fasern; diese Daten werden durch einen Morphismus kleiner  $v$ -Garben induziert (vergleiche mit [PL17]). Alternativ könnten Entwicklungen in ganzzahliger  $p$ -adischen Hodge-theorie auch eine Rolle spielen.

Schließlich scheint uns durchaus erreichbar, den Perioden-Ansatz auf das weitere Studium von Rapoport-Zink-Räume und ganzzahlige Modelle von Shimuravarietäten anzuwenden. Insbesondere die Idee der Genügsamkeit von perfektoiden Werten unserer Funktoren, um alle topologische Fragestellungen zu erforschen (sagen wir einfach mal, dass das geometrische Langlands-Programm eher topologisch ist), erscheint uns vielversprechend und könnte zu einer Vereinfachung der Arbeit von M. Kisin und G. Pappas ([KP18]) führen.

Vor kurzem haben B. Bhatt und P. Scholze ([BS19]) den prismatischen Formalismus eingeführt. Es wäre sicherlich interessant einen theoretischen Rahmen auszuarbeiten mit dem Zweck, affine Graßmannschen und lokale Modelle mit reinen charakteristikgemischten Methoden aufzufassen. Wir erwarten, dass die Herausforderungen nichtnormaler Schubert-Varietäten und lokaler Modelle durchsichtig werden sollten.

#### LITERATUR

- [I] *Théorie de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs.*

- [II] *Grassmanniennes affines tordues sur les entiers.*
- [III] *On the normality of Schubert varieties: remaining cases in positive characteristic.*
- [IV] *Local models: between two worlds.*
- [Ans18] J. Anschütz. *Extending torsors on the punctured  $\mathrm{Spec} A_{\mathrm{inf}}$* , <https://arxiv.org/abs/1804.06356>.
- [APLR] J. Anschütz, J. N. Pereira Lourenço & T. Richarz. *The  $B_{\mathrm{dR}}^+$ -affine Grassmannian and local models*, in Vorbereitung.
- [BL94] A. Beauville & Y. Laszlo. *Conformal blocks and generalized theta functions*. Comm. Math. Phys. 164 (1994), no. 2, 385-419.
- [BL95] A. Beauville & Y. Laszlo. *Un lemme de descente*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 320 (1995), no. 3, 335-340.
- [BD96] A. A. Beilinson & V. G. Drinfeld. *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*, Vorveröffentlichung, verfügbar unter <http://math.uchicago.edu/~drinfeld/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf>.
- [BS19] B. Bhatt & P. Scholze. *Prisms and prismatic cohomology*. Vorveröffentlichung, <https://arxiv.org/abs/1905.08229>.
- [BoT78] A. Borel & J. Tits. *Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires*, C. R. Acad. Sci., tome 287 (1978), 55-57.
- [BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud. *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 21, Berlin, New York: Springer Verlag.
- [BT72] F. Bruhat & J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local: I. Données radicielles valuées*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 41 (1972), p. 5-251.
- [BT84a] F. Bruhat & J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local: II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 60 (1984), p. 5-184.
- [BT84b] F. Bruhat & J. Tits. *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*. Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome 112 (1984), p. 259-301.
- [BT87a] F. Bruhat & J. Tits. *Groupes algébriques sur un corps local. Chap. III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 34 (1987), 671-698.
- [BT87b] F. Bruhat & J. Tits. *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. II : groupes unitaires*. Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome 115 (1987), p. 141-195.
- [CT77] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc. *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 10 (1977), 175-229.
- [CGP15] B. Conrad, O. Gabber & G. Prasad. *Pseudo-reductive groups*. New Mathematical Monographs 26. Cambridge: Cambridge University Press (ISBN 978-1-107-08723-1/hbk; 978-1-316-09243-9/ebook). xxiv, 665 p. (2015).
- [CP16] B. Conrad & G. Prasad. *Classification of pseudo-reductive groups*, Annals of Mathematics Studies 191, Princeton University Press (2016).
- [De71] P. Deligne. *Travaux de Shimura*. Séminaire Bourbaki no. 13 (1971), Exposé no. 389, p. 123-165.
- [De79] P. Deligne. *Variétés de Shimura : Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*. Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math. Am. Math. Soc., Corvallis/Oregon 1977, Proc. Symp. Pure Math. 33, No.2, 247-290 (1979).
- [DP94] P. Deligne & G. Pappas. *Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant*. Compositio Mathematica, Tome 90 (1994) no. 1 p. 59-79.
- [DR73] P. Deligne & M. Rapoport. *Les schémas de modules de courbes elliptiques*. In Modular Functions of One Variable II. Lecture Notes in Mathematics, vol 349. Springer, Berlin, Heidelberg (1973).



- [Fal03] G. Faltings. *Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 5, No. 1, 41-68 (2003).
- [FSch] L. Fargues & P. Scholze. *Geometrization of the local Langlands correspondence*, in endloser Vorbereitung.
- [GI63] O. Goldman & N. Iwahori. *The space of  $p$ -adic norms*. Acta Math. Volume 109 (1963), 137-177.
- [Go01] U. Görtz. *On the flatness of models of certain Shimura varieties of PEL-type*. Math. Ann. 321, No. 3, 689-727 (2001).
- [HR18] T. J. Haines & T. Richarz. *The test function conjecture for parahoric local models*, arXiv:1801.07094, wird bei Journal of the AMS erscheinen.
- [HPR18] X. He, G. Pappas & M. Rapoport. *Good and semi-stable reductions of Shimura varieties*, <https://arxiv.org/abs/1804.09615>.
- [IM65] N. Iwahori & H. Matsumoto. *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of  $p$ -adic Chevalley groups*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Tome 25 (1965), p. 5-48.
- [KP18] M. Kisin & G. Pappas. *Integral models of Shimura varieties with parahoric level structure*. Publ. Math. de l'I.H.É.S., 128 (2018), 121 - 218.
- [La96] E. Landvogt: *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lecture Notes in Math., vol. 1619, Springer-Verlag Berlin (1996).
- [Lev16] B. Levin. *Local models for Weil-restricted groups*, Compositio Math. 152 (2016), 2563-2601.
- [Mat88] O. Mathieu. *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales*, Astérisque vol. 159-160 (1988).
- [Mit85] D. Mitzman. *Integral bases for affine Lie algebras and their universal enveloping algebras*, Contemporary Mathematics, 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1985).
- [Pa00] G. Pappas. *On the arithmetic moduli schemes of PEL Shimura varieties*. J. Alg. Geom. 9 (2000), no. 3, 577-605.
- [PR08] G. Pappas & M. Rapoport. *Twisted loop groups and their affine flag varieties*. Adv. Math. 219, No. 1, 118-198 (2008).
- [PRS13] G. Pappas, M. Rapoport & B. Smithling. *Local models of Shimura varieties, I. Geometry and combinatorics*. Handbook of moduli. Volume III. Somerville, MA: International Press; Beijing: Higher Education Press. Advanced Lectures in Mathematics (ALM) 26, 135-217 (2013).
- [PZ13] G. Pappas & X. Zhu. *Local models of Shimura varieties and a conjecture of Kottwitz*. Invent. Math. 194, No. 1, 147-254 (2013).
- [PL17] J. N. Pereira Lourenço. *The Riemannian Hebbarkeitssätze for pseudorigid spaces*, <https://arxiv.org/abs/1711.06903>.
- [Sol18] M. Solleveld. *Pseudo-reductive and quasi-reductive groups over non-archimedean local fields*, Journal of Algebra 510 (2018), 331-392.
- [Ri16] T. Richarz. *Affine Grassmannians and geometric Satake equivalences*. Int. Math. Res. Not., Vol. 2016, Issue 12, 3717-3767 (2016).
- [Ri19] T. Richarz. *Erratum to "Affine Grassmannians and geometric Satake equivalences"*, Int. Math. Res. Not., rnz210 (2019).
- [RZ96] M. Rapoport & T. Zink. *Period spaces for  $p$ -divisible groups*. Annals of Mathematics Studies. 141. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press. xxi, 324 p., (1996).
- [Ray70] M. Raynaud. *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 119, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [SW20] P. Scholze & J. Weinstein. *Berkeley lectures on  $p$ -adic geometry*. Ann. of Math. Studies 207 (2020).
- [Ti84] J. Tits. *Groups and group functors attached to Kac-Moody data*, Arbeitstagung Bonn 1984, p. 193-223.
- [Yu15] J.-K. Yu, *Smooth models associated to concave functions in Bruhat-Tits theory*, dans Autour des schémas en groupes, vol. III, 227-258, Panor. Synthèses, 47, Soc. Math. France, Paris (2015).

- [Zhu14] X. Zhu. *On the coherence conjecture of Pappas and Rapoport*. Ann. Math. (2) 180, No. 1, 1-85 (2014).

## Chapitre 1

# **Théorie de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs**

# THÉORIE DE BRUHAT-TITS POUR LES GROUPES QUASI-RÉDUCTIFS

JOÃO NUNO PEREIRA LOURENÇO

RÉSUMÉ. Soient  $K$  un corps discrètement valué et hensélien,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers supposé excellent,  $\kappa$  son corps résiduel supposé parfait et  $G$  un  $K$ -groupe quasi-réductif, c'est-à-dire lisse, affine, connexe et à radical unipotent déployé trivial. On construit l'immeuble de Bruhat-Tits  $\mathcal{I}(G, K)$  pour  $G(K)$  de façon canonique, améliorant les constructions moins canoniques de M. Solleveld sur les corps locaux, et l'on associe un  $\mathcal{O}$ -modèle en groupes  $\mathcal{G}_\Omega$  de  $G$  à chaque partie non vide et bornée  $\Omega$  contenue dans un appartement de  $\mathcal{I}(G, K)$ . On montre que les groupes parahoriques  $\mathcal{G}_f$  attachés aux facettes peuvent être caractérisés en fonction de la géométrie de leurs grassmanniennes affines, ainsi que dans la thèse de T. Richarz. Ces résultats sont appliqués ailleurs à l'étude des grassmanniennes affines tordues entières.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Rappels sur la théorie des groupes	4
3. Valuations, appartements et immeubles	11
4. Modèles en groupes immobiliers	18
5. Applications aux grassmanniennes affines	26
Références	30

## 1. INTRODUCTION

La théorie des immeubles de F. Bruhat et J. Tits, cf. [BT72] et [BT84], pour les groupes réductifs sur un corps valué est un outil surtout combinatoire, mais aussi schématique, qui a connu un succès énorme, tant en théorie des représentations qu'en géométrie algébrique arithmétique. Le but principal de ce travail est d'étendre toute cette théorie aux groupes quasi-réductifs sur les corps discrètement valués, excellents et résiduellement parfaits, dont des indications fortes sont déjà parus depuis longtemps dans le travail [Oes84] de J. Oesterlé sur les nombres de Tamagawa, où des diverses propriétés arithmétiques des groupes unipotents ployés ont été remarquées pour la première fois, et aussi dans l'excellent livre [BLR90] de S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, dans lequel le modèle de Néron (localement de type fini) des groupes quasi-réductifs nilpotents fut construit, cf. 10.2 de [BLR90]. Plus récemment, la classification des groupes pseudo-réductifs a permis de se battre avec tels phénomènes dans des cadres assez généraux, comme exemplifié par : la démonstration [Co12] par B. Conrad de la finitude des nombres de Tamagawa pour les groupes algébriques

---

1991 *Mathematics Subject Classification*. 14L15 (primary), 14M15, 20G25, 20E42 (secondary).

*Key words and phrases*. grassmanniennes affines, schémas en groupes, théorie de Bruhat-Tits, groupes parahoriques, groupes pseudo-réductifs, groupes quasi-réductifs, modèles de Néron.

linéaires ; la construction par M. Solleveld en [Sol18] des immeubles de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs sur les corps locaux, bien que des décompositions de Cartan et d'Iwasawa ; et la preuve [Ros18] de la dualité de Tate pour les groupes commutatifs pseudo-réductifs par Z. Rosengarten.

Décrivons les protagonistes de cet article, à savoir les groupes pseudo- et quasi-réductifs. Soient  $K$  un corps commutatif et  $G$  un  $K$ -groupe affine, lisse et connexe. Alors  $G$  est dit pseudo-réductif (resp. quasi-réductif) s'il ne contient aucun sous-groupe distingué non trivial, qui soit lisse, unipotent et connexe (resp. et de plus déployé). A. Borel et J. Tits avaient déjà annoncé sans démonstration en [BoT78], que cette classe partage une grande quantité de propriétés en commun avec les groupes réductifs, comme par exemple, l'existence d'un système de racines relatif  $\Phi(G, S)$ , des sous-groupes radiciels associés aux racines, d'une bonne notion de sous-groupes pseudo-paraboliques, et des théorèmes de conjugaison de ces derniers bien que des tores déployés maximaux.

Néanmoins, il s'agit d'une découverte récente de B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad [CGP15], complétée à la caractéristique  $p = 2$  lorsque  $[K : K^2] > 2$  en [CP16], qu'il est loisible de classifier les groupes pseudo-réductifs de façon élégante. Comme cela est toujours rempli par les corps ultramétriques résiduellement parfaits et à complété séparable, on supposera dorénavant qu'on a toujours  $[K : K^p] \leq p$ . Alors le théorème principal de [CGP15] affirme que tout groupe pseudo-réductif  $G$  s'obtient à partir de certains groupes pseudo-réductifs primitifs, en prenant des restrictions des scalaires, des produits et en modifiant le Cartan. Plus précisément, soient  $K'$  une  $K$ -algèbre finie réduite,  $G'$  un  $K'$ -groupe à fibres pseudo-réductives primitives,  $C'$  un Cartan fixe de  $G'$  et  $C$  un groupe pseudo-réductif commutatif opérant sur  $R_{K'/K}G'$  de telle sorte que  $R_{K'/K}C'$  soit fixé ; alors, le quadruple  $(K'/K, G', C', C)$  est dénommé une présentation de  $G = (C \times R_{K'/K}G')/R_{K'/K}C'$  et tout groupe pseudo-réductif admet une telle présentation, qui ne dépend que du choix d'un Cartan  $C$  de  $G$ . Il ne reste qu'à éclaircir le sens du mot primitif, qu'on applique pour décrire les trois classes suivantes : les groupes réductifs, semi-simples, simplement connexes et absolument presque simples ; les groupes exotiques basiques, qui n'existent qu'en caractéristique  $p = 2$  ou  $3$  et dont le diagramme de Dynkin du système de racines irréductible possède une arête étiquetée avec  $p$  ; les groupes absolument non réduits basiques notés  $BC_n$ , qui sont les seuls groupes pseudo-déployés dont le système de racines est non-réduit de type  $BC_n$ . On signale que ces constructions en petites caractéristiques étaient déjà parues dans l'œuvre de J. Tits, cf. [Ti84] et [Ti89], lequel a été motivé par des réalisations entières de certains groupes associés aux algèbres de Kac-Moody affines tordues, voir aussi [Ti87] et [Ti92].

Soit maintenant  $(K, \omega)$  un corps discrètement valué, hensélien, excellent et résiduellement parfait. Étant donné un groupe quasi-réductif  $G$  sur  $K$ , le but présent est de construire des données radicielles valuées, des immeubles et des schémas en groupes parahoriques. Il faut dire que la partie combinatoire, n'impliquant que les points rationnels de  $G$ , a déjà été traitée par M. Solleveld, en exploitant crucialement le fait que, par exemple pour un groupe exotique basique  $G$ , les points rationnels  $G(K)$  coïncident avec ceux de son cousin déployé  $\overline{G}$ , ou que le groupe des points rationnels de  $BC_n$  s'identifie à  $\mathrm{Sp}_{2n}(K^{1/2})$ . Une telle approche

devient toutefois problématique lorsqu'on veut traiter de questions schématiques (et même la définition d'une donnée radicielle valuée est subtile, en vertu de ce que l'application  $G \rightarrow \overline{G}$  induit une bijection non additive entre leurs systèmes de racines). Par conséquent, on partira du zéro en définissant ces structures combinatoires, essayant de traiter les facteurs primitifs de  $G$  aussi également que possible.

**Théorème 1.1.** *Soient  $K$  un corps discrètement valué, hensélien,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers supposé excellent et  $\kappa$  son corps résiduel supposé parfait. Soient  $G$  un groupe quasi-réductif sur  $K$ ,  $S$  un tore maximal déployé de  $G$ ,  $Z := Z_G(S)$  le centralisateur de  $S$  et  $U_a$  le sous-groupe radiciel attaché à  $a \in \Phi := \Phi(G, S)$ . L'ensemble des valuations  $\varphi = (\varphi_a)$  de la donnée radicielle abstraite  $(Z(K), U_a(K))_{a \in \Phi}$  formées de celles qui sont compatibles à  $\omega$ , c'est-à-dire telles que  $\varphi_a(zuz^{-1}) - \varphi_a(u) = \omega(a(z))$ , pour tout  $z \in Z(K)$ ,  $a \in \Phi$  et  $u \in U_a(K)$ , porte la structure d'un espace affine non vide dont l'espace vectoriel réel sous-jacent  $V$  s'identifie au sous-espace de  $X_*(S) \otimes \mathbb{R}$  engendré par  $\Phi^\vee$ .*

Nous notons que la preuve de ce théorème se fait en deux étapes : premièrement, on suppose que  $G$  est quasi-déployé et l'on fait usage de certains quasi-systèmes de Chevalley de  $G^{\text{psréd}}$  ; puis on utilise toute la théorie de Bruhat-Tits développée dans le cas quasi-réductif (voir le théorème ci-dessous) pour descendre les valuations le long de l'extension non ramifiée  $K \rightarrow K^{\text{nr}}$ . L'espace affine de ce théorème est l'appartement  $\mathcal{A}(G, S, K)$  associé au tore maximal déployé  $S$  de  $G$ , il admet une structure de complexe simplicial engendrée par les hyperplans  $\partial\alpha_{a,k} := \{v \in V : a(v) + k = 0\}$ ,  $k \in \Gamma_a^\varphi$ , qui ne dépendent pas du choix d'une origine  $\varphi$ , sur lequel les points rationnels  $N(K)$  du normalisateur  $N$  de  $S$  opèrent. Pour définir le immeuble de Bruhat-Tits  $\mathcal{I}(G, K)$ , il suffit de recoller tous les appartements  $\mathcal{A}(G, gSg^{-1}, K)$ , en requérant que chaque  $\psi = \varphi + v$  appartenant à  $\mathcal{A}(G, S, K)$  soit fixé par le sous-groupe parahorique  $P_\psi$  engendré par  $\mathcal{Z}(\mathcal{O})$  et les  $U_{a,-a(v)} := \varphi_a^{-1}([-a(v), +\infty])$ , où l'on note  $\mathcal{Z}$  l'unique  $\mathcal{O}$ -modèle en groupes parahorique de  $Z$ .

Le prochain objectif est la construction des modèles en groupes entiers  $\mathcal{G}_\Omega$  de  $G$  associés à une partie non vide et bornée  $\Omega$  contenue dans un appartement de  $\mathcal{I}(G, K)$ , dont la procédure consistera à définir auparavant les modèles correspondants  $\mathcal{Z}$  de  $Z$ , resp.  $\mathcal{U}_{a,\Omega}$  de  $U_a$  pour toute racine non divisible  $a \in \Phi_{\text{nd}}$ , et ensuite à les recoller en  $\mathcal{G}_\Omega$  à l'aide de lois birationnelles. Observons qu'on aura besoin comme précédemment de traiter en priorité le cas quasi-déployé, pour en déduire le général par descente non ramifiée. En tout cas, les théorèmes de structure peuvent être énoncés comme suit :

**Théorème 1.2.** *Pour chaque partie non vide et bornée  $\Omega$  d'un appartement de  $\mathcal{I}(G, K)$ , il existe un plus grand modèle en groupes  $\mathcal{G}_\Omega$  lisse, affine et connexe de  $G$  tel que  $\mathcal{G}_\Omega \otimes K = G$  et  $\mathcal{G}_\Omega(\mathcal{O}^{\text{nr}})$  fixe  $\Omega$ . Si  $\Omega = \mathbf{f}$  est une facette, alors ses sous-facettes correspondent bijectivement aux  $k$ -sous-groupes paraboliques de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s} := \mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes k$  par l'application  $\mathbf{f}' \succcurlyeq \mathbf{f} \mapsto Q_{\mathbf{f}',\mathbf{f}} := \text{im}(\mathcal{G}_{\mathbf{f}',s} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f},s})$ . De plus, on a  $P_{\mathbf{f}'} = Q_{\mathbf{f}',\mathbf{f}}(k) \times_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}(k)} P_{\mathbf{f}}$ .*

Enfin on décrit le lien entre les modèles parahoriques  $\mathcal{G}$  et la projectivité d'un certain ind-schéma parfait, appelé la grassmannienne affine  $\text{Gr}_{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{G}$ , qui paramètre les  $\mathcal{G}$ -torseurs sur  $\text{Spec } W_{\mathcal{O}}(R)$  trivialisés au-dessus de  $\text{Spec } W_{\mathcal{O}}(R) \otimes K$ . Il a été justement pour analyser

ces espaces (voir l'article [II] qui étend quelques résultats de [PR08] et/ou [PZ13]), que nous fûmes conduits à développer la théorie de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs.

**Théorème 1.3.** *Soient  $K$  un corps discrètement valué, complet et résiduellement parfait,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers et  $\mathcal{G}$  un  $\mathcal{O}$ -groupe lisse et affine. Pour que la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{G}$  soit ind-projective, il faut et il suffit que  $\mathcal{G}^0$  soit un modèle parahorique de sa fibre quasi-réductive.*

On en tire aussitôt un corollaire concernant la projectivité générique de la grassmannienne affine globale de A. Beilinson et V. G. Drinfeld [BD96], qui permet de géométriser une vieille conjecture de [BLR90] sur les modèles de Néron globales.

**Leitfaden.** Le 2 rappelle au lecteur les notions fondamentales de la théorie des groupes pseudo-réductifs et quasi-réductifs ainsi que certains concepts nouveaux concernant ceux-ci dont on aura besoin dans la suite. Ensuite le 3 introduit les données radicielles valuées, les appartements et les immeubles. Enfin, dans 4 nous construisons les schémas en groupes attachés aux parties bornées contenues dans un appartement de l'immeuble, étudions leurs radicaux unipotents ainsi que le lien entre les groupes parahoriques et les sous-groupes paraboliques de la fibre spéciale. Le 5 donne un critère géométrique de parahoricité en termes des grassmanniennes affines.

**Remerciements.** Le présent travail est sans aucun doute immensément redevable à F. Bruhat et J. Tits, qui avaient déjà développé la machinerie nécessaire pour étudier les groupes quasi-réductifs sur un corps discrètement valué et hensélien. J'ai profité aussi de ma participation à l'école d'été « Immeubles et grassmanniennes affines », durant laquelle j'ai écrit et présenté une partie de mes travaux. D'ailleurs j'ai entrepris des conversations intéressantes sur ce thème avec B. Conrad, A. Ivanov, G. Prasad, T. Richarz, P. Scholze et M. Solleveld. Je suis très reconnaissant à M. Santos, P. Scholze et au rapporteur de leurs suggestions pour améliorer ce manuscrit. Cet article a été rédigé dans le cadre et avec le soutien du Sonderforschungsbereich/Transregio 45, ainsi que du Leibniz-Preis de la Deutsche Forschungsgemeinschaft attribué au Prof. Dr. Peter Scholze.

**Notations.** Sauf mentionné autrement, tous les corps à partir de 3.1 seront supposés discrètement valués, henséliens, excellents (à savoir,  $\hat{K}/K$  est une extension séparable) et résiduellement parfaits. On note  $R_{B/A}$  le foncteur de restriction des scalaires le long d'une extension finie et plate d'anneaux noethériens  $A \rightarrow B$ . Les immeubles considérés seront presque toujours réduits et notés  $\mathcal{I}(G, K)$ ; leurs variantes élargies seront notées  $\mathcal{I}^1(G, K)$ .

## 2. RAPPELS SUR LA THÉORIE DES GROUPES

Dans la suite on va rappeler et énoncer quelques propriétés qui concernent les groupes quasi-réductifs, en s'appuyant sur les travaux de B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad, cf. [CGP15], [CP16].

2.1. Commençons par rappeler au lecteur la notion du  $K$ -radical unipotent  $R_{u,K}G$  d'un  $K$ -groupe affine, lisse et connexe  $G$  : c'est le plus grand sous-groupe lisse, connexe, unipotent et distingué de  $G$  défini sur  $K$ . Le groupe  $G$  est dit pseudo-réductif si  $R_{u,K}G$  est trivial, dont l'exemple prototypique est la restriction des scalaires à la Weil  $G = R_{K'/K}G'$  d'un groupe réductif  $G'$  le long d'une extension de corps  $K'/K$  purement inséparable,  $G$  n'étant réductif que lorsque  $K' = K$  ; nous allons expliquer leur classification au prochain paragraphe. De manière analogue, on définit le radical unipotent déployé  $R_{ud,K}G$  en exigeant de plus que le sous-groupe unipotent soit déployé, c'est-à-dire il possède une suite croissante de sous-groupes unipotents et connexes à pièces graduées consécutives isomorphes à  $\mathbb{G}_a$ , ce qui ne se produit pas forcément au-dessus des corps imparfaits. Les groupes à radical unipotent déployé trivial sont appelés quasi-réductifs, cf. [BT84], 1.1.11., dont les unipotents parmi eux s'appellent ployés. On va tout d'abord éclaircir les théorèmes structuraux valides pour les groupes pseudo-réductifs et quasi-réductifs, dont la presque totalité avait été déjà annoncée par A. Borel et J. Tits en [BoT78].

Soient  $K$  un corps et  $G$  un  $K$ -groupe quasi-réductif. Les  $K$ -tores déployés maximaux de  $G$  forment une seule classe de conjugaison sous  $G(K)$  d'après le th. C.2.3 de [CGP15] et considérons un tel sous-tore  $S$ . Le système de racines  $\Phi := \Phi(G, S)$  est l'ensemble des poids de  $S$  dans l'algèbre de Lie  $\mathrm{Lie} G$  pour la représentation adjointe, il porte la structure d'un système de racines dans le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de  $X_*(S) \otimes \mathbb{Q}$  engendré par les racines et peut être même promu à une donnée radicielle  $(X_*(S), \Phi^\vee, X^*(S), \Phi)$  (cf. th. C.2.15 de [CGP15]). D'autre part, on peut considérer aussi le système de racines absolu  $\tilde{\Phi} = \Phi(G_{K^{\mathrm{sep}}}, T_{K^{\mathrm{sep}}})$ , où  $T$  désigne un tore maximal de  $G$  contenant  $S$ , sur lequel le groupe galoisien  $\Gamma := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$  opère, de sorte que les racines  $\Phi$  correspondent bijectivement aux  $\Gamma$ -orbites dans  $\tilde{\Phi}$  dont la restriction à  $S$  ne s'annule pas. Quant aux  $K$ -sous-groupes pseudo-paraboliques  $P$  de  $G$ , ils peuvent être définis de façon dynamique, pour laquelle nous renvoyons à la déf. 2.2.1 de [CGP15], ou de façon combinatoire à conjugaison près comme les seuls sous-groupes connexes et lisses contenant  $S$  dont l'algèbre de Lie est la somme des espaces propres  $\mathfrak{g}_0$  et  $\mathfrak{g}_a$ , où  $a$  parcourt une partie parabolique de  $\Phi$ , cf. lem. C.2.16 de [CGP15]. Selon la prop. B.4.4 de [CGP15], la seule opération permise d'un tore sur un groupe unipotent ployé est l'identité. Par suite, le radical unipotent  $R_{u,K}G$  d'un groupe quasi-réductif  $G$  est contenu dans  $Z := Z_G(S)$ , d'où une identification canonique  $\Phi(G, S) = \Phi(G^{\mathrm{psréd}}, S^{\mathrm{psréd}})$  et des isomorphismes  $U_a \cong U_a^{\mathrm{psréd}}$ , où l'on note  $G^{\mathrm{psréd}}$  le quotient pseudo-réductif de  $G$  etc. pour les restants groupes. On remarque que le centralisateur  $Z$  de  $S$  est quasi-réductif et qu'il en est de même des Cartans de  $G$ , lesquels sont de plus nilpotents (et même commutatifs dans le cas pseudo-réductif, voir la prop. 1.2.4 de [CGP15]).

2.2. On peut construire encore d'autres groupes pseudo-réductifs en modifiant un Cartan : soient  $K'$  une  $K$ -algèbre finie et réduite,  $G'$  un  $K'$ -schéma en groupes à fibres pseudo-réductives (c'est-à-dire, lorsqu'on écrit  $K' = \prod_{i \in I} K'_i$  comme produit de corps, alors  $G'$  s'écrit comme produit  $\prod_{i \in I} G'_i$  avec  $G'_i$  un groupe pseudo-réductif sur  $K'_i$ ),  $C' \subseteq G'$  un Cartan,  $C$  un  $K$ -groupe pseudo-réductif commutatif muni d'une opération à gauche sur  $R_{K'/K}G'$  qui laisse



$R_{K'/K}C'$  stable point par point et d'une application  $R_{K'/K}C' \rightarrow C$  équivariante pour l'action sur  $R_{K'/K}G'$  ; alors le  $K$ -groupe lisse, affine et connexe  $G := (R_{K'/K}G' \rtimes C)/R_{K'/K}C'$  obtenu en plongeant  $R_{K'/K}C$  antidiagonalement dans le produit semi-direct, est pseudo-réductif, cf. prop. 1.4.3 de [CGP15]. Nous disons que le quadruple  $(K'/K, G', C', C)$  est une présentation du couple  $(G, C)$  (ou parfois, par abus de langage, juste de  $G$ , lorsque le Cartan  $C$  est sous-entendu). Le théorème de classification des groupes pseudo-réductifs affirme l'existence des présentations « primitives » dans presque tous les cas :

**Théorème 2.1** (B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad). *Soient  $K$  un corps tel que  $[K : K^2] \leq 2$  lorsque sa caractéristique est égale à 2,  $G$  un groupe pseudo-réductif sur  $K$  et  $C$  un Cartan de  $G$ . Alors il y a une et une seule présentation  $(K'/K, G', C', C)$  de  $(G, C)$  à isomorphisme unique près, dont les fibres de  $G'$  sont primitives. De plus, la  $K$ -algèbre  $K'$  et le  $K'$ -groupe  $G'$  ne dépendent que de  $G$  à isomorphisme unique près.*

Expliquons le sens du mot « primitif » appliqué dans l'énoncé. Cela va dénommer une classe de certains groupes qui sont minimaux par rapport aux présentations ci-dessus, et qui sont divisés en trois volets : le volet réductif, formé des groupes semi-simples, simplement connexes et absolument presque simples (et ceci est le seul volet non vide lorsque  $p \geq 5$ ) ; l'exotique, formé des groupes pseudo-réductifs pseudo-simples exotiques basiques, qui n'existent qu'en caractéristique  $p = 2$  ou 3, lorsque le diagramme de Dynkin possède une  $p$ -arête ; le non réduit, formé des groupes pseudo-réductifs, pseudo-simples et pseudo-déployés à système de racines non réduit, qui n'existent qu'en caractéristique  $p = 2$ . Notons encore que l'hypothèse  $[K : K^2] \leq 2$  dès que  $p = 2$  qu'on a faite ne peut même pas être soulevée, car sinon les groupes pseudo-réductifs deviennent typiquement n'importe quoi, voir [CP16]. Ceci nous conduit à faire dorénavant l'hypothèse suivante, à laquelle les corps valués considérés dans la suite satisferont automatiquement : on a  $[K : K^p] \leq p$ .

Décrivons alors les bizarreries propres aux caractéristiques petites, en commençant par ce qu'on appelle les groupes pseudo-réductifs exotiques basiques (pseudo-déployés), dont la construction repose sur l'existence de diagrammes de Dynkin possédant une arête étiquetée avec  $p$ , alors de type  $B_n, C_n, n \geq 2$  ou  $F_4$  si  $p = 2$  ou  $G_2$  si  $p = 3$ . Alors, un groupe pseudo-réductif  $G$  sur un corps imparfait  $K$  en caractéristique  $p = 2$  ou 3 est dénommé exotique basique si le radical unipotent  $R_{u, K^{\text{alg}}}G$  est défini sur  $K^{1/p} \neq K$ , le quotient réductif  $G' := G_{K^{1/p}}^{\text{red}}$  défini au-dessus de  $K^{1/p}$  est semi-simple, absolument presque simple et simplement connexe, dont le diagramme de Dynkin admet une arête avec étiquette  $p$ , et l'application correspondante  $G \rightarrow R_{K^{1/p}/K}G'$  est une immersion fermée identifiant  $G$  à l'image réciproque d'un Levi  $\bar{G}$  de  $R_{K^{1/p}/K}\bar{G}'$  par la restriction des scalaires de l'isogénie très spéciale  $R_{K^{1/p}/K}\pi : R_{K^{1/p}/K}G' \rightarrow R_{K^{1/p}/K}\bar{G}'$  (voir la construction de [CGP15], 7.1). Réciproquement, pour qu'une telle donnée  $(G', \bar{G})$ , formée d'un  $K^{1/p}$ -groupe réductif  $G'$  et d'un  $K$ -groupe réductif  $\bar{G}$  soumis aux conditions antérieures, produise un groupe pseudo-réductif en prenant l'image réciproque  $G = (R_{K^{1/p}/K}\pi)^{-1}(\bar{G})$ , il faut et il suffit que cette image soit lisse ou que  $\bar{G}$  soit contenu dans l'image de  $R_{K^{1/p}/K}\pi$ , ce qui est typiquement faux, cf. prop. 7.3.1 de [CGP15].

Exemplifions notamment la construction des groupes pseudo-réductifs exotiques basiques dans le cas pseudo-déployé, qui jouera un rôle plus important dans la construction des immeubles. Supposons que  $G' := H$  est un  $\mathbb{F}_p$ -groupe épinglé, presque simple et simplement connexe, ayant une  $p$ -arête dans son diagramme de Dynkin. Alors on peut regarder l'isogénie très spéciale  $\pi$  comme étant définie au-dessus de  $\mathbb{F}_p$  et il s'avère que  $\bar{G}' := \bar{H}$  est un  $\mathbb{F}_p$ -groupe épinglé, presque simple et simplement connexe à diagramme de Dynkin dual, de telle sorte que l'on ait  $T_{\bar{H}} = \pi(T_H)$ ,  $N_{\bar{H}} = \pi(N_H)$ ,  $W_H \xrightarrow{\sim} W_{\bar{H}}$  et que l'endomorphisme  $\mathbb{G}_a \xrightarrow{x_a} U_{a,H} \xrightarrow{\pi} U_{\bar{a},\bar{H}} \xrightarrow{x_{\bar{a}}^{-1}} \mathbb{G}_a$  soit de la forme  $t \mapsto t$  (resp.  $t \mapsto t^p$ ) lorsque  $a$  est longue (resp. courte), où  $\bar{\Phi}$  s'identifie au dual de  $\Phi$  par la réciproque de la bijection  $a \in \Phi \mapsto \bar{a} \in \bar{\Phi}$ . Il est aisé de voir que l'image réciproque  $G$  du Levi  $\bar{H}$  de  $R_{K^{1/p}/K}\bar{H}$  par  $R_{K^{1/p}/K}\pi$  satisfait aux conditions ci-dessus, donc il s'agit d'un groupe pseudo-réductif exotique basique pseudo-déployé à système de racines  $\Phi$ , cf. th. 7.2.3 de [CGP15]. Observons que la grosse cellule de  $G$  peut être donnée par les formules suivantes :  $Z = \prod_{a \in \Delta} R_{K_a/K} a^\vee(\mathbb{G}_m)$  et  $U_a = R_{K_a/K} \mathbb{G}_a$  dans le groupe pseudo-épinglé  $R_{K^{1/p}/K}H$ , où  $K_a = K$  si  $a$  est longue (resp.  $K_a = K^{1/p}$  sinon).

Si  $p = 2$ , il existe un autre phénomène largement inusité, celui des groupes pseudo-réductifs dont le système de racines absolu n'est pas réduit. Pour les construire, les auteurs de [CGP15] considèrent le groupe  $G' = \mathrm{Sp}_{2n}$  canoniquement épinglé à système de racines de type  $C_n$  et commencent par observer que  $\Phi := \Phi' \cup (\frac{1}{2}\Phi' \cap X^*(T'))$  est un système de racines non réduit de type  $BC_n$ . À chaque racine ni divisible ni multipliable  $a$  (resp. multipliable  $c$ , resp. divisible  $2c$ ) dans  $\Phi$ , on lui associe le sous-groupe radiciel  $U_a = R_{K^{1/2}/K} \mathbb{G}_a$  (resp.  $U_c = R_{K^{1/2}/K} \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$  muni de la loi de groupe additive naturelle, resp.  $U_{2c} = 1 \times \mathbb{G}_a \subseteq U_c$ ); on munit ensuite ces sous-groupes des applications vers les  $R_{K^{1/2}/K} U'_a$  (resp.  $R_{K^{1/2}/K} U'_{2c}$ ) définies par les formules  $x \mapsto x$  (resp.  $(x, y) \mapsto \alpha x^2 + y$ , où  $\alpha \in K^{1/2} \setminus K$ ).<sup>1</sup> Or le th. 9.6.14. de [CGP15] fournit une loi de groupe sur le  $K$ -schéma  $U^+ = \prod_{a \in \Phi^+} U_a$ , qui est indépendante de l'ordre mis sur les facteurs du produit à un sens convenable et aussi compatible avec la projection sur  $R_{K^{1/2}/K} U'^+$ ; de plus, si l'on note  $Z$  le groupe pseudo-réductif commutatif  $R_{K^{1/2}/K} T'$ , alors il opère sur  $U^+$  et le schéma  $U^+ \times w \times ZU^+$  admet une et une seule loi birationnelle stricte recouvrant celle de la cellule ouverte de Bruhat de  $R_{K^{1/2}/K} G'$ . Le  $K$ -groupe  $G := \mathrm{BC}_n$  échéant est lisse, affine, connexe et même pseudo-réductif muni d'un morphisme canonique  $\pi : G \rightarrow R_{K^{1/2}/K} G'$ , dont le noyau est contenu dans le produit des sous-groupes radiciels multipliables. De plus, son quotient réductif géométrique est défini sur  $K^{1/2}$  et s'identifie à  $G' = \mathrm{Sp}_{2n}$  par l'application déduite de  $\pi$  par adjonction. Ce groupe pseudo-réductif ne dépend que de  $n$ , ses  $K$ -automorphismes sont tous intérieurs et il ne possède pas des  $K$ -formes non triviales. Les groupes isomorphes à  $\mathrm{BC}_n$  sont dénommés absolument non réduits basiques dans [CGP15] (ne faire pas confusion avec le sens du mot « réduit » en géométrie algébrique!)

<sup>1</sup>Signalons que  $U_c \rightarrow R_{K^{1/2}/K} U'_{2c}$  ne dépend pas du choix de  $\alpha$ , puisque, lorsqu'on se donne  $\beta = \alpha r^2 + c$  avec  $r \in K^{1/2}$ ,  $c \in K$ , alors on obtient un et un seul isomorphisme  $U_{c,\beta} \rightarrow U_{c,\alpha}$ ,  $(x, y) \mapsto (rx, y + cx^2)$  qui préserve les applications vers  $R_{K^{1/2}/K} U'_{2c}$ .

Rappelons un petit peu de la structure générale des groupes pseudo-réductifs qui fut développée dans [CP16]. Une extension centrale de groupes pseudo-réductifs dérivés est dite modérée si le noyau (qui est souvent non lisse) ne contient aucun sous-groupe unipotent et on peut montrer (voir th. 5.1.4 de [CP16]) qu'il existe une telle extension centrale modérée universelle  $\tilde{G}$  pour chaque groupe  $G = G^{\text{dér}}$ , laquelle s'identifie canoniquement au groupe  $R_{K'/K}G'$  du th. 2.1. En général, on notera encore  $\tilde{G}$  le revêtement modérément universel du groupe dérivé  $G^{\text{dér}}$ , qui doit être regardé comme l'équivalent pseudo-réductif du revêtement simplement connexe d'un groupe réductif. Finalement, d'après le th. 2.4.1 de [CGP15], on dispose d'un groupe affine de type fini  $\text{Aut}_{G,C}$  classifiant les automorphismes de  $G$  dont la restriction à un Cartan donné  $C$  est triviale et l'on note  $C^{\text{aut}}$  son sous-groupe lisse maximal - le modifié  $G^{\text{aut}} := (G \rtimes C^{\text{aut}})/C$  jouera souvent un rôle semblable à celui du groupe adjoint pour les groupes réductifs (voir la suite et le th. C.2.15 de [CP16]).

2.3. Rappelons qu'un groupe quasi-réductif  $G$  sur un corps  $K$  s'appelle quasi-déployé si l'un de (équiv. tous) ses sous-groupes pseudo-boréliens est défini sur  $K$ . Ceci revient au même que demander que le centralisateur  $Z$  d'un tore déployé maximal soit nilpotent.

**Proposition 2.2.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique  $p$  tel que  $[K : K^p] \leq p$ ,  $G$  un  $K$ -groupe quasi-réductif et  $\tilde{G} = R_{K'/K}G'$  le revêtement modérément universel du quotient pseudo-réductif  $G^{\text{psréd}}$ , où les fibres de  $G'$  sont pseudo-réductives primitives. Pour que  $G$  soit quasi-déployé il faut et il suffit que les fibres réductives (resp. exotiques) de  $G'$  soient quasi-déployées (pseudo-déployées).*

*Démonstration.* Observons que  $G$  est quasi-déployé si et seulement si son quotient pseudo-réductif  $G^{\text{psréd}}$  l'est, car la commutativité de  $Z^{\text{psréd}}$  est nécessaire et suffisante pour que  $Z$  soit résoluble. On voit aussitôt que, lorsque  $G$  est pseudo-réductif,  $Z$  est commutatif si et seulement si  $\tilde{Z}$  l'est. Maintenant si  $G = \tilde{G} = R_{K'/K}G'$  est modérément universel et  $G'$  primitif, on voit que l'application, qui à un pseudo-parabolique  $P'$  de  $G'$  fait correspondre  $P = R_{K'/K}P'$ , définit une bijection entre les ensembles de sous-groupes pseudo-paraboliques de  $G$  et de  $G'$ , qui préserve les sous-groupes pseudo-boréliens parmi eux.

Finalement il faut voir que, si  $K' = K$  et  $G = G'$  est exotique basique et quasi-déployé, alors  $G$  est pseudo-déployé. Pour cela, on considère l'épimorphisme  $f : G' \rightarrow \tilde{G}$  vers le cousin déployé, lequel à son tour est quasi-déployé, en observant que  $f(C') = f(Z_{G'}(S')) = Z_{\tilde{G}}(f(S'))$  est un Cartan. Mais voilà que les diagrammes de Dynkin non simplement lacés ne possèdent aucun automorphisme extérieur, d'où le fait que  $\tilde{G}$  soit déployé et même que  $G$  soit pseudo-déployé, en vertu du cor. 7.3.4 de [CGP15].  $\square$

**Corollaire 2.3.** *Gardons l'hypothèse faite sur  $K$  et supposons que sa dimension cohomologique est inférieure ou égale à 1. Alors tout  $K$ -groupe quasi-réductif  $G$  est quasi-déployé.*

*Démonstration.* Grâce à la proposition précédente, il suffit de le vérifier pour chaque groupe simplement connexe ou exotique basique  $G$ , auquel cas cela résulte du théorème de Steinberg appliqué à  $G$  si celui-ci est réductif ou à  $\tilde{G}$  sinon.  $\square$

2.4. Maintenant on va rappeler les notions de quasi-épinglages et quasi-systèmes de Chevalley pour les groupes réductifs quasi-déployés et puis on les généralisera au cas pseudo-réductif et quasi-déployé, sous l'hypothèse  $[K : K^p] \leq p$  lorsque  $p$  est positif. Alors, durant ce paragraphe, on fixera un corps  $K$  de caractéristique  $p \geq 0$  tel que  $[K : K^p] \leq p$  lorsque  $p > 0$ , un  $K$ -groupe pseudo-réductif et quasi-déployé  $G$ , un sous-tore déployé maximal  $S$  de  $G$  et une base  $\Delta$  du système de racines  $\Phi$  de  $G$  suivant  $S$ , qui correspond à un pseudo-Borel  $B$  de  $G$ . On note  $T$  le plus grand sous-tore de  $G$  contenant  $S$  (unique, vu que  $G$  est quasi-déployé),  $\tilde{\Phi}$  le système de racines absolu  $\tilde{\Phi}$  de  $G$  suivant  $T$  et  $\tilde{\Delta}$  la base de  $\tilde{\Phi}$  associée à  $B$ .

Si  $G$  est un  $K$ -groupe réductif déployé, alors un épinglage de  $G$  correspond classiquement à la donnée d'isomorphismes  $x_a : \mathbb{G}_a \rightarrow U_a$  pour chaque racine simple  $a \in \Delta$ . Il est souvent utile d'étendre un épinglage en un système de Chevalley, cf. [BT84] et [SGA3], c'est-à-dire la donnée d'isomorphismes  $x_a : \mathbb{G}_a \rightarrow U_a$  pour toute racine  $a \in \Phi$  de sorte que  $m_a = x_a(1)x_{-a}(1)x_a(1)$  normalise le tore déployé maximal donné  $S$  et que les applications  $\text{int}(m_a) \circ x_b$  et  $x_{s_a(b)}$  de  $\mathbb{G}_a$  dans  $U_{s_a(b)}$  sont égales au signe près. Observons qu'un tel prolongement est déterminé au signe près par l'épinglage choisi et son existence résulte de la prop. 6.2 de [SGA3]. D'ailleurs, la première condition concernant  $m_a$  peut s'exprimer en affirmant l'existence d'un épimorphisme  $\text{SL}_2 \rightarrow G^a$  tel que la restriction au sous-groupe canoniquement épinglé des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) unipotentes coïncide avec  $x_a$  (resp.  $x_{-a}$  affecté du signe  $-1$ ), où  $G^a$  désigne le sous-groupe engendré par  $U_{\pm a}$ .

Lorsque  $G$  n'est plus déployé, mais bien quasi-déployé sur  $K$ , l'œuvre [BT84] s'appuie sur un épinglage de Steinberg ou système de Chevalley-Steinberg, cf. 4.1.3. de [BT84], qui sont une sorte de donnée de descente des mêmes objets dans le cas déployé par rapport au groupe de Galois absolu, pour décrire les sous-groupes radiciels relatifs de  $G$ . Pour être précis, soit  $\tilde{K}/K$  une extension galoisienne déployant  $G$  et considérons un épinglage (resp. système de Chevalley) de  $G \otimes \tilde{K}$  telle que  $\gamma \circ x_{\tilde{a}} \circ \gamma^{-1} = x_{\gamma(\tilde{a})}$  (resp. la même condition affectée d'un signe  $\pm 1$  lorsque  $\tilde{a} \in \tilde{\Phi}$  s'écrit comme la somme de deux racines conjuguées). Étant donné un épinglage de Steinberg, on sait déjà comment le prolonger en un système de Chevalley, mais il faut encore vérifier la formule  $\gamma \circ x_{\tilde{a}} \circ \gamma^{-1} = x_{\gamma(\tilde{a})}$  pour les racines  $a \in \Phi$  dont la restriction à  $S$  n'est pas divisible. Cela découle plus ou moins explicitement des travaux de R. Steinberg [St59] et [St68], dont un traitement détaillé et moderne se trouve dans [La96], prop. 4.4. Armé d'un système de Chevalley-Steinberg, le reste du 4.1. de [BT84] est consacré à en déduire des quasi-épinglages, (c'est-à-dire des isomorphismes avec certains groupes plus familiers) des  $K$ -sous-groupes radiciels  $U_a$  de  $G$  pour chaque racine non-divisible  $a \in \Phi$ . Par exemple, si  $a$  n'est pas multipliable et si l'on note  $K_{\tilde{a}}$  le corps fixe du stabilisateur dans  $\Gamma = \text{Gal}(\tilde{K}/K)$  d'un relèvement  $\tilde{a}$  de  $a$ , alors on obtient un épimorphisme central  $\zeta_a : \text{R}_{K_a/K} \text{SL}_2 \rightarrow G^a$  donné par  $g \mapsto \prod_{\gamma(\tilde{a})} \zeta_{\gamma(\tilde{a})}(\gamma(g))$ ; on note  $x_a$  la restriction de  $\zeta_a$  au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes identifié à  $\text{R}_{K_a/K} \mathbb{G}_a$  et dont l'image isomorphe n'est autre que le sous-groupe radiciel  $U_a$ . Dans le cas où  $a$  est multipliable, alors l'épimorphisme central admet pour source le groupe  $\text{R}_{K_{2\tilde{a}}/K} \text{SU}_{3, K_{\tilde{a}}/K_{2\tilde{a}}}$ , où les relèvements de  $a$  et  $2a$  sont choisis de telle façon que leur différence soit une racine.

Éclaircissons aussitôt la structure du groupe unitaire spécial à trois variables  $\mathrm{SU}_{3,L/L_2}$  associé à l'extension quadratique séparable  $L/L_2$ , qui sera regardé comme le sous-groupe de  $\mathrm{R}_{L/L_2}\mathrm{SL}_3$  qui préserve la forme hermitienne  $e_1\sigma(e_3) + e_2\sigma(e_2) + e_3\sigma(e_1)$ , en concordance avec [BT84], 4.1.9 ; le groupe unipotent des matrices triangulaires supérieures de  $\mathrm{SU}_{3,L/L_2}$  s'identifie alors à la sous-variété  $H(L, L_2)$  de  $\mathrm{R}_{L/L_2}\mathbb{A}_L^2$  définie par  $v + \sigma(v) = u\sigma(u)$ , moyennant le morphisme suivant :

$$\mu(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma(u) & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui admet aussi l'écriture  $\mu(u, v) = x_{\bar{a}}(u)x_{\bar{a}+\sigma(\bar{a})}(-v)x_{\sigma(\bar{a})}(\sigma(u))$  pour un certain choix approprié d'épinglage de  $\mathrm{SL}_3$ , cf. 4.1.9. de [BT84]. Transportée à  $H(L, L_2)$ , la loi de groupe du sous-groupe radiciel de  $\mathrm{SU}_{3,L/L_2}$  s'écrit comme suit :

$$(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2 + \sigma(u_1)u_2).$$

On observe que, fixant un élément  $\lambda \in L$  de trace 1, on peut identifier  $H(L, L_2)$  par  $j_\lambda : (u, v) \mapsto (u, v - \lambda u\sigma(u))$  au  $L_2$ -groupe  $H^\lambda$  constitué par la sous-variété de  $\mathrm{R}_{L/L_2}\mathbb{A}_L^2$  définie par l'équation  $y + \sigma(y) = 0$ , où  $(x, y) \in \mathrm{R}_{L/L_2}\mathbb{A}_L^2$ , et muni de la loi de multiplication :

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2 - \lambda x_1\sigma(x_2) + \sigma(\lambda x_1)x_2).$$

Revenant au but initial de quasi-épingler les groupes pseudo-réductifs et quasi-déployés, on est confronté au fait que la dimension des sous-groupes radiciels est typiquement plus grande que 1, même dans le cas pseudo-déployé, donc leur groupe d'automorphismes est en général trop gros et, par exemple, ne préserve pas la structure de droite sur une extension non triviale de  $K$ . Néanmoins on remarque que le groupe de  $K$ -automorphismes de  $\mathrm{R}_{L/K}\mathrm{SL}_2$  fixant le Cartan est isomorphe à  $L^\times$  par l'application qui fait correspondre à  $l \in L^\times$  l'automorphisme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & lb \\ l^{-1}c & d \end{pmatrix},$$

tel qu'on le souhaite. Cela montre que le bon choix est de quasi-épingler les revêtements universels  $\tilde{G}^a$  des sous-groupes  $G^a$  de rang pseudo-déployé 1 :

**Définition 2.4.** Un quasi-épinglage (resp. quasi-système de Chevalley) de  $G$  suivant  $S$  est la donnée d'isomorphismes  $\zeta_a$  d'une restriction des scalaires de  $\mathrm{SL}_2$ ,  $\mathrm{SU}_3$  ou  $\mathrm{BC}_1$  sur  $\tilde{G}^a$  pour chaque racine simple  $a \in \Delta$  (resp. toute racine non divisible  $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ ), dont les restrictions au tore diagonal  $\mathbb{G}_m$  s'identifient aux coracines  $a^\vee : \mathbb{G}_m \rightarrow S$  et qui envoient le groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes sur  $U_a$  (resp. et de sorte que  $\mathrm{int}(m_a) \circ \zeta_b$  est semblable à  $\zeta_{s_a(b)}$  pour chaque couple  $a, b \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ ).

Ici l'on note  $m_a$  l'image dans  $G$  de la matrice anti-diagonale  $\mathrm{adiag}(-1, 1)$  (resp.  $-\mathrm{adiag}(1, 1, 1)$ , resp. l'image réciproque de  $m_a \in \mathrm{SL}_2(L^{1/2})$ ) si  $\tilde{G}^a$  est identifiée par  $\zeta_a$  à  $\mathrm{R}_{L/K}\mathrm{SL}_2$  (resp.  $\mathrm{R}_{L_2/K}\mathrm{SU}_{3,L/L_2}$ , resp.  $\mathrm{R}_{L/K}\mathrm{BC}_1$ ). Deux homomorphismes ayant pour source des restrictions des scalaires (pas nécessairement égales!) des groupes ci-dessus sont dits semblables s'ils

se déduisent l'un de l'autre par conjugaison galoisienne et/ou par une involution de signe induite par un point rationnel de  $Z^{\text{aut}}[2]$  (ceci n'est pas à craindre en caractéristique 2, donc rendu superflu dans le cas de  $\text{BC}_1$ ).

**Proposition 2.5.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$  tel que  $[K : K^p] \leq p$  lorsque  $p > 0$ ,  $G$  un groupe pseudo-réductif et quasi-déployé,  $S$  un sous-tore déployé maximal de  $G$ . Alors les classes de similitude des quasi-systèmes de Chevalley de  $G$  suivant  $S$  forment un espace principal homogène sous  $Z^{\text{aut}}(K)/Z^{\text{aut}}[2](K)$  pour l'action de conjugaison.*

*Démonstration.* Observons qu'il suffit de vérifier que les classes modulo  $\Gamma$  des quasi-épinglages forment un  $Z^{\text{aut}}(K)$ -torseur et que tout quasi-épinglage se prolonge en un quasi-système de Chevalley, qui est unique à similitude près. Soient  $(\zeta_a)_{a \in \Delta}$  et  $(\zeta'_a)_{a \in \Delta}$  deux quasi-épinglages de  $G$ . Opérant par  $\Gamma$ , on peut supposer que  $\zeta'_a \circ \zeta_a^{-1}$  est un automorphisme bien défini de  $\tilde{G}^a$  qui fixe  $\tilde{Z}^a$ , donc induit par un élément de  $\tilde{Z}^{a,\text{aut}}$ . Enfin il ne reste qu'à observer que  $Z^{\text{aut}} = \prod_{a \in \Delta} \tilde{Z}^{a,\text{aut}}$  d'après les lem. 6.2.2., éq. 6.2.3. et lem. C.2.3 de [CP16].

Quant à la deuxième affirmation, on choisit, pour chaque racine  $a \in \Phi$ , une écriture  $a = s_{a_n} s_{a_{n-1}} \dots s_{a_1}(a_0)$ , où les  $a_i \in \Delta$  sont des racines simples positives, et l'on pose  $\zeta_a := \text{int}(m_{a_n} \dots m_{a_1}) \circ \zeta_{a_0}$ . Notons que tout quasi-système de Chevalley étendant le quasi-épinglage donné prend par définition même cette forme à similitude près. Il reste à constater la similitude de  $\text{int}(m_a) \circ \zeta_b$  et  $\zeta_{s_a(b)}$ . Pour cela, on se ramène aisément au cas où  $G = \tilde{G}$  est primitif et même simplement connexe, en appliquant les morphismes  $\pi$  de  $G$  dans  $\bar{G}$  dans le cas exotique ou dans  $R_{K^{1/2}/K} \text{Sp}_{2n}$  dans le cas absolument non réduit, puisqu'on n'a besoin que de comparer les restrictions  $x_a$  des  $\zeta_a$  aux sous-groupes radiciels  $U_a$ . Mais le cas simplement connexe résulte de l'existence de systèmes de Chevalley-Steinberg : en effet, si  $\tilde{G}^a \cong R_{L/K} \text{SL}_2$ , alors  $m_a = \prod_{\gamma \tilde{a}} m_{\gamma \tilde{a}}$  et  $\text{int}(m_a) \circ x_b(u) = \prod_{\gamma \tilde{b}} x_{s_a(\gamma \tilde{b})}(\pm \gamma(u))$ , où l'on note  $s_a = \prod_{\gamma \tilde{a}} s_{\gamma \tilde{a}}$  le produit des réflexions de tous les relèvements de  $a$ , ce qui est évidemment semblable à  $x_{s_a(b)}$  ; le cas de  $\text{SU}_{2n+1}$  est laissé au soin du lecteur (voir les 4.1.9. et 4.1.11. de [BT84]).  $\square$

### 3. VALUATIONS, APPARTEMENTS ET IMMEUBLES

Dans cette section, on se donne un corps discrètement valué, hensélien, excellent et résiduellement parfait  $K$ , un groupe quasi-réductif et quasi-déployé  $G$  sur  $K$  et un sous-tore déployé maximal  $S$  de  $G$ . À ces données on leur associe des valuations au sens de la déf. 6.2.1. de [BT72], moyennant lesquelles les 6. et 7. de [BT72] fournissent l'appartement  $\mathcal{A}(G, S, K)$  et l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K)$  de Bruhat-Tits. Nous montrons aussi que les immeubles construits ici coïncident avec ceux de M. Solleveld, cf. [Sol18].

3.1. Soit  $(K, \omega)$  un corps discrètement valué, hensélien, tel que l'anneau d'entiers  $\mathcal{O}$  soit excellent, le corps résiduel  $\kappa$  soit parfait et  $\omega(K^\times) = \mathbb{Z}$ . Alors  $K$  vérifie l'inégalité  $[K : K^p] \leq p$  lorsqu'il est de caractéristique  $p$ , vu que le homomorphisme de complétion  $K \rightarrow \hat{K}$  est une extension séparable de corps et que  $\hat{K} \cong \kappa((\varpi))$  avec  $\kappa$  parfait. Soient  $G$  un  $K$ -groupe quasi-réductif quasi-déployé et  $S$  un  $K$ -tore déployé maximal de  $G$ , de telle manière que son



centralisateur  $Z$  devienne un Cartan. Rappelons que  $(Z(K), U_a(K))_{a \in \Phi}$  porte la structure d'une donnée radicielle (abstraite) génératrice dans  $G(K)$  au sens du 6.1 de [BT72], d'après la rem. C.2.28 de [CGP15] (même dans le cas non quasi-déployé). Le reste du paragraphe sera consacré à améliorer cet énoncé, en munissant cette donnée de valuations au sens de la déf. 6.2.1. de [BT72].

Considérons un quasi-système de Chevalley de  $G^{\text{psréd}}$  dont l'existence est assuré par la prop. 2.5 et reprenons les notations de 2.4, où le but  $U_a^{\text{psréd}}$  de  $x_a$  sera identifié à  $U_a$  au moyen de  $q : G \rightarrow G^{\text{psréd}}$ . On lui associe des fonctions  $\varphi_a : U_a(K) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  inspirées du 4.2.2. de [BT84] et données par les formules suivantes :

**Définition 3.1.** Soit  $a \in \Phi_{\text{nd}}$  une racine non divisible. On définit la fonction  $\varphi_a : U_a(K) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  de la manière suivante :

- si  $\text{dom}(\zeta_a) = R_{K_a/K} \text{SL}_2$ , alors  $\varphi_a(x_a(r)) = \omega(r)$  ;
- si  $\text{dom}(\zeta_a) = R_{K_{2a}/K} \text{SU}_{3, K_a/K_{2a}}$ , alors  $\varphi_a(x_a(u, v)) = \frac{1}{2}\omega(v)$  ;
- si  $\text{dom}(\zeta_a) = R_{K_{2a}/K} \text{BC}_1$ , alors  $\varphi_a(x_a(x, y)) = \frac{1}{2}\omega(\alpha x^2 + y)$ .

Pour les racines divisibles, on définit  $\varphi_{2a}$  comme étant la restriction de  $2\varphi_a$  à  $U_{2a}(K)$ .

Signalons que cette construction joue un rôle essentiel dans tout l'article, en étant la base sur laquelle toutes les remarques et preuves suivantes s'appuient. En fait, cette famille de fonctions induit une valuation des points rationnels, comme l'on montre ci-dessous :

**Proposition 3.2.** La donnée  $\varphi = (\varphi_a)_{a \in \Phi}$  pour toute racine  $a \in \Phi$ , est une valuation de la donnée radicielle abstraite  $(Z(K), U_a(K))_{a \in \Phi}$  et elle est, en plus, compatible à  $\omega$  au sens où  $\varphi_a(zuz^{-1}) - \varphi_a(u) = \omega(a(z))$  pour tout  $z \in Z(K)$  et  $u \in U_a(K)$ .

*Démonstration.* Observons d'abord qu'on peut supposer sans perdre de généralité que  $G = G^{\text{psréd}}$  est pseudo-réductif. Alors, (V 0) et (V 4) sont évidemment remplies, tandis que (V 1) et (V 5) découlent des calculs classiques avec les groupes  $\text{SL}_2$  ou  $\text{SU}_3$ , puisque  $\text{BC}_1(K) = \text{SL}_2(K^{1/2})$ . Les mêmes arguments avec les groupes classiques montrent que, pour déduire (V 2), il suffit d'en vérifier lorsque  $m = m_a$  et de montrer la compatibilité de  $\varphi$  avec  $\omega$ , c'est-à-dire que la différence  $\varphi_a(zuz^{-1}) - \varphi_a(u)$  est égale à  $\omega(a(z))$  pour tout  $z \in Z(K)$  et  $u \in U_a(K)$ . Ici on regarde  $a$  comme un caractère rationnel de  $Z$ , c'est-à-dire, un élément du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $X_K^*(Z) \otimes \mathbb{Q} \cong X^*(S) \otimes \mathbb{Q}$  - pour voir l'injectivité du morphisme de restriction, on n'a qu'à remarquer que  $Z/S$  est une extension d'un groupe unipotent par un tore anisotrope ; la surjectivité résulte à son tour de la prop. VII.1.5. de [Ray70]. et l'on définit  $\omega \circ a$  par la formule  $\frac{1}{N}\omega \circ Na$  pour  $N$  assez grand. Notons que l'opération de  $Z$  sur  $U_a$  se factorise en  $Z \rightarrow Z^{a, \text{aut}}$  suivi de l'opération canonique de ce dernier sur  $U_a$ . Selon le th. 1.3.9 et la prop. 9.8.15 de [CGP15], le groupe  $Z^{a, \text{aut}}$  s'identifie à  $R_{K_a/K} T^{\text{ad}}$  lorsque  $\tilde{G}^a = R_{K_a/K} \text{SL}_2$  (resp.  $R_{K_{2a}/K} T^{\text{ad}}$  lorsque  $\tilde{G}^a = R_{K_{2a}/K} \text{SU}_{3, K_a/K_{2a}}$ , resp.  $R_{K_{2a}/K} Z$  lorsque  $\tilde{G}^a = R_{K_{2a}/K} \text{BC}_1$ ). En particulier, la compatibilité résulte des calculs de [BT84], 4.2.7., pour  $\text{SL}_2$  ou  $\text{SU}_3$ .

Finalement on vérifie (V 3), pour lequel on peut supposer  $G$  primitif et même de rang pseudo-déployé égal à 2. Si  $G$  est réductif, l'inclusion  $(U_{a,k}, U_{b,l}) \subseteq \prod_{pa+qb \in \Phi, (p,q) \in \mathbb{N}^2} U_{pa+qb, pk+ql}$

peut être déduite des formules de l'appendice de [BT84]. Si  $G$  est exotique, alors on voit par construction que la valuation est déduite d'une de  $R_{K^{1/p}/K}G'$  par restriction, donc on se ramène au cas précédent. Supposons enfin que  $G \cong \mathrm{BC}_1$  est absolument non réduit et commençons par observer que, si les racines  $a, b$  ne sont pas multipliables, l'axiome résulte du cas classique de  $\mathrm{Sp}_4$ . Si les rayons radiciels attachés à  $a$  et  $b$  sont les deux pluriels, alors on constate sans peine que les sous-groupes radiciels commutent. Il reste à étudier le cas où  $a$  est multipliable,  $b$  n'est ni multipliable ni divisible et les racines  $a + b$ ,  $2a + b$  et  $2a + 2b$  appartiennent à  $\Phi$ . Dans ce cas, l'on a  $(U_{a,k}, U_{b,l}) = (\bar{U}_{2a,2k}, \bar{U}_{b,l}) \subseteq \bar{U}_{2a+b,2k+l} \bar{U}_{2a+2b,2k+2l} = U_{a+b,k+l} U_{2a+b,2k+l}$ , où les  $\bar{U}$  désignent les sous-groupes radiciels de  $\mathrm{Sp}_4$ .  $\square$

On a construit une donnée radicielle valuée  $(Z(K), U_a(K), \varphi)_{a \in \Phi}$  dans les points rationnels  $G(K)$  du groupe quasi-réductif et quasi-déployé donné et maintenant on peut appliquer la théorie du 6.2 de [BT72] pour obtenir l'appartement (réduit) de  $G$  par rapport à  $S$ , comme on va expliquer dans la suite.

**Définition 3.3.** L'appartement  $\mathcal{A}(G, S, K)$  est l'ensemble de toutes les valuations  $\psi = (\psi_a)$  de la donnée radicielle abstraite considérée équipollentes à  $\varphi = (\varphi_a)$ , c'est-à-dire, telles que la fonction  $\psi_a - \varphi_a$  soit constante égale à  $a(v)$  pour un certain vecteur  $v$  appartenant à  $X_*(S^{\mathrm{dér}}) \otimes \mathbb{R}$  indépendant de  $a$ , où  $S^{\mathrm{dér}} := (S \cap G^{\mathrm{dér}})_{\mathrm{red}}^0$ . Cet ensemble vient muni d'une structure de complexe polysimplicial engendrée par les hyperplans  $\partial\alpha_{a,k} := \{a(x - \varphi) + k = 0\}$  pour  $k \in \Gamma'_a = \{\varphi_a(u) : u \in U_a(K) \setminus \{1\}, \varphi_a(u) = \sup \varphi_a(uU_{2a})\}$  et  $a \in \Phi$ .

En particulier, on voit que l'appartement ne dépend pas du choix de quasi-système de Chevalley de  $G$ , vu que leurs classes de similitude sont conjugués par  $Z^{\mathrm{aut}}(K)$  (voir le cor. ci-dessous ou bien le cor. 6.2.8 de [BT72], qui permet de déterminer le vecteur de translation par rapport à une base  $\Delta$  de  $\Phi$ ). Les racines affines de l'appartement sont précisément les demi-espaces  $\alpha_{a,k} := \{a(x - \varphi) + k \geq 0\}$ ,  $k \in \Gamma'_a$ , on note  $\Sigma$  l'ensemble de celles-ci et on définit l'échelonnage  $\mathcal{E} \subseteq \Sigma \times \Phi$  comme étant la partie des  $(\alpha, a)$  tels que  $\alpha = \alpha_{a,k}$  avec  $k \in \Gamma'_a$ . Le groupe de Weyl affine  $W_{\mathrm{af}}$  est le groupe de transformations affines de  $\mathcal{A}(G, S, K)$  engendré par les réflexions  $r_\alpha$  par rapport aux bords  $\partial\alpha$  des racines affines. Le groupe  $N(K)$  opère sur  $\mathcal{A}(G, S, K)$  par la règle suivante : si l'on pose  $\psi = n \cdot \varphi$ , alors  $\psi_a(u) = \varphi_{w^{-1}(a)}(n^{-1}un)$ . Cette opération est bien définie, préserve les racines affines et son image dans le groupe d'automorphismes de  $\mathcal{A}(G, S, K)$  contient  $W_{\mathrm{af}}$  (voir la prop. 6.2.10. de [BT72] pour toutes ces affirmations). On sait déjà qu'un élément  $z \in Z(K)$  opère sur  $\mathcal{A}(G, S, K)$  comme la translation de vecteur  $\nu(z)$  tel que  $a(\nu(z)) = -\omega(a(z))$ . En particulier, le plus grand sous-groupe borné  $Z(K)_b$  de  $Z(K)$ , dont l'existence sera constatée dans la prop. 4.3, opère de manière triviale sur  $\mathcal{A}(G, S, K)$ . On note aussi que l'opération de  $N(K)$  détermine  $\varphi_a(u)$ ,  $u \in U_a(K)$  comme étant l'unique nombre réel  $k$  tel que l'automorphisme de  $\mathcal{A}(G, S, K)$  induit par  $m(u)$  soit la réflexion de bord  $\partial\alpha_{a,k}$ , où l'on note  $m(u)$  le seul élément de  $N(K)$  tel que  $m(u) = u'uu''$  avec  $u', u'' \in U_{-a}(K)$ . Par suite, on tire le corollaire suivant, qui concerne les valuations compatibles à  $\omega$ .



**Corollaire 3.4.** *Si  $\psi$  est une valuation de  $(Z(K), U_a(K))_{a \in \Phi}$  compatible à  $\omega$ , alors  $\psi \in \mathcal{A}(G, S, K)$  est équipollente à l'une des valuations de Chevalley-Steinberg construites ci-dessus.*

*Démonstration.* Quitte à faire une translation, on peut trouver  $\varphi \in \mathcal{A}(G, S, K)$  telle que  $\varphi(u_a) = \psi(u_a)$  pour un certain  $u_a \in U_a(K)^*$ , où  $a$  parcourt une base  $\Delta$  de  $\Phi$ . En particulier, si l'on identifie les appartements correspondants à  $\varphi$  et  $\psi$ , en prenant ces points pour l'origine, il résulte par hypothèse que cette identification est aussi invariante par l'action de  $N(K)$  par des automorphismes affines, d'où l'égalité  $\varphi = \psi$  (voir aussi la rem. 6.2.12. b de [BT72]).  $\square$

Parfois il s'avère plus utile de considérer l'appartement élargi  $\mathcal{A}^1(G, S, K)$ , défini comme le produit  $\mathcal{A}(G, S, K) \times X_*(S^c) \otimes \mathbb{R}$ , où  $S^c$  est le plus grand tore central de  $S$  et  $X_*(S^c) \otimes \mathbb{R}$  est vu comme un complexe simplicial sans facettes propres et non vides. Afin de prolonger l'opération de  $N(K)$ , on note que  $X_*(S^c) \otimes \mathbb{R}$  s'identifie naturellement au dual de  $X_K^*(G) \otimes \mathbb{R} = X_K^*(N/N^{\text{dér}}) \otimes \mathbb{R}$  et on pose  $n \cdot (x, v) = (nx, v + \theta(n))$ , où  $\theta(n) \in X_*(S^c) \otimes \mathbb{R}$  est l'unique élément tel que  $\chi(\theta(n)) = -\omega(\chi(n))$  pour tout  $\chi \in X_K^*(G)$ . On remarque aussitôt que  $z \in Z(K)$  opère par la translation de vecteur  $\nu(z) + \theta(z)$  caractérisé par la formule  $\chi(\nu(z) + \theta(z)) = -\omega \circ \chi(z)$  pour tout caractère rationnel  $\chi \in X_K^*(Z) \otimes \mathbb{Q}$ , ce qu'on vérifie aussitôt en faisant usage de l'orthogonalité des décompositions  $X_*(S) \otimes \mathbb{R} = X_*(S^c) \oplus X_*(S^{\text{dér}})$  resp.  $X^*(S) \otimes \mathbb{R} = X^*(S^c) \otimes \mathbb{R} \oplus X^*(S^{\text{dér}}) \otimes \mathbb{R}$  (voir aussi [BT84], 4.2.16.). Le noyau de l'application  $N(K) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}^1(G, S, K))$  étant  $Z(K)_b$ , on appelle l'image le groupe de Weyl affine élargi, qui sera noté  $W_{\text{af}}^1 = N(K)/Z(K)_b$ . Lorsqu'on aura discuté le modèle de Néron  $\mathcal{Z}^0$  de  $Z$ , on parlera aussi du groupe d'Iwahori-Weyl  $\widetilde{W} = N(K)/\mathcal{Z}^0(\mathcal{O})$ . Il est intéressant de remarquer que, au moins lorsque  $G = G^{\text{psréd}}$  est pseudo-réductif, le groupe de Weyl affine  $W_{\text{af}}$  se relève en un sous-groupe canonique de  $\widetilde{W}$ . En effet, on a une identification  $\mathcal{A}(G, S, K) = \mathcal{A}(\widetilde{G}, \widetilde{S}, K)$  équivariante par les opérations de  $\widetilde{N}(K)$  et  $N(K)$ , donc il suffit de vérifier que  $\widetilde{W}$  s'identifie à  $W_{\text{af}}$ , lorsque  $G = \widetilde{G}$  est modérément universel (parce que alors  $\widetilde{W}$  admettrait un morphisme de son cousin modérément universel qui s'identifie à  $W_{\text{af}}$  à son tour). En ce cas, on voit facilement que la réunion de  $\mathcal{Z}^0(\mathcal{O})$  et des  $M_{a,k}$  du 6.2.2. de [BT72] engendre  $N(K)$  et que  $\mathcal{Z}^b = \mathcal{Z}^0$ , puisque  $Z$  est un produit de groupes de la forme  $R_{L/K}\mathbb{G}_m$ .

3.2. Le but de ce paragraphe est de prolonger l'appartement  $\mathcal{A}(G, S, K)$  associé à un groupe quasi-réductif et quasi-déployé  $G$  et à l'un de ses sous-tores déployés maximaux  $S$ , muni de son opération par  $N(K)$ , en l'immeuble de Bruhat-Tits  $\mathcal{I}(G, K)$  muni d'une opération par  $G(K)$ , dont la procédure est grosso modo formelle, lorsqu'on s'est décidé sur ce que doivent être les fixateurs des points  $x \in \mathcal{A}(G, S, K)$  (ceux-ci ne seront pas les sous-groupes parahoriques, en vertu de leur « non connexité »). Étant donné une partie non vide et bornée  $\Omega$  de  $\mathcal{A}(G, S, K)$ , on lui associe une fonction concave à valeurs réelles  $f_\Omega$  partant de  $\Phi$ , déterminée par la formule suivante :  $f_\Omega(a) := \inf\{k \in \mathbb{R} : a(\psi - \varphi) + k \geq 0, \forall \psi \in \Omega\}$ . La formule dépend nettement de  $\varphi$ , mais on omettra ceci lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. Enfin le stabilisateur  $P_\Omega$  associé à  $\Omega$  est le sous-groupe de  $G(K)$  engendré par le stabilisateur  $N_\Omega$  de  $\Omega$  dans  $N(K)$  et le sous-groupe  $U_\Omega$  engendré par  $U_{a, f_\Omega(a)}$  pour toutes

les racines  $a \in \Phi$ . Venons finalement à la définition selon le 7.4. de [BT72] de l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K)$  associé à la donnée radicielle valuée de  $G(K)$  :

**Définition 3.5.** L'ensemble sous-jacent à l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K)$  de  $G$  est le quotient du produit  $G(K) \times \mathcal{A}(G, S, K)$  par la relation d'équivalence qui identifie  $(g_1, \psi_1)$  et  $(g_2, \psi_2)$  s'il existe  $n \in N(K)$  tel que  $n\psi_1 = \psi_2$  et  $g_1^{-1}g_2n \in P_{\psi_1}$ . Cet ensemble quotient est muni d'une opération naturelle de  $G(K)$  déduite par passage au quotient de l'opération à gauche triviale de  $G(K)$  sur le produit ci-dessus et les orbites de l'appartement  $\mathcal{A}(G, S, K) \subseteq \mathcal{I}(G, K)$ ,  $\psi \mapsto (1, \psi)$  pour cette opération sont les appartements de  $\mathcal{I}(G, K)$  et lui fournissent une structure de complexe simplicial.

Commençons par discourir sur la apparente dépendance de  $\mathcal{I}(G, K)$  du choix d'un tore  $K$ -déployé maximal  $S$  de  $G$  et notons-le provisoirement  $\mathcal{I}(G, S, K)$  pour éviter des confusions ci-dessous. Notons que, si l'on se donne un isomorphisme  $\alpha : (G, S) \rightarrow (G', S')$  de couples constitués d'un  $K$ -groupe quasi-réductif et quasi-déployé et d'un  $K$ -sous-tore déployé maximal, alors on peut transporter la structures d'une donnée radicielle valuée d'un membre à l'autre par  $\alpha$ , donc en particulier on arrive à un isomorphisme  $\alpha$ -équivariant  $\mathcal{I}(G, S, K) \cong \mathcal{I}(G', S', K)$ . Compte tenu que les  $K$ -sous-tores déployés maximaux de  $G$  sont conjugués, on achève un isomorphisme  $\mathcal{I}(G, S, K) \cong \mathcal{I}(G, gSg^{-1}, K)$  qui est équivariant par les opérations canoniques de  $G(K)$  liées par la conjugaison  $\text{int}(g) : G(K) \rightarrow G(K)$ . En composant cet isomorphisme à la droite avec la bijection  $g^{-1} : \mathcal{I}(G, S, K) \rightarrow \mathcal{I}(G, S, K)$ ,  $h\psi \mapsto g^{-1}h\psi$  qui est équivariante par  $\text{int}(g^{-1})$ , on achève un isomorphisme  $G(K)$ -équivariant d'immeubles  $\mathcal{I}(G, S, K)$  et  $\mathcal{I}(G, gSg^{-1}, K)$ , qui permet d'identifier  $\mathcal{A}(G, gSg^{-1}, K)$  à  $g\mathcal{A}(G, S, K)$  dans  $\mathcal{I}(G, S, K)$ . Par suite, le  $G(K)$ -ensemble  $\mathcal{I}(G, K)$  ne dépend pas vraiment de  $S$  (raison pour laquelle on revient à la notation initiale) et ses appartements sont en correspondance bijective avec les sous-tores  $K$ -déployés maximaux de  $G$ . On voit aussi que  $P_\Omega$  est le stabilisateur de  $\Omega$  dans  $G(K)$  pour chaque partie  $\Omega$  contenue dans un appartement, donc ne dépendant que de  $\Omega$  en tant que partie de  $\mathcal{I}(G, K)$  (voir aussi la prop. 7.4.8. de [BT72]). Il y a aussi des autres sous-groupes associés à  $\Omega$ , dont l'on aura besoin : le fixateur connexe  $P_\Omega^0$  (resp. le fixateur intermédiaire  $P_\Omega^1$ , resp. le fixateur borné  $\hat{P}_\Omega$ , resp. le stabilisateur borné  $P_\Omega^\dagger$ ) obtenu en substituant  $N_\Omega^0 := \mathcal{Z}^0(\mathcal{O})(U_\Omega \cap N(K))$  (resp.  $N_\Omega^1 := Z(K)_b(U_\Omega \cap N(K))$ ), resp. le fixateur  $\hat{N}_\Omega$  de  $\Omega$  dans  $N(K)^1$ , resp. le stabilisateur  $N_\Omega^\dagger$  de  $\Omega$  dans  $N(K)^1$  à  $N_\Omega$  dans la définition de  $P_\Omega$ . De plus, on peut aussi élargir l'immeuble, en posant  $\mathcal{I}^1(G, K) = \mathcal{I}(G, K) \times X_*(S^c) \otimes \mathbb{R}$ , sur lequel  $g \in G(K)$  opère par  $g \cdot (x, v) = (gx, v + \theta(g))$ , et dont les appartements s'identifient à  $\mathcal{A}^1(G, S, K)$ , où  $S$  décrit l'ensemble des  $K$ -sous-tores déployés maximaux de  $G$ . L'un des avantages de ce point de vue est que cet immeuble élargi induit la même bornologie sur  $G(K)$  que la valuation  $\omega$ , d'après le cor. 8.1.5. de [BT72] et la prop. 4.3 (comparer avec la prop. 4.2.19. de [BT84]). Pour finir, on remarque que la construction est naturelle pour les extensions séparables  $K'/K$  de corps discrètement valués, henséliens, entièrement excellents et résiduellement parfaits, c'est-à-dire, on a une application  $\mathcal{I}(G, K) \rightarrow \mathcal{I}(G, K')$ , qui se factorise à travers les  $\Gamma$ -invariants si  $K'/K$  est galoisienne de groupe  $\Gamma$ .

Pour conclure, nous observons que nos immeubles de Bruhat-Tits coïncident avec ceux  $\mathcal{I}_{\text{Sol}}(G, K)$  construits à la manière de M. Solleveld [Sol18], qui sont définis comme un produit d'immeubles associés à des groupes réductifs convenables, conformément à la classification par J. Tits des immeubles affines épais de rang  $\geq 4$ , cf. [Ti86].

**Proposition 3.6.** *Il existe un et un seul isomorphisme  $G(K)$ -équivariant  $\mathcal{I}(G, K) \cong \mathcal{I}_{\text{Sol}}(G, K)$  d'immeubles.*

*Démonstration.* Rappelons la définition de l'immeuble  $\mathcal{I}_{\text{Sol}}(G, K)$ . On prendre la donnée de présentation  $(K'/K, G', Z', Z)$  de  $G$  et l'on pose  $\mathcal{I}(G, K) := \prod_{i \in I} \mathcal{I}(\bar{G}'_i, \bar{K}'_i)$ , où  $\bar{G}'_i$  est le groupe déployé sur  $\bar{K}'_i$  ayant les mêmes points rationnels que  $G'_i$ , cf. les prop. 7.3.3 (2) et 9.9.4 (1) de [CGP15]. Le groupe  $G(K)$  des points rationnels y opère en conjuguant l'action naturelle de  $\bar{G}(K) = \prod \bar{G}'_i(\bar{K}'_i)$  et de  $Z(K) \rightarrow Z^{\text{aut}}(K) \subseteq \bar{Z}^{\text{ad}}(\bar{G}'_i)$ .

Retournant à notre cadre, on avait déjà vu qu'il y a des isomorphismes canoniques  $\mathcal{A}(\tilde{G}, \tilde{S}, K) \cong \mathcal{A}(G, S, K)$ , respectant les opérations des groupes correspondants et l'on vérifie sans peine qu'ils se rassemblent en un isomorphisme équivariant  $\mathcal{I}(\tilde{G}, K) \cong \mathcal{I}(G, K)$ . Il ne reste qu'à constater que, si  $G$  est exotique basique et pseudo-déployé ou absolument non réduit, alors  $\mathcal{I}(G, K) \cong \mathcal{I}(\tilde{G}, K)$ , ce qu'on pourrait déduire aisément de l'égalité de certaines  $BN$ -paires convenables dans  $G(K) = \bar{G}(K)$ , mais on va montrer cette affirmation pour convaincre le lecteur. Construisons d'abord la bijection entre  $\mathcal{A}(G, S, K)$  et  $\mathcal{A}(\tilde{G}, \tilde{S}, K)$  lorsque  $G$  est exotique basique et pseudo-déployé : si  $\psi$  est une valuation de la donnée radicielle abstraite  $(Z(K), U_a(K))_{a \in \Phi}$  équipollente à  $\varphi$ , alors on considère la valuation  $\bar{\psi}$  de  $(\tilde{S}(K), \bar{U}_{\bar{a}}(K))_{\bar{a} \in \bar{\Phi}}$  donnée par  $\bar{\psi}_{\bar{a}}(\bar{x}_a(r)) = [K_a : K]\psi_a(x_a(r^{\frac{1}{[K_a : K]}}))$ . Il est immédiat que  $\bar{\varphi}$  est la valuation canonique associée au système de Chevalley  $\bar{x}_{\bar{a}}$  pour  $\bar{a} \in \bar{\Phi}$  et aussi que, si l'on suppose que  $\psi = \varphi + v$  avec  $v \in X_*(S) \otimes \mathbb{R}$ , alors  $\bar{\psi}_{\bar{a}} - \bar{\varphi}$  est constante égale à  $[K_a : K]a(v)$ , ce qui coïncide avec  $\bar{a}(v)$  moyennant l'identification  $X^*(S) \otimes \mathbb{R} \cong X^*(\tilde{S}) \otimes \mathbb{R}$  (voir la prop. 7.1.5 de [CGP15]), d'où la bijection désirée entre les appartements qui commute avec les opérations de  $N(K) = \bar{N}(K)$ . De plus, on a aussi  $P_{\psi} = P_{\bar{\psi}}$  en tant que sous-groupes de  $G(K) = \bar{G}(K)$  et par conséquent un isomorphisme équivariant  $\mathcal{I}(G, K) \cong \mathcal{I}(\tilde{G}, K)$ . Il en est de même des groupes absolument non réduits : l'isomorphisme  $\mathcal{A}(\text{BC}_n, S, K) \cong \mathcal{A}(\text{Sp}_{2n}, D_n, K^{1/2})$  se définit ensemblistement en posant  $\bar{\varphi}_a := \varphi_a$  si  $a$  n'est pas divisible dans  $\Phi$  ou  $2\varphi_{\frac{a}{2}}$  sinon ; on voit de même que les racines affines, les lois d'opération de  $N(K) = \bar{N}(K^{1/2})$  et les sous-groupes parahoriques de  $\text{BC}_n(K) = \text{Sp}_{2n}(K^{1/2})$  se correspondent, d'où l'identification  $\mathcal{I}(\text{BC}_n, K) \cong \mathcal{I}(\text{Sp}_{2n}, K^{1/2})$ .

L'unicité de l'isomorphisme équivariant obtenu résulte du 4.2.12. de [BT84].  $\square$

3.3. Dans ce paragraphe, on va signaler quelques faits combinatoires très requis lorsqu'on s'occupe de la théorie de Bruhat-Tits, comme les décompositions de Bruhat. Comme d'habitude,  $K$  désignera un corps discrètement valué, hensélien, à anneau d'entiers excellent et à corps résiduel parfait.

**Proposition 3.7.** *Soient  $G$  un  $K$ -groupe quasi-réductif et quasi-déployé et  $\mathbf{f}, \mathbf{f}'$  deux facettes contenues dans un même appartement  $\mathcal{A}(G, S, K)$  de l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K)$ . Alors, on a un isomorphisme d'ensembles de doubles classes  $P_{\mathbf{f}}^? \backslash G(K) / P_{\mathbf{f}'}^? \cong N_{\mathbf{f}}^? \backslash N(K) / N_{\mathbf{f}'}^?$ , où  $? = 0, 1, \hat{\cdot}, \dagger$ .*

*Démonstration.* On peut procéder comme dans [BT72], 7.3.4. ou [HR08], prop. 8.  $\square$

Rappelons maintenant qu'on a une extension canonique de  $W_{\text{af}}$  par  $Z(K)_b$  en tant que sous-groupe  $N_{\text{af}}^1$  de  $N(K)$ . D'ailleurs, si  $G$  est pseudo-réductif, on trouve même un sous-groupe  $N_{\text{af}}^0$  de  $N(K)$  extension de  $W_{\text{af}}$  par  $\mathcal{Z}^0(\mathcal{O})$ .

**Proposition 3.8.** *Gardons les notations antérieures et fixons une alcôve  $\mathbf{a}$  de  $\mathcal{A}(G, S, K)$ . Alors,  $P_{\mathbf{a}}^1$  (resp.  $P_{\mathbf{a}}^0$  si  $G$  est pseudo-réductif) et  $N_{\text{af}}^1$  (resp.  $N_{\text{af}}^0$  si  $G$  est pseudo-réductif) définissent une BN-paire de type  $W_{\text{af}}$  dans le sous-groupe de  $G(K)$  qu'ils engendrent.*

*Démonstration.* On va établir l'axiome (T 3) des systèmes de Tits de [BT72], 1.2.6. et on laisse au lecteur le soin d'en compléter. Comme on verra plus tard sans aucune circularité écheante, cf. th. 4.7, le sous-groupe parahorique  $P_{\mathbf{f}_i}^0$  s'écrit comme  $P_{\mathbf{a}}^0 N_{\mathbf{f}_i}^0 U_{\alpha_i}$ , où l'on note  $\mathbf{f}_i$  une cloison de l'alcôve  $\mathbf{a}$ ,  $s_i$  la réflexion correspondante et  $\alpha_i$  la seule racine affine contenant  $\mathbf{a}$  telle que  $\partial \alpha_i = \mathbf{f}_i$ . Évidemment il en est de même de  $P_{\mathbf{f}_i}^1$  et l'on a  $P_{\mathbf{f}_i}^1 \subseteq P_{\mathbf{a}}^1 w P_{\mathbf{a}}^1 \cup P_{\mathbf{a}}^1 s_i w P_{\mathbf{a}}^1$ , ce qu'on vérifie facilement. En effet, on peut substituer  $s_i w$  à  $w$  si nécessaire sans rien changer, pour que  $w^{-1} \alpha_i \supseteq \mathbf{a}$ , ce qui rend les calculs triviaux.  $\square$

On note  $G(K)^0$  le groupe engendré par les fixateurs connexes  $P_{\mathbf{f}}^0$  de  $G(K)$ . Dans le cas pseudo-réductif on obtient la proposition suivante, cf. [HR08] :

**Proposition 3.9.** *Étant donné un groupe pseudo-réductif quasi-déployé  $G$  sur  $K$  et une facette  $\mathbf{f}$  de  $\mathcal{I}(G, K)$ , on a  $P_{\mathbf{f}} \cap G(K)^0 = P_{\mathbf{f}}^0$ .*

*Démonstration.* Notons d'abord que si  $G = \tilde{G}$  est modérément universel, alors la première affirmation est bien connue et résulte du th. 6.5.1 de [BT72], puisque  $G(K)^0 = G(K)$  et  $P_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}}^0$  dans le cas « simplement connexe ». En général, on considère l'écriture de  $G = (\tilde{G} \rtimes Z) / \tilde{Z}$  et l'on observe que  $G(K)^0$  est engendré par  $\mathcal{Z}(\mathcal{O})$  et l'image de  $\tilde{G}(K)$ . Or, si  $g \in P_{\mathbf{f}} \cap G(K)^0$ , on peut écrire  $g = [\tilde{g}]z$ , avec  $\tilde{g} \in \tilde{G}(K)$  et  $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{O})$ . Par hypothèse,  $[\tilde{g}] = gz^{-1}$  stabilise  $\mathbf{f}$ , d'où l'appartenance de  $\tilde{g}$  à  $P_{\mathbf{f}}^0$  d'après le cas précédent.  $\square$

Prenons enfin l'opportunité pour énoncer une conséquence schématique de ce qui précède, en termes des schémas en groupes immobiliers construits dans la suite (sans en recourir).

**Corollaire 3.10.** *Supposons  $\kappa$  algébriquement clos et soit  $\mathcal{G}$  est un modèle lisse de  $G$  tel que sa composante neutre  $\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}_{\Omega}^0$  soit immobilière, alors  $\mathcal{G}$  s'identifie à un sous- $\mathcal{O}$ -groupe ouvert de  $\mathcal{G}_{\Omega}^{\dagger}$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $\Omega$  clos et fermé et il suffit de montrer que  $\mathcal{G}(\mathcal{O})$  le stabilise. Notons que, d'après la conjugaison des tores déployés maximaux et le lemme de Hensel, l'on a  $\mathcal{G}(\mathcal{O}) = \mathcal{N}(\mathcal{O})P_{\Omega}^0$ , où  $\mathcal{N}$  désigne le normalisateur de  $S$  dans  $\mathcal{G}$ . Vu que la partie des points fixés dans  $\mathcal{A}(G, S, K)$  par  $P_{\Omega}^0$  coïncide avec  $\Omega$  par hypothèse, l'affirmation en découle.  $\square$

## 4. MODÈLES EN GROUPES IMMOBILIERS

Cette section est consacrée à la construction des modèles en groupes attachés aux parties non vides et bornées  $\Omega$  de n'importe quel appartement de l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K)$  du groupe quasi-réductif  $G$  sur le corps fixé  $K$ . À la fin, on en déduit la descente étale de la théorie de Bruhat-Tits, qui permet de passer du cas quasi-déployé au cas général.

4.1. Dans ce paragraphe on va éclaircir le concept des données radicielles schématiques dû à F. Bruhat et J. Tits, cf. la déf. 3.1.1. de [BT84], dont on fera usage pour construire les modèles en groupes immobiliers de  $G$ . Ce paragraphe ressemble le 2.4 de [II], à la différence près que, dans le présent article, la base est un anneau de valuation discrète.

**Définition 4.1** (F. Bruhat et J. Tits). Soient  $\mathcal{O}$  un anneau de valuation discrète,  $K$  son corps de fractions,  $G$  un  $K$ -groupe quasi-réductif et  $S$  un sous-tore déployé maximal. Une donnée radicielle dans  $G$  par rapport à  $S$  au-dessus de  $\mathcal{O}$  est la donnée de  $\mathcal{O}$ -modèles en groupes lisses, affines et connexes  $\mathcal{Z}$  de  $Z$  (resp.  $\mathcal{U}_a$  de  $U_a$ , où  $a \in \Phi_{\text{nd}}$  est non divisible) tels que :

- (DRS 0) l'injection de  $S$  dans  $Z$  se prolonge en un morphisme  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$ , où  $\mathcal{S}$  désigne le seul groupe diagonalisable à isomorphisme unique près modelant  $S$ .
- (DRS 1) l'application conjugaison  $Z \times U_a \rightarrow U_a$  se prolonge en une application  $\mathcal{Z} \times \mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{U}_a$ .
- (DRS 2) si  $b \neq -a$ , l'application commutateur  $U_a \times U_b \rightarrow \prod_{c=pa+qb \in \Phi_{\text{nd}}, (p,q) \in \mathbb{Q}_{>0}^2} U_c$  se prolonge en un morphisme  $\mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_b \rightarrow \prod_{c=pa+qb \in \Phi_{\text{nd}}, (p,q) \in \mathbb{Q}_{>0}^2} \mathcal{U}_c$ .
- (DRS 3) si on note  $W_a$  l'ouvert  $U_a \times U_{-a} \cap U_{-a} \times Z \times U_a$  dans  $U_a \times U_{-a}$ , alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{W}_a$  de  $\mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{-a}$  contenant la section unité et modelant  $W_a$  tel que l'inclusion  $W_a \rightarrow U_{-a} \times Z \times U_a$  se prolonge en une application  $\mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{U}_{-a} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}_a$ .

Le lecteur aura déjà compris que le but de cette définition est de construire, par « recollement fermé » de  $\mathcal{Z}$  et des  $\mathcal{U}_a$ ,  $a \in \Phi_{\text{nd}}$ , un certain schéma en groupes  $\mathcal{G}$  au-dessus de  $\mathcal{O}$  avec de bonnes propriétés. Le §3 de [BT84] traite de prouver un tel résultat à l'aide de représentations linéaires entières et fidèles, en exploitant la théorie des représentations de plus grand poids des groupes réductifs connexes (voir [Ti71]), ce qui n'est pas bien entendu pour les groupes quasi-réductifs. Cependant comme les auteurs leur-mêmes avaient remarqué au 3.1.7. de [BT84], la méthode de preuve indiquée pour le problème en question consisterait à appliquer la théorie des lois birationnelles du [SGA3], exp. XVIII, lorsqu'on aura un énoncé du th. 3.7 de [BT84] dans le monde des schémas et pas seulement des espaces algébriques. Entre-temps ceci a été rendu possible par S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, voir le th. 6.6.1. de [BLR90], ce qu'on fera dans la suite, en simplifiant quelques idées de [La96], §5 et 6.

**Théorème 4.2** (F. Bruhat et J. Tits, à peu près). *Reprenons les notations de la définition précédente. Alors il existe un et un seul  $\mathcal{O}$ -groupe affine, lisse et connexe  $\mathcal{G}$  modelant  $G$  tel que :*



- (1) les inclusions  $Z \rightarrow G$  et  $U_a \rightarrow G$  pour tout  $a \in \Phi_{\text{nd}}$  se prolongent en des isomorphismes de  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{U}_a$  sur des sous- $\mathcal{O}$ -groupes fermés de  $\mathcal{G}$ .
- (2) pour tout système de racines positives  $\Phi^+$  et tout ordre mis sur  $\Phi^+$ , le morphisme  $\prod_{a \in \Phi_{\text{nd}}^+} \mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{G}$  soit un isomorphisme sur un sous- $\mathcal{O}$ -groupe fermé  $\mathcal{U}^+$  de  $\mathcal{G}$ .
- (3) l'application produit  $\mathcal{U}^- \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  définisse un ouvert du membre de droite.

*Démonstration.* Lorsqu'on se donne un ordre grignotant sur  $\Phi_{\text{nd}}^+$ , le 3.3. de [BT84] fournit une loi de groupe dans le produit  $\mathcal{U}^+ = \prod_{a \in \Phi_{\text{nd}}^+} \mathcal{U}_a$ , en argumentant par récurrence sur la longueur des parties positivement closes  $\Psi$  de  $\Phi_{\text{nd}}^+$  et en appliquant la règle (DRS 2). Notons également que  $\mathcal{Z}$  opère sur  $\mathcal{U}$  canoniquement d'après la règle (DRS 1), dont la restriction au sous-groupe fermé  $\mathcal{S}$  (voir le cor. 2.5. et le th. 6.8. de [SGA3], exp. IX) opère sur  $\mathcal{U}_a$  par le poids  $a$ . Comme les groupes trouvés sont toujours lisses et connexes, le fait que  $\mathcal{U}^+$  s'écrit comme produit de ses sous-groupes fermés  $\mathcal{U}_a$  rangés dans un ordre quelconque résulte du théorème principal de Zariski et la même indépendance de l'ordre au-dessus des corps.

Pour construire  $\mathcal{G}$  satisfaisant à la troisième propriété, il suffit de construire une loi birationnelle sur  $\mathcal{C}_{\Phi^+} := \mathcal{U}^- \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}^+$  pour un choix quelconque  $\Phi^+$  de racines positives, grâce au th. 6.6.1 de [BLR90]. En effet, on n'a pas besoin de remplacer la grosse cellule par un ouvert schématiquement dense relativement à  $\mathcal{O}$  d'après 5.1 de [BLR90]. Il suffit de définir une application birationnelle  $\mathcal{C}_{\Phi^+} \dashrightarrow \mathcal{C}_{\Phi^-}$  prolongeant l'identité de  $G$  dans la fibre générique, car cela permettra d'obtenir des applications rationnelles de produit et d'inversion dans  $\mathcal{C}_{\Phi^+}$ , en commutant tous les facteurs et en multipliant ou inversant lorsque convenable. Montrons plus généralement la même assertion pour chaque paire de systèmes de racines positives  $\Phi^+$  et  $\Phi_1^+$  par récurrence sur le cardinal de  $\Phi_{\text{nd}}^+ \cap \Phi_{1,\text{nd}}^-$ . Si cette intersection ne contient que la racine non divisible  $a$ , alors l'axiome (DRS 3) en fournit un morphisme birationnel

$$\mathcal{C}_{\Phi^+} = \mathcal{U}_{\Phi_{\text{nd}}^- \setminus \{-a\}} \times \mathcal{U}_{-a} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{\Phi_{\text{nd}}^+ \setminus \{a\}} \dashrightarrow \mathcal{U}_{\Phi_{\text{nd}}^- \setminus \{-a\}} \times \mathcal{U}_a \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}_{-a} \times \mathcal{U}_{\Phi_{\text{nd}}^+ \setminus \{a\}} = \mathcal{C}_{\Phi_1^+}.$$

Ceci montre aussi que le groupe obtenu est indépendant du système de racines positives  $\Phi^+$  choisi.

Maintenant on dispose du  $\mathcal{O}$ -groupe lisse, séparé et connexe  $\mathcal{G}$  (donc affine grâce à la prop. 12.9 de [SGA3]) qui modèle  $G$  et qui contient les différents  $\mathcal{C}_{\Phi^+}$  en tant qu'ouverts, et il faut encore voir que les sous-groupes localement fermés  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{U}^+$  sont effectivement fermés. Or l'image réciproque de  $\mathcal{Z}\mathcal{U}^+ := \mathcal{Z} \times \mathcal{U}^+$  par le revêtement fidèlement plat  $\mathcal{C}^- \times \mathcal{C}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  est déterminée par la condition fermée  $b_1 b_2 = 1$ , où  $(a_1, b_1, b_2, a_2) \in \mathcal{Z}\mathcal{U}^+ \times (\mathcal{U}^-)^2 \times \mathcal{Z}\mathcal{U}^+$ , ce qui achève notre affirmation par descente fidèlement plate.  $\square$

4.2. Enfin nous allons construire les  $\mathcal{O}$ -modèles en groupes  $\mathcal{G}_\Omega$  d'un  $K$ -groupe quasi-réductif quasi-déployé  $G$  associés aux parties bornées d'un certain appartement de  $\mathcal{I}(G, K)$ . On construit d'abord le  $\mathcal{O}$ -modèle  $\mathcal{Z}$  de  $Z$  à l'aide de la théorie des modèles de Néron (localement de type fini) de [BLR90], chap. 10.

**Proposition 4.3** (S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, à peu près). *Soient  $K$  un corps discrètement valué,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers supposé hensélien et excellent, et  $\kappa$  son*

*corps résiduel supposé parfait. Étant donné un  $K$ -groupe quasi-réductif et nilpotent  $Z$ , alors il possède un modèle de Néron  $\mathcal{Z}$  sur  $\mathcal{O}$ , dont le sous-groupe ouvert maximal de type fini  $\mathcal{Z}^1$  représente  $Z(K)_b = \mathcal{Z}^1(\mathcal{O})$ .*

*Démonstration.* La première assertion sur l'existence d'un modèle de Néron est due à S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, voir le th. 10.2.1 de [BLR90], dont la démonstration consiste des étapes suivantes : on peut éliminer le tore maximal  $T$  de  $Z$  en prenant une extension finie qui le déploie et en appliquant les 10.1.4 et 10.1.7 de [BLR90] ; lorsque  $Z$  est unipotent ployé, on se ramène à montrer que  $Z(K^{\text{nr}})$  est borné, ce qu'il faut montrer par dévissage lorsque  $Z = Z[p]$  est  $p$ -torsion ; on utilise l'écriture explicite de ces groupes due à J. Tits pour en construire une compactification sans aucun point rationnel à l'infini, cf. prop. 11 de [BLR90] ou th. VI.1. de [Oes84].

Afin de prouver la dernière affirmation, on peut supposer  $K = K^{\text{nr}}$  strictement hensélien. Notons que le groupe  $\pi_0(\mathcal{Z}_s)(\kappa)$  est une extension du groupe fini  $\pi_0(\mathcal{Z}_s/\mathcal{S}_s)$  par le groupe abélien de rang  $\dim S$   $\pi_0(\mathcal{S}_s)$ . En même temps, l'application  $p : Z(K) \rightarrow X_*(S) \otimes \mathbb{Q}$  donnée par  $\chi(p(z)) = \omega(\chi(z))$  se factorise en une application  $\bar{p} : \pi_0(\mathcal{Z}_s) \rightarrow X_*(S) \otimes \mathbb{Q}$ , telle que l'image de  $\pi_0(\mathcal{S}_s)$  en détermine un réseau. Par conséquent, on voit que le noyau de  $\bar{p}$  est un groupe fini distingué et égal à  $Z(K)_b/\mathcal{Z}^0(\mathcal{O})$  et que tout sous-groupe fini de  $\pi_0(\mathcal{Z}_s)$  en est contenu, ce qui implique l'existence d'un sous-groupe ouvert  $\mathcal{Z}^1$  de  $\mathcal{Z}$  possédant les propriétés désirées.  $\square$

Maintenant on se penche sur les modèles entiers  $\mathcal{U}_{a,\Omega}$  des  $U_a$ ,  $a \in \Phi$ .

**Lemme 4.4.** *Soient  $k, l \in \mathbb{R}$  réels quelconques. Alors, il existe un et un seul  $\mathcal{O}$ -modèle affine, lisse et connexe  $\mathcal{U}_{a,(k,l)}$  de  $U_a$  tel que  $\mathcal{U}_{a,(k,l)}(\mathcal{O}') = U'_{a,k} U'_{2a,l}$  pour toute extension conservatrice  $K'$  de  $K$ .*

*Démonstration.* L'unicité résulte toujours du fait que ces modèles deviennent immédiatement étouffés, cf. déf. 1.7.1. de [BT84], dès que le corps résiduel  $\kappa'$  est infini. Les modèles lisses, affines et connexes  $\mathcal{U}_{2a,l}$  des sous-groupes radiciels  $U_{2a}$  attachés aux racines divisibles seront obtenus comme adhérences schématiques de  $U_{2a}$  dans  $\mathcal{U}_{a,(k,l)}$ , donc on suppose que  $a \in \Phi_{\text{nd}}$  n'est pas divisible. On peut supposer aussitôt que  $G = \tilde{G}^{\text{psréd},a}$  est pseudo-réductif, modérément universel et de rang pseudo-déployé 1. Lorsque  $\text{dom}(\zeta_a) = \text{R}_{K_a/K} \text{SL}_2$ , il résulte que  $U_{a,k}$  s'identifie à  $\varpi_a^n \mathcal{O}_a$  dedans  $K_a \cong U_a(K)$ , où  $\mathcal{O}_a$  désigne l'anneau d'entiers de  $K_a$ ,  $\varpi_a$  une uniformisante et  $n$  est le plus petit entier majorant  $[K_a : K]k$ . On voit aisément que  $U_{a,k}$  est représenté par la restriction des scalaires  $\mathcal{U}_{a,k}$  du spectre affine de  $\mathcal{O}_a[\varpi_a^{-n}t]$  le long de l'extension finie et plate  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_a$  (en vertu du fait que  $\mathcal{O}$  soit japonais), identifié par transport de structure le long de  $x_a$  à un modèle en groupes affine, lisse et connexe de  $U_a$ , et que ceci commute aux changements de base conservateurs. Ici on utilise l'hypothèse de excellence faite sur  $\mathcal{O}$ , pour savoir que  $\mathcal{O}_a$  est toujours fini sur  $\mathcal{O}$ .

Si  $a$  est multipliable, on peut supposer sans perdre de généralité que  $k \in \Gamma'_a$  et  $l \leq \inf(\Gamma_{2a} \cap [2k, +\infty[)$ . Supposons que  $\text{dom}(\zeta_a) = \text{R}_{K_{2a}/K} \text{SU}_{3,K_a/K_{2a}}$  et fixons  $\lambda$  de valeur  $\omega(\lambda)$  maximal parmi les éléments de trace 1. Alors,  $x_a$  identifie  $U_a$  au groupe  $\text{R}_{K_{2a}/K} H^\lambda$  de 2.4

dont les points rationnels sont les couples  $(x, y) \in K_a \times K_a^0$ , de telle sorte que la valuation soit donnée par  $\varphi_a(x, y) = \frac{1}{2}\omega(y + \lambda x\sigma(x))$ . Posant  $\gamma = -\frac{1}{2}\omega(\lambda)$ , on tire  $\Gamma'_a = -\gamma + \omega(K_a^\times)$ ,  $\Gamma_{2a} = \omega(K_a^0 \setminus 0)$  et  $U_{a,k}U_{2a,l}$  coïncide avec la partie des couples  $(x, y)$  tels que  $\omega(x) \geq k + \gamma$  et  $\omega(y) \geq l$ , cf. 4.3.5. et 4.3.7. de [BT84]. Grâce au paragraphe précédent, on obtient un modèle entier en groupes lisse, affine et connexe  $\mathcal{U}_{a,(k,l)}$  de  $U_a$  représentant  $U_{a,k}U_{2a,l}$ , qui commute aux changements de base conservateurs.

Considérons finalement le cas où  $\text{dom}(\zeta_a) = R_{K_{2a}/K}BC_1$ . On a une identification  $U_a = R_{K_a/K}\mathbb{G}_a \times R_{K_{2a}/K}\mathbb{G}_a$ , avec  $K_a = K_{2a}^{1/2}$ , de telle manière que  $\varphi_a(x, y) = \frac{1}{2}\omega(\alpha x^2 + y)$ ; en particulier, on a  $\Gamma_{2a} = \omega(K_{2a}^\times)$  et  $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\omega(K_a^\times) \setminus \omega(K_a^\times)$ . Choisissons  $\alpha$  tel que  $\omega(\alpha) \notin \omega(K_{2a}^\times)$  pour que  $\omega(\alpha x^2 + y) = \inf\{\omega(\alpha) + 2\omega(x), \omega(y)\}$  et il suffit maintenant d'observer que  $U_{a,k}U_{2a,l}$  est formé par la partie des couples  $(x, y)$  tels que  $\omega(x) \geq k + \gamma$  et  $\omega(y) \geq l$ , où  $\gamma = -\frac{1}{2}\omega(\alpha)$ , laquelle est représentable par un  $\mathcal{O}$ -modèle en groupes lisse, affine et connexe  $\mathcal{U}_{a,(k,l)}$  de  $U_a$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{U}_{a,\Omega} := \mathcal{U}_{a,(f_\Omega(a), f_\Omega(2a))}$  le  $\mathcal{O}$ -modèle lisse, affine et connexe de  $U_a$  dont le groupe des points entiers  $\mathcal{U}_{a,\Omega}(\mathcal{O}')$  coïncide avec le sous-groupe  $U'_{a,f(a)}U'_{2a,f(2a)}$  pour toute extension conservatrice  $K'$  de  $K$ . Toutefois, par une question de convenance, nous travaillerons avec les fonctions  $f : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$  quasi-concaves au sens de la déf. 4.5.3. de [BT84] (voir aussi la déf. 6.4.7. de [BT72], ainsi que l'addendum E2 de [BT84]), plutôt que avec les parties bornées et non vides  $\Omega$  des appartements, fonctions lesquelles ont été dessinées pour assurer qu'on puisse constituer des données radicielles schématiques à leur aide. Quelques énoncés se simplifient lorsqu'on considère l'optimisée  $f'$  de  $f$  donnée par  $f'(a) := \inf\{k \in \Gamma'_a : k \geq f(a) \text{ ou, lorsque } \frac{a}{2} \in \Phi, k \geq 2f(\frac{a}{2})\}$  - cela ne change grand-chose, car on a  $\mathcal{U}_{a,f} = \mathcal{U}_{a,f'}$ , compte tenu de la rem. 6.4.12.(a) de [BT72]. Remarquons que l'on possède de même des sous-groupes  $P_f^0, P_f^1$  (et même  $P_f^\dagger$ , cf. 4.6.16 et 4.6.17. de [BT84]) associés à  $f$  en reprenant les définitions du 3.2 avec  $f$  au lieu de  $f_\Omega$ .

**Théorème 4.5.** *Gardant les notations ci-dessus, les  $\mathcal{O}$ -groupes  $\mathcal{Z}^0$  et  $\mathcal{U}_{a,f}$ , pour toute racine non divisible  $a \in \Phi_{\text{nd}}$ , définissent une donnée radicielle schématique dans le groupe quasi-réductif et quasi-déployé  $G$ . Le schéma en groupes  $\mathcal{G}_f^0$  fourni par le th. 4.2 est l'unique  $\mathcal{O}$ -groupe affine, lisse et connexe, satisfaisant à  $\mathcal{G}_f^0(\mathcal{O}') = P_{f,K'}^0$  pour toute extension conservatrice  $K'$  de  $K$ .*

*Démonstration.* Afin de vérifier les règles, remarquons qu'on peut, grâce à un changement de base conservateur, supposer le corps résiduel parfait  $\kappa$  infini : si  $f$  est l'optimisée d'une fonction concave, cela est évident ; sinon, on a besoin de faire des calculs comme dans la prop. 4.5.5., le cor. 4.5.7. et la prop. 4.5.10. de [BT84]. En particulier, les  $\mathcal{O}$ -groupes  $\mathcal{S}, \mathcal{Z}^0$  et  $\mathcal{U}_{a,f}$  sont supposés étoffés, cf. déf. 1.7.1. de [BT84]. Ceci étant, l'axiome (DRS 0) résulte de la fonctorialité des modèles de Néron connexes, (DRS 1) de la compatibilité des données radicielles valuées et (DRS 2) de la propriété (QC 2) des fonctions quasi-concaves. Quant à (DRS 3), il faut premièrement définir la fonction  $d_a \in K[U_{-a} \times U_a]$  dont l'ouvert spécial détermine l'intersection de  $U_{-a} \times U_a$  avec la grosse cellule  $C = U^+ \times Z \times U^-$  : on se ramène



rapidement au cas des groupes de rang pseudo-déployé 1, à savoir les restrictions des scalaires de  $\mathrm{SL}_2$ ,  $\mathrm{SU}_3$  et  $\mathrm{BC}_1$ ; les deux premiers cas se traitent comme dans 4.1.6. et 4.1.12. de [BT84] et le dernier y se ramène en tirant en arrière la fonction  $d_a$  pour  $\mathrm{SL}_2$ . Ensuite on procède verbatim comme dans 4.5.8. de [BT84], à savoir on vérifie que cette fonction est entière par un calcul de points entiers et l'on note  $\mathcal{W}_{a,f}$  l'ouvert spécial défini par  $d_a \in \mathcal{O}[\mathcal{U}_{-a,f} \times \mathcal{U}_{a,f}]$ , qui contient la section unité et est aussi étoffé d'après 1.7.3.e de [BT84]. Enfin il ne reste qu'à voir que  $\beta_a : W_a \rightarrow U_a \times Z \times U_{-a}$  se prolonge en un morphisme entier. Il est aisé de calculer que  $\mathrm{pr}_{U_{\pm a}} \circ \beta_a(\mathcal{W}_{a,f}(\mathcal{O})) \subseteq \mathcal{U}_{\pm a,f}(\mathcal{O})$ , en se ramenant au cas pseudo-réductif et modérément universel de rang pseudo-déployé égal à 1. D'autre part, le morphisme composé de schémas  $\mathrm{pr}_Z \circ \beta_a$  se prolonge en un morphisme entier  $\mathcal{W}_{a,f} \rightarrow \mathcal{Z}$  grâce à la propriété universelle du modèle de Néron de  $Z$ , qui, en fait, se factorise à travers de  $\mathcal{Z}^0$  par une question de connexité du membre de gauche et ce que l'image de la section unité de  $\mathcal{W}_{a,f}$  est la section unité de  $\mathcal{Z}$ . Enfin la représentabilité de  $P_f^0$  par  $\mathcal{G}_f$  découle d'un raisonnement classique avec des ouverts denses, voir le cor. 4.6.7. de [BT84].  $\square$

Retournant aux parties bornées non vides  $\Omega$  d'un appartement quelconque  $\mathcal{A}(G, S, K)$  de  $\mathcal{I}(G, K)$ , on note  $\mathcal{G}_\Omega := \mathcal{G}_{f_\Omega} = \mathcal{G}_{f'_\Omega}$  le  $\mathcal{O}$ -modèle en groupes de  $G$  déduit du th. précédente et on l'appelle le modèle immobilier attaché à  $\Omega$ . Si  $\Omega$  est, en plus, une facette, alors  $\mathcal{G}_\Omega$  est dénommé un modèle parahorique. On remarque encore qu'on possède aussi d'autres  $\mathcal{O}$ -modèles en groupes  $\mathcal{G}_\Omega^1$  (resp.  $\hat{\mathcal{G}}_\Omega$ , resp.  $\mathcal{G}_\Omega^\dagger$ ) de  $G$  représentant  $P_\Omega^1$  (resp.  $\hat{P}_\Omega$ , resp.  $P_\Omega^\dagger$ ), mais cependant on ne sait plus que pour  $P_\Omega^1$ , si cette représentabilité est préservée lorsqu'on prendre d'extensions conservatrices et même non ramifiées. Si l'on ne se intéressait pas à la grosse cellule, on pourrait avoir construit les modèles entiers  $\mathcal{G}_\Omega^0$  de manière plus commode, cf. lem. 7.2 de [Yu15], en prenant l'adhérence schématique de  $G$  dans une représentation convenable  $\mathrm{GL}_n$  et puis en lissifiant la composante neutre du modèle plat échéant au moyen d'une suite de dilatations (voir soit [WW80], soit le 3.2 de [BLR90], soit [MRR20]).

M. Solleveld nous a demandé si l'existence de bonnes filtrations au sens de P. Schneider et U. Stuhler [SS97] de  $Z(K)$  par rapport à  $G(K)$  peut être déduite de nos modèles entiers. Bien que l'on a toujours la filtration exhaustive des sous-groupes de congruence modulo  $\varpi^n$ , celle-ci est typiquement trop faible; d'autre part, on pourrait définir la filtration de Moy-Prasad dans ce cadre, mais elle ne serait pas toujours exhaustive, parce que  $Z(K)$  n'est pas forcément sans  $p$ -torsion, même lorsque  $G$  est pseudo-réductif, cf. [CGP15], ex. 1.6.3. Cependant nous ne savons pas comment unifier les deux méthodes. En théorie des représentations  $p$ -adiques, on s'intéresse aussi aux schémas en groupes associés aux fonctions quasi-concaves  $f : \Phi \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

4.3. Reprenons les notations des paragraphes précédents et déterminons maintenant le radical unipotent du  $k$ -groupe  $\mathcal{G}_{f,s}^0 := \mathcal{G}_f^0 \otimes_{\mathcal{O}} k$ , où  $f : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction quasi-concave et optimale. On note  $f^* : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction qui fait correspondre à une racine  $a$  le plus petit nombre réel appartenant à  $\Gamma'_a$  et majorant strictement  $f(a)$  si  $f(a) + f(-a) = 0$  ou tout simplement la même valeur  $f(a)$  si  $f(a) + f(-a) > 0$ .

**Lemme 4.6.** *La fonction  $f^*$  est quasi-concave, le radical unipotent de  $\mathcal{G}_{f,s}^0$  s'identifie à l'image de  $\mathcal{U}_{f^*,s}^+ \times R_u \mathcal{Z}_s^0 \times \mathcal{U}_{f^*,s}^-$  par le morphisme produit et le système de racines du quotient réductif  $\mathcal{G}_{f,s}^{0,\text{réd}}$  suivant le tore déployé maximal  $\mathcal{S}_s$  s'identifie à  $\Phi_f = \{a \in \Phi : f(a) + f(-a) = 0\}$ .*

*Démonstration.* On peut supposer sans perdre de généralité que  $\kappa$  est infini, en prenant une extension conservatrice non ramifiée et en appliquant la descente étale. Vu que la fibre spéciale  $\mathcal{Z}_s^0$  (resp.  $\mathcal{U}_{a,f,s}$ ) coïncide avec le centralisateur du tore déployé maximal  $\mathcal{S}_s$  dans  $\mathcal{G}_{f,s}^0$  (resp. le sous-groupe radiciel associé au poids  $a \in \Phi_{\text{nd}}$ ), cf. 4.6.4 de [BT84], on peut d'après soit [BT84], 1.1.11, soit la prop. 3.3.10 de [CGP15], se ramener au cas où  $\Phi$  consiste d'un seul rayon radiciel. Maintenant on observe que  $\beta_a$  se prolonge en une application de  $\mathcal{U}_{-a,f^*} \times \mathcal{U}_{a,f}$  dans  $\mathcal{U}_{a,f} \times \mathcal{Z}_s^0 \times \mathcal{U}_{-a,f^*}$ , dont les calculs ressemblent ceux de 4.5.8 ii de [BT84]. Par suite, la partie localement fermée  $\mathcal{U}_{a,f,s} \times \mathcal{Z}_s^0 \times \text{im } \mathcal{U}_{-a,f^*,s}$  de  $\mathcal{G}_{f,s}^0$  est même un sous-groupe fermé et résoluble, ce qui termine la démonstration lorsque  $f = f^*$ . Supposons que  $f^*(a) > f(a)$  de telle sorte que  $f(a) + f(-a) = 0$ , et prenons un élément  $u \in U_a$  tel que  $\varphi_a(u) = f(a)$ . Alors  $\varphi_{-a}(u') = \varphi_{-a}(u'') = -f(a)$ , où  $m(u) = u'uu''$  est le seul élément de  $N(K)$  s'écrivant de cette manière, donc  $m(u) \in \mathcal{G}_{f,s}^0$  y induit la réflexion de  $\mathcal{S}_s$  dans  $\mathcal{G}_{f,s}^{0,\text{réd}}$  par rapport à  $a$ , en échangeant le sous-groupe résoluble  $\mathcal{U}_{a,f,s} \times \mathcal{Z}_s^0 \times \text{im } \mathcal{U}_{-a,f^*,s}$  par son opposé  $\text{im } \mathcal{U}_{a,f^*,s} \times \mathcal{Z}_s^0 \times \mathcal{U}_{-a,f,s}$ . On note que cet argument ne change pas lorsque  $f^*(2a) > f(2a)$  et qu'il implique que le complément de  $\text{im } \mathcal{U}_{a,f^*,s}(\kappa)$  dans  $\mathcal{U}_{a,f,s}(\kappa)$  n'appartient à  $R_u \mathcal{G}_{f,s}^0$ . Par densité des points rationnels lorsque  $\kappa$  est infini et parfait, il s'ensuit que le sous-groupe radiciel  $V_{a,f}$  de  $\mathcal{G}_{f,s}^{0,\text{réd}}$  s'identifie à  $\mathcal{U}_{a,f,s}/\text{im } \mathcal{U}_{a,f^*,s}$ , d'où la conclusion. Les affirmations concernant la quasi-concavité de  $f^*$  et le système de racines du quotient réductif en résultent.  $\square$

Enfin on arrive à la généralisation quasi-réductive de l'énoncé du théorème fondamental 4.6.33 de [BT84] sur le lien entre les sous-groupes parahoriques  $P_{\mathbf{f}}$  attachés à une facette  $\mathbf{f}$  de  $\mathcal{I}(G, K)$  et les sous-groupes paraboliques du quotient réductif de la fibre spéciale  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}$ .

**Théorème 4.7.** *Reprenons toutes les notations introduites aux paragraphes précédents et rappelons que  $G$  est supposé quasi-déployé. Soit  $\mathbf{f} \subseteq \mathcal{I}(G, K)$  une facette et  $\mathcal{I}(G, K)_{\mathbf{f}}$  l'étoile de  $\mathbf{f}$ , c'est-à-dire, l'ensemble ordonné de toutes les facettes  $\mathbf{f}'$  dont l'adhérence contient  $\mathbf{f}$ . À chaque membre  $\mathbf{f}'$  de l'étoile, associons le  $\kappa$ -sous-groupe algébrique  $Q_{\mathbf{f}',\mathbf{f}}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0$  image du morphisme canonique  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}',s}^0 \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0$ . Les propriétés suivantes sont remplies :*

- (1) *Cette application  $\mathbf{f}' \mapsto Q_{\mathbf{f}',\mathbf{f}}$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'étoile de  $\mathbf{f}$  et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0$  ordonné par la relation opposée à l'inclusion.*
- (2) *Le sous-groupe parahorique  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}'}^0(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0(\mathcal{O})$  est égal à l'image réciproque de  $Q_{\mathbf{f}',\mathbf{f}}(\kappa)$  par la projection  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0(\kappa)$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{A}(G, S, K)$  un appartement de l'immeuble contenant  $\mathbf{f}$ , fixé dans la suite, et  $\mathbf{a}$  l'unique alcôve dont l'adhérence contient  $\mathbf{f}$  telle que  $a(x) + f_{\mathbf{f}}(a) > 0$  pour tout  $x \in \mathbf{a}$  et toute racine positive  $a \in \Phi_{\mathbf{f}}^+$  du sous-système de racines de  $\mathbf{f}$ . On va premièrement

étudier les facettes de l'appartement emboîtées entre  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{a}$ , vérifier qu'elles correspondent par l'application de l'énoncé aux sous-groupes paraboliques standards de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0$  contenant le sous-groupe pseudo-parabolique minimal attaché aux racines positives  $\Phi_{\mathbf{f}}^+$ , ainsi que les restantes affirmations du théorème.

Observons que ces facettes emboîtées correspondent bijectivement aux parties  $J$  de  $\Delta_{\mathbf{f}}$ , en envoyant  $\mathbf{f}'$  sur l'ensemble  $J = \{a \in \Delta_{\mathbf{f}} : f_{\mathbf{f}'}(-a) = f_{\mathbf{f}}(-a)\}$ , et notons que  $\Phi_{\mathbf{f}_J}$  est égal au sous-système de racines de  $\Phi_{\mathbf{f}}$  engendré par  $J$ . Comme évidemment  $f_{\mathbf{f}'} \geq f_{\mathbf{f}}$  pour toute sur-facette de  $\mathbf{f}$ , il résulte qu'il y a une application canonique  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_J}^0 \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0$ , dont l'image s'identifiera selon l'énoncé au sous-groupe parabolique standard de type  $J$  de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0$ . Pour le voir, observons que, si la somme  $f_{\mathbf{f}}(a) + f_{\mathbf{f}}(-a) > 0$  est strictement positive, alors elle est égale à la plus grande longueur des intervalles ouverts de  $\mathbb{R} \setminus \Gamma'_a$ . Par suite,  $f_{\mathbf{f}_J}(a) = f_{\mathbf{f}}(a)$  pour toute racine  $a \notin \Phi_{\mathbf{f}}$  et, d'autre part, par hypothèse  $f_{\mathbf{f}_J}(a)$  est égale à  $f_{\mathbf{f}}(a)$  si  $a \in \Phi_{\mathbf{f}}^+ \cup \Phi_{\mathbf{f}_J}$  et à son successeur dans  $\Gamma'_a$  sinon. De ces considérations et du lem. 4.6, il découle que  $Q_{\mathbf{f}_J,\mathbf{f}}$  est justement le sous-groupe pseudo-parabolique de type  $J$ . On voit de même, compte tenu de la surjectivité de  $\mathcal{U}_{a,\mathbf{f}}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{U}_{a,\mathbf{f}}(\kappa)$  et  $\mathcal{Z}^0(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{Z}^0(\kappa)$ , vu que  $\mathcal{O}$  est hensélien, que l'application  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_J}^0(\mathcal{O}) \rightarrow Q_{\mathbf{f}_J,\mathbf{f}}(\kappa)$  est surjective. Pour régler la dernière affirmation, il faut tout simplement remarquer que le noyau de la projection  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0(\kappa)$  est contenu dans  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}'}^0(\mathcal{O})$ , d'après le 4.6.8 (i) de [BT84].

Le cas général se déduit de ce qui précède par conjugaison, en observant que, d'une part,  $N_{\mathbf{f}}^0$  permute transitivement les alcôves qui contiennent  $\mathbf{f}$  et le sous-groupe  $U_{\mathbf{f}}$  engendré par les  $U_{a,\mathbf{f}}$  pour  $a \in \Phi$  permute transitivement les appartements contenant  $\mathbf{f}$  (voir la prop. 7.4.6. de [BT72]), tandis que, d'autre part, les  $\kappa$ -sous-groupes paraboliques de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0$  sont conjugués d'un standard par un certain élément de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0(\kappa)$ . L'injectivité résulte de ce que chaque paire de facettes sont contenues dans un même appartement  $\mathcal{A}(G, S, K)$ , tandis que la partie des points fixes de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0(\mathcal{O})$  dans celui-ci est égal à l'adhérence de  $\mathbf{f}$  (voir [BT72], prop. 7.4.5.).  $\square$

4.4. Maintenant on va descendre l'immeuble le long d'une extension non ramifiée à la suite de [BT84], V (plus récemment, G. Prasad a trouvé dans [Pr16] une stratégie différente pour y parvenir, ce qui ne nous aide pas forcément dans notre cadre non réductif). Soient  $K$  un corps discrètement valué et hensélien,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers supposé excellent,  $\kappa$  son corps résiduel supposé parfait, et  $G$  un groupe quasi-réductif quelconque sur  $K$ . Si l'on note  $K^{\text{nr}}$  la plus grande extension algébrique non ramifiée de  $K$ , alors  $G$  devient quasi-déployé sur  $K^{\text{nr}}$ , cf. cor. 2.3, qui on peut appliquer grâce au fait que  $K^{\text{nr}}$  est un corps  $C1$  (voir [Lan52]), et on dispose donc d'un immeuble  $\mathcal{I}(G, K^{\text{nr}})$ , qui est opéré par  $\Gamma := \text{Gal}(K^{\text{nr}}/K)$  de façon compatible avec l'opération naturelle de ce dernier sur  $G(K^{\text{nr}})$ . La définition naïve de l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K)$  serait donc la partie  $\mathcal{I}(G, K^{\text{nr}})^{\Gamma}$  et on définirait les modèles en groupes parahoriques  $\mathcal{G}_{\Omega}^0$  associés à des parties de  $\mathcal{I}(G, K)$  comme les descendus étales de tels modèles définis au-dessus de  $\mathcal{O}^{\text{nr}}$ . Cependant pour qu'on déduise de bonnes propriétés géométriques et combinatoires de ces objets, il faut travailler encore comme dans le § 5. de [BT84]. Pour être plus précis, on aura besoin des propriétés combinatoires de l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K^{\text{nr}})$  joint à l'opération de  $\Gamma$  pour déduire l'existence d'une valuation de la donnée radicielle abstraite

$(Z(K), U_a(K))_{a \in \Phi}$  dans  $G(K)$ , où  $S$  est un tore déployé maximal de  $G$ ,  $Z = Z_G(S)$  est le centralisateur de  $S$  et  $U_a$  est le sous-groupe radiciel attaché à la racine  $a \in \Phi := \Phi(G, S)$ ; l'immeuble résultant sera identifié à la fin avec les points fixes  $\mathcal{I}(G, K^{\text{nr}})^\Gamma$ .

**Lemme 4.8.** *Il existe un tore  $K^{\text{nr}}$ -déployé maximal  $S^{\text{nr}}$  de  $G$  qui contient  $S$  et qui est défini sur  $K$ .*

*Démonstration.* On peut se ramener aussitôt au cas où  $G = Z$ , dont les  $K^{\text{nr}}$ -tores déployés maximaux contiennent  $S$  automatiquement. Observons que les orbites de l'opération de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{I}(Z, K^{\text{nr}})$  sont finies, car chaque appartement est associé à un tore déployé sur une extension finie de  $K$ . Par suite,  $\Gamma$  fixe un point  $x \in \mathcal{I}(Z, K^{\text{nr}})$ , cf. prop. 3.2.4. de [BT72] et le  $\mathcal{O}^{\text{nr}}$ -modèle parahorique  $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_x$  se descend en un  $\mathcal{O}$ -groupe. Soient  $\mathfrak{s}^{\text{nr}}$  un  $\kappa$ -tore maximal de  $\mathcal{Z}_s$  et  $S^{\text{nr}}$  l'unique  $\mathcal{O}$ -tore à isomorphisme unique près qui relève  $\mathfrak{s}^{\text{nr}}$ , en vertu de l'équivalence entre les catégories des algèbres étales et finies au-dessus de  $\mathcal{O}$  et  $\kappa$ . Grâce à la représentabilité par un schéma lisse du foncteur des homomorphismes d'un tore dans un schéma en groupes lisse et affine, cf. cor. 4.2., exp. XI de [SGA3], le  $\mathcal{O}$ -tore  $S^{\text{nr}}$  s'envoie dans  $\mathcal{Z}$  par une application, qui est nécessairement une immersion fermée d'après le th. 6.8, exp. IX de [SGA3]. Il s'ensuit que la fibre générique  $S^{\text{nr}} := \mathcal{S}_\eta^{\text{nr}}$  s'identifie à un  $K$ -tore de  $Z$ , dont le  $K^{\text{nr}}$ -tore déduit par changement de base  $K \rightarrow K^{\text{nr}}$  devient déployé maximal, car les rangs déployés de  $\mathcal{Z}_s$  et  $Z \otimes K^{\text{nr}}$  coïncident, cf. prop. 4.6.4 (i) de [BT72].  $\square$

Fixons alors un tel tore  $S^{\text{nr}}$ , dont le appartement  $\mathcal{A}^{\text{nr}} := \mathcal{A}(G, S^{\text{nr}}, K^{\text{nr}})$  est invariant par  $\Gamma$  et possède un point fixe. En fait  $\mathcal{A} := \mathcal{A}^{\text{nr}, \Gamma}$  en est un sous-espace affine de dimension égale au rang de  $S^{\text{der}}$ . On note aussi  $\mathcal{I}^{\text{nr}}$  l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K^{\text{nr}})$  de  $G$  et  $\mathcal{I} := \mathcal{I}^{\text{nr}, \Gamma}$  la partie des points fixes par  $\Gamma$ . Choisissons une valuation  $\varphi \in \mathcal{A}$  invariante par  $\Gamma$  de la donnée radicielle abstraite  $(Z^{\text{nr}}(K^{\text{nr}}), U_{a^{\text{nr}}}(K^{\text{nr}}))_{a^{\text{nr}} \in \Phi^{\text{nr}}}$ , où l'on note  $Z^{\text{nr}}$  le centralisateur de  $S^{\text{nr}}$ . Pour chaque  $a \in \Phi$  et  $k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , posons

$$U_{a,k}^{\text{nr}} = \prod_{a^{\text{nr}}} U_{a^{\text{nr}},k}^{\text{nr}} \prod_{(2a)^{\text{nr}} \in \Phi_{\text{nd}}} U_{(2a)^{\text{nr}},2k}^{\text{nr}},$$

$$U_{a,k} = U_{a,k}^{\text{nr}} \cap U_a(K),$$

où  $a^{\text{nr}}$  parcourt l'ensemble des racines de  $G$  par rapport à  $S^{\text{nr}}$  dont la restriction à  $S$  est égale à  $a$ . Enfin on définit la fonction  $\varphi_a(u) = \sup\{k : u \in U_{a,k}\}$ .

**Théorème 4.9.** *Les fonctions  $\varphi_a$  définissent une valuation  $\varphi$  de la donnée radicielle abstraite  $(Z(K), U_a(K))_{a \in \Phi}$ . L'immeuble  $\mathcal{I}(\varphi)$  associé à  $\varphi$  s'identifie naturellement à  $\mathcal{I}$ , de telle façon que l'appartement  $\mathcal{A}(\varphi)$  s'envoie sur  $\mathcal{A}$ . Les racines affines de  $\mathcal{I}$  sont les intersections des racines affines de  $\mathcal{I}^{\text{nr}}$  associées aux racines  $a^{\text{nr}} \in \Phi^{\text{nr}} \setminus \Phi_0^{\text{nr}}$ .*

*Démonstration.* Pour démontrer le théorème, il faut encore vérifier les hypothèses (DI 3) et (DV 2) du th. 9.2.10. de [BT72], les restantes étant évidentes ou déjà vues. Prenons alors une facette maximale  $\mathbf{f}$  de  $\mathcal{A}^{\text{nr}}$  rencontrant  $\mathcal{A}$  et soit  $\mathbf{f}'$  une autre facette dont l'adhérence contient  $\mathbf{f}$  et qui rencontre  $\mathcal{I}$ . Grâce à la bijection du th. 4.7, on se ramène à montrer que  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^0$ , entendu en tant que  $\kappa$ -groupe, n'admet aucun sous-groupe  $\kappa$ -parabolique propre. Quitte

à conjuguer, un tel  $Q_{\mathbf{f}, \mathbf{f}}$  contient  $\mathcal{S}_s$  et donc le centralisateur  $\mathcal{Z}_s \supseteq \mathcal{S}_s^{\text{nr}}$ ; il en résulte que  $\mathbf{f}'$  appartient à  $\mathcal{A}^{\text{nr}}$  et est invariante par  $\Gamma$ , ce qui entraîne  $\mathbf{f}' = \mathbf{f}$  par hypothèse.

Quant à (DV 2), on montre notamment que l'inclusion  $\Gamma'_a \subseteq \Gamma'_{a^{\text{nr}}}$  est une égalité. On fait usage d'abord de la structure des modèles  $\mathcal{U}_{a^{\text{nr}}}^{\text{nr}}$  pour qu'on trouve un élément  $v \in U_{a^{\text{nr}}, k}^{\text{nr}} \cap G(K_{a^{\text{nr}}}) \setminus U_{a^{\text{nr}}, > k} U_{(2a)^{\text{nr}}, 2k}$ , où  $k \in \Gamma'_{a^{\text{nr}}}$  et  $K_{a^{\text{nr}}}$  est le corps fixe par le stabilisateur  $\Gamma_{a^{\text{nr}}}$  de  $a^{\text{nr}}$ . En écrivant  $x = \prod_{\sigma \in \Gamma/\Gamma_a} \sigma(v)$  pour un ordre quelconque, on observe que  $\sigma \mapsto x^{-1}\sigma(x)$  est un cocycle à valeurs dans le groupe des commutateurs des  $U_{\sigma(a^{\text{nr}}), k}^{\text{nr}}$ , qui est contenu dans le sous-groupe engendré par les  $U_{\sigma(a^{\text{nr}}) + \tau(a^{\text{nr}}), 2k}^{\text{nr}}$ . Vu le 4.6.2. de [BT84], ce sous-groupe est sous-jacent à un  $\mathcal{O}$ -modèle de  $\prod_{\sigma, \tau} U_{\sigma(a^{\text{nr}}) + \tau(a^{\text{nr}})}^{\text{nr}}$ , qui est un groupe vectoriel, et on lui applique le lem. 5.1.17. de [BT84] afin de déduire l'annulation du premier groupe de cohomologie. En particulier, on tire  $x^{-1}\sigma(x) = y^{-1}\sigma(y)$  avec  $y \in \prod_{\sigma, \tau} U_{\sigma(a^{\text{nr}}) + \tau(a^{\text{nr}}), 2k}^{\text{nr}}$ , donc  $u = yx^{-1} \in G(K)$  et, par construction même de  $u$ , l'on a  $k \in \Gamma'_a$ .

À ce stade, il s'ensuit du th. 9.2.10. de [BT72] que  $\varphi$  est une valuation de la donnée radicielle abstraite dont il s'agit, et les props. 9.1.17 et 9.2.15. de [BT72] en fournissent une injection  $\mathcal{I}(\varphi) \hookrightarrow \mathcal{I}$  équivariante, identifiant le membre de gauche à la plus grande partie de  $\mathcal{I}$  contenant  $\mathcal{A}$  et stable sous l'action de  $G(K)$ . Enfin il suffit de montrer que  $\mathcal{I} = G(K)\mathcal{A}$ . En raisonnant comme dans le lem. 4.8, on réalise un point donné  $x \in \mathcal{I}$  dans un appartement  $\mathcal{A}_1^{\text{nr}}$  invariant par  $\Gamma$ . Soient  $S_1^{\text{nr}}$  le  $K$ -tore  $K^{\text{nr}}$ -déployé maximal associé,  $S_1$  le  $K$ -sous-tore déployé maximal de  $S_1^{\text{nr}}$  et  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^{\text{nr}} \cap \mathcal{I}$ . Vu que les tores déployés maximaux sont conjugués, on peut supposer  $S_1 = S$ . Grâce à la prop. 7.6.4. de [BT72] (comparer avec le 5.1.3. de [BT84]), on peut trouver un appartement  $\mathcal{A}_2^{\text{nr}}$  contenant les  $S(K)$ -orbites de  $\varphi$  et  $x$  et il s'ensuit que  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ , cf. lem. 9.2.6. de [BT72].  $\square$

En conclusion, nous avons construit l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K)$  du groupe quasi-réductif  $G$  sur le corps valué  $K$  et donc on peut définir les modèles immobiliers  $\mathcal{G}_{\Omega}^0$  d'une partie  $\Omega$  non vide et bornée d'un appartement  $\mathcal{A}(G, S, K)$  comme étant le  $\mathcal{O}$ -descendu du  $\mathcal{O}^{\text{nr}}$ -modèle correspondant  $\mathcal{G}_{\Omega}^{\text{nr}, 0}$  (ce qui a été fait mille fois pendant la démonstration!). Ceci est le plus grand modèle en groupes affine, lisse et connexe de  $G$  tel que ses points avec valeurs dans  $\mathcal{O}^{\text{nr}}$  fixent  $\Omega$ . Il peut de même s'écrire comme recollement fermé du seul  $\mathcal{O}$ -modèle en groupes parahorique  $\mathcal{Z}$  de  $Z$  (qui n'est pas toujours un modèle de Néron connexe!) et des modèles en groupes convenables  $\mathcal{U}_{a, \Omega}$  de  $U_a$ , pour chaque racine  $a \in \Phi_{\text{nd}}$ , voir le 5.2.4. de [BT84].

La plupart des énoncés des numéros précédents se descendent de manière évident dans la topologie étale - c'est le cas de la prop. 3.6 et du th. 4.7, dont la vérification est laissée au soin du lecteur.

## 5. APPLICATIONS AUX GRASSMANNIENNES AFFINES

Ici on explique le lien étroit entre le caractère quasi-réductif d'un groupe sur un corps local ou global et la propriété de sa grassmannienne affine.

5.1. Dans [Ri16], T. Richarz a donné un critère géométrique en termes des grassmanniennes affines suffisant et nécessaire pour qu'un  $\mathcal{O}$ -modèle affine, lisse et connexe d'un

groupe réductif sur  $K$  soit parahorique, où  $K$  est un corps discrètement valué complet de caractéristiques égales à corps résiduel parfait  $\kappa$ . Ici nous montrons que ce critère s'étend aux groupes affines et lisses sur les corps discrètement valués complets de caractéristiques égales et résiduellement parfait. Mais d'abord on fait des rappels sur la théorie des grassmanniennes affines, ainsi qu'elles avaient été introduites de façon homogène par X. Zhu [Zhu17] :

**Définition 5.1.** Soient  $K$  un corps discrètement valué complet,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers et  $\kappa$  le corps résiduel, qu'on suppose parfait. Étant donné un  $\mathcal{O}$ -groupe plat et affine  $\mathcal{G}$ , la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  est le pré-faisceau en  $\kappa$ -algèbres parfaites  $R$  classifiant les classes d'isomorphisme de  $\mathcal{G}$ -torseurs  $\mathcal{E}$  au-dessus de  $W_{\mathcal{O}}(R)$  munis d'une trivialisation  $\beta$  au-dessus de  $W_{\mathcal{O}}(R) \otimes_{\mathcal{O}} K$ , où  $W_{\mathcal{O}}(R) := \mathcal{O} \hat{\otimes}_{\kappa} R$  si  $K$  est de caractéristiques égales ou  $W_{\mathcal{O}}(R) := \mathcal{O} \hat{\otimes}_{W(\kappa)} W(R)$  sinon.

On sait que les grassmanniennes affines sont représentables par des ind-schémas ind-quasi-projectifs parfaits (voir [Zhu16] en caractéristiques égales, auquel cas elles possèdent une réalisation canonique en tant que schémas, et [BS17] en inégales). Lorsque  $\mathcal{G}$  est lisse, la grassmannienne affine  $\mathcal{G}$  s'écrit comme le faisceau quotient  $LG/L^+\mathcal{G}$  pour la topologie étale, où l'on note  $G$  la fibre générique de  $\mathcal{G}$ ,  $LG$  le groupe de lacets donné par  $R \mapsto G(W_{\mathcal{O}}(R) \otimes K)$  et  $L^+\mathcal{G}$  le groupe d'arcs défini par  $R \mapsto \mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(R))$ . L'énoncé suivant caractérise les groupes (presque) parahoriques en fonction de la géométrie de  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ .

**Théorème 5.2.** *On garde les notations ci-dessus. Pour que  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  soit ind-projective, il faut et il suffit que  $\mathcal{G}^0$  soit un groupe parahorique.*

*Démonstration.* Notons qu'on peut toujours supposer  $\kappa$  algébriquement clos, puisque les propriétés d'être quasi-réductif et parahorique se descendent en la topologie étale, et aussi que  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0$ , puisque l'application naturelle  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}^0} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  est un recouvrement fini étale de son image fermée, dont un nombre fini de translatés recouvrent  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ .

Traisons premièrement la suffisance. Comme  $\kappa$  est algébriquement clos,  $G$  est automatiquement quasi-déployé, cf. cor. 2.3. Soit  $\mathbf{f}$  une facette de l'appartement  $\mathcal{A}(G, S, K)$  de l'immeuble  $\mathcal{I}(G, K)$ . Il sera plus convenable de considérer les fixateurs intermédiaires  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^1$ , pour qu'on aie des BN-paires en niveau iwahorique. Soient  $S_{w,\mathbf{f}}$  les images fermées de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^1 \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^1}$ ,  $g \mapsto gn_w$ , où  $n_w$  désigne un représentant quelconque de  $w \in W_{\mathbf{f}} \setminus W_{\mathrm{af}}^1/W_{\mathbf{f}}$  et signalons que leur réunion forme un recouvrement fermé topologique de la grassmannienne, donc il suffit de montrer leur projectivité. En observant que  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^1/L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^1$  est représentable par un schéma parfait lisse et projectif, on se ramène au cas où  $\mathbf{f} = \mathbf{a}$ . Après une translation par un élément de  $N(K)$  qui laisse  $\mathbf{a}$  invariante, on peut supposer  $w \in W_{\mathrm{af}}$ , ce qu'on fera désormais, et on considère une décomposition réduite  $\mathbf{w} = [s_{i_1} : \dots : s_{i_n}]$  de  $w = s_{i_1} \dots s_{i_n}$  en des réflexions  $s_i$  par rapport aux cloisons  $\mathbf{f}_i$  de  $\mathbf{a}$ . Notons  $D_{\mathbf{w}} = L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}_{i_1}}^1 \times^{L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^1} \dots \times^{L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^1} L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}_{i_n}}^1/L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^1$  la variété de Demazure associée à la décomposition réduite  $\mathbf{w}$ . On montre par induction sur  $n$  que ce faisceau est projectif sur  $\kappa$  et le morphisme produit  $D_{\mathbf{w}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}}}$  se factorise à travers son image fermée  $S_{w,\mathbf{a}}$ , qui est donc projective aussi.



Pour démontrer la réciproque, il faut observer d'abord que  $G$  est quasi-réductif. Notons premièrement que, si  $H_1$  est un sous- $K$ -groupe fermé et distingué de  $H_2$ , alors l'adhérence schématique  $\mathcal{H}_1$  de  $H_1$  dans  $H_2$  n'importe quel modèle entier plat  $\mathcal{H}_2$  de  $H_2$  l'est aussi, et le faisceau quotient  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1$  est représentable par un schéma en groupes affine et plat, d'après le th. 4.C. de [Ana73]. Par suite, l'application  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{H}_1} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{H}_2}$  est une immersion fermée, cf. prop. 1.2.6. de [Zhu16]. Appliquant cela au radical unipotent déployé  $R_{ud}G$  de  $G$  et à une suite de composition de ce dernier à quotients successifs isomorphes à  $\mathbb{G}_a$ , on arrive à un modèle entier plat  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{G}_a$  dont la grassmannienne affine est ind-projective. Notons qu'on peut trouver des  $\mathcal{O}$ -modèles lisses et connexes  $\mathcal{A}_i$ ,  $i = 1, 2$ , de  $\mathbb{G}_a$  isomorphes à  $\mathbb{G}_a$  en tant que groupes (mais non en tant que modèles), tels qu'il y ait des morphismes  $\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_2$ . Il s'avère par des calculs explicites avec les groupes de lacets que  $\mathrm{Gr}_{\mathbb{G}_a}$  s'identifie à l'espace affine infini et que le morphisme composé  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{A}_1} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{A}_2}$  est surjectif, d'où la même affirmation pour  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{A}_2}$ , ce qui est en contradiction avec l'ind-projectivité du premier.

La dernière étape se fait comme dans la source originale et l'on suppose  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0$  connexe. Comme  $\mathcal{G}(\mathcal{O}) \subseteq G(K)$  est un sous-groupe borné pour la topologie induite par la valuation de  $K$ , il s'ensuit qu'il stabilise une facette de  $\mathcal{I}(G, K)$  (voir le th. 3.3.1. de [BT72]), qu'on peut supposer maximale sans perdre de généralité, d'où une inclusion de  $\mathcal{G}(\mathcal{O})$  dans  $P_{\mathbf{f}}^{\dagger}$  (voir la démonstration de la prop. 3.9). Alors le 1.7 de [BT84] en fournit un morphisme schématique  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\dagger}$  qui se factorise par connexité à travers  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0$ . La fibre sur la section unité de l'application  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0}$  est représentable par un schéma parfait projectif et s'identifie à  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0/L^+\mathcal{G}$ . Vu que le noyau de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0 \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^{0,\mathrm{red}}$  est un  $\kappa$ -groupe pro-unipotent, on a nécessairement que le sous-groupe  $L^+\mathcal{G}$  de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0$  est l'image réciproque d'un certain  $\kappa$ -sous-groupe parabolique  $P$  de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^{0,\mathrm{red}}$ . Par maximalité de  $\mathbf{f}$ , on en tire  $P = \mathcal{G}_{\mathbf{f},s}^{0,\mathrm{red}}$  (cf. th. 4.3), ce qui entraîne  $L^+\mathcal{G} = L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^0$ , et donc l'égalité cherchée.  $\square$

Observons que, lorsqu'on se donne un groupe pseudo-réductif exotique basique  $G$ , alors la grassmannienne affine parfaite  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\Omega}}$  s'identifie à  $\mathrm{Gr}_{\overline{\mathcal{G}_{\Omega}}}$ , où l'on note  $\overline{\mathcal{G}_{\Omega}}$  le modèle immobilier correspondant du cousin déployé  $\overline{G}$ , tandis que l'application de leurs réalisations schématiques canoniques induit toujours un homéomorphisme universel entre leurs variétés de Schubert, qui n'est presque jamais birationnel. Dans [III, 8.], on trouvera une application de la théorie de Bruhat-Tits pour les groupes pseudo-réductifs au problème de déterminer tous les groupes  $G$  modérément ramifiés dont les variétés de drapeaux affines sont réduites (dans le cas où le revêtement simplement connexe n'est pas étale).

Donnons-nous une courbe lisse et connexe  $X$  sur un corps parfait  $\kappa$ . On dispose d'un ind-schéma  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},X}$  au-dessus de  $X$  pour chaque  $X$ -groupe  $\mathcal{G}$ , qui redonne la grassmannienne affine classique au-dessus de chaque point fermé. T. Richarz a montré dans [Ri19] que, pour que la fibre générique  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},X,\eta}$  soit ind-projective, il faut que le  $\kappa(X)$ -groupe  $G := \mathcal{G}_{\eta}^0$  soit quasi-réductif et il a conjecturé que ce critère est suffisant. Voici la confirmation pour les groupes pseudo-réductifs.

**Corollaire 5.3.** *Soit  $G$  un  $\kappa(X)$ -groupe pseudo-réductif. Alors,  $\mathrm{Gr}_{G,\eta} := \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},X,\eta}$  est ind-projectif.*

*Démonstration.* Vu que l'ensemble des fibres propres est constructif, le fait que  $\mathrm{Gr}_{G,\eta}$  soit projectif revient à dire que  $G \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  est parahorique presque partout, c'est-à-dire au-dessus des points fermés d'un ouvert assez petit  $U$  non vide de  $X$  où  $G$  est de plus encore défini. Il suffit de vérifier l'assertion pour le revêtement modérément universel  $\widetilde{G}$  et pour le Cartan  $Z$ .

Vu que la condition d'être parahorique se vérifie à l'aide des points entiers, on peut aussi supposer  $G$  primitif. Si  $G$  est simplement connexe, cela est immédiat. Sinon on considère l'épimorphisme  $f : G \rightarrow \overline{G}$  défini au-dessus d'un ouvert non-vide de  $X$  et induisant une égalité des points rationnels sur chaque corps local complet  $\widehat{K}_{X,x} := \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ . On affirme que  $G(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}) \rightarrow \overline{G}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$  est aussi bijectif presque partout, lequel se vérifie plus commodément avec chaque terme  $Z$  ou  $U_a$  de la grosse cellule grâce à l'injectivité presque partout de  $H^1(N, \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}) \rightarrow H^1(N, \widehat{K}_{X,x})$ , où  $N$  est le noyau de la restriction de  $f$  à  $Z$  ou  $U_a$ . En effet, vu que  $N$  s'identifie dans chacun des cas à un produit de restrictions des scalaires de groupes plats et finis, cela résulte d'une application de la suite spectrale de Leray et du critère valuatif de propreté (comparer avec la prop. 4.2.1., le lem. 4.2.5. et la prop. 4.2.9. de [Ros18]).

Lorsque  $G = Z$  est commutatif, il faut montrer que  $G$  s'étend en son propre modèle de Néron connexe au-dessus d'un ouvert assez petit. Si  $G$  est de type minimal, c'est-à-dire si l'application naturelle  $i_G : G \rightarrow \mathrm{R}_{K'/K}G'$  vers la restriction des scalaires du quotient réductif géométrique est injective, alors l'assertion devient évidente, puisque  $G'$  est un tore. Sinon on considère l'extension  $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G^{\mathrm{prtm}} \rightarrow 1$ , regardée ici comme étant défini sur l'ouvert  $U$ , et l'on affirme que, quitte à diminuer celui-ci, alors l'application  $N(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}) \rightarrow N(\widehat{K}_{X,x})$  est bijective et  $H^1(N, \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}) \rightarrow H^1(N, \widehat{K}_{X,x})$  est injective pour tout  $x \in U$ . L'injectivité générique du premier groupe de cohomologie est un fait général déjà observé dans le paragraphe précédent. D'autre part, vu que par hypothèse  $N$  n'admet qu'un nombre fini de points à valeurs dans une extension séparable, son plus grand sous-groupe fermé lisse  $N^{\mathrm{lis}}$  est fini étale, cf. [CGP15], lem. C.4.1. Cet état des choses peut être supposé valide sur notre ouvert  $U$ , d'où l'égalité cherchée, d'après le critère valuatif de propreté appliqué à  $N^{\mathrm{lis}}$ . Grâce à ces hypothèses, nous vérifions sans peine que  $G(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$  est le produit fibré de  $G^{\mathrm{prtm}}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$  et  $G(\widehat{K}_{X,x})$  sur  $G^{\mathrm{prtm}}(\widehat{K}_{X,x})$ , lequel n'est autre que le plus grand sous-groupe borné de  $G(\widehat{K}_{X,x})$ , d'après la prop. 4.3 (en effet, les caractères rationnels de  $G$  et de  $G^{\mathrm{prtm}}$  coïncident).  $\square$

La démonstration précédente montre que le critère géométrique conjecturé par T. Richarz est étroitement liée avec la conj. I de [BLR90], 10.3. De plus, si tout groupe unipotent ployé commutatif était le quotient unipotent d'un certain groupe pseudo-réductif commutatif, comme l'a demandé B. Totaro dans [Tot13] ques. 9.11, nous pourrions déduire de cela la vérité de cette conjecture dans le cadre ci-dessus d'une courbe lisse sur un corps parfait.

**Note ajoutée aux épreuves.** Après l'écriture de ce texte, je me suis aperçu qu'il était loisible d'effacer l'hypothèse du corps résiduel parfait, tout en conservant l'excellence et l'henselité, grâce au raisonnement suivant. Étant donné un groupe quasi-réductif  $G$  quasi-déployé sur le corps  $K$  et un sous-tore déployé maximal  $S$  de  $G$ , alors l'image  $S'$  de  $S$  dans le quotient réductif  $G'$  de  $G$  sur le corps de définition  $K'$  du radical unipotent géométrique est encore un



sous-tore déployé maximal, faisant de  $G'$  un groupe quasi-déployé au-dessus de  $K'$ . De plus, on obtient la relation suivante entre leurs systèmes de racines suivant  $S$  resp.  $S' : \Phi'$  est contenu dans  $\Phi$  et contient toutes les racines non multipliables  $\Phi_{\text{nm}}$  de  $\Phi$ . D'autre part, il s'avère que l'application canonique  $i_G : G \rightarrow R_{K'/K}G'$  induit une injection entre les points rationnels des sous-groupes radiciels. On peut alors construire une valuation  $\varphi$  de  $G(K)$  en prenant l'image réciproque d'une valuation  $\varphi'$  de  $G'(K)$ , autrement dit en posant  $\varphi_a = \varphi'_a$  ou  $\frac{1}{2}\varphi'_{2a}$ , selon que  $a$  appartient à  $\Phi'$  ou non. Ceci recadre la preuve de la prop. 3.2 et les restantes propositions de cet article en résultent, sans même comprendre à fond la classification de [CP16] (voir [IV] pour plus de détails).

## RÉFÉRENCES

- [II] *Grassmanniennes affines tordues sur les entiers.*
- [III] *On the normality of Schubert varieties : remaining cases in positive characteristic.*
- [IV] *Local models : between two worlds.*
- [Ana73] S. Anantharaman. *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*. Mémoires de la S.M.F., tome 33 (1973), p. 5-79.
- [BD96] A. Beilinson & V. Drinfeld. *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*, prépublication disponible dans <http://math.uchicago.edu/~drinfeld/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf>.
- [BS17] B. Bhatt & P. Scholze. *Projectivity of the Witt vector affine Grassmannian*, Invent. Math. 209 (2017), no. 2, 329-423.
- [BoT78] A. Borel & J. Tits. *Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires*, C. R. Acad. Sci., tome 287 (1978), 55-57.
- [BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud. *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 21, Berlin, New York : Springer Verlag (1990).
- [BT72] F. Bruhat & J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 41 (1972), p. 5-251.
- [BT84] F. Bruhat & J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 60 (1984), p. 5-184.
- [Co12] B. Conrad. *Finiteness theorems for algebraic groups over function fields*, Compos. Math 148 (2012), 555-639.
- [CGP15] B. Conrad, O. Gabber & G. Prasad. *Pseudo-reductive groups*, New Mathematical Monographs 26. Cambridge : Cambridge University Press (ISBN 978-1-107-08723-1/hbk ; 978-1-316-09243-9/ebook). xxiv, 665 p. (2015).
- [CP16] B. Conrad & G. Prasad. *Classification of pseudo-reductive groups*, Annals of Mathematics Studies 191, Princeton University Press (2016).
- [HR08] T. J. Haines & M. Rapoport. *On parahoric subgroups*. Adv. Math. 219 (2008), 188-198.
- [La96] E. Landvogt. *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lect. Notes in Math., vol. 1619, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Lan52] S. Lang. *On quasi algebraic closure*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 55, No. 2 (1952), 373-390.
- [MRR20] A. Mayeux, T. Richarz & M. Romagny. *Torsors under Néron blow-ups*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/2001.03597>.
- [Oes84] J. Oesterlé, *Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p*, Inventiones mathematicae 78 (1984) : p. 13-88.

- [PR08] G. Pappas & M. Rapoport. *Twisted loop groups and their affine flag varieties*. Adv. Math. 219, No. 1, 118-198 (2008).
- [PZ13] G. Pappas & X. Zhu. *Local models of Shimura varieties and a conjecture of Kottwitz*. Invent. Math. 194, No. 1, 147-254 (2013).
- [Pr16] G. Prasad. *A new approach to unramified descent in Bruhat-Tits theory*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/1611.07430>.
- [Ray70] M. Raynaud. *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 119, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Ri16] T. Richarz. *Affine Grassmannians and geometric Satake equivalences*. Int. Math. Res. Not., Vol. 2016, Issue 12, 3717–3767 (2016).
- [Ri19] T. Richarz. *Erratum to “Affine Grassmannians and geometric Satake equivalences”*, Int. Math. Res. Not., rnz210 (2019).
- [Ros18] Z. Rosengarten. *Tate duality in positive dimensions over function fields*, prépublication, <https://arxiv.org/pdf/1805.00522.pdf>.
- [SS97] P. Schneider & U. Stuhler. *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, Publications Mathématiques de l’IHÉS, tome 85 (1997), 97-191.
- [SGA3] SGA 3, *Schémas en groupes. III : Structure des schémas en groupes réductifs*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 153, Springer-Verlag, Berlin, 1962/1964.
- [Sol18] M. Solleveld. *Pseudo-reductive and quasi-reductive groups over non-archimedean local fields*, Journal of Algebra 510 (2018), 331-392.
- [St59] R. Steinberg. *Variations on a theme of Chevalley*. Pacific J. Math., Vol. 9, No. 3, 875-891 (1959).
- [St68] R. Steinberg. *Endomorphisms of linear algebraic groups*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80 (1968).
- [Ti71] J. Tits. *Représentations linéaires irréductibles d’un groupe réductif sur un corps quelconque*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 247 (1971) : 196-220.
- [Ti84] J. Tits. *Groups and group functors attached to Kac-Moody data*, Arbeitstagung Bonn 1984, p. 193-223.
- [Ti86] J. Tits. *Immeubles de type affine*, dans Buildings and the geometry of diagrams, conférence à Como, Italie (1984), dirigé par L. A. Rosati, Lect. Notes in Math., Springer Verlag, Berlin 1986, 159-190.
- [Ti87] J. Tits. *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields*, J. Algebra 105 (1987), n° 2, 542-573.
- [Ti89] J. Tits. *Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody*. Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki, exp. n° 700, p. 7-31.
- [Ti92] J. Tits. *Twin buildings and groups of Kac-Moody type*, dans Groups, combinatorics and Geometry, conférence à Durham en 1990, London Math. Soc. Lect. Series 165, Cambridge University Press (1992), 249-286.
- [Tot13] B. Totaro. *Pseudo-abelian varieties*, Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, serie 4, tome 46 (2013) no. 5, p. 693-721.
- [WW80] W. C. Waterhouse & B. Weisfeiler. *One-dimensional affine group schemes*, J. Algebra, Vol. 66 (1980), n° 2, p. 550-568.
- [Yu15] J.-K. Yu, *Smooth models associated to concave functions in Bruhat-Tits theory*, dans Autour des schémas en groupes, vol. III, 227-258, Panor. Synthèses, 47, Soc. Math. France, Paris (2015).
- [Zhu16] X. Zhu. *An introduction to affine Grassmannians and the geometric Satake equivalence*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/1603.05593>.
- [Zhu17] X. Zhu. *Affine Grassmannians and the geometric Satake in mixed characteristic*, Ann. of Math. (2) 185 (2017), n° 2, 403-492.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT BONN, ENDENICHER ALLEE 60, 53115 BONN, DEUTSCHLAND

*Email address:* lourenco@math.uni-bonn.de



## Chapitre 2

### **Grassmanniennes affines tordues sur les entiers**

# GRASSMANNIENNES AFFINES TORDUES SUR LES ENTIERS

JOÃO NUNO PEREIRA LOURENÇO

RÉSUMÉ. Nous généralisons les travaux de G. Pappas, M. Rapoport et X. Zhu sur les grassmanniennes affines tordues aux cas non modérément ramifiés, quasi-déployés et résiduellement déployés, en supposant que le centralisateur du sous-tore déployé maximal est induit et que le groupe dérivé est absolument presque-simple et simplement connexe, à système de racines réduit. Ceci repose sur la construction, inspirée des travaux de J. Tits, de certains schémas en groupes lisses, affines et connexes sur  $\mathbb{Z}[t]$ , qui doivent être regardés comme  $\mathbb{Z}$ -familles de groupes parahoriques en caractéristiques égales, et qui prolongent les constructions des articles sus-mentionnés, lorsque  $e = 2$  ou  $3$  devient inversible. Dans la caractéristique mauvaise  $e$ , le  $\mathbb{F}_e(t)$ -groupe échéant est pseudo-réductif à groupe dérivé exotique basique au sens de B. Conrad, G. Prasad et O. Gabber, et le  $\mathbb{F}_e[t]$ -modèle en groupes est parahorique au sens de la théorie de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs que nous avons développée très récemment. Ensuite on étudie les grassmanniens affines locales et globales qui leur sont associées, en démontrant notamment leur projectivité, la normalité des variétés de Schubert et un théorème de cohérence à la X. Zhu. Enfin, nous prouvons presque tous les cas de type abélien de la conjecture de Scholze concernant les modèles locaux, à quelques exceptions près lorsque  $p = 2$ .

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Familles entières de groupes parahoriques	9
3. La géométrie des grassmanniennes affines tordues entières	19
Références	41

## 1. INTRODUCTION

Les grassmanniennes affines  $\mathrm{Gr}_G$  de  $k$ -groupes réductifs  $G$  sont des  $k$ -ind-schémas qui ont été introduits dans les années 90 en théorie géométrique des représentations pour étudier le champ des  $G$ -fibrés sur une courbe à l'aide de l'uniformisation de A. Beauville et Y. Laszlo [BL94]. Cependant, leur importance n'a été mise en relief que dans les décennies suivantes, dans fondamentalement deux programmes : d'un côté, l'équivalence de Satake géométrique, et de l'autre, la théorie des modèles entiers de variétés de Shimura ou plutôt de ce qu'on appelle leurs modèles locaux. Pour cette dernière application, il faut comprendre vraiment la structure géométrique de certains sous-schémas fermés de  $\mathrm{Gr}_G$  et la stratégie adoptée à la suite de G. Faltings [Fa03] pour parvenir aux résultats désirés consiste à tirer

---

1991 *Mathematics Subject Classification*. 14M15 (primary) 11G18, 14L15, 20G15, 20G25, 20G44 (secondary).

*Key words and phrases*. grassmanniennes affines, schémas en groupes, théorie de Bruhat-Tits, groupes parahoriques, groupes pseudo-réductifs, variétés de Schubert, variétés de Shimura, algèbres de Kac-Moody, modèles locaux, perfectoides.

profit du fait que l'on a une réalisation entière de la grassmannienne affine. Lorsqu'on veut traiter le cas des groupes non constants et tordus, la situation devient plus compliquée et les divers travaux monumentaux [PR08], [Zh14], [PZ13] de G. Pappas, M. Rapoport et X. Zhu consacrés à ce problème n'ont pas réussi à éviter des hypothèses de ramification modérée - à savoir la grassmannienne affine tordue n'est réalisée qu'au-dessus de  $\mathbb{Z}[1/e]$ , où l'on note  $e \ll$  l'indice de ramification » divisant l'ordre du groupe fini  $\Gamma$  d'automorphismes par lequel on va tordre. Dans l'article présent on se propose d'étendre la théorie existante dans le cas quasi-déployé, simplement connexe et absolument presque simple aux cas de ramification non modérée et d'obtenir ainsi des réalisations entières des grassmanniennes affines tordues. L'étape-clé est la construction d'un certain  $\mathbb{Z}[t]$ -groupe  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  affine, lisse et connexe, qu'on regarde comme une famille entière de groupes parahoriques au-dessus de chaque corps premier et dont la grassmannienne affine est celle qu'on cherche, en supposant que le  $\mathbb{Q}(t)$ -groupe  $G$  fibre générique de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  est quasi-déployé, résiduellement déployé et à tore maximal induit, et que son dérivé est absolument presque simple, simplement connexe et à système de racines réduit. Une autre différence entre notre approche et celle de [PZ13] qui mérite d'être mentionnée, est que les auteurs de ce dernier article essayent de relever un modèle parahorique d'un groupe  $p$ -adique donné en un schéma en groupes sur l'anneau des polynômes à coefficients dans l'anneau de valuation discrète dont il s'agit, tandis que nous adoptons le point de vue de la réduction d'un  $\mathbb{Q}[t]$ -groupe parahorique à des  $\mathbb{F}_p[t]$ -groupes parahoriques pour tout nombre premier  $p$ , lequel est rendu possible par l'hypothèse de quasi-déploiement. Signalons que, afin de entreprendre ce travail, il faut utiliser la théorie générale des groupes pseudo-réductifs développée très récemment par B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad [CGP15], qui sera suffisante malgré son incomplétude en caractéristique 2 lorsque  $[K : K^2] > 2$  (voir [CP16]), ainsi que leur théorie schématique de Bruhat-Tits sur les corps discrètement valués, complets et à corps résiduels parfaits, qui fut développée en [I]. Cette classification des groupes pseudo-réductifs sur les corps a été développée surtout pour qu'on puisse démontrer certaines propriétés générales concernant les groupes algébriques linéaires sur les corps de fonctions, comme en [Co12] ou [Ro18], mais le présent article est le seul, sans compter l'œuvre de J. Tits, [Ti84] et [Ti82], à donner l'importance aux groupes pseudo-réductifs exotiques qu'ils méritent.

Pour conclure en ce qui touche aux références historiques, nous aimerions rappeler au lecteur que, dans le cadre de Kac-Moody, la communauté mathématique avait déjà étudié à fond les variétés de drapeaux sur  $\mathbb{C}$  typiquement de dimension infinie associées aux algèbres de Kac-Moody  $\mathfrak{g}$ , qui admettent un prolongement naturel en des  $\mathbb{Z}$ -ind-schémas d'après O. Mathieu [Mat88]. Comme produit dérivé des résultats qu'on va présenter, se dégage un dictionnaire arithmétique complet (sauf si  $\mathfrak{g}$  est de type  ${}^2A_{2n}$ ) entre les grassmanniennes affines tordues et les variétés de drapeaux de Kac-Moody affines. Le théorème de normalité des variétés de Schubert retient toutefois son importance, parce que leurs définitions ne se ressemblent guère et qu'on y recourt pour établir la comparaison. Notons aussi que le cadre des grassmanniennes affines permet de déformer ces espaces à la A. A. Beilinson et V. G.

Drinfeld [BD96] en un ind-schéma ind-projectif sur une base bidimensionnelle, contrairement à ce que l'on peut faire dans le cadre de Kac-Moody.

**Groupe torsus sur  $\mathbb{Z}[t]$ .** Soient  $k$  un corps algébriquement clos,  $K = k((t))$  le corps de séries de Laurent à coefficients dans  $k$  et  $G$  un  $K$ -groupe réductif, connexe, quasi-déployé, simplement connexe et absolument presque simple. Fixons un épinglage  $(H, T_H, B_H, X_H)$  au-dessus de  $\mathbb{Z}$  de la  $\mathbb{Z}$ -forme déployée  $H$  de  $G$  et un isomorphisme  $G \otimes_K K^{\text{sép}} \cong H \otimes_K K^{\text{sép}}$  de telle sorte que le groupe de Galois  $\text{Gal}(K^{\text{sép}}/K)$  opère sur le membre de droite par automorphismes qui préservent l'épinglage donné. Comme le groupe  $\text{Aut}(H, T_H, B_H, X_H)$  est isomorphe au groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin de  $H$ , il s'identifie au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_e$  d'indice  $e = 1, 2$  ou  $3$ . Si  $e$  est différent de la caractéristique  $p$  de  $k$ , alors la plus petite extension de  $K$  déployant  $G$  est  $L = k((t^{1/e}))$  (on dit que  $G$  est modérément ramifié) et l'on a un isomorphisme  $G = (R_{L/K}H)^{\text{Gal}(L/K)}$ , où  $R_{L/K}H$  désigne la restriction des scalaires à la Weil de  $H$  sur laquelle  $\text{Gal}(L/K)$  opère de façon galoisienne sur les coefficients et diagrammatique sur  $H$ . Cependant, si  $e = p$ , alors le même type d'énoncé reste valide, mais il faut remplacer l'extension  $k((t^{1/e}))$  de  $k((t))$  par des classes d'isomorphisme en nombre infini de clôtures galoisiennes d'extensions séparables de degré  $e$ . Cette différence arithmétique se manifeste aussi dans la mesure où les groupes  $G$  à ramification modérée et indice de Tits fixé (voir la classification de [Ti66]) qu'on vient de décrire peuvent être rassemblés dans un  $\mathbb{Z}[1/e][t^{\pm 1}]$ -groupe noté aussi  $G$ , en prenant la même définition  $G = (R_{\mathbb{Z}'[1/e][t^{\pm 1/e}]/\mathbb{Z}[1/e][t^{\pm 1}]}H)^{\mathfrak{S}_e}$ , où l'on pose  $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[\zeta_e]$  - le schéma en groupes échéant est lisse, affine et connexe sur la base. La question qui a déclenché ce travail fut la suivante :

**Question 1.1.** *Supposons que  $e \neq 1$ . Y a-t-il un prolongement « canonique » de  $G$  en un schéma en groupes au-dessus de  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  ? Si oui, quel groupe obtient-on en caractéristique  $e$  ?*

La réponse est heureusement toujours affirmative et ce schéma en groupes fut originalement construit par J. Tits, cf. l'appendice de [Ti84], en faisant usage des techniques de recollement du troisième chapitre de [BT84a], pour se ramener à construire une « donnée radicielle schématique »  $(T, U_a)_{a \in \Phi_{\text{nd}}}$  constituée de certains  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -modèles des  $\Gamma$ -invariants des sous-groupes correspondants de  $H$ . Si l'on exclut l'éventualité que l'indice de Tits de  $G$  soit de type  ${}^2A_{2n}$  (c'est-à-dire, si  $G$  n'est pas un groupe unitaire de dimension impaire), ce que l'on fera désormais, il est loisible d'identifier le  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -groupe  $G$  à un sous-schéma en groupes localement fermé de  $R_{\mathbb{Z}'[t^{\pm 1/e}]/\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}H$  (où l'on note  $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[\zeta_e]$ ) compatible aux constructions du paragraphe précédent et dont la construction ne demande que d'appliquer la prop. 2.2.10. de [BT84a]. Il s'ensuit que  $G$  est lisse, quasi-affine et connexe (fibre par fibre) ; néanmoins le caractère affine n'est pas immédiat et il faudra traiter ce problème dans la suite. Quant au groupe algébrique que l'on obtient en caractéristique  $e$ , le lecteur aura peut-être deviné qu'il ne s'agit pas d'un groupe réductif, à cause de la présence d'une extension de corps purement inséparable  $\mathbb{F}_e(t^{1/e})/\mathbb{F}_e(t)$ , et en fait  $G \otimes \mathbb{F}_e(t)$  est un groupe pseudo-réductif exotique basique et pseudo-déployé au sens de [CGP15], comme mentionné plus haut dans le résumé. Ces groupes pseudo-réductifs forment une classe assez exceptionnelle qui a été découverte par J. Tits et la raison d'être de tels groupes, selon les auteurs de [CGP15], est



qu'il y a des diagrammes de Dynkin avec une arête à multiplicité 2 ou 3 ; nous préférons les regarder comme le fruit de la volonté de prendre avec insistance des  $\Gamma$ -invariants galoisiens-diagrammatiques d'un groupe déployé, lorsque cela cesse d'être naïvement possible.

Venons-en à présent aux constructions de type parahorique. Soit  $S$  le plus grand tore déployé de  $G$  contenu dans le Cartan  $T$ . Admettons pour l'instant l'existence d'isomorphismes « canoniques » entre les appartements  $\mathcal{A}(G, S, \mathbb{F}_p((t)))$  pour  $p$  un nombre premier et  $\mathcal{A}(G, S, \mathbb{Q}((t)))$ . Ceci soulève le même type de questions que plus haut :

**Question 1.2.** *Supposons que  $e > 1$  et que l'indice de Tits de  $G$  est différent de  ${}^2A_{2n}$ . Si on se donne une facette  $\mathbf{f} \subseteq \mathcal{A}(G, S, \mathbb{Q}((t)))$ , existe-t-il un  $\mathbb{Z}[t]$ -groupe  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  modelant  $G$  tel que les spécialisés  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes \mathbb{F}_p[[t]]$ , pour un premier  $p$ , et  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes \mathbb{Q}[[t]]$  soient des schémas en groupes parahoriques associés à  $\mathbf{f}$  ?*

Remarquons que ce  $\mathbb{Z}[t]$ -groupe hypothétique  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ , s'il était en outre plat et affine, serait uniquement déterminé par les conditions de l'énoncé, par descente à la A. Beauville et Y. Laszlo [BL95]. Il faut noter que, en dehors de  $\{e = 0\}$ , soit en [PR08], soit en [PZ13], on peut essentiellement trouver une construction de ce schéma en groupes à l'aide des techniques des  $\Gamma$ -invariants, mais lorsqu'on insiste pour travailler avec coefficients entiers, il n'existe pas à notre connaissance une référence dans la littérature où ce schéma en groupes soit construit. Pour construire cet objet, on se propose de trouver une donnée radicielle valuée et puis d'appliquer le théorème sur l'existence de lois birationnelles ; il est possible de regarder  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  comme sous-groupe localement fermé d'un modèle « parahorique »  $R_{\mathbb{Z}'[t^{1/e}]/\mathbb{Z}[t]} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{f}}}$ , où l'on pose  $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[\zeta_e]$ , mais le choix d'une facette  $\tilde{\mathbf{f}}$  n'est pas vraiment canonique.

Ceci étant, précisons le cadre un petit peu plus général dans lequel on va travailler. On se donne un groupe réductif  $G$  sur  $\mathbb{Q}(t)$  déployable sur  $\mathbb{Q}(\zeta_e, t^{1/e})$ ,  $e = 2, 3$ , tel que son dérivé  $G^{\text{dér}}$  soit simplement connexe, absolument presque simple et quasi-déployé à diagramme de Tits fixé différent de  ${}^2A_{2n}$  et dont le tore maximal  $T$  possède une écriture comme produit de tores induits de la forme  $\mathbb{G}_m$  et  $R_{\mathbb{Q}(t^{1/e})/\mathbb{Q}(t)} \mathbb{G}_m$  (ce qui est immédiat dans le cas simplement connexe). Les  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ - resp.  $\mathbb{Z}[t]$ -groupes  $G$  et  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  pour  $\mathbf{f} \subseteq \mathcal{A}(G, S, \mathbb{Q}((t)))$  se construisent de manière analogue et l'on peut résumer les conclusions de la première partie de l'article comme suit :

**Théorème 1.3.** *Le  $\mathbb{Z}[t]$ -groupe  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  est lisse, affine et connexe fibre par fibre. Les schémas en groupes déduits de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  par changement de base  $\mathbb{Z}[t] \rightarrow \mathbb{F}_p[t]$ , où  $p$  est un nombre premier ou 0, sont des modèles parahoriques de leurs fibres génériques, qui sont réductives si  $p \neq e$  et pseudo-réductives si  $p = e$ .*

On dit un mot sur l'énoncé et la preuve. Quand on parle de modèles parahoriques sur un anneau de Dedekind global, on veut dire tout simplement que, au-dessus des anneaux locaux complétés, on obtient des groupes parahoriques au sens de [I]. Vu que l'identification des schémas en groupes est assez élémentaire et qu'ils sont automatiquement quasi-affines, lisses et connexes (fibre par fibre), on s'est ramené à montrer qu'ils sont affines. Malheureusement on ne peut pas suivre l'argument de [PZ13] verbatim, car celui utilise la cohomologie de

groupes et l'interprétation en tant que  $\Gamma$ -invariants. Néanmoins on réussit encore à démontrer l'affinité en deux étapes : premièrement, on ramène le cas général au dérivé  $G^{\text{dér}}$ , en jouant essentiellement avec certains modèles de tores sur  $\mathbb{Z}'[t] := \mathbb{Z}[\zeta_e][t]$  ; si  $G = G^{\text{dér}}$ , on va comparer  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  à son enveloppe affine, i.e. le spectre affine de ses sections globales, qui est un  $\mathbb{Z}[t]$ -groupe affine et lisse contenant  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  comme un ouvert ; on observe que l'enveloppe ne peut pas posséder des composantes connexes supplémentaires dans les fibres, en appliquant le fait que  $\text{Stab}_{G(K)}\mathcal{G}_{\mathbf{f}}(\mathcal{O}) = \mathcal{G}_{\mathbf{f}}(\mathcal{O})$  pour tout hensélisé strict complété  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{F}_p[t]$ ,  $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ .

**La géométrie des grassmanniennes affines tordues.** Soient  $A$  un anneau et  $\mathfrak{G}$  un  $A[[t]]$ -groupe affine et lisse. La grassmannienne affine  $\text{Gr}_{\mathfrak{G}}$  de  $\mathfrak{G}$  est le pré-faisceau sur la catégorie des  $A$ -algèbres  $B$  qui classifie les  $\mathfrak{G}$ -torseurs sur le disque  $B[[t]]$  munis d'une trivialisation sur le disque épointé  $B((t))$ . On dispose aussi des groupes d'arcs  $L^+\mathfrak{G}$  et de lacets  $L\mathfrak{G}$  donnés par  $R \mapsto \mathfrak{G}(R[[t]])$ , resp.  $R \mapsto \mathfrak{G}(R((t)))$ , tels que le faisceau quotient  $L\mathfrak{G}/L^+\mathfrak{G}$  dans la topologie étale soit isomorphe à  $\text{Gr}_{\mathfrak{G}}$ . On s'intéresse surtout au cas où  $A = \mathbb{Z}$  et  $\mathfrak{G} = \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  en reprenant les notations de la partie précédente concernant les groupes tordus.

**Proposition 1.4.** *La grassmannienne affine  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$  est représentable par un ind-schéma ind-projectif sur  $\mathbb{Z}$ . Le morphisme canonique  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}}} \rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$  est représentable par une immersion fermée par laquelle le membre de gauche s'identifie au réduit de la composante neutre du membre de droite.*

La démonstration de la proposition fait usage des variétés de Schubert : soient  $N$ , resp.  $\mathcal{N}_{\mathbf{f}}$  le normalisateur de  $S$  dans  $G$ , resp.  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ ,  $n$  un élément de  $N(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$  et considérons l'image fermée  $S_{w_{\mathbf{f}}}$  de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$ ,  $g \mapsto gn$ , qui ne dépend que de l'image  $w_{\mathbf{f}}$  de  $n$  dans l'ensemble de doubles classes  $W_{\mathbf{f}} \backslash \widetilde{W}/W_{\mathbf{f}} \cong \mathcal{N}_{\mathbf{f}}(\mathbb{Z}[t]) \backslash N(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])/\mathcal{N}_{\mathbf{f}}(\mathbb{Z}[t])$ , où  $\widetilde{W}$  désigne le groupe d'Iwahori-Weyl de n'importe quelle fibre de  $G$  et  $W_{\mathbf{f}}$  le stabilisateur de  $\mathbf{f}$  dans le groupe de Weyl affine  $W_a$ . Pour voir que la variété de Schubert  $S_{w_{\mathbf{f}}}$  est projective, on se ramène au cas où  $\mathbf{f}$  est une facette, l'on fixe une décomposition réduite  $\mathbf{w} = [s_{i_1}, \dots, s_{i_n}]$  de  $w$  en des réflexions  $s_i$  par rapport aux cloisons  $\mathbf{f}_i$  de  $\mathbf{a}$  et l'on montre notamment que la variété de Demazure  $D_{\mathbf{w}} = L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}_{i_1}} \times^{L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}} \dots \times^{L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}} L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}_{i_n}}/L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$  est représentable par un  $\mathbb{Z}$ -schéma lisse et projectif, tel que le morphisme produit vers la grassmannienne se factorise en une application birationnelle et surjective  $D_{\mathbf{w}} \rightarrow S_w$ . Cela résulte de la construction de Levis « naturels » de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ , ce qui était implicite dans [PR08] et sera utilisé pour montrer que nos variétés de Demazure coïncident avec les variétés éponymes dans le cadre de Kac-Moody.

**Théorème 1.5.** *Les variétés de Schubert  $S_{w_{\mathbf{f}}}$  sont normales et leurs fibres  $S_{w_{\mathbf{f}},p}$ ,  $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$  sont géométriquement normales, Cohen-Macaulay et, dès que  $p \in \mathbb{P}$ , à frobenii compatiblement scindables. D'ailleurs, si  $G = G^{\text{dér}}$  et  $\mathbf{f}$  est une alcôve, alors elles s'identifient aux variétés éponymes dans le cadre de Kac-Moody.*

La démonstration du théorème ci-dessus est la même de G. Faltings [Fa03] lorsque  $G$  est déployé ou de G. Pappas et M. Rapoport [PR08] lorsque  $e$  est une unité. En se ramenant facilement au cas de niveau iwahorique, on utilise des propriétés géométriques des variétés de Demazure, comme par exemple la scindage des frobenii compatiblement aux immersions

fermées  $D_{\mathfrak{u}} \rightarrow D_{\mathfrak{w}}$ ,  $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{w}$ , pour en déduire que les normalisées  $\tilde{S}_w$  sont géométriquement normales et forment un ind-schéma, sur lequel les parahoriques simples  $L^+\mathcal{G}_{\mathfrak{f}_i}$  opèrent. On se sert de cette opération pour obtenir l'isomorphisme  $\tilde{S}_w \rightarrow S_w$ , en le sachant au-dessus de  $\mathbb{Q}$ . Comme on a défini les groupes dans le cas minimal, on peut même construire à la suite de [Fa03] les fibrés en droites qui engendrent le groupe de Picard de  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}}$ , ce qui n'avait jamais été réalisé dans la littérature pour les groupes tordus, même si l'on se borne au cas de ramification modérée. En ce qui concerne la comparaison des variétés de Schubert, on fait usage de la comparaison des résolutions de Demazure et des théorèmes de normalité dans chacun des deux cadres pour se ramener à des raisonnements topologiques. Nous voudrions aussi signaler que l'hypothèse  $G^{\mathrm{dér}} = G^{\mathrm{sc}}$  sur le  $\mathbb{Q}(t)$ -groupe  $G$  de la section précédente est impérative, si l'on veut éviter des complications comme en [III].

Le lecteur cynique pourrait objecter à ce stade, nonobstant l'énorme travail géométrique que l'on a eu besoin de faire en avance, que les grassmanniennes affines ici construites ne sont alors que des objets bien connus depuis trente ans. En réponse à cela, nous objecterions que la déformation de Beilinson-Drinfeld, nous ne l'avons pas ! Par là, on entend le pré-faisceau  $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{G}, B/A}$  associé à des anneaux  $A \rightarrow B$  et à un  $B$ -groupe affine  $\mathfrak{G}$ , qui fait correspondre à toute  $B$ -algèbre  $C$  les classes d'isomorphisme de  $G$ -torseurs sur  $B \otimes_A C$  munis d'une trivialisations en dehors du graphe  $B \otimes_A C \rightarrow C$ . On a aussi des groupes de lacets  $\mathcal{L}\mathfrak{G}$  et d'arcs  $\mathcal{L}^+\mathfrak{G}$  opérant sur  $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{G}, B/A}$  et dont le quotient pour la topologie étale  $\mathcal{L}\mathfrak{G}/\mathcal{L}^+\mathfrak{G} = \mathrm{Gr}_{\mathfrak{G}, B/A}$  s'identifie à la grassmannienne affine. Dans le cas ici considéré, l'on a  $A = \mathbb{Z}$ ,  $B = \mathbb{Z}[t]$  et  $\mathfrak{G} = \mathcal{G}_{\mathfrak{f}}$  et l'on en tire :

**Proposition 1.6.** *La grassmannienne affine globale  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z}[t]/\mathbb{Z}}$  est représentable par un ind-schéma ind-projectif sur  $\mathbb{Z}[t]$ .*

L'ind-représentabilité de ce pré-faisceau par un ind-schéma ind-quasi-projectif résulte de l'existence d'une représentation fidèle à quotient quasi-affine pour tout schéma en groupes sur un anneau régulier et excellent de dimension 2 - ceci est dû à [PZ13], cor. 10.7, en adaptant légèrement une idée de R. W. Thomason [Tho87]. En vertu de l'étude des changements de base de  $\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}$ , on parvient à la conclusion que toutes les fibres sont ind-projectives, ce qui a déjà surpris les experts, voir [Ri19]. Si l'on considère l'ind-schéma  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}}$  déduit de  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}}$  par changement de base  $\mathbb{Z}[t] \rightarrow \mathbb{Z}'[t^{1/e}]$ , il devient isomorphe à la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_H$  au-dessus de  $\mathbb{Z}'[1/e][t^{\pm 1/e}]$  et on peut donc contempler les adhérences schématiques  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  des variétés de Schubert  $\mathrm{Gr}_H^{\leq \{\mu\}}$  usuelles, qui seront encore appelées variétés de Schubert globales. Un argument formel montre qu'elles sont projectives et intègres et la proposition découle finalement du fait qu'elles forment un recouvrement topologique fermé, lequel à son tour se ramène à des calculs explicites avec l'ind-schéma ind-fini  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{T}, \mathbb{Z}[t]/\mathbb{Z}}$ . Encore mieux, l'on a une description géométrique de ces variétés de Schubert globales.

**Théorème 1.7.** *Les variétés de Schubert globales  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  sont normales et plates sur  $\mathbb{Z}'[t^{1/e}]$  à fibres géométriquement réduites et égales à la réunion des variétés de Schubert déterminées par l'ensemble admissible.*

L'ensemble admissible, pour la définition classique duquel le lecteur est renvoyé à [PRS13], doit être entendu ici en caractéristique  $e$  comme déduit des autres caractéristiques à l'aide des identifications entre les groupes d'Iwahori-Weyl  $\widetilde{W}$  en caractéristiques différentes (et leurs doubles classes suivant  $W_{\mathbf{f}}$ ) et il faut s'attendre aussi à ce que le niveau au-dessus de  $\{t \neq 0\}$  soit spécial correspondant à l'origine, tandis qu'en  $t = 0$  le niveau corresponde à  $\mathbf{f}$ .

Faisons aussi quelques commentaires relativement à la démonstration du théorème, dont l'affirmation reste nouvelle même lorsque  $e$  est inversible. Le problème le plus sérieux est qu'on ne sait plus si  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  est plat sur la base, contrairement à ce qui se passe sur les anneaux de dimension 1, auquel cas l'assertion résulterait du théorème de cohérence de X. Zhu [Zh14], qui s'étend à la mauvaise caractéristique par l'argument du cor. 4.4 de [Zh14]. Toutefois cette assertion faible entraîne que l'espace topologique est le bon, donc le complément du lieu de platitude de  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  a codimension 2, ce qui entraîne que son normalisé est plat sur  $\mathbb{Z}'[t^{1/e}]$ . D'après l'affirmation faible appliquée encore une fois, il s'ensuit que le morphisme de normalisation est une immersion fermée au-dessus des fibres ; il ne reste plus qu'à appliquer le lemme de Nakayama.

Enfin venons-en aux applications à la théorie des modèles locaux. Ceux-ci doivent évidemment être étroitement liés aux modèles entiers de variétés de Shimura, mais dans cet article on s'en occupera dans un cadre idéalisé/conjecturé dans la théorie des groupes surtout par G. Pappas et M. Rapoport pendant les dernières décennies, cf. [PRS13] et [HPR18], et plus récemment par P. Scholze, cf. [SW20]. Ce dernier a réussi à donner une très belle caractérisation des modèles locaux sans hypothèses supplémentaires, à l'aide de ses méthodes perfectoides : il considère une grassmannienne affine  $p$ -adique associée à un  $\mathbb{Z}_p$ -groupe parahorique  $\mathcal{G}$  et définie en termes d'anneaux de périodes  $p$ -adiques relatifs tels que  $B_{\mathrm{dR}}^+$  ; ensuite il se demande si la partie dont les points géométriques sont « bornés par  $\{\mu\}$  » est représentable par un schéma normal et plat sur  $\mathcal{O}_E$ , où  $\{\mu\}$  désigne une classe de conjugaison de cocaractères géométriques de  $\mathbf{G}$  et  $\mathcal{O}_E$  l'anneau d'entiers de son corps de définition  $E$ . Voici une confirmation partielle de cette conjecture, dont certains cas particuliers avaient été déjà traités en [HPR18], cf. th. 2.14 et cor. 2.16. :

**Proposition 1.8.** *La conj. 21.4.1. de [SW20] vaut pour tous les couples  $(\mathcal{G}, \{\mu\})$  de type abélien si le nombre premier  $p$  est impair. Si  $p = 2$ , elle reste encore vraie, si l'on suppose que les  $\mathbb{Q}_2$ -facteurs presque simples de  $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}$  sont de la forme  $R_{F/\mathbb{Q}_2} \mathbf{G}_1$ , où  $\mathbf{G}_1$  est absolument presque simple, se déploie sur une extension  $\tilde{F}/F$  quadratique uniformisée et n'est pas unitaire de dimension impaire.*

Ici on dit qu'un couple  $(\mathcal{G}, \{\mu\})$  est de type abélien si, quitte à remplacer  $\mathbf{G}$  par un zig-zag d'extensions centrales, on peut assurer l'existence d'une représentation fidèle  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}_n$  telle que  $\{\rho \circ \mu\} = \{(1^{(d)}, 0^{(n-d)})\}$ . Une extension  $L/K$  de corps discrètement valués est appelée cyclique uniformisée si  $L = K(\varpi^{1/e})$  pour une certaine uniformisante  $\varpi$  de  $K$ . Malheureusement, on n'a aucune idée de comment établir la conjecture dans les cas exceptionnels.

**Leitfaden.** L'article est organisé à peu près comme l'introduction. Au numéro 2 il s'agit de construire les  $\mathbb{Z}[t]$ -groupes parahoriques tordus qui sont la base de tout ce travail. Le numéro 3 concerne la géométrie des grassmanniennes affines tordues entières associées à ces schémas en groupes et maintenant on va détailler le contenu de chaque section.

Les 2.1-2.3 expliquent quelques notions préparatoires concernant automorphismes de groupes épinglés, systèmes de Chevalley-Steinberg et une procédure d'élargissement central nécessaires pour construire et pour étudier  $\mathcal{G}_f$ . Aux 2.4-2.6, on construit les  $\mathbb{Z}[t]$ -groupes parahoriques  $\mathcal{G}_f$  à l'aide des données radicielles valuées et l'on décrit leurs spécialisés. L'affinité de ces schémas en groupes est établie au 2.7.

Dans le numéro 3, on commence au 3.1 par présenter les définitions et propriétés basiques des grassmanniennes affines. Les 3.2 et 3.3 montrent certains résultats structuraux sur les groupes d'arcs  $L^+\mathcal{G}_f$ , qui sont exploités aux paragraphes 3.4-3.8 pour étudier le  $\mathbb{Z}$ -ind-schéma  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_f}$  et montrer notamment que leurs variétés de Schubert sont normales et qu'elles s'identifient aux variétés éponymes correspondantes dans le cadre de Kac-Moody. À partir du 3.9 on se penche sur la déformation globale de Beilinson-Drinfeld et l'on montre le théorème sur la géométrie des variétés de Schubert dans ce cadre au 3.10. Enfin on décrit les applications à la théorie des modèles locaux de variétés de Shimura au 3.11.

**Remerciements.** Premièrement, il faut évidemment que je remercie mon directeur de thèse P. Scholze, qui m'a suggéré d'étudier les modèles locaux des variétés de Shimura et m'a aidé constamment avec des conseils précieux. Ensuite je tiens à remercier vivement T. Richarz, qui a toujours montré un grand intérêt pour mon travail et partagé très généreusement ses idées mathématiques avec moi. C'est avec grand plaisir que je remercie J. Anschütz, B. Conrad, P. Gille, T. J. Haines, G. Pappas, M. Rapoport, M. Santos et X. Zhu pour des discussions fructueuses autour de ce sujet et/ou des commentaires pertinents sur le texte. De plus, je tiens à remercier A.-C. le Bras, qui a corrigé plusieurs fautes de français.

**Notations et conventions.** Tous les anneaux considérés seront unitaires et commutatifs. La lettre  $e$  désignera le nombre premier 2 ou 3 correspondant à la multiplicité de l'arête du diagramme de Dynkin dont il s'agit dans chaque cas. Sauf mention contraire, on note  $R'$  l'anneau  $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_e]$  pour le choix de  $e$  fixé, où  $\zeta_e = \exp(\frac{2\pi i}{e})$ , ce qui sera utilisé surtout pour  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$ . Le foncteur de restriction des scalaires le long d'une extension plate et finie  $A \rightarrow B$  d'anneaux sera noté  $R_{B/A}$ . On dit qu'un  $A$ -groupe  $\mathfrak{G}$  est connexe si toutes ses fibres sont connexes. L'extension  $\mathbb{Z}[t] \rightarrow \mathbb{Z}'[t]$  de l'introduction sera notée plutôt  $\mathbb{Z}[u] \rightarrow \mathbb{Z}'[v]$  en remplaçant  $t$  par  $u$  et  $t^{1/e}$  par  $v = u^{1/e}$  comme dans [PZ13]. Les schémas en groupes parahoriques sur  $\mathbb{Z}[u]$  seront notés  $\mathcal{G}_f$  et si l'on se veut référer au cas simplement connexe, on ajoutera le mot abrégé dér sous la forme d'exposant. Les schémas en groupes déduits de ceux-ci en prenant les changement de base  $\mathbb{Z}[u] \rightarrow \mathbb{F}_p[u]$  seront notés  $\mathcal{G}_{f,p}$ , où  $p$  décrit l'ensemble  $\mathbb{P} \cup \{0\}$  et l'on pose  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ . Dans le présent article, on ne s'occupera que des formes tordues quasi-déployées, dont le groupe dérivé est simplement connexe. Sauf mention contraire, les immeubles ici considérés sont les réduits et non les élargis. Tous les ind-schémas sont stricts.

## 2. FAMILLES ENTIÈRES DE GROUPES PARAHORIQUES

Dans cette partie, on construit les schémas en groupes « parahoriques »  $\mathcal{G}_f$  au-dessus de  $\mathbb{Z}[t]$  et l'on étudie leurs propriétés.

2.1. Donnons-nous un schéma en groupes de Chevalley  $H$  sur  $\mathbb{Z}$  muni d'un épinglage, c'est-à-dire de la donnée d'un couple de Killing  $T_H \subseteq B_H \subseteq H$  constitué par un tore maximal et un Borel, une base  $\Delta$  du système de racines  $\Phi$  de  $H$  suivant  $T_H$  et des isomorphismes  $x_a : \mathbb{G}_a \rightarrow U_a$  pour toute racine simple  $a \in \Delta$ . On dit qu'une famille d'isomorphismes  $x_a : \mathbb{G}_a \rightarrow U_a$  pour toute racine  $a \in \Phi$  forme un système de Chevalley relatif au schéma en groupes épinglé  $H$  (comparer avec les 3.2.1. et 3.2.2. [BT84a]), si sa restriction à  $\Delta$  redonne les isomorphismes de l'épinglage, si l'élément  $m_a = x_a(1)x_{-a}(1)x_a(1)$  normalise  $T_H$  et enfin si  $m_ax_b(t)m_a^{-1} = x_{s_a(b)}(\pm t)$ , pour un certain signe, où  $a, b \in \Phi$  et  $s_a$  désigne la réflexion dans le groupe de Weyl  $W(\Phi)$  par rapport à  $a$  (il faut noter qu'il n'est pas possible en général de se débarrasser de ces signes). Alors, la prop. 6.2 de l'exp. XXIII de [SGA3] affirme qu'il existe toujours un système de Chevalley pour un tel groupe épinglé  $H$ . Ce choix de prolongement de l'épinglage en un système de Chevalley n'est néanmoins pas unique, parce qu'on se permet toujours de remplacer  $x_a$  et  $x_{-a}$  par leurs inverses, pour  $a \in \Phi \setminus \pm\Delta$ .

Considérons maintenant le groupe  $\Xi$  d'automorphismes de la donnée radicielle épinglée correspondante à  $\Delta \subseteq \Phi \subseteq X^*(T_H)$  et identifions-le au groupe des automorphismes de  $H$  fixant l'épinglage donné. Un système de Chevalley comme ci-dessus s'appelle de Chevalley-Steinberg si, pour tout automorphisme  $\sigma \in \Xi$ , l'on a  $\sigma(x_a(t)) = x_{\sigma(a)}(\epsilon_\sigma t)$  où  $\epsilon_\sigma = \pm 1$  et il est même égal à 1, lorsque  $a$  n'admet aucune écriture comme la somme de deux racines conjuguées par l'opération de  $\Xi$ , ce qui est toujours vrai dès que  $H$  ne contient aucun facteur du type  $A_{2n}$ . Ce sont justement ces signes méchants, qui n'apparaissent que dans le cas de  $SL_{2n+1}$ , qui nous forceront à exclure leurs formes tordues, c'est-à-dire, les groupes unitaires de dimension impaire.

L'existence et l'unicité d'un tel système de Chevalley-Steinberg, quitte à inverser les  $x_a$ , remonte essentiellement à l'œuvre [St59] de R. Steinberg, cf. lem. 3.2 qui traite tout simplement les involutions extérieures dans le cas où  $H$  est simple et voir le §4 de [Lan96] pour une démonstration complète. On fait observer encore que la définition d'un système de Chevalley-Steinberg au 4.1.3. de [BT84a] et, par conséquent, de [Lan96] ne semble pas être égale à la notre, mais cette apparence trompeuse se résoudra d'elle-même au paragraphe suivant.

2.2. Soient  $A$  un anneau noethérien et  $B$  une extension galoisienne finie de  $A$  à groupe d'automorphismes  $\Gamma$ . Étant donné un homomorphisme de groupes  $\tau : \Gamma \rightarrow \Xi$ , on arrive à une  $A$ -forme quasi-déployée  $G$  de  $H$  se déployant sur  $B$ , en tordant  $H$  par le 1-cocycle  $\gamma \mapsto \tau(\gamma)$ . Plus explicitement, considérons la restriction des scalaires  $R_{B/A}H$  muni de la opération de  $\Gamma$  qui fait correspondre à  $\gamma$  l'automorphisme  $\tau(\gamma) \otimes \gamma$ ; si l'on pose alors  $G = (R_{B/A}H)^\Gamma$ , on obtient la  $A$ -forme quasi-déployée cherchée de  $H$ .



Comme dans [BT84a], on rebaptise le système de racines de  $H$  en posant un tilde sur chaque lettre qui lui est attachée, alors  $\tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{a}$ , etc. La vieille notation est maintenant réservée aux notions concernant le système de racines de  $\Phi(G, S)$  du  $A$ -groupe réductif quasi-déployé  $G$  par rapport au plus grand sous-tore déployé  $S$  de  $T = (R_{B/A}T_H)^\Gamma$ . On peut décrire les racines  $a$  de  $\Phi$  comme étant la restriction des racines  $\tilde{a} \in X^*(T_H)$  à  $X^*(S)$  et on sait que ces relèvements  $\tilde{a}$  de  $a$  forment une orbite pour l'opération de  $\Xi$ , cf. [BoT65] pour le cas des corps et [SGA3], exp. XXIV pour une base arbitraire.

À l'aide d'un système de Chevalley-Steinberg sur  $H$  et en supposant que  $a$  ne soit ni divisible ni multipliable, on obtient des isomorphismes  $x_a : R_{B_a/A}\mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U_a$ ,  $r \mapsto \prod_{\gamma\tilde{a} \in \Gamma\tilde{a}} x_{\gamma\tilde{a}}(\gamma r)$ , où  $B_a$  désigne l'algèbre fixe du stabilisateur de  $\tilde{a}$ . La notation est un petit peu malheureuse, vu que  $x_a$  dépend non seulement de  $a$ , mais aussi de  $\tilde{a}$ , le choix d'un autre relèvement correspondant à conjuguer l'isomorphisme ci-dessus. De tels isomorphismes qui se distinguent entre eux par conjugaison et/ou réciprocity seront dits semblables et le lecteur constatera que cette différence est si insignifiante que la décision d'alléger la notation en supprimant cette dépendance est entièrement justifiée. Cela fournit aussi des homomorphismes  $R_{B_a/A}\mathrm{SL}_2 \rightarrow G$  prolongeant les isomorphismes ci-dessus par restriction à leurs sous-groupes unipotents canoniques. On pose  $m_a = x_a(1)x_{-a}(1)x_a(1)$  et observe que cet élément induit la réflexion par rapport à la racine  $a$  dans le groupe de Weyl de  $G$ . En effet, on voit que  $m_a = \prod_{\gamma\tilde{a} \in \Gamma\tilde{a}} m_{\gamma\tilde{a}}$ , qui ne dépend pas de  $\tilde{a}$ , et alors  $\mathrm{int}(m_a) \circ x_b$  est même semblable à  $x_{r_a(b)}$  pour tout couple de racines ni divisibles ni multipliables.

2.3. Dans cet article, on travaillera souvent en même temps avec une classe de groupes tordus à groupe dérivé donné et l'une des tâches les plus courantes consistera à ramener le cas général au dérivé. Pour cette raison, nous décrivons maintenant une manière très sympathique inspirée du 1.4 de [CGP15] de construire un  $\mathbb{Z}$ -groupe déployé  $H$  à partir de ceux qui s'avéreront son dérivé  $H^{\mathrm{dér}}$ , son tore maximal  $T$  et d'une opération convenable de  $T$  sur  $H^{\mathrm{dér}}$ .

Soit  $T$  un  $\mathbb{Z}$ -tore déployé muni des morphismes  $T^{\mathrm{dér}} \rightarrow T \rightarrow T^{\mathrm{ad}}$ , dont le composé est l'application naturelle. Comme le  $\mathbb{Z}$ -groupe des automorphismes de  $H^{\mathrm{dér}}$  qui fixent  $T^{\mathrm{dér}}$  est canoniquement isomorphe à  $T^{\mathrm{ad}}$ , cette donnée équivaut à se donner une opération de  $T$  sur  $H^{\mathrm{dér}}$  ainsi qu'un morphisme équivariant  $T^{\mathrm{dér}} \rightarrow T$ . En particulier, l'application  $T^{\mathrm{dér}} \rightarrow H^{\mathrm{dér}} \rtimes T$ ,  $t \mapsto (t^{-1}, t)$  identifie  $T^{\mathrm{dér}}$  à un sous-schéma en groupes fermé central de  $H^{\mathrm{dér}} \rtimes T$  et, par suite, l'on a un faisceau en groupes quotient  $H := (H^{\mathrm{dér}} \rtimes T)/T^{\mathrm{dér}}$  représentable par un schéma d'après le §4 de [Ana73]. Il est clair que  $H$  est un  $\mathbb{Z}$ -groupe déployé, que  $T$  s'identifie canoniquement à son tore maximal et  $H^{\mathrm{dér}}$  à son dérivé. Réciproquement, tous les groupes  $\mathbb{Z}$ -déployés épinglés  $H$  à dérivé isomorphe à  $H^{\mathrm{dér}}$  prennent justement la forme qu'on vient de décrire. L'un des exemples les plus intéressants de ces données en théorie de groupes algébriques est le concept d'une  $z$ -extension, c'est-à-dire, si  $H^{\mathrm{dér}} = H^{\mathrm{sc}}$  et  $T \rightarrow T^{\mathrm{ad}}$  est un épimorphisme dont le noyau  $N$  est un tore.

Si on veut considérer les formes tordues quasi-déployées, il faudra relever la loi d'opération de  $\Gamma$  sur  $H^{\mathrm{dér}}$  à  $H$  en tant que automorphismes de groupes épinglés. On va supposer qu'un

tel relèvement existe (qui n'est pas unique, puisque le groupe d'automorphismes extérieures de  $H$  est typiquement infini) et on va le fixer une fois pour toutes. En termes des coproduits avec  $T$ , cela s'exprime en disant que les flèches  $T^{\text{dér}} \rightarrow T \rightarrow T^{\text{ad}}$  sont équivariantes pour les opérations de  $\Gamma$ . Évidemment lorsqu'on trouve une extension d'anneaux galoisienne à groupe  $\Gamma$  comme au 2.2, on obtient une présentation de  $G$  du type  $G = (G^{\text{dér}} \rtimes T)/T^{\text{dér}}$ . Si  $H^{\text{dér}} = H^{\text{sc}}$  est simplement connexe et presque simple, il existe toujours une extension centrale  $\Gamma = \mathfrak{S}_e$ -équivariante  $H := T^{\text{ad}} \rtimes H^{\text{sc}}$  de  $H^{\text{ad}}$  à dérivé simplement connexe telle que le noyau  $N \cong T^{\text{sc}}$  et le tore maximal  $T$  soient induits à facteurs indécomposables de rang 1 ou  $e$ .

2.4. Dans ce paragraphe on discute le concept de données radicielles schématiques dû à F. Bruhat et J. Tits, cf. la déf. 3.1.1. de [BT84a], dont la seule différence avec celle qui suit, est qu'on ne demande pas explicitement que l'application  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$  soit une immersion fermée, puisque cela est automatique,  $\mathcal{Z}$  étant affine (voir le cor. 2.5. et le th. 6.8. de l'exposé IX de [SGA3]).

**Définition 2.1** (F. Bruhat et J. Tits). Soient  $A$  un anneau noethérien, intègre et normal,  $K$  son corps de fractions,  $G$  un  $K$ -groupe réductif connexe et  $S$  un sous-tore déployé maximal. Une donnée radicielle dans  $G$  par rapport à  $S$  au-dessus de  $A$  est la donnée de  $A$ -modèles en groupes lisses, affines et connexes  $\mathcal{Z}$  resp.  $\mathcal{U}_a$  de  $Z = Z_G(S)$  resp. du sous-groupe radiciel  $U_a$  attaché à la racine non divisible  $a \in \Phi_{\text{nd}}$  tels que :

- (DRS 0) l'injection de  $S$  dans  $Z$  se prolonge en un morphisme  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$ , où  $\mathcal{S}$  désigne le seul groupe diagonalisable à isomorphisme unique près modelant  $S$ .
- (DRS 1) l'application conjugaison  $Z \times U_a \rightarrow U_a$  se prolonge en une application  $\mathcal{Z} \times \mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{U}_a$ .
- (DRS 2) si  $b \neq -a$ , l'application commutateur  $U_a \times U_b \rightarrow \prod_{c=pa+qb \in \Phi_{\text{nd}}, (p,q) \in \mathbb{Q}_{>0}^2} U_c$  se prolonge en un morphisme  $\mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_b \rightarrow \prod_{c=pa+qb \in \Phi_{\text{nd}}, (p,q) \in \mathbb{Q}_{>0}^2} \mathcal{U}_c$ .
- (DRS 3) si on note  $W_a$  l'ouvert  $U_a \times U_{-a} \cap U_{-a} \times Z \times U_a$  dans  $U_a \times U_{-a}$ , alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{W}_a$  de  $\mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{-a}$  contenant la section unité et modelant  $W_a$  tel que l'inclusion  $W_a \rightarrow U_{-a} \times Z \times U_a$  se prolonge en une application  $\mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{U}_{-a} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}_a$ .

Le lecteur aura déjà compris que le but de cette définition est de construire par « recollement fermé » de  $\mathcal{Z}$  et des  $\mathcal{U}_a$ ,  $a \in \Phi_{\text{nd}}$ , un certain schéma en groupes  $\mathcal{G}$  au-dessus de  $A$  avec de bonnes propriétés. Le §3 de [BT84a] traite de prouver un tel résultat à l'aide de représentations linéaires entières et fidèles et ne marche que dans le cas régulier en dimension au plus 2, cf. 3.9.4. de [BT84a]. Cependant, comme les auteurs eux-mêmes l'avaient remarqué au 3.1.7. de [BT84a], la méthode de preuve indiquée pour le problème en question consisterait à appliquer la théorie des lois birationnelles du [SGA3], exp. XVIII, mais l'énoncé du th. 3.7 ne fournit que des solutions en espaces algébriques et non pas en schémas. Entre-temps ce résultat a été descendu à la catégorie des schémas par S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, voir le th. 6.6.1. de [BLR] et on utilisera ces deux références pour démontrer l'énoncé qui va suivre. Quoiqu'il soit sûrement bien connu des experts, nous n'avons pas réussi à le trouver dans la littérature que dans le cas des anneaux de valuation discrète,



cf. [Lan96], §5 et §6, dont la preuve est exagérément compliquée en empruntant des idées cruciales de la démonstration de [BT84a] qui deviennent superflues lorsqu'on travaille avec les lois birationnelles.

**Théorème 2.2** (F. Bruhat et J. Tits, à peu près). *Reprenons les notations de la définition précédente. Alors il existe un seul  $A$ -groupe quasi-affine, lisse et connexe  $\mathcal{G}$  modelant  $G$  tel que :*

- (1) *les inclusions  $Z \rightarrow G$  et  $U_a \rightarrow G$  pour tout  $a \in \Phi_{\text{nd}}$  se prolongent en des isomorphismes de  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{U}_a$  sur des sous- $A$ -groupes fermés de  $\mathcal{G}$ .*
- (2) *pour tout système de racines positives  $\Phi^+$  et tout ordre mis sur  $\Phi^+$ , le morphisme  $\prod_{a \in \Phi_{\text{nd}}^+} \mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{G}$  soit un isomorphisme sur un sous- $A$ -groupe fermé  $\mathcal{U}^+$  de  $\mathcal{G}$ .*
- (3) *l'application produit  $\mathcal{U}^- \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  définisse un ouvert du membre de droite.*

*Démonstration.* Lorsqu'on se donne un ordre grignotant sur  $\Phi^+$ , cf. 3.1.2. de [BT84a], alors le 3.3. de [BT84a] fournit une loi de groupe dans le produit  $\mathcal{U}^+ = \prod_{a \in \Phi_{\text{nd}}^+} \mathcal{U}_a$ , en argumentant par récurrence sur la longueur des parties positivement closes  $\Psi$  de  $\Phi_{\text{nd}}^+$  et en appliquant la règle (DRS 2). Comme les groupes trouvés sont toujours lisses et connexes, le fait que  $\mathcal{U}^+$  s'écrit comme produit de ses sous-groupes fermés  $\mathcal{U}_a$  rangés dans un ordre quelconque résulte du théorème principal de Zariski et de la même indépendance de l'ordre au-dessus des corps, ce qui est déjà classique. Notons également que  $\mathcal{Z}$  opère sur  $\mathcal{U}$  canoniquement d'après la règle (DRS 1).

Pour construire  $\mathcal{G}$  satisfaisant à la troisième propriété, il suffit de construire une loi birationnelle sur  $\mathcal{C}_{\Phi^+} := \mathcal{U}^- \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}^+$  pour un choix quelconque  $\Phi^+$  de racines positives, grâce au th. 6.6.1 de [BLR]. En effet, on n'a pas besoin de remplacer la grosse cellule par un ouvert schématiquement dense relativement à  $A$  d'après l'argument du dernier paragraphe de 5.1 de [BLR]. Il reste à définir une application birationnelle  $\mathcal{C}_{\Phi^+} \dashrightarrow \mathcal{C}_{\Phi^-}$  prolongeant l'identité de  $G$  dans la fibre générique, car cela permettrait de définir des applications rationnelles de produit et d'inversion dans  $\mathcal{C}_{\Phi^+}$ , en commutant tous les facteurs et en multipliant ou inversant lorsqu'il le faut. Montrons plus généralement la même assertion pour chaque paire de systèmes de racines positives  $\Phi^+$  et  $\Phi_1^+$  par récurrence sur le cardinal de  $\Phi_{\text{nd}}^+ \cap \Phi_{1,\text{nd}}^-$ . Si cette intersection contient justement la racine non divisible  $a$ , alors l'axiome (DRS 3) en fournit un morphisme rationnel

$$\mathcal{C}_{\Phi^+} = \mathcal{U}_{\Phi_{\text{nd}}^- \setminus \{-a\}} \times \mathcal{U}_{-a} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{\Phi_{\text{nd}}^+ \setminus \{a\}} \dashrightarrow \mathcal{U}_{\Phi_{\text{nd}}^- \setminus \{-a\}} \times \mathcal{U}_a \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}_{-a} \times \mathcal{U}_{\Phi_{\text{nd}}^+ \setminus \{a\}} = \mathcal{C}_{\Phi_1^+}.$$

Ceci montre aussi que le groupe obtenu est indépendant du système de racines positives  $\Phi^+$  choisi.

Maintenant on dispose d'un  $A$ -groupe lisse, séparé et connexe  $\mathcal{G}$  (donc quasi-affine grâce au cor. VII.2.2. de [Ray70]) qui modèle  $G$  et contient les différents  $\mathcal{C}_{\Phi^+}$  en tant qu'ouverts, et il faut encore voir que les sous-groupes localement fermés  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{U}^+$  sont effectivement fermés. Or l'image réciproque de  $\mathcal{Z}\mathcal{U}^+ := \mathcal{Z} \times \mathcal{U}^+$  par le revêtement fidèlement plat  $\mathcal{C}^- \times \mathcal{C}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  est déterminée par la condition fermée  $b_1 b_2 = 1$ , où  $(a_1, b_1, b_2, a_2) \in \mathcal{Z}\mathcal{U}^+ \times (\mathcal{U}^-)^2 \times \mathcal{Z}\mathcal{U}^+$ , ce qui achève la vérification de l'affirmation par descente fidèlement plate.  $\square$

En principe on voudrait que le groupe  $\mathcal{G}$  soit affine, mais cela ne découle ni de la construction avec des lois birationnelles ni de celle de [BT84a] : le VII.3 de [Ray70] fournit un exemple d'un groupe quasi-affine, lisse et connexe qui n'est pas affine ; remarquons néanmoins que, par contre, celui du 3.2.15. de [BT84a] s'avère affine. Toutefois l'on a :

**Proposition 2.3** (M. Raynaud, à peu près). *Soient  $A$  un anneau noethérien et régulier de dimension inférieure ou égale à 2 et  $\mathcal{G}$  un  $A$ -groupe lisse, connexe et quasi-affine. Alors la  $A$ -algèbre  $\Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$  est munie d'une structure canonique de  $A$ -algèbre de Hopf plate de type fini. De plus, le  $A$ -groupe résultant  $\mathcal{G}^{\text{af}} := \text{Spec } \Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$  est lisse, affine et sa composante neutre s'identifie à  $\mathcal{G}$  par l'application naturelle.*

*Démonstration.* M. Raynaud avait montré en [Ray70], prop. VII.3.1., que, lorsqu'on se trouve dans les circonstances énoncées,  $\Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$  était plate sur  $A$  et, par suite, que  $\mathcal{G}^{\text{af}}$  était un  $A$ -groupe plat admettant  $\mathcal{G}$  comme sous-groupe ouvert par le morphisme canonique  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{\text{af}}$ . Malheureusement il n'est pas clair que  $\Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$  soit une  $A$ -algèbre de type fini. D'après la prop. 2.3.1. de [Ana73] ou la prop. 12.9 de l'exposé VI B de [SGA3], on peut trouver un ouvert  $U$  de  $\text{Spec } A$  à complément fini tel que  $G_U$  soit affine sur  $U$ , d'où en particulier la présentation finie de  $\mathcal{G}^{\text{af}}$  au-dessus de  $U$ . Par descente fidèlement plate et quasi-compacte, on se ramène au cas où  $A$  est un anneau local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}$ -adiquement séparé et complet, et à corps résiduel algébriquement clos.

Nous affirmons d'abord que  $\mathcal{G}^{\text{af}}$  est de type fini au-dessus de  $A/\mathfrak{m}^n$  pour tout entier positif  $n$ , ce qui résulte immédiatement du cas  $n = 1$  grâce au lemme de Nakayama nilpotent. Alors le monomorphisme  $\mathcal{G}_k \rightarrow \mathcal{G}_k^{\text{af}}$  est ouvert par hypothèse et fermé d'après le lemme 11.18.1 de [SGA3], identifiant donc le membre de gauche à la composante neutre de  $\mathcal{G}_k^{\text{af}}$ . Vu que le faisceau quotient  $\pi_0(\mathcal{G}_k^{\text{af}}) := \mathcal{G}_k^{\text{af}}/\mathcal{G}_k$  est représentable par un groupe proétale, cf. [DG70], III §3 7.7, dont la section unité est ouverte, on en tire que  $\pi_0(\mathcal{G}_k^{\text{af}})$  est un groupe étale fini et que le  $k$ -groupe  $\mathcal{G}_k^{\text{af}}$  est forcément de type fini.

En sachant que le schéma affine  $\mathcal{G}^{\text{af}}$  est lisse au-dessus de chaque quotient artinien de  $A$ , on peut relever par récurrence tout point de  $\mathcal{G}^{\text{af}}$  à valeurs dans  $k$  en un  $A$ -point correspondant (de façon non unique évidemment) et par translation de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{G}^{\text{af}}$  par ces points, on dérive la lissité de ce dernier.  $\square$

2.5. Dans le présent paragraphe, on va construire les schémas en groupes sur  $\mathbb{Z}[u]$ , mission pour laquelle les notations des paragraphes précédentes seront gardées. Néanmoins il faudra que les hypothèses additionnelles suivantes soient faites :  $H$  désignera désormais un groupe épinglé tel que  $H^{\text{dér}}$  soit simplement connexe et presque simple sauf du type  $A_{2n}$  ; on note  $\Gamma = \mathfrak{S}_e$  le groupe d'automorphismes épinglés de  $H^{\text{dér}}$  et l'on suppose que l'opération de  $\Gamma$  sur  $H^{\text{dér}}$  se relève à  $H$  et que le tore maximal  $T$  du groupe épinglé  $H$  fournit un  $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_e]$ -module de permutation  $X_*(T)$  à rangs indécomposables 1 ou  $e$ .

On considérera l'extension d'anneaux  $\mathbb{Z}[u] \rightarrow \mathbb{Z}'[v]$  avec  $v^e = u$ , dont le groupe d'automorphismes s'identifie à  $\mathfrak{S}_e$  et qui devient galoisienne en dehors de l'ensemble des zéros de  $eu$ . Les généralités du numéro précédent fournissent alors un groupe réductif quasi-déployé  $G$  au-dessus de  $\mathbb{Z}[\frac{1}{e}][u^{\pm 1}]$ . D'un côté, G. Pappas et X. Zhu ont prolongé en [PZ13] ce schéma

en groupes en un schéma en groupes affine, lisse et connexe  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{e}][u]$ , ne dépendant que d'une facette  $\mathbf{f} \subseteq \mathcal{A}(G, S, \mathbb{Q}((u)))$ . D'un autre côté, Tits avait déjà donné en [Ti84] une construction d'un prolongement du schéma en groupes lisse et connexe  $G$  sur  $\mathbb{Z}[u^{\pm 1}]$ . L'objectif de ce numéro est alors de donner une construction des schémas en groupes affines, lisses et connexes  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  sur  $\mathbb{Z}[u]$ , qui généralisent simultanément les deux constructions susmentionnées.

Pour le modèle  $\mathcal{T}$ , on prend le schéma en groupes  $\mathbb{G}_m^k \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}[v]/\mathbb{Z}[u]} \mathbb{G}_m^l$ , regardé comme un  $\mathbb{Z}[u]$ -modèle de  $T$  au moyen d'un isomorphisme quelconque  $T \cong \mathbb{G}_m^k \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{e}][v^{\pm 1}]/\mathbb{Z}[\frac{1}{e}][u^{\pm 1}]} \mathbb{G}_m^l$ . Il ne dépend pas du choix d'isomorphisme, parce qu'il s'identifie à l'image fermée de  $T$  dans le  $\mathbb{Z}[u]$ -schéma  $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}'[v]/\mathbb{Z}[u]} T_H$ , comme on le vérifie aisément (et c'est justement là qu'on utilise l'hypothèse faite sur l'opération de  $\Gamma$  sur le tore  $T_H$ ). Il s'avérera utile dans la suite d'observer que  $\mathcal{T}$  jouit de certaines propriétés fonctorielles, étant le seul modèle en groupes de  $T$  à isomorphisme près, qui est affine, lisse, connexe et qui, sur tous les anneaux locaux de hauteur 1, est égal au modèle de Néron connexe de  $T$ .

Afin de définir les modèles  $\mathcal{U}_{a,\mathbf{f}}$ , considérons la fonction quasi-concave optimale  $f : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$  attachée à  $\mathbf{f}$  (voir le 4.6.26. de [BT84a]), qui dépend du choix d'un système de Chevalley-Steinberg comme plus haut et de la valuation  $u$ -adique  $\omega$  de  $\mathbb{Q}(u)$  normalisée de telle sorte que  $\omega(u) = 1$ . À un idéal fractionnaire inversible  $\mathfrak{a}$  dans le corps de fraction d'un anneau intègre, on associe canoniquement un  $A$ -modèle de  $\mathbb{G}_a$ , qui sera noté  $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{G}_a$ . Posons alors  $\mathcal{U}_{a,\mathbf{f}} := \mathbb{R}_{\mathbb{Z}[v_a]/\mathbb{Z}[u]} \langle v_a^{e_a f(a)} \rangle \otimes \mathbb{G}_a$ , où  $v_a = v$ ,  $e_a = e$  si  $a$  est courte et  $v_a = u$ ,  $e_a = 1$  sinon, et regardons-le comme un  $\mathbb{Z}[u]$ -modèle en groupes de  $U_a$  par transport de structure le long de  $x_a$ . Ceci est bien défini, car  $e_a f(a)$  est toujours un entier, et ne dépend pas du choix implicite de relèvement  $\tilde{a}$  dans la définition de  $x_a$ , parce qu'ils sont semblables (si  $e = 3$ , il faut choisir le relèvement convenablement pour obtenir l'extension cubique  $\mathbb{Z}[v]/\mathbb{Z}[u]$ ). Enfin, on vérifie :

**Proposition 2.4** (F. Bruhat et J. Tits, J. Tits). *Les schémas en groupes  $(\mathcal{T}, \mathcal{U}_{a,\mathbf{f}})_{a \in \Phi}$  forment une donnée radicielle schématique sur  $G$  au-dessus de  $\mathbb{Z}[u]$ .*

*Démonstration.* Observons tout d'abord le truc suivant à la Beauville-Laszlo [BL95] : on a l'égalité  $A = A[u^{-1}] \cap A \otimes \mathbb{Q}[[u]]$  dans  $A \otimes \mathbb{Q}((u))$  pour toute  $\mathbb{Z}[u]$ -algèbre plate  $A$ . Cela implique qu'on peut toujours construire des homomorphismes entre de tels anneaux par recollement au-dessus de  $\mathbb{Z}[u^{\pm 1}]$  et puis  $\mathbb{Q}[[u]]$ , ce qui aidera dans la vérification des axiomes, puisque, d'un côté, les données ne dépendent pas non plus de  $\mathbf{f}$  lorsque  $u$  est inversible, et de l'autre côté, l'affirmation est bien connue au-dessus de  $\mathbb{Q}[[u]]$ . Encore mieux, on pourrait tout simplement citer la p. 217 de [Ti84] et en déduire l'affirmation. En tout cas, nous allons expliquer comment vérifier tous les axiomes pour aider le lecteur.

L'axiome (DRS 0) est évident. Pour l'axiome (DRS 1), on utilise les formules de l'annexe A de [BT84a], qui décrivent la loi de commutation à similitude près pour un système de Chevalley-Steinberg, comme lequel qu'on a introduit, et qui préservent leur sens sur  $\mathbb{Z}[u^{\pm 1}]$ . Concernant l'axiome (DRS 2), on voit aisément que l'action de  $T$  sur  $U_a$  est donnée par la composition  $\tilde{a} : T \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{Q}(v_{\tilde{a}})/\mathbb{Q}(u)} \mathbb{G}_m$  suivie de l'action naturelle du membre de droite sur  $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}(v_{\tilde{a}})/\mathbb{Q}(u)} \mathbb{G}_a$ , identifié avec  $U_a$  par  $x_{\tilde{a}}$ . Le premier morphisme peut évidemment être prolongé

en un morphisme entre les modèles parahoriques et l'action naturelle garde aussi un sens sur  $\mathbb{Z}[u^{\pm 1}]$ .

Traisons finalement le dernier axiome (DRS 3) et prouvons une version plus détaillé : on va définir le voisinage ouvert  $\mathcal{W}_{a,\mathbf{f}}$  de la section unité comme l'ouvert spécial correspondant à une certaine section globale  $d_a$  de  $\mathcal{U}_{a,\mathbf{f}} \times \mathcal{U}_{-a,\mathbf{f}}$ , entendu ici comme un morphisme de ce schéma vers  $\mathbb{A}^1$ . Cette version renforcée se laisse formuler en mentionnant seulement des morphismes entre schémas affines et lisses, et donc il suffit de constater que les formules du 4.1.6 de [BT84a] restent valables au-dessus de  $\mathbb{Z}[u^{\pm 1}]$ . Le fait que  $\mathcal{W}_{a,\mathbf{f}}$  contienne la section unité dérive alors de ce que ceci marche au-dessus de  $\mathbb{Z}[u^{\pm 1}]$  et  $\mathbb{Q}[[u]]$ , et donc l'application s'étend. En effet, on peut aussi voir que le sous-schéma fermé de  $\mathcal{U}_{a,\mathbf{f}} \times \mathcal{U}_{-a,\mathbf{f}}$  donné par  $d_a$  est plat sur  $\mathbb{Z}[u]$ , ce qui entraîne que  $\mathcal{W}_{a,\mathbf{f}}$  est caractérisé comme le plus grand ouvert dont la fibre générique coïncide avec  $W_a$ .  $\square$

Une autre méthode pour établir cette proposition consisterait à prendre un point quelconque  $x \in \mathbf{f}$ , à le regarder comme appartenant à  $\mathcal{A}(H, T_H, \mathbb{Q}'((v)))$  et à contempler le schéma en groupes lisse et affine  $R_{\mathbb{Z}'[v]/\mathbb{Z}[u]} \mathcal{H}_x$  correspondant. La fibre générique de ce schéma contient le groupe  $G$  et si on considère l'image schématique de  $T$  et des  $U_a$ , pour  $a \in \Phi$ , dans ce schéma en groupes, on revient, par un raisonnement similaire impliquant les épinglages relatifs, aux mêmes modèles en groupes pour  $G$ . Commentons également un truc qui s'avère très utile dans certaines situations. Si on se contente de construire le schéma en groupes  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  au-dessus de  $\mathbb{Z}'[u]$ , il suffit de considérer l'extension cyclique  $\mathbb{Z}'[u] \rightarrow \mathbb{Z}'[v]$  ainsi que l'opération du sous-groupe distingué cyclique  $\Gamma_0 = \mathfrak{A}_e$  de  $\Gamma$  sur  $H$  et, en répétant les mêmes arguments, on arrive à réaliser  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  comme sous-schéma en groupes localement fermé de  $R_{\mathbb{Z}'[v]/\mathbb{Z}'[u]} \mathcal{H}_x$ , fixe par  $\Gamma_0$ .

Dans une autre direction, lorsque la fibre générique de  $G$  est un groupe classique, il serait aussi très intéressant d'interpréter ces schémas en groupes comme classifiant les automorphismes de certains réseaux munis des formes quadratiques comme en [PZ13], sec. 4 ou [Ti84], p. 218-219, ce qui peut être regardé comme une généralisation aux bases bidimensionnelles de l'appendice du ch. 3 de [RZ96] (voir aussi [BT84b], [BT87] et [Kir17] pour des cas classiques non modérément ramifiés sur un anneau de valuation discrète).

2.6. Ici on va examiner quelques changements de base des schémas en groupes  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  qui s'avèreront très utiles au dernier numéro. Soient  $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$  un nombre premier ou zéro et  $G_p$  le  $\mathbb{F}_p(u)$ -groupe algébrique linéaire obtenu à partir de  $G$  par le changement de base  $\mathbb{Z}[u] \rightarrow \mathbb{F}_p(u)$ . Si  $p \neq e$ , alors  $G_p$  est un groupe réductif quasi-déployé et l'on a un isomorphisme d'appartements en tant que complexes simpliciaux  $\mathcal{A}(G_p, S_p, \mathbb{F}_p((u))) \cong \mathcal{A}(G_0, S_0, \mathbb{Q}((u)))$  tel que les valuations de Chevalley-Steinberg induites par les systèmes éponymes choisis d'abord correspondent l'une à l'autre (normalisées de telle façon que  $\omega(\mathbb{F}_p((u))^\times) = \mathbb{Z}$ ). Armé d'une telle identification, il est aisé de voir que le schéma en groupes  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes \mathbb{F}_p[[u]]$  est le modèle parahorique de  $G_p$  correspondant à la facette  $\mathbf{f}$ .

Que dire du groupe algébrique linéaire  $G_e$ ? Commençons par le cas où  $H = H^{\text{dér}}$  est simplement connexe. Par construction de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ , on a un monomorphisme de groupes algébriques,

donc forcément une immersion fermée, de  $G_e$  dans  $(R_{\mathbb{F}_e(v)/\mathbb{F}_e(u)}H)^{\Gamma_0}$ . Vu que la partie galoisienne de l'opération de  $\Gamma_0$  sur cette restriction des scalaires s'évapore tout simplement en caractéristique  $e$ , ce groupe algébrique admet l'écriture sous la forme de  $R_{\mathbb{F}_e(v)/\mathbb{F}_e(u)}H^{\Gamma_0}$ , où  $\Gamma_0$  opère par  $\mathbb{F}_e$ -automorphismes extérieurs sur le  $\mathbb{F}_e$ -groupe déployé  $H$ . D'après R. Steinberg, cf. le th. 8.2 de [St68] (comparer avec l'introduction de [Spr06] ou la prop. 5.1 de [Hai18] pour une preuve en langage moderne), le groupe algébrique  $H^{\Gamma_0}$  est connexe semi-simple absolument presque simple simplement connexe déployé à système de racines  $\Phi$  ayant  $T^{\Gamma_0}$  pour un  $\mathbb{F}_e$ -tore maximal. Ce tore se décompose dans un produit de groupes multiplicatifs  $\mathbb{G}_m$  étiquetés par les racines simples  $a \in \Delta$  et donnés par les formules  $a^\vee : \mathbb{G}_m \rightarrow T^{\Gamma_0}$ ,  $t \mapsto \prod_{\gamma \in \Gamma_0 \tilde{a}} \gamma \tilde{a}^\vee(t)$  et ses groupes radiciels numérotés par  $a \in \Phi$  sont égaux à  $(\prod_{\gamma \in \Gamma_0 \tilde{a}} U_{\gamma \tilde{a}})^{\Gamma_0}$  et donnés par les épinglages  $y_a : \mathbb{G}_a \rightarrow H^{\Gamma_0}$ ,  $t \mapsto \prod_{\gamma \in \Gamma_0 \tilde{a}} x_{\gamma \tilde{a}}(t)$ , qui forment un système de Chevalley sur  $\mathbb{F}_e$ , comme on vérifie aisément. Alors, on observe, grâce aux épinglages définis, que le sous-groupe radiciel  $U_{a,e}$  coïncide avec : l'image de  $R_{\mathbb{F}_e(v)/\mathbb{F}_e(u)}\mathbb{G}_a$  par  $R_{\mathbb{F}_e(v)/\mathbb{F}_e(u)}y_a$  tout entière si  $|\Gamma_0 \tilde{a}| = e$  ou, ce qui revient au même, si  $a$  est courte ; ou il est égal au  $\mathbb{F}_e(u)$ -sous-groupe  $\mathbb{G}_a$  si  $|\Gamma_0 \tilde{a}| = 1$ , ce qui équivaut à dire que  $a$  est longue. On remarque que le même type d'énoncé vaut aussi pour le centralisateur  $T_e$  de  $S_e$  en fixant la décomposition en produit  $T_{a^\vee,e}$  provenant par dégénérescence des caractéristiques différentes de  $e$ . Rassemblant tout cela, on arrive à la conclusion surprenante que  $G_e$  n'est autre que le seul  $\mathbb{F}_e(u)$ -groupe algébrique pseudo-réductif exotique basique pseudo-déployé à système de racines  $\Phi$  (voir le 2.2 de [I]) ! Dans le cas général, on a  $G_e = G_e^{\text{dér}} \rtimes T_e/T_e^{\text{dér}}$  qui est pseudo-réductif pseudo-déployé d'après la prop. 1.4.3 de [CGP15], car  $T_e = \mathbb{G}_m^k \times R_{\mathbb{F}_e(v)/\mathbb{F}_e(u)}\mathbb{G}_m^l$  l'est.

Le raisonnement ci-dessus montre encore que le prolongement du système de Chevalley-Steinberg relatif à  $G_e$  est un quasi-système de Chevalley au sens de la déf. 2.4. de [I] et donc on a une valuation de Chevalley-Steinberg normalisée de la façon usuelle (voir prop. 2.6. de [I]), à l'aide de laquelle on identifie  $\mathcal{A}(G_e, S_e, \mathbb{F}_e((u)))$  avec les autres appartements des groupes réductifs  $G_p$  pour  $p \neq e$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{G}_f \otimes \mathbb{F}_e[[u]]$  est le modèle parahorique attaché à la facette  $f$  moyennant l'identification précédente. Quant aux identifications d'appartements, on affirme encore qu'il y a des isomorphismes entre les groupes d'Iwahori-Weyl  $N_p(\mathbb{F}_p((u)))/\mathcal{T}_p(\mathbb{F}_p[[u]])$ , où  $N_p$  désigne le normalisateur de  $S_p$  et  $\mathcal{T}_p$  le modèle de Néron connexe de  $T_p$  sur  $\mathbb{F}_p[[u]]$ , tels que les identifications données auparavant soient stables par les lois d'opération correspondantes.

En effet, soit  $N$  le normalisateur de  $S \otimes \mathbb{Z}((u))$  dans  $G \otimes \mathbb{Z}((u))$ , qui est un schéma en groupes affine et lisse sur l'anneau de Dedekind  $\mathbb{Z}((u))$ , comme l'affirme le cor. 5.3 bis. de l'exposé XI de [SGA3]. Montrons que l'homomorphisme de groupes  $N(\mathbb{Z}((u)))/\mathcal{T}(\mathbb{Z}[[u]]) \rightarrow N_p(\mathbb{F}_p((u)))/\mathcal{T}_p(\mathbb{F}_p[[u]])$  est toujours bijectif, ce qui fournira par zig-zag l'isomorphisme cherché ci-dessus. D'abord notons que  $N(\mathbb{Z}((u)))/T(\mathbb{Z}((u))) = (N/T)(\mathbb{Z}((u)))$ , grâce à l'annulation de  $H_{\text{ét}}^1(\mathbb{Z}((u)), T)$  conséquence du lemme de Shapiro et du théorème 90 de Hilbert. Mais le groupe de Weyl  $W = N/T$  est séparé sur  $\mathbb{Z}((u))$ , ce qui entraîne que l'application  $W(\mathbb{Z}((u))) \rightarrow W(\mathbb{Q}((u)))$  est injective. Comme les  $m_a$  sont définis sur  $\mathbb{Z}((u))$  et engendrent le groupe de Weyl dans chaque fibre,  $W(\mathbb{Z}((u))) \rightarrow W(\mathbb{F}_p((u)))$  est d'autre part surjective et le résultat suit d'une comparaison d'ordres. Il reste observer la bijectivité de  $T(\mathbb{Z}((u)))/\mathcal{T}(\mathbb{Z}[[u]]) \rightarrow$



$T_p(\mathbb{F}_p((u)))/\mathcal{T}_p(\mathbb{F}_p[[u]])$ , où l'on utilise comme d'habitude la décomposition en produit de restrictions des scalaires de groupes multiplicatifs. Démontrons enfin l'équivariance, qu'il suffit de la vérifier pour une partie génératrice : pour les translations, l'assertion devient évidente, en observant que l'opération de  $T$  sur  $U_a$  se factorise dans l'opération naturelle de  $R_{\mathbb{Z}[v_a]/\mathbb{Z}[u]}\mathbb{G}_m$  sur  $R_{\mathbb{Z}[v_a]/\mathbb{Z}[u]}\langle u^{f(a)} \rangle \mathbb{G}_a$  ; les classes des  $m_a$  à leur tour opèrent par des réflexions correspondantes du groupe de Weyl fixant l'origine.

Soit  $a \in \overline{\mathbb{F}}_e^\times$  et considérons le spécialisé  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes_{\mathbb{Z}[u]} \mathbb{F}_e(a)[[u - a]]$  qui modèle le groupe pseudo-réductif  $G \otimes \mathbb{F}_e(a)((u - a))$ . Ce groupe pseudo-réductif possède aussi un quasi-système de Chevalley induit pour celui au-dessus de  $\mathbb{F}_e(u)$  et donc le th. 1.2. de [I] en fournit une notion de modèles parahoriques, pour laquelle on confirme immédiatement que  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes_{\mathbb{Z}[u]} \mathbb{F}_e(a)[[u - a]]$  coïncide avec le schéma en groupes parahorique associé à l'origine  $0 \in \mathcal{A}(G_e, S_e, \mathbb{F}_e(a)((u - a)))$ . On tient à attirer l'attention du lecteur sur le fait que les  $\overline{\mathbb{F}}_e((t))$ -groupes pseudo-réductifs  $G_e \otimes \overline{\mathbb{F}}_e((t))$  avec  $t = u - a$  sont évidemment tous isomorphes, de telle façon que les pseudo-épinglages sont préservés, en les identifiant à un certain sous-groupe bien déterminé de  $R_{\overline{\mathbb{F}}_e((t^{1/e}))/\overline{\mathbb{F}}_e((t))}H$ . Par suite, on peut identifier les appartements, les groupes de Iwahori-Weyl et toutes les autres structures combinatoires de  $G_e$  sur les différentes places de  $\mathbb{F}_e(u)$ , ce qu'on appliquera dorénavant sans dire un mot de plus.

Pour finir, il y a aussi de quelques changements de base intéressants  $\mathbb{Z}[u] \rightarrow \mathcal{O}$ , où  $\mathcal{O}$  est un anneau de valuation discrète complet en caractéristiques inégales, tel que l'image  $a$  de  $u$  dans  $\mathcal{O}$  soit ou bien une uniformisante ou une unité. Si  $a$  est une uniformisante de  $\mathcal{O}$ , alors  $\mathcal{O}[v]$  reste encore un anneau de valuation discrète complet et  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes \mathcal{O}$  est un modèle parahorique de sa fibre réductive quasi-déployée, de type combinatoire pareil à  $\mathbf{f}$  pour une identification des appartements comme plus haut. Si  $a$  est une unité, on suppose de plus que l'anneau  $\mathcal{O}[v]$  est intègre régulier, ce qui permet de déduire que  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes \mathcal{O}$  est un schéma en groupes parahorique de type spécial.

2.7. On démontre maintenant le résultat fondamental suivant sur l'affinité des  $\mathbb{Z}[u]$ -schémas en groupes  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  de manière complètement différente à celle de [PZ13], th. 3.1. En effet, ce dernier article fait usage dans le cas déployé des techniques de dilatation, cf. [WW80], [BLR], 3.2 et [Ri20], et d'un calcul cohomologique en termes de  $\Gamma$ -invariants dans le cas quasi-déployé, duquel on ne dispose pas dans le présent cadre.

**Théorème 2.5.** *Le schéma en groupes  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  est affine.*

*Démonstration.* Éclaircissons tout d'abord la structure de la preuve : la première étape consiste à montrer que, dans le cas où  $H$  est simplement connexe, l'enveloppe affine  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{af}} = \text{Spec } \Gamma(\mathcal{G}_{\mathbf{f}}, \mathcal{O})$  de la prop. 2.3 ne peut être pas plus grosse que son ouvert quasi-affine  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ , en faisant usage de ce que les sous-groupes paraboliques d'un système de Tits sont leurs propres normalisateurs ; puis, en raisonnant avec la grosse cellule, on montre que le schéma en groupes  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  s'obtient à partir de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}}$  et  $\mathcal{T}$  à l'aide d'une construction cocartésienne ; compte tenu de ce dernier pas, on se ramène à montrer que  $\mathcal{T}/\mathcal{T}^{\text{dér}}$  est représentable par un schéma affine, lequel sera construit par une méthode différente et puis identifié grâce aux propriétés universelles des modèles de Néron connexes des tores.

Commençons alors par supposer que  $H = H^{\text{dér}}$  est son propre dérivé. Il suffit alors de montrer que l'application  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{af}}$  est bijective au-dessus des fibres des points fermés. Considérons la  $\mathbb{Z}[u]$ -algèbre  $\mathcal{O} = \bar{\mathbb{F}}_p[[t]]$  définie par  $u \mapsto t + a$  où  $a \in \bar{\mathbb{F}}_p$  et notons  $\mathcal{P}$  resp.  $\mathcal{P}^1$  les  $\mathcal{O}$ -groupes lisses et affines  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes \mathcal{O}$  resp.  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{af}} \otimes \mathcal{O}$  déduits par changement de base. Vu que  $\mathcal{P}$  est un modèle parahorique d'un groupe pseudo-réductif primitif au sens de [I], comme l'on a remarqué au 2.6, il résulte de la prop. 2.13. de [I] que  $\mathcal{P}(\mathcal{O})$  est son propre normalisateur dans  $\mathcal{P}(K)$ , où  $K = \text{Frac}(\mathcal{O})$ . Par suite,  $\mathcal{P}^1(\mathcal{O}) = \mathcal{P}(\mathcal{O})$  et  $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}$  car  $\mathcal{O}$  est strictement hensélien. Ceci achève la preuve du théorème dans le cas simplement connexe.

Penchons-nous maintenant sur le cas général. Par construction, on obtient une immersion  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  et l'on observe que la restriction de l'action de conjugaison  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}_{\mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  à  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}}$  se factorise à travers  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}}$ , car  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}}$  est plat, séparé et connexe et  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}}$  s'identifie à la composante neutre de son adhérence schématique dans  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  (cf. la prop. 2.2.10 de [BT84a]). Considérons alors le produit semi-direct  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}} \rtimes \mathcal{T}$ , qui est un schéma en groupes affine, lisse et connexe, en vertu du cas dérivé, muni de son sous-schéma en groupes fermé  $\mathcal{T}^{\text{dér}}$ , donné par  $t \mapsto (t^{-1}, t)$ . Il est bien connu que le faisceau quotient pour la topologie fppf  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}} \rtimes \mathcal{T} / \mathcal{T}^{\text{dér}}$  est représentable par un schéma quasi-projectif (cf. le cor. 10.5 de [PZ13]) et le morphisme  $(\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}} \rtimes \mathcal{T}) / \mathcal{T}^{\text{dér}} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  donné par multiplication dans  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  est un isomorphisme, puisque il l'en est restreint aux grosses cellules. De cela résulte que l'immersion  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\text{dér}} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  est en fait fermée à faisceaux quotient représentable isomorphe à  $\mathcal{T} / \mathcal{T}^{\text{dér}}$ . Il reste alors à montrer que ce quotient est affine.

Le schéma en groupes  $\mathcal{T} / \mathcal{T}^{\text{dér}} \otimes \mathbb{Z}'[u]$  est quasi-affine, lisse et connexe (voir le cor. VII.2.2 de [Ray70]), et parahorique sur tous les points de hauteur 1 selon le lem. 2.6. Ces propriétés définissent le schéma en groupes donné à isomorphisme près, donc il suffit de trouver un schéma en groupes avec les mêmes propriétés et en plus affine. Si  $e = 2, 3$ , alors  $\mathcal{T} / \mathcal{T}^{\text{dér}} \otimes \mathbb{Z}'[\frac{1}{e}][u^{\pm 1}]$  est isomorphe à un produit des tores de la forme  $\mathbb{G}_m, \text{R}_{\mathbb{Z}'[\frac{1}{e}][v^{\pm 1}] / \mathbb{Z}'[\frac{1}{e}][u^{\pm 1}]} \mathbb{G}_m$  et  $(\text{R}_{\mathbb{Z}'[\frac{1}{e}][v^{\pm 1}] / \mathbb{Z}'[\frac{1}{e}][u^{\pm 1}]} \mathbb{G}_m) / \mathbb{G}_m$  - cela découle du théorème classique de classification des représentations à  $\mathbb{Z}$ -modules libres finis du groupe cyclique d'ordre 2 ou 3. On sait déjà comment définir le modèle parahorique pour les deux premiers tores et pour le dernier on pose  $\text{R}_{\mathbb{Z}'[v] / \mathbb{Z}'[u]} \mathbb{G}_m / \mathbb{G}_m$ , qui est affine en vertu du th. 5.1 de l'exposé VIII du [SGA3].  $\square$

Dans la démonstration précédente, on a fait usage du lemme ci-dessous sur l'interaction des modèles de Néron connexes avec des suites exactes courtes. À phénomènes de connexité près, celui est bien connu dans le cas où la ramification est modérée et le corps résiduel est parfait (voir [PR08], lem. 6.7), mais il est faux en général (voir le 4.4.13 de [BT84a]).

**Lemme 2.6.** *Soient  $S$  un schéma de Dedekind connexe et  $1 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 1$  une suite exacte courte de tores sur  $K = Q(S)$ , où  $T'$  est un facteur direct d'un tore induit. Alors la suite des modèles de Néron connexes reste exacte.*

*Démonstration.* De ce que, lorsque le tore est un facteur direct d'un induit, le modèle canonique au sens du 4.4.6. de [BT84a] et le modèle de Néron connexe coïncident, l'on déduit que  $T' \rightarrow \mathcal{T}$  est une immersion fermée. On en obtient une application birationnelle  $\mathcal{T} / T' \rightarrow \mathcal{T}''$

entre  $S$ -schémas en groupes affines, lisses et connexes et il reste à montrer qu'elle est quasi-finie, d'après le théorème principal de Zariski.

On se ramène alors à prouver, puisque les schémas en groupes considérés sont plats de la même dimension, que l'application  $f_s : \mathcal{T} \otimes k(s) \rightarrow \mathcal{T}'' \otimes k(s)$  est surjective pour chaque point  $s \in S$ . Pour cela on peut d'abord supposer que  $S$  est strictement hensélien et  $k(s)$  séparablement clos sans rien changer. D'un côté, on sait que les points rationnels du conoyau de  $f_s$  sont infiniment  $n$ -divisibles pour tout entier naturel  $n$  premier à  $p$ . D'un autre côté, on observe que les trois applications suivantes sont surjectives :  $\mathcal{T}''(k) \rightarrow \text{coker}(f_s)(k)$  parce que l'image de  $f_s$  est lisse et  $k$  est séparablement clos ;  $\mathcal{T}''(S) \rightarrow \mathcal{T}''(k)$  d'après le lemme de Hensel ; finalement  $\mathcal{T}(K) \rightarrow \mathcal{T}''(K)$  par nullité de la cohomologie supérieure des tores induits et de leurs facteurs directs. En particulier, cela identifie  $\text{coker}(f_s)(k)$  à un sous-quotient de  $\mathcal{T}(K)/\mathcal{T}(S)$ , faisant de lui un groupe abélien de type fini. Ceci entraîne que  $\text{coker}(f_s)(k)$  est un  $p$ -groupe fini et, en vertu de sa densité dans le groupe lisse et connexe  $\text{coker}(f_s)$ , égal même à l'identité. Par suite,  $\text{coker}(f_s)$  en est de même trivial et  $f_s$  est surjective.  $\square$

Signalons que ce lemme entraîne immédiatement que le th. 1.4.3. de [KP18] concernant la trivialité des toseurs sur le plan époinché  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p[[u]] \setminus V(0, p)$  reste vrai pour les modèles parahoriques  $\mathcal{G}$  des groupes  $p$ -adiques  $\mathbf{G}$  sans facteurs de type  $E_8$ , qui se déploient sur des extensions composées d'une extension non ramifiée et d'une extension totalement ramifiée cyclique. Malheureusement, cela n'aide pas à améliorer l'énoncé similaire de [Ans18] dans le cadre des anneaux de Fontaine  $A_{\text{inf}}$ , dont la difficulté principale est de nature différente.

### 3. LA GÉOMÉTRIE DES GRASSMANNIENNES AFFINES TORDUES ENTIÈRES

Cette partie est consacrée à l'étude des grassmanniennes affines attachées aux schémas en groupes déjà introduits et de leurs propriétés géométriques.

3.1. Soient  $A$  un anneau noethérien quelconque et  $\mathfrak{G}$  un schéma en groupes lisse sur le  $A$ -disque formel  $A[[t]]$ . La grassmannienne affine  $\text{Gr}_{\mathfrak{G}}$  est le foncteur de la catégorie des  $A$ -algèbres vers la catégorie des ensembles, tel que  $\text{Gr}_{\mathfrak{G}}(R)$  soit l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\mathfrak{G}$ -fibrés  $\mathcal{E}$  sur  $R[[t]]$  munis d'une trivialisation au-dessus de  $R((t))$ . Il s'agit d'un faisceau pour la topologie fppf, qui est représentable par un ind-schéma (strict) lorsque  $\mathfrak{G} = \text{GL}_n$  ou, plus généralement, lorsqu'il y a une immersion fermée  $\mathfrak{G} \rightarrow \text{GL}_n$  à quotient fppf représentable et quasi-affine, voir la preuve de la prop. 1.2.6 de [Zh16], ce qui est assuré par le cor. 10.8 de [PZ13] dès que  $A$  est régulier, excellent, de dimension  $\leq 2$  et  $\mathfrak{G}$  est connexe.

La grassmannienne affine peut s'exprimer sous la forme d'un quotient de certains groupes de lacets. En effet, considérons les faisceaux fppf suivants sur la catégorie des  $A$ -algèbres  $R$  :  $L^+\mathfrak{G} : R \mapsto \mathfrak{G}(R[[t]])$ ,  $L\mathfrak{G} : R \mapsto \mathfrak{G}(R((t)))$ . Alors,  $L^+\mathfrak{G}$  s'appelle le groupe de lacets positif de  $\mathfrak{G}$  et il est représentable par un schéma en groupes affine pro-lisse (et connexe si  $\mathfrak{G}$  l'est). D'autre part,  $L\mathfrak{G}$ , qui s'appelle groupe de lacets de  $\mathfrak{G}$ , est représentable par un ind-schéma en groupes et on sait (voir par exemple la prop. 1.3.6 de [Zh16]) que le faisceau quotient  $L\mathfrak{G}/L^+\mathfrak{G}$  pour la topologie étale s'identifie toujours de façon canonique à la grassmannienne affine  $\text{Gr}_{\mathfrak{G}}$ .



Dans les paragraphes suivants, on traitera la grassmannienne affine du schéma en groupes  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  au-dessus de  $\mathbb{Z}[u]$  par rapport à la variable  $t = u$  et il sera parfois plus commode de supposer que  $\mathbf{f}$  est une sous-facette de l'unique alcôve dominante  $\mathbf{a}$  contenant l'origine 0 fixée de l'appartement dans son adhérence. Ceci ne change pas grand-chose, vu que  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  en tant que schéma en groupes et non modèle de  $G$  est isomorphe à un certain  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}'}$ , où  $\mathbf{f}'$  est une sous-facette de  $\mathbf{a}$ , en conjuguant par un élément  $n \in N(\mathbb{Z}[u^{\pm 1}])$  tel que  $n\mathbf{f}' = \mathbf{f}$ .

3.2. Ce paragraphe est consacré à introduire des Levis explicites de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ . Ce schéma en groupes possède une filtration canonique  $L^{(n)}\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  donnée par les noyaux des applications  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \rightarrow L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  de réduction modulo  $u^n$ , dont les quotients successifs  $L^{(n)}\mathcal{G}_{\mathbf{f}}/L^{(n+1)}\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  sont isomorphes à  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes_{\mathbb{Z}[u], u \rightarrow 0} \mathbb{Z}$  si  $n = 0$  et à son fibré vectoriel de Lie  $\text{Lie}(\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \otimes_{\mathbb{Z}[u], u \rightarrow 0} \mathbb{Z})$  sinon. Par suite,  $L^{(1)}\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  est la limite projective de groupes unipotents, lisses et connexes. En particulier, toute application de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  à un  $\mathbb{Z}$ -groupe réductif se factorise par une application de  $L^1\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ . Le but maintenant est de montrer l'existence d'un  $\mathbb{Z}$ -groupe distingué, unipotent, lisse et connexe de  $L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  qui relève le radical unipotent de  $L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}$  dans chaque fibre, mais il s'avère plus facile de construire auparavant un Levi  $L_{\mathbf{f}}$ .

Construisons d'abord la  $\mathbb{F}_p$ -fibre  $L_{\mathbf{f},p}$  du Levi  $L_{\mathbf{f}}$ , qui est un sous-groupe fermé de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}$  ou, ce qui revient au même, de chaque quotient  $L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}$  compatiblement aux projections canoniques. En appliquant le raisonnement du lem. 2.18. de [I], on conclut que le radical unipotent coïncide avec le produit de ses intersections avec chaque terme de la cellule grosse, qui à son tour sont données par :  $R_u L^n \mathcal{T}_p$ ,  $v_a \mathcal{U}_{a,\mathbf{f},p}/L^n \mathcal{U}_{a,\mathbf{f},p}$  pour toute racine  $a \in \Phi_{\mathbf{f}} := \{a \in \Phi : f_{\mathbf{f}}(a) + f_{\mathbf{f}}(-a) = 0\}$  et  $L^n \mathcal{U}_{a,\mathbf{f},p}$  pour les racines restantes. Il s'ensuit que  $(L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f},p})^{\text{réd}}$  est un groupe réductif déployé à tore maximal  $S_p \subseteq L^n S_p$  (ou bien son image) et système de racines  $\Phi_{\mathbf{f}}$ , dont les sous-groupes radiciels par rapport à  $S_p$  s'identifient aux  $U_{\alpha,p} = x_a(u^{f_{\mathbf{f}}(a)} \mathbb{G}_a)$ ,  $\alpha = \{a(x - \varphi) + f_{\mathbf{f}}(a) = 0\}$  par les applications évidentes.

On affirme alors que les sous-groupes fermés de  $L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}$  qu'on vient de décrire engendrent le Levi cherché, ce qui n'est néanmoins la façon la plus bénéfique de le définir, car le sous-groupe obtenu pourrait être trop grand a priori. Définissons  $L_{\mathbf{f}}$  comme le  $\mathbb{F}_p$ -sous-groupe de  $L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}$  engendré par  $S_p$  et les sous-groupes additifs  $U_{\alpha,p}$  décrits plus haut pour  $\alpha = a + f_{\mathbf{f}}(a)$  avec  $a \in \pm\Delta_{\mathbf{f}}$ , où  $\Delta_{\mathbf{f}}$  est la base déterminée par le choix de racines positives  $\Phi_{\mathbf{f}}^+ = \Phi^+ \cap \Phi_{\mathbf{f}}$ . Selon le th. C.2.29, pour que  $L_{\mathbf{f}}$  soit réductif déployé de la dimension correcte, il faut et il suffit d'une part que, pour chaque  $a \in \Delta_{\mathbf{f}}$ , le sous-groupe  $L_{\mathbf{f},a,p}$  engendré par  $S_p$  et  $U_{\pm a,p}$  soit réductif de rang semi-simple 1 et ait  $S_p$  comme tore maximal, et d'autre part, que les  $U_{\alpha,p}$  et  $U_{-\beta,p}$  commutent pour toutes  $\alpha \neq \beta$  telles que les racines euclidiennes sous-jacentes  $a \neq b$  appartiennent à  $\Delta_{\mathbf{f}}$ . En ce qui concerne la première condition, on considère le sous-schéma en groupes localement fermé  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},a,p}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  engendré par  $\mathcal{U}_{\pm a,\mathbf{f}}$  et  $\mathcal{T}$ , qui induit une immersion fermée  $L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f},a,p} \rightarrow L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}$  dont l'image contient  $S_p$  et  $U_{\pm a,p}$ , donc il contient aussi  $L_{\mathbf{f},a,p}$ . Vu que  $\mathcal{G}_{\mathbf{f},a,p}$  est isomorphe à  $(R_{\mathbb{F}_p[[v_a]]/\mathbb{F}_p[[u]]} \text{SL}_{2, \text{eaf}(\pm a)} \rtimes \mathcal{T}_p) / \mathcal{T}_{a^\vee,p}$ , on s'est essentiellement réduit à calculer le Levi des modèles des restrictions des scalaires de  $\text{SL}_2$  en niveau spécial, d'où il résulte une identification entre  $L_{\mathbf{f},a,p}$  et le groupe réductif  $\text{SL}_2 \rtimes S_p / S_{a^\vee,p}$ . Traitons finalement la seconde condition : le seul problème qui se pose, c'est

lorsque  $a - b$  appartient à  $\Phi$  (mais forcément non à  $\Phi_{\mathbf{f}}$ , par définition de  $\Delta_{\mathbf{f}}$ ), ce qui entraîne, par considération des ensembles de valeurs  $\Gamma_a$ , que  $a$  et  $b$  sont courtes,  $b$  est longue et  $f_{\mathbf{f}}(a) + f_{\mathbf{f}}(-b)$  n'est pas un entier. Comme les formules de l'appendice A.6. b), d) et e) de [BT84a] nous le montrent, le commutateur  $(x_a(t_a u^{f_{\mathbf{f}}(a)}), x_{-b}(t_{-b} u^{f_{\mathbf{f}}(-b)}))$  s'exprime à similitude près sous la forme  $x_{a-b}(\text{tr}(t_a t_{-b} u^{f_{\mathbf{f}}(a) + f_{\mathbf{f}}(-b)}))$  qui s'annule puisque la somme  $f_{\mathbf{f}}(a) + f_{\mathbf{f}}(-b)$  n'est pas entière.

Enfin il faut vérifier que les autres sous-groupes radiciels coïncident avec les  $U_{\alpha}$  pour  $\alpha = a + f_{\mathbf{f}}(a)$  et  $a \in \Phi_{\mathbf{f}}$ . Cela résulte du fait que, en posant  $m_a(r) = x_a(r)x_{-a}(r)x_a(r)$ , l'on a  $\text{int}(m_a(v_a^i))(x_b(\pm v_b^j)) = x_{s_a(b)}(\pm v_{s_a(b)}^k)$ , grâce au choix d'un système de Chevalley-Steinberg et du fait que la conjugaison quadratique opère sur les puissances de  $v$  en leur adjoignant un signe ou non. En particulier, les épinglages donnés des sous-groupes radiciels forment un système de Chevalley du  $\mathbb{F}_p$ -groupe déployé  $L_{\mathbf{f},p}$ . On vérifie aisément à l'aide de la grosse cellule que l'intersection  $L_{\mathbf{f},p} \cap R_u L^n \mathcal{G}_{\mathbf{f},p}$  est triviale et puisque l'on a un épimorphisme  $L_{\mathbf{f},p} \rightarrow (L^n \mathcal{G}_{\mathbf{f},p})^{\text{red}}$ , il s'ensuit que le membre de gauche est un Levi.

Montrons maintenant que ces Levis construits fibre à fibre se relèvent en un schéma en groupes au-dessus de  $\mathbb{Z}$ . Pour cela, on construit à l'aide de la grosse cellule, cf. 1.2.13. de [BT84a], des applications du Levi  $L_{\mathbf{f}}$  à  $L^n \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  et réciproquement, où l'on regarde le premier comme schéma en groupes déployé sur  $\mathbb{Z}$  : en effet, l'on a une inclusion  $S \subseteq L^n \mathcal{Z}$  et des épinglages  $\mathbb{G}_a \rightarrow L^n \mathcal{U}_{a,\mathbf{f}}$ ,  $a \in \Phi_{\mathbf{f}}$  donnés par les formules écrites plus haut ; pour le morphisme opposé, on fait usage des épinglages de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{U}_{a,\mathbf{f}}$  afin de diviser par ce que s'avérera l'intersection avec le radical unipotent et puis on fait les identifications nécessaires. Puisque la composition de ces deux applications est l'identité, on déduit que la première application est une immersion fermée dont l'image s'identifie, au-dessus de chaque fibre, au Levi  $L_{\mathbf{f},p}$  déjà considéré et que la seconde s'identifie au quotient réductif de  $L^n \mathcal{G}_{\mathbf{f},p}$ . En particulier, la seconde application est lisse d'après le célèbre critère de platitude par fibres, et donc son noyau  $R_u L^n \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  l'est aussi - c'est le radical unipotent défini sur  $\mathbb{Z}$  ! - et la décomposition cherchée  $L^n \mathcal{G}_{\mathbf{f}} = L_{\mathbf{f}} \ltimes R_u L^n \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est obtenue. Notons que le théorème principal de Zariski et l'analyse précédente fournissent de même un isomorphisme entre  $R_u L^n \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  et le produit de  $R_u L^n \mathcal{Z}$ ,  $v_a L^+ \mathcal{U}_{a,\mathbf{f}} / L^{(n)} \mathcal{U}_{a,\mathbf{f}}$  si  $a \in \Phi_{\mathbf{f}}$  et  $L^n \mathcal{U}_{a,\mathbf{f}}$  sinon, chacun de ceux-ci étant défini de manière évidente.

Enfin on arrive pour les mêmes raisons à un énoncé globale du th. 2.19. de [I] : pour toute sur-facette  $\mathbf{f}'$  de  $\mathbf{f}$ , le sous-schéma en groupes fermé  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}'} \subseteq L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  coïncide avec l'image réciproque par  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}} \rightarrow L_{\mathbf{f}}$  d'un certain sous-groupe parabolique  $P_{\mathbf{f}',\mathbf{f}}$  de  $L_{\mathbf{f}}$ . En particulier, le faisceau quotient  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}} / L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}'}$  pour la topologie fppf est représentable par la variété projective lisse  $L_{\mathbf{f}} / P_{\mathbf{f}',\mathbf{f}}$  sur  $\mathbb{Z}$  (égale à  $\mathbb{P}^1$  si  $\mathbf{f}$  est un cloison et  $\mathbf{f}'$  une alcôve) et le morphisme quotient  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}} \rightarrow L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}} / L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}'}$  possède des sections pour la topologie de Zariski, cf. [SGA3], exp. XXVI, cor. 5.9.

3.3. Maintenant on va expliquer comment faire opérer le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$  sur les groupes d'arcs  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  et de lacets  $LG$ , « en multipliant l'uniformisante  $v$  par les scalaires  $r \in R^{\times}$  ». Pour cela il suffit de faire opérer  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$  sur  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  de façon compatible à son opération de

dilatation puissance  $e$  sur  $\mathbb{Z}[u]$  donnée par  $(r, u) \mapsto r^e u$ , ce qui veut dire plus concrètement qu'on peut trouver un isomorphisme de  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1$ -groupes entre  $p^* \mathcal{G}_f$  et  $a^* \mathcal{G}_f$  soumis aux conditions de commutativité habituelles, où  $p : \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1 := \text{Spec } \mathbb{Z}[u]$  est la projection sur le second facteur et  $a : \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$  le morphisme action. Comme la forme déployée  $H$  est constante, on en tire un isomorphisme  $a_{v', \pm 1}^* H \cong p_{v', \pm 1}^* H$ , où  $\mathbb{A}_{v', \pm 1}^1 := \text{Spec } \mathbb{Z}'[v^{\pm 1}]$ ,  $p_{v', \pm 1} : \mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}'} \times \mathbb{A}_{v', \pm 1}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{v', \pm 1}^1$  est la projection canonique et  $a_{v', \pm 1} : \mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}'} \times \mathbb{A}_{v', \pm 1}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{v'}^1$  est l'opération de dilatation. Comme cette opération de dilatation se situe dans un carré cartésien avec la  $e$ -ième puissance de la dilatation sur  $\mathbb{A}_{u, \pm 1}^1 := \text{Spec } \mathbb{Z}[u^{\pm 1}]$ , on en tire l'isomorphisme cherché pour  $R_{\mathbb{Z}'[v^{\pm 1}]/\mathbb{Z}[u]} H$  et donc aussi pour  $G$ , vu qu'on peut le décrire comme la composante neutre fibre à fibre de l'adhérence schématique de la fibre générique des  $\Gamma$ -invariants, tandis que l'isomorphisme ci-dessus est équivariant par  $\Gamma$  et que les morphismes  $a$  et  $p$  sont plats. Des calculs explicites avec points entiers montrent que  $\mathbb{G}_m$  opère aussi sur  $\mathcal{G}_f \otimes \mathbb{Q}[u]$ , cf. le lem. 5.4 de [Zh14], et on obtient l'isomorphisme  $p^* \mathcal{G}_f = a^* \mathcal{G}_f$  par recollement.

Cela fournit finalement une opération  $\mathbb{Z}$ -linéaire de  $\mathbb{G}_m$  sur  $L^+ \mathcal{G}_f$  et on vérifie facilement que l'opération induite de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{g} = \text{Lie } LG$  est donnée au signe près par la restriction de  $\mathfrak{h} \otimes R'((v)) \xrightarrow{v \mapsto rv} \mathfrak{h} \otimes R'((v))$ . En termes heuristiques, il faut penser aux sous-groupes radiciels affines  $U_\alpha$ , où  $\alpha = a + n$  et  $n \in \Gamma'_a$ , du 3.2 comme des sous-groupes radiciels par rapport à  $S \times \mathbb{G}_m$  avec poids  $a + \text{end}$ , où  $d : S \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  est la projection vers le deuxième facteur. Cependant il y a des nouvelles racines « imaginaires »  $\mathbb{Z}d$ , ainsi appelées dans la théorie des algèbres de Kac-Moody, puisque elles restent invisibles pour le groupe d'Iwahori-Weyl  $\widetilde{W}$ . Même dans  $LG$ , ces racines restent considérablement cachées, vu que l'on ne peut pas isoler un facteur correspondant au poids  $nd$ ,  $n \neq 0$ , car  $Nd$  et  $-Nd$  forment des rayons radiciels ; en effet, le mieux qu'on puisse faire est de considérer la décomposition  $LT = L^{-T} \times S \times L^{++T}$ , cf. 3.6 pour ces notations. L'ensemble des racines réelles et imaginaires sera noté  $\Phi^{\text{af}}$  et l'on a déjà vu au 3.2 que  $\text{int}(n_w)(U_\alpha) = U_{w(\alpha)}$  pour n'importe quel représentant  $n_w \in N(\mathbb{Z}[u^{\pm 1}])$  de  $w \in \widetilde{W}$ .

Au 3.2, on a construit une décomposition de Levi  $L^+ \mathcal{G}_a = S \ltimes L^{++} \mathcal{G}_f$  et maintenant on veut isoler quelques sous-groupes radiciels  $U_\alpha$  avec  $\alpha \in \Phi_+^{\text{af}}$ . Soit  $I$  un ensemble fini de racines réelles positives de telle sorte que  $\Phi_+^{\text{af}} \setminus I$  soit saturé dans  $\Phi^{\text{af}}$  (voir la discussion avant la déf. C.2.25 de [CGP15]), c'est-à-dire, les racines contenues dans le semi-groupe engendré par  $\Phi_+^{\text{af}} \setminus I$  appartiennent déjà à  $\Phi_+^{\text{af}} \setminus I$ . Choisissons  $n$  assez grand tel que la hauteur de  $\alpha_i$  soit inférieure à  $en$  pour tout  $i \in I$  et considérons l'application produit  $(\prod_{\alpha \in I} U_\alpha) \times (\prod_{\alpha \in J} U_\alpha \times L^{++} \mathcal{T} / L^n \mathcal{T}) \rightarrow L^{++} \mathcal{G}_a / L^n \mathcal{G}_a$ , où  $J$  désigne le complément de  $I$  dans la partie des racines réelles de hauteur inférieure à  $en$ . L'application déduite de celle-ci par changement de base  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$  n'est plus que la décomposition d'un groupe unipotent lisse opéré par un tore en produit direct des sous-groupes correspondants aux rayons radiciels (positifs) mis sur un certain ordre, donc un isomorphisme par le 1.1.7. de [BT84a] ou la prop. C.2.26 (1) de [CGP15]. En particulier, le  $\mathbb{Z}$ -morphisme considéré de  $\mathbb{Z}$ -schémas lisses est bijectif et birationnel, donc un isomorphisme d'après le théorème principal de Zariski et le deuxième facteur du membre de gauche s'identifie à un sous- $\mathbb{Z}$ -groupe fermé du membre de droite, qui ne dépend pas de l'ordre mis sur  $J$ . Si l'on note  $L_I^{++} \mathcal{G}_a$  l'image réciproque dans

$L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$  de ce sous-schéma en groupes, on voit que  $L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$  se décompose en tant que  $\mathbb{Z}$ -schéma en un produit  $\prod_{\alpha} U_{\alpha} \times L_I^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ , quel que soit l'ordre mis sur  $I$ , bien que le terme de gauche ne soit pas indépendant de cet ordre. Si  $I$  est de plus saturé, alors le produit des  $U_{\alpha}$ ,  $\alpha \in I$  définit même un  $\mathbb{Z}$ -groupe, qui ne dépend pas de l'ordre dans lequel les  $\alpha_i$  sont rangées.

Bien sûr, on a toujours l'exemple presque trivial où  $I_n$  est l'ensemble des racines de hauteur inférieure à  $n$ , mais le cas qui s'avérera fondamental dans la suite sera la partie  $I_w = \{\alpha \in \Phi_+^{\text{af}} : w(\alpha) \in \Phi_-^{\text{af}}\}$  de cardinal  $l(w)$  et la décomposition correspondante  $L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}} = (\prod_{\alpha \in I_w} U_{\alpha}) \ltimes L_w^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ . Notons que, si  $n_w \in N(\mathbb{Z}[u^{\pm 1}])$  est un représentant minimal de  $w$ , alors  $n_w L_w^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}} n_w^{-1} \subseteq L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$  : si  $k$  est assez grand, alors on a à l'évidence  $n_w L^{(k)}\mathcal{G}_{\mathbf{a}} n_w^{-1} \subseteq L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$  et quant aux sous-groupes radiciels restants  $U_{\alpha}$  contenus dans  $L_w^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ , on observe que  $n_w U_{\alpha} n_w^{-1} = U_{w(\alpha)} \subseteq L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ . Maintenant il se démontre facilement que  $L_w^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}} = L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}} \cap n_w^{-1} L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}} n_w$ , en vertu de la trivialité de  $\prod_{\alpha \in I_w} U_{w(\alpha)} \cap L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$  (utiliser la grosse cellule ou un raisonnement dynamique pour conclure).

3.4. Commençons par analyser les fibres  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}} := \text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$  sur les corps premiers  $\mathbb{F}_p$  (rappelons que, si  $p = 0$ , alors  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ), en définissant d'abord quelques sous-schémas fermés remarquables, qu'on appelle les variétés de Schubert, et leurs désingularisations canoniques à la Demazure. On verra que ces schémas sont projectifs sur  $\mathbb{F}_p$ , d'où l'ind-projectivité de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$ . Dans [I], th. 1.3, on trouvera un critère général de projectivité pour les grassmanniennes affines sur les corps parfaits.

Soient  $n_w \in N(\mathbb{F}_p((u)))$  un représentant quelconque de  $w \in W_{\mathbf{f}} \setminus \tilde{W}/W_{\mathbf{f}}$ ,  $C_{w,p}$  l'espace homogène sous  $L^{+}\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  divisé par le sous-groupe qui stabilise  $n_w$ , vu comme point de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$  à valeurs dans  $\mathbb{F}_p$ , et  $S_{w,p}$  l'image fermée de l'application canonique  $L^{+}\mathcal{G}_{\mathbf{f},p} \rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$ ,  $g \mapsto gn_w$ . Le schéma  $C_{w,p}$  est dit la cellule de Schubert, il est irréductible, lisse, ne dépend que de  $w$  et s'identifie canoniquement à un ouvert dense de  $S_{w,p}$ , donc en particulier à un sous-schéma localement fermé de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$ . Le sous-schéma fermé  $S_{w,p}$  s'appelle la variété de Schubert associée à  $w$ , il est séparé de type fini, intègre et ne dépend que de  $w$ . Vu la décomposition de Bruhat  $W_{\mathbf{f}} \setminus \tilde{W}/W_{\mathbf{f}} \cong \mathcal{G}_{\mathbf{f}}(\mathbb{F}_p^{\text{alg}}[[u]]) \setminus G(\mathbb{F}_p^{\text{alg}}((t)))/\mathcal{G}_{\mathbf{f}}(\mathbb{F}_p^{\text{alg}}[[u]])$  (cf. prop. 4.2.1. de [BT72] ou la prop. 2.12 de [I]), la réunion des variétés de Schubert (ou des cellules de Schubert) recouvre topologiquement l'ind-schéma  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$ .

**Proposition 3.1.** *Les variétés de Schubert sont projectives, donc la grassmannienne affine  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$  est ind-projective.*

*Démonstration.* Supposons maintenant que  $H$  soit simplement connexe et que  $\mathbf{f} = \mathbf{a}$  soit l'alcôve dominante adhérente à l'origine. Choisissons d'abord une décomposition réduite  $\mathbf{w} = [s_{i_1} : \dots : s_{i_n}]$  de  $w = s_{i_1} \dots s_{i_n}$ , où les  $s_i$  désignent les réflexions par rapport aux cloisons  $\mathbf{f}_i$  de  $\mathbf{a}$  et qui constituent donc un système de générateurs du groupe de Weyl affine  $W_{\mathbf{a}}$ . Posons alors  $D_{\mathbf{w},p} := L^{+}\mathcal{G}_{\mathbf{f}_{i_1},p} \times^{L^{+}\mathcal{G}_{\mathbf{a},p}} \dots \times^{L^{+}\mathcal{G}_{\mathbf{a},p}} L^{+}\mathcal{G}_{\mathbf{f}_{i_n},p}/L^{+}\mathcal{G}_{\mathbf{a},p}$  : nous affirmons qu'il s'agit d'une fibration consécutive en droites projectives localement triviale pour la topologie de Zariski, donc représentable par une  $\mathbb{F}_p$ -variété lisse et projective de dimension  $n$ . Cela résulte par induction de ce que le faisceau quotient fppf  $L^{+}\mathcal{G}_{\mathbf{f}_{i,p}}/L^{+}\mathcal{G}_{\mathbf{a},p} = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1$  est une droite projective

et ce que l'application naturelle  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f},p} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1$  est localement scindable pour la topologie de Zariski. Remarquons qu'il y a aussi, d'une part, des immersions fermées naturelles  $D_{\mathbf{u},p} \rightarrow D_{\mathbf{w},p}$  pour chaque sous-élément  $\mathbf{u} \leq \mathbf{w}$  et correspondantes décompositions réduites  $\mathbf{u} \leq \mathbf{w}$  par rapport à l'ordre de Bruhat, et d'autre part, des morphismes surjectifs et birationnels  $D_{\mathbf{w},p} \rightarrow S_{w,p}$  qui commutent aux précédents. En effet, l'on a une décomposition  $L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a},p} = \prod_{\alpha \in I_{w^{-1}}} U_{\alpha,p} \ltimes L_{w^{-1}}^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a},p}$ , où les groupes radiciels sont mis dans un ordre quelconque, cf. 3.3, qui fournit une identification de  $C_{w,p} = \prod_{\alpha \in I_{w^{-1}}} U_{\alpha,p} w = w \prod_{\alpha \in w^{-1}I_{w^{-1}}} U_{\alpha,p}$  avec un espace affine de dimension  $l(w)$ . D'autre part,  $D_{\mathbf{w}}$  contient un ouvert produit tordu des  $C_{s_{i_j},p}$ , qui devient isomorphe par l'application produit vers  $LG_p$  à  $U_{\alpha_{i_1},p} U_{s_{i_1}(\alpha_{i_2}),p} \dots U_{w(\alpha_{i_n}),p} w = C_{w,p}$  grâce au fait classique que  $I_{w^{-1}} = \{\alpha_{i_1}, s_{i_1}(\alpha_{i_2}) \dots, w(\alpha_{i_n})\}$ , cf. lem. 7.101(2) et prop. 8.59(1) de [AB08]. Ceci étant, on en tire que  $D_{\mathbf{w},p} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$  se factorise à travers  $S_{w,p}$  et en est un isomorphisme au-dessus de  $C_{w,p}$ . En particulier,  $S_{w,p}$  est projective et ses sous-variétés de Schubert sont justement les  $S_{u,p}$  où  $u \leq w$ , donc la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$  est ind-projective.

Lorsque  $G_p$  n'est plus son propre dérivé ou lorsque la facette  $\mathbf{f}$  n'est plus une alcôve, on se ramène au cas précédent en procédant comme suit : l'image réciproque d'une variété de Schubert  $S_{w,\mathbf{f},p}$  par  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a},p}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$  est encore une variété de Schubert  $S_{w,\mathbf{a},p}$  pour un choix convenable de représentant  $w$  et l'application restreinte  $S_{w,\mathbf{a},p} \rightarrow S_{w,\mathbf{f},p}$  est une fibration localement triviale pour la topologie étale à fibres projectives lisses isomorphes à  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}/L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a},p}$  ; vu que le faisceau quotient fppf  $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}/\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^{\mathrm{dér}}$  est représentable par un schéma en groupes affine, l'application  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a},p}^{\mathrm{dér}}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a},p}}$  est une immersion fermée identifiant les variétés de Schubert correspondantes numérotées par  $w \in W_{\mathbf{a}}$ , donc il suffit de multiplier  $S_w$  à la gauche par un élément  $\tau \in \mathrm{St}_{\mathbf{a}}$  tel que  $\tau w \in W_{\mathbf{a}}$ .  $\square$

3.5. Il est temps d'analyser la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$  sur les entiers.

**Proposition 3.2.** *Le faisceau fppf  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$  est représentable par un ind-schéma ind-projectif sur  $\mathbb{Z}$  et l'application naturelle  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\mathrm{dér}}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$  identifie la source au réduit de la composante neutre du but.*

*Démonstration.* Observons d'abord que l'on a aussi des variétés de Schubert  $S_{w,\mathbf{f}}$  déterminées en tant qu'images fermées des applications  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$ ,  $g \mapsto gn_w$ , où  $n_w \in N(\mathbb{Z}((u)))$  est un antécédent quelconque de  $w$ . Celles-ci sont des schémas séparés plats, irréductibles et réduits, mais on ignore pour le moment si l'inclusion de schémas  $S_{w,\mathbf{f}} \otimes \mathbb{F}_p \supseteq S_{w,\mathbf{f},p}$  est une égalité (sauf lorsque  $p = 0$ , auquel cas la réponse est évidemment affirmative) ; en effet, sans l'hypothèse de connexité simple sur le groupe dérivé, cette égalité est typiquement fausse, cf. prop. 3.4 de [III]. De toute façon, il est aisé de voir que ces sous-schémas recouvrent topologiquement la grassmannienne tout entière, donc il reste à prouver leur projectivité. En répétant les arguments habituels, on arrive au cas simplement connexe à niveau d'Iwahori  $\mathbf{a}$ . Posons alors  $D_{\mathbf{w}} = \mathbb{P}_{i_1}^1 \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \mathbb{P}_{i_n}^1 := L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}_{i_1}} \times^{L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}} \dots \times^{L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}} L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}_{i_n}}/L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$  pour une décomposition réduite  $\mathbf{w}$  de  $w$ . Le fait que  $D_{\mathbf{w}} \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbb{Z}$  soit représentable par une composition de fibrations en droites projectives localement triviales pour la topologie de Zariski



résulte de l'existence de Levis comme au 3.2. Ceci étant, le morphisme naturel  $D_w \rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{G}_f}$  induit par multiplication des coordonnées se factorise à travers  $S_{w,\mathbf{a}}$  et en est birationnel. L'application considérée est schématiquement dense et projective, car les variétés de Schubert sont séparées, donc en particulier  $S_{w,\mathbf{a}}$  en est de même projective. Lorsqu'on aura construit au 3.6, évidemment sans qu'aucune circularité n'échoie, une cellule ouverte négative  $C_1^-$  de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_\mathbf{a}}$  contenant  $\prod_{w \in I_{w^{-1}}} U_{w(\alpha)}$  comme fermé, ce dernier s'identifiera par le morphisme orbite à un ouvert schématiquement dense  $C_w$  de  $S_w$ , au-dessus duquel la résolution de Demazure deviendra un isomorphisme.

Il reste à montrer que  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_\mathbf{a}}$  est réduit si l'on suppose  $G = G^{\text{dér}}$  (comparer avec le cor. 11 de [Fa03] ou la prop. 9.9 de [PR08]). Soit  $X$  un sous-schéma fermé de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_\mathbf{a}}$  et, en fixant  $w \in W_a$ , prenons un point générique  $x$  du support de l'annulateur du faisceau cohérent d'idéaux  $\mathcal{I}_w$  définissant l'intersection schématique  $S_w \cap X$ . Soit  $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x) \rightarrow (A, \mathfrak{m})$  un homomorphisme local fidèlement plat d'anneaux locaux noethériens tel que  $A$  soit son propre séparé complété  $\mathfrak{m}$ -adique et le corps résiduel  $A/\mathfrak{m}$  soit algébriquement clos. Alors  $\mathcal{I}_w A$  est annulé par une puissance  $\mathfrak{m}^n$  de l'idéal maximal de  $A$  et il s'agit donc d'un module artinien. En particulier, la suite décroissante  $\mathcal{I}_v A$  pour  $v \geq w$  est stationnaire ; notons  $I$  la valeur limite. Si  $I$  n'est pas nulle, on trouve grâce au théorème d'intersection de Krull un point de  $X$  à valeurs dans  $A/\mathfrak{m}^N$  pour un entier  $N$  assez grand qui ne provient pas d'aucun  $S_v$ . En outre, ce point se laisse représenter par  $g \cdot 1$  avec  $g \in LG(A/\mathfrak{m}^N)$  et on affirme qu'il s'exprime sous la forme d'un produit d'éléments de  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}_i}(A/\mathfrak{m}^N)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  : c'est la décomposition de Bruhat du [I] lorsque  $N = 1$  ; sinon, on argumente par récurrence sur  $N$  en faisant usage de la lissité des schémas en groupes parahoriques  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_i}$ , pour en ramener la vérification au cas de la grosse cellule (voir le lemme ci-dessous). Or les schémas réduits  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  opèrent sur l'ind-schéma  $S = \varinjlim_w S_w$ , donc il s'ensuit forcément que  $I = 0$  et donc on trouve  $v \geq w$  tel que  $x$  n'appartienne au support de l'annulateur de  $\mathcal{I}_v$ . Par descente noethérienne, on arrive à un certain élément  $u \in W_a$  tel que cet annulateur soit égal à  $\mathcal{O}_X$ , ce qui revient à dire que  $X \subseteq S_u$ .  $\square$

Pendant cette preuve, on a eu besoin des calculs matriciels du lemme suivant :

**Lemme 3.3.** *Supposons que  $G = G^{\text{dér}}$ . Étant donné un anneau  $R$ , le sous-groupe élémentaire de  $LG(R)$  engendré par les  $LT(R)$  et  $LU_a(R)$  est contenu dans le sous-groupe engendré par les  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}_i}(R)$ , où  $\mathbf{f}_i$  parcourt les cloisons de n'importe quelle alcôve  $\mathbf{a}$ .*

*Démonstration.* Dans le cas des sous-groupes radiciels  $U_a$ , on commence par observer que le groupe des arcs à coefficients entiers  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}_i}(\mathbb{Z})$  contient un représentant dans  $LN(\mathbb{Z})$  de la réflexion fondamentale  $s_i$  par rapport au mur déterminé par  $\mathbf{f}_i$ , la partie desquelles engendre  $W_a$  et il suffit de remarquer qu'on obtient le groupe  $LU_a(R)$  tout entier en conjuguant  $L^+ \mathcal{U}_{a,\mathbf{a}}$  par des représentants convenables de translations affines de  $W_a$ . Quant au sous-groupe de Cartan  $T$ , on utilise la décomposition  $T = \prod_{a \in \Delta} T_a$  avec  $T_a$  égal au sous-groupe de Cartan d'un sous-schéma en groupes localement fermé de  $G$  de la forme  $R_{\mathbb{Z}[v_a^{\pm 1}]/\mathbb{Z}[u^{\pm 1}]} \text{SL}_2$  engendré par  $U_a$  et  $U_{-a}$ . Ceci ramène le problème au groupe classique  $\text{SL}_2$ , pour lequel on a la relation fondamentale, cf. [Fa03], p. 53.  $\square$

3.6. Dans le numéro présent, on va mettre en valeur le fait que les schémas en groupes  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  ont été originalement définis dans un cadre minimal et non formel, c'est-à-dire, au-dessus de  $\mathbb{Z}[u]$  plutôt que  $\mathbb{Z}[[u]]$ , pour introduire les groupes d'arcs opposés à  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ , lorsque  $\mathbf{a}$  est l'alcôve dominante contenant l'origine et  $G = G^{\text{dér}}$  est son propre dérivé.

Commençons par des raisonnements assez généraux : soient  $R$  un anneau quelconque,  $X$  un  $R[u^{\pm 1}]$ -schéma affine de présentation finie,  $\mathcal{X}^+$ , resp.  $\mathcal{X}^-$  un  $R[u]$ - resp.  $R[u^{-1}]$ -modèle affine de présentation finie de  $X$ . Alors on a les foncteurs en groupes suivants sur les  $R$ -algèbres  $S$ , qui sont tous représentables par des ind- $R$ -schémas :

$$L_u X = X(S((u))), L_u^+ \mathcal{X}^+(S) = \mathcal{X}^+(S[[u]]), L_u^- \mathcal{X}^-(S) = \mathcal{X}^-(S[u^{-1}])$$

$$L_{u^{-1}} X(S) = X(S((u^{-1}))), L_{u^{-1}}^+ \mathcal{X}^-(S) = \mathcal{X}^-(S[[u^{-1}]]), L_{u^{-1}}^- \mathcal{X}^+(S) = \mathcal{X}^+(S[u])$$

Le fermé  $L_u^+ \mathcal{X}^+$  de  $L_u X$  est représentable par un schéma affine sur  $R$ , qui est la limite projective de  $R$ -schémas affines de type fini, tandis que le fermé  $L_u^- \mathcal{X}^-$  est un ind-schéma ind-affine de ind-présentation finie. On se servira de la symétrie de ce cadre pour ramener la preuve de certaines propriétés du groupe minimal  $L_u^- \mathcal{X}^-$  à celles du formel  $L_{u^{-1}}^+ \mathcal{X}^-$ . Dans le cas qui nous intéresse, posons  $R = \mathbb{Z}$ ,  $X = G = G^{\text{dér}}$ ,  $\mathcal{X}^+ = \mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+$ , où  $\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+$  est le  $\mathbb{Z}[u]$ -groupe dont il s'agit  $\mathbf{a}_+$  est l'alcôve dominante adhérente à l'origine, et enfin  $\mathcal{X}^- = \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$  est le  $\mathbb{Z}[u^{-1}]$ -groupe obtenu de la même façon en remplaçant  $u$  par  $u^{-1}$ ,  $\mathbf{a}_- = -\mathbf{a}_+$  étant l'unique alcôve anti-dominante adhérente à l'origine.

**Proposition 3.4.** *L'orbite  $C_w^- = L^- \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- n_w$ , pour  $n_w \in N(\mathbb{Z}[u^{\pm 1}])$  un antécédent de  $w \in W_a$ , est un sous-schéma localement fermé de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+}$  de codimension  $l(w)$ , tel que l'espace topologique sous-jacent à son adhérence schématique  $S_w^-$  coïncide avec la réunion  $\bigcup_{w' \geq w} |C_{w'}^-|$ . En outre, si l'on note  $s_i$  les réflexions simples de  $W_a$  par rapport aux murs de  $\mathbf{a}_+$ , alors les  $S_{s_i}^-$  sont des diviseurs de Cartier déterminés par l'annulation d'une section globale d'un fibré en droites  $\mathcal{L}_i$  stable par  $L^- \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}$ , dont le degré obtenu par restriction à  $S_{s_j}^+ \cong \mathbb{P}_j^1$  est égal à  $\delta_{ij}$ .*

*Démonstration.* Avant de commencer l'analyse géométrique, signalons les faits suivants provenant de la théorie des groupes de Kac-Moody (voir les articles et exposés suivants de J. Tits [Ti87], [Ti89] et [Ti92] ainsi que le survol [Mar18]) : si  $k$  désigne n'importe quel corps, alors  $G(k[u^{\pm 1}])$  est le groupe de Kac-Moody minimal associé à l'algèbre  $\mathfrak{g}$  sur le corps  $k$  quitte à faire d'extensions par  $k^\times$  (voir aussi le 3.8) ; les sous-groupes  $\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+(k[u])$ ,  $\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-(k[u^{-1}])$  sont des Borels opposés et forment donc une  $BN$ -paire jumelée, ce qui fournit des bijections  $W_a \cong N(k[u^{\pm 1}])/S(k) \cong \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-(k[u^{-1}]) \setminus G(k[u^{\pm 1}])/\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+(k[u])$ . Par un argument de densité, on arrive également à la bijection  $W_a \cong L^- \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-(k) \setminus LG(k)/L\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+(k)$ .

Faisons quelques préparatifs concernant les analogues négatifs des décompositions radicielles du 3.3. Notons qu'on a une décomposition de Levi  $L_{u^{-1}}^+ \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- = S \ltimes R_u L_{u^{-1}}^+ \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$  et, comme  $L^- \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$  contient  $S$ , il en résulte que l'on a de même une décomposition de Levi  $L^- \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- = S \ltimes R_u L^- \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$ , dont le sous-groupe distingué sera noté  $L^{--} \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$  pour alléger les notations. Ensuite, on voudrait obtenir de décompositions mettant en évidence des sous-groupes radiciels  $U_\alpha$  comme au 3.2. En prenant les intersections avec  $L^{--} \mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$  de ces décompositions

pour  $L_{u^{-1}}^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$  et en faisant usage de ce que les  $U_\alpha$  avec  $\alpha$  réelle figurent déjà dans le cadre minimal, on en déduit le même type de décompositions pour  $L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$ . En particulier, on a de même  $L_w^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- = L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \cap n_w^{-1}L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- n_w$  et  $\prod_{\alpha \in I_w^-} U_\alpha = L_w^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \cap n_w^{-1}L^{++}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+ n_w$ , où l'on note  $I_w^- = \Phi_-^{\text{af}} \cap w^{-1}\Phi_+^{\text{af}}$ .

Montrons d'abord le fait fondamental que  $L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+}$  est représentable par une immersion ouverte, ce qui équivaut au même énoncé pour l'application produit  $L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \times L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+ \rightarrow LG$ . On peut vérifier cela après le changement de base  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}'$ . Puisque  $G \otimes \mathbb{Z}'((u)) \rightarrow \text{R}_{\mathbb{Z}'((v))/\mathbb{Z}'((u))} H$  est une immersion fermée, on conclut que les morphismes de  $\mathbb{Z}'$ -ind-schémas en groupes  $LG \rightarrow LH$ ,  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+ \rightarrow L^+\mathcal{H}_{\mathbf{a}_+}^+$  et  $L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \rightarrow L^{--}\mathcal{H}_{\mathbf{a}_-}^-$  sont représentables par des immersions fermées. Il suffit maintenant d'observer que le fermé  $L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \times L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+$  de  $L^{--}\mathcal{H}_{\mathbf{a}_-}^- \times L^+\mathcal{H}_{\mathbf{a}_+}^+$  n'est plus que l'intersection de ce dernier avec  $LG$  dedans  $LH$  : ceci est bien connu au-dessus de  $\mathbb{Z}'[\frac{1}{e}]$  grâce aux techniques des  $\Gamma_0$ -invariants ; en général, cela est une conséquence de l'ind-platitude de cette intersection, comme ouvert de l'ind-schéma  $LG$  ind-plat sur  $\mathbb{Z}'$  (utiliser le fait que  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+} = \varinjlim_{w \in W_a} S_w^+$  ; en général, voir aussi le 9. de [III]).

Par suite, le translaté  $n_w L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$  pour n'importe quel représentant  $n_w \in N(\mathbb{Z}[u^{\pm 1}])$  de  $w \in W_a$  détermine un ouvert de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+}$  et, d'après les décompositions ci-dessus, on voit que l'ouvert  $n_w L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- = L_{w^{-1}}^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \times \prod_{\alpha \in I_{w^{-1}}^+} U_\alpha w = L_w^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \times C_w^+$  contient l'orbite  $L^-\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- n_w = L_{w^{-1}}^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- n_w$  en tant que fermé. Le jeu à la fois combinatoire et géométrique de G. Faltings, cf. la p.48 de [Fa03], permet de déduire que  $\overline{|C_w^-|} = \bigcup_{w' \geq w} |C_{w'}^-|$  et que la réunion  $\Omega_S = \bigcup_{w \in S} n_w C_1^-$ , où  $w$  parcourt une partie finie  $S$  de  $W_a$  close inférieurement par l'ordre de Bruhat, est un ouvert stable par  $L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$ . Choisissons alors l'ensemble  $I_n$  qui consiste en toutes les racines réelles de hauteur inférieure à  $n$  avec  $n$  un entier assez grand, de telle manière que  $L_n^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$  soit contenu dans  $L_{w^{-1}}^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$  pour tout  $w \in S$ . Ceci entraîne que le faisceau quotient  $L_n^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \setminus \Omega_S$  pour la topologie plate est représentable par la réunion des espaces affines lisses  $L_n^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \setminus n_w C_1^- = L_n^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \setminus L_{w^{-1}}^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \times C_w^+ \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{|I_n|}$ . De plus, vu que l'adhérence topologique de  $C_w^-$ ,  $w \in S$ , dans  $\Omega_S$  peut être calculée après passage au quotient par  $L_n^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^-$ , on obtient, en grandissant  $S$  arbitrairement pour recouvrir la grassmannienne toute entière, un sous-ind-schéma fermé  $S_w^-$  de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+}$  contenant l'orbite  $C_w^-$  comme un ouvert schématiquement dense. En réalité, en remarquant que  $L_n^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \setminus (S_{s_i}^- \cap \Omega_S)$  est un sous-schéma intègre de codimension 1 d'un schéma lisse, on arrive à des fibrés en droites  $\mathcal{L}_i$  sur  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}^+}$  munis d'une section globale déterminée par  $S_{s_i}^-$ . Les généralités combinatoires entraînent que l'intersection  $S_{s_i}^- \cap \mathbb{P}_j^1$  est vide et, afin de calculer le degré de  $\mathcal{L}_i$  restreint à  $\mathbb{P}_i^1$ , on considère l'ouvert  $\Omega_{\{1, s_i\}} = L_{s_i}^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- \times \mathbb{P}_i^1$ , dont l'intersection avec  $L_{s_i}^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}^- s_i$  a évidemment degré 1.  $\square$

Lorsqu'on aura démontré au 3.7 que les variétés de Schubert positives  $S_w$  sont normales, on obtiendra la description ci-dessous du groupe de Picard rigidifié de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_f}$ , cf. cor. 12 de [Fa03].



**Corollaire 3.5.** *Si  $R$  est un anneau connexe, alors le groupe de Picard rigidifié  $\text{Pic}(\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}, R})$  de la grassmannienne affine  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}, R}$  au-dessus de  $R$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^{\dim \mathbf{f} + 1}$ , engendré par les descendus des fibrés en droites  $\mathcal{L}_i$  introduits ci-dessus pour chaque réflexion simple  $s_i$  ne contenant pas  $\mathbf{f}$ .*

Finalement on montre un théorème d'uniformisation pour les champs modulaires des fibrés sous quelques schéma en groupes au-dessus de la droite projective. Soit  $\mathbf{f}_+$  (resp.  $\mathbf{f}_-$ ) une facette de  $\mathcal{A}(G, S, \mathbb{Q}((u)))$  (resp.  $\mathcal{A}(G, S, \mathbb{Q}((u^{-1})))$ ) et notons  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}$  le schéma en groupes sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  obtenu à partir du  $\mathbb{Z}[u]$ -groupe  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+}$  et du  $\mathbb{Z}[u^{-1}]$ -groupe  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_-}$  par recollement le long des identifications naturelles  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+} \otimes \mathbb{Z}[u^{\pm 1}] \cong G \cong \mathcal{G}_{\mathbf{f}_-} \otimes \mathbb{Z}[u^{\pm 1}]$ . Le lemme de descente de Beauville-Laszlo, cf. th. de [BL95], en fournit un morphisme de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+}}$  dans le champ algébrique  $\text{Fib}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}}$  lisse et localement de type fini qui paramètre les  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}$ -fibrés sur la droite projective. Lorsque  $\mathbf{f}_+ = \mathbf{a}_+$  et  $\mathbf{f}_- = \mathbf{a}_-$  comme plus haut, alors la cellule ouverte  $L^{--}\mathcal{G}_{\mathbf{a}_-}$  de  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+}}$  coïncide avec l'image réciproque du sous-champ ouvert de  $\text{Fib}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}, \mathbb{P}^1}$  formé des fibrés triviaux : en effet, cela se démontre à la suite de [HR18a], lem. 3.1, dont le point plus délicat est de vérifier l'annulation de certaines classes d'obstruction dans le premier groupe de cohomologie de l'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}_{\mathbf{a}_+, \mathbf{a}_-}$ , laquelle admet une écriture en tant que somme des fibrés vectoriels  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}(-1)$ ,  $e_*\mathcal{O}$  et  $e_*\mathcal{O}(-1)$  comptés avec leur ordre de multiplicité, où  $e$  désigne l'application  $e$ -puissance  $\mathbb{P}_v^1 \rightarrow \mathbb{P}_u^1$  induite par  $u = v^e$ .

**Proposition 3.6.** *L'application naturelle  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+}} \rightarrow \text{Fib}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}, \mathbb{P}^1}$  permet d'identifier le membre de droite au champ quotient  $[L^-\mathcal{G}_{\mathbf{f}_-} \setminus \text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+}}]$  pour la topologie étale.*

*Démonstration.* On ne donne qu'une esquisse de la preuve comme dans le th. 4 de [Hei10]. L'idée consiste à montrer que l'application donnée est formellement lisse, essentiellement surjective et ouverte : la première propriété est immédiate d'après le critère infinitésimal ; la deuxième peut être vérifiée au-dessus des corps algébriquement clos et résulte du théorème de Steinberg, à peu près (voir la preuve du th. 4 de [Hei10]), qui est aussi applicable aux groupes pseudo-réductifs exotiques basiques et pseudo-déployés lorsque  $[K : K^p] = p$ , cf. prop. 7.3.3.(1) de [CGP15] ; et la dernière découle d'un calcul d'espaces tangents et la preuve du lemme 3.3, lesquels permettent de factoriser une charte lisse de  $\text{Fib}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}}$  en un morphisme dans la grassmannienne affine suivi de la projection canonique, cf. lem 6 de [Hei10].  $\square$

Notons que l'article [DS95] de V. G. Drinfeld et C. Simpson démontre cette proposition dans le cas où le schéma en groupes dont il s'agit est réductif, connexe et déployé, en la déduisant de l'existence locale pour la topologie plate d'une réduction à un sous-groupe de Borel. Bien qu'il y ait un candidat évident dans notre cadre, à savoir le sous-groupe fermé  $\mathcal{ZU}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}$  obtenu aussi par recollement, nous ne savons plus comment prouver cette affirmation, vu que leur quotient cesse d'être projectif même sur  $\mathbb{Z}[u^{\pm 1}]$ , et donc le raisonnement de la prop. 25 de [Hei10] ne peut pas être adapté si facilement. L'assertion est toutefois vraie sur  $\mathbb{Z}[1/e]$ , puisque  $\mathcal{ZU}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}$  devient un Borel de  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-}$ , et aussitôt lorsque restreinte aux anneaux parfaits de caractéristique  $e$ , car les données considérées s'identifient dans ce cas à celles d'un certain groupe déployé, cf. [I], 2.12.

3.7. Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant sur les propriétés géométriques de  $S_{w,\mathbf{f}}$  à la suite de [Fa03] et [PR08].

**Théorème 3.7.** *Les variétés de Schubert  $S_{w,\mathbf{f}}$  sont normales et commutent aux changement de base arbitraires, c'est-à-dire, on a l'égalité  $S_{w,\mathbf{f}} \otimes \mathbb{F}_p = S_{w,\mathbf{f},p}$  de sous-schémas fermés de  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f},p}}$ . D'ailleurs, les variétés  $S_{w,\mathbf{f},p}$  sont aussi normales, de Cohen-Macaulay, rationnelles et leurs frobenii sont compatiblement scindables dès que  $p$  est positif.*

Rappelons qu'un schéma  $X$  de caractéristique  $p$  est dit à frobenius scindable si l'homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{O}_X \rightarrow F_*\mathcal{O}_X$  correspondant au frobenius absolu possède une section. On renvoie à [BK05] pour toutes les propriétés basiques de cette notion fondamentale pendant la démonstration ci-dessous.

*Démonstration.* Comme d'habitude, on peut supposer sans perdre de généralité que  $G = G^{\mathrm{dér}}$  et que  $\mathbf{f} = \mathbf{a}$  est la seule alcôve dominante telle que l'origine en soit un point adhérent (et donc on supprime cet indice jusqu'à la fin de la démonstration). Alors, considérons la décomposition de Stein  $D_{\mathbf{w},p} \rightarrow \tilde{S}_{w,p} \rightarrow S_{w,p}$  et notons les faits suivants qui se démontrent comme dans le lem. 9 de [Fa03] ou dans la prop. 9.7 de [PR08] : le schéma au milieu s'identifie au normalisé du schéma intègre  $S_{w,p}$  dans son corps de fonctions, l'application  $\tilde{S}_{w,p} \rightarrow S_{w,p}$  est un homéomorphisme universel, les images directes supérieures du faisceau structural par  $D_{\mathbf{w},p} \rightarrow \tilde{S}_{w,p}$  s'annulent, les normalisées  $\tilde{S}_{w,p}$  satisfont à toutes les propriétés cherchées dans l'énoncé du théorème au sens où  $\tilde{S}_{u,p} \rightarrow \tilde{S}_{w,p}$  sont des immersions fermées pour tout  $u \leq w$  à frobenii compatiblement scindables. Sous-jacent à tout cela, se trouve le point le plus délicat, à savoir, l'existence d'un scindage du Frobenius de  $D_{\mathbf{w},p}$  compatible à chacune de ses sous-variétés de Demazure : cela résulte de la construction<sup>1</sup> des fibrés en droites  $\mathcal{L}_i$  donnée au 3.6.

Maintenant il faut qu'on introduise les globalisés des objets considérés auparavant - c'est le cas des variétés de Schubert  $S_w$  et de Demazure  $D_{\mathbf{w}}$  ; quant aux normalisées  $\tilde{S}_w$ , prenons à son tour le spectre affine de l'image directe de  $\mathcal{O}_{D_{\mathbf{w}}}$  dans  $S_w$ , qui ne dépendent pas du choix de l'une décomposition réduite  $\mathbf{w}$ , puisque il s'identifie au normalisé du schéma intègre  $S_w$ . Alors  $\tilde{S}_w$  possède des propriétés formidables : il commute aux changements de base quelconques, ce qui revient à dire que  $\tilde{S}_w \otimes \mathbb{F}_p = \tilde{S}_{w,p}$  pour chaque nombre premier  $p$  (grâce à l'annulation des images directes supérieures du faisceau structural), et les morphismes canoniques  $\tilde{S}_u \rightarrow \tilde{S}_w$  sont des immersions fermées (appliquer le lemme de Nakayama et le fait que l'application réduite modulo  $p$  est une immersion fermée). Considérons alors l'ind-schéma  $\tilde{S} = \varinjlim_{w \in W_a} \tilde{S}_w$  filtré par l'ordre de Bruhat, sur lequel les groupes d'arcs  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  de chacune des facettes  $\mathbf{f}$  contenues dans l'adhérence de  $\mathbf{a}$  opèrent de manière naturelle, grâce

<sup>1</sup>Ceci remplit une lacune dans la démonstration de la prop. 9.6 de [PR08]. En effet, observons que les arguments de [Go01] ou [Go03] ne permettent pas de trouver ces fibrés en droites, contrairement à ce qui est affirmé dans [PR08] (comparer avec l'erreur du 10.a.1. de [PR08] et sa correction dans la rem. 2.1 de [Zh14]). Néanmoins le th. de normalité de [PR08] n'était jamais en péril, car l'on n'utilise les fibrés en droites que pour dériver le scindage compatible des frobenii, lequel est à disposition dans le cadre de Kac-Moody, cf. 3.8.

aux propriétés universelles des normalisées. En effet, on a un morphisme  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \times \tilde{S}_w \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}}}$  déduit de la loi d'opération de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  sur la grassmannienne affine qui se factorise en la composition  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \times \tilde{S}_w \rightarrow L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \times \tilde{S}_w \rightarrow S_{w'} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}}}$ . Or, comme  $L^n\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  est lisse sur  $\mathbb{Z}$ , le produit fibré au-dessus de  $\mathbb{Z}$  est encore normal et d'autre part son image fermée est une variété de Schubert (car intègre et stable par  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ ) qu'on peut supposer égale à  $S_{w'}$ , donc on obtient la factorisation désirée par  $\tilde{S}_{w'}$ . La limite projective de telles applications donne la loi d'opération cherchée sur  $\tilde{S}$ .

Le but actuel est de démontrer que  $\tilde{S} \rightarrow S$  est un isomorphisme, ce qui est bien connu en caractéristique 0 et découle des méthodes analytiques introduites en théorie de Kac-Moody - nous renvoyons le lecteur qui s'y intéresse à 9.f de [PR08], au th. 2.16 de [Kum87] ou à l'appendice de [Kum97]. Pour cela, on affirme qu'il suffit de construire une section de l'homomorphisme d'anneaux  $\hat{\mathcal{O}}_{\tilde{S}_w, 1_p}^{\mathrm{hs}} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{S}_w, 1_p}^{\mathrm{hs}}$  pour chaque nombre premier fini  $p$ , où  $1_p$  désigne la réduction modulo  $p$  de la section unité de  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{a}}}$  : dans ce cas l'application  $\psi_w : \tilde{S}_w \rightarrow S_w$  entre schémas plats serait un isomorphisme dans un voisinage de  $1_p$  et donc le support du faisceau cohérent conoyau de  $\mathcal{O}_{S, w} \rightarrow \psi_{w,*}\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}$ , qui est stable par  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ , serait trivial. Quant à la construction de la section elle-même, on procède par un argument inductif de déformation. Soit  $\hat{\mathcal{O}}_{D_w, 1_p} \cong \check{\mathbb{Z}}_p[[t_1, \dots, t_{l(w)}]]$  un isomorphisme d'anneaux, où l'on note  $\check{\mathbb{Z}}_p$  le complété  $p$ -adique de l' hensélisé strict  $\mathbb{Z}_p^{\mathrm{nr}}$  de  $\mathbb{Z}$  le long de  $p$ , et prenons la suite d'idéaux  $I_n = (t_1, \dots, t_n) \cap \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{S}_w, 1_p}^{\mathrm{hs}}$  rempliant les conditions suivantes : leurs conoyaux  $A_n$  sont des algèbres plates sur  $\check{\mathbb{Z}}_p$ , locales strictement henséliennes et forment une suite d'épaississements de degré 1, telles que leur limite inverse redonne  $\hat{\mathcal{O}}_{\tilde{S}_w, 1_p}^{\mathrm{hs}}$ . Il y a des sections canoniques  $s_n : \mathrm{Spec} A_n \rightarrow S_w$  qu'on peut écrire sous la forme  $[g_n]$  pour un certain élément  $g_n \in LG(A_n)$ , d'après l'hypothèse sur  $A_n$ , et il faut justement voir par récurrence sur  $n$  que les  $g_n$  appartiennent au sous-groupe engendré par les  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}(A_n)$ . Fixons d'abord une telle écriture  $g_n = \prod h_i$ , dont chacun des facteurs du produit appartient à un certain  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}(A_n)$  (pour des facettes éventuellement différentes) et relevons-les à des points  $\tilde{h}_i$  à valeurs dans  $A_{n+1}$  ; or l'élément  $g_{n+1} \prod (\tilde{h}_i)^{-1}$  se réduit en un élément de  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}(A_n)$  et on peut supposer, en multipliant par l'inverse d'un antécédent de cette image, qu'il s'annule. Donc  $g_{n+1} \prod (\tilde{h}_i)^{-1}$  détermine un point à valeurs dans  $A_{n+1}((u))$  de la grosse cellule par des raisonnements topologiques, et on applique le lem. 3.3. Considérons maintenant la section  $\tilde{s}_n : \mathrm{Spec} A_n \rightarrow \tilde{S}$  obtenue en opérant sur le membre de droite avec une telle factorisation sympathique de  $g_n$  ; or, compte tenu de l'équivariance du morphisme  $\tilde{S} \rightarrow S$ , il s'agit d'un relèvement de  $s_n$  à  $\tilde{S}$ , nécessairement unique vu que  $A_n$  est plat sur  $\mathbb{Z}$ ,  $\tilde{S}$  est ind-séparé et isomorphe à  $S$  en caractéristique 0. En particulier, les  $\tilde{s}_n$  se factorisent à travers  $\tilde{S}_w$  et s'assemblent les unes avec les autres pour donner une section  $\mathrm{Spec} \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{S}_w, 1_p}^{\mathrm{hs}} \rightarrow \tilde{S}_w$ , l'anneau en question étant local, ce qui complète la preuve.  $\square$

3.8. Nous arrivons maintenant au paragraphe concernant le lien entre les schémas en groupes parahoriques au-dessus de  $\mathbb{Z}[u]$  et les schémas en groupes construits par O. Mathieu dans le cadre de Kac-Moody affine (voir le ch. I de [Mat88]), à la fin duquel on pourra

regarder les  $\mathcal{G}_f$  comme des sortes de « délacés » des groupes de Kac-Moody affines à coefficients entiers.

Rappelons les notions basiques sur les algèbres de Kac-Moody et les groupes qui leur sont associés. Une matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$  est dit être de Cartan généralisée si les conditions suivantes sont remplies :  $a_{ii} = 2$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  et  $a_{ij} \neq 0$  si et seulement si  $a_{ji} \neq 0$ . Notant  $r$  le corang de  $A$ , on appelle réalisation entière de  $A$  la donnée  $(\mathfrak{h}, P, P^\vee, \Pi, \Pi^\vee)$  d'un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathfrak{h}$  de dimension  $n + r$ , un réseau  $P^\vee$  de  $\mathfrak{h}$  et son dual  $P$  dans  $\mathfrak{h}^*$  et des parties libres  $\Pi = \{h_i : i = 1, \dots, N\} \subseteq \mathfrak{h}$  et  $\Pi^\vee = \{\alpha_i : i = 1, \dots, N\} \subseteq \mathfrak{h}^*$  tels que  $\alpha_i(h_j) = a_{ji}$  et, lorsque on pose  $Q = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z}\alpha_i$ ,  $Q^\vee = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z}h_i$ , alors  $Q^\vee \subseteq P^\vee$ ,  $Q \subseteq P$  et  $P^\vee/Q^\vee$  est sans torsion. L'algèbre de Kac-Moody  $\mathfrak{g}$  attachée à  $A$  est la  $\mathbb{Q}$ -algèbre de Lie engendrée par  $\mathfrak{h}$  et des générateurs  $e_i, f_i, i = 1, \dots, N$ , soumise à quelques relations faisant de  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan, des vecteurs propres  $e_i$ , resp.  $f_i$  pour l'opération adjointe de  $\mathfrak{h}$  à valeurs propres  $\alpha_i$  resp.  $-\alpha_i$  et tels que  $[e_i, f_i] = h_i$  (voir le ch. I de [Mat88] ou les cours [Ti81], [Ti82] et exposés [Ti89] de J. Tits pour une liste complète). Alors le système de racines  $\Phi$  de  $\mathfrak{g}$  suivant  $\mathfrak{h}$  est contenu dans  $Q$  ayant les  $\alpha_i$  comme racines simples.

Construisons le sous-groupe de Borel  $B$  au-dessus de  $\mathbb{Q}$  associé à l'algèbre borélienne  $= \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Q^+} \mathfrak{n}_\alpha$  : son tore maximal  $T$  est le seul  $\mathbb{Q}$ -tore déployé à isomorphisme près à groupe de cocaractères  $P^\vee$  ; le radical (pro-)unipotent  $U$  est la limite projective  $\varprojlim U_n$ , où  $U_n$  est l'unique  $\mathbb{Q}$ -groupe algébrique linéaire lisse, connexe et unipotent à isomorphisme près tel que  $\text{Lie } U_n = \mathfrak{n}_+ / \bigoplus_{\alpha \in \Phi, \text{ht}(\alpha) > n} \mathfrak{n}_\alpha$  ; enfin, on vérifie que  $T$  opère sur  $U$  de façon compatible avec l'opération de  $\mathfrak{h}$  sur  $\hat{\mathfrak{n}}_+$  et on pose  $B = T \ltimes U$ . On en définit de même les groupes paraboliques minimaux  $P_i$  pour  $1 \leq i \leq N$ , dans lesquels le Borel  $B$  se plonge comme sous-schéma fermé : le tore  $T$  sera remplacé par le  $\mathbb{Q}$ -groupe algébrique réductif déployé  $L_i$  correspondant à la donnée radicielle  $(P^\vee, P, \pm h_i, \pm \alpha_i)$ , le groupe pro-unipotent  $U$  à son tour sera remplacé par le groupe  $U_i$  correspondant à  $\mathfrak{n}_i = \bigoplus_{\alpha_i \neq \alpha \in Q^+} \mathfrak{n}_\alpha$  et l'on a  $P_i = L_i \ltimes U_i$ . On renvoie au ch. I de [Mat88] et au 6.2 de [Ti89] pour un traitement plus détaillé ; notre définition des radicaux unipotents n'est pas strictement la leur, mais bien celle du ch. VI de [Kum02], et l'équivalence entre ces définitions découle essentiellement des calculs explicites.

En ce qui concerne les modèles entiers, la stratégie adoptée pour les définir remonte déjà à Kostant [Kos66] et fut menée dans le présent cadre par J. Tits [Ti81] et [Ti82] - elle consiste à prendre une  $\mathbb{Z}$ -forme convenable  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g})$  de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ , à savoir celle engendrée par les  $\frac{e_i^n}{n!}, \frac{f_i^n}{n!}$  et  $\binom{h_i}{n}$ . Alors on peut prolonger le  $\mathbb{Q}$ -groupe algébrique  $U$  en un schéma en groupes affine plat  $\mathcal{U}$  au-dessus de  $\mathbb{Z}$ , en prenant pour anneau de sections globales la partie de  $\Gamma(U, \mathcal{O})$  dont les fonctions appliquent  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{n}_+)$  dans  $\mathbb{Z}$  par le crochet naturel  $\Gamma(U, \mathcal{O}) \times \mathcal{U}(\mathfrak{n}_+) \rightarrow \mathbb{Z}$  provenant de l'identification de  $\text{Dist}(U_n)$  avec l'algèbre enveloppante de Lie  $U_n$ . De la même façon on construit un modèle entier  $\mathcal{U}_i$  de  $U_i$  et il reste seulement à remarquer que les schémas en groupes de Chevalley  $T$  resp.  $L_i$  opèrent encore sur  $\mathcal{U}$ , resp.  $\mathcal{U}_i$ , de sorte qu'on forme leurs produits semi-directs  $\mathcal{B} = T \ltimes \mathcal{U}$ , resp.  $\mathcal{P}_i = L_i \ltimes \mathcal{U}_i$ .

Lorsqu'on a les schémas en groupes sur  $\mathbb{Z}$ , les variétés de Demazure  $D_{\mathfrak{g}, \mathbf{w}}$  sont construites comme des produits tordus  $\mathcal{P}_{i_1}/\mathcal{B} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \mathcal{P}_{i_n}/\mathcal{B} := \mathcal{P}_{i_1} \times^{\mathcal{B}} \dots \times^{\mathcal{B}} \mathcal{P}_{i_n}/\mathcal{B}$ . La construction des variétés de Schubert  $S_w$  dans le cadre de Kac-Moody nécessite la théorie des modules

irréductibles  $L(\Lambda)$  à poids plus grand dominant  $\lambda \in P^+$ . Alors  $S_{\mathfrak{g},w}$  est définie comme l'image fermée de l'orbite  $\mathcal{B} \cdot w\lambda$  dans l'espace projectif (éventuellement infini)  $\mathbb{P}(L(\Lambda))$  pour un poids strictement dominant  $\lambda \in P^{++}$  quelconque, duquel la variété de Schubert ne dépend pas vraiment. De plus, les  $S_{\mathfrak{g},w}$  sont toujours normales dès que la base est normale, commutent aux changements de base quelconques et portent des morphismes canoniques  $D_{\mathfrak{g},\mathfrak{w}} \rightarrow S_{\mathfrak{g},w}$  pour chaque décomposition réduite  $\mathfrak{w}$  de  $w$  (voir [Mat88], [Mat89] et [Lit98] pour ces affirmations). La variété de drapeaux  $\mathcal{F}\ell_{\mathfrak{g}}$  de Mathieu est donc la limite inductive des  $S_{\mathfrak{g},w}$ . On construit aussi des  $\mathcal{B}$ -torseurs  $\mathfrak{S}_w$  au-dessus de  $S_{\mathfrak{g},w}$  déterminés en tant que spectres affines de la  $\mathcal{O}_{D_{\mathfrak{g},\mathfrak{w}}}$ -algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{g},\mathfrak{w}}}$  du  $\mathcal{B}$ -torseur canonique  $E_{\mathfrak{g},\mathfrak{w}} := \mathcal{P}_{i_1} \times^{\mathcal{B}} \dots \times^{\mathcal{B}} \mathcal{P}_{i_n}$  de  $D_{\mathfrak{g},\mathfrak{w}}$  et l'on note  $\mathfrak{S}$  l'ind-schéma limite directe des  $\mathfrak{S}_w$ . Notons que  $\mathfrak{S}$  dépend du choix d'un réseau  $P$ , contrairement aux variétés de Demazure, de Schubert et à la variété de drapeaux.

Maintenant on va considérer toutes ces constructions dans le cas particulier où  $\mathfrak{g}$  est de type affine. Or, la classification des algèbres de Kac-Moody est faite en termes de diagrammes de Dynkin affines : on a la partie des diagrammes déployés  $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}, F_4^{(1)}$  et  $G_2^{(1)}$  et d'autre part celle des diagrammes tordus  $A_{2n-1}^{(2)}, A_{2n}^{(2)}, D_n^{(2)}, E_6^{(2)}$  et  $D_4^{(3)}$ . L'avantage des algèbres de type affine est qu'elles sont réalisables sous la forme de certaines algèbres de lacets (non complétées). En fait, soit  $\mathfrak{g}_0$  la  $\mathbb{Q}$ -algèbre de Lie semi-simple attachée à un diagramme de Dynkin fini et considérons l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{Q}[v, v^{-1}]$  munie du crochet évident. Alors, quitte à passer à la dérivée  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  supplémentaire du facteur de dérivation  $\mathbb{Q}d$  et à tuer le centre  $\mathbb{Q}c$  de  $\mathfrak{g}$ , on obtient une identification canonique de l'algèbre adjointe de Kac-Moody  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]/\mathbb{Q}c$  attachée au diagramme de Dynkin affine déployé avec l'algèbre de lacets  $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{Q}[v, v^{-1}]$ , cf. [Kac90], th. 7.4. Dans le cas tordu, il faut prendre la sous-algèbre de Lie  $(\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{Q}[v^{\pm 1}])^{\mathfrak{S}_e}$ , où  $\mathfrak{S}_e$  opère par des automorphismes extérieurs sur  $\mathfrak{g}_0$  et par des galoisiens sur les polynômes, cf. th. 8.3 de [Kac90]. Si l'on veut résumer grossièrement cette discussion, on pourra aussi dire qu'il y a presque un isomorphisme entre  $\text{Lie } LG_0$  et  $\mathfrak{g}$ , le mot presque signifiant ici plus précisément : quitte à compléter  $u$ -adiquement et à écarter quelques sous-espaces de dimension 1 dans  $\mathfrak{g}$ . De plus, il s'avère que la base topologique « évidente » de la  $\mathbb{Z}$ -algèbre de Lie de  $LG$  induite par les isomorphismes  $x_a$  etc. est une base de Chevalley au sens du ch. 3 de [Mit85]. On va fixer la réalisation entière de l'algèbre affine  $\mathfrak{g}$  déterminée par la réalisation rationnelle ci-dessus et par le réseau  $P^\vee = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \oplus \mathbb{Z}d = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \oplus \mathbb{Z}c \oplus \mathbb{Z}d$ , où les racines sont numérotées à nouveau pour que le plus petit indice soit 0 et corresponde à la réflexion qui ne fixe pas l'origine.

Les considérations ci-dessus concernant les algèbres de Lie fournissent déjà des isomorphismes  $U \cong R_u(L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a},0})$  et  $U_i \cong R_u(L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}_i,0})$ . D'autre part, en isolant le facteur correspondant à  $\mathbb{Z}d$ , on a  $T = T' \times \mathbb{G}_m$  (resp.  $L_i = L'_i \rtimes \mathbb{G}_m$ ) de telle façon que  $B = B' \rtimes \mathbb{G}_m$  avec  $B' = U \rtimes T'$  (resp.  $P_i = P'_i \rtimes \mathbb{G}_m$  avec  $P' = U_i \rtimes L'_i$ ). Enfin on considère le facteur central  $\mathbb{G}_m \subseteq T' \subseteq L'_i$  correspondant à  $\mathbb{Z}c$  et on pose  $B'' = U \rtimes T''$  (resp.  $P''_i = U_i \rtimes L''_i$ ), où  $T'' = T'/\mathbb{G}_m$  (resp.  $L''_i = L'_i/\mathbb{G}_m$ ). On voit alors aisément qu'on a des isomorphismes  $T'' \cong S$  (resp.  $L''_i \cong L_{\mathbf{f}_i}$ ) qui sont compatibles avec les identifications des algèbres de Lie, donc aussitôt équivariants pour les identifications de leurs radicaux unipotents. Par suite, on arrive aux isomorphismes cherchés  $B'' \cong L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a},0}$  (resp.  $P''_i \cong L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}_i,0}$ ) entre  $\mathbb{Q}$ -schémas



en groupes et ils entraînent aussi que les variétés de Demazure dans le cadre de Kac-Moody et dans le cadre des grassmanniennes affines sont isomorphes entre elles en caractéristique 0 (comparer aussi avec le 8.d de [PR08]).

Maintenant nous voulons améliorer ce résultat en étendant les isomorphismes aux modèles entiers  $\mathcal{B}'' \cong L^+ \mathcal{G}_a$  (resp.  $\mathcal{P}_i'' \cong L^+ \mathcal{G}_{f_i}$ ). On s'est ramené à construire un isomorphisme entre les radicaux unipotents, parce que les Levis restent encore canoniquement isomorphes, vu qu'ils sont des  $\mathbb{Z}$ -groupes déployés, et l'opération sur les radicaux est déterminée génériquement. Vu la rem. 3.5.3(1) de [BT84a], dont la démonstration se trouve dans la prop. 10.12 de la première partie de [Ja07], il reste à vérifier que l'image de  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n}_+)$  dans l'algèbre enveloppante de Lie  $R_u L^n \mathcal{G}_{a,0}$ ,  $n \geq 1$  coïncide avec l'algèbre de distributions du modèle entier  $R_u L^n \mathcal{G}_a$ . Voyons d'abord comment calculer cette algèbre de distributions, en utilisant la grosse cellule de  $R_u L^n \mathcal{G}_a$  formée des  $R_u L^n \mathcal{T}_{a^\vee}$  pour toute racine simple  $a \in \Delta$  et des  $L^n \mathcal{U}_a$  pour toute racine  $a \in \Phi$  : on peut appliquer le 1.3.5. de [BT84a] pour déduire que l'algèbre de distributions envisagée est la plus petite sous-algèbre associative de l'algèbre enveloppante engendrée par les algèbres de distributions de chaque facteur de la grosse cellule. Donc on s'est ramené essentiellement au calcul de  $\text{Dist}(\mathbb{G}_a) = \mathbb{Z}[\frac{x^n}{n!}]_{n \in \mathbb{N}}$  et de  $\text{Dist}(L^k \mathbb{G}_m)$ , le dernier cas étant décidément le plus compliqué. Raisonnant par récurrence, on arrive à la conclusion que, notant  $y_1, \dots, y_{k-1}$  la base canonique de l'algèbre de Lie, cette algèbre est engendrée par les polynômes négatifs de Garland-Mitzman  $\Lambda_s^-(y_i, \dots, y_{si})$  (où  $y_j = 0$  dès que  $j \geq k$ ), qui sont déterminés par l'équation fonctionnelle  $\sum_s \Lambda_s^-(z_1, \dots, z_s) \zeta^s = \exp(\sum_j z_j (-1)^{j-1} \zeta^j / j)$ . Ceci a le désavantage que l'approche de [Ga78] et [Mit85] fait apparaître les polynômes positifs  $\Lambda_s^+$  obtenus en effaçant le signe  $(-1)^{j-1}$  de l'équation fonctionnelle précédente, ce qui néanmoins n'est pas grave, puisque ils engendrent la même  $\mathbb{Z}$ -algèbre (appliquer la formule de la série géométrique!). Ceci étant, le th. 4.2.6. de [Mit85] couplé au th. de Poincaré-Birkhoff-Witt en fournissent une partie génératrice de la  $\mathbb{Z}$ -algèbre associative  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n})$  dont l'image dans l'algèbre enveloppante de Lie  $R_u L^+ \mathcal{G}_{a,0} / L^n \mathcal{G}_{a,0}$  est justement la partie génératrice que nous avons décrite pour l'algèbre de distributions. Évidemment tout ce qu'on a expliqué dans le cas borélien marche verbatim pour le cas parabolique minimal.

La conclusion à tirer de tout cela et du th. 3.7 est non seulement que les variétés de Demazure dans les deux cadres considérés sont les mêmes, mais encore que les variétés de Schubert le sont aussi (voir le lem. 33 de [Mat88] et comparer avec le 9.h de [PR08]), d'où l'isomorphisme  $\mathcal{F}_{\ell_g} \cong \text{Gr}_{\mathcal{G}_a}$ . On peut conclure aussitôt que l'ind-schéma en groupes  $\mathfrak{G}$  s'identifie à un produit semi-direct  $\widehat{LG} \rtimes \mathbb{G}_m$ , où  $\widehat{LG}$  est l'extension centrale de  $LG$  donnée par trivialisations du générateur ample  $\mathcal{O}(1)$  de  $\text{Pic}(\text{Gr}_{\mathcal{G}_0})$ , sur laquelle  $\mathbb{G}_m$  opère naturellement en relevant l'action par rotation définie au 3.3 (voir aussi la prop. 4.3 de [III]).

3.9. Au paragraphe précédent, nous avons constaté que la grassmannienne affine  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_f}$  dans le cas où  $G = G^{\text{dér}}$  n'est pas vraiment un objet nouveau et qu'elle était apparue en théorie de Kac-Moody. Néanmoins on va introduire maintenant un objet qui n'admet pas d'équivalent dans le cadre de Kac-Moody - c'est la grassmannienne affine globale de A. A. Beilinson et V. G. Drinfeld, cf. [BD96].

**Définition 3.8.** Soient  $X$  une courbe lisse au-dessus d'un anneau  $A$  et  $\mathfrak{G}$  un schéma en groupes au-dessus de  $X$ . La grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{G},X/A}$  de Beilinson-Drinfeld associée à cette donnée est le faisceau fppf sur  $X$  qui, à chaque schéma affine  $\mathrm{Spec} R$  muni d'une application dans  $X$ , lui associe les classes d'isomorphisme de  $\mathfrak{G}$ -torseurs au-dessus de  $X \otimes_A R$  munis d'une trivialisation en dehors du graphe du  $A$ -morphisme  $\mathrm{Spec} R \rightarrow X$ .

Ce faisceau est représentable par un ind-schéma lorsqu'il y a une immersion fermée  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathrm{GL}_n$  au-dessus de  $X$  telle que le faisceau quotient fppf soit représentable par un schéma quasi-affine, auquel cas l'application  $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{G},X} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n,X}$  est une immersion localement fermée. L'existence d'un tel plongement est remplie si  $A$  est un anneau de Dedekind,  $X$  est affine, excellente et régulière et  $\mathfrak{G}$  connexe (voir [PZ13, cor. 10.7]).

Il y a aussi des groupes d'arcs et de lacets  $\mathcal{L}^+\mathfrak{G} : R \mapsto \mathfrak{G}(\hat{\Gamma}_{R,X})$ ,  $\mathcal{L}\mathfrak{G} : R \mapsto \mathfrak{G}(\hat{\Gamma}_{R,X}^\circ)$ , où  $\hat{\Gamma}_{R,X}$  désigne le spectre affine du complété formel de  $X \otimes_A R$  le long du graphe  $\Gamma_{R,X}$ , qui à son tour se plonge comme sous-schéma fermé du premier et l'on note  $\hat{\Gamma}_{R,X}^\circ$  son complément. Il est aisé de voir que  $\mathcal{L}^+\mathfrak{G}$  est représentable par un schéma en groupes affine limite projective de schémas en groupes affines lisses (et connexes si  $\mathfrak{G}$  l'est), tandis que  $\mathcal{L}\mathfrak{G}$  est représentable par un ind-schéma en groupes ind-affine contenant  $\mathcal{L}^+\mathfrak{G}$  en tant que sous-schéma fermé. Comme d'habitude, l'on a un isomorphisme presque purement abstrait  $\mathcal{L}\mathfrak{G}/\mathcal{L}^+\mathfrak{G} \cong \mathrm{Gr}_{\mathfrak{G},X/A}$ , dont le quotient peut être pris dans la topologie étale. Notons bien que cette description à l'aide des groupes de lacets entraîne déjà que les fibres de  $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{G},X/A}$  sont des grassmanniennes affines : en effet, si  $\mathrm{Spec} k \rightarrow X$  est un morphisme donné, alors on a des isomorphismes fonctoriels  $\hat{\Gamma}_{R,X} \cong \mathrm{Spec} R[[t]]$  pour chaque  $k$ -algèbre  $R$ , et donc le  $k$ -ind-schéma  $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{G},X/A} \times_X \mathrm{Spec} k$  s'identifie à la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{G} \otimes_X k[[t]]}$  associée au schéma en groupes déduit de  $\mathfrak{G}$  par changement de base  $X \rightarrow \hat{\Gamma}_{R,X} \cong \mathrm{Spec} k[[t]]$ .

Particularisons au cas  $A = \mathbb{Z}$ ,  $X = \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[u]$  et  $\mathfrak{G} = \mathcal{G}_f$ .

**Théorème 3.9.** *La grassmannienne de Beilinson-Drinfeld  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_f, \mathbb{Z}[u]/\mathbb{Z}}$  est représentable par un ind-schéma ind-projectif au-dessus de  $\mathbb{Z}[u]$ .*

Mentionnons que l'ind-propreté de la fibre générique de  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_f, \mathbb{F}_e[u]/\mathbb{F}_e}$  a pris la plupart des experts par surprise, voir le th. 1.19 de [Ri16], dont la preuve suppose erronément que cette grassmannienne est constante, et aussi l'errata [Ri19] qui fut originalement motivée par le résultat ci-dessus. La conjecture de [Ri19] concernant l'ind-propreté d'une telle fibre générique pour un  $k(t)$ -groupe arbitraire est étroitement liée à la conjecture I de 10.3 de [BLR] sur les modèles de Néron au-dessus d'un anneau de Dedekind global, cf. [I], cor. 5.3.

*Démonstration.* La représentabilité par un ind-schéma ind-quasi-projectif a été déjà remarquée et il suffit de montrer que  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}_f} := \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_f, \mathbb{Z}[u]/\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[u]} \mathbb{Z}'[v]$  est ind-propre. Décrivons  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}_f}$  par les strates suivantes, qui sont des ind-schémas ind-projectifs (comparer la discussion précédente avec la prop. 5.4 de [PZ13]) : au-dessus de  $\mathbb{Z}'[\frac{1}{e}][v^{\pm 1}]$  il est isomorphe à la grassmannienne affine constante  $\mathrm{Gr}_H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}'[e^{-1}][v^{\pm 1}]$ , cf. prop. 5.5 de [PZ13] ; modulo  $v$  à la grassmannienne affine locale  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_f} \otimes \mathbb{Z}'$  ; au-dessus de  $\mathbb{F}_e[v^{\pm 1}]$  à  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{0,e}} \otimes_{\mathbb{F}_e} \mathbb{F}_e[v^{\pm 1}]$ . La

dernière assertion est peut-être la plus surprenante et découle de ce que le schéma en groupes  $\mathcal{G}_f \otimes \mathbb{F}_e[a^{1/e}, a^{-1/e}][[u - a]]$  est isomorphe à  $\mathcal{G}_{0,e} \otimes_{\mathbb{F}_e[[t]]} \mathbb{F}_e[a^{1/e}, a^{-1/e}][[t]]$  où  $t = u - a$  et le schéma en groupes  $\mathcal{G}_{0,e}$  sur  $\mathbb{F}_e[[t]]$  est entendu en tant que modèle parahorique correspondant à l'origine 0 du sous-groupe pseudo-réductif pseudo-épinglé de  $R_{\mathbb{F}_e[[t^{1/e}]/\mathbb{F}_e[[t]]} H^{\Gamma_0}$ . Malheureusement cette connaissance stratifiée de  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_f}$  ne suffit pas à savoir qu'elle est globalement ind-propre, énoncé pour lequel il faudra introduire les variétés de Schubert globales.

Soient  $\mu \in X_*(T_H)$  un cocaractère de  $T_H$  et  $\mu(t)$  le point correspondant dans le groupe de lacets  $LT_H$ . L'adhérence schématique de l'orbite de son image dans  $\text{Gr}_H$  détermine la variété de Schubert  $\text{Gr}_H^{\leq \{\mu\}}$ , qui est un schéma projectif normal géométriquement connexe sur  $\mathbb{Z}$  et qui ne dépend que de la classe de conjugaison  $\{\mu\} \in X_*(T_H)/W(\Phi_H) \cong X_*(T_H)_+$  de  $\mu$ . On note alors  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_f}^{\leq \{\mu\}}$  l'image fermée dans  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_f}$  de la variété de Schubert usuelle  $\text{Gr}_H^{\leq \{\mu\}}$  contenue dans  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_f} \otimes \mathbb{Q}[v^{\pm 1}]$ , dont le schéma échéant est encore appelé la variété de Schubert. En raisonnant comme dans la preuve de la prop. 5.5 de [PZ13], il s'ensuit que ces schémas sont intègres et projectifs sur la base. Par suite, la seule chose qui reste à démontrer est que les espaces topologiques sous-jacents aux variétés de Schubert recouvrent l'espace topologique sous-jacent à  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_f}$ .

Pour cela, on commence par construire quelques  $\tilde{X}$ -sections de  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{T}}$  prolongeant l'image de  $\mu(t)$  et on peut se ramener au cas du schéma en groupes  $\mathcal{T} = R_{\mathbb{Z}[v]/\mathbb{Z}[u]} \mathbb{G}_m$ , en appliquant une décomposition du schéma  $\mathcal{T}$  originel en tels facteurs. Dans ce cas, on a un isomorphisme  $X_*(T_H) \cong \mathbb{Z}^e$  et au  $e$ -uplet  $(n_1, \dots, n_e)$  correspondant on associe l'élément inversible  $\prod (v - \zeta_e^i a^{1/e})^{n_i}$  appartenant à  $\mathbb{Z}[v] \otimes_{\mathbb{Z}[u]} \mathbb{Z}'[a^{1/e}][[u - a]]^\times$  : en effet, chacun des facteurs du produit divise l'élément inversible  $u - a$ . Ceci fournit la  $\tilde{X}$ -section  $\xi^\mu$  cherchée de  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{T}}$ , dont les fibres au-dessus des points  $x \in X$  peuvent être décrites comme suit : si  $x \in \tilde{X}[u^{-1}, e^{-1}]$ , alors la fibre de  $\xi^\mu$  au-dessus de  $x$  est le point de  $\text{Gr}_{\mathbb{G}_m^e}$  attaché à  $(n_1, \dots, n_e)$  ; sinon, le point de  $\text{Gr}_{R_{k[[t^{1/e}]]/k[[t]]} \mathbb{G}_m}$  obtenu à partir de  $\xi^\mu$  correspond à l'entier  $n_1 + \dots + n_e \in X_*(T_H)_\Gamma$  (comparer aussi avec le lem. 4.17. de [HR18b]). Par suite, les sous-espaces topologiques  $|\xi^\mu|$  forment un recouvrement fermé de  $|\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{T}}|$ , ce qui entraîne déjà que cet ind-schéma est ind-propre.

Ceci étant, il est aisé de voir que  $\xi^\mu$  est contenue dans  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_f}^{\leq \{\mu\}}$  et, comme le groupe d'arcs  $\mathcal{L}^+ \mathcal{G}_f$  opère sur la variété de Schubert, sa fibre au-dessus de  $x \in \tilde{X}$  contient la variété de Schubert  $S_{[\mu]}$ , où  $[\mu]$  désigne l'image de la translation  $t_\mu$  induite par  $\xi^\mu$  dans  $W_f \setminus \tilde{W}/W_f$  si  $x \in \{u = 0\}$  (resp.  $W \setminus \tilde{W}/W$  sinon). Vu que ces éléments sont cofinaux pour l'ordre de Bruhat, l'affirmation topologique est établie.  $\square$

3.10. Enfin on étudie la géométrie de la variété de Schubert  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_f}^{\leq \{\mu\}}$ . Pour formuler le théorème ci-dessous, on a besoin d'introduire l'ensemble admissible  $\text{Adm}_{\{\mu\}} \subseteq \tilde{W}$ , qui est la partie des éléments majorés dans l'ordre de Bruhat par une translation  $t_\lambda$  telle que  $\lambda = w_0 \mu$ ,



où  $\mu \in X_*(T_H)_+$  est le seul représentant dominant de  $\mu$  par rapport à  $B_H$  et  $w_0 \in W_0$  (regardé comme un sous-groupe de  $W(\Phi_H)$ ). On a aussi des variantes  $\text{Adm}_{\{\mu\}, \mathbf{f}}$  pour les autres facettes, qui sont données par les images de  $\text{Adm}_{\{\mu\}}$  dans  $W_{\mathbf{f}} \setminus \tilde{W}/W_{\mathbf{f}}$ .

**Théorème 3.10.** *La variété de Schubert  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  est normale, plate sur  $\tilde{X}$  et à fibres géométriquement réduites et connexes, égales à la réunion des variétés de Schubert indexées par les images des éléments  $w \in \text{Adm}_{\{\mu\}}$ .*

Avant de poursuivre, étendrons-nous un peu sur les schémas déduits de  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  par quelques changements de base particuliers  $\text{Spec } D \rightarrow \tilde{X}$ , où  $D$  désigne n'importe quel anneau de Dedekind dont le spectre est muni d'une application non constante vers  $\tilde{X}$ . Si  $D = \mathbb{F}_p(\zeta_e)[v]$  en caractéristique différente de  $e$ , on obtient les variétés de Schubert de [Zh14] (mais sur un corps fini) et, d'autre part, si  $D = \mathbb{F}_e[v]$ , on obtient des variétés de Schubert globales pour les groupes pseudo-réductifs que nous avons considérés. Si  $D$  est un anneau de valuation discrète en caractéristiques inégales  $\mathcal{O}$  avec une uniformisante distinguée  $\varpi$  en tant qu'image de  $u$ , alors on obtient les modèles locaux au sens de [PZ13] mais aussi quelques uns à phénomènes de ramification non modérée.

*Démonstration.* Il est clair que la fibre de  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  au-dessus de n'importe quel point de  $\tilde{X}$  contient les variétés de Schubert indiquées dans l'énoncé, d'après la construction des sections  $\xi^\mu \in \text{Gr}_{\mathcal{T}}(\tilde{X})$  au 3.9 et ce que le groupe d'arcs opère sur  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$ . Afin d'obtenir l'égalité désirée, il faudra calculer les sections globales de fibrés en droites amples, dont l'outil principal est le théorème de la cohérence de X. Zhu, cf. [Zh14]. Cependant cette utilisation aura lieu seulement quand le schéma en question est plat sur la base, et donc on montrera provisoirement l'assertion plus faible dans laquelle  $\tilde{X}$  est remplacé par un anneau de Dedekind  $D$  sur  $\tilde{X}$ , dont l'image de  $\text{Spec } D \rightarrow X$  ne se réduit pas à un point, et  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  par son platifié (c'est-à-dire, l'adhérence schématique de la fibre générique). Soit  $\tilde{\mathcal{L}}_{\det}$  le fibré en droites de  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$  obtenu en tirant en arrière le fibré déterminant de  $\text{Gr}_{\text{GL}(\text{Lie } \mathcal{G}_{\mathbf{f}})}$  par l'application naturelle, qui est bien défini car  $\text{Lie } \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  est un fibré vectoriel trivial d'après C. S. Seshadri [Ses58]. La restriction de  $\tilde{\mathcal{L}}_{\det}$  à  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\det}$  a charge centrale sur chaque point  $x \in \tilde{X}$  égale à  $2h^\vee$ , où  $h^\vee$  désigne le nombre dual de Coxeter (cela est bien connu en caractéristique différente de  $e$ , d'où aussi modulo  $v$  par la continuité des degrés sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  et, par suite, aussi sur  $\mathbb{F}_e[v^{\pm 1}]$ , puisque l'ind-schéma devient égal à  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_{0,e}} \otimes_{\mathbb{F}_e} \mathbb{F}_e[v, v^{-1}]$ ). Par suite, le th. 2 de [Zh14] entraîne que  $\dim_{\mathbb{F}_p^{\text{alg}}} H^0(\bigcup_{w \in \text{Adm}_{\{\mu\}, \mathbf{f}}} S_{w,p}, \tilde{\mathcal{L}}_{\det}^n) = \dim_{\mathbb{Q}^{\text{alg}}} H^0(\text{Gr}_H^{\leq \{\mu\}}, \tilde{\mathcal{L}}_{\det}^n)$ , puisque, indépendamment du fait que l'argument original se réfère justement aux groupes réductifs, on peut toujours calculer les sections globales en caractéristique 0 ou  $p \neq e$  (comparer avec le cor. 4.4 de [Zh14]). En effet, on commence par observer que, grâce à un argument avec une suite exacte du type Mayer-Vietoris, on a une formule

$$\dim_{\mathbb{F}_p^{\text{alg}}} H^0\left(\bigcup_{i \in I} S_{w_i, \mathbf{f}, p}, \mathcal{L}\right) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{j-1} \dim_{\mathbb{F}_p^{\text{alg}}} H^0\left(\bigcap_{j \in J} S_{w_j, \mathbf{f}, p}, \mathcal{L}\right)$$

de type inclusion-exclusion, où  $\mathcal{L}$  désigne un fibré en droites ample défini globalement, puisque les groupes de cohomologie supérieures s'annulent. Comme les intersections  $\bigcap_{j \in J} S_{w_j, \mathbf{f}, p}$  sont réduites (en caractéristique positive, cela résulte de ce que son frobenius est scindable; le cas de caractéristique 0 en découle par semi-continuité), elles coïncident avec la réunion  $\bigcup_{l \in L} S_{v_l, \mathbf{f}, p}$  des variétés de Schubert contenues là, où l'ensemble  $L$  ne dépend pas de la caractéristique, voir la prop. 2.8 de [Ri13]. En particulier, on se ramène par récurrence décroissante au cas où  $|I| = 1$ , lequel résulte de la platitude des  $S_{w, \mathbf{f}}$ . Ceci montre aussi que la réunion schématique  $\bigcup_{w_i} S_{w_i, \mathbf{f}}$  commute aux changements de base  $\mathbb{Z} \rightarrow k$ , où  $k$  est un corps.

Cela fournit déjà l'égalité cherchée des fibres spéciales si le point générique de  $D$  s'envoie sur le point générique de  $\tilde{X}$  et donc la description conjecturale des fibres de  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$  est vraie en codimension au plus 1. Si le point générique de  $D$  se trouve sur un point de codimension 1, on applique le théorème de la cohérence encore une fois, ce qui fournit la version faible du théorème. Observons maintenant que cette version faible implique que l'espace topologique sous-jacent à  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  est le bon : si  $z$  est un point générique de la fibre  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}} \otimes k(x)$  d'un point fermé  $x \in \tilde{X}$ , alors on peut trouver un anneau de valuation discrète  $D$  sur  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  tel que le point fermé  $d \in D$  s'envoie sur  $z$  et que l'application composée  $D \rightarrow \tilde{X}$  ne soit pas constante ; d'autre part,  $D \rightarrow \widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}} \otimes_{\tilde{X}} D$  se factorise à travers le platifié, d'où l'appartenance de  $z$  au lieu admissible d'après la version faible qu'on a établie. En particulier, les points  $z$  de hauteur 1 dans  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  s'envoient sur des points  $x \in \tilde{X}$  de hauteur au plus 1.

Considérons enfin le normalisé  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}, \text{norm}}$  de  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  dans son corps des fractions, dont la platitude sur  $\tilde{X}$  sera démontré ensuite. Si  $U$  est un ouvert affine du normalisé, alors le complément du lieu de platitude  $V$  relatif à  $\tilde{X}$  a codimension au moins 2, donc le second hebbarkheitssatz riemannien pour les schémas normaux fournit l'égalité des sections globales  $\Gamma(V, \mathcal{O}) = \Gamma(U, \mathcal{O})$ , dont le membre de gauche est plat sur  $\tilde{X}$  selon le lem. VII.3.2. de [Ray70]. Ensuite on affirme que l'application  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}, \text{norm}} \otimes k(x) \rightarrow \widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}} \otimes k(x)$  est une immersion fermée pour tout  $x \in \tilde{X}$ . En effet, soit  $\pi$  un nombre premier de  $\mathbb{Z}'$  et notons  $k_{\pi}$  le corps résiduel de  $\mathbb{Z}'$  ; alors  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}, \text{norm}} \otimes k_{\pi}[v]$  est plat sur la base et par conséquent le morphisme fini et birationnel  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}, \text{norm}} \otimes k_{\pi}[v] \rightarrow \widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}} \otimes k_{\pi}[v]$  se factorise à travers le platifié. Or, puisque  $\text{Adm}_{\{\mu\}, 0}$  se réduit à un point par le cor. 2.11 de [Ri16], on a vu que ce platifié est génériquement normal à fibres spéciales réduites, donc normal grâce au critère de Serre. Enfin notre affirmation sur les applications entre les fibres découle du théorème principal de Zariski et le fait que  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}, \text{norm}} \rightarrow \widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}^{\leq \{\mu\}}$  soit un isomorphisme devient une conséquence du lemme de Nakayama (comparer avec la fin de la preuve de la prop. 7.1 de [PZ13]).  $\square$

On peut déduire aussi de ce résultat le fait que la charge centrale d'un fibré en droites sur  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mathcal{G}_{\mathbf{f}}}$  est constante lorsque  $G = G^{\text{dér}}$ . On en profite pour évoquer une conséquence intéressante vérifiable de ce corollaire : la construction du 7.2 de [CGP15] des groupes pseudo-réductifs

exotiques basiques fournit une application canonique  $G_e \rightarrow \overline{G}$  telle que  $\overline{G}$  est un groupe déployé et simplement connexe de type  $\Phi^\vee$  et qu'on ait un isomorphisme  $\mathcal{I}(G_e, \mathbb{F}_e((u))) \cong \mathcal{I}(\overline{G}, \mathbb{F}_e((u)))$  induisant un homéomorphisme universel  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_{f,e}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\overline{\mathcal{G}}_f}$ , cf. prop. 3.6. de [I]; ce que la charge centrale soit constante entraîne que les coefficients  $a_i^\vee$  de Kac-Moody d'un groupe et de l'autre sont ou bien égaux lorsque  $\mathbb{P}_{i,t}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{i,d}^1$  a degré  $e$  ou bien  $a_{i,t}^\vee = ea_{i,d}^\vee$  lorsque  $\mathbb{P}_{i,t}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{i,d}^1$  a degré 1. Pour que la deuxième situation géométrique se produise, il faut et il suffit que le numéro  $i$  corresponde à une racine euclidienne courte de  $\overline{G}$ , et on peut vérifier la relation prévue entre les coefficients aux tableaux de l'appendice de [Ca05].

3.11. Ici on va éclaircir le lien entre ce qui précède et les modèles locaux des variétés de Shimura. On va supposer connues les notions fondamentales de la théorie des perfectoides et des diamants comme expliquées dans [Sch17] ou [SW20], la  $v$ -topologie et les  $v$ -faisceaux y compris. Alors P. Scholze a introduit dans [SW20] la variante suivante de la grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld en caractéristique mixte, dont la fibre spéciale coïncide avec celle de X. Zhu [Zh17] :

**Définition 3.11** (P. Scholze). La grassmannienne affine  $p$ -adique  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{dR}}$  d'un  $\mathbb{Z}_p$ -groupe  $\mathcal{G}$  affine, lisse et connexe est le pré-faisceau sur la catégorie des algèbres perfectoides à valeurs ensemblistes, qui paramètre les classes d'équivalence de  $\mathcal{G}$ -fibrés au-dessus de  $\mathrm{Spec} B_{\mathrm{dR}}^+(R)$  munis d'une trivialisatoin au-dessus de  $\mathrm{Spec} B_{\mathrm{dR}}(R)$ .

On peut montrer que ce pré-faisceau est un faisceau pour la  $v$ -topologie et qu'il est ind-propre si et seulement si  $\mathcal{G}$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -groupe parahorique, cf. th. 1.3. de [I] et th. 21.2.1. de [SW20] : si  $\mathcal{G}$  est parahorique, la fibre générique géométrique (resp. spéciale géométrique) de  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  admet une stratification localement fermée, dont les sous-faisceaux sont numérotés par des éléments de  $X_*(\mathbf{T})$ , où  $\mathbf{T}$  est un tore maximal de  $\mathbf{G} = \mathcal{G}_\eta$  (resp.  $W_{\mathbf{f}} \setminus \tilde{W}/W_{\mathbf{f}}$ , où  $\mathbf{f}$  est la facette de  $\mathcal{I}(\mathbf{G}, \mathbb{Q}_p)$  à laquelle  $\mathcal{G}$  est associé). Par une procédure d'adhérence, cf. [APLR], on en obtient de même des variétés de Schubert entières dans le cadre présent.

**Définition 3.12.** Soient  $\mathcal{G}$  un  $\mathbb{Z}_p$ -groupe parahorique,  $\mathbf{G}$  sa fibre générique et  $\{\mu\}$  une classe de conjugaison de cocaractères géométriques de  $\mathbf{G}$  de corps reflex  $E$ . La variété de Schubert  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \mathcal{O}_E}^{\leq \{\mu\}}$  est l'adhérence au sens des  $v$ -faisceaux de  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{G}, E}^{\leq \{\mu\}}$  dans  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \mathcal{O}_E}$ .

On ne peut plus attendre qu'elles soient en général représentables par des schémas au-delà du cas minuscule, vu qu'il en est de même du faisceau  $(R, R^+) \rightarrow B_{\mathrm{dR}}^+(R)/\xi^n$  pour  $n \geq 2$ . En revanche, P. Scholze a conjecturé dans [SW20] :

**Conjecture 3.13** (P. Scholze). *Reprenons les notations précédentes. Si  $\{\mu\}$  est minuscule, alors il existe un et un seul schéma  $\mathbb{M}^{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}, \mu)$  normal, plat sur  $\mathcal{O}_E$  et à fibres réduites, tel que le  $v$ -faisceau associé soit isomorphe à  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \mathcal{O}_E}^{\leq \{\mu\}}$ .*

On peut aussi renforcer la conjecture en demandant que  $\mathbb{M}^{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}, \mu)$  soit muni d'une action de  $\mathcal{G}$ , qu'il soit regardé en tant que modèle de la variété de drapeaux  $\mathbb{M}^{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}, \mu) \otimes E = \mathbf{G}/P_{\{\mu\}}$  et que l'identification ci-dessus préserve ces données, dont l'existence dans le cadre perfectoides

est démontré dans [APLR] resp. [SW20], cf. prop. 19.4.2. L'unicité d'un tel modèle local résulte de la pleine fidélité du foncteur  $X \mapsto X^\diamond$  restreint aux  $\mathbb{Z}_p$ -schémas plats, projectifs et normaux, cf. prop. 18.4.1 de [SW20], reposant sur le cor. 6.6 de [PL17]. Cette conjecture est partiellement corroborée par la proposition ci-dessous, qui généralise à son tour le cor. 21.6.10. de [SW20] et le th. 2.14 de [HPR18].

**Proposition 3.14.** *La conjecture 3.13 vaut pour tous les couples  $(\mathbf{G}, \{\mu\})$  de type abélien sur  $\mathbb{Q}_p$  si le nombre premier  $p$  est impaire. Si  $p = 2$ , elle reste encore vraie, si l'on suppose que les  $\mathbb{Q}_2$ -facteurs presque simples de  $\mathbf{G}^{\text{ad}}$  sont de la forme  $R_{F/\mathbb{Q}_2} \mathbf{G}_1$ , où  $\mathbf{G}_1$  est absolument presque simple, se déploie sur une extension cyclique uniformisée et n'est pas unitaire de dimension impaire.*

On dit que le couple  $(\mathbf{G}, \{\mu\})$  est de type abélien si  $\mathbf{G}$  admet un plongement fermé  $\rho$  dans  $\text{GL}_n$  tel que  $\{\rho \circ \mu\} = \{(1^{(d)}, 0^{(n-d)})\}$ , quitte à prendre des extensions centrales de  $\mathbf{G}$  : d'après la classification des représentations irréductibles des groupes réductifs connexes sur un corps quelconque, cf. [Ti77], il résulte aisément que, pour que  $(\mathbf{G}, \{\mu\})$  soit de type abélien, il faut et il suffit que les facteurs presque simples de  $(\mathbf{G}^{\text{ad}}, \mu^{\text{ad}})$  soient classiques de type  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n^{\mathbb{H}}$  ou  $D_n^{\mathbb{R}}$ , où les exposants  $\mathbb{H}$  (resp.  $\mathbb{R}$ ) indiquent que les cocaractères géométriques de chaque facteur absolument presque simple sont égaux à  $\omega_1$  (resp.  $\omega_{n-1}$  ou  $\omega_n$ ), cf. [De79], 2.3. Une extension de corps discrètement valués  $L/K$  s'appelle cyclique uniformisée s'il existe une uniformisante  $\varpi$  de  $K$  telle que  $L = K(\varpi^{1/e})$ .

*Démonstration.* On sait bien, d'après la prop. 21.5.1. de [SW20], qu'on ne change grand-chose pour la preuve de la conjecture ci-dessus, lorsqu'on prend une extension centrale de  $\mathbf{G}$  et des relèvements correspondants  $\mathcal{G}$  et  $\{\mu\}$ . La conjecture se comporte bien aussi pour les produits presque directs. De plus, on voit aisément qu'il est loisible de se placer au-dessus de  $\mathbb{Q}_p$ , donc tous les groupes sont quasi-déployés. Par suite, on peut supposer  $\mathbf{G} = R_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbf{G}_1$ , où  $\mathbf{G}_1$  est une  $z$ -extension de son groupe adjoint  $\mathbf{G}_1^{\text{ad}}$ , qui est absolument presque simple.

D'autre part, des changements de base à la Breuil-Kisin (voir [PZ13]), joints aux constructions de [Lev16] pour traiter les restrictions des scalaires, permettent de construire quelques modèles locaux  $\mathbb{M}^{\text{loc}}(\mathcal{G}, \{\mu\})$  à partir des variétés de Schubert considérées au numéro précédent, lesquels sont normaux, plats sur  $\mathcal{O}_E$  et à fibres réduites<sup>2</sup>. Par construction, on obtient même une immersion fermée

$$\mathbb{M}^{\text{loc}}(R_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_1, \{(\mu_\sigma)_{\sigma:F \rightarrow \mathbb{C}_p}\}) \rightarrow \mathbb{M}^{\text{loc}}(R_{\mathcal{O}_{\tilde{F}}/\mathbb{Z}_p} \mathcal{H}_1, \{(\mu_{\tilde{\sigma}})_{\tilde{\sigma}:\tilde{F} \rightarrow \mathbb{C}_p}\}),$$

où l'on note  $\mathcal{H}_1$  le modèle parahorique correspondant de la forme déployé  $\mathbf{H}_1$  de  $\mathbf{G}_1$ . Un coup d'œil sur la table de [De79] révèle l'existence d'une représentation  $\rho : \mathbf{H}_1 \rightarrow \text{GL}_n$  à noyau central telle que le copoids  $\rho \circ \mu_{\tilde{\sigma}}$  soit minuscule conjugué à  $(1^{(d_{\tilde{\sigma}})}, 0^{(n-d_{\tilde{\sigma}})})$  pour chaque

<sup>2</sup>Signalons que D. Kirch avait défini les modèles locaux pour les groupes unitaires absolument presque simples de façon fonctorielle dans un travail non publié [Kir17], en faisant converger l'approche de [PR09] lorsque  $p = 2$ , mais qui ne permet de dire un mot sur la géométrie de leur réduction.

$\tilde{\sigma} : \tilde{F} \rightarrow \mathbb{C}_p$ . D'ailleurs la représentation  $\rho$  s'étend en un homomorphisme de  $\mathcal{O}_{\tilde{F}}$ -groupes  $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{GL}_n$ , cf. [Lan00], d'où une application naturelle

$$\mathbb{M}^{\text{loc}}(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{F}}/\check{\mathbb{Z}}_p} \mathcal{H}_1, \{(\mu_{\tilde{\sigma}})_{\tilde{\sigma}:\tilde{F} \rightarrow \mathbb{C}_p}\}) \rightarrow \mathbb{M}^{\text{loc}}(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{F}}/\check{\mathbb{Z}}_p} \mathcal{GL}_n, \{(1^{(d_{\tilde{\sigma}})}, 0^{(n-d_{\tilde{\sigma}})})_{\tilde{\sigma}:\tilde{F} \rightarrow \mathbb{C}_p}\}),$$

laquelle n'est peut-être plus une immersion fermée en petites caractéristiques (cf. [III, Thm. 1.1, Cor. 1.4] et les cas assez ramifiés de type  $D_n^{\mathbb{H}}$ ,  $n \geq 5$  lorsque  $p = 2$ ), mais est un homéomorphisme universel sur son image (et donc une immersion fermée dans le monde perfectoïde).

Or, d'une part, on peut comparer ce dernier modèle local avec l'adhérence plate du modèle naïf construit par M. Rapoport et T. Zink, cf. [RZ96], et d'autre part, le  $v$ -faisceau associé à ce dernier objet s'identifie à la variété de Schubert perfectoïde correspondante, cf. cor. 21.6.10. de [SW20]. Comme tous les cocaractères étaient minuscules du commencement jusqu'à la fin, la fibre générique du morphisme composé

$$\mathbb{M}^{\text{loc}}(\mathcal{G}, \{\mu\}) \rightarrow \mathbb{M}^{\text{loc}}(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{F}}/\check{\mathbb{Z}}_p} \mathcal{GL}_n, \{(1^{(d_{\tilde{\sigma}})}, 0^{(n-d_{\tilde{\sigma}})})_{\tilde{\sigma}:\tilde{F} \rightarrow \mathbb{C}_p}\})$$

s'identifie au morphisme canonique

$$\mathbf{G}/P_{\{\mu\}} \rightarrow (\mathcal{R}_{\tilde{F}/\check{\mathbb{Q}}_p} \mathbf{GL}_n)/P_{\{(1^{(d_{\tilde{\sigma}})}, 0^{(n-d_{\tilde{\sigma}})})_{\tilde{\sigma}:\tilde{F} \rightarrow \mathbb{C}_p}\}}$$

entre les variétés de drapeaux, ce qui montre que  $\text{Gr}_{\mathcal{G}, \mathcal{O}_E}^{\leq \{\mu\}}$  n'est rien de plus que  $\mathbb{M}^{\text{loc}}(\mathcal{G}, \{\mu\})$  déguisé en pré-faisceau perfectoïde.  $\square$

Contrairement à [PZ13], on ne poursuit pas ici la recherche d'une définition générale des modèles locaux dans le cadre des grassmanniennes affines fonctionnelles, car on n'ai traité que quelques cas absolument presque simples à extension centrale près ; néanmoins, on trouvera un traitement général de ce cadre dans [IV]. Il serait aussi très intéressant d'étendre cette proposition à quelques cas exceptionnels, mais nous ne savons pas comment le faire.

**Note ajoutée aux épreuves.** Après l'écriture de ce texte, je me suis aperçu qu'il était loisible d'associer des schémas en groupes  $\mathcal{G}_{\Omega}$  au-dessus de  $\mathbb{Z}' := \mathbb{Z}[\zeta_e]$  à la donnée d'un entier positif  $e$  quelconque, d'un  $\mathbb{Q}'(t)$ -groupe réductif connexe  $\mathbb{Q}'(t^{1/e})$ -déployé et  $\mathbb{Q}'(t)$ -quasi-déployé  $G$  muni d'un sous-tore déployé maximal  $S$  et d'une partie bornée et non vide  $\Omega$  de l'appartement  $\mathcal{A}(G, S, \mathbb{Q}'(t))$ . En effet, les sous-groupes radiciels associés aux rayons pluriels peuvent être traités comme dans [Ti84] et le cas des tores résulte de l'existence de résolutions flasques. La preuve du théorème d'affinité pourrait aussi être améliorée, en considérant les deux étapes suivantes : pour les fibres sur  $\mathbb{Z}'[t^{\pm 1}]$ , j'observe que l'enveloppe affine  $\mathcal{G}_{\Omega}^{\text{af}}$  est opérée semi-linéairement par le groupe multiplicatif comme au 3.3 ; pour les fibres en caractéristique  $p > 0$  avec  $t = 0$ , j'utilise l'indépendance des groupes d'Iwahori-Weyl de la caractéristique choisie, cf. 2.6. Quant au théorème 3.7, je ne peut malheureusement pas procéder de la même manière, car le lemme 3.3 n'est plus valide pour les groupes unitaires de dimension impaire en caractéristique résiduelle 2. En revanche, je peux montrer une variante toujours vraie de ce lemme n'impliquant que les algèbres des distributions (voir 3.8 pour leur définition), ce qui entraîne l'isomorphisme des anneaux locaux complètes des ind-schémas  $\tilde{S}$  et  $S$  (voir la démonstration du th. 3.7), vu que  $\hat{\mathcal{O}}_{S,1}$  s'écrit comme l'anneau de séries formelles à un ensemble dénombrable de variables muni de la topologie évidente et que  $\tilde{S}$  est opéré par les sous-groupes radiciels. D'ailleurs, j'ai aussi entretemps montré que les  $v$ -faisceaux de Scholze sont représentables pour n'importe quelle donnée  $(\mathcal{G}, \mu)$  de type

abélien par des schémas faiblement normaux. Cependant, j'ignore si leurs fibres spéciales sont réduites, sauf lorsque les extensions quadratiques sont uniformisées. Le lecteur trouvera tous ces détails dans [IV].

## RÉFÉRENCES

- [I] *Théorie de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs.*
- [III] *On the normality of Schubert varieties : remaining cases in positive characteristic.*
- [IV] *Local models : between two worlds.*
- [AB08] P. Abramenko & K. S. Brown. *Buildings. Theory and applications*, volume 248 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York (2008).
- [Ana73] S. Anantharaman. *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*. Mémoires de la S.M.F., tome 33 (1973), p. 5-79.
- [Ans18] J. Anschütz. *Extending torsors on the punctured Spec  $A_{inf}$* , prépublication, <https://arxiv.org/abs/1804.06356>.
- [APLR] J. Anschütz, J. N. Pereira Lourenço & T. Richarz. *The  $B_{dR}^+$ -affine Grassmannian and local models*, en préparation.
- [BL94] A. Beauville & Y. Laszlo. *Conformal blocks and generalized theta functions*. Comm. Math. Phys. 164 (1994), no. 2, 385-419.
- [BL95] A. Beauville & Y. Laszlo. *Un lemme de descente*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 320 (1995), no. 3, 335-340.
- [BD96] A. A. Beilinson & V. G. Drinfeld. *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*, prépublication disponible dans <http://math.uchicago.edu/~drinfeld/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf>.
- [BoT65] A. Borel & J. Tits. *Groupes réductifs*, Publ. Math. de l'I.H.É.S., tome 27 (1965), 55-150.
- [BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud. *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 21, Berlin, New York : Springer Verlag.
- [BK05] M. Brion & S. Kumar. *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, Progress in Mathematics, vol. 231, Birkhäuser Boston Inc. (2005).
- [BT72] F. Bruhat & J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 41 (1972), p. 5-251.
- [BT84a] F. Bruhat & J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 60 (1984), p. 5-184.
- [BT84b] F. Bruhat & J. Tits. *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 112 (1984), p. 259-301.
- [BT87] F. Bruhat & J. Tits. *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. II : groupes unitaires*, Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 115 (1987), p. 141-195.
- [Ca05] R. Carter. *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [Co12] B. Conrad. *Finiteness theorems for algebraic groups over function fields*, Compos. Math 148 (2012), 555-639.
- [CGP15] B. Conrad, O. Gabber & G. Prasad. *Pseudo-reductive groups*, New Mathematical Monographs 26. Cambridge : Cambridge University Press (ISBN 978-1-107-08723-1/hbk ; 978-1-316-09243-9/ebook). xxiv, 665 p. (2015).



- [CP16] B. Conrad & G. Prasad. *Classification of pseudo-reductive groups*, Annals of Mathematics Studies 191, Princeton University Press (2016).
- [De79] P. Deligne. *Variétés de Shimura : Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*. Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math. Am. Math. Soc., Corvallis/Oregon 1977, Proc. Symp. Pure Math. 33, No.2, 247-290 (1979).
- [DG70] M. Demazure & P. Gabriel. *Groupes algébriques*. Masson and North-Holland (1970).
- [DS95] V. G. Drinfeld & C. Simpson. *B-structures on G-bundles and local triviality*, Math. Res. Lett. 2 (1995), no. 6, 823–829.
- [Fa03] G. Faltings. *Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 5, No. 1, 41-68 (2003).
- [Ga78] H. Garland. *The arithmetic theory of loop algebras*, J. Algebra, 53 (1978), 480-551.
- [Go01] U. Görtz. *On the flatness of models of certain Shimura varieties of PEL-type*. Math. Ann. 321, No. 3, 689-727 (2001).
- [Go03] U. Görtz. *On the flatness of local models for the symplectic group*. Adv. Math. 176, No. 1, 89-115 (2003).
- [Hai18] T. J. Haines. *Dualities for root systems with automorphisms and applications to non-split groups*, Representation Theory 22 (2018), 1-26.
- [HR18a] T. J. Haines & T. Richarz. *The test function conjecture for parahoric local models*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/1801.07094>, à paraître dans Journal of the AMS.
- [HR18b] T. J. Haines & T. Richarz. *The test function conjecture for local models of Weil-restricted groups*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/1805.07081>, à paraître dans Comp. Math.
- [HPR18] X. He, G. Pappas & M. Rapoport. *Good and semi-stable reductions of Shimura varieties*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/1804.09615>.
- [Hei10] J. Heinloth. *Uniformization of  $\mathcal{G}$ -bundles*, Math. Ann. 347 (2010), n° 3, 499-528.
- [Ja07] J. C. Jantzen. *Representations of algebraic groups*, Amer. Math. Soc. (2007).
- [Kac90] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*, troisième édition, Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [Kir17] D. Kirch. *Unitary local models in the wildly ramified case, even dimension*, article non publié.
- [KP18] M. Kisin & G. Pappas. *Integral models of Shimura varieties with parahoric level structure*. Publ. Math. de l'I.H.É.S., 128 (2018), 121 - 218.
- [Kos66] B. Kostant. *Groups over  $\mathbb{Z}$* , in Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Sympos. Pure Math. 9, Boulder, Colorado, 1995, 90-98, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1966).
- [Kum87] S. Kumar. *Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting*, Invent. Math. 89 (1987), 395-423.
- [Kum97] S. Kumar. *Infinite Grassmannians and moduli spaces of G-bundles*, Vector Bundles on Curves — New Directions, dirigé par M. S. Narasimhan, Lecture Notes in Mathematics, vol 1649 (1997), Springer, Berlin, Heidelberg.
- [Kum02] S. Kumar. *Kac-Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory*, Progress in Mathematics, vol. 204, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (2002).
- [Lan96] E. Landvogt. *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lect. Notes in Math., vol. 1619, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Lan00] E. Landvogt. *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building*, J. Reine Angew. Math., 518 (2000), 213-241.
- [Lev16] B. Levin. *Local models for Weil-restricted groups*, Compositio Math. 152 (2016), 2563-2601.
- [Lit98] P. Littelmann. *Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac-Moody algebras*, J. Amer. Math. Soc. 11 (1998), 551-567.
- [Mar18] T. Marquis. *An introduction to Kac-Moody groups over fields*, EMS Textbooks in Mathematics, EMS, Zürich (2018).



- [Mat88] O. Mathieu. *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales*, Astérisque vol. 159-160 (1988).
- [Mat89] O. Mathieu. *Construction d'un groupe de Kac-Moody et applications*, Compositio Mathematica 69 (1989) n° 1, 37-60.
- [Mit85] D. Mitzman. *Integral bases for affine Lie algebras and their universal enveloping algebras*, Contemporary Mathematics, 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1985).
- [PR08] G. Pappas & M. Rapoport. *Twisted loop groups and their affine flag varieties*. Adv. Math. 219, No. 1, 118-198 (2008).
- [PR09] G. Pappas & M. Rapoport. *Local models in the ramified case. III. Unitary groups*, Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, 8 (3) (2009), 507-564.
- [PRS13] G. Pappas, M. Rapoport & B. Smithling. *Local models of Shimura varieties, I. Geometry and combinatorics*. Farkas, Gavril (ed.) et al., Handbook of moduli. Volume III. Somerville, MA : International Press ; Beijing : Higher Education Press (ISBN 978-1-57146-259-6/pbk ; 978-1-57146-265-7/set). Advanced Lectures in Mathematics (ALM) 26, 135-217 (2013).
- [PZ13] G. Pappas & X. Zhu. *Local models of Shimura varieties and a conjecture of Kottwitz*. Invent. Math. 194, No. 1, 147-254 (2013).
- [PL17] J. N. Pereira Lourenço. *The Riemannian Hebbbarkeitssätze for pseudorigid spaces*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/1711.06903>.
- [RZ96] M. Rapoport & T. Zink. *Period spaces for  $p$ -divisible groups*. Annals of Mathematics Studies. 141. Princeton, NJ : Princeton Univ. Press. xxi, 324 p., (1996).
- [Ray70] M. Raynaud. *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 119, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Ri13] T. Richarz. *Schubert varieties in twisted affine flag varieties and local models*, Journal of Algebra 375 (2013), 121-147.
- [Ri16] T. Richarz. *Affine Grassmannians and geometric Satake equivalences*. Int. Math. Res. Not., Vol. 2016, Issue 12, 3717–3767 (2016).
- [Ri19] T. Richarz. *Erratum to “Affine Grassmannians and geometric Satake equivalences”*, Int. Math. Res. Not., rnz210 (2019).
- [Ri20] T. Richarz. *Torsors under Néron blow-ups*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/2001.03597>.
- [Ro18] Z. Rosengarten. *Tate duality in positive dimensions over function fields*, prépublication, <https://arxiv.org/pdf/1805.00522.pdf>.
- [Sch17] P. Scholze. *Étale cohomology of diamonds*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/1709.07343>.
- [SW20] P. Scholze & J. Weinstein. *Berkeley lectures on  $p$ -adic geometry*, prépublication, Annals of Math Studies 207 (2020).
- [Ses58] C. S. Seshadri. *Triviality of vector bundles over the affine space  $K^2$* , Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 44 (1958), p. 456-458.
- [SGA3] SGA 3, *Schémas en groupes. III : Structure des schémas en groupes réductifs*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 153, Springer-Verlag, Berlin, 1962/1964.
- [Spr06] T. A. Springer *Twisted conjugacy in simply connected groups*. Transform. Groups 11, No. 3, 539-545 (2006).
- [St59] R. Steinberg. *Variations on a theme of Chevalley*. Pacific J. Math., Vol. 9, No. 3, 875-891 (1959).
- [St68] R. Steinberg. *Endomorphisms of linear algebraic groups*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80 (1968).
- [Ti66] J. Tits. *Classification of algebraic semi-simple groups*, dans Algebraic groups and discontinuous subgroups, conférence à Boulder, États-Unis en 1965, Proc. Symp. Pure Math. 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1966), 33-62.

- [Ti77] J. Tits. *Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 247 (1971) : 196-220.
- [Ti81] J. Tits. *Algèbres et groupes de Kac-Moody*, Annuaire du Collège de France (1980-1981), 75-86.
- [Ti82] J. Tits. *Algèbres de Kac-Moody et groupes associés (suite)*, Annuaire du Collège de France (1981-1982), 91-105.
- [Ti84] J. Tits. *Groups and group functors attached to Kac-Moody data*, Arbeitstagung Bonn 1984, p. 193-223.
- [Ti87] J. Tits. *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields*, J. Algebra 105 (1987), n° 2, 542-573.
- [Ti89] J. Tits. *Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody*. Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki, exp. n° 700, p. 7-31.
- [Ti92] J. Tits. *Twin buildings and groups of Kac-Moody type*, dans Groups, combinatorics and Geometry, conférence à Durham en 1990, London Math. Soc. Lect. Series 165, Cambridge University Press (1992), 249-286.
- [Tho87] R. W. Thomason. *Equivariant resolution, linearization and Hilbert's fourteenth problem over arbitrary base schemes*, Adv. in Math. Vol. 65 (1987), n° 1, 16-34.
- [WW80] W. C. Waterhouse & B. Weisfeiler. *One-dimensional affine group schemes*, J. Algebra, Vol. 66 (1980), n° 2, p. 550-568.
- [Zh14] X. Zhu. *On the coherence conjecture of Pappas and Rapoport..* Ann. Math. (2) 180, No. 1, 1-85 (2014).
- [Zh16] X. Zhu. *An introduction to affine Grassmannians and the geometric Satake equivalence*, prépublication, <https://arxiv.org/abs/1603.05593>.
- [Zh17] X. Zhu. *Affine Grassmannians and the geometric Satake in mixed characteristic*, Ann. of Math. (2) 185 (2017), n° 2, 403-492.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT BONN, ENDENICHER ALLEE 60, 53115 BONN, DEUTSCHLAND

*Email address:* lourenco@math.uni-bonn.de



## Chapitre 3

### **On the normality of Schubert varieties : remaining cases in positive characteristic**

# ON THE NORMALITY OF SCHUBERT VARIETIES: REMAINING CASES IN POSITIVE CHARACTERISTIC

THOMAS J. HAINES, JOÃO N. P. LOURENÇO, TIMO RICHARZ

ABSTRACT. We study the geometry of equicharacteristic partial affine flag varieties associated to tamely ramified groups  $G$  in positive characteristics  $p$  dividing the order of the fundamental group  $\pi_1(G_{\text{der}})$ . We obtain that most Schubert varieties are not normal and provide an explicit criterion for when this happens. Apart from this, we show, on the one hand, that loop groups of semisimple groups satisfying  $p \mid |\pi_1(G_{\text{der}})|$  are not reduced, and on the other hand, that their integral realizations are ind-flat.

## CONTENTS

1. Introduction	1
2. A normality criterion	4
3. Tame liftings and negative loop groups	6
4. Kac-Moody flag varieties and projective embeddings	10
5. Tangent spaces at base points	15
6. Calculations and examples	19
7. Reducedness: the split case	23
8. Reducedness: the twisted case	27
9. Ind-flatness	28
Appendix A. Ind-flatness	31
Appendix B. Frobenius ind-splitting	32
Appendix C. The quasi-minuscule Schubert scheme for $\text{PGL}_2$	34
References	35

## 1. INTRODUCTION

Partial affine flag varieties are very important objects in arithmetic algebraic geometry for their intimate relation to local models of Shimura varieties. They first appeared extensively in the realm of Kac-Moody theory by means of (integral) representation theory of Kac-Moody algebras. They were later reinterpreted via the theory of affine Grassmannians as parametrizing torsors under a parahoric models of a connected reductive group  $G$  over the formal disk and trivialized over the punctured one.

---

Research of T.H. partially supported by NSF DMS-1406787, research of J.N.P.L. funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft and research of T.R. funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) - 394587809.

This chapter is a draft of work in progress with T. J. Haines and T. Richarz, who expressly authorized its reproduction in the thesis.

In the seminal works of Faltings ([Fal03]), Pappas-Rapoport ([PR08]), Zhu ([Zhu14]) and Pappas-Zhu ([PZ13]), the authors establish several geometrical properties of affine flag varieties, such as normality of Schubert varieties or reducedness of the special fiber of local models, under the following working hypothesis: the reductive group  $G$  is tamely ramified and  $p \nmid |\pi_1(G_{\text{der}})|$ , where  $\pi_1$  here signifies the Borovoi fundamental group. The first type of restriction has been substantially lifted in the work of Levin [Lev16] for Weil-restricted groups and in [II] for absolutely simple wildly ramified groups. The second type of restriction is dealt with in this paper, whose main finding can be summarized as follows:

**Theorem 1.1.** *Let  $F = k((t))$  be the Laurent series field with algebraically closed residue field  $k$ ,  $G$  a tamely ramified connected reductive group,  $\mathbf{f}$  a facet of the building  $\mathcal{B}(G, F)$  and  $\mathbf{a}$  an alcove containing  $\mathbf{f}$  in its closure. If  $p$  divides the order of  $\pi_1(G^{\text{der}})$ , then  $(\mathbf{a}, \mathbf{f})$ -Schubert varieties  $S_w$  indexed by  $w \in W/W_{\mathbf{f}}$  of  $\mathcal{F}\ell_{G, \mathbf{f}}$  are very frequently non-normal.*

Let us briefly explain what we mean by very frequently. For each almost simple factor  $G_{i, \text{ad}}$  of  $G_{i, \text{ad}}$ , we have a canonical morphism between buildings. If the image  $S_{\text{ad}, w, i}$  of the Schubert variety  $S_w$  in  $\mathcal{F}\ell_{G_{i, \text{ad}}, \mathbf{f}_i}$  has sufficiently large dimension for all  $i$ , then  $S_w$  is not normal. Moreover, let us note that the non-normality of Schubert varieties occurs precisely when they are neither weakly normal nor Frobenius split. The best one can hope to know about their geometry in this case appears to be reduced to their topological normality (also known as geometrically unibranch).

The reason why this behavior should happen can be surprisingly resumed in a few lines. Up to translation by an adequate element  $\dot{\tau} \in G(F)$  which fixes  $\mathbf{a}$ , we may assume that  $w \in W_{\text{aff}} = W_{\text{sc}}$ . Then one has a map

$$S_{\text{sc}, w} \rightarrow S_w$$

which is easily seen to be proper, birational and a universal homeomorphism (in other words, the (weak) normalization morphism of  $S_w$ ) by looking at their isomorphic Demazure resolutions. On the other hand, the affine flag variety  $\mathcal{F}\ell_{G_{\text{sc}}, \mathbf{f}}$  is reduced as an ind-scheme, i.e. equals the colimit of its Schubert varieties. If we assumed all Schubert varieties were normal, then these two facts would imply monomorphy of the map  $\mathcal{F}\ell_{G_{\text{sc}}, \mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{F}\ell_{G, \mathbf{f}}$ . But this is clearly not true as soon as the kernel of  $G_{\text{sc}} \rightarrow G$  is non-étale (equivalently,  $p \mid |\pi_1(G_{\text{der}})|$ ).

We should however stress that the above reasoning only shows that there are infinitely many non-normal Schubert varieties in our case of study and not that they appear very frequently. In order to study in detail when  $S_w$  is actually normal, we study tangent spaces of simply connected Schubert varieties. For this, we recast old results of Kumar ([Ku96]), Mathieu ([Ma89]), Ramanathan ([Ra87]) and Polo ([Po94]) in the following fashion. Once we lift our whole setting to the Witt vectors  $W(k)$  as in [PR08], then we show that  $T_e S_w$  can effectively be computed in characteristic 0 and we actually give a formula in terms of global sections of very ample line bundles. Although this technical work is not really needed to the calculations and examples we are later going to present (e.g. that quasi-minuscule Schubert varieties are already not normal), it is of independent interest to have a good source on this

material and it would surely help in a future classification of all normal Schubert varieties when  $p \mid |\pi_1(G_{\text{der}})|$ .

Let us mention two other small contributions of this paper to the understanding of the geometry of affine flag varieties when  $p \mid |\pi_1(G_{\text{der}})|$ . As we saw earlier, simply connected affine flag varieties are reduced and a similar result holds for all semisimple groups  $G$  such that  $p \nmid |\pi_1(G_{\text{der}})|$  by [PR08, Thm. 6.1]. On the other hand, affine flag varieties of non-semisimple reductive groups are non-reduced. In [PR08, Ex. 6.5], the same authors suggest that the same should hold for the group  $\text{PGL}_2$  in characteristic 2.

**Theorem 1.2.** *Maintain the previous notation. The affine flag variety  $\mathcal{F}\ell_{G,\mathbf{f}}$  is reduced if and only if  $G$  is semisimple and  $p \nmid |\pi_1(G_{\text{der}})|$ .*

We give two different proofs of this result. If  $G$  is split, we contemplate the module of so-called distributions (i.e. higher differential operators) of  $\mathcal{F}\ell_{G,\mathbf{f}}$  supported at the origin  $e$  and prove that the homomorphism  $\text{Dist}(\mathcal{F}\ell_{G_{\text{sc}},\mathbf{f}}, e) \rightarrow \text{Dist}(\mathcal{F}\ell_{G,\mathbf{f}}, e)$  is not surjective, contradicting the reducedness hypothesis, by essentially analyzing the effect of the multiplication-by- $p$  map on Grassmannians. If  $G$  is tamely ramified, we factor the homomorphism  $\text{Res}_{F/F^p} G_{\text{sc}} \rightarrow \text{Res}_{F/F^p} G$  of pseudo-reductive groups as an epimorphism to a pseudo-reductive group  $\overline{G}$  and a closed immersion whose image is strictly smaller than  $\text{Res}_{F/F^p} G$  - this works under the hypothesis that  $G$  is semisimple and  $p \mid |\pi_1(G)|$ . Then we use the recently developed Bruhat-Tits theory for pseudo-reductive groups (see [I]) to prove that  $\mathcal{F}\ell_{\overline{G},\mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{F}\ell_{\text{Res}_{F/F^p} G,\mathbf{f}} = \mathcal{F}\ell_{G,\mathbf{f}}$  is a closed immersion, but not an isomorphism, for Lie-algebraic reasons.

In a previous version of this work, the hitherto authors wondered whether the integral realizations  $\underline{\mathcal{F}\ell}_{G,\mathbf{f}}$  of the affine flag varieties over the Witt vectors (or just affine Grassmannians of split groups) admit a presentation by flat schemes, and no satisfactory answer had been found beyond the simply connected case, by means of invoking its reducedness. We were now able to show:

**Theorem 1.3.** *The ind-scheme  $\underline{\mathcal{F}\ell}_{G,\mathbf{f}}$  is ind-flat over  $W(k)$ .*

The proof relies on computing the formal completion of the affine flag variety along the identity section, just as Faltings did back in his article [Fal03], and check that this is ind-flat. Next we compare the affine flag variety to its flat closure and it suffices, as both are ind-Noetherian, to show that their functors restricted to strictly Henselian Artinian local rings coincide. This can be achieved by translating with the positive loop group and representative  $W(k)$ -sections  $\dot{w}$  of the Iwahori-Weyl group, so that those rings are supported at the identity section.

To finish the introduction, let us explain some important consequences of these results to the theory of local models in mixed characteristic. Let  $F$  briefly denote a  $p$ -adic field with algebraically closed residue field,  $G$  a tamely ramified connected reductive group and  $S$  a maximal split torus of  $G$ . For each facet  $\mathbf{f} \subset \mathcal{A}(G, S, F)$ , Pappas-Zhu have constructed a parahoric group scheme  $\underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$  over  $\mathcal{O}_F[t]$  lifting  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  along the specialization  $\mathcal{O}_F[t] \rightarrow \mathcal{O}_F$ ,



sending  $t$  to a preferred choice of uniformizer  $\varpi \in \mathcal{O}_F$ , cf. [PZ13, Thm. 4.1]. This group scheme is then used together with the Beilinson-Drinfeld affine Grassmannian ([BD96]) to construct local models  $\mathbb{M}_{\underline{\mathcal{G}}, \{\mu\}}^{\text{loc}}$  where  $\{\mu\}$  is a geometric conjugacy class of cocharacters of the  $\mathcal{O}_F[t^\pm]$ -group scheme  $\underline{\mathcal{G}}$ .

**Corollary 1.4.** *Suppose  $p \mid |\pi_1(G_{\text{der}})|$ . Then for varying  $\{\mu\}$  the local models  $\mathbb{M}_{\underline{\mathcal{G}}, \{\mu\}}^{\text{loc}}$  are most of the time not normal and their special fibers are not reduced.*

Indeed, suppose the admissible locus  $\mathcal{A}(G^\flat, \{\mu^\flat\})$  given by the reduced union of explicitly determined Schubert varieties is not weakly normal, i.e. one of the irreducible components is not normal. Since the former coincides with the reduction of the special fiber of the local models (see [HR18a, Thm. 6.12]), we see by comparing it with its normalization (which is the local model of some  $z$ -extension of  $G$ ) that the special fiber cannot be reduced (compute global sections of line bundles and compare with the generic fiber by flatness) and hence the local model itself is not normal. In fact, this nuisance appears even if we assume that  $\{\mu\}$  is minuscule and the ramification degree is sufficiently large. As a result, we obtain that morphisms between diamond local models in the sense of Scholze (see [SW20, Sec. 21]) that are mono when restricted to perfectoid rings might not be closed immersions (although this happens very seldom; compare with [II, 3.11.]).

## 2. A NORMALITY CRITERION

Let  $k$  be an algebraically closed field, and let  $F = k((t))$  denote the Laurent series field. Let  $G$  be a connected reductive  $F$ -group which splits over a tamely ramified extension of  $F$ .

Let  $\mathbf{f} \subset \mathcal{B}(G, F)$  be a facet in the Bruhat-Tits building, and denote by  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  the associated parahoric  $\mathcal{O}_F$ -group scheme. The loop group  $LG$  (resp.  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ ) is the functor on the category of  $k$ -algebras  $R$  defined by  $LG(R) = G(R((t)))$  (resp.  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}}(R) = \mathcal{G}_{\mathbf{f}}(R[[t]])$ ). Then  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}} \subset LG$  is a subgroup functor, and the *twisted affine flag variety* is the étale quotient

$$\mathcal{F}_{G, \mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} LG / L^+\mathcal{G}_{\mathbf{f}},$$

which is representable by an ind-projective  $k$ -ind-scheme.

Let  $S \subset G$  be a maximal  $F$ -split torus whose apartment  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G, S, F)$  contains  $\mathbf{f}$ . We fix an alcove  $\mathbf{a} \subset \mathcal{A}$  which contains  $\mathbf{f}$  in its closure. The left- $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ -orbits inside  $\mathcal{F}_{G, \mathbf{f}}$  are enumerated by the quotient  $W/W_{\mathbf{f}}$  of the Iwahori-Weyl group  $W = W(G, S, F)$  where  $W_{\mathbf{f}} \subset W_{\text{aff}}$  is the subgroup of the affine Weyl group of reflections fixing  $\mathbf{f}$ . For each class  $w \in W/W_{\mathbf{f}}$ , we define the Schubert variety

$$S_w = S_w(\mathbf{a}, \mathbf{f}) \subset \mathcal{F}_{G, \mathbf{f}}$$

as the reduced  $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ -orbit closure of  $\dot{w} \cdot e$  where  $e \in \mathcal{F}_{G, \mathbf{f}}(k)$  is the base point and  $\dot{w} \in LG(k)$  is any representative of the class  $w$ . Then  $S_w$  is a projective  $k$ -variety. The choice of  $\mathbf{a}$  equips the quotient  $W/W_{\mathbf{f}}$  with a length function  $l = l(\mathbf{a}, \mathbf{f})$  and a Bruhat partial order  $\leq$  satisfying  $\dim(S_w) = l(w)$ , and  $S_v \subset S_w$  if and only if  $v \leq w$  for  $v, w \in W/W_{\mathbf{f}}$ .

Let  $\phi: G_{\text{sc}} \rightarrow G_{\text{der}} \subset G$  be the simply connected cover. Then  $S_{\text{sc}} := \phi^{-1}(S)^o \subset \phi^{-1}(T)^o =: T_{\text{sc}}$  is a maximal  $F$ -split torus contained in a maximal torus. This induces a map on apartments  $\mathcal{A}(G_{\text{sc}}, S_{\text{sc}}, F) \rightarrow \mathcal{A}(G, S, F)$  under which the facets correspond bijectively to each other. We denote the preimage of  $\mathbf{f}$  by the same letter. The map  $G_{\text{sc}} \rightarrow G$  extends to a map on parahoric group schemes  $\mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ , and hence to a map on twisted partial affine flag varieties  $\mathcal{F}\ell_{G_{\text{sc}}, \mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{F}\ell_{G, \mathbf{f}}^0$  onto the neutral component. We are interested in comparing their Schubert varieties.

The natural map on Iwahori-Weyl groups

$$W_{\text{sc}} = W(G_{\text{sc}}, S_{\text{sc}}, F) \longrightarrow W(G, S, F) = W,$$

is injective and its image identifies with the affine Weyl group  $W_{\text{aff}}$  compatibly with the subgroup  $W_{\mathbf{f}}$ . Thus, for each class  $w \in W_{\text{aff}}/W_{\mathbf{f}}$  we get a map of projective  $k$ -varieties

$$(2.1) \quad S_{\text{sc}, w} = S_{\text{sc}, w}(\mathbf{a}, \mathbf{f}) \longrightarrow S_w(\mathbf{a}, \mathbf{f}) = S_w.$$

**Proposition 2.1.** *For each class  $w \in W_{\text{aff}}/W_{\mathbf{f}}$ , the following statements are equivalent:*

- i) *The Schubert variety  $S_w$  is normal.*
- ii) *The map (2.1) is an isomorphism.*
- iii) *The map (2.1) induces an injective map on tangent spaces at the base points.*

*Proof.* i) $\Rightarrow$ ii): The map (2.1) is a finite birational universal homeomorphism by [HR19, Prop. 3.5], and thus is an isomorphism whenever  $S_w$  is normal.

ii) $\Rightarrow$ i): Since  $G$  splits over a tamely ramified extension of  $F$ , the Schubert variety  $S_{\text{sc}, w} \subset \mathcal{F}\ell_{G_{\text{sc}}, \mathbf{f}}$  is normal by [PR08, Thm. 0.2], and so is  $S_w$  whenever (2.1) is an isomorphism.

ii) $\Rightarrow$ iii): This is trivial.

iii) $\Rightarrow$ ii): The locus in  $S_{\text{sc}, w}$ , where (2.1) is an isomorphism, is non-empty, open and  $L^+\mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{a}}$ -invariant. Thus, it suffice to show that the map of local rings at the base points

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}_{S_w, e} \longrightarrow \mathcal{O}_{S_{\text{sc}, w}, e} =: \mathcal{O}_{\text{sc}}$$

is an isomorphism. Here  $e$  denotes the base point of both  $\mathcal{F}\ell_{G_{\text{sc}}, \mathbf{f}}$  and  $\mathcal{F}\ell_{G, \mathbf{f}}$ . As (2.1) is a finite birational map between integral schemes, the map  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\text{sc}}$  is a finite ring extension which induces an isomorphism on fraction fields. If iii) holds, then the map (2.1) is unramified at the base points by [StaPro, 0B2G] so that  $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\text{sc}} = \mathfrak{m}_{\text{sc}}$  for the maximal ideals. An application of Nakayama's Lemma [StaPro, 00DV (6)] to the finite map  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\text{sc}}$  (both viewed as  $\mathcal{O}$ -modules) shows that this map is surjective as well. This finishes the proof of the proposition.  $\square$

**Corollary 2.2.** *Let  $w \in W_{\text{aff}}/W_{\mathbf{f}}$ .*

- i) *If  $S_w$  is normal, then  $S_v$  is normal for all  $v \leq w$ .*
- ii) *If  $S_w$  is not normal, then  $S_v$  is not normal for all  $v \geq w$ .*

*Proof.* Both parts i) and ii) are immediate from Proposition 2.1 iii).  $\square$

Let us state one of the main results of the paper, which will be proved as soon as we have built upon our knowledge of tangent spaces of Schubert varieties.

**Theorem 2.3.** *Suppose  $G$  is an absolutely simple semisimple group such that its simply connected cover is a non-étale isogeny. Then  $\mathcal{FL}_{G,\mathbf{f}}$  contains only finitely many normal Schubert varieties.*

Notice that we can easily find non absolutely almost simple semisimple groups having infinitely many Schubert varieties. However, it is still true that the great majority of them are not normal: indeed, as soon as all of their projections to the partial affine flag variety of the adjoint factors of  $G$  have sufficiently large dimension, then  $S_w$  will not be normal.

### 3. TAME LIFTINGS AND NEGATIVE LOOP GROUPS

In this section, we explain how to lift Schubert varieties from characteristic  $p$  to characteristic 0, and set the stage for the calculation of tangent spaces.

**3.1. Tame liftings of groups.** Let  $G$  be an absolutely almost simple tamely ramified  $F$ -group, and assume that  $G$  has the same splitting field as its simply connected group (or its adjoint group). We follow the presentation in [PR08, §7]<sup>1</sup>. Let  $F'/F$  be the tamely ramified splitting field of  $G$ . The extension  $F'/F$  is a cyclic Galois extension of degree  $e = 1$ ,  $e = 2$  or  $e = 3$ , cf. [PR08, §7]. We fix a uniformizer  $u \in F'$  such that  $u^e = t$ , and a generator  $\langle \tau \rangle = \text{Gal}(F'/F)$ . We have  $\tau u = \zeta \cdot u$  where  $\zeta$  is a primitive  $e$ -th root of unity.

Fix a Chevalley group  $H$  over  $\mathbb{Z}$  together with an isomorphism  $G \otimes_F F' = H \otimes_{\mathbb{Z}} F'$  compatible with pinnings on both sides. The quasi-pinning for  $G$  over  $F$  is denoted  $(G, B, T, X)$ , and for  $H$  over  $\mathbb{Z}$  it is denoted  $(H, B_H, T_H, X_H)$ . Here  $T \subset G$  is the centralizer of the maximal  $F$ -split torus  $S$  as above. Recall that we fixed an alcove  $\mathbf{a} \subset \mathcal{A}(G, S, F)$  containing a facet  $\mathbf{f}$  in its closure.

The automorphism  $\text{id} \otimes \tau$  on  $\text{Res}_{F'/F}(G_{F'}) = \text{Res}_{F'/F}(H_{F'})$  induces an automorphism  $\sigma$  on  $H \otimes_{\mathbb{Z}} F'$  which can be written in the form  $\sigma = \sigma_0 \otimes \tau$  where  $\sigma_0 \in \text{Aut}(X^*(T_H), \Delta_H, X_*(T_H), \Delta_H^\vee)$  is viewed as an order  $e$  automorphism of  $H$ . Here  $\Delta_H$  (resp.  $\Delta_H^\vee$ ) denotes the simple roots (resp. coroots) for  $(H, B_H, T_H)$ . The parahoric group scheme can now be written in the form

$$(3.1) \quad \mathcal{G}_{\mathbf{f}} = \text{Res}_{k[[u]]/k[[t]]}(\mathcal{H}_{\mathbf{f}})^{\sigma, 0},$$

where  $\mathcal{H}_{\mathbf{f}}$  is the parahoric group scheme associated with the image of the facet  $\mathbf{f} \subset \mathcal{B}(G, F) \subset \mathcal{B}(H, F')$ . Here  $(-)^0$  denotes the fiberwise neutral component which only plays a role if  $G$  is not simply connected. This leads to the identifications of loop groups

$$(3.2) \quad LG = (LH_{k((u))})^{\sigma} \quad \text{and} \quad L^+\mathcal{G} = (L^+\mathcal{H})^{\sigma, 0},$$

where we refer to the discussion below (3.5) for the second equality.

We now lift (3.1) and (3.2) to the Witt vectors. Assume now that  $k$  is of characteristic  $p > 0$ , and denote by  $W = W(k)$  the ring of Witt vectors together with the natural map  $W \rightarrow k$ . Let  $K = \text{Frac}(W)$  be the field of fractions. Following the arguments in [PR08, §7]

<sup>1</sup>In *loc. cit.*, the group  $G$  is also assumed to be simply connected, but our weaker hypothesis suffices.

(for Iwahori group schemes), or [PZ13, §4.2.2 (a)], we have the ‘parahoric group scheme’  $\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}}$  over the ring  $W[[u]]$  such that  $\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} \otimes k[[u]] = \mathcal{H}_{\mathbf{f}}$ . The group  $\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}}$  is by construction ‘horizontal along the  $W$ -direction’, so that  $\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} \otimes K[[u]]$  is an Iwahori group scheme of the same type as  $\mathcal{H}_{\mathbf{f}}$  (but now the residue field  $K$  is of characteristic zero). Note that  $\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} \otimes W((u)) = H \otimes_{\mathbb{Z}} W((u))$ . Further, the automorphism  $\tau$  lifts to the automorphism  $\tau: W[[u]] \rightarrow W[[u]]$ ,  $u \mapsto [\zeta] \cdot u$  where  $[\cdot]$  denotes the Teichmüller lift. Again we have the automorphism  $\sigma = \sigma_0 \otimes \tau$  on  $\text{Res}_{W[[u]]/W[[t]]}(\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})$  so that we can define the fiberwise neutral component (cf. [SGA 3, VI<sub>B</sub>, §3] for general base schemes)

$$(3.3) \quad \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Res}_{W[[u]]/W[[t]]}(\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})^{\sigma,0}.$$

By [SGA3, VI<sub>B</sub>, Thm. 3.10], this is a smooth  $W[[t]]$ -group scheme with connected fibers such that  $\underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \otimes k[[t]] = \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ , and Lemma 3.1 below shows that it is affine as well. We define  $\underline{G} := \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \otimes W((t))$ , and  $\underline{H} := \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} \otimes W((u)) = H \otimes_{\mathbb{Z}} W((u))$ . We have by base change

$$(3.4) \quad \underline{G} = \text{Res}_{W((u))/W((t))}(\underline{H})^{\sigma},$$

and since  $W((u))/W((t))$  is étale the latter is a reductive group scheme over  $W((t))$  (with connected fibers).

**Lemma 3.1.** *The  $W[[t]]$ -group scheme  $\underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$  is a Bruhat-Tits group scheme for  $\underline{G}$  in the sense<sup>2</sup> of [PZ13, Thm. 4.1]. In particular, it is smooth affine with connected fibers.*

*Proof.* If  $\underline{G} = \underline{H}$  is split, then by construction  $\underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} = \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}}$  is such a Bruhat-Tits group scheme, cf. [PZ13, §4.2.2 (a)]. This is the first step in showing that (3.3) agrees with the construction in [PZ13, p. 180, middle] in general: starting from  $\underline{G}$ , we may follow [PZ13, §4.2] and construct the group scheme analogous to the one Pappas-Zhu denote as  $\mathcal{G}_{\Omega} = (\mathcal{G}'_{\Omega})^0$ , where  $\mathcal{G}'_{\Omega}$  is defined on the bottom of p. 187. We observe the following: if we start from  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\#} := \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \otimes_{W[[t]], t \mapsto p} W$ , which is a parahoric group scheme in mixed characteristic, and apply the construction of Pappas-Zhu [PZ13, Thm. 4.1] to it, then we recover the group scheme  $\underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$ . We use along the way that there is a canonical identification

$$\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\#} \otimes_W K[p^{\frac{1}{e}}] = H \otimes_{\mathbb{Z}} K[p^{\frac{1}{e}}]$$

coming from (3.3) or (3.4), i.e., under  $\text{Gal}(F'/F) = \text{Gal}(K[p^{\frac{1}{e}}]/K)$  the Galois actions on the group  $\text{Res}_{W[[u]]/W[[t]]}(\underline{\mathcal{H}})$  induced from  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  resp.  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}^{\#}$  agree.  $\square$

We define the loop groups as the functors on the category of  $W$ -algebras  $R$  given by  $L_W \underline{G}(R) = \underline{G}(R((t)))$  (resp.  $L_W^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} = \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}(R[[t]])$ ), and  $L_W \underline{H}(R) = \underline{H}(R((u)))$  (resp.  $L_W^+ \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} = \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}}(R[[u]])$ ). This leads to the identifications

$$(3.5) \quad L_W \underline{G} = (L_W \underline{H})^{\sigma} \quad \text{and} \quad L_W^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} = (L_W^+ \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})^{\sigma,0}.$$

<sup>2</sup>As in [PZ13, Thm. 4.1], the reductive group scheme  $\underline{G}$  is defined over  $W[t, t^{-1}]$ . For our purposes, it is more convenient to consider the base change along  $W[t, t^{-1}] \rightarrow W((t))$ .

For the second equality, we note that  $L_W^+ \text{Res}_{W[[u]]/W[[t]]}(\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})^\sigma = (L_W^+ \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})^\sigma$  which is a countably infinite successive extension of

$$\text{Res}_{W[[u]]/W[[t]]}(\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})^\sigma \otimes_{W[[t]], t \rightarrow 0} W$$

by vector groups which only depend on a neighborhood of the unit section and so are the same for  $L_W^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$ , cf. [RS20, Prop. A.4.9, (A.4.11)]. Since vector groups are fiberwise connected, we obtain the desired equality using that taking fiberwise connected components commutes with base change, cf. [SGA 3, VI<sub>B</sub>, Prop. 3.3].

**Corollary 3.2.** *As group ind-schemes  $L_W \underline{G} \otimes_W k = LG$  compatible with the subgroup schemes  $L_W^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \otimes_W k = L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$ .*

*Proof.* This is immediate from (3.5) and (3.2).  $\square$

**3.2. Tame liftings of Schubert varieties.** Being ind-schemes, the loop groups (3.5) define fpqc (in particular étale) sheaves on the category  $\text{AffSch}/W$  of affine  $W$ -schemes.

**Lemma 3.3.** *The étale quotient  $\underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}} := L_W \underline{G} / L_W^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$  is an fpqc sheaf on  $\text{AffSch}/W$  which is represented by an ind-projective  $W$ -ind-scheme. There is an identification*

$$\underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}} \otimes_W k = \mathcal{F}_{G,\mathbf{f}}.$$

*Proof.* The proof is the same as in [RS20, Lem. 5.3.2 i)]: Let  $T' \rightarrow T$  be a faithfully flat map in  $\text{AffSch}/W$ . Let  $T' \leftarrow P' \rightarrow L_W \underline{G}$  be an object in  $\underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}}(T')$  together with a descent datum along  $T' \rightarrow T$ . By effectivity of descent for affine schemes [StaPro, 0244], the torsor  $T' \leftarrow P'$  descends to a fpqc-locally trivial torsor  $T \leftarrow P$  represented by affine schemes. The map  $P' \rightarrow L_W \underline{G}$  descends as well because every ind-scheme is an fpqc-sheaf. By [RS20, Prop. A.4.9, Exam. A.4.12 iii.a)] every fpqc-locally trivial  $L_W^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$ -torsor is étale-locally trivial. Thus,  $T \leftarrow P \rightarrow L_W \underline{G}$  is an object of  $\underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}}(T)$ . Now the representability of  $\underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}}$  is a special case of [PZ13, Prop. 6.5] in view of Lemma 3.1. Finally, the displayed formula is immediate from Corollary 3.2 noting that sheafification commutes with fiber products.  $\square$

We can also provide something close to a lift of Schubert varieties. First, it is well known that the Iwahori-Weyl group not only does not depend on the characteristic but it is naturally realized over the Witt vectors (see the discussion in [II, 2.6.]). Indeed, we have a canonical isomorphism:

$$\underline{N}(W(k)((t)))/\underline{T}(W(k)[[t]]) \xrightarrow{\sim} N(k((t)))/T(k[[t]]) = W$$

where  $N$  is the normalizer of  $S$  in  $G$  and its underlined counterpart is its canonical lift to a closed subgroup of  $\underline{G}$ . For any representative  $\dot{w} \in \underline{N}(W(k)((t)))$  of  $w \in W/W_{\mathbf{f}}$ , we denote by  $\underline{S}_{w,\mathbf{f}}$  the scheme-theoretic image of the morphism  $L^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{a}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}}, g \mapsto g \cdot \dot{w} \cdot e$ .

**Proposition 3.4.** *The  $W(k)$ -scheme  $\underline{S}_{w,\mathbf{f}}$  is projective, integral, geometrically unibranch and flat over the base. Its special fiber  $\underline{S}_{w,\mathbf{f}} \otimes k$  coincides with  $S_{w,\mathbf{f}}$  precisely when the former is reduced or the latter is normal.*

The latter situation always occurs whenever  $p \nmid |\pi_1(G_{\text{der}})|$  and only very rarely otherwise.

*Proof.* We may and do assume that  $w \in W_{\text{aff}}$ . Projectivity follows from the existence of Demazure resolutions, whereas being integral and flat over the base follows from the similar properties for the smooth finite type quotients of the positive loop group  $L^+\underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{a}}$ . For the remaining claims, we consider the morphism

$$\underline{S}_{\text{sc},w,\mathbf{f}} \rightarrow \underline{S}_{w,\mathbf{f}}.$$

This can be shown to be birational and a universal homeomorphism. Moreover, we know that  $\underline{S}_{\text{sc},w,\mathbf{f}}$  is geometrically normal over  $W(k)$  and that its special fiber is nothing more than  $S_{\text{sc},w,\mathbf{f}}$ , by [PR08, §9]. Hence  $\underline{S}_{w,\mathbf{f}}$  is at least geometrically unibranch.

Suppose now that  $S_{w,\mathbf{f}}$  is normal. Then the normalization morphism of  $\underline{S}_{w,\mathbf{f}}$  is a fiberwise closed immersion, hence an isomorphism by Nakayama's lemma and flatness. Alternatively, if the special fiber  $\underline{S}_{w,\mathbf{f}} \otimes k = S_{w,\mathbf{f}}$  is reduced, then we have an equality

$$\dim_k H^0(S_{w,\mathbf{f}}, \mathcal{L}^N) = \dim_k H^0(S_{\text{sc},w,\mathbf{f}}, \mathcal{L}^N)$$

for any ample line bundle  $\mathcal{L}$  on  $\underline{S}_{w,\mathbf{f}}$  and  $N$  sufficiently large, by transporting the claim to the generic fiber using flatness. This implies the normality of  $S_{w,\mathbf{f}}$ , so that we are done.  $\square$

**3.3. Negative loop groups.** We continue with the same notation and assumptions. The base point  $0 \in \mathcal{A}(H, T_H, F')$  defined by  $H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{F'}$  is invariant under the Galois group, and defines a special point also denoted  $0 \in \mathcal{A}(G, S, F)$  (because by construction  $\sigma_0$  preserves the splitting  $(G, B, T, X)$ ). After conjugation by an element in  $W_{\text{aff}}$ , we may assume that the alcove  $\mathbf{a}$  contains 0 in its closure, and lies in the chamber defined by the Borel  $B_H$ .

We adapt the notion of the negative loop group from [dHL18, §3.6] to our set-up as follows: the Iwahori  $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$  corresponds now to the Borel subgroup  $B_H \subset H$ , more precisely,  $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$  is the Néron blow up (resp. dilatation) of  $H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{F'}$  in  $B \otimes_{\mathbb{Z}} k$ , cf. [BLR90, §3.2] for the notion of dilatation. We let  $B_H^{\text{op}} = T_H \rtimes U_H^{\text{op}}$  denote the opposite Borel subgroup. The negative loop group is the functor on the category of  $W$ -algebras  $R$  given by  $L_W^- H(R) := H(R[u^{-1}])$ . We define  $L_W^- H := \ker(L_W^- H \rightarrow H_W)$ ,  $u^{-1} \mapsto 0$ , and further we define *strictly negative loop group*

$$L_W^{--} \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{a}} := L_W^- H \rtimes U_{H,W}^{\text{op}},$$

which is a subgroup of the ind-affine ind-scheme  $L_W \underline{H}$  over  $W$ . Finally, for the facet  $\mathbf{f}$  contained in the closure of  $\mathbf{a}$ , we define the *strictly negative loop group*

$$(3.6) \quad L_W^{--} \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{w \in W_{H,\mathbf{f}}} {}^w(L_W^{--} \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{a}}),$$

where  $W_{H,\mathbf{f}}$  denotes the subgroup of the affine Weyl group  $W_{H,\text{aff}}$  corresponding to the unique facet containing  $\mathbf{f} \subset \mathcal{A}(H, T_H, F')$ . As  $H$  is split, each element  $w \in W_{H,\text{aff}}$  has a representative in  $\dot{w} \in H(W((u)))$ . We set

$${}^w(L_W^{--} \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{a}}) := \dot{w} \cdot (L_W^{--} \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{a}}) \cdot \dot{w}^{-1} \subset L_W \underline{H},$$



and the intersection (3.6) is taken inside  $L_W \underline{H}$ . The strictly negative loop group has the following key property, well-known to the experts and whose proof can be extracted from [dHL18, 3.8].

**Lemma 3.5.** *The map  $L_W^- \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} \rightarrow L_W \underline{H} / L_W^+ \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}}$ ,  $h^- \mapsto h^- \cdot e$  is representable by a quasi-compact open immersion.*

We now want to descend the result.

**Lemma 3.6.** *The subgroup ind-scheme  $L_W^- \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} \subset L_W \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}}$  is  $\sigma$ -invariant.*

*Proof.* As the base point 0 is  $\sigma$ -invariant, one finds that the subgroup  $L_W^- H$  is  $\sigma$ -invariant. The  $\sigma$ -invariance of the alcove  $\mathbf{a} \subset \mathcal{A}(H, T_H, F')$  implies that the opposite unipotent radical  $U_{H,W}^{\text{op}}$  is  $\sigma$ -invariant. Note that  $\sigma$  acts on  $U_{H,W}^{\text{op}}$  through the automorphism  $\sigma_0$ . The lemma follows from the definition (3.6) using the  $\sigma$ -invariance of  $\mathbf{f}$ .  $\square$

We define the *twisted strictly negative loop group* as

$$(3.7) \quad L_W^- \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} (L_W^- \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})^{\sigma, 0}$$

**Corollary 3.7.** *The map  $L_W^- \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \rightarrow L_W \underline{G} / L_W^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} = \underline{\mathcal{F}}_{G, \mathbf{f}}$ ,  $g^- \mapsto g^- \cdot e$  is representable by a quasi-compact open immersion.*

*Proof.* Equivalently, we have to show that the multiplication map  $L_W^- \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \times_W L_W^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \rightarrow L_W \underline{G}$  is a quasi-compact open immersion (to check the equivalence we use that  $L_W^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \rightarrow \text{Spec}(W)$  is fpqc, and that quasi-compact immersions are of effective fpqc descent [StaPro, 02JR, 0246]). There is a Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} L_W^- \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} \times_W L_W^+ \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}} & \longrightarrow & L_W \underline{H} \\ \uparrow & & \uparrow \\ (L_W^- \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})^{\sigma} \times_W (L_W^+ \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})^{\sigma} & \longrightarrow & (L_W \underline{H})^{\sigma}, \end{array}$$

where the horizontal maps are given by multiplication, and the vertical maps are the canonical closed immersions. As the top arrow is an open immersion by Lemma 3.5, the bottom arrow is an open immersion as well. The corollary now follows from (3.5), (3.7) by passing to neutral components.  $\square$

#### 4. KAC-MOODY FLAG VARIETIES AND PROJECTIVE EMBEDDINGS

In this subsection, we aim at generalizing Ramanathan's methods [Ra87] via Frobenius splitting to gather information on the homogeneous ideals that define Kac-Moody Schubert varieties inside projective spaces or their Schubert overvarieties. We will also follow the treatment of Mathieu and use some ideas of [Ma89]. All Kac-Moody algebras below are assumed to be symmetrizable.

Let us start by recalling the definition of a (symmetrizable) Kac-Moody algebra. These are (mostly infinite-dimensional) Lie algebras  $\mathfrak{g}$  over  $\mathbb{C}$  associated to symmetrizable generalized



Cartan matrices, i.e. finite integer-valued square matrices  $A = (a_{ij})$  with  $a_{ii} = 2$  and  $a_{ij} \leq 0$ ,  $i \neq j$ , which become symmetric after multiplication by an invertible diagonal matrix, see [Kac90, 1.1]. To that end, one starts with the notion of a realization  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  of the given generalized Cartan matrix, consisting of a finite dimensional  $\mathbb{C}$ -vector space  $\mathfrak{h}$ , a linearly independent set of roots  $\alpha_i \in \mathfrak{h}^\vee$ ,  $i = 1, \dots, n$  and coroots  $h_i := \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$  such that  $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$  and  $\dim \mathfrak{h} = n + \text{corank } A$ , see [Kac90, 1.1]. Then, we extend the abelian Lie algebra  $\mathfrak{h}$  to a Kac-Moody algebra  $\mathfrak{g}$  by freely adding generators  $e_i, f_i$  for each positive simple root  $\alpha_i$  and then by imposing the relations:  $[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i$ ,  $[h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i$ ,  $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i$ ,  $\text{ad}^{-a_{ij}+1}(e_i)(e_j) = 0$  and similarly for  $f_i, f_j$ , cf. [Ma88, p. 16–17].

We have root and coroot lattices  $Q = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i \subseteq \mathfrak{h}^\vee$ ,  $Q^\vee = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subseteq \mathfrak{h}$ . It turns out that  $\mathfrak{g}_\alpha$  factors into a sum of weight spaces

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cup 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

for the adjoint action of  $\mathfrak{h}$ . Here  $\Phi \subseteq Q$  denotes the root system of  $\mathfrak{g}$ , for which the  $\alpha_i$  form a basis (see [Kac90, Thm. 1.2] for these assertions). It admits a natural partition into real roots, i.e. those that are conjugate to a positive simple root under the Weyl group, and imaginary roots, i.e. the rest of them. Note that there is a triangular decomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ , where  $\mathfrak{n}_+$  resp.  $\mathfrak{n}_-$  denotes the sum of all positive resp. negative weight spaces; we denote by  $\mathfrak{b}_+$  the positive Borel subalgebra. Finally, we fix once and for all a weight lattice  $P \subseteq \mathfrak{h}^\vee$  and a coweight lattice  $P^\vee \subseteq \mathfrak{h}$  given by taking  $\mathbb{Z}$ -duals, such that there are saturated (i.e. with flat cokernel) inclusions of free abelian groups  $Q \subseteq P$ ,  $Q^\vee \subseteq P^\vee$  (compare also with [Ma88, p. 16]).

Even though the category of arbitrary  $\mathfrak{g}$ -modules is not so well behaved, we still obtain, up to adding some finiteness conditions, a good notion of highest weight module  $V(\lambda)$  with maximal dominant weight  $\lambda \in P$  for the Bruhat order. These arise as the only irreducible quotient of the universal Verma module  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{C}_\lambda$ . The extremal weights of  $V(\lambda)$  are the conjugates  $w\lambda$  of the highest weight under the Weyl group action and they have multiplicity 1. Demazure modules are the cyclic  $\mathfrak{b}_+$ -modules generated by  $V(\lambda)_{w\lambda}$ .

In order to study arithmetic related to Kac-Moody algebras and groups, Tits introduced a  $\mathbb{Z}$ -form  $\mathfrak{U}_\mathbb{Z}(\mathfrak{g})$  of the universal enveloping algebra and a fortiori a  $\mathbb{Z}$ -form  $\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$  of the Lie algebra. In [Ma88] and [Ma89], Mathieu uses this to define a certain ind-affine  $\mathbb{Z}$ -group ind-scheme  $\mathfrak{G}$  whose Hopf algebra of distributions supported at the origin (also known as hyperalgebra) is given by the completion  $\widehat{\mathfrak{U}}_\mathbb{Z}(\mathfrak{g})$  of  $\mathfrak{U}_\mathbb{Z}(\mathfrak{g})$  for the obvious descending filtration (compare with [Ma89, lem. 2 et 3]). It comes equipped with a canonical maximal split torus  $\mathfrak{T}$  corresponding to  $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}$ , as well as a positive Borel subgroup  $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{T} \ltimes \mathfrak{U}^+$  containing it. Let us mention that  $\mathfrak{B}^+$  is an affine, non-finitely presented, flat, closed subgroup scheme of  $\mathfrak{G}$  with underlying hyperalgebra given by  $\widehat{\mathfrak{U}}_\mathbb{Z}(\mathfrak{b}^+)$ . The fppf quotient  $\mathfrak{F} := \mathfrak{G}/\mathfrak{B}^+$  is representable by a reduced ind-projective  $\mathbb{Z}$ -ind-scheme. It is known as Mathieu's flag variety associated to the Kac-Moody algebra  $\mathfrak{g}$  (together with the rest of the chosen data). Given an admissible set  $J \subseteq I$  of positive simple roots (i.e. such that the subgroup  $W_J$  generated by the corresponding

reflections is finite), we can associate to it a standard parabolic subgroup  $\mathfrak{P}_J^+ = \mathfrak{L}_J \ltimes \mathfrak{U}_J^+$  containing  $\mathfrak{B}$  as a closed subgroup scheme. We have a partial flag variety  $\mathfrak{F}_J := \mathfrak{G}/\mathfrak{P}_J^+$ , which is still representable by an ind-projective  $\mathbb{Z}$ -ind-scheme. For each  $w \in W/W_J$ , we may consider the Schubert variety  $\mathfrak{S}_w \subseteq \mathfrak{F}_J$  obtained as the scheme-theoretic image of the orbit map  $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{F}_J, b \mapsto b \cdot \dot{w} \cdot e$ , where  $e \in \mathfrak{F}(\mathbb{Z})$  is the base point and  $\dot{w} \in \mathfrak{G}(\mathbb{Z})$  some representative of the class  $w$ . It is a fundamental theorem of Mathieu [Ma88] and Littelmann [Li98] that the  $\mathfrak{S}_w$  are geometrically normal over  $\mathbb{Z}$  i.e., the structural map  $S_w \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  is a normal morphism in the sense of [StaPro, 038Z].

Let us introduce as well the negative parabolic subgroups  $\mathfrak{P}_J^- = \mathfrak{L}_J \ltimes \mathfrak{U}_J^-$ , seemingly a novelty in the literature<sup>3</sup>: it is given by the repeller locus of a  $J$ -regular dominant coweight  $\mu$  of  $\mathfrak{T}$  and its unipotent radical is given by the strict repeller (see [Ri19] or [CGP15, 2.1.] for a very friendly exposition to the subject). This is representable by an ind-affine closed subgroup ind-scheme of  $\mathfrak{G}$  of ind-finite presentation, because conjugating by  $\mu$  preserves the affine  $\mathfrak{P}_J^+$ -bundle  $\mathfrak{G}_{w,J}$  over  $\mathfrak{S}_{w,J}$ , to which [Ri19, Lem. 1.9] applies. We can readily show that  $\mathfrak{P}_J^+$  (resp.  $\mathfrak{L}_J$ ) is the attractor (resp. fixpoint) subfunctor of  $\mathfrak{G}$ . Now we claim that the multiplication morphism

$$\mathfrak{U}_J^- \times \mathfrak{P}_J^+ \rightarrow \mathfrak{G}$$

is a finitely presented, formally étale monomorphism; in other words, a quasi-compact open immersion by [EGAIV4, th. 17.9.1]. Monomorphy and finite presentation are somewhat formal and we leave them to the reader (hint: observe that  $\mathfrak{P}_J^+ \rightarrow \mathfrak{G}_{w,J}$  and  $\mathfrak{U}_J^- \rightarrow \text{Spec} \mathbb{Z}$  are (ind-)finitely presented). To see it is étale, it is enough to check the equality  $\widehat{\mathfrak{g}}_R = \widehat{\mathfrak{p}}_{J,R}^+ \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_{J,R}^-$  of Lie bundles over any coefficient ring  $R$ .

For each  $J$ -regular dominant weight  $\lambda$ , we may consider the line bundle  $\mathfrak{L}(\lambda) := \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{P}_J^+} \mathbb{Z}_{-\lambda}$  obtained from the natural  $\mathfrak{P}_J^+$ -bundle  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{F}_J$  via the character  $-\lambda$  of  $\mathfrak{P}_J$  (compare with [Ma88] and [Ma89], which use the opposite sign convention). This is a very ample line bundle on  $\mathfrak{F}_J$  and we have a natural identification between  $\Gamma(\mathfrak{F}_J, \mathfrak{L}(\lambda))^\vee := \text{colim}_{w \in W/W_J} \Gamma(\mathfrak{S}_{w,J}, \mathfrak{L}(\lambda))^\vee$  and the canonical  $\mathbb{Z}$ -form  $V(\lambda)_{\mathbb{Z}}$  of the highest weight module: indeed, at each finite step, the submodule  $\Gamma(\mathfrak{S}_{w,J}, \mathfrak{L}(\lambda))^\vee$  is identified with the integral Demazure module  $V_w(\lambda)_{\mathbb{Z}}$ , cf. [Ma88, th. 5]. Finally, we recall that these constructions exhaust after linearization the Picard group of  $\mathfrak{F}_J$ , in virtue of the isomorphism  $P_J/P_I \simeq \text{Pic}(\mathfrak{F}_J)$ , where  $P_J = \{\lambda \in P \mid \lambda(\alpha_j^\vee) = 0 \forall j \in J\}$  (see [Ma88, prop. 28]).

The following result goes back originally to [Ra87] in the case of classical flag varieties, by using the relatively new at the time method of Frobenius splitting. Credit is also due to Mathieu for showing the existence of an ind-splitting of the diagonal of the flag variety (see [Ma89, prop. 1]). We are pretty convinced that Littelmann's path model also yields the same type of results, cf. [Li98].

**Theorem 4.1** (Ramanathan, Mathieu). *Given an ample line bundle  $\mathfrak{L}$  of  $\mathfrak{S}_w$ , the corresponding morphism  $\mathfrak{S}_w \rightarrow \mathbb{P}(\Gamma(\mathfrak{S}_w, \mathfrak{L})^\vee)$  is a closed immersion defined by quadrics. Moreover, the closed immersion  $\mathfrak{S}_u \rightarrow \mathfrak{S}_w$ ,  $u \leq w$  is linearly defined with respect to  $\mathfrak{L}$ .*

<sup>3</sup>In [Ma89, p.45], it is even mentioned that  $\mathfrak{P}_J^-$  is not defined.

Here we allow  $w = \infty$  to get the entire partial affine flag variety  $\mathfrak{S}_\infty = \mathfrak{F}_J$ .

*Proof.* The statement refers to the behavior of the graded algebra  $\Gamma(\mathfrak{S}_w, \mathfrak{L})$  and its graded module  $\Gamma(\mathfrak{S}_u, \mathfrak{L})$  as in Def. B.5. By upper semicontinuity, it suffices to base change to any positive characteristic  $p$  field  $k$ . Since every ample line bundle on  $\mathfrak{S}_w$  extends to  $\mathfrak{S}_\infty$ , we are reduced to showing, by Prop. B.4 and Prop. B.6, that the compatibly ind-split  $\mathfrak{S}_u \subseteq \mathfrak{S}_w \subseteq \mathfrak{S}_\infty$  satisfy: the diagonal  $\Delta_{\mathfrak{S}_\infty}$  is compatibly ind-split with  $\mathfrak{S}_\infty^2$ ; the partial mixed diagonals  $\Delta_{\mathfrak{S}_\infty} \times \mathfrak{S}_\infty$ ,  $\mathfrak{S}_\infty \times \Delta_{\mathfrak{S}_\infty}$ ,  $\mathfrak{S}_w \times \Delta_{\mathfrak{S}_\infty}$  and  $\mathfrak{S}_u \times \Delta_{\mathfrak{S}_\infty}$  are simultaneously compatibly ind-split with  $\mathfrak{S}_\infty^3$ . Since the Schubert variety  $\mathfrak{S}_w$  of  $\mathfrak{F}_J$  lifts isomorphically to the Schubert variety  $\mathfrak{S}_{w_0}$  of  $\mathfrak{F}$  with  $w_0 \in W^J$  the right  $W_J$ -minimal representative of  $w \in W/W_J$ , we may and do assume  $J = \emptyset$ .

For this, we need the convoluted flag varieties  $\mathfrak{S}_\infty^{\tilde{\times} n} := \mathfrak{S}_\infty \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \mathfrak{S}_\infty = \mathfrak{G} \times^{\mathfrak{B}_+} \dots \times^{\mathfrak{B}_+} \mathfrak{F}$ . Note that herein we have convoluted Schubert varieties  $\mathfrak{S}_{w_1, \dots, w_n} := \mathfrak{S}_{w_1} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \mathfrak{S}_{w_n}$  which are all compatibly Frobenius split, as one can observe by using appropriate Demazure resolutions (cf. [Ma89, lem. 9 et 10]). In particular, under the natural isomorphism  $\mathfrak{S}_\infty^{\tilde{\times}} \cong \mathfrak{S}_\infty^n$  given by  $(m_1, \dots, m_n)$ , where  $m_i$  denotes the product of the first  $i$  coordinates, the diagonal  $\Delta_{\mathfrak{S}_\infty}$  is identified with  $\mathfrak{S}_{\infty, 1}$  (compare with [Ma89, prop. 1]), and the partial mixed diagonals  $\Delta_{\mathfrak{S}_\infty} \times \mathfrak{S}_\infty$ , resp.  $\mathfrak{S}_\infty \times \Delta_{\mathfrak{S}_\infty}$ , resp.  $\mathfrak{S}_w \times \Delta_{\mathfrak{S}_\infty}$ , resp.  $\mathfrak{S}_u \times \Delta_{\mathfrak{S}_\infty}$  are identified with  $\mathfrak{S}_{\infty, 1, \infty}$ , resp.  $\mathfrak{S}_{\infty, \infty, 1}$ , resp.  $\mathfrak{S}_{w, \infty, 1}$ , resp.  $\mathfrak{S}_{u, \infty, 1}$ .  $\square$

The following corollary gives an explicit formula describing the tangent space, which goes back to work of Kumar (in characteristic 0), cf. [Ku96], and Polo (for classical flag varieties), cf. [Po94].

**Corollary 4.2** (Kumar, Polo). *Let  $k$  be a field of arbitrary characteristic. The  $k$ -vector space  $T_e \mathfrak{S}_{w, J} \otimes k$  consists of all  $X \in T_e \mathfrak{F}_J \otimes k$  such that  $Xv_\lambda \in V_w(\lambda)_k$ , for any fixed  $J$ -regular dominant weight  $\lambda$ . In particular, its dimension does not depend on the characteristic of  $k$ .*

*Proof.* We start by noticing that  $\mathfrak{U}_J^-$  becomes naturally identified with the distinguished open subset  $D_+(v_\lambda^\vee) \subseteq \mathfrak{F}_J$  associated with the dual section  $v_\lambda^\vee \in \Gamma(\mathcal{F}_J, \mathcal{L})$  killing all weight spaces different from  $V(\lambda)_\lambda = kv_\lambda$ . Indeed, this is a consequence of the Birkhoff decomposition, as the respective complements are vertical divisors with equal generic fiber by [Ku96, Lem. 8.3].

By Theorem 4.1, the closed immersion  $\mathfrak{U}_{w, J}^- := \mathfrak{S}_{w, J} \cap \mathfrak{U}_J^- \rightarrow \mathfrak{U}_J^-$  is defined by the coefficients  $\varphi_\xi$ , where  $\xi \in \Gamma(\mathfrak{F}_J, \mathfrak{L}) \otimes k$  runs over all vectors perpendicular to  $V_w(\lambda)_k$  and  $\varphi_\xi(u) = \xi(uv_\lambda)$  (see also [Po94, Prop. 3.1]). Given a tangent vector  $X \in T_e \mathfrak{F}_J \otimes k = T_e \mathfrak{U}_J^- \otimes k$ , then it lies in  $T_e \mathfrak{S}_{w, J}$  if and only if the associated distribution of  $k[\mathfrak{U}_J^-] := \varprojlim k[\mathfrak{U}_{w', J}^-]$  kills all the  $\varphi_\xi$  designated above. Representing  $X$  by a  $k[\epsilon]$ -valued point  $u$  of  $\mathfrak{U}_J^-$ , we get

$$\varphi_\xi(u) = \xi(uv_\lambda) = \epsilon \xi(Xv_\lambda).$$

The right handside is obviously zero if  $Xv_\lambda \in V_w(\lambda)_k$  and the converse follows from the isomorphism  $V_w(\lambda)_k^\vee = \Gamma(\mathfrak{F}_{J, k}, \mathfrak{L}_k)/V_w(\lambda)_k^\perp$ . This proves the formula for the tangent space (compare our argument with Polo's [Po94, Thm. 3.2]).

Finally, we explain briefly the independence of the dimension on  $p = \text{char } k$  along the lines of [Po94, Cor. 4.1]. It just follows from the fact that  $T_e \mathcal{U}_J^-$  has a natural  $\mathbb{Z}$ -model given by  $\mathfrak{n}_{J, \mathbb{Z}}^-$ , whereas the integral model  $V_w(\lambda)_{\mathbb{Z}}$  of  $V_w(\lambda)_k$  is a direct summand of the model  $V(\lambda)_{\mathbb{Z}}$  for  $V(\lambda)_k$ .  $\square$

Assume  $\mathfrak{g}$  is an affine Kac-Moody algebra, i.e. the corank of the corresponding generalized Cartan matrix is equal to 1. These are classified by affine Dynkin diagrams and admit very explicit realizations as some mildly modified loop algebras or their fixpoints under order 2 or 3 automorphisms, cf. [Kac90, Sec. 7 and 8]. More explicitly, the adjoint quotient of  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  can be identified with the graded Lie algebra of the group scheme  $L\widehat{G} \otimes \mathbb{C}$  for a given embedding  $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , where  $G$  is the only simply connected absolutely simple semisimple group over  $k((t))$  having the same Dynkin diagram as  $\mathfrak{g}$ . Under this correspondence, the Borel subalgebra  $\mathfrak{b}$  is linked to the Lie algebra of  $\widehat{G}_{\mathbf{a}}$  and every standard parabolic  $\mathfrak{p}_J$  to the Lie algebra of  $\widehat{G}_{\mathbf{f}_J}$  for some subfacet  $\mathbf{f}_J$  of  $\mathbf{a}$ . We also pick the usual weight lattice  $P$  in the Cartan subalgebra  $\mathfrak{h}$ . We have the following important comparison result, which can be found in [PR08, 9.h.] in a weaker form.

**Proposition 4.3.** *There are natural isomorphisms  $\mathfrak{P}_J^+ \otimes W \cong \widehat{L^+ \widehat{G}_{\mathbf{f}_J}} \rtimes \mathbb{G}_m^{\text{rot}}$  and  $\mathfrak{S} \otimes W \cong \widehat{L\widehat{G}} \rtimes \mathbb{G}_m^{\text{rot}}$ , inducing an equivariant isomorphism  $\mathfrak{F}_J \otimes W \cong \mathcal{F}_{G, \mathbf{f}_J}$ .*

Here the hat loop groups are the central extensions of  $L\widehat{G}$  obtained by trivializing its action against the generator of  $\text{Pic}(\mathcal{F}_{G,0})$  (or any other line bundle of a partial affine flag variety with central charge 1). The rotation  $\mathbb{G}_m$  is induced by automorphisms of the formal disk  $R[[u]]$  (and not  $R[[t]]!$ ).

*Idea of proof.* First of all, we construct the isomorphism  $\mathfrak{P}_J^+ \otimes W \cong \widehat{L^+ \widehat{G}_{\mathbf{f}_J}} \rtimes \mathbb{G}_m^{\text{rot}}$ . This essentially amounts to verifying that their algebras of distributions match (see either [PR08, 8.d.] or the more convincing [II, 3.8.]).

Next we identify the Demazure varieties  $\mathfrak{D}_{\bar{w}} \cong \underline{D}_{\bar{w}}$  in the natural way, induced by the twisted product decomposition in terms of parabolics for the left handside and jet groups for the right. By means of a topological argument, we can now get an equivariant identification  $\mathfrak{S}_w \cong \underline{S}_{w, \mathbf{a}}$  (see [Ma88, lem. 32 et 33] and compare them to the references in the previous paragraph). This yields the desired equivariant identification of full flag varieties  $\mathfrak{F} \otimes W \cong \mathcal{F}_{G, \mathbf{a}}$ , as both are geometrically reduced over  $W$ , and then of the partial counterparts by taking quotients.

Finally, consider the  $\mathfrak{B}$ -bundle  $\mathfrak{S}_w$  over  $\mathfrak{S}_w$  obtained as the affine hull w.r.t.  $\mathfrak{S}_w$  of the canonical  $\mathfrak{B}$ -bundle over the Demazure variety  $\mathfrak{D}_{\bar{w}}$ , cf. [Ma88, ch. XI]. By the universal property of the relative affine hull, we get a  $\mathfrak{B} \cong \widehat{L^+ \widehat{G}_{\mathbf{a}}} \rtimes \mathbb{G}_m^{\text{rot}}$ -equivariant morphism towards the preimage of  $\underline{S}_{w, \mathbf{a}}$  in  $\widehat{L\widehat{G}} \rtimes \mathbb{G}_m^{\text{rot}}$ , which then must be an isomorphism. Taking direct limits now recovers the isomorphism  $\mathfrak{S} \otimes W \cong \widehat{L\widehat{G}} \rtimes \mathbb{G}_m^{\text{rot}}$ .  $\square$

One could wonder if the above comparison extends in any reasonable way to the integers  $\mathbb{Z}$ , the main difficulty having to do with not inverting  $e$ . This has been recently achieved by

one of us, resting on complicated group-theoretic constructions exposed in [II] for reduced relative root systems and completed in [IV] for the remaining case of odd unitary groups.

## 5. TANGENT SPACES AT BASE POINTS

**5.1. Preliminaries on tangent spaces.** We want to define and describe some general properties of tangent spaces of (ind)-schemes over a general base equipped with a section.

**Definition 5.1.** Let  $S$  be a scheme and  $X$  be a sheaf of sets on the category of  $S$ -schemes equipped with  $x \in X(S)$ . The tangent space  $T_x X$  of  $X$  at  $x$  is the sheaf which associates an  $S$ -scheme  $T$  to the pre-image  $p_\epsilon^{-1}(x_T)$  of  $x_T \in X(T)$  induced by  $x$  along the map  $p_\epsilon : X(T[\epsilon]) \rightarrow X(T)$ . Here by definition  $T[\epsilon] = T \times \text{Spec } \mathbb{Z}[\epsilon]$  where  $\epsilon^2 = 0$ .

If  $X$  is representable by a scheme, our tangent space coincides with the (implicit) definition of Demazure-Gabriel (see [DG70, II, §4, cor. 3.3]):

**Proposition 5.2.** *Let  $X \rightarrow S$  be a scheme endowed with a section  $x: S \rightarrow X$ . For any  $S$ -scheme  $T$ , there is a natural bijection of sets  $T_x X(T) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(x_T^* \Omega_{X_T/T}, \mathcal{O}_T)$ . In particular,  $T_x X(T)$  has a natural structure of a  $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ -module.*

*Proof.* Since  $S$  is an arbitrary scheme, we reduce to the case  $S = T$ . To give  $f \in T_x X(S)$ , i.e., a morphism  $f: S[\epsilon] \rightarrow X$  compatible with  $x$ , is the same as to give an  $S$ -derivation  $d: \mathcal{O}_X \rightarrow x_* \mathcal{O}_S$ : since  $|S[\epsilon]| = |S|$  on topological spaces, such an  $f$  is the same as to a morphism of sheaves of rings  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow x_* \mathcal{O}_{S[\epsilon]} = x_* \mathcal{O}_S \oplus \epsilon x_* \mathcal{O}_S$ . The compatibility with  $x$  implies  $f^\# = x^\# + \epsilon d_f$  and it is easily verified that  $d_f \in \text{Der}_S(\mathcal{O}_X, x_* \mathcal{O}_S)$  is an  $S$ -derivation. We thus get natural bijections

$$T_x X(S) = \text{Der}_S(\mathcal{O}_X, x_* \mathcal{O}_S) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}, x_* \mathcal{O}_S) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(x^* \Omega_{X/S}, \mathcal{O}_S),$$

where the second identification is [StaPro, 01UR], and the last identification is the adjunction.  $\square$

Hence, if  $T = \text{Spec}(R)$  is an affine scheme, then  $T_x X(R)$  is an  $R$ -module by the preceding proposition.

**Corollary 5.3.** *Let  $i : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  be a finitely presented immersion of pointed  $R$ -schemes. Then the induced homomorphism  $i_* : T_x X(R) \rightarrow T_y Y(R)$  of  $R$ -modules is injective. If  $i$  is an open immersion, then this homomorphism is bijective.*

*Proof.* This is immediate from the definition, and the formal lifting criterion for smooth morphisms [StaPro, 02H6, 01VC].  $\square$

**Corollary 5.4.** *If  $X = \text{colim } X_i$  is a strict pointed ind-scheme over  $R$ , then  $T_x X = \text{colim } T_x X_i$  (here  $T_x X_i := 0$  if  $x \notin X_i(R)$ ) is an  $R$ -module independently of the chosen presentation as a strict ind-scheme.*

*Proof.* This is immediate from Corollary 5.3.  $\square$

It is worth noting that the tangent space does not commute with non-flat base change in general, but we still have the following:

**Lemma 5.5.** *Maintain the notation of Proposition 5.2, and suppose moreover that  $X \rightarrow S$  is of finite presentation and that  $T = \operatorname{Spec} R$  is a Dedekind scheme. Then, for all  $R$ -algebras  $R'$ , the canonical homomorphism  $T_x X(R) \otimes_R R' \rightarrow T_x X(R')$  is injective.*

*Proof.* After localizing, we can write  $x^* \Omega_{X/R} = R^n \oplus M$  where  $M$  is a (finitely generated) torsion module, cf. [StaPro, 01V3]. Let  $X' := X_{R'}$  with induced section denoted  $x'$ . Since  $x'^* \Omega_{X'/R'} = R'^n \oplus (M \otimes_R R')$  by [StaPro, 01UV], we get

$$T_x X(R') = \operatorname{Hom}_{R'}(x'^* \Omega_{X'/R'}^1, R') = R'^n \oplus \operatorname{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', R').$$

Using  $\operatorname{Hom}_R(M, R) = 0$  (because  $R$  is torsion free), the lemma follows.  $\square$

**Lemma 5.6.** *Suppose  $i: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  is a closed immersion of pointed ind-schemes of ind-finite type over a Dedekind ring  $R$ . Then the cokernel of  $i_*: T_x X(R) \rightarrow T_y Y(R)$  is a flat  $R$ -module.*

*Proof.* By Corollary 5.4, we may and do assume that  $X$  and  $Y$  are finite type schemes. After localization, we may also assume that  $R$  is a discrete valuation ring with uniformizer  $\pi$ . Assume there is a  $v \in T_y Y(R) \setminus T_x X(R)$  such that  $\pi v \in T_x X(R)$ . By Corollary 5.3 and Lemma 5.5, we have injections

$$T_x X(R)/\pi T_x X(R) \subset T_x X(R/\pi R) \subset T_y Y(R/\pi R).$$

Since  $\pi v = 0$  in  $T_y Y(R/\pi R)$ , we get  $\pi v \in \pi T_x X(R)$ , i.e., the existence of some  $w \in T_x X(R)$  such that  $\pi w = \pi v$ . As  $T_y Y(R)$  is free of finite rank, so in particular  $R$ -torsion free, by the proof of Lemma 5.5, we reach a contradiction. This proves the lemma.  $\square$

**5.2. Tangent spaces of affine flag varieties.** Let us give a description of the tangent space of the affine flag variety.

**Lemma 5.7.** *For the tangent space at the base point  $e \in \underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}}(R)$  with values in a  $W(k)$ -algebra  $R$ , one has as  $R$ -modules*

$$T_e \underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}}(R) = T_e L^{--} \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}(R) = \left( \bigcap_{w \in W_{H,\mathbf{f}}} {}^w((L^{--} \mathfrak{h}) \rtimes \mathfrak{u}_H^{\operatorname{op}}) \otimes R \right)^\sigma$$

where  $\mathfrak{h}$  (resp.  $\mathfrak{u}_H^{\operatorname{op}}$ ) denotes the Lie algebra of  $H$  (resp.  $U_H^{\operatorname{op}}$ ) over  $W(k)$ . This is a free  $R$ -module and its formation commutes with arbitrary base change.

*Proof.* By Corollary 3.7, the map  $L^{--} \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}}, g \mapsto g \cdot e$  is representable by a quasi-compact open immersion. This immediately implies

$$T_e \underline{\mathcal{F}}_{G,\mathbf{f}}(R) = T_e L^{--} \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}(R) = T_e (L^{--} \underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{f}})^\sigma(R).$$

Using that  $T_e(-)$  commutes with taking fixed points  $(-)^\sigma$  and intersections, the corollary follows from Definition (3.6). The last assertion can be seen in several ways: either by



writing the tangent space as the quotient  $T_e L\bar{G}(R)/T_e L^+ \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}(R)$ ; or by using the alternative description of  $L^{--} \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$  given in the split case and noting that tame invariants of finite free modules are finite free.  $\square$

**Example 5.8.** Assume that  $\mathbf{f} = 0$  is the base point of  $\mathcal{A}(G, S, F)$  which is an absolutely special vertex. In this case,  $L^{--} \underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}} = (L^{--} H)^{\sigma, 0}$  so that we obtain

$$T_e \underline{\mathcal{F}}_{G, \mathbf{f}}(R) = (L^{--} \mathfrak{h} \otimes R)^{\sigma} = \bigoplus_{i \geq 1} (\mathfrak{h} \otimes R[u^{-i}])^{\sigma}.$$

**5.3. Tangent spaces of Schubert varieties.** Let us now turn to the situation at hand. Let  $G$  be an absolutely simple (adjoint) tamely ramified  $F$ -group, and denote by  $G_{\text{sc}} \rightarrow G$  the simply connected group. The set-up of §3 applies to both groups  $G_{\text{sc}}$ ,  $G$  and we use it to determine the kernel of the map  $\mathcal{F}\ell_{G_{\text{sc}}, \mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{F}\ell_{G, \mathbf{f}}$  on tangent spaces at the base points, cf. Corollary 5.11.

We proceed with the notation of §3. The map  $H_{\text{sc}} \rightarrow H$  on Chevalley groups extends to a map on parahoric  $k[[u]]$ -group schemes  $\mathcal{H}_{\text{sc}, \mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbf{f}}$ . This induces a map on strictly negative loop groups  $L_W^{--} \mathcal{H}_{\text{sc}, \mathbf{f}} \rightarrow L_W^{--} \mathcal{H}_{\mathbf{f}}$ , and hence a map on twisted strictly negative loop groups

$$(5.1) \quad L_W^{--} \mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}} \rightarrow L_W^{--} \mathcal{G}_{\mathbf{f}}.$$

We want to determine the kernel of (5.1). There is a central extension of flat affine  $\mathbb{Z}$ -group schemes

$$1 \rightarrow Z_H \rightarrow H_{\text{sc}} \rightarrow H \rightarrow 1,$$

where  $Z_H$  is the center of  $H_{\text{sc}}$ . Then  $Z_H$  is a finite flat  $\mathbb{Z}$ -group scheme of multiplicative type which is smooth over  $\mathbb{Z}_{(p)}$  if and only if  $p \nmid |Z_H| = |\pi_1(G)|$ .

**Definition 5.9.** Let  $Z$  be the center of  $G_{\text{sc}}$ . The strictly negative loop group for  $Z$  is the subgroup functor of  $LG_{\text{sc}}$  defined as

$$L^{--} Z \stackrel{\text{def}}{=} (L^{--} Z_{H, k((u))})^{\sigma, 0} \subset (LH_{\text{sc}, k((u))})^{\sigma} = LG_{\text{sc}}.$$

Note that  $L^{--} Z$  is representable by a closed subgroup ind-scheme of  $LG_{\text{sc}}$ .

**Lemma 5.10.** *There is a short exact sequence of group functors*

$$1 \rightarrow L^{--} Z \rightarrow L^{--} \mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}} \rightarrow L^{--} \mathcal{G}_{\mathbf{f}}.$$

*Proof.* Since  $L^{--}$  is left exact, there is a short exact sequence  $1 \rightarrow L^{--} Z_{H, k((u))} \rightarrow L^{--} H_{\text{sc}} \rightarrow L^{--} H$ . Using that  $U_{H_{\text{sc}}}^{\text{op}} = U_H^{\text{op}}$  for the opposite unipotent radicals and that  $W_{H_{\text{sc}}, \mathbf{f}} = W_{H, \mathbf{f}}$  in (3.6), we obtain a short exact sequence

$$1 \rightarrow L^{--} Z_{H, k((u))} \rightarrow L^{--} \mathcal{H}_{\text{sc}, \mathbf{f}} \rightarrow L^{--} \mathcal{H}_{\mathbf{f}}.$$

The lemma now follows from Definition (3.6) by passing to  $\sigma$ -invariants (which is left exact) and by taking neutral components.  $\square$



By Corollary 5.7, we obtain a  $k$ -vector subspace

$$T_e L^{--} Z \subset T_e L^{--} \mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}} = T_e \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}}},$$

where  $e \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}}}(k)$  denotes the base point. Recall from (2.1) that there is a map of Schubert varieties  $S_{\text{sc}, w} = S_{\text{sc}, w}(\mathbf{a}, \mathbf{f}) \rightarrow S_w(\mathbf{a}, \mathbf{f}) = S_w$  for each  $w \in W_{\text{aff}}/W_{\mathbf{f}}$ .

**Corollary 5.11.** *For each class  $w \in W_{\text{aff}}/W_{\mathbf{f}}$ , the following are equivalent:*

- i) *The Schubert variety  $S_w \subset \mathcal{F}_{\mathcal{G}, \mathbf{f}}$  is normal.*
- ii) *One has*

$$(T_e L^{--} Z) \cap (T_e S_{\text{sc}, w}) = 0$$

*as  $k$ -vector subspaces of  $T_e \mathcal{F}_{\mathcal{G}, \mathbf{f}}$ .*

*Proof.* By Proposition 2.1, part i) is equivalent to  $\ker(T_e S_{\text{sc}, w} \rightarrow T_e S_w) = 0$  where  $e$  denotes the base point of both  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}}}$  and  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}, \mathbf{f}}$ . Lemma 5.10 implies that there is an exact sequence of  $k$ -vector spaces

$$0 \rightarrow T_e L^{--} Z \rightarrow T_e L^{--} \mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}} \rightarrow T_e L^{--} \mathcal{G}_{\mathbf{f}},$$

so that  $\ker(T_e S_{\text{sc}, w} \rightarrow T_e S_w) = (T_e L^{--} Z) \cap (T_e S_{\text{sc}, w})$ . This proves the corollary.  $\square$

**Remark 5.12.** By [PR08, Thm. 0.2], the ind-scheme  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}}}$  is reduced so that  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}}} = \text{colim}_w S_{\text{sc}, w}$  is a presentation. Thus, Corollary 5.11 shows that there are  $(\mathbf{a}, \mathbf{f})$ -Schubert varieties of arbitrary large dimension inside  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}, \mathbf{f}}$  which are not (semi-)normal, and hence not Frobenius split.

Let us also record the following useful lemma.

**Lemma 5.13.** *Let  $\tau \in W$  be stabilizing the alcove  $\mathbf{a}$ . For each class  $w \in W_{\text{aff}}/W_{\mathbf{f}}$ , the  $(\mathbf{a}, \mathbf{f})$ -Schubert variety  $S_w \subset \mathcal{F}_{\mathcal{G}, \mathbf{f}}$  is normal (resp. smooth) if and only if the  $(\mathbf{a}, \tau \mathbf{f})$ -Schubert variety  $S_{\tau w \tau^{-1}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{G}, \tau \mathbf{f}}$  is normal (resp. smooth).*

*Proof.* First note that the class of  $\dot{\tau} \cdot \dot{w} \cdot \dot{\tau}^{-1}$  inside  $W_{\text{aff}}/W_{\tau \mathbf{f}}$  is well-defined where  $\dot{\tau}, \dot{w} \in LG(k)$  are any representatives. Thus, the  $(\mathbf{a}, \tau \mathbf{f})$ -Schubert variety  $S_{\tau w \tau^{-1}}$  is well-defined. Further, the isomorphism  $LG \rightarrow LG, g \mapsto \dot{\tau} g \dot{\tau}^{-1}$  descends to an isomorphism  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}, \mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}, \tau \mathbf{f}}$  mapping the  $(\mathbf{a}, \mathbf{f})$ -Schubert variety  $S_w$  isomorphically onto the  $(\mathbf{a}, \tau \mathbf{f})$ -Schubert variety  $S_{\tau w \tau^{-1}}$ . This proves the lemma. Note that this is consistent with Corollary 5.11 because all elements of  $T_e L^{--} Z \subset LG_{\text{sc}}(k[\epsilon])$  are central, and thus not changed when conjugated with  $\dot{\tau}$ .  $\square$

Now we have all the information needed to prove finiteness of normal Schubert varieties in non-étale adjoint absolutely simple groups.

*Proof of Thm. 2.3.* Note that since Schubert varieties are stable under the action of  $L^+ \mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}}$  and the rotation torus  $\mathbb{G}_m$ , we conclude that  $T_e S_{w, \text{sc}}$  splits into the sum of its intersections with Kac-Moody root spaces and it is stable under the bracket operation of  $\text{Lie}(L^+ \mathcal{G}_{\text{sc}, \mathbf{f}})$ . Recall that real Kac-Moody roots are of the form  $\alpha + n\delta$  with  $\alpha \in \Phi_{\text{nd}, <}$  and  $n \in \mathbb{Z}$  (resp.  $\alpha \in \Phi_{\text{nd}, >}$  and  $n \in e\mathbb{Z}$ , resp.  $\alpha \in \Phi_{\text{d}}$ ). Here  $\delta$  is the smallest positive imaginary root,  $\Phi$  is the relative root system of  $G$ ,  $\Phi_{\text{nd}, <}$  (resp.  $\Phi_{\text{nd}, >}$ , resp.  $\Phi_{\text{d}}$ ) the subset of short non-divisible (resp.

long non-divisible, divisible) roots. We claim that, for  $w$  sufficiently large, the root spaces associated with  $-\delta, \dots, -e\delta$  lie entirely in  $T_e S_{w, \text{sc}}$ , which we can do over an algebraically closed characteristic 0 field by Lemma 5.6. As the dimension of  $T_e S_{w, \text{sc}}$  is bigger than the length of  $w$ , we just need to show that the former vector space cannot grow arbitrarily large as we vary  $w$  without containing the finite subspace  $(T_e \mathcal{F}_{G_{\text{sc}}, \mathbf{f}})_{-\delta} \oplus \dots \oplus (T_e \mathcal{F}_{G_{\text{sc}}, \mathbf{f}})_{-e\delta}$ . Note that an application of Cor. 5.11 and Lem. 5.13 together with this claim would yield the theorem because  $T_e L^{--} Z = \bigoplus_{i \geq 1} (T_e L^{--} Z)_{-i\delta}$  has period  $e$ , i.e.  $(T_e L^{--} Z)_{-i\delta} \cong (T_e L^{--} Z)_{-(i+e)\delta}$ .

Suppose the root vector  $e_{\alpha - n\delta}$  with  $n \gg 0$  belongs to  $T_e S_{w, \text{sc}}$ . Taking the bracket with  $e_{-\alpha + k\delta}$  with  $0 < k \leq e$  congruent to  $n$  modulo  $e$ , we conclude that there is an imaginary direction  $v \in T_e S_{w, \text{sc}}$  with weight  $-m\delta$ , where  $m \gg 0$  is divisible by  $e$ . Given such a vector without the divisibility condition on the weight, we can always find  $\alpha \in \Phi$  and  $0 < k \leq e$  such that  $[e_{\alpha + k\delta}, v]$  is nonzero. By the first step, we can after all assume that  $m$  is divisible by  $e$ . Now identify  $\text{Lie}(\mathcal{F})_{-m\delta}$  with a Cartan subalgebra  $\mathfrak{t}_0$  of the simple Lie algebra  $\mathfrak{g}_0$  whose root system is  $\Phi_{\text{nd}}$ . For each root  $\alpha \in \Phi$ , the bracket  $[e_{\alpha + k\delta}, [e_{-\alpha + m - k - e}, v]]$  is either zero if  $\alpha(v) = 0$  or a nonzero multiple of  $h_\alpha$  placed in degree  $-e$ . But the coroot elements  $\alpha^\vee$  nonorthogonal to  $v$  must generate the whole vector space  $\mathfrak{t}_0$ , otherwise  $\Phi^\vee$  would be contained in the union of two hyperplanes, contradicting its irreducibility. Now that we have  $\text{Lie}(\mathcal{F}_{G_{\text{sc}}, \mathbf{f}})_{-e\delta} \subseteq T_e S_{w, \text{sc}}$ , we can get the remaining desired negative weight spaces by the same token (reduce to the rank 1 cases, if necessary).  $\square$

## 6. CALCULATIONS AND EXAMPLES

Let us start by looking at a list of all split and non-split tamely ramified cases that would have to be treated in an hypothetical classification. Denote  $p := \text{char}(k)$ . We have the following split cases:

- type  $A_n$ ,  $n \geq 1$  and  $p \mid n + 1$ ;
- type  $B_n$ ,  $n \geq 2$  and  $p = 2$ ;
- type  $C_n$ ,  $n \geq 2$  and  $p = 2$ ;
- type  $D_n$ ,  $n \geq 2$  and  $p = 2$ ;
- type  $E_6$  and  $p = 3$ ;
- type  $E_7$  and  $p = 2$ .

The groups  $E_8$ ,  $F_4$  and  $G_2$  have connection index 1 and hence are excluded from the list. In the non-split tamely ramified cases we obtain the following list:

- type  $B-C_n$ ,  $n \geq 3$  and  $p \mid 2n$ ,  $p \neq 2$  (even unitary);
- type  $C-BC_n$ ,  $n \geq 1$  and  $p \mid 2n + 1$  (odd unitary);
- type  $F_4^I$  and  $p = 3$  (ramified  $E_6$ );
- type  $G_2^I$  and  $p = 2$  (ramified triality);

The non-split orthogonal groups  $C-B_n$ ,  $n \geq 2$  are excluded by the tamely ramified hypothesis.

**6.1. An explicit upper bound.** We proceed with the assumptions and notations of §5, assuming moreover that  $G = H$  is split over  $F$  and that  $\mathbf{f} = 0$  is the fixed absolutely special vertex in  $\mathcal{A}(G, S, F)$ . Our aim is to better understand (and ultimately classify) all normal

(**a, f**)-Schubert varieties inside the twisted affine Grassmannian  $\mathcal{F}_{G, \mathbf{f}} =: \text{Gr}$ . The  $L^+ \mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ -orbits inside  $\text{Gr}$  are enumerated by the set  $\widetilde{W}/W_0 = X_*(T)$ , where this equality should be understood as respecting the Bruhat-Tits sign convention, i.e. the coweight  $\mu$  is sent to the translation  $t_{-\mu}$  by  $-\mu$ . For each  $\mu \in X_*(T_{\text{sc}})$ , we denote by  $S_{\text{sc}, \bar{\mu}} \subset \text{Gr}_{\text{sc}}$  the corresponding (**a, f**)-Schubert variety for the simply connected cover. In view of Corollary 5.11 we have to determine exactly those  $\mu \in X_*(T_{\text{sc}})$  such that  $(T_e L^{--} Z) \cap (T_e S_{\text{sc}, \mu}) = 0$  inside

$$(6.1) \quad T_e \text{Gr}_{\text{sc}} = \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{g}[u^{-i}],$$

cf. Example 5.8.

**Lemma 6.1.** *Let  $\mu \in X_*(T_{\text{sc}})$  be the unique dominant, quasi-minuscule element. Then*

$$T_e S_{\text{sc}, \mu} = \mathfrak{g}[u^{-1}]$$

as  $k$ -vector subspaces of (6.1).

*Proof.* For the calculation of  $T_e S_{\text{sc}, \bar{\mu}}$ , we may and do assume  $\text{char}(k) = 0$  by Cor. 4.2 and Prop. 4.3. We further reduce to the case  $k = \mathbb{C}$ . Let  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$  be the cone of nilpotent matrices. The exponential map  $\mathfrak{g} \rightarrow L^{--}G$ ,  $A \mapsto \exp(t^{-1}A)$  is algebraic and  $G$ -equivariant. Let  $\mathfrak{g}_{\min} \subset \mathfrak{n}$  be the minimal nilpotent orbit for  $G$ . We claim that the map

$$\mathfrak{g}_{\min} \subset \mathfrak{n} \rightarrow L^{--}G$$

factors through  $L^{--}G \cap S_{\text{sc}, \mu}$  and induces an open immersion  $j: \mathfrak{g}_{\min} \hookrightarrow S_{\text{sc}, \mu}$ . This is explained in [MOV05, §2.9] and thus, we obtain on tangent spaces  $T_e S_{\text{sc}, \mu} = T_e j(\mathfrak{g}_{\min})$ . But the  $k$ -vector subspace

$$T_e \mathfrak{g}_{\min} \subset \mathfrak{g},$$

is a non-trivial  $G$ -invariant subspace. Hence it must be equal to  $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$  because  $G$  is simple and  $k = \mathbb{C}$  is of characteristic 0. This proves the lemma.  $\square$

**Corollary 6.2.** *If  $p \mid \pi_1(G)$ , then the quasi-minuscule Schubert variety inside  $\text{Gr} := \mathcal{F}_{G, 0}$  is not normal.*

*Proof.* Since  $G$  is split and  $Z$  is not étale, the  $k$ -vector space  $T_e L^{--}Z \cap \mathfrak{g}[u^{-1}]$  is nonzero. The corollary follows from Lemma 6.1.  $\square$

We are going to need the following combinatorial description of the Bruhat order on  $X_*(T)$ , which can be found in [BH19, Thm. 2.5 and 4.1]. We give simpler proofs to the reader's convenience.

**Theorem 6.3** (Besson-Hong). *Let  $\lambda, \mu \in X_*(T)$ . Then  $\lambda < \mu$  in the Bruhat order on  $\widetilde{W}/W_0$  if and only if there exists a sequence of coweights  $\mu_1 = \mu, \dots, \mu_r = \lambda$ , where for each  $1 \leq i \leq r-1$ , there is a positive root  $\alpha_i$  such that either  $\mu_{i+1} = \mu_i - k\alpha_i^\vee$  with  $0 < k \leq \langle \alpha_i, \mu_i \rangle$ , or  $\mu_{i+1} = \mu_i + k\alpha_i^\vee$  with  $0 < k < -\langle \alpha_i, \mu_i \rangle$ .*

It was already well-known that, if  $\lambda$  and  $\mu$  lie in a common Weyl chamber, then the Bruhat order described above coincides with the usual dominance partial order with respect to the given Weyl chamber (cf. [Ra05, Lem. 3.8, Prop. 3.5], [BH19, Thm. 4.1]).

*Proof.* By the Bruhat-Tits and the Kottwitz sign conventions, any cocharacter  $\nu \in X_*(T)$  acts on the appartement (identified with  $X_*(T)_{\mathbb{R}}$ ) by the opposite translation element  $t_{-\nu} \in W$ . Let  $w_\nu \in W$  be the minimal length element in  $t_{-\nu}W_{\mathbf{f}}$ . The Bruhat order is generated by the following relation between pairs of distinct elements  $\lambda, \mu$ : there is an affine reflection  $s_{\alpha+n}$  with  $\alpha + n$  positive (meaning, taking positive values on  $\mathbf{a}$ ), such that

$$w_\mu > s_{\alpha+n}w_\mu$$

in the Bruhat order on  $W$ , and  $s_{\alpha+n}w_\mu W_{\mathbf{f}} = w_\lambda W_{\mathbf{f}}$ . This is the same as saying that  $s_{\alpha+n}(\mu) = \lambda$ , and the point  $-\mu + \mathbf{f}$  and the alcove  $\mathbf{a}$  are on opposite sides of the affine hyperplane  $H_{\alpha+n}$ , that is,  $-\langle \alpha, \mu \rangle + n < 0$ .

Therefore,  $\lambda < \mu$  iff there exists a sequence of reflections  $s_i = s_{\beta_i+n_i}$ , ( $1 \leq i \leq r-1$ ) where  $\beta_i + n_i > 0$ ,  $\mu_1 = \mu$ ,  $\mu_r = \lambda = s_{r-1} \cdots s_1(\mu)$ , and where, for each  $i \geq 1$ , if  $\mu_i := s_{i-1} \cdots s_1(\mu_1)$ , then  $-\langle \alpha_i, \mu_i \rangle + n_i < 0$ . Of course, we may assume  $\mu_1, \dots, \mu_r$  has no repetitions.

By definition  $\mu_{i+1} = s_i(\mu_i)$ , that is,

$$\mu_{i+1} = \mu_i - (\langle \alpha_i, \mu_i \rangle + n_i) \alpha_i^\vee.$$

Because  $\alpha_i + n_i$  is a positive affine root, we have  $n_i \geq 0$  and  $n_i = 0 \Rightarrow \alpha_i > 0$  (here  $\alpha_i > 0$  means  $\alpha_i$  takes positive values on  $C^+$ ).

- (1) If  $\alpha_i > 0$  then  $n_i \geq 0$  and  $\mu_{i+1} = \mu_i + k\alpha_i^\vee$  where  $k = \langle \alpha_i, \mu_i \rangle - n_i$ . Note that  $0 < k \leq \langle \alpha_i, \mu_i \rangle$ .
- (2) If  $\alpha_i < 0$  then  $n_i \geq 1$ , and  $\mu_{i+1} = \mu_i - k(-\alpha_i)^\vee$ , where  $k = \langle \alpha_i, \mu_i \rangle - n_i$ . Note that  $0 < k < \langle \alpha_i, \mu_i \rangle$ . Here the required positive root is  $-\alpha_i$ .

Conversely, given the positive root  $\alpha_i$  and integer  $k$  satisfying the given restrictions, we may define the positive affine root  $\alpha_i + n_i$  using (1) or (2), for which we have  $-\langle \alpha_i, \mu_i \rangle + n_i < 0$ .  $\square$

In the following we apply this to uniformly bound the subset of normal adjoint Schubert varieties for absolutely simple split groups.

**Proposition 6.4.** *Let  $G$  be an absolutely simple adjoint split group. Then the set of  $\lambda \in Q^\vee$  such that  $S_{\lambda, \text{ad}}$  is normal is contained in the finite complement of all  $\lambda \in Q^\vee$  such that  $\lambda \geq -2\theta^\vee$ , where  $\theta$  denotes the highest root.*

*Proof.* We start by observing that  $-2\theta^\vee$  is bigger than  $\theta^\vee$ . Indeed,  $-\langle \theta, -2\theta^\vee \rangle = 4$  and thus  $\theta^\vee = -2\theta^\vee + 3\theta^\vee$  is less than  $-2\theta^\vee$  for the partial Bruhat order, see Proposition 6.3. By Corollary 2.2 ii) combined with Corollary 6.2, this gives the proposition as soon as we know that the complement of  $\{\lambda \in Q^\vee \mid \lambda \geq -2\theta^\vee\}$  in  $Q^\vee$  is finite.

Suppose  $C_1$  and  $C_2$  are two adjacent closed Weyl chambers such that  $C_1$  lies in a minimal gallery connecting the dominant Weyl chamber to  $C_2$ . Then there is a positive root  $\alpha$  such that the wall of the reflection  $s_\alpha$  bounds  $C_1$  and  $C_2$ , in such a way that  $C_1$  lies on

the nonnegative side with respect to  $\alpha$ . In particular, if  $\lambda \in C_1$ , then  $s_\alpha \lambda \in C_2$  and the inequality  $s_\alpha \lambda \leq \lambda$  holds, again by Proposition 6.3, as  $\langle \alpha, \lambda \rangle \geq 0$ .

This reduces us to considering only antidominant  $\lambda$ , that is, to showing that the set  $\{\lambda \in Q_+^\vee \mid -\lambda \not\geq -\lambda_0\}$  is finite for any fixed  $\lambda_0 \in Q_+^\vee$ . We will show the equivalent statement that  $\{\lambda \in Q_+^\vee \mid \lambda \not\geq \lambda_0\}$  is finite. Dominance ensures we may write  $\lambda = \sum n_i \alpha_i^\vee$  and  $\lambda_0 = \sum n_{0,i} \alpha_i^\vee$ , where  $n_i, n_{0,i} \geq 0$  for all  $i$ . Writing  $\lambda = \sum n_i \alpha_i^\vee$  and  $\lambda_0 = \sum n_{0,i} \alpha_i^\vee$ , it is enough to prove that for all  $j$ ,  $n_j \leq 2^r \max_i \{n_{0,i}\}$  whenever  $\lambda \not\geq \lambda_0$ , where  $r$  is the number of nodes of the Dynkin diagram for  $G$ . In this case, by Proposition 6.3 there is some  $i$  such that  $n_i < n_{0,i}$ . For  $j \neq i$ , set  $r_{ij} = -\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ . Assuming  $\alpha_j$  is adjacent to  $\alpha_i$  in the Dynkin diagram,  $r_{ij} \geq 1$ . By the dominance of  $\lambda$ , we see that  $2n_i - r_{ij}n_j \geq \langle \alpha_i, \lambda \rangle \geq 0$ , which implies  $n_j \leq 2n_i < 2\max_i \{n_{0,i}\}$ . Repeating this argument shows  $n_j \leq 2^r \max_i \{n_{0,i}\}$  for all  $j$  because the Dynkin diagram for  $G$  is connected.  $\square$

**6.2. The case of  $\mathrm{PGL}_2$ .** Let  $\mathrm{char}(k) = 2$ . We specialize the general set-up to the example  $1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathrm{SL}_2 \rightarrow \mathrm{PGL}_2 \rightarrow 1$ . We fix the Borel subgroup of upper triangular matrices.

First assume  $\mathbf{f} = 0$  is hyperspecial. Note that the quasi-minuscule  $S_{(1,-1)}$  Schubert variety is not normal and we easily conclude that the only non-trivial normal Schubert variety in  $\mathcal{F}\ell_0^0$  is the translated minuscule  $S_{(-1,1)}$ .

Assume  $\mathbf{f} = \mathbf{a}$ . Let  $\mathcal{F}\ell := \mathcal{F}\ell_{\mathrm{PGL}_2, \mathbf{a}}$  be the affine flag variety. For each  $w \in W$ , we denote by  $S_w \subset \mathcal{F}\ell$  the associated  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ -Schubert variety.

**Lemma 6.5.** *Let  $w \in W$ , and let  $S_w \subset \mathcal{F}\ell$  the associated  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ -Schubert variety. Then  $S_w$  is normal if and only if  $\dim(S_w) \leq 2$  in which case it is smooth.*

*Proof.* After possibly conjugating  $w \in W$  with an element in the stabilizer of  $\mathbf{a}$ , we may and do assume that  $w \in W_{\mathrm{aff}}$ , i.e.,  $S_w \subset \mathcal{F}\ell_w$ . The affine Weyl group  $W_{\mathrm{aff}}$  is the free group with generators  $s_0, s_1$  and relations  $s_0^2 = s_1^2 = 1$ . Here  $s_0$  is the simple affine reflection, and  $s_1$  the simple finite reflection. Consider the projection  $\pi: \mathcal{F}\ell \rightarrow \mathrm{Gr} := \mathrm{Gr}_{\mathrm{PGL}_2}$ , a smooth proper morphism of relative dimension 1. Let  $S_\mu \subset \mathrm{Gr}^0$  be the quasi-minuscule Schubert variety, which is not normal. Hence, the Schubert variety  $\pi^{-1}(S_\mu) = S_w$ ,  $w = s_1 s_0 s_1$  is not normal. By Corollary 2.2, all other Schubert varieties  $S_v$  with  $v \geq w$  not normal as well. In particular, all Schubert varieties with  $\dim(S_w) \geq 4$  are not normal. If  $\dim(S_w) \leq 1$ , i.e., either  $w = 1$ , or  $w = s_0$ , or  $w = s_1$ , then  $S_w$  is clearly smooth, hence normal. In order to treat the remaining cases where  $\dim(S_w) = 2$ , or  $\dim(S_w) = 3$  we observe that the  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ -Schubert variety  $S_w$  is normal if and only if the  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ -Schubert variety  $S_{\tau w \tau^{-1}}$  is normal where  $1 \neq \tau \in W$  denotes the stabilizer of  $\mathbf{a}$ . We have  $\tau w \tau^{-1} = s_1 s_0$  for  $w = s_0 s_1$  and  $\tau w \tau^{-1} = s_0 s_1 s_0$  for  $w = s_1 s_0 s_1$ . In the latter case, both 3-dimensional Schubert varieties are not normal as argued above. In the first case, the 2-dimensional Schubert variety  $S_w$  is the preimage of the translated to the neutral component minuscule Schubert variety inside the affine Grassmannian, and hence smooth.  $\square$

## 7. REDUCEDNESS: THE SPLIT CASE

Throughout this section let  $k$  be a field and  $G$  be a connected split reductive group over  $k$ . We wish to give complete answers to the following question: for which groups  $G$  over  $k$  is the affine Grassmannian  $\text{Gr}_G = \text{Gr}_{G,k}$  reduced? We are going to use the notion of distributions, which should be regarded as higher order differential operators. For the theory of distributions for (group) schemes we refer to [DG70, II, §4] and [Ja07, §7].

**Definition 7.1.** Let  $(X, x)$ ,  $x \in X(k)$  be a pointed  $k$ -ind-scheme. The *space of distributions*  $\text{Dist}(X, x)$  is the  $k$ -vector space obtained as the filtered colimit of the  $k$ -vector space duals of all Artinian closed subschemes of  $X$  supported at  $x$ .

We record some basic properties.

**Lemma 7.2.** *Let  $(X, x)$ ,  $(Y, y)$  be pointed  $k$ -ind-schemes, and let  $f: (Y, y) \rightarrow (X, x)$  be a map of pointed  $k$ -ind-schemes.*

- (1) *If  $(X, x) = \text{colim}(X_i, x)$  is any presentation, then  $\text{Dist}(X, x) = \text{colim} \text{Dist}(X_i, x)$  with injective transition maps. Further, each  $\text{Dist}(X_i, x)$  only depends on the formal spectrum  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{X_i, x})$  viewed as an ind-scheme.*
- (2) *The map  $f$  induces a map  $(df)_y: \text{Dist}(Y, y) \rightarrow \text{Dist}(X, x)$ .*
- (3) *There is a natural map  $\text{Dist}(X, x) \otimes_k \text{Dist}(Y, y) \rightarrow \text{Dist}(X \times_k Y, (x, y))$  which is an isomorphism if both  $X, Y$  are ind-(locally Noetherian) over  $k$ .*

*Proof.* Part (1) is immediate because the transition maps  $X_i \rightarrow X_j$  are closed immersions. Part (2) and (3) follow from (1) and the case of schemes in [Ja07, I, §7.2 & §7.4]. Note that *loc. cit.* is over more general base rings, and that the assumptions are satisfied for locally Noetherian schemes over fields.  $\square$

In particular, for any pointed  $k$ -ind-scheme  $(X, x)$  which is ind-(locally Noetherian), e.g., of ind-(finite type), the space of distributions  $\text{Dist}(X, x)$  is a co-(commutative unital  $k$ -algebra) whose co-algebra structure is induced from the diagonal  $X \rightarrow X \times_k X$  and Lemma 7.2 (3), cf. [Ja07, I, §7.4 (3)] for details. If  $X$  is a  $k$ -group ind-scheme –possibly of ind-(infinite type)– then we define

$$(7.1) \quad \text{Dist}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Dist}(X, 1),$$

where  $1 \in X(k)$  denotes the neutral section. In this case, the action morphism  $X \times_k X \rightarrow X$  (combined with Lemma 7.2) induces on  $\text{Dist}(X)$  the structure of an associative  $k$ -algebra under the convolution of distributions, cf. [Ja07, I, §7.7] for details.

For the next lemma recall that a quasi-compact morphism of schemes is called *scheme-theoretically dominant* if its scheme theoretic image [StaPro, 01R5] is equal to its target.

**Lemma 7.3.** *Let  $f: (Y, y) \rightarrow (X, x)$  be a quasi-compact, scheme-theoretically dominant morphism of locally Noetherian pointed  $k$ -schemes. Then the induced homomorphism  $(df)_y: \text{Dist}(Y, y) \rightarrow \text{Dist}(X, x)$  is surjective.*



*Proof.* Since  $f$  is quasi-compact and scheme-theoretically dominant, the induced map  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$  on local rings is injective, cf. [StaPro, 01R8 (1), (2)]. Also note that the map  $(df)_y$  only depends on the induced map on completed local rings  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ , which is injective as well. By Krull’s intersection theorem, the decreasing sequence of ideals  $\{\hat{\mathfrak{m}}_y^n \cap \hat{\mathcal{O}}_{X,x}\}_{n \geq 1}$  has zero intersection, and hence by Chevalley’s lemma [Ch43, Lem. 7] defines a cofinal family of Artinian closed subschemes of  $\mathrm{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{X,x})$  supported at  $x$ . This implies the lemma.  $\square$

**Remark 7.4.** Another interesting example (cf. also [Ja07, I, §7.6]) to which Lemma 7.3 applies is the case of a map  $f: (Y, y) \rightarrow (X, x)$  of locally Noetherian pointed  $k$ -schemes which is flat at  $y$ . Indeed, then the induced map  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$  is faithfully flat, and hence injective, i.e., the map on spectra is scheme-theoretically dense. Also we find it instructive to check Lemma 7.3 “by hand” in the special cases of the normalization of the cusp, and the (relative) Frobenius morphism in strictly positive characteristic –say– of the affine line.

The previous lemma will be used to show that  $\mathrm{Gr}_G$  for adjoint non-(simply connected) groups is non-reduced in bad characteristics by noticing that the  $k$ -vector space of the distributions of its reduction is strictly smaller. The following lemma shows that this space can be easily computed at “infinite level”. For later use we formulate this lemma in more generality.

**Lemma 7.5.** *Let  $G$  be a Chevalley group scheme over  $\mathbb{Z}$ . Let  $T \subset G$  be a split, maximal torus over  $\mathbb{Z}$ , and let  $B^\pm = T \ltimes U^\pm$  be Borel subgroups in  $G$  over  $\mathbb{Z}$  such that  $B^+ \cap B^- = T$ . Then the multiplication map on strictly negative loop groups*

$$(7.2) \quad L^{-}U^{-} \times_{\mathbb{Z}} L^{-}T \times_{\mathbb{Z}} L^{-}U^{+} \rightarrow \mathrm{Gr}_G, \quad (u^{-}, t, u^{+}) \mapsto u^{-} \cdot t \cdot u^{+} \cdot e$$

*is formally étale (when viewed as a map of ind-schemes). The source of this map is called the fake open cell. This construction is compatible with arbitrary base change  $S \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ , e.g., for  $S = \mathrm{Spec}(k)$  a field.*

*Proof.* The morphism  $U^{-} \times T \times U^{+} \rightarrow G$  given by multiplication is an open immersion [Co14, Thm. 5.1.13], and in particular formally étale [StaPro, 04FF]. Passing to negative loop groups (and using that the  $L^{-}$ -construction commutes with products), this immediately implies that the top horizontal map

$$\begin{array}{ccc} L^{-}U^{-} \times L^{-}T \times L^{-}U^{+} & \longrightarrow & L^{-}G \\ \uparrow & & \uparrow \\ L^{-}U^{-} \times L^{-}T \times L^{-}U^{+} & \longrightarrow & L^{-}G, \end{array}$$

is formally étale. Here the vertical maps are the natural inclusions, and one checks that the diagram is Cartesian. Hence, the lower horizontal arrow is formally étale as well.  $\square$

**Remark 7.6.** By the same reasoning, the induced map on loop groups  $LU^{-} \times LT \times LU^{+} \rightarrow LG$  is formally étale as well.



Lemma 7.5 implies that every Artinian local ring supported at the base point in  $\text{Gr}_G$  uniquely factors through the fake open cell. We obtain the following proposition which builds upon [PR08, Thm. 6.1] in the case of split groups.

**Proposition 7.7.** *Let  $G$  be a split reductive group over a field  $k$ . Then the following are equivalent:*

- a) *The ind-scheme  $LG$  is reduced (and then even geometrically reduced).*
- b) *The ind-scheme  $\text{Gr}_G$  is reduced (and then even geometrically reduced).*
- c) *The group  $G$  is semisimple, and  $\text{char}(k) \nmid \pi_1(G)$ .*

*Proof.* We first show the equivalence of a) and b). Recall that the quotient map  $LG \rightarrow \text{Gr}_G$  is a (right)  $L^+G$ -torsor in the étale topology. Thus, the ind-scheme  $LG$  is étale locally isomorphic to  $\text{Gr}_G \times_k L^+G$ . If  $LG$  is reduced, then  $\text{Gr}_G$  is reduced because  $L^+G \rightarrow \text{Spec}(k)$  is flat [StaPro, 06QM]. Conversely, if  $\text{Gr}_G$  is reduced, then  $LG$  is reduced because  $L^+G$  is geometrically reduced [StaPro, 035Z]. This finishes the equivalence of a) and b). Concerning geometrically reducedness, we note that if  $\text{Gr}_G$  is reduced, then it admits a presentation by Schubert varieties. As Schubert varieties are geometrically reduced, it follows that  $\text{Gr}_G$  is reduced if and only if  $\text{Gr}_G$  is geometrically reduced. Since the equivalence of a) and b) is valid for any fields, this also implies that  $LG$  is reduced if and only if  $LG$  is geometrically reduced.

It remains to show the equivalence of b) and c) for which we may (and do) assume that  $k$  is algebraically closed. If c) holds, then b) holds by [PR08, Thm. 6.1]. Conversely, if b) holds, i.e., if  $\text{Gr}_G$  is reduced, then  $G$  is semisimple by [PR08, Prop. 6.5]. It remains to show that  $p := \text{char}(k)$  does not divide  $\pi_1(G)$ . We may (and do) assume that  $p > 0$  is strictly positive. Let  $G_{\text{sc}} \rightarrow G$  be the simply connected cover. Fix  $T \subset G$ , and denote by  $T_{\text{sc}}$  its preimage in  $G_{\text{sc}}$ . Then the induced map on Schubert varieties  $\text{Gr}_{G_{\text{sc}}, \leq \mu} \rightarrow \text{Gr}_{G, \leq \mu}$ ,  $\mu \in X_*(T_{\text{sc}})$  is dominant, and hence scheme-theoretically dominant (because the target is reduced by definition). As both ind-schemes  $\text{Gr}_{G_{\text{sc}}}$ ,  $\text{Gr}_G$  are reduced, they admit presentations by Schubert varieties. Thus, Lemma 7.3 (combined with Lemma 7.2 (1) for the passage to ind-schemes) implies that the map

$$(7.3) \quad \text{Dist}(\text{Gr}_{G_{\text{sc}}}, e) \longrightarrow \text{Dist}(\text{Gr}_G, e)$$

is surjective where  $e$  denotes the base point. This map is calculated using Lemma 7.5 as follows. Let  $B^\pm = T \ltimes U^\pm$  be Borel subgroups in  $G$  such that  $B^+ \cap B^- = T$ . Then  $B_{\text{sc}}^\pm = T_{\text{sc}} \ltimes U^\pm$  are Borel subgroups in  $G_{\text{sc}}$ . By Lemma 7.5 (combined with Lemma 7.2 (3) for the compatibility with products), the surjectivity of (7.3) implies the surjectivity of

$$(7.4) \quad \text{Dist}(L^{--}T_{\text{sc}}) \longrightarrow \text{Dist}(L^{--}T).$$

Here we use the principle that a tensor product of linear operators on possibly infinite dimensional vector spaces is surjective if and only if each linear operator is surjective.

To make the connection with  $n := |\pi_1(G)|$ , recall that the center  $Z$  of  $G_{\text{sc}}$  is a finite  $k$ -group scheme of order  $n$ . Clearly, the subgroup  $Z$  is contained in  $T_{\text{sc}}$  (in fact in any maximal torus) which shows  $Z = \ker(T_{\text{sc}} \rightarrow T)$ . We claim that the surjectivity of (7.4) implies that  $p \nmid n$ .

We need to analyze the map  $T_{\text{sc}} \rightarrow T$  more carefully. Let  $r := \dim(T_{\text{sc}}) = \dim(T)$  denote the rank of the  $k$ -tori. Since  $k$  is algebraically closed, passing to cocharacter lattices induces an equivalence between  $k$ -tori of rank  $r$ , and finite free  $\mathbb{Z}$ -modules of rank  $r$ . Hence, the elementary divisor theorem implies that there exist isomorphisms  $\mathbb{G}_{m,k}^r \simeq T_{\text{sc}}$  and  $T \simeq \mathbb{G}_{m,k}^r$  such that the composite

$$(7.5) \quad \mathbb{G}_{m,k}^r \simeq T_{\text{sc}} \longrightarrow T \simeq \mathbb{G}_{m,k}^r$$

is given by  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto (\lambda_1^{n_1}, \dots, \lambda_r^{n_r})$  for positive integers  $n_1 \geq \dots \geq n_r \geq 1$ . We necessarily have  $n = n_1 \cdot \dots \cdot n_r$ . Hence, the claim  $p \nmid n$  is equivalent to the claim  $p \nmid n_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Since (7.5) splits as a product of maps, we can apply Lemma 7.2 (3) to see that the surjectivity of (7.4) implies the surjectivity of each map

$$(7.6) \quad \text{Dist}(L^{--}\mathbb{G}_{m,k}) \longrightarrow \text{Dist}(L^{--}\mathbb{G}_{m,k}),$$

which is induced from  $\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ ,  $\lambda \mapsto \lambda^{n_i}$  for  $i = 1, \dots, r$ . Finally, Lemma 7.8 below implies  $p \nmid n_i$  which finishes the proof of the proposition.  $\square$

**Lemma 7.8.** *Let  $k$  be a field of characteristic  $p > 0$ . Let  $n \geq 1$  be an integer, and consider the morphism of  $k$ -group schemes  $\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ ,  $\lambda \mapsto \lambda^n$  given by taking the  $n$ -th power. If the induced morphism  $\text{Dist}(L^{--}\mathbb{G}_{m,k}) \rightarrow \text{Dist}(L^{--}\mathbb{G}_{m,k})$  is surjective, then  $p \nmid n$ .*

*Proof.* We immediately reduce to the case that  $n$  is a prime number. For a  $k$ -algebra  $R$ , the  $n$ -th power map on  $L^{--}\mathbb{G}_{m,k}(R)$  is given by

$$(7.7) \quad 1 + \sum_{i \geq 1} a_i u^{-i} \mapsto \left(1 + \sum_{i \geq 1} a_i u^{-i}\right)^n,$$

where all  $a_i \in R$  are nilpotent, and almost all  $a_i$  are zero. This also shows that there is a presentation  $L^{--}\mathbb{G}_{m,k} = \text{colim}_{i \geq 1} \text{Spec}(k[a_1, \dots, a_i]/(a_1^i, \dots, a_i^i))$  where  $a_i$  are viewed as formal variables. In these coordinates, we have a canonical identification  $\text{Dist}(L^{--}\mathbb{G}_{m,k}) = \text{Dist}(\mathbb{A}_k^{\mathbb{N}}, \{0\})$  where  $\mathbb{A}_k^{\mathbb{N}} = \text{Spec}(k[\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}])$  is the infinite-dimensional affine space. Hence, a distribution is a  $k$ -linear map  $\delta: k[\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}] \rightarrow k$  supported at only finitely many monomials. We see that the space of distribution has a basis given by  $\delta_{\underline{r}}$  such that  $\underline{r} = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  is a sequence of positive integers where almost all  $r_i$  are zero. Here  $\delta_{\underline{r}}$  takes the value 1 on the monomial  $\prod_{i \in \mathbb{N}} a_i^{r_i}$  and the value 0 on all other monomials (by convention  $\delta_{(0,0,\dots)} = 0$ ). We need to write down the map (7.7) in the basis  $\text{Dist}(L^{--}\mathbb{G}_{m,k}) = \text{span}_k\{\delta_{\underline{r}} \mid \underline{r} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathbb{N}}\}$ . Suppose  $n = p$  in which case we have to show that the induced map on the spaces of distributions is not surjective. Since  $k$  has characteristic  $p > 0$ , the formula in (7.7) becomes

$$(1 + \sum_{i \geq 1} a_i u^{-i})^p = 1 + \sum_{i \geq 1} a_i^p u^{-ip}.$$

This means that the map on spaces of distributions is induced from  $\delta_{\underline{r}} \mapsto \delta_{p \star \underline{r}}$  where  $p \star \underline{r} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathbb{N}}$  is the zero vector (hence  $\delta_{p \star \underline{r}} = 0$ ), unless  $p \mid r_i$  for all entries in  $\underline{r} = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in which case the  $i$ -th entry in  $p \star \underline{r}$  is given by

$$(p \star \underline{r})_i = \begin{cases} \frac{r_i/p}{p} & \text{if } p \mid i; \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Since  $p \geq 2$  the distribution  $\delta_{(1,0,0,\dots)}$  does not lie in the image of this map.  $\square$

**Remark 7.9.** In fact, the converse to Lemma 7.8 holds as well, i.e., for an integer  $n \geq 1$  prime to  $p$  the map  $\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ ,  $\lambda \mapsto \lambda^n$  induces a surjection on spaces of distributions. Indeed, one reduces to the case where  $n \neq p$  is a prime number. Then it follows from an explicit calculation –which we omit– similarly as in the proof of Lemma 7.8, or alternatively using affine Grassmannians as follows. Consider the canonical map  $\text{Gr}_{\text{SL}_n} \rightarrow \text{Gr}_{\text{PGL}_n}$  on affine Grassmannians, both of which are reduced by Proposition 7.7. Hence, as in (7.3) this induces a surjection on spaces of distributions. Following the proof of Proposition 7.7 further, we see that in (7.5) the elementary divisors  $n_1 \geq \dots \geq n_r \geq 1$  (here  $r = n$ ) are necessarily given by  $n_1 = n$  and  $n_i = 1$ ,  $i \geq 2$  because  $n$  is a prime number. Now the surjectivity of the map in (7.6) gives the desired result.

## 8. REDUCEDNESS: THE TWISTED CASE

Here we give a different proof of nonreducedness of loop groups of tamely ramified semi-simple groups  $G$  such that  $p$  divides the order of the fundamental group. The idea consists basically in observing that Weil restriction along purely inseparable extensions preserves loop groups and Grassmannians, but not flat and non-étale isogenies.

**Proposition 8.1.** *Let  $k$  be an algebraically closed field and  $G$  a tamely ramified connected reductive group over  $F = k((t))$ . For its loop group  $LG$  to be reduced, it is necessary and sufficient that  $G$  be semi-simple with étale simply connected isogeny.*

*Proof.* By work of Pappas-Rapoport, cf. [PR08, Thm. 6.1 and Prop. 6.5], we only need to show that  $LG$  is non-reduced whenever  $G$  is semisimple and the order of the kernel  $Z$  of its simply connected cover map  $\tilde{G} := G_{\text{sc}} \rightarrow G$  is divisible by  $p$ . As explained before the statement, we will contemplate the strictly smaller closed subgroup  $\overline{G} := \text{Res}_{F/F^p} \tilde{G} / \text{Res}_{F/F^p} Z$  of  $\text{Res}_{F/F^p} G$ , as observed in [CGP15, Example A.7.9]. Note that Bruhat-Tits theory is available for  $\overline{G}$  as well as for  $\text{Res}_{F/F^p} G$ , cf. [I], their buildings being isomorphic to the building of  $G$  over  $F$ . We claim that the canonical morphism

$$\overline{\mathcal{G}}_x \rightarrow \text{Res}_{\mathcal{O}/\mathcal{O}^p} \mathcal{G}_x$$

between parahoric group schemes is a locally closed immersion.

Let  $S$  be a maximal split torus of  $G$ ,  $\tilde{S}$  be its unique lift to a maximal split torus of  $\tilde{G}$  and  $\overline{S}$  be its image in  $\overline{G}$ . We denote by  $T$  (resp.  $\tilde{T}$ , resp.  $\overline{T}$ ) the Cartans of  $G$  (resp.  $\tilde{G}$ , resp.  $\overline{G}$ ) obtained as centralizers of  $S$  (resp.  $\tilde{S}$ , resp.  $\overline{S}$ ). Arguing with big cells as in [BT84, 1.2.13 et 1.2.14], it suffices for our purposes to show that

$$\overline{\mathcal{T}} \rightarrow \text{Res}_{\mathcal{O}/\mathcal{O}^p} \mathcal{T}$$

is a locally closed immersion.

Assume first that  $T$  is split. By using the elementary divisor theorem, we may assume  $T = \mathbb{G}_m = \tilde{T}$  are 1-dimensional and  $\mu = \mu_n$ . If  $n$  is prime to  $p$ , then  $\overline{T} = \text{Res}_{F/F^p} T$  and

the claim is trivial. On the other hand, if  $n$  is divisible by  $p$ , then  $\bar{T} = \mathbb{G}_m \subseteq \mathrm{Res}_{F/F^p} \mathbb{G}_m = \mathrm{Res}_{F/F^p} T$  and the claim is clear as well.

In general, let  $K/F$  be a tamely ramified finite Galois extension with group  $\Gamma$  splitting  $\tilde{T}$  and  $T$ , and note that  $K^p/F^p$  is a (pseudo-)splitting field for  $\bar{T}$  with Galois group naturally isomorphic to  $\Gamma$ . Then we have locally closed immersions

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{T}} &\hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_K/\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{O}_K}, \\ \mathcal{T} &\hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_K/\mathcal{O}} \mathcal{T}_{\mathcal{O}_K}, \\ \bar{\mathcal{T}} &\hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_K^p/\mathcal{O}^p} \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{O}_K^p},\end{aligned}$$

extending the natural generic homomorphisms. Indeed, the maps exist by the universal property of connected Néron models. Moreover, their scheme-theoretic images are smooth by identifying them with the smooth  $\Gamma$ -invariants of the right hand sides, cf. [PR08, Lemma 6.7], where we use the tameness hypothesis  $p \nmid |\Gamma|$ . Due to [BLR90, Prop. 10.1.4], the resulting morphisms must be locally closed immersions. Taking restrictions of scalars along  $\mathcal{O}/\mathcal{O}^p$  of the first two maps and applying the split case, we deduce the general claim.

As a consequence of this, we derive that

$$\mathrm{Gr}_{\bar{\mathcal{G}}_x}^0 \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{Res}_{\mathcal{O}/\mathcal{O}^p} \mathcal{G}_x}^0 \cong \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_x}^0$$

is a closed immersion. If  $LG$  were reduced, then the former morphism would have to be an isomorphism, because  $\mathrm{Gr}_{\bar{\mathcal{G}}_x}^0 \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_x}^0$  is a universal homeomorphism. In particular, that would imply that the  $K$ -vector space  $\mathrm{Lie} G$  is spanned by the strictly smaller subspace  $\mathrm{Lie} \bar{G}$  and the lattice  $\mathrm{Lie} \mathcal{G}_x$ . This is obviously a contradiction.  $\square$

**Remark 8.2.** One would hope that a similar statement holds beyond the tamely ramified case, but one cannot control the Néron models with the same ease. On the other hand, if one tried to classify reducedness of the loop group for the more general class of pseudo-reductive groups, the above argument suggests this could very well be a nightmare.

## 9. IND-FLATNESS

In this section  $G$  will denote a Chevalley group scheme over  $\mathbb{Z}$ . Our aim is to prove in Proposition 9.5 that its affine Grassmannian  $\mathrm{Gr}_{G,\mathbb{Z}}$  is ind-flat over  $\mathbb{Z}$  in the sense of Definition A.1. The starting point is the following lemma.

**Lemma 9.1.** *Let  $H$  be a smooth, affine group scheme over  $\mathbb{Z}$ .*

- (1) *The positive loop group  $L^+H \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$  is a flat, affine group scheme.*
- (2) *If  $H$  is split unipotent or a split torus, then both the loop group  $LH$  and the strictly negative loop group  $L^{--}H$  are ind-flat over  $\mathbb{Z}$ .*

*Proof.* For (1), let  $L_i^+H, i \geq 0$  be the smooth, affine  $\mathbb{Z}$ -group scheme defined by the functor  $L_i^+H(R) = H(R[u]/(u^{i+1}))$  for a ring  $R$ . Then  $\{L_i^+H\}_{i \geq 0}$  naturally forms an inverse system, and the canonical map  $L^+H \rightarrow \lim_{i \geq 0} L_i^+H$  is an isomorphism. This implies (1).

For (2), observe that the map

$$(9.1) \quad L^{--}H \times_{\mathbb{Z}} L^+H \rightarrow LH, \quad (h^-, h^+) \mapsto h^- \cdot h^+,$$

is representable by an open immersion. Since  $L^+H$  is flat by (1), the ind-flatness of  $L^{--}H$  follows from the one for  $LH$ . Now let  $H$  be a split unipotent group scheme. Then  $H \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$  as schemes for some  $n \geq 0$ . Since the formation of loop groups commutes with products, it is enough to show that  $L\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$  is ind-flat. This is immediate from the identification, which is functorial in the ring  $R$ ,

$$L\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1(R) = R((u)) = \operatorname{colim}_{i \gg -\infty} \prod_{j \geq i} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1(R),$$

given by mapping a Laurent series  $\sum a_i u^i$  to the vector  $(a_i)$ . Next let  $H$  be a split torus. Then  $H \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}^n$  as (group) schemes for some  $n \geq 0$ , and we reduce to the case  $T = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ . In this case, the map (9.1) is surjective and hence an isomorphism. We see that the ind-flatness of  $L\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$  is equivalent to the one of  $L^{--}\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ . For the latter we note that for any ring  $R$ ,

$$L^{--}\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}(R) = (1 + u^{-1}R[u^{-1}])^{\times} = \{1 + \sum_{i \geq 1} a_i u^{-i} \mid a_i \in R \text{ nilpotent}\},$$

so that  $L^{--}\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}} \simeq \operatorname{colim}_{i \geq 1} \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[a_1, \dots, a_i]/(a_1^i, \dots, a_i^i))$ . This is clearly ind-flat.  $\square$

**Corollary 9.2.** *Let  $T \subset G$  be a split, maximal torus over  $\mathbb{Z}$ , and let  $B^{\pm} = T \ltimes U^{\pm}$  be Borel subgroups in  $G$  such that  $B^+ \cap B^- = T$ . Then the fake open cell (cf. Lemma 7.5)*

$$L^{--}U^- \times_{\mathbb{Z}} L^{--}T \times_{\mathbb{Z}} L^{--}U^+ \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$$

*is ind-flat.*

*Proof.* Since  $U^{\pm}$  are split unipotent and  $T$  is a split torus, this is immediate from Lemma 9.1 (2).  $\square$

The ind-flatness of the affine Grassmannian is deduced from Corollary 9.2 using the following observation due to Faltings [Fal03, Proof of Cor. 11].

**Lemma 9.3.** *Let  $Y \hookrightarrow X$  be an ind-(closed immersion) of ind-(locally Noetherian) ind-schemes. If for every local Artinian ring  $R$  the induced map*

$$(9.2) \quad Y(R) \rightarrow X(R)$$

*is bijective, then  $Y \hookrightarrow X$  is an isomorphism.*

*Proof.* By Yoneda's lemma, we may view  $X, Y$  as set-valued (contravariant) functors on the category of Noetherian, affine schemes. For any such  $T$ , the induced map  $Y(T) \rightarrow X(T)$  is clearly injective, and we need to show the surjectivity. This can be checked after base change  $Y \times_X T \rightarrow T$  as our assumptions are stable under base change. We reduce to the case where  $X = T$  is a Noetherian (affine) scheme. Write  $Y = \operatorname{colim}_i Y_i$  as a filtered colimit of closed subschemes of  $X$ . We claim that this sequence stabilizes with value  $X$ .

Let  $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{O}_X$  be the ideal sheaf defining  $Y_i$ . Since the index set is filtered, it is enough to show the existence of an index  $i$  with  $\mathcal{I}_i = 0$ . For this we note that  $\mathcal{I}_i = 0$  if and only if the

annihilator ideal sheaf  $\text{Ann}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_i)$  is equal to  $\mathcal{O}_X$ , or equivalently if the closed subscheme  $Z_i \subset X$  defined by  $\text{Ann}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_i)$  is empty. For  $i \leq j$ , we have

$$Y_i \subset Y_j \iff I_i \supset I_j \iff \text{Ann}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_i) \subset \text{Ann}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_j) \iff Z_i \supset Z_j.$$

Since  $X$  is noetherian and  $I$  is filtered, there is an  $i_0 \in I$  such that  $Z_{i_0}$  is a minimum, i.e.  $Z_{i_0} \subseteq Z_i$  for all  $i \in I$ . Now suppose for the sake of contradiction that  $Z_{i_0} \neq \emptyset$ .

Now let  $\eta \in Z_{i_0}$  be a generic point of an irreducible component. It remains to find an index  $i_0 < i_1$  such that  $\eta \notin Z_{i_1}$ . By construction, this means that the closed subscheme defined by  $\text{Ann}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_{i_0})_\eta = \text{Ann}_{\mathcal{O}_{X,\eta}}(\mathcal{I}_{i_0,\eta})$  in  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\eta})$  is supported at the closed point. Since  $\mathcal{O}_{X,\eta}$  is Noetherian, this is equivalent to the existence of some integer  $N \gg 0$  such that

$$\mathfrak{m}_\eta \supset \text{Ann}_{\mathcal{O}_{X,\eta}}(\mathcal{I}_{i_0,\eta}) \supset \mathfrak{m}_\eta^N,$$

where  $\mathfrak{m}_\eta \subset \mathcal{O}_{X,\eta}$  denotes the maximal ideal. Hence,  $\mathcal{I}_{i_0,\eta}$  is a finitely generated module over the Artinian ring  $\mathcal{O}_{X,\eta}/\mathfrak{m}_\eta^N$ , and therefore Artinian itself. Since our index set is filtered, we can choose  $i_1 > i_0$  such that  $\mathcal{I}_{i_1,\eta}$  is the minimum among the set  $\{\mathcal{I}_{j,\eta}\}_{j \geq i_0}$ . By Krull's intersection theorem  $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}_\eta^n = 0$ , and hence applying (9.2) to the Artinian rings  $\mathcal{O}_{X,\eta}/\mathfrak{m}_\eta^n$ ,  $n \geq 1$  shows that we necessarily have  $\mathcal{I}_{i_1,\eta} = 0$ , i.e., that  $\eta \notin Z_{i_1}$ . This finishes the proof of the lemma.  $\square$

**Remark 9.4.** The proof of Lemma 9.3 shows that condition (9.2) can be weakened. Namely, it is enough to use local Artinian rings which are strictly Henselian. Indeed, in the last part of the proof it is enough to show  $\mathcal{I}_{i_1,\bar{\eta}} = 0$  where  $\bar{\eta} \rightarrow \eta$  is a geometric point and  $\mathcal{I}_{i_1,\bar{\eta}}$  denotes the stalk on the étale site.

**Proposition 9.5.** *The affine Grassmannian  $\text{Gr}_{G,\mathbb{Z}}$  is an ind-flat ind-scheme over  $\mathbb{Z}$ .*

*Proof.* Let  $\text{Gr}_{G,\mathbb{Z}}^{\text{fl}} \subset \text{Gr}_{G,\mathbb{Z}}$  be the flat closure, cf. Definition A.3. By Lemma 9.3, it is enough to show that every local Artinian point  $g: \text{Spec}(R) \rightarrow \text{Gr}_{G,\mathbb{Z}}$  factors through  $\text{Gr}_{G,\mathbb{Z}}^{\text{fl}}$ . Let  $k$  be the residue field of  $R$ , and denote by  $\bar{g}: \text{Spec}(k) \rightarrow \text{Gr}_{G,\mathbb{Z}}$  the reduction of  $g$ . Fix a split maximal torus  $T \subset G$  over  $\mathbb{Z}$ , and  $B^\pm = T \ltimes U^\pm$  as in Corollary 9.2. By the Cartan decomposition  $\text{Gr}_G(k) = \bigsqcup_{\mu \in X_*(T)} L^+G(k) \cdot u^\mu \cdot e$ , we can write  $\bar{g}$  as a product  $\bar{h} \cdot u^\mu \cdot e$  for some  $\bar{h} \in L^+G(k)$ ,  $\mu \in X_*(T)$ . By formal smoothness of  $L^+G \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ , we can lift  $\bar{h}$  to an  $R$ -valued point  $h: \text{Spec}(R) \rightarrow L^+G$ . Since  $L^+G \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  is flat and  $LT \rightarrow \mathbb{Z}$  is ind-flat by Lemma 9.1, the inclusion  $\text{Gr}_{G,\mathbb{Z}}^{\text{fl}} \subset \text{Gr}_{G,\mathbb{Z}}$  is invariant under the left action of  $L^+G$  and  $LT$ . Replacing  $g$  by  $u^{-\mu} \cdot h^{-1} \cdot g$ , we may therefore assume that  $g$  is supported at the base point. Then  $g$  factors through the fake open cell  $L^{--}U^- \times L^{--}T \times L^{--}U^+$  by Lemma 7.5. Since this is ind-flat by Corollary 9.2, the map (7.2) factors through  $\text{Gr}_{G,\mathbb{Z}}^{\text{fl}}$ . This finishes the proof of the proposition.  $\square$

We now briefly generalize this to the parahoric group schemes over  $W[t]$  constructed previously.

**Proposition 9.6.** *The affine Grassmannian  $\text{Gr}_{G_f,W}$  is an ind-flat ind-scheme over  $W$ .*



*Proof.* Since the affine Grassmannian is topologically covered by its Schubert cells, it suffices, as in the split case, to show that every artinian ring supported at the origin factors through the ind-flat closure. For this, one just needs to note that  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_f, W}$  admits a formally smooth cover  $L^- \mathcal{G}_f$  arising from taking uncompleted  $t^{-1}$ -loops of an appropriate  $W[t^{-1}]$ -group scheme. But note that such a group scheme is étale locally around its unit section isomorphic to  $\mathbb{A}_{W[t^{-1}]}^n$ , so their  $t^{-1}$ -loops have the same formal completion at the origins, the latter of which is the formal spectrum of the power series ring  $W[[x_1, x_2, \dots, x_i, \dots]]$  in infinitely many variables with  $W$ -coefficients.  $\square$

## APPENDIX A. IND-FLATNESS

We recall some basic results on ind-schemes, see [Ri19, §1] for details. An ind-scheme is a functor  $X: \text{AffSch}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$  from the category of affine schemes such that there exists a presentation as functors  $X = \text{colim} X_i$  where  $\{X_i\}_{i \in I}$  is a filtered system of schemes  $X_i$  with transition maps being closed immersions. Maps of ind-schemes are natural transformations of functors. We denote by  $\text{IndSch}$  the category of ind-schemes. It contains the category of schemes as a full subcategory, is closed under fiber products and has  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  as final object. We identify  $\text{AffSch}^{\text{op}}$  with the category of Rings whenever convenient. Note that every ind-scheme defines an fpqc sheaf on the category of affine schemes. Moreover, if  $X = \text{colim}_i X_i$ ,  $Y = \text{colim}_j Y_j$  where each  $X_i$  is quasi-compact, then

$$\text{Hom}_{\text{IndSch}}(X, Y) = \text{colim}_i \lim_j \text{Hom}_{\text{Sch}}(X_i, Y_j).$$

If  $S$  is a scheme, then an  $S$ -ind-scheme  $X$  is an ind-scheme  $X$  together with a map of functors  $X \rightarrow S$ . If  $S = \text{Spec}(R)$  is affine, we also use the term  $R$ -ind-scheme.

**Definition A.1.** An  $S$ -ind-scheme  $X$  is called ind-flat if there exists a presentation  $X = \text{colim} X_i$  where the  $X_i$  are flat  $S$ -schemes via the map  $X_i \subset X \rightarrow S$ .

Now let  $R$  be a Dedekind ring with fraction field  $K$ . For an  $R$ -scheme  $X$ , the flat closure  $X^{\text{fl}}$  is the scheme theoretic image of the inclusion  $X_K \subset X$ . Since  $X_K \subset X$  is a quasi-compact map, the scheme theoretic image commutes with localization [StaPro, 01R8], and the closed immersion  $X^{\text{fl}} \hookrightarrow X$  is an isomorphism on generic fibers. Then the scheme  $X$  is flat over  $R$  if and only if the map  $X^{\text{fl}} \hookrightarrow X$  is an isomorphism if and only if  $\mathcal{O}_X$  is  $R$ -torsion free. If  $\varphi: X \rightarrow Y$  is a map of  $R$ -schemes, then there is a map  $\varphi^{\text{fl}}: X^{\text{fl}} \rightarrow Y^{\text{fl}}$  with  $\varphi_K = (\varphi^{\text{fl}})_K$ .

**Lemma A.2.** Let  $R$  be a Dedekind ring with fraction field  $K$ . For an  $R$ -ind-scheme  $X$  the following conditions are equivalent:

- i)  $X$  is ind-flat;
- ii) for every presentation  $X = \text{colim} X_i$ , the map  $\text{colim} X_i^{\text{fl}} \hookrightarrow \text{colim} X_i$  is an isomorphism;
- iii) every ind-(closed immersion)  $Y \hookrightarrow X$  which induces  $Y_K \cong X_K$  is an isomorphism.

*Proof.* The implications iii)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  i) are immediate, and we prove i)  $\Rightarrow$  iii).

Let  $X = \text{colim} X_i$  be a flat presentation. Let  $Y \hookrightarrow X$  be an ind-(closed immersion) which induces  $Y_K \cong X_K$ . For each  $i$ , the induced map  $Y \cap X_i \hookrightarrow X_i$  is an ind-(closed immersion)



which induces  $(Y \cap X_i)_K \cong (X_i)_K$ . We want to show that  $Y \cap X_i \cong X_i$ . Replacing  $X$  by  $X_i$ , we may assume that  $X$  is a flat  $R$ -scheme. Covering  $X$  by open affine schemes, we may further assume that  $X$  is affine, hence quasi-compact. Now let  $Y = \operatorname{colim} Y_j$  be any presentation. We will show that  $Y_j \cong X$  for  $j \gg 0$ . As  $Y_K \cong X_K$  on generic fibers and  $X_K$  is quasi-compact, there is a  $j$  with  $X_K \hookrightarrow Y_{j,K}$  so that  $Y_{j,K} \cong X_K$ . As  $Y_j \hookrightarrow X$  is a closed immersion and  $X$  is  $R$ -flat, we must have  $Y_j \cong X$ .  $\square$

**Definition A.3.** For an ind-scheme  $X = \operatorname{colim}_i X_i$ , the *flat closure*  $X^{\text{fl}}$  is the ind-scheme  $X^{\text{fl}} = \operatorname{colim}_i X_i^{\text{fl}}$ .

In view of Lemma A.2, the ind-(closed immersion)  $X^{\text{fl}} \subset X$  is well-defined independently of the choice of a presentation. Also a map of  $R$ -ind-schemes  $X \rightarrow Y$  induces a map  $X^{\text{fl}} \rightarrow Y^{\text{fl}}$  on the flat closures.

## APPENDIX B. FROBENIUS IND-SPLITTING

Here we revisit the notion and prove several basic lemmas regarding the techniques of Frobenius splitting in the realm of ind-schemes.

**Definition B.1.** An  $\mathbb{F}_p$ -scheme  $X$  is said to be (Frobenius) split if the morphism of  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{O}_X \rightarrow F_*\mathcal{O}_X$  admits a section  $s$ , where  $F$  denotes the absolute Frobenius morphism. A closed subscheme  $Y$  of  $X$  is said to be compatibly split if the splitting of  $X$  descends to that of  $Y$ . Finally, we say that an ind-scheme  $X$  is ind-split (resp. compatibly ind-split with an ind-closed sub-ind-scheme) if it admits a presentation  $X = \operatorname{colim} X_i$  (resp. as well as  $Y = \operatorname{colim} Y_i$ ) by simultaneously compatibly split schemes.

**Lemma B.2.** *Given a collection  $X_i$  of simultaneously compatibly ind-split ind-closed sub-ind-schemes  $X$ , finite intersections and unions are also simultaneously compatibly split.*

*Proof.* This is known in the case of schemes, cf. [BK05, Prop 1.2.1], and it generalizes to that of ind-schemes by taking appropriate presentations.  $\square$

Thanks to [BD96, 7.11.3], we have a good notion of sheaves of modules on ind-schemes, namely obtained as a family of compatible  $\mathcal{O}_{X_i}$ -modules. In particular, we have a good cohomology theory which, in the ind-proper case, satisfies the identities  $H^i(X, \mathcal{M}) := \lim H^i(X_i, \mathcal{M}_i)$  for  $i \geq 0$  (as cohomology groups are finite-dimensional and thus  $\lim^1$  must vanish).

**Lemma B.3.** *Let  $Y \subseteq X$  be compatibly ind-split ind-proper ind-schemes. If  $\mathcal{L}$  is an ample line bundle on  $X$ , then  $H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{L})$  is surjective and  $H^i(X, \mathcal{L}) = H^i(Y, \mathcal{L}) = H^1(X, \mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{L}) = 0$  for every  $i > 0$ , where  $\mathcal{I}_Y$  denotes the ideal sheaf defining  $Y$ .*

*Proof.* At finite level, this is just [BK05, Thm. 1.2.8] and it follows in general by taking projective limits.  $\square$

The next results study the implications of certain splittings for the graded algebra  $H^0(X, \mathcal{L}^\bullet)$ , going back to Ramanathan [Ra87] but we mostly follow the treatment of [BK05, 1.5].

**Proposition B.4.** *Consider an inclusion  $Y \subseteq X$  of compatibly ind-split ind-proper ind-schemes and assume the diagonal  $\Delta_X$  is compatibly ind-split with  $X \times X$ . Given an ample line bundle  $\mathcal{L}$  on  $X$ , the graded  $k$ -algebra  $H^0(Y, \mathcal{L}^\bullet)$  is generated by its degree one elements and  $\mathcal{L}$  defines a projective embedding of  $Y$  into  $\mathbb{P}(H^0(Y, \mathcal{L})^\vee)$ .*

*Proof.* Observe that due to the previous lemma and our hypothesis, we get surjectivity of the map  $H^0(X, \mathcal{L}^n) \otimes H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{L}^{n+1})$  which implies the claim as long as  $Y = X$ , by induction on  $n$ . If  $Y$  is not necessarily equal to  $X$ , we still have an epimorphism  $H^0(X, \mathcal{L}^n) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{L}^n)$ . The projective embedding follows by taking the colimit of the resulting closed immersions for a compatibly split presentation.  $\square$

Let us recall some terminology regarding commutative graded algebras and modules (compare with [BK05, Def. 1.5.5]).

**Definition B.5.** Let  $A_\bullet$  be a commutative  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graded  $k$ -algebra.  $A$  is called quadratic if  $A_0 = k$ , it is generated by  $A_1$  and the kernel  $K_\bullet$  of the induced map  $S^\bullet A_1 \rightarrow A_\bullet$  is generated by  $K_2$ . An  $A_\bullet$ -graded module  $M_\bullet$  is said to be quadratic if it is generated by  $M_0$  and the kernel  $K_\bullet$  of  $M_0 \otimes A_\bullet \rightarrow M_\bullet$  is generated by  $K_1$ .

The next result subsumes [Ra87, Prop. 2.7 and 2.19] and is the ind-scheme version of [BK05, Prop. 1.5.8].

**Proposition B.6.** *Let  $Z \subseteq Y \subseteq X$  be simultaneously compatible ind-split ind-proper ind-schemes and  $\mathcal{L}$  be an ample line bundle on  $X$ . Suppose moreover that  $\Delta_{X^2} \times X$ ,  $X \times \Delta_{X^2}$ ,  $Y \times \Delta_{X^2}$  and  $Z \times \Delta_{X^2}$  are simultaneously compatibly ind-split in  $X^3$ . Then  $H^0(Y, \mathcal{L}^\bullet)$  is a quadratic graded algebra and  $H^0(Z, \mathcal{L}^\bullet)$  is a quadratic graded module over  $H^0(Y, \mathcal{L}^\bullet)$ .*

In geometric terms, this tells us that the projective embeddings of  $Z$ ,  $Y$  and  $X$  determined by  $\mathcal{L}$  are given by quadratic homogeneous polynomials and the transition morphisms are defined by linear ones.

*Proof.* If we intersect the given ind-schemes with  $X \times \Delta_{X^2}$ , the conditions of Prop. B.4 are satisfied and hence the graded algebras in the statement are generated by its degree 1 elements. To show that  $A_\bullet := H^0(X, \mathcal{L}^\bullet)$  is quadratic, we consider the Mayer-Vietoris short exact sequence  $0 \rightarrow \mathcal{I}_{\Delta_{X^2} \times X \cup X \times \Delta_{X^2}} \rightarrow \mathcal{I}_{\Delta_{X^2} \times X} \oplus \mathcal{I}_{X \times \Delta_{X^2}} \rightarrow \mathcal{I}_{\Delta_{X^3}} \rightarrow 0$ , where the ideals of definition are wrt.  $X^3$ , and we tensor it with  $\mathcal{L}^{n_1} \boxtimes \mathcal{L}^{n_2} \boxtimes \mathcal{L}^{n_3}$ . By taking cohomology, we arrive at surjectivity of  $K_{n_1, n_2} \otimes A_{n_3} \oplus A_{n_1} \oplus K_{n_2, n_3} \rightarrow K_{n_1, n_2, n_3}$ , which implies that  $A_\bullet$  is quadratic by [BK05, Lem. 1.5.7]. In order to show that  $B_\bullet := H^0(Y, \mathcal{L}^\bullet)$  and  $C_\bullet := H^0(Z, \mathcal{L}^\bullet)$  are quadratic algebras, we repeat the same strategy with the couple  $(\Delta_{X^2} \times X, Y \times \Delta_{X^2})$  which intersects in  $\Delta_{Y^3}$  and use surjectivity of the transition maps  $A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet$  to derive the same formulae for  $B_\bullet$  and  $C_\bullet$ . By [BK05, Rmk. 1.5.6 (iii)] every transition map defines a graded quadratic module structure.  $\square$

APPENDIX C. THE QUASI-MINUSCULE SCHUBERT SCHEME FOR  $\mathrm{PGL}_2$ 

Let  $S_{\mathrm{sc}}$  (resp.  $S_{\mathrm{ad}}$ ) be the quasi-minuscule Schubert variety in  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_2}$  (resp.  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{PGL}_2}$ ) over  $\mathbb{Z}$ . The canonical map  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_2} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{PGL}_2}$  induces a scheme theoretically surjective morphism  $S_{\mathrm{sc}} \rightarrow S_{\mathrm{ad}}$ , and hence a morphism

$$\mathrm{Spec} A := L^{--}\mathrm{SL}_2 \cap S_{\mathrm{sc}} \rightarrow L^{--}\mathrm{PGL}_2 \cap S_{\mathrm{ad}} =: \mathrm{Spec} B,$$

which identifies  $B$  with an integral subdomain of  $A$ . The aim of this section is to prove the following result.

**Proposition C.1.** *There is an isomorphism  $A \cong \mathbb{Z}[x, y, z]/(z^2 + xy)$  under which  $B$  is the subring generated by the elements  $x, y, 2z, xz, yz$ .*

**Corollary C.2.** *The ring  $B \otimes \mathbb{F}_2$  is not reduced. Its reduction identifies with the subring of  $A \otimes \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2[x, y, z]/(z^2 + xy)$  generated by  $x, y, xz, yz$ .*

*Proof.* The element  $u = 2z$  is not 0 in  $B \otimes \mathbb{F}_2$  because  $z \notin B$ . But its square  $u^2 = 4z^2 = -4xy$  is 0 in  $B \otimes \mathbb{F}_2$  because  $x, y \in B$ . This shows that  $B \otimes \mathbb{F}_2$  is not reduced. Clearly, the image of  $B \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow A \otimes \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2[x, y, z]/(z^2 + xy)$  is the subring generated by  $x, y, xz, yz$ . The kernel of this map is nilpotent because the spectra of all rings are irreducible of Krull dimension 2. Hence, the ring  $(B \otimes \mathbb{F}_2)_{\mathrm{red}}$  identifies with the desired subring of the integral domain  $\mathbb{F}_2[x, y, z]/(z^2 + xy)$ .  $\square$

This corollary shows that the special fiber  $S_{\mathrm{ad}} \otimes \mathbb{F}_2$  is not reduced. More precisely, the reduction  $(S_{\mathrm{ad}} \otimes \mathbb{F}_2)_{\mathrm{red}}$  is the quasi-minuscule Schubert variety for  $\mathrm{PGL}_2$  over  $\mathbb{F}_2$ , but the inclusion  $(S_{\mathrm{ad}} \otimes \mathbb{F}_2)_{\mathrm{red}} \subset S_{\mathrm{ad}} \otimes \mathbb{F}_2$  is strict.

To prove Proposition C.1, we first calculate the ring  $A$ . For this, we consider the Lie algebra  $\mathfrak{sl}_2$  of  $\mathrm{SL}_2$  over  $\mathbb{Z}$ . The nilpotent cone  $\mathfrak{n}$  in  $\mathfrak{sl}_2$  is the closed subscheme of matrices whose determinant is zero. We choose the isomorphism  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^3 \cong \mathfrak{sl}_2$  given by the map

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} z & x \\ y & -z \end{pmatrix},$$

so that  $\{z^2 + xy = 0\} \cong \mathfrak{n}$  as schemes over  $\mathbb{Z}$ .

**Lemma C.3.** *Let  $e \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{Z})$  denote the base point. The map  $\mathfrak{n} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_2}$ ,  $X \mapsto (1 + t^{-1}X) \cdot e$  induces an isomorphism  $\mathfrak{n} \cong L^{--}\mathrm{SL}_2 \cap S_{\mathrm{sc}}$ , that is, an isomorphism  $\mathbb{Z}[x, y, z]/(z^2 + xy) \cong A$  on coordinate rings.*

*Proof.* The map  $\mathfrak{n} \rightarrow L^{--}\mathrm{SL}_2$ ,  $X \mapsto 1 + t^{-1}X$  is well-defined and a closed immersion. It induces an isomorphism onto the closed subscheme  $(L^{--}\mathrm{SL}_2)_{[-1,1]}$  of  $L^{--}\mathrm{SL}_2$  of all matrices  $A = 1 + t^{-1}A_1 + t^{-2}A_2 + \dots$  such that  $A_i = 0$  and  $(A^{-1})_i = 0$  for  $i \geq 2$ . We now regard  $L^{--}\mathrm{SL}_2$  via the map  $g \mapsto g \cdot e$  as an open sub-ind-scheme of  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_2}$ , see [Fal03, Lem. 2] (cf. Lemma 3.5). It remains to show  $L^{--}\mathrm{SL}_2 \cap S_{\mathrm{sc}} = (L^{--}\mathrm{SL}_2)_{[-1,1]}$  as subschemes of  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_2}$ .

Recall the lattice interpretation of the affine Grassmannian, see [Fal03, p. 42] (cf. [Go01, p. 697]). For any ring  $R$ , the  $R$ -valued points of  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_2}$  are given by  $R[[t]]$ -lattices  $\Lambda \subset R((t))^2$

such that  $\det \Lambda = R[[t]]$  in  $R((t))$ . We denote by  $\Lambda_{0,R} = R[[t]]^2$  the standard lattice which corresponds to the base point. Let  $\text{Gr}_{\text{SL}_2,[-1,1]}$  denote the closed subscheme of  $\text{Gr}_{\text{SL}_2}$  of  $R[[t]]$ -lattices  $\Lambda$  such that  $t\Lambda_{0,R} \subset \Lambda \subset t^{-1}\Lambda_{0,R}$ . A direct computation on  $R$ -valued points shows  $(L^-\text{SL}_2)_{[-1,1]} = L^-\text{SL}_2 \cap \text{Gr}_{\text{SL}_2,[-1,1]}$ . Recall that  $S_{\text{sc}}$  is defined as the scheme theoretic closure of the orbit map  $L^+\text{SL}_2 \rightarrow \text{Gr}_{\text{SL}_2}$ ,  $g \mapsto g \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \cdot e$ . We see that  $S_{\text{sc}} \subset \text{Gr}_{\text{SL}_2,[-1,1]}$ , and hence that  $L^-\text{SL}_2 \cap S_{\text{sc}}$  is a closed subscheme of  $(L^-\text{SL}_2)_{[-1,1]}$ . Since both are integral of Krull dimension  $2 + \dim \mathbb{Z} = 3$ , they must be equal.  $\square$

In order to calculate the subring  $B$  of  $A \cong \mathbb{Z}[x, y, z]/(z^2 + xy)$ , we consider the adjoint representation of  $\text{SL}_2$ : The map  $g \mapsto (x \mapsto gxg^{-1})$  induces a morphism of  $\mathbb{Z}$ -group schemes  $\text{SL}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{sl}_2) = \text{GL}_3$  given by

$$(C.1) \quad \text{ad}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 2bc & -ac & bd \\ -2ab & a^2 & -b^2 \\ 2cd & -c^2 & d^2 \end{pmatrix},$$

where we use the ordered basis  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  of  $\mathfrak{sl}_2$ . This map induces a closed immersion  $\text{PGL}_2 \hookrightarrow \text{SL}_3$  of reductive  $\mathbb{Z}$ -group schemes, and hence a closed immersion  $\text{Gr}_{\text{PGL}_2} \hookrightarrow \text{Gr}_{\text{SL}_3}$  of affine Grassmannians over  $\mathbb{Z}$ . Therefore, the image of  $S_{\text{ad}}$  in  $\text{Gr}_{\text{SL}_3}$  identifies with the scheme theoretic closure of  $S_{\text{sc}}$  under  $\text{ad}: \text{Gr}_{\text{SL}_2} \rightarrow \text{Gr}_{\text{SL}_3}$ .

*Proof of Proposition C.1.* We identify  $A = \mathbb{Z}[x, y, z]/(z^2 + xy)$  under the isomorphism of Lemma C.3. Combining this with (C.1) gives

$$\text{ad}: \begin{pmatrix} 1 + t^{-1}z & t^{-1}x \\ t^{-1}y & 1 - t^{-1}z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 2t^{-2}xy & -(1 + t^{-1}z)t^{-1}y & t^{-1}x(1 - t^{-1}z) \\ -2(1 + t^{-1}z)t^{-1}x & (1 + t^{-1}z)^2 & -t^{-2}x^2 \\ 2t^{-1}y(1 - t^{-1}z) & -t^{-2}y^2 & (1 - t^{-1}z)^2 \end{pmatrix}.$$

As this formula holds on  $R$ -valued points, the ring  $B$  is precisely the subring of  $A$  generated by the monomials in  $x, y, z$  appearing as coefficients of  $t^i$  for  $i = -1, -2$ . An inspection of this matrix using  $z^2 + xy = 0$  and  $\mathbb{Z}^\times = \pm 1$  shows that  $B = \mathbb{Z}[x, y, 2z, xz, yz]$  as a subring of  $A$ .  $\square$

## REFERENCES

- [I] *Théorie de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs.*
- [II] *Grassmanniennes affines tordues sur les entiers.*
- [IV] *Local models: between two worlds.*
- [BD96] A. Beilinson & V. Drinfeld: *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*, preprint (1999) available at <http://www.math.utexas.edu/users/benzvi/Langlands.html>.
- [BH19] M. Besson & J. Hong: *A combinatorial study of affine Schubert varieties in the affine Grassmannian*, preprint, <https://arxiv.org/pdf/1906.09341.pdf>.
- [BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud: *Néron models*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (3) 21, Berlin, New York: Springer-Verlag.

- [BK05] M. Brion & S. Kumar: *Frobenius Splitting Methods in Geometry and Representation Theory*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (2005).
- [BT84] F. Bruhat & J. Tits: *Groupes réductifs sur un corps local II. Schéma en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **60** (1984), 197-376.
- [Ch43] C. Chevalley: *On the theory of local rings*, Ann. of Math. (2) **44** (1943), 690-708.
- [Co14] B. Conrad: *Reductive group schemes*, in *autour des schémas en groupes*, Group Schemes, A celebration of SGA3, Volume I, Panoramas et synthèses **42-43** (2014).
- [CGP15] B. Conrad, O. Gabber, G. Prasad: *Pseudo-reductive groups*, New Mathematical Monographs 26. Cambridge: Cambridge University Press (ISBN 978-1-107-08723-1/hbk; 978-1-316-09243-9/ebook). xxiv, 665 p. (2015).
- [DG70] M. Demazure & P. Gabriel: *Groupes algébriques. Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris; North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1970).
- [dHL18] M. A. de Cataldo & T. J. Haines, and L. Li: *Frobenius semisimplicity for convolution morphisms*, Math. Zeitschrift **289** (2018), 119-169.
- [EGAIV4] A. Grothendieck: *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, **32** (1967), 5-361.
- [Fal03] G. Faltings: *Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **5** (2003), no. 1, 41-68.
- [Go01] U. Görtz: *On the flatness of models of certain Shimura varieties of PEL-type.*, Math. Ann. **321** (2001), 689-727.
- [HH17] T. J. Haines & X. He,: *Vertexwise criteria for admissibility of alcoves*, Amer. J. Math. vol. **139**, no. 3 (2017), 769-784.
- [HR18a] T. J. Haines & T. Richarz: *The test function conjecture for parahoric local models*, preprint (2018), arXiv:1801.07094, to appear in Journal of the AMS.
- [HR18b] T. J. Haines & T. Richarz: *Smoothness of Schubert varieties in twisted affine Grassmannians*, preprint (2018), arXiv:1809.08464, to appear in Duke Math. Journal.
- [HR19] T. J. Haines & T. Richarz: *Normality and Cohen-Macaulayness of parahoric local models*, preprint (2019), arXiv:1903.10585.
- [Ja07] J. Jantzen: *Representations of algebraic groups*, Amer. Math. Soc. (2007), 576 pp.
- [Kac90] V. Kac: *Infinite dimensional Lie algebras*, third edition, Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [Ku96] S. Kumar: *The nil Hecke ring and singularity of Schubert varieties*, Invent. Math. **123** (1996), no. 3, 471-506.
- [Lev16] B. Levin: *Local models for Weil-restricted groups*, Compositio Math. **152** (2016), 2563-2601.
- [Li98] P. Littelmann: *Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac-Moody algebras*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 551-567.
- [MOV05] A. Malkin, V. Ostrik & M. Vybornov, *The minimal degeneration singularities in the affine Grassmannians*, Duke Math. J. **126** (2005), 233-249.
- [Ma88] O. Mathieu: *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales*, Astérisque **159-160** (1988).
- [Ma89] O. Mathieu: *Construction d'un groupe de Kac-Moody et applications*, Compositio Math. **69** (1989), 37-60.
- [PR08] G. Pappas & M. Rapoport: *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. Math. **219** (2008), 118-198.
- [PZ13] G. Pappas & X. Zhu: *Local models of Shimura varieties and a conjecture of Kottwitz*, Invent. Math. **194** (2013), 147-254.

- [Po94] P. Polo: *On Zariski tangent spaces of Schubert varieties, and a proof of a conjecture of Deodhar*, Indagationes Mathematicae Volume 5, Issue 4, 1994, Pages 483-493.
- [Ra87] A. Ramanathan: *Equations defining Schubert varieties and Frobenius splittings of diagonals*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 65 (1987), p. 61-90.
- [Ra05] M. Rapoport: *A guide to the reduction modulo  $p$  of Shimura varieties*, Astérisque No. **298** (2005), 271-318.
- [Ri19] T. Richarz: *Spaces with  $\mathbb{G}_m$ -action, hyperbolic localization and nearby cycles*, J. Algebraic Geom. **28** (2019), 251-289.
- [RS20] T. Richarz & J. Scholbach: *The intersection motive of the moduli stack of shtukas*, Forum of Mathematics, Sigma **8** (2020), 1-99.
- [SW20] P. Scholze & J. Weinstein: *Berkeley lectures on  $p$ -adic geometry*, Ann. of Math. Studies 207 (2020).
- [StaPro] Stacks Project, Authors of the stacks project, available at <http://stacks.math.columbia.edu/>.
- [Ti92] J. Tits: *Twin buildings and groups of Kac-Moody type*, Groups, combinatorics and Geometry, Durham 1990, London Math. Soc. Lect. Series 165, Cambridge University Press (1992), 249-286.
- [Zhu14] X. Zhu: *On the coherence conjecture of Pappas and Rapoport*, Ann. of Math. **180** (2014), 1-85.
- [Zhu16] X. Zhu: *An introduction to affine Grassmannians and the geometric Satake equivalence*, preprint (2016) arXiv:1603.05593.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF MARYLAND, COLLEGE PARK, MD 20742-4015, DC, USA

*Email address:* `tjh@math.umd.edu`

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT BONN, ENDENICHER ALLEE 60, 53115 BONN, DEUTSCHLAND

*Email address:* `lourenco@math.uni-bonn.de`

TECHNICAL UNIVERSITY OF DARMSTADT, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, 64289 DARMSTADT, GERMANY

*Email address:* `richarz@mathematik.tu-darmstadt.de`

## Chapitre 4

### **Local models : between two worlds**



# LOCAL MODELS: BETWEEN TWO WORLDS

JOÃO NUNO PEREIRA LOURENÇO

ABSTRACT. The aim of this short article is to explain some improvements on previous results. More precisely, we show the following: Bruhat-Tits theory for quasi-reductive groups is valid without the assumption of a perfect residue field; wildly ramified affine Grassmannians attached to quasi-split twisted groups are now constructed in full generality over the cyclotomic integers, including unitary groups of odd dimension; we introduce weakly normal local models for Shimura varieties of abelian type in group-theoretic terms.

## CONTENTS

1. Introduction	1
2. Classification of pseudo-reductive groups	2
3. Buildings and BT-group models	4
3.1. Valued root data	4
3.2. Integral group models	5
3.3. Bruhat-Tits group schemes over $\mathcal{O}[t]$	8
4. Affine Grassmannians	14
4.1. Power series affine Grassmannians	14
4.2. $p$ -adic affine Grassmannians	16
References	23

## 1. INTRODUCTION

As mentioned in the abstract, the aim of this paper is to revise some parts of the author's cumulative dissertation without having to undertake major changes to the relevant preprints. In the following, we list and explain the most important contributions of the present paper.

In [I] we introduced Bruhat-Tits theory for quasi-reductive groups  $G$  over an excellent, Henselian and residually perfect discretely valued non-archimedean field  $K$ . The perfectness assumption on the residue field is now eliminated; we must consequently assume that  $G$  is  $K^{\text{nr}}$ -quasi-split. The reason for this limitation had to do with the complexity of the classification of pseudo-reductive groups in char. 2 when  $[K : K^2] > 2$ , so that we first needed to carefully read [CP16]. Furthermore, we show how some arguments of [I] can be simplified by tracing all constructions in the quasi-split case back to reductive groups, using the map  $i_G : G \rightarrow R_{K'/K}G'$ , where  $K'$  is the field of definition of the geometric unipotent radical of  $G$  and  $G'$  is the reductive quotient over  $K'$  (see prop. 3.1 and 3.4). In fact, such a reduction step works always, except when it comes to constructing the connected Néron model  $\mathcal{Z}$  (resp. the models  $\mathcal{U}_{a,\Omega}$ ) of the centralizer  $Z$  (resp. the root groups  $U_a$ ).

Subsequently, one deals with certain families of BT-group schemes in varying equicharacteristics, which go back to the work [PR08], [PZ13] by Pappas, Rapoport and/or Zhu and [II] by the author, the last of which offers for the first time a sensible construction

in wild characteristics. More precisely, we construct a natural smooth, affine, and fiber-wise connected group scheme  $\mathcal{G}_\Omega$  over the polynomial ring  $\mathbb{Z}[\zeta_e, t]$ , whose generic fiber is any  $\mathbb{Q}(\zeta_e, t^{1/e})$ -split, quasi-split, reductive connected  $\mathbb{Q}(\zeta_e, t)$ -group  $G$  and its specializations along  $\mathbb{Z}[\zeta_e][t] \rightarrow \mathbb{F}_p(\zeta_e)[[t]]$  are BT-group schemes, which are determined combinatorially by a non-empty bounded subset  $\Omega$  of an appartement of the building of  $G$  (see Goal 3.7, Thms. 3.10 and 3.12). In order to recognize the relative significance of this construction, one should remember the hypotheses under which we worked in [II]: the base ring was  $\mathbb{Z}[t]$ , the natural number  $e$  was either 2 or 3, and the groups  $G$  had in addition a simply connected derived group and an induced residually split maximal torus. That in the present work we use  $e$ -cyclotomic integers  $\mathbb{Z}[\zeta_e]$  as coefficients and not simply the integers  $\mathbb{Z}$  is due to the need that the formation of Néron models  $\mathcal{Z}$  commutes with base change along coefficients (see Thm. 3.8). The decisive new insight is a new approach to prove the affinity of  $\mathcal{Z}$  or  $\mathcal{G}_\Omega$  (see Thm. 3.12): over  $\mathbb{Z}[\zeta_e, t^{\pm 1}]$  this property is propagated by a rotation operation  $t \mapsto a^e t$ , which preserves  $\mathcal{G}_\Omega$  up to isomorphism, cf. Lemma 3.11; finally, it is shown that the smooth affine hull of  $\mathcal{G}_\Omega$  has no additional geometrical connected component, because the Iwahori-Weyl groups with coefficients in varying integral domains are constant, cf. Prop. 3.10.

As we investigated the validity of the normality theorems (always under the assumption  $G^{\text{der}} = G^{\text{sc}}$ ) in this new framework, it became clear that one step of Faltings' approach (see [Fal03]) was insufficient for odd-dimensional unitary groups in residue characteristic 2, namely the key lemma [II, lem. 3.3.]. Roughly speaking, the statement of this lemma is linear, whereas for unitary groups of odd dimension the group law features quadratic terms. Our solution is based on the behaviour of so-called distributions (i.e. higher differential operators) of the affine flag variety, which turns out to be satisfying in this case: on the one hand, distributions are generated by those of the root groups; on the other hand, they allow one to identify the integral complete local ring within the rational one (see the proof of Thm. 4.1).

In the end, we deal with the  $p$ -adic affine Grassmannians of Scholze by considerably improving the fundamentals. First, the  $v$ -sheaf functor restricted to flat adic spaces topologically of finite type over  $\mathbb{Z}_p$  can be identified with the weak normalization functor, cf. Thm. 4.6, up to a fully faithful embedding. Secondly, we explain the details of  $v$ -sheaf closures, which originate from the collaboration [APLR], whose reproduction here was kindly permitted by the co-authors (see Prop. 4.11, 4.13 and Cor. 4.14). Thirdly, we explain the state of the art concerning [SW20, Conj. 21.4.1.] by introducing and motivating four new smaller and more precise conjectures (see Conj. 4.18, 4.19, 4.20 and 4.21), which are either completely or almost completely solved for Shimura varieties of abelian type (see Prop. 4.22, 4.23 and Cor. 4.24).

## 2. CLASSIFICATION OF PSEUDO-REDUCTIVE GROUPS

Pseudo-reductive groups over a field  $k$  form a class of smooth, affine and connected  $k$ -algebraic groups, which generalize the class of connected reductive groups over non-perfect fields. More precisely, a smooth, affine, and connected  $k$ -group  $G$  is called pseudo-reductive

(resp. quasi-reductive) if the  $k$ -unipotent radical  $R_{u,k}G$  (resp. the  $k$ -split unipotent radical  $R_{ud,k}G$ ) is zero. The goal of this chapter is to introduce the complete classification theorem of these groups according to [CP16].

As usual, the typically random commutative pseudo-reductive groups are left alone, so that the classification deals mainly with pseudo-semisimple pseudo-reductive groups. An helpful substitute for simply connected covers is the following general fact (see [CP16, Thm. 5.1.4.]).

**Proposition 2.1** (Conrad-Prasad). *Let  $G$  be a perfect pseudo-reductive group. There is a unique central extension  $1 \rightarrow Z \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$ , such that  $\tilde{G}$  is a pseudo-semisimple pseudo-reductive group with simply connected geometric reductive quotient and whose kernel has trivial unipotent part.*

Central extensions whose kernels do not contain a non-trivial unipotent group are called tame. The above group  $\tilde{G}$  is called the universal tame cover of  $G$ . If  $G$  is standard, it is easy to see that  $\tilde{G}$  corresponds to the restriction of scalars of its geometric reductive quotient.

Recall the morphism  $i_G : G \rightarrow R_{k'/k}G'$  played an essential role already in [CGP15]. Here,  $k'$  is used to denote the field of definition of the geometric unipotent radical of  $G$  and  $G' = G_{k'}^{\text{red}}$  is the largest reductive quotient of  $G$  over  $k'$ . The kernel of  $i_G$  is very rarely smooth and has a canonical central subgroup  $C_G$  given by the intersection with any Cartan subgroup  $C$  of  $G$  (see [CGP15, Prop. 9.4.2]).

**Definition 2.2** (Conrad-Gabber-Prasad, Conrad-Prasad). A pseudo-reductive group  $G$  is called of minimal type if  $C_G$  is trivial. More generally, it is said to be locally of minimal type if the universal tame cover  $\tilde{G}^{\text{der}}$  of its derived group is of minimal type.

In the remainder of this section, we describe in detail all non-standard, quasi-split, absolutely pseudo-simple and universally tame pseudo-reductive  $k$ -groups  $G = \tilde{G}^{\text{prmt,der}}$  of minimal type. Since the corresponding Dynkin diagrams of the absolute root system  $\tilde{\Phi}$  have no automorphisms,  $G$  is even pseudo-split. We let  $K/k$  be a finite, purely inseparable field extension containing the field of definition  $k'$  of the geometric unipotent radical. Next we describe  $G$  relatively to the natural morphism  $i_G : G \rightarrow R_{K/k}G'$ :

Type  $A_1 = B_1 = C_1$ ,  $p = 2$ . Let  $V$  be a non-zero  $kK^2$ -subspace of  $K$ . The root groups of the pseudo-reductive group  $A_{1,V,K/k} \subseteq R_{K/k}\text{SL}_2$  with respect to the diagonal torus are given by  $\underline{V} \subseteq \underline{K}$ , cf. [CGP15, Prop. 9.1.4]. It depends only on  $V$  up to  $K^\times$ -homothety.

Type  $B_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $p = 2$ . The root groups of the pseudo-reductive group  $B_{n,V,K/k} \subseteq R_{K/k}\text{Spin}_{2n+1}$  relative to the diagonal torus are given by  $\underline{V} \subseteq \underline{K}$  for each short root  $a \in \Phi_{<}$  and  $\underline{k} \subseteq \underline{K}$  for each long root  $a \in \Phi_{>}$ , cf. [CP16, Prop. 8.2.4]. It only depends on  $V$  up to  $K^\times$ -homothety.

Type  $C_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $p = 2$ . The root groups of the pseudo-reductive group  $C_{n,V,K/k} \subseteq R_{K/k}\text{Sp}_{2n}$  w.r.t. the diagonal torus are given by  $\underline{K}$  for each short root  $a \in \Phi_{<}$  and  $\underline{V} \subseteq \underline{K}$  for each long root  $a \in \Phi_{>}$ , cf. [CP16, Prop. 8.2.4]. It only depends on  $V$  up to  $K^\times$ -homothety.

Type  $B_2 = C_2$ ,  $p = 2$ . Let  $K := K_{<}/K_{>}/k$  be a tower of finite field extensions,  $V_{>} \subseteq K_{>}$  a  $kK^2$ -subspace and  $V_{<} \subseteq K_{<}$  a  $K_{>}K^2$ -subspace. The root groups of the pseudo-reductive group  $B_{2,V_{<},V_{>},K_{<}/K_{>}/k} = C_{2,V_{>},V_{<},K_{<}/K_{>}/k} \subseteq R_{K_{<}/k} \mathrm{Sp}_4$  are given by  $\underline{V}_{<}$  for  $a \in \Phi_{<}$  and  $\underline{V}_{>}$  for  $a \in \Phi_{>}$  (see [CP16, Cor. 8.3.8]). It only depends on  $(V_{<}, V_{>})$  up to  $(K^\times, K_{>}^\times)$ -homothety.

Type  $F_4$ ,  $p = 2$ . The root groups of the pseudo-reductive group  $F_{4,K/k} \subseteq R_{K/k} G'$  are given by  $\underline{K}$  for  $a \in \Phi_{<}$  or  $\underline{k}$  for  $a \in \Phi_{>}$ .

Type  $G_2$ ,  $p = 3$ . The root groups of the pseudo-reductive group  $G_{2,K/k} \subseteq R_{K/k} G'$  are given by  $\underline{K}$  for  $a \in \Phi_{<}$  or  $\underline{k}$  for  $a \in \Phi_{>}$ .

Type  $BC_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $p = 2$ . Let  $V'$  be a  $kK^2$ -subspace and  $V^{(2)}$  a finite dimensional  $K^2$ -subspace of  $K$  whose intersection is zero. Furthermore, we consider  $V := V^{(2)} \otimes_{K^2} K$ ,  $V_0 := V' + kV^{(2)}$  and the square map  $q : V \rightarrow V^2$  induced by the Frobenius of  $K$ . The multiplicable root groups of  $BC_{n,V^{(2)},V',K/k}$  are isomorphic to  $\underline{V} \times \underline{V}'$  and the composition of their inclusion with the epimorphism  $BC_{n,V^{(2)},V',K/k} \rightarrow C_{n,V_0,K/k}$  factors over  $q \times 1; \underline{V} \times \underline{V}' \rightarrow \underline{V}_0$ , cf. [CGP15, Thm. 9.8.1]. This group depends only on  $(V', V' + V^{(2)})$  up to simultaneous  $K^\times$ -homothety (see [CGP15, Prop. 9.7.10]).

Type  $BC_2$ ,  $p = 2$ . Apart from the vector spaces  $V'$  and  $V^{(2)}$ , we need another  $K_0 K^2$ -subspace  $V'' \subseteq K$ , where  $K_0 := k\langle V_0 \rangle := k[V_0/V_0]$ . Then the group  $BC_{2,V^{(2)},V',V'',K/k}$  is constructed in a similar way over  $C_{2,V_0,V'',K/K_0/k}$  and it depends only on  $((V', V' + V^{(2)}), V'')$  up to  $K^{\times,2}$ -homothety (see [CGP15, Prop. 9.8.4 and 9.8.9]).

Of course, the classification of all pseudo-reductive groups locally of minimal type in the sense of [CP16] requires an investigation of Galois descents of those fundamental groups explained above, for which the interested reader is referred to [CP16]. Further restriction of scalars along now separable field extensions together with products and modifications of Cartan subgroups provide the class of all generalized standard pseudo-reductive groups in the sense of Conrad-Prasad (see [CP16]).

**Theorem 2.3** (Conrad-Prasad). *Any pseudo-reductive group locally of minimal type is generalized standard.*

### 3. BUILDINGS AND BT-GROUP MODELS

**3.1. Valued root data.** Let  $(K, \omega)$  be a given Henselian discretely valued field,  $G$  a quasi-split quasi-reductive  $K$ -group and  $S$  a maximal split torus of  $G$ . In contrast to [I], we do not assume here that the residue field  $\kappa$  is perfect. By [CGP15, Rem. C.2.28], we have a structure of abstract group-theoretic root datum on  $(Z(K), U_a(K))$  in the sense of [BT72, déf. 6.1.1.]. The next step in Bruhat-Tits theory is to enrich this datum with valuations  $\varphi = (\varphi_a)$  in the sense of [BT72, déf. 6.2.1.], uniquely up to translation, whose corresponding action of  $Z(K)$  is normalized by  $\omega$  as in [BT84, déf. 4.2.8.].

**Proposition 3.1.** *The set of all  $\omega$ -normalized valuations of  $(Z(K), U_a(K))$  is a non-empty real affine space  $\mathcal{A}(G, S, K)$ , whose underlying vector space is canonically isomorphic to  $\mathbb{R}\langle \Phi^\vee \rangle \subseteq X_*(S) \otimes \mathbb{R}$ .*

*Proof.* The uniqueness of the  $\omega$ -normalized evaluations up to translations is easy to check: we only have to pin down the action of  $N(K)$  on the apartment on some generators, see [BT84, prop. 4.2.9.] and [I, cor. 3.4.]. In particular, it only remains to deduce the existence of a single valuation.

In [I, 3.1.], we provided a concrete valuation that is based on the choice of a so-called quasi-pinning (quasi-épinglage in French) as in [I, 2.4] (if  $[K : K^p] \leq p$ ). In the following, we show how such a valuation can alternatively be extracted from those of reductive groups without having to generalize the notion of quasi-pinning. For that, we may assume that  $G$  is pseudo-reductive of minimal type, since the kernel of  $G \rightarrow G^{\text{prmt}}$  lies in the centralizer  $Z$ .

Now look at the map  $i_G : G \rightarrow R_{K'/K}G'$ , where  $K'$  is the field of definition of  $R_u G_{K^{\text{alg}}}$  and  $G' = G_{K'}^{\text{red}}$  is the largest reductive quotient. The group  $\ker(i_G)$  has no non-trivial rational point, since it trivially intersects with each Cartan subgroup. Therefore, from now on, we will treat  $G(K)$  as a subgroup of  $G'(K')$ . Furthermore, we assert that  $G'$  is quasi-split and the image  $S'$  of  $S$  is a maximal split sub-torus: without loss of generality, one may pass to the universally tame group  $\tilde{G}$ , which splits in a product of standard and pseudo-split groups; in both these cases the statement is clear. By [CGP15, Thm. C.2.17] we have an inclusion chain of root systems  $\Phi_{\text{nm}} \subseteq \Phi' \subseteq \Phi$ , such that  $\Phi' \setminus \Phi_{\text{nm}}$  (resp.  $\Phi \setminus \Phi'$ ) consists of the roots  $a \in \Phi$  whose associated derived subgroup  $G^a$  is quasi-split of type  ${}^2A_2$  (resp. pseudo-split of type  $BC_1$ ).

Let  $\psi$  be any valuation of  $(Z', U'_a)$  compatible with  $\omega'$ , where  $\omega'$  is the unique extension of  $\omega$  to  $K'$ , and consider the restriction  $\varphi$  of  $\psi$  to  $G(K)$  which is given by the formula

$$\varphi_a(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_{2a}(u), & \text{if } a \in \Phi \setminus \Phi' \\ \psi_a(u), & \text{else} \end{cases}.$$

The verification of the axioms is left to the reader (compare with [I, prop. 3.2.]).  $\square$

By virtue of the above theorem, [BT72, §6 et 7] provide a building  $\mathcal{I}(G, K)$  for  $G(K)$ , i.e. a simplicial complex equipped with a natural action of  $G(K)$  together with a family of affine subcomplexes consisting of the so-called apartments  $\mathcal{A}(G, S, K)$  for each maximal split torus  $S$  of  $G$ . Occasionally the extended building  $\mathcal{I}^1(G, K) := \mathcal{I}(G, K) \times (X_K^*(G) \otimes \mathbb{R})^\vee$  (compare with the discussion in [I, 3.2.] after the [I, déf. 3.5.]) is preferable for the following reasons: the underlying vector space of  $\mathcal{A}(G, S, K)$  is canonically isomorphic to  $X_*(S) \otimes \mathbb{R}$ ; if  $K$  is excellent (i.e.  $\widehat{K}/K$  is separable), then the bornology induced by the extended building on  $G(K)$  is equal to the usual non-archimedean bornology (see [BT84, prop. et lem. 4.2.19.] and [I, prop. 4.3.]).

**3.2. Integral group models.** In this section, we construct and examine the integral group models  $\mathcal{G}_\Omega$  of the group  $G$  attached to a non-empty bounded subset  $\Omega$  of the apartment  $\mathcal{A}(G, S, K)$ . The results of this section are formulated in such a way, that they hold true for a Henselian and excellent discretely valued field  $K$  and a quasi-reductive (but not necessarily quasi-split)  $K$ -group  $G$ , which becomes quasi-split over  $K^{\text{nr}}$ . To simplify, we assume during the proofs that  $K$  is complete and strictly Henselian. This assumption can also be

immediately suppressed by étale descent (see [BT84, § 5] and [I, 4.4.]) and Beauville-Laszlo descent. Their main advantages lie in the fact that all affine smooth group models  $\mathcal{G}$  of  $G$  over the ring of integers  $\mathcal{O}$  are uniquely determined by their integral points  $\mathcal{G}(\mathcal{O})$  (cf. [BT84, 1.7.3.]) and that the open mapping theorem is available for finitely generated topological  $K$ -vector spaces.

The next lemmas deal with the models  $\mathcal{Z}$  and  $\mathcal{U}_{a,\Omega}$ .

**Lemma 3.2.** *There is a unique maximal smooth and affine  $\mathcal{O}$ -group model  $\mathcal{Z}$  of  $Z$  with connected fibers.*

*Proof.* One shows more generally that  $Z$  admits a not necessarily quasi-compact Néron model, then takes its neutral component. This model is constructed in two steps: in the anisotropic case, by applying Gabber's compactification theorem, we show boundedness of the set  $Z(K)$  (see [Gab12] and [BLR, Thm. 10.2.1 and 10.2.7]); in the isotropic case, one removes the undesirable central split torus by playing with primitive line bundles, cf. [BLR, Prop. 10.1.7].  $\square$

**Lemma 3.3.** *There is a unique affine, smooth, and fiberwise connected  $\mathcal{O}$ -group model  $\mathcal{U}_{a,\Omega}$  of  $U_a$ , whose  $\mathcal{O}'$ -valued points  $\mathcal{U}_{a,\Omega}(\mathcal{O}')$  coincide with the stabilizer of  $\Omega$  in  $U_a(K')$ , where  $\mathcal{O}'$  is any discrete valuation ring  $\mathcal{O}'$  formally étale over  $\mathcal{O}$ .*

*Proof.* We may and do assume that  $G = \tilde{G}^{\text{prmt},a}$  is pseudo-reductive of minimal type and universally tame of relative rank 1, since neither the root groups  $U_a$  nor the stabilizers  $U_{a,f_{\Omega}(a)}(K')$  are affected at all by such a transition: for the second, one must use the natural restriction morphism  $\mathcal{A}(G, S, K) \rightarrow \mathcal{A}(G^a, S^a, K)$  of [BT72, 6.5.] and replace  $\Omega$  with its image. Furthermore, we assume that  $G$  cannot be obtained by derived restriction of scalars of another group satisfying the same conditions. Then we divide our analysis into three cases:

First case:  $G \cong A_{1,V,K'/K}$ . In particular, there is an identification  $U_a \cong \underline{V}$  as subgroups of  $R_{K'/K}U'_a \cong R_{K'/K}\mathbb{G}_a = \underline{K}'$ . It follows that  $\Lambda := U_{a,f_{\Omega}(a)}(K)$  is an  $\mathcal{O}$ -lattice of  $V$ , which yields a smooth, affine and fiberwise connected  $\mathcal{O}$ -group model  $\underline{\Lambda}$  of  $\underline{V}$ .

Second case:  $G \cong \text{SU}_{3,L/K}$  with  $L/K$  quadratic and separable, cf. [BT84, 4.3.5.].

Third case:  $G \cong \text{BC}_{K'/K,V',V^{(2)},1}$  with  $K' \subseteq K^{1/2}$ . Since the normed  $K$ -vector space  $K'$  is cartesian in the sense of [BGR84, Def. 2.4.1.1.], we may choose a non-canonical vertical decomposition  $K' = V' \oplus V'^{\perp}$  (see [BGR84, Prop. 2.4.1.5.]), i.e.  $\omega(v_1, v_2) = \min\{\omega(v_1), \omega(v_2)\}$ . In view of the fact that  $G$  depends only on  $(V', V' + V^{(2)})$  up to homothety, we assume wlog that the inclusion  $V^{(2)} \subseteq V'^{\perp}$  holds. It follows from this that the subgroup  $U_{a,f_{\Omega}(a)}(K)U_{2a,f_{\Omega}(2a)}(K)$  can be realised as  $\Lambda' \oplus \Lambda^{(2)}$  inside  $V' \oplus V^{(2)} \subseteq K'$ , where  $\Lambda'$  resp.  $\Lambda^{(2)}$  is a lattice over  $\mathcal{O}$  resp.  $\mathcal{O}^2$  (apply the open mapping theorem to the topological  $K$ -subspace  $V' \subseteq K'$  resp.  $K'^2$ -subspace  $V^{(2)} \subseteq K'$ ). The  $\mathcal{O}$ -group model  $\underline{\Lambda}' \times \underline{\Lambda}$  of  $\underline{V}' \times \underline{V}$ , where  $\Lambda = \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}^2} \Lambda^{(2)}$ , is smooth, affine, fiberwise connected and its integral points are identified with  $\Lambda' \oplus \Lambda$ .  $\square$



Now we can already construct the affine, smooth and fiberwise connected group models  $\mathcal{G}_\Omega$ . The key tool is the notion of scheme-theoretic root data (données radicielles valuées in French) of [BT84, 3.]. A contemporary and straightforward treatment can be found in [I, 4.1.].

**Proposition 3.4.** *There exists a unique maximal smooth, affine and fiberwise connected  $\mathcal{O}$ -group model  $\mathcal{G}_\Omega$  of  $G$ , whose  $\mathcal{O}'$ -valued points fix  $\Omega$ , where  $\mathcal{O}'$  is a discrete valuation ring formally étale over  $\mathcal{O}$ .*

*Proof.* First one shows that  $(\mathcal{Z}, \mathcal{U}_{a,\Omega})_{a \in \Phi_{\text{nt}}}$  forms a scheme-theoretic root datum, where  $a$  runs through the set of all non-divisible roots, and then one denotes by  $\mathcal{G}_\Omega$  the resulting affine, smooth and fiberwise connected group scheme, cf. [I, th. 4.2.]. Due to the triviality of the majority of the axioms, we are only going to explain the existence of the fiberwise birational morphism  $\iota : \mathcal{C}_{\Omega,+} \dashrightarrow \mathcal{C}_{\Omega,-}$ . Here we set  $\mathcal{C}_{\Omega,+} := \mathcal{U}_{\Omega,+} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}_{\Omega,-}$  and  $\mathcal{U}_{\Omega,+}$  is equal to the scheme-theoretical product of  $\mathcal{U}_{a,\Omega}$ ,  $a \in \Phi_{\text{nt}}^+$  in any order endowed with the obvious group law (see [BT84, prop. 3.3.2.]). Furthermore,  $K'$  is the field of definition of the geometric unipotent radical of  $G$ ,  $G'$  is the largest reductive  $K'$ -quotient of  $G$  and  $i_G : G \rightarrow R_{K'/K}G'$  is the corresponding natural map. Under the isomorphism  $\mathcal{A}(G, S, K) \cong \mathcal{A}(G', S', K')$ , we may regard  $\Omega$  simultaneously as a subset of the right handside. Now [BT84, th. 4.5.4.] provides for the reductive  $K'$ -group  $G'$  a fiberwise birational morphism  $\iota' : \mathcal{C}'_{\Omega,+} \dashrightarrow \mathcal{C}'_{\Omega,-}$  between  $\mathcal{O}'$ -group schemes whose definition set contains the unit section. On the other hand, there are natural morphisms  $\mathcal{C}_{\Omega,\pm} \rightarrow R_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}\mathcal{C}'_{\Omega,\pm}$  and it remains to fill out the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\Omega,+} & \dashrightarrow & \mathcal{C}_{\Omega,-} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}\mathcal{C}'_{\Omega,+} & \dashrightarrow & R_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}\mathcal{C}'_{\Omega,-} \end{array}.$$

Let  $\mathcal{V}'_\Omega$  be an open affine neighbourhood of the unit section, contained in the definition set of  $\iota'$ , and  $\mathcal{V}_\Omega$  be the corresponding pre-image of  $R_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}\mathcal{V}'_\Omega$  along  $\mathcal{C}_{\Omega,\pm} \rightarrow R_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}\mathcal{C}'_{\Omega,\pm}$ . We must verify that the generic fiber  $V$  of  $\mathcal{V}_\Omega$  lies in  $C_-$ , which is due to the formation of large cells commuting with restriction of scalars (cf. [CGP15, Prop. 2.1. 13]), closed embeddings (cf. [CGP15, Prop. 2.1.8]) and quotients by subgroups of the geometric unipotent radical normalized by  $G$  (cf. [CGP15, Cor 2.1.9 and Prop. 2.1.12]). Next, we must check whether the projections  $V \rightarrow U_-, Z, U_+$  can be extended to the given integral models. As far as the centralizer is concerned, this relies on the Néron mapping property. Finally, note the equality  $\mathcal{U}_{\Omega,\pm}(\mathcal{O}) = U_\pm(K) \cap \mathcal{U}_{\Omega,\pm}(\mathcal{O}')$  within  $U'_\pm(K')$ , which implies the extension property of  $\iota$ .  $\square$

In the next lemma, we deal with the reduction  $\overline{\mathcal{G}}_\Omega := \mathcal{G}_\Omega \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$  of BT-group schemes. In simplicial combinatorics, we have the important concept of the enclos of  $\Omega$ :

$$\text{cl}(\Omega) = \bigcap_{\alpha \supset \Omega} \alpha,$$



i.e. the intersection of all closed affine roots  $\alpha$  containing  $\Omega$  (compare with [BT72, 7.1.2.]). Below we will need the refined concept of the entourage of  $\Omega$ :

$$\text{tour}(\Omega) = \bigcap_{\alpha \supset \Omega \not\subseteq \partial\alpha} \alpha,$$

where  $\alpha$  now traverses the subset of all closed affine roots  $\alpha$  containing  $\Omega$ , whose interior meets  $\Omega$ .

**Lemma 3.5.** *The following properties of  $\overline{\mathcal{G}}_\Omega$  hold:*

- (1)  $\overline{\mathcal{S}}$  is a maximal split subtorus and  $\overline{U}_{a,\Omega}$  is the root group associated with  $a \in \Phi$ .
- (2) The smooth, solvable and connected subgroup  $\overline{\mathcal{Z}}R_u\overline{\mathcal{G}}_\Omega$  is given by the image of  $\overline{\mathcal{G}}_{\text{tour}(\Omega)}$ .
- (3) The relative root system of the pseudo-reductive quotient  $\overline{\mathcal{G}}_\Omega^{\text{pred}}$  is canonically identified with  $\Phi_\Omega := \{a \in \Phi : \Omega \subseteq \partial\alpha_{a,k}, (a, k) \in \Sigma\}$ .

*Proof.* This is [I, lem. 4.6.], only more elegantly expressed and without perfectness assumptions. The proof can be repeated verbatim, and one only has to keep in mind that the kernel of  $\overline{U}_{a,\Omega'} \rightarrow \overline{U}_{a,\Omega}$  is smooth over  $\kappa$ .  $\square$

The next theorem explains the connection between facets above any given facet  $\mathbf{f}$  and pseudo-parabolic subgroups of  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$ .

**Theorem 3.6.** *There is an anti-equivalence of partially ordered sets between the set  $\{\mathbf{g} \subset \mathcal{I}(G, K) : \mathbf{g} \succeq \mathbf{f}\}$  of all facets above  $\mathbf{f}$  and the set  $\text{PsPar}(\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}})$  of all pseudo-parabolic subgroups of  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$ , given by  $\mathbf{g} \mapsto P_{\mathbf{g}} := \text{im}(\overline{\iota}_{\mathbf{g},\mathbf{f}})$ , where  $\iota_{\mathbf{g},\mathbf{f}} : \mathcal{G}_{\mathbf{g}} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}$  is the canonical morphism. Also, we have  $\mathcal{G}_{\mathbf{g}}(\mathcal{O}) = \pi_{\mathbf{f}}^{-1}(P_{\mathbf{g}}(\kappa))$ , where  $\pi_{\mathbf{f}}$  denotes the reduction map  $\mathcal{G}_{\mathbf{f}}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{f}}(\kappa)$ .*

*Proof.* Let  $\mathbf{a}$  be the unique alcove adherent to  $\mathbf{f}$  such that  $f_{\mathbf{a}}(a) = f_{\mathbf{f}}(a)$  for all  $a \in \Phi_{\mathbf{f}}^+ := \Phi_{\mathbf{f}} \cap \Phi^+$ . Each intermediate  $\mathbf{f} \preceq \mathbf{f}_J \preceq \mathbf{a}$  corresponds to a certain subset  $J \subseteq \Delta_{\mathbf{f}}$  of the basis of  $\Phi_{\mathbf{f}}^+$ , via setting  $f_{\mathbf{f}_J}(a) = f_{\mathbf{f}}(a)$  for all  $a \in \Phi_J = \langle J \rangle \cap \Phi_{\mathbf{f}}$  and  $\Phi_{\mathbf{f}_J} = \Phi_J$ . In particular, it is now easily concluded that  $P_{\mathbf{f}_J}$  is the  $J$ -standard pseudo-parabolic subgroup of  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{f}}$  with respect to  $\overline{\mathcal{S}}$  and  $\Phi_{\mathbf{f}}^+$ . The surjectivity of the morphism of partially ordered sets follows from conjugation (see the [CGP15, Thm. C.2.3 and C.2.15]) and the injectivity from the subsequently proven equality  $\mathcal{G}_{\mathbf{g}}(\mathcal{O}) = \pi_{\mathbf{f}}^{-1}(P_{\mathbf{g}}(\kappa))$ .

The surjectivity of  $\mathcal{G}_{\mathbf{g}}(\mathcal{O}) \rightarrow P_{\mathbf{g}}(\kappa)$  follows from the smoothness of  $\overline{\iota}_{\mathbf{g},\mathbf{f}}$  and Hensel's lemma. Now we only have to notice that the kernel of  $\pi_{\mathbf{f}}$  is contained in  $\mathcal{G}_{\mathbf{g}}(\mathcal{O})$ , which can be easily checked with the help of the big cell.  $\square$

**3.3. Bruhat-Tits group schemes over  $\mathcal{O}[t]$ .** Let  $e$  be a natural number,  $\mathcal{O}$  a mixed characteristic Dedekind ring containing all  $e$ -th unit roots and with perfect residue fields,  $K = \text{Quot}(\mathcal{O})$  its quotient field, and  $G$  a connected, reductive, quasi-split  $K(t)$ -group splitting over  $K(t^{1/e})$ . Let  $S$  be a maximal  $K(t)$ -split torus of  $G$  and  $\Omega \subseteq \mathcal{A}(G, S, K((t)))$  be a non-empty and bounded subset.

**Objective 3.7.** *Under the above assumptions, we would like to construct a "Bruhat-Tits group scheme"  $\mathcal{G}_\Omega$  over  $\mathcal{O}[t]$  that is smooth, affine with connected fibers, so that the resulting group schemes  $\mathcal{G}_\Omega \otimes \kappa[[t]]$  are still Bruhat-Tits group schemes combinatorially related to  $\Omega$ , where  $\kappa$  is a residue field of  $\mathcal{O}$ .*

By the end of this section, we will have generalized the constructions of [II, 1.]. Following the usual strategy, a scheme-theoretic root datum is to be constructed. In the commutative case, we have the notion of a fiberwise connected Néron model of a group, obtained from the usual [BLR, Def. 10.1.1] by replacing smooth test schemes (resp. the group  $G$ ) by pairs of smooth schemes  $(\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y})$  (resp. the pair  $(1_G, G)$ ), where  $\mathcal{Y}_0$  is faithfully flat étale over the base and  $\mathcal{Y}$  is fiberwise geometrically connected.<sup>1</sup>

**Proposition 3.8.** *If  $Z$  is a  $K(t^{1/e})$ -split  $K(t)$ -torus, then  $Z$  has a smooth, affine and fiberwise connected Néron model  $\mathcal{Z}$  over  $\mathcal{O}[t]$ , whose base change to  $\kappa[t]$  is still the fiberwise connected Néron model of its generic fiber.*

*Proof.* In the case of one-dimensional bases, one would construct the fiberwise connected Néron model by taking the scheme-theoretic image of  $Z$  in  $R_{\mathcal{O}[t^{1/e}]/\mathcal{O}[t]} \mathcal{Z}_{\mathcal{O}[t^{1/e}]}$ , followed by a smoothening and then its neutral components (see [BLR, Prop. 10.1.4]), where  $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}[t^{1/e}]} \cong \mathbb{G}_m^n$  is the fiberwise connected Néron model of  $Z_{K(t^{1/e})} \cong \mathbb{G}_m^n$ . In the two-dimensional case, the scheme-theoretic image might not be flat, which makes our situation worse. Nevertheless, it is obvious that for induced tori  $Z$ , this scheme-theoretic image  $\mathcal{Z}$  is smooth, affine and has connected fibers. Now let  $Z_1$  be an induced torus that can be written as the product of  $Z$  and  $Z_2$ . Since tori always have Néron models over one-dimensional regular rings,  $\mathcal{Z}_{1,U}$  decomposes as a product  $\mathcal{Z}_U \times \mathcal{Z}_{2,U}$  of smooth, fiberwise connected and affine group schemes over a cofinite open subset  $U$  of  $\text{Spec } \mathcal{O}[t]$ . Thanks to [SGA3, exp. VI B, cor. 11.2] and [Ray70, lem. VII.3.2.], we conclude flatness of  $\mathcal{O}(\mathcal{Z}_U)$  over  $\mathcal{O}[t]$  and an equality  $\mathcal{O}(\mathcal{Z}_U) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{Z}_{2,U}) = \mathcal{O}(\mathcal{Z}_{1,U}) = \mathcal{O}(\mathcal{Z}_1)$ . On the one hand, the surjective homomorphism  $\mathcal{O}(\mathcal{Z}_{2,U}) \rightarrow \mathcal{O}(1_U) = \mathcal{O}[t]$  defines a retraction, therefore  $\mathcal{Z} := \text{Spec } \mathcal{O}(\mathcal{Z}_U)$  is a closed subgroup scheme of  $\mathcal{Z}_1$ . On the other hand, the ring  $\mathcal{O}(\mathcal{Z}_{2,U})$  is faithfully flat over the base, resulting in the smoothness and fiber connectedness of  $\mathcal{Z}$ .

If  $Z$  is now a general torus, one may find a so-called flasque resolution  $1 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z \rightarrow 1$ , i.e. the  $Z_i$  are the tori whose group of cocharacters are  $H^1$ -trivial, cf. [CT77, lem. 3]. Fortunately, a theorem of Endo-Miyata, cf. [CT77, prop. 2] states that a flasque torus with cyclic splitting field is a direct factor of an induced torus. In particular, we already have the connected Néron models  $\mathcal{Z}_i$ ,  $i = 1, 2$  and may consider the quotient group  $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_2/\mathcal{Z}_1$ , which is representable by a quasi-affine, smooth and fiberwise connected group scheme, cf. [PZ13, cor. 10.5] and [Ray70, cor. VII.2.2.]. The base change of  $\mathcal{Z}$  to local one-dimensional rings of  $\mathcal{O}[t]$  is consistent with the fiberwise connected Néron model of  $Z$ , according to [II, lem. 2.6.]. In particular, a map  $Y \rightarrow Z$  can be extended to  $\mathcal{Y}_U \rightarrow \mathcal{Z}_U$  over a cofinite open subset  $U$  of  $\text{Spec } \mathcal{O}[t]$ , which is why taking global sections yields a morphism

<sup>1</sup>If a Néron model exists, its neutral component is the fiberwise connected Néron model. Conversely, we do not know how to make the gluing of [BLR, Prop. 10.1.9] work beyond the one-dimensional case.

$\mathcal{Y} \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}(\mathcal{Y}) \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}(\mathcal{Z})$ . But  $\mathcal{Z}^{\text{af}} := \operatorname{Spec} \mathcal{O}(\mathcal{Z})$  is a smooth group scheme, because our base is two-dimensional and regular (see [II, prop. 2.3.]), whose neutral component gets identified with  $\mathcal{Z}$  via the natural mapping. Since  $\mathcal{Y}$  is fiberwise connected and the morphism restricted to the  $\mathcal{O}[t]$ -faithfully flat scheme  $\mathcal{Y}_0$  factors over the unit section,  $\mathcal{Y}$  also factors over  $\mathcal{Z}$ .

Before we show that  $\mathcal{Z}$  is affine, we first show that its formation commutes with base change to residue fields. If  $V$  were a non-zero  $\kappa(t)$ -vector subgroup of the smooth, affine and connected group  $\mathcal{Z} \otimes \kappa(t)$ , we would have a section  $V \rightarrow \mathcal{Z}_{2,\kappa(t)}$ , due to the triviality of the étale cohomology group  $H_{\text{ét}}^1(V, \mathcal{Z}_{1,\kappa(t)}) = 1$ . On the other hand, the section must be constant (see [CGP15, Ex. B.2.8]), because  $\mathcal{Z}_{2,\kappa(t)}$  is pseudo-reductive. In particular,  $\mathcal{Z} \otimes \kappa(t)$  is quasi-reductive and  $\mathcal{Z} \otimes \kappa[t]$  is its connected Néron model, because of the same argument of [II, lem. 2.6.].

As far as the affinity of  $\mathcal{Z}$  (or equivalently the fiber connectedness of  $\mathcal{Z}^{\text{af}}$ ) is concerned, we may assume that  $\mathcal{O}$  is a complete, strictly Henselian, discrete valuation ring. If  $t$  is invertible, the statement follows from equivariance under the  $e$ -th rotation operation: indeed, for each unit  $a \in \mathcal{O}^\times$  one associates the  $\mathcal{O}$ -linear automorphism given by  $t^{1/e} \mapsto at^{1/e}$  of the ring extension  $\mathcal{O}[t] \rightarrow \mathcal{O}[t^{1/e}]$ , which yields a corresponding isomorphism  $a^* \mathcal{Z} \cong \mathcal{Z}$ ; in particular, the finite subset of the non-connected fibers of  $\mathcal{Z}^{\text{af}}$  in residual characteristic  $p$  is stable under the canonical action of  $\kappa^\times$ , and therefore contained in  $\{(\pi, t)\}$ .

If  $x$  is now a  $\kappa$ -valued point of  $\mathcal{Z}^{\text{af}}$ , which is not in  $\mathcal{Z}$ , we can lift it up to a  $\mathcal{O}[[t]]$ -valued point of  $\mathcal{Z}^{\text{af}}$ , whose induced  $\mathcal{O}((t))$ - and  $\kappa[[t]]$ -valued points lie in  $\mathcal{Z}$ . Therefore it is sufficient to show that the morphisms

$$\mathcal{Z}(\mathcal{O}((t)))/\mathcal{Z}(\mathcal{O}[[t]]) \rightarrow \mathcal{Z}(k((t)))/\mathcal{Z}(k[[t]])$$

are bijective, where  $k = \kappa, K$ . This is explicitly checked in the case of flasque tori and follows in general from an application of the snake lemma and Hilbert's theorem 90.  $\square$

Next we turn to the group models of the root groups  $U_a$  of  $G$  with respect to  $S$ . We require as an input a quasi-pinning in the sense of [BT84, 4.1.] or [I, 2.4.]. This consists of the choice of a basis  $\Delta \subseteq \Phi$  of positive simple roots and isomorphisms  $x_a^{\text{ChSt}}$ , for all non-divisible roots  $a \in \Phi_{\text{nt}}$ , between an explicitly given group and the root group  $U_a$  attached to  $a$ , which of course must be compatible with each other in a certain sense. If  $a \in \Phi_{\text{nt,nm}}$  is neither multipliable nor divisible, then the domain of  $x_a^{\text{ChSt}}$  is the group  $R_{K(t_a)/K(t)} \mathbb{G}_a$ , where  $t_a = t^{1/e_a}$  and  $e_a \mid e$  is a natural number. If  $a \in \Phi_{\text{m}}$ , then the domain of  $x_a^{\text{ChSt}}$  is equal to the group  $H^{1/2}$  of [BT84, 4.1.15.], i.e. the scheme  $R_{K(t_a)/K(t)} \mathbb{G}_a \times R_{K(t_{2a})/K(t)} \langle t_a \rangle \mathbb{G}_a$  endowed with the group law:

$$(u, v) \cdot (u', v') \mapsto (uu', v + v' + \frac{1}{2}\sigma(u)u' - \frac{1}{2}u\sigma(u')).$$

Here  $t_a = t^{1/e_a}$ ,  $t_{2a} = t_a^2$  and  $\langle t_a \rangle \mathbb{G}_a \subseteq R_{K(t_a)/K(t_{2a})} \mathbb{G}_a$  is the subgroup of traceless elements. Unfortunately, this group law forces us to divide by 2, so a small modification has to be made in order to work with  $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ -coefficients. For this we use the scheme automorphism  $(u, v) \mapsto$

$(u, 2v)$  of  $R_{K(t_a)/K(t)}\mathbb{G}_a \times R_{K(t_{2a})/K(t)}\langle t_a \rangle \mathbb{G}_a$ . The new group law acquired by transport of structure is given by the formula

$$(u, v) \cdot (u', v') \mapsto (uu', v + v' + \sigma(u)u' - u\sigma(u')).$$

From now on, we always mean this group law when referring to the above group. But if this were to be our only alteration to the isomorphisms, the commutator mappings would not be integral anymore. For this reason, the correction factors suggested by Tits must be added to the other isomorphisms  $x_a^{\text{ChSt}}$  (compare with [Ti84, App. 2, p. 216-217]):

$$x_a^{\text{Tits}}(u) = x_a^{\text{ChSt}}(2^{\langle \varpi_{2c}^\vee, a \rangle} u), a \in \Phi_{\text{nt}, \text{nm}};$$

$$x_a^{\text{Tits}}(u, v) = x_a^{\text{ChSt}}(2^{\chi_{\Phi^+}(a)} u, 4^{\chi_{\Phi^+}(a)} v), a \in \Phi_{\text{m}}.$$

Here  $c = \sum c_i$  is the sum of all multipliable positive simple roots  $c_i$ ,  $\varpi_{2c}^\vee = \frac{1}{2} \sum \varpi_{c_i}^\vee$  is the dual coweight to  $2c$ , and  $\chi_{\Phi^+}$  is the characteristic function of the positive roots  $\Phi^+$ .

We get a valuation  $\varphi^{\text{Tits}}$  as follows:

$$\varphi_a^{\text{Tits}}(x_a^{\text{Tits}}(u)) = \omega(u), a \in \phi_{\text{nt}, \text{nm}};$$

$$\varphi_a^{\text{Tits}}(x_a^{\text{Tits}}(u, v)) = \frac{1}{2} \omega(u\sigma(u) + v), a \in \Phi_{\text{m}}.$$

Actually this is equal to the usual evaluation  $\varphi^{\text{ChSt}}$ , because we are working in characteristic 0, but it also works in a more general context. Now consider the optimal quasi-concave function  $f'_\Omega : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$  assigned to the bounded and non-empty subset  $\Omega$ . Let  $\mathcal{U}_{a, \Omega}$  be the affine, smooth and connected group model of  $U_a$  for all non-divisible roots  $a \in \Phi_{\text{nt}}$ , deduced from the following group schemes by transport of structure along  $x_a^{\text{Tits}}$ :

$$R_{\mathcal{O}[t_a]/\mathcal{O}[t]} \langle t^{f'_\Omega(a)} \rangle \mathcal{O}[t_a], a \in \Phi_{\text{nt}, \text{nm}};$$

$$R_{\mathcal{O}[t_a]/\mathcal{O}[t]} \langle t^{f'_\Omega(a)} \rangle \mathcal{O}[t_a] \times R_{\mathcal{O}[t_{2a}]/\mathcal{O}[t]} \langle t^{f'_\Omega(2a)} \rangle \mathcal{O}[t_{2a}], a \in \Phi_{\text{m}}.$$

**Proposition 3.9.** *The  $\mathcal{O}[t]$ -group models  $(\mathcal{Z}, \mathcal{U}_{a, \Omega})_{a \in \Phi_{\text{nt}}}$  form a scheme-theoretic root datum for  $G$ .*

*Proof.* This generalizes [II, prop. 2.4.]. As in the cited work, only the situation over  $\mathcal{O}[t^{\pm 1}]$  needs to be examined. For the axiom (DRS 2), we write down the commutator mappings of [BT84, Addendum] up to similarity, in light of Tits' rescaling:

$$[x_a^{\text{Tits}}(u), x_b^{\text{Tits}}(u')] \sim x_{\frac{a+b}{2}}^{\text{Tits}}(0, \sigma(uu') - uu');$$

$$[x_a^{\text{Tits}}(u, v), x_b^{\text{Tits}}(u', v')] \sim x_{a+b}^{\text{Tits}}(2uu');$$

$$[x_a^{\text{Tits}}(u, v), x_b^{\text{Tits}}(u')] \sim x_{a+b}^{\text{Tits}}(uu', u'\sigma(u')\sigma(v))x_{a+2b}^{\text{Tits}}(u'(v + u\sigma(u))).$$

Finally, the axiom (DRS 3) in the case  $G_a^{\text{sc}} = R_{K(t_{2a})/K(t)}\text{SU}_{3, K(t_a)/K(t_{2a})}$  is handled by the function  $d_a : \mathcal{U}_{a, \Omega} \times \mathcal{U}_{-a, \Omega} \rightarrow \mathbb{A}^1$  and the morphism  $\beta_a : \mathcal{W}_{a, \Omega} \rightarrow \mathcal{U}_{-a, \Omega} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}_{a, \Omega}$  where  $\mathcal{W}_a$  is the non-vanishing locus of  $d_a$ . Set

$$d_a(x_a(u, v), x_{-a}(u', v')) := \text{Norm}_{\mathcal{O}[t_a^{\pm 1}]/\mathcal{O}[t^{\pm 1}]}(1 - 2\sigma(u)u' + (v + u\sigma(u))(v' + u'\sigma(u')))$$

and write  $\beta_a$  in terms of  $u, v, u', v'$ , concretely

$$\mathrm{pr}_{-a}\beta_a(x_a(u, v), x_{-a}(u', v')) = x_{-a}\left(\frac{u' - u(n(u') + v')}{d}, \frac{n(u') + v'}{d} - \frac{n(u' - u(n(u') + v'))}{n(d)}\right)$$

Here,  $n$  resp.  $d$  denote the norm of  $\mathcal{O}[t_a^{\pm 1}]/\mathcal{O}[t_{2a}^{\pm 1}]$  resp. the element  $1 - 2\sigma(u)u' + (v + u\sigma(u))(v' + u'\sigma(u'))$ . The right projection admits a similar expression.  $\square$

We now obtain a smooth and quasi-affine  $\mathcal{O}[t]$ -group scheme  $\mathcal{G}_\Omega$  with connected fibers, arising from the scheme-theoretic root datum, cf. [II, th. 2.2.].

**Proposition 3.10.** *Let  $\kappa$  be a residue field of  $\mathcal{O}$ . The following statements hold:*

- (1) *The smooth, affine and connected group  $\mathcal{G}_{\kappa(t)} := \mathcal{G}_\Omega \otimes \kappa(t)$  is quasi-reductive and quasi-split.*
- (2)  *$\mathcal{S}_{\kappa(t)}$  is a maximal split torus,  $\mathcal{Z}_{\kappa(t)}$  its centralizer and  $\mathcal{U}_{a, \kappa(t)}$ ,  $a \in \Phi$ , its  $a$ -root group.*
- (3) *The apartments  $\mathcal{A}(G, S, K((t))) \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_{\kappa(t)}, \mathcal{S}_{\kappa(t)}, \kappa((t)))$  and Iwahori-Weyl groups  $\widetilde{W}_K \cong \widetilde{W}_{\kappa}$  are in natural equivariant bijections with each other.*
- (4) *Under the above correspondence,  $\mathcal{G}_{\Omega, \kappa[[t]]} := \mathcal{G}_\Omega \otimes \kappa[[t]]$  is the Bruhat-Tits group scheme associated with  $\Omega$ .*

*Proof.* Let  $G^{\mathrm{sc}}$  be the simply connected cover of the derived group of  $G$ . By functoriality of birational group laws, we get a natural mapping  $\mathcal{G}_\Omega^{\mathrm{sc}} \rightarrow \mathcal{G}_\Omega$  and an action of the fiberwise connected Néron model  $\mathcal{Z}$  on the left handside, which is compatible with the conjugation operation on the right side. In particular, the algebraic space  $(\mathcal{Z} \ltimes \mathcal{G}_\Omega^{\mathrm{sc}})/\mathcal{Z}^{\mathrm{sc}}$  is isomorphic to  $\mathcal{G}_\Omega$  because their big cells match. On the other hand, it is also sufficient to consider only the rank 1 cases, cf. [CGP15, Thm. C.2.29]. Wlog we assume that  $G = \mathrm{R}_{K(t_a)/K(t)}\mathrm{SL}_2$  or  $= \mathrm{R}_{K(t_{2a})/K(t)}\mathrm{SU}_{3, K(t_a)/K(t_{2a})}$ .

In the first case, the uniqueness of solutions of birational group laws yields the group scheme  $\mathcal{G} = \mathrm{R}_{\mathcal{O}[t_a^{\pm 1}]/\mathcal{O}[t^{\pm 1}]}\mathrm{SL}_2$ , whose fiber is pseudo-reductive over  $\kappa(t)$ . In the second case, our analysis is divided into two parts: if  $\mathrm{char} \kappa \neq 2$ , one assumes without loss of generality that  $2 \in \mathcal{O}^\times$  is a unit, and the statement follows from the remark that  $\mathcal{G}$  equals  $\mathrm{R}_{\mathcal{O}[t_{2a}^{\pm 1}]/\mathcal{O}[t^{\pm 1}]}\mathrm{SU}_{3, \mathcal{O}[t_a^{\pm 1}]/\mathcal{O}[t_{2a}^{\pm 1}]}$ ; if  $\mathrm{char} \kappa = 2$ , one only has to realize that the scheme  $\mathcal{C}_{\kappa(t)}$ , endowed with its birational group law, gets identified with the big cell of  $\mathrm{BC}_{\kappa(t_a)/\kappa(t), \kappa(t_{2a}), t_a \kappa(t_{2a})}$ .

By construction of  $\mathcal{G}$ , we have certain explicit descriptions of the root groups of  $\mathcal{G}_{\kappa(t)}$ , which we may use to define a valuation  $\varphi_\kappa^{\mathrm{Tits}}$  of the group-theoretic root datum  $(\mathcal{Z}_{\kappa(t)}, \mathcal{U}_{a, \kappa(t)})$ . In particular, we identify the apartments by the choice of  $\varphi_\kappa^{\mathrm{Tits}}$  as a common origin. As for the Iwahori-Weyl groups, it is first shown that the natural mappings  $\widetilde{W}_\mathcal{O} := \mathcal{N}(\mathcal{O}((t)))/\mathcal{Z}(\mathcal{O}[[t]]) \rightarrow \widetilde{W}_k$  are always bijective, where  $k = \kappa, K$  and  $\mathcal{N}$  denotes the normalizer of  $\mathcal{S}$  inside  $\mathcal{G}$ , which is representable by a smooth closed group subscheme of  $\mathcal{G}$  (see [SGA3, exp. XI, cor. 2.4. bis et cor. 6.11.]). Since the corresponding assertion if  $\mathcal{G} = \mathcal{Z}$  has been established before, it would be sufficient to remark that the morphism  $\mathcal{N}(\mathcal{O}((t)))/\mathcal{Z}(\mathcal{O}((t))) \rightarrow \mathcal{N}(k((t)))/\mathcal{Z}(k((t))) \cong W(\Phi)$ ,  $k = \kappa, K$ , is bijective. In fact, the elements  $m_a(1) = x_{-a}(1)x_a(1)x_a(1)$  or  $m_a(1, 0) =$

$x_{-a}(1,0)x_a(1,0)x_{-a}(1,0)$  suffice to conclude surjectivity, while in the case of  $k = K$  injectivity is obvious. Therefore, bijectivity holds in general by comparing finite set cardinalities (the same argument is already to be found in [II, 2.6.]). As far as equivariance regards, it may be checked on any generators, such as translations together with the above reflections.  $\square$

All that remains is to show that our group schemes are affine. Over  $\mathcal{O}[t^{\pm 1}]$ , one would like to apply the same equivariance under rotation type considerations that were already in use in the commutative case. In formal language, we have the following:

**Lemma 3.11.** *Let  $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{A}_{\mathcal{O}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{O}}^1$  be the action induced by  $(r,t) \mapsto r^e t$ . Then this action lifts to a semi-linear operation  $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}_{\Omega} \rightarrow \mathcal{G}_{\Omega}$ .*

*Proof.* Let  $R$  be an  $\mathcal{O}$ -algebra,  $r \in R^{\times}$  a unit,  $t \in R$  any element of  $R$ , and finally  $x \in R[t^{1/d}]$ , where  $e$  is divisible by  $d$ . Thanks to the equality of  $\mathcal{O}$ -algebras  $R[t^{1/d}] = R[(r^e t)^{1/d}]$ , we define by  $(r,t,x) \mapsto (r^e t, x)$  the desired action on  $R_{\mathcal{O}[t^{1/d}]/\mathcal{O}[t]} \mathbb{G}_a$ . Taking appropriate Tate twists, we also derive the semilinear action for  $\mathcal{U}_{a,\Omega}$ , compatibly with the given isomorphism over  $\mathcal{O}[t^{\pm 1}]$ . The case of the centralizer, already implicitly indicated, is treated in a similar way. In particular, the action for  $\mathcal{G}_{\Omega}$  follows, because the birational group law is compatible with the rotation action defined on each term.  $\square$

Finally we come to the proof that the BT-group schemes  $\mathcal{G}_{\Omega}$  are affine, which shares some similarities with [II, dém. du th. 2.5.] and is a thousand times simpler than that of [PZ13, Thm. 4.1].

**Proposition 3.12.** *The  $\mathcal{O}[t]$ -group scheme  $\mathcal{G}_{\Omega}$  is affine.*

*Proof.* Notice that the affine hull  $\mathcal{G}_{\Omega}^{\text{af}} := \text{Spec } \mathcal{O}(\mathcal{G}_{\Omega})$  is a smooth  $\mathcal{O}[t]$ -group scheme whose single component identifies with  $\mathcal{G}_{\Omega}$ , cf. [II, prop. 2.3.]. Over  $\mathcal{O}[t^{\pm 1}]$ , this follows from connectedness of the fibers of  $\mathcal{G}_{\Omega}^{\text{af}}$  due to equivariance under the rotation action.

We must now show that the special fiber  $\mathcal{G}_{\Omega}^{\text{af}} \otimes_{\mathcal{O}[t], t \rightarrow 0} \kappa$  is connected. Therefore we may assume that  $\mathcal{O}$  is a complete local ring and  $\kappa$  algebraically closed. Then each connected component of the special fiber can be represented by a  $\mathcal{O}[[t]]$ -valued point of the normalizer  $\mathcal{N}_{\Omega}^{\text{af}}$  of  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{G}_{\Omega}^{\text{af}}$ , by  $\kappa$ -conjugacy of maximal tori of the connected special fiber and Hensel's lemma (compare with [I, cor. 3.10.] and [BT84, cor. 4.6.21.]). This would contradict the to be proved bijectivity of

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}((t)))/\mathcal{N}_{\Omega}(\mathcal{O}[[t]]) \rightarrow \mathcal{N}(k((t)))/\mathcal{N}_{\Omega}(k[[t]]),$$

where  $k = \kappa, K$ . After identifying the abstract groups

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}((t)))/\mathcal{Z}(\mathcal{O}[[t]]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(k((t)))/\mathcal{Z}(k[[t]]),$$

as in the proof of Prop. 3.10, we still have to check that the map of finite abstract groups

$$\mathcal{N}_{\Omega}(\mathcal{O}[[t]])/\mathcal{Z}(\mathcal{O}[[t]]) \rightarrow \mathcal{N}_{\Omega}(k[[t]])/\mathcal{Z}(k[[t]])$$

is bijective. On the one hand, the right handside does not depend on the choice of  $k$ , since it is equal to the Weyl group  $W(\Phi_{\Omega})$  (see [CGP15, Thm. C.2.15] and Lem. 3.5.) On the



other hand, it is injective if  $k = K$  for obvious reasons and surjective if  $k = \kappa$  by Hensel's lemma.  $\square$

In [PZ13], the authors had constructed these group schemes in the tame setting (i.e. when  $e \in \mathcal{O}^\times$ ) and approached them as Galois fixed points of a BT-group model of the Weil-restricted split form. The still similar approach of [II] also considers BT-group schemes over  $\mathcal{O}[t]$  as an appropriate flattening of the fixed points. In the present work, we still have to come to terms with Tits' rescaling.

Let  $H$  be the split form of  $G$  realized as a Chevalley group scheme,  $T_H$  the corresponding split form of  $Z$  and  $\tilde{\Delta}$  the base of the root system  $\tilde{\Phi}$  of  $H$  induced by  $\Delta$  with respect to  $T_H$ . Fixing the corresponding pinning  $x_a : \mathbb{G}_a \rightarrow U_{H,\tilde{a}}$ ,  $a \in \tilde{\Delta}$  of  $H$ , then  $\Gamma$  acts on  $H$  through the usual diagram automorphisms. We call this the Chevalley-Steinberg action and it induces an identification  $G \cong (R_{K(t^{1/e})/K(t)}H)^{\Gamma, \text{ChSt}}$  (see [II, 1.1. et 1.2.]). For each pair of positive multiplicable and non-orthogonal roots, choose one and only one representative  $a$  and denote the corresponding subset by  $\Phi_m^{+,0}$ . The Tits action of  $\Gamma$  on  $H \otimes \mathbb{Z}[1/2]$  is derived from the Chevalley-Steinberg one by conjugating with  $\prod_{a \in \Phi_m^{+,0}} a(1/2)$ .

**Proposition 3.13.** *The closed embedding  $G \cong (R_{K(t^{1/e})/K(t)}H)^{\Gamma, \text{Tits}} \subseteq R_{K(t^{1/e})/K(t)}H$  can be extended to a map  $\mathcal{G}_\Omega \rightarrow R_{\mathcal{O}[t^{1/e}]/\mathcal{O}[t]} \mathcal{H}_\Omega$ , which becomes a closed immersion when composed with the inclusion of  $\mathcal{U}_{\Omega, \pm}$ .*

*Proof.* To do this, we just have to work with big cells and unravel all the definitions.  $\square$

#### 4. AFFINE GRASSMANNIANS

**4.1. Power series affine Grassmannians.** In this section, we will deal with the classical affine Grassmannian, in particular with a presentation of the main results of [II, 3.] in light of our improved group-theoretic constructions.

**Theorem 4.1.** *Schubert varieties  $\text{Gr}_{\mathcal{G}_f, \leq w}$  are projective, topologically normal, flat schemes. Furthermore, if the order of  $\pi_1(G^{\text{der}})$  is a unit in  $\mathcal{O}$ , then Schubert varieties are normal and their formation commutes with arbitrary base change.*

*Proof.* The reduction steps to the case of an absolutely simple simply connected group  $G$  and Iwahori level  $\mathcal{G}_a$  may be carried out as in [PR08, 6-7]. At this point one notices that the only cases that have not been treated in [II] or [PR08] are unitary groups of odd dimension in residue characteristic 2. It would be great if all arguments of [II, 3.] could be repeated word for word. Unfortunately, the key lemma [II, lem. 3.3.] fails precisely in this new situation: this can be seen by observing that the quadratic equations of the proof of [PR08, Prop. 9.3] are no longer solvable, or that the kernel of  $i_{\text{BC}_n}$  intersects trivially with the Cartan and non-trivially with multiplicable root groups (in that case, we get  $\alpha_2$ ).<sup>2</sup> In the proof scheme

<sup>2</sup>This might remind us of the normality obstruction of [III, 2.] for adjoint Schubert varieties. The essential difference is that in [III] the morphisms between different Schubert varieties are birational, whereas in this case they are not.



of [II, 3.], the fact that the affine Grassmannian in characteristic 2 is reduced becomes also affected (see the proof of [II, prop. 3.2.], which applies the key lemma in the second paragraph). On the other hand, the flatness of  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a, \mathcal{O}}$  over  $\mathcal{O}$  is a general fact resulting from the arguments of [III, 9.], which yields the equality  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a, \mathcal{O}} := \varinjlim_{w \in W_{\mathrm{aff}}} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a, \leq w, \mathcal{O}}$  (so at least it is reduced integrally). Moreover, we still obtain the line bundles of [II, prop. 3.4.] on the affine Grassmannian and the normalized Schubert varieties  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a, \leq w, \mathcal{O}}^n$  form an ind-scheme  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a, \mathcal{O}}^n$  which commutes with arbitrary base change (see the first paragraph of [II, preuve du th. 3.7.]). The only missing element of the proof is showing there's an isomorphism:

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a, 1}} := \varprojlim_{w \in W_{\mathrm{aff}}} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a, \leq w, 1}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a}^n, 1} := \varprojlim_{w \in W_{\mathrm{aff}}} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a, \leq w, 1}^n}.$$

To this end, we may assume that our Dedekind ring  $\mathcal{O}$  is a strictly Henselian complete discrete valuation ring. To overcome the obstacles to Faltings' approach, we need higher differential operators.

Distributions of a pointed ind-scheme over an affine base are operators on nilpotent thickenings of the given section, cf. [BT84, 1.3.] and [III, 7.] for their basic properties. Consider the topologically free  $\mathcal{O}$ -module  $\mathrm{Dist}(L\mathcal{G}, 1)$ , which is endowed with a canonical topological base induced by the given quasi-pinnings of the root groups and the Cartan subgroup. More precisely, the aforementioned base consists of the dual operators to the monomials of  $\widehat{\mathcal{O}}_{L\mathcal{G}, 1}$ , when the latter is identified with a power series ring in infinitely many variables by means of the quasi-pinning. Now we want to show that  $\mathrm{Dist}(L\mathcal{G}, 1)$  is topologically generated by  $\mathrm{Dist}(L\mathcal{U}_a, 1)$  as an associative  $\mathcal{O}$ -algebra, where  $a$  runs over the set of all non-divisible roots. We leave the reader with the simplest case of  $\mathrm{SL}_2$  associated with non-multiplicable roots.

Consider the morphism  $LW_a \rightarrow LR_{\mathcal{O}[t^{\pm 1/2}]/\mathcal{O}[t^{\pm 1}]} \mathbb{G}_m$  given by  $\beta_a$ , which can be written as a quadruple product of elements in  $L\mathcal{U}_{\pm a}$ . We only have to realize that the associated homomorphism of distributions has dense image. For this one may set  $u = v' = 0$ ,  $u' = u'_0$ ,  $v = v_{i/2}t^{i/2}$  or  $u = u' = 0$ ,  $v = v_{i/2}t^{i/2}$ ,  $v' = v'_{1/2}t^{1/2}$  and the induced mappings of formal schemes  $\widehat{\mathbb{A}^2} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^1}$  over  $\mathcal{O}$  are given by  $(u'_0, v_{i/2}) \mapsto u'_0{}^2 v_{i/2}$  and  $(v_{i/2}, v'_{1/2}) \mapsto v_{i/2} v'_{1/2}$  respectively, which furnish an epimorphism on distributions.

From this, one can conclude that the inclusion  $\mathrm{Dist}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a}^n, 1) \subseteq \mathrm{Dist}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a}, 1)$  of submodules of  $\mathrm{Dist}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a}, 1) \otimes K$  is an equality, since the normalized Grassmannian is compatibly acted upon by the root groups. On the other hand, we can easily see that all formal functions in  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a} \otimes K, 1_K}$  pairing integrally with the lattice  $\mathrm{Dist}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a}, 1)$  belong to  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}_a}, 1}$ . This provides the desired assertion.  $\square$

The above theorem brings to an end a decade-long effort to translate scheme-theoretic Kac-Moody theory over the integers of [Mat88] to the theory of affine Grassmannian (see [II, 3.8.] for a detailed explication; note also the correspondence between Tits' rescaling and that of [Mit85, Eq. (3.5.33)]).

**Corollary 4.2.** *The integral Kac-Moody flag variety (resp. the integral Chevalley-Tits group scheme) is isomorphic to the affine Grassmannian  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{G}_a}$  (resp. to the universal central extension of  $L\mathbf{G}$ ).*

The next theorem concerns a global variant, the so-called Beilinson-Drinfeld affine Grassmannian  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{G}_f}^{\mathrm{BD}}$ , which constitutes an ind-scheme over  $\mathcal{O}[t]$  (see [II, 3.9.]), and their Schubert varieties  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{G}_f, \leq \{\mu\}}^{\mathrm{BD}}$ , where  $\{\mu\}$  is a conjugacy class of geometric cocharacters of  $G$ . The main tool here is the coherence theorem of Zhu [Zhu14].

**Theorem 4.3.** *The Schubert varieties  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{G}_f, \leq \{\mu\}}^{\mathrm{BD}}$  are projective, topologically normal, flat schemes, with topologically normal irreducible fiber components. In addition, if the order of  $\pi_1(G^{\mathrm{der}})$  is a unit in  $\mathcal{O}$ , then all fibers of Schubert varieties are geometrically reduced and their irreducible components are normal.*

For the theory of local models of Shimura varieties, the specialization

$$\mathbb{M}_{\mathbf{G}, \{\mu\}}^{\mathrm{BK}} := \mathrm{Gr}_{\mathbf{G}_f, \leq \{\mu\}}^{\mathrm{BD}} \otimes_{\mathcal{O}[t^{1/d}], t \mapsto \varpi} \mathcal{O}[\varpi^{1/d}]$$

carries a special meaning, where  $K(t^{1/d})$  is the field of definition of  $\{\mu\}$ . We call these schemes the Breuil-Kisin local models: in the minuscule case, a more natural realization or characterization can be conjectured and in some cases proved (see Conj. 4.20 and Thm. 4.23).

**4.2.  $p$ -adic affine Grassmannians.** Scholze's approach to the theory of local models is based on the theory of perfectoid spaces and diamonds, as presented in [SW20]. We are going to assume mild familiarity with the latter

To deal with integral objects, diamonds (i.e. proétale sheaves with perfectoid presentations) become unfortunately insufficient, because there aren't many proétale covers in positive characteristic. We thus need to work with the  $v$ -topology, which is generated by open embeddings and surjective morphisms  $\mathrm{Spa}(B, B^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(A, A^+)$  of affinoid spaces, and the corresponding  $v$ -sheaves of [SW20, Lect. 17]. We remind the reader of some basic properties of these objects.

A  $v$ -sheaf  $\mathcal{F}$  is small if it can be covered by a perfectoid space, cf. [SW20, Def. 17.2.1.]. Small  $v$ -sheaves have a well-defined underlying topological space, cf. [SW20, Def. 17.2.3.]. Furthermore, terms such as closed immersions, separated or (partially) proper morphisms can be defined, cf. [SW20, Defs. 17.4.2., 17.4.3., 17.4.5., 17.4.7.], some of which can be checked by valuative criteria, see [SW20, Props. 17.4.4., 17.4.6.]. If a morphism of small  $v$ -sheaves is quasi-compact, we can derive a lot of information from analyzing geometric fibers, see [SW20, Cor. 17.4.8., Lem. 17.4.9., Cor. 17.4.10.].

If  $X$  is an adic space over  $\mathbb{Z}_p$ , then we attach to  $X$  the  $v$ -sheaf  $X^\diamond$  over the untilt sheaf  $\mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p := \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)^\diamond$  given by restriction to points with perfectoid affinoid values. This immediately raises the question as to what extent the associated  $v$ -sheaf  $X^\diamond$  reflects the geometry of  $X$ . In most cases, the short answer is as follows:  $X^\diamond$  captures only the entire topology of  $X$ , which is why it can be regarded as a topologization of  $X$ .

The following lemma has been applied several times in [SW20] without proof.

**Lemma 4.4.** *If  $X$  is a  $\mathbb{Z}_p$ -flat noetherian adic space, then  $|X_\eta^\diamond|$  is a dense open subset of  $|X^\diamond|$ .*

*Proof.* One has a natural continuous and surjective map  $|X^\diamond| \rightarrow |X|$ , cf. [SW20, Prop. 18.2.2.]. To prove the lemma, we may assume that  $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$  is affinoid. Additionally consider the affinoid analytic adic space

$$Y = \mathrm{Spa}(R[[s]]\langle \frac{p}{s}, \frac{t_1}{s}, \dots, \frac{t_n}{s} s \rangle [\frac{1}{s}], R^+[[s]]\langle \frac{p}{s}, \frac{t_1}{s}, \dots, \frac{t_n}{s} \rangle),$$

where  $t_i \in R^+$  and  $\sqrt{(p, t_1, \dots, t_n)R^+} = R^{\circ\circ}$ . The ring  $\mathcal{O}(Y)$  is still flat over  $\mathbb{Z}_p$ , because it is a rational localization of  $Z = \mathrm{Spa}(R[[s]], R^+[[s]])$ , and the claimed density is clear in this case, because  $|Y^\diamond| \cong |Y|$  (see [SW20, Prop. 10.3.7]). Finally, we show that  $Y^\diamond \rightarrow X^\diamond$  is surjective: if there is an affinoid perfectoid space  $(A, A^+)$  over  $(R, R^+)$ , then there is always a pseudo-uniformizer  $\varpi \in A^+$ , which divides the images of the elements  $p, t_i$  in  $A^+$ .  $\square$

Before dealing with the problem of identifying a class of adic spaces for which the  $v$ -sheaf functor is fully faithful, the following terms need to be explained.

**Definition 4.5.** A ring  $A$  is called

- (1) semi-normal, if every finite and universally homeomorphic extension  $A \rightarrow B$  with trivial residue field extensions is an isomorphism.
- (2) weakly normal if every finite birational and universally homeomorphic extension  $A \rightarrow B$  is an isomorphism.
- (3) absolutely weakly normal, if each finite and universally homeomorphic extension  $A \rightarrow B$  is an isomorphism.
- (4) topologically normal, if the normalization is a universal homeomorphism.

Since ring localizations preserve these properties, they can be generalized to schemes. In the general case of adic spaces, it is better to require their excellency (i.e. there is an open affinoid cover, whose sections have an excellent Noetherian definition ring); then [GT80, Prop. 5.1] and [Man80, Prop. III.3] provide stability of the above properties under flat and regular ring homomorphisms, such as adic localizations of excellent affinoid rings.

Given an excellent adic space  $X$ , there exists an initial morphism  $X^{\mathrm{sn}} \rightarrow X$  (resp.  $X^{\mathrm{wn}} \rightarrow X$ , resp.  $X^{\mathrm{awn}} \rightarrow X$ ) from a semi-normal (resp. weakly normal, resp. absolutely weakly normal) adic space, which is called the semi-normalization (resp. weak normalization, resp. absolutely weak normalization) of  $X$ . The semi-normalization  $X^{\mathrm{sn}} \rightarrow X$  and the weak normalization  $X^{\mathrm{wn}} \rightarrow X$  are finite by assumption, whereas the absolute weak normalization  $X^{\mathrm{awn}} \rightarrow X$  is often (e.g. in char.  $p$ ) only integral, i.e. a limit of finite morphisms. On the other hand, only the semi-normalization and the absolute weak normalization are functorial in  $X$ . Thankfully, we work almost exclusively in mixed characteristic, in which case  $X^{\mathrm{wn}} = X^{\mathrm{awn}}$ .

**Theorem 4.6.** *Let  $F$  be a  $p$ -adic field. The functor  $X \mapsto X^\diamond$  from the category of flat adic spaces topologically of finite type over  $\mathcal{O}_F$  to  $v$ -sheaves over  $\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F$ , factors as the composition of the weak normalization  $X \mapsto X^{\mathrm{wn}}$  and the fully faithful embedding  $X^{\mathrm{wn}} \mapsto X^{\mathrm{wn}, \diamond} = X^\diamond$ .*

*Proof.* First it must be shown that the equality  $X^{\mathrm{awn}, \diamond} = X^\diamond$  is valid for any excellent adic space. It is enough to see that perfectoid integral rings  $R^+$  are absolutely weakly normal (the semi-normality was already announced in [KL16, Thm. 3.7.4.]). We have to show that, for every two elements  $b, c \in R^+$ , which satisfy the equation  $b^2 = c^3$  or  $p^p b = c^p$ , there is a unique  $a \in R^+$ , so that  $b = a^3$  and  $c = a^2$  or  $b = a^p$  and  $c = pa$ , cf. [StaProj, tag 0EUK]. By virtue of  $v$ -descent, we may assume that  $R^+$  equals a product of perfectoid valuation rings, which is clearly absolutely weakly normal.

Now let  $X, Y$  be two weakly normal flat adic spaces topologically of finite type over  $\mathcal{O}_F$  and  $f : Y^\diamond \rightarrow X^\diamond$  be a map of  $v$ -sheaves. First of all, we cover the map by restricted  $V^\diamond \rightarrow U^\diamond$ , where  $V \subseteq Y$  and  $U \subseteq X$  are affinoid open subsets. This is immediate in the generic fibers. If one looks at the neighborhood of the special fibers, the statement becomes quite delicate, and follows from [SW20, Prop. 18.3.1.] together with the existence of a specialization morphism  $\mathrm{sp} : |X_\eta^\diamond| \rightarrow |X_s^\diamond|$  which maps  $\mathrm{Spa}(K, K^+) \rightarrow X_\eta$  to the image of  $\mathrm{Spd}(\kappa, \kappa) \rightarrow X_s^\diamond$ , where  $\kappa$  is the residue field of  $K^+$ .

Because of this reduction step, we may and do assume that  $X = \mathrm{Spa}(A, A)$  and  $Y = \mathrm{Spa}(B, B)$  are affinoid. By [SW20, Prop. 10.2.3.], this results in a morphism  $\psi_\eta : Y_\eta \rightarrow X_\eta$ , so that  $\psi_\eta^\diamond = f_\eta$ . Because  $Y_\eta = \mathrm{Spa}(B[1/p], B')$  and  $X_\eta = \mathrm{Spa}(A[1/p], A')$  are affinoid, we get a map  $\psi' : Y' := \mathrm{Spa}(B', B') \rightarrow X$  over  $\mathcal{O}_F$ , so that  $\psi'_\eta = \psi$ . Denoting by  $B'' \subseteq B'$  the image of  $A \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_F} B$  in  $B[1/p]$ , we even get  $\psi'' : Y'' := \mathrm{Spa}(B'', B'') \rightarrow X$  such that the morphism  $Y'' \rightarrow X \times_{\mathrm{Spa}(\mathcal{O}_F)} Y$  is a closed embedding. Inside  $X^\diamond \times_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F} Y^\diamond$  we now have two closed sub- $v$ -sheaves  $Y''^\diamond$  induced by  $\psi''^\diamond$  and  $X^\diamond \cong \Gamma_f$  induced by  $f$  carrying the same topologically dense generic fiber. Therefore, the finite birational morphism  $Y'' \rightarrow Y$  becomes an isomorphism in the category of  $v$ -sheaves, so it must be a universal homeomorphism and consequently an isomorphism, by weak normality  $Y = Y^{\mathrm{wn}}$ .  $\square$

Let  $F$  be a fixed  $p$ -adic field.

**Definition 4.7.** Let  $(R, R^+)$  be a perfectoid affinoid ring and  $\theta_F : W_{\mathcal{O}_F}(R^{b+})[\frac{1}{[\varpi^b]}] \rightarrow R$  the relative Fontaine map with  $F$ -ramification. The de Rham positive period ring  $B_{\mathrm{dR}, F}^+(R)$  is the  $\ker(\theta)$ -adic completion of the left handside.

$B_{\mathrm{dR}, F}(R)$  is used to denote  $B_{\mathrm{dR}, F}^+(R)[1/\xi]$ , where  $\xi$  is a generator of  $\ker(\theta)$ . Two extreme cases are particularly noteworthy: if  $R = C/\mathbb{Q}_p$  is a complete algebraically closed field, then  $B_{\mathrm{dR}, F}^+(C)$  is the de Rham period ring of Fontaine with  $F$ -coefficients; if  $R$  is a ring of characteristic  $p$ , then  $B_{\mathrm{dR}, F}^+(R) = W_{\mathcal{O}_F}(R)$  is the ring of  $\varpi_F$ -typical Witt vectors.

Now let  $\mathcal{G}$  be an affine fiberwise connected smooth group scheme over  $\mathcal{O}_F$  with reductive generic fiber.

**Definition 4.8.** The affine Grassmannian of  $\mathcal{G}$  is the  $v$ -sheaf  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  over  $\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F$ , whose  $(R, R^+)$ -valued points parametrize the pairs  $(\mathcal{E}, \beta)$ , where  $(R, R^+)$  is an affinoid perfectoid ring over  $\mathcal{O}_F$ ,  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{G}$ -torsor on  $B_{\mathrm{dR}, F}^+(R)$  and  $\beta$  a trivialization of  $\mathcal{E}$  on  $B_{\mathrm{dR}, F}(R)$ .

The generic fiber of the affine Grassmannian  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  is denoted by  $\mathrm{Gr}_G$ . It has a locally closed stratification: the so-called Schubert cells  $\mathrm{Gr}_{G, \{\mu\}}$  associated with a conjugacy class  $\{\mu\}$  of geometric cocharacters of  $G$  parametrize pairs  $(\mathcal{E}, \beta)$ , whose invariant position over all perfectoid affinoid fields is given by  $\{\mu\}$  (cf. [SW20, Def. 19.2.2.]); their proper closures  $\mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}$  correspond topologically to the union of all Schubert cells  $\mathrm{Gr}_{G, \{\nu\}}$ , for all  $\{\nu\}$  less than or equal to  $\{\mu\}$  w.r.t. the Bruhat order (see [SW20, Prop. 19.2.3.]). Note that Schubert cells and varieties are not necessarily defined over  $F$ , but rather the field  $E$  of definition of  $\{\mu\}$ , which will be henceforth suppressed for readability. Interestingly, there are natural maps  $\mathrm{Gr}_{G, \{\mu\}} \rightarrow \mathcal{F}_{G, \{\mu\}}^{\diamond}$ , where  $\mathcal{F}_{G, \{\mu\}} := G/P_{-\mu}$  with  $\mu \in \{\mu\}$  a representative of the conjugacy class and  $P_{-\mu}$  the opposite parabolic subgroup associated to  $\mu$ , i.e. the repeller. These are isomorphisms if and only if  $\{\mu\}$  is minuscule, cf. [SW20, Prop. 19.4.2.].

The special fiber  $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}}$  of the affine Grassmannian  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  is the  $v$ -sheaf associated to the Witt vector affine Grassmannian of Zhu, cf. [Zhu17]. If  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathfrak{f}}$  is a parahoric group scheme, there exists a natural stratification in locally closed sub- $v$ -sheaves  $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}, w}$ , where  $w \in \widetilde{W}_{\mathfrak{f}}$ , with proper closures  $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}, \leq w}$ , whose inclusion relations are induced by the partial Coxeter suborder.

**Theorem 4.9** (Scholze). *The affine Grassmannian  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$  is ind-proper if and only if  $\mathcal{G}$  is parahoric.*

*Proof.* It is obviously necessary that  $\mathcal{G}$  is parahoric, otherwise the special fiber would not be ind-proper (see [I, th. 5.2.]). In the parahoric case, one needs some kind of valuative criterion for  $\mathcal{G}$ -torsors, as explained in the [SW20, Thm. 21.2.1.]. It will be seen later that the open subset  $|\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}| \subseteq |\mathrm{Gr}_G|$  is dense.  $\square$

Finally, we introduce the key object of these geometric investigations.

**Definition 4.10** (Scholze). Let  $\{\mu\}$  be a geometric conjugacy class of cocharacters of  $G$  and  $\mathcal{G}$  be a parahoric model. The integral Schubert variety  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq \{\mu\}}$  is the closure of  $\mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}$  inside  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ .

In a footnote near [SW20, Prop. 21.4.3.], Scholze warned us that  $v$ -closures did not always behave well from a topological point of view. The details have been dealt with in the joint work in progress [APLR] with J. Anschütz and T. Richarz, who authorized the reproduction of the following material. Although the closure  $\overline{Y}$  of a monomorphism  $Y \subseteq X$  of small  $v$ -sheaves is defined as the smallest sub- $v$ -sheaf of  $X$  containing  $Y$ , it happens nevertheless with relative frequency that the underlying topological space of  $\overline{Y}$  is not necessarily equal to the topological closure  $|Y|^c$ , but slightly worse. Indeed, note that a morphism  $\mathrm{Spa}(C, C^+) \rightarrow \overline{Y}$  already furnishes an inclusion  $|\mathrm{Spa}(C, C^+)| \subseteq |\overline{Y}|$ , so that instead of  $|Y|^c$  we must consider the so-called weakly generalizing topological closure  $|Y|^{\mathrm{wgc}}$ . This is defined as the smallest

closed subset  $S$  of  $|X|$  containing  $|Y|$ , such that point  $\mathrm{Spa}(C, C^+) \rightarrow X$  in  $S$  entails that the whole topological space  $|\mathrm{Spa}(C, C^+)|$  already lies in  $S$ .

**Proposition 4.11** (with J. Anschütz and T. Richarz). *The function  $Y \mapsto |Y|$  defines a bijective correspondence between closed sub- $v$ -sheaves  $Y$  of a small  $v$ -sheaf  $X$  and weakly generalizing closed subsets of  $|X|$ .*

*Proof.* It must be shown that  $\underline{S} \times_{|X|} X$  is a closed sub- $v$ -sheaf with the correct underlying topological space as soon as  $S$  is weakly generalizing. This can be verified in the case of a totally disconnected perfectoid space  $X$  thanks to [Sch17, Lem. 7.6 and Prop. 12.5].  $\square$

In order to tranquilize the reader, we analyze the closure of the open ball.

**Example 4.12** (Scholze). Let  $K$  be an affinoid non-archimedean field,  $X := \mathbb{B}_K^1 = \mathrm{Spa} K\langle T \rangle$  the one-dimensional closed ball of radius 1 and  $Y = \bigcup_{0 \leq r < 1} \mathbb{B}_K^1(0, r) \subseteq X$  the open one-dimensional ball of the same radius. Then  $\overline{|Y|} = |X| \setminus \{|T| = 1\}$  which consists of  $|Y|$  and a rank 2 specialization of the Gauss point, whereas  $|Y|^{\mathrm{wgc}} = |X| \setminus \bigcup_{0 \leq r < 1, x \in \mathcal{O}_K} |\mathbb{B}_K^1(x, r)|$ , which consists of  $|Y|$  together with the closure of the Gauss point. In the  $v$ -world, we have an open sub- $v$ -sheaf  $Y^\diamond \subseteq X^\diamond$ , whose closure  $\overline{Y^\diamond} \subseteq X^\diamond$  is given by  $\overline{|Y|^{\mathrm{wgc}}} \times_{|X|} X^\diamond$  (note that in contrast  $\overline{|Y|^c} \times_{|X|} X^\diamond = Y^\diamond$  is still very far from being closed)

After having clarified the topological nuisances, we return to integral Schubert varieties. Of course, they are proper models of  $\mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}$ , but the special fiber cannot be pinned down so readily, although it is assumed that it corresponds to the so-called admissible locus of Kottwitz-Rapoport: this is the main aim of [APLR].

**Proposition 4.13** (with J. Anschütz and T. Richarz). *The closed sub- $v$ -sheaf  $\mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}$  of  $\mathrm{Gr}_G$  is invariant under the action of  $L^+G$  and its special fiber is a union of finitely many Schubert varieties.*

*Proof.* The action morphism  $L^+G \times \mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}} \rightarrow \mathrm{Gr}_G$  factors through  $L^nG \times \mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}$ , since  $\mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}$  is quasi-compact. It suffices to show that the generic fiber  $L^nG \times \mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}$  is dense in the left handside of the factorized action mapping. On the one hand,  $L^nG$  is  $l$ -cohomologically smooth over the base in the sense of [Sch17, Def. 23.8] (see [FSch]) and therefore universally open, cf. [Sch17, Prop. 23.11]; on the other hand,  $L^nG$  is partially proper over the base, i.e. universally weakly specializing. After a quick topological reflection, we see that  $v$ -closures commute with such base changes.  $\square$

Here below we confirm Scholze's intuition in the same footnote that these topological matters are completely irrelevant in this specific situation.

**Corollary 4.14** (with J. Anschütz and T. Richarz). *The generic fiber of  $\mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}$  is topologically dense.*

*Proof.* Consider the canonical open morphism  $\mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}} \rightarrow [L^nG \setminus \mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}]$  towards the quotient  $v$ -stack, whose geometric points enumerate Schubert cells in null or positive characteristic. Taking the preimage of the complement of the image of the complement of the



set  $|\mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}|^c$ , then by assumption, we obtain a closed subset of  $|\mathrm{Gr}_{G, \leq \{\mu\}}|^c$ , containing the generic fiber and whose special fiber consists of finitely many Schubert varieties (or more precisely: the underlying topological spaces of these). In particular, the corollary follows.  $\square$

The following remark is also very useful.

**Lemma 4.15.** *The special fiber  $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}, \leq \{\mu\}}$  is contained in the geometric connected component corresponding to  $[\mu]$ .*

*Proof.* In the case of tori, this is [SW20, Proposition 21.3.1]. In the simply connected case, there is only one connected component. If  $G^{\mathrm{der}} = G^{\mathrm{sc}}$ , the torus  $D := G/G^{\mathrm{der}}$  allows us to identify the connected components of  $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{D}}$  and  $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}}$ . In general, consider the  $z$ -extension  $\tilde{G} := (G^{\mathrm{sc}} \rtimes T)/T^{\mathrm{sc}}$  and the induced epimorphism  $\mathrm{Gr}_{\tilde{\mathcal{G}}, \leq \{\tilde{\mu}\}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq \{\mu\}}$  (apply the criterion of geometric points).  $\square$

**Proposition 4.16.** *The natural map  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq \{\mu\}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}^{\mathrm{ad}}, \leq \{\mu^{\mathrm{ad}}\}}$  is an isomorphism, where  $\mathcal{G}^{\mathrm{ad}}$  is the corresponding parahoric model of  $G^{\mathrm{ad}}$ .*

*Proof.* By the criterion of geometric points, it is sufficient to check bijectivity on fibers. Let  $(C, C^+)$  be an algebraically closed perfectoid affinoid field. If  $\mathrm{char.} \ C = 0$ , then  $G(B_{\mathrm{dR}, F}^+(C)) \rightarrow G^{\mathrm{ad}}(B_{\mathrm{dR}, F}^+(C))$  is surjective and lies in a natural cartesian square with  $G(B_{\mathrm{dR}, F}(C)) \rightarrow G^{\mathrm{ad}}(B_{\mathrm{dR}, F}(C))$ . If  $\mathrm{char.} \ C = p$ , then the fiber product of

$$G(W_{\mathcal{O}_F}(C)[1/p]) \rightarrow G^{\mathrm{ad}}(W_{\mathcal{O}_F}(C)[1/p]) \leftarrow G^{\mathrm{ad}}(W_{\mathcal{O}_F}(C))$$

is not  $G(W_{\mathcal{O}_F}(C)[1/p])$ , but an overgroup with finite index. The description of parahoric groups by Haines-Rapoport (see [I, prop. 3.9.]) states that the intersection of such a group with the kernel of the Kottwitz map is equal to  $G(W_{\mathcal{O}_F}(C)[1/p])$ . In particular,  $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathrm{Gr}}_{\mathcal{G}^{\mathrm{ad}}}$  is an isomorphism on geometric connected components.  $\square$

A morphism  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  between smooth and affine group schemes over a discrete valuation ring is called a dilated immersion if  $\mathcal{G}$  is thereby identified with the neutral component of the group smoothening in the sense of [BLR, Lem. 7.1.4, Thm. 7.1.5] of its scheme-theoretic image in  $\mathcal{H}$ .

**Corollary 4.17.** *Let  $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  be a dilated immersion of parahoric group schemes. Then  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq \{\mu\}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{H}, \leq \{\rho \circ \mu\}}$  is a closed embedding.*

*Proof.* This works like the earlier corollary as soon as you see that  $\mathcal{G}(W_{\mathcal{O}_F}(C))$  is a normal subgroup of finite index in  $\mathcal{G}(W_{\mathcal{O}_F}(C)[1/p]) \cap \mathcal{H}(W_{\mathcal{O}_F}(C))$ , as integral points remain unaffected by group smoothenings.  $\square$

In what follows, we will exclusively treat the minuscule case, because only then should there be a link to classical global Schubert varieties. The following series of conjectures on the general geometry of what we call Fargues-Fontaine local models was achieved by the author in several personal exchanges with Scholze. In a sense they replace [SW20, Conj. 21.4.1.].



**Conjecture 4.18** (Representability conjecture). *If  $\{\mu\}$  is a minuscule conjugacy class of geometric cocharacters, then  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\{\mu\}}$  is representable by a unique flat weakly normal projective scheme  $\mathbb{M}_{\mathcal{G},\{\mu\}}^{\mathrm{FF},\mathrm{wn}}$ .*

The above conjecture concerns only the desired representability of the minuscule portion of the affine Grassmannian. Unfortunately, for non-minuscule coweights, the generic fiber cannot be represented, by the theory of Banach-Colmez spaces.

**Conjecture 4.19** (Reducedness conjecture). *The hypothetical local model  $\mathbb{M}_{\mathcal{G},\{\mu\}}^{\mathrm{FF},\mathrm{wn}} = \mathbb{M}_{\mathcal{G},\{\mu\}}^{\mathrm{FF},\mathrm{n}}$  has a reduced special fiber whose perfection can be identified with the admissible locus.*

This second conjecture is already very precise as far as the geometry of the local model is concerned and spiritually approaches Scholze's original conjecture (it immediately implies normality). Due to the lack of non-topological information in the perfectoid world, it can never be solved within this mathematical setting.

**Conjecture 4.20** (Compatibility conjecture). *Let  $\underline{\mathcal{G}}$  be a parahoric group scheme over  $\mathcal{O}_F[t]$  in the sense of Goal 3.7 and  $\{\underline{\mu}\}$  a geometric conjugacy class of cocharacters of the reductive group  $\underline{\mathcal{G}} \otimes F[t^{\pm 1}]$ . Then  $\mathbb{M}_{\underline{\mathcal{G}},\{\underline{\mu}\}}^{\mathrm{BK},\mathrm{wn}}$  is isomorphic to  $\mathbb{M}_{\mathcal{G},\{\mu\}}^{\mathrm{FF},\mathrm{wn}}$ , where  $(\mathcal{G}, \{\mu\}) := (\underline{\mathcal{G}}, \{\underline{\mu}\}) \otimes_{\mathcal{O}_F[t], t \mapsto \varpi_F} \mathcal{O}_F$ .*

The motivation for this conjecture is twofold: first, this looks like a promising approach to show the representability conjecture; second, it seems rather difficult to imagine that two parallel local model theories could be developed (in the minuscule case).

**Conjecture 4.21** (Embedding conjecture). *If  $(\mathcal{G}', \{\mu'\})$  is another pair with isomorphic adjoint pair and a locally closed Hodge embedding  $\rho : (\mathcal{G}', \{\mu'\}) \rightarrow (\mathcal{GL}_n, \{\varpi_d^\vee\})$ , then the scheme-theoretic image  $\mathbb{M}_{\mathcal{G},\{\mu\}}^{\mathrm{FF},\mathrm{tn}}$  of  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}',\{\mu'\}}$  in  $\mathbb{M}_{\mathcal{GL}_n,\{\varpi_d^\vee\}}^{\mathrm{FF},\mathrm{wn}}$  is topologically normal and independent of the choice of  $(\mathcal{G}', \{\mu'\})$  and  $\rho$ .*

Before the contributions of [III], the literature was strongly under the superstition that all occurring local models must be normal, and that any uncertainty was due to a technical deficiency. This is no longer the case due to the existence of non-normal Schubert varieties (see [III, Thm. 1.1, Cor. 1.4]). The embedding conjecture represents the optimal way in which this clumsiness (in most abelian cases) could be solved and is based on a (still conjectural) mature prismatic theory of affine Grassmannians.

We now examine the first three conjectures only in cases of abelian type, i.e., when the generic fiber  $(G, \{\mu\})$  can be embedded in  $(\mathrm{GL}_n, \{\varpi_d^\vee\})$ , up to a zigzag of central extensions. This condition can be understood in terms of the classification of reductive groups by requiring that all simple factors of  $(G^{\mathrm{ad}}, \{\mu^{\mathrm{ad}}\})$  are of type  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D^{\mathbb{R}}$  or  $D^{\mathbb{H}}$  (see [De79, table 1.3.9.]).

**Proposition 4.22.** *The representability conjecture holds for all pairs  $(\mathcal{G}, \{\mu\})$  of abelian type.*

*Proof.* Since central extensions preserve integral Schubert varieties (see 4.16), one may assume the existence of a Hodge embedding  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n$ . The work [Lan00] by Landvogt provides equivariant maps  $\mathcal{I}^1(G, F) \rightarrow \mathcal{I}^1(\mathrm{GL}_n, F)$  between the extended buildings, which in turn imply the continuation of  $\rho$  to a dilated immersion  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{GL}_n$  of parahoric group schemes. From this one derives a closed embedding  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \{\mu\}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{GL}_n, \{\rho \circ \mu\}}$ , and the representability of the left handside by a weakly normal projective scheme (see Cor. 4.17 and Thm. 4.6).  $\square$

**Proposition 4.23.** *The compatibility conjecture holds for all pairs  $(\underline{\mathcal{G}}, \{\underline{\mu}\})$  of abelian type.*

*Proof.* With the help of Prop. 3.13, we can construct a morphism  $(\underline{\mathcal{G}}, \{\underline{\mu}\}) \rightarrow (\mathcal{GL}_n, \{\varpi_d^\vee\})$  of parahoric group schemes inducing an embedding of  $v$ -sheaves  $\mathbb{M}_{\underline{\mathcal{G}}, \{\underline{\mu}\}}^{\mathrm{BK}, \diamond} \hookrightarrow \mathbb{M}_{\mathcal{GL}_n, \{\varpi_d^\vee\}}^{\mathrm{BK}, \diamond}$ , whose generic fiber coincides with the canonical  $\mathcal{F}_{G, \{\mu\}}^\diamond \hookrightarrow \mathcal{F}_{\mathrm{GL}_n, \{\varpi_d^\vee\}}^\diamond$  (see the proof of the [II, prop. 3.14.]). Now it is enough to compare the Breuil-Kisin  $\mathbb{M}_{\mathcal{GL}_n, \{\varpi_d^\vee\}}^{\mathrm{BK}, \diamond}$  and Fargues-Fontaine variants  $\mathbb{M}_{\mathcal{GL}_n, \{\varpi_d^\vee\}}^{\mathrm{FF}, \diamond}$  of local models (as integral models of  $\mathcal{F}_{\mathrm{GL}_n, \{\varpi_d^\vee\}}^\diamond$ ): this is [SW20, Cor. 21.6.10.].  $\square$

**Corollary 4.24.** *The reducedness conjecture holds for all pairs  $(\mathcal{G}, \{\mu\})$  of abelian type whose absolutely simple adjoint  $F^{\mathrm{nr}}$ -factors split over a quadratic extension given by a cyclic Eisenstein polynomial.*

*Proof.* This description of the special fiber essentially follows from Thm. 4.3 and Prop. 4.23. In order to get the full statement as it stands, we need to apply étale descent and Levin's approach to Weil-restrictions (see [Lev16]).  $\square$

## REFERENCES

- [I] *Théorie de Bruhat-Tits pour les groupes quasi-réductifs.*
- [II] *Grassmanniennes affines tordues sur les entiers.*
- [III] *On the normality of Schubert varieties: remaining cases in positive characteristic.*
- [APLR] J. Anschütz, J. N. Pereira Lourenço & T. Richarz. *The  $B_{\mathrm{dR}}^+$ -affine Grassmannian and local models*, in preparation.
- [BGR84] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert. *Non-Archimedean analysis.*, Grundlehren Band 261, Berlin Heidelberg New York, Springer (1984).
- [BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud. *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 21, Berlin, New York: Springer Verlag.
- [BT72] F. Bruhat & J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local:I. Données radicielles valuées*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 41 (1972), p. 5-251.
- [BT84] F. Bruhat & J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local:II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 60 (1984), p. 5-184.
- [CT77] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc. *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 10 (1977), 175–229.

- [CGP15] B. Conrad, O. Gabber & G. Prasad. *Pseudo-reductive groups*. New Mathematical Monographs 26. Cambridge: Cambridge University Press (ISBN 978-1-107-08723-1/hbk; 978-1-316-09243-9/ebook). xxiv, 665 p. (2015).
- [CP16] B. Conrad & G. Prasad. *Classification of pseudo-reductive groups*, Annals of Mathematics Studies 191, Princeton University Press (2016).
- [De79] P. Deligne. *Variétés de Shimura : Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*. Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math. Am. Math. Soc., Corvallis/Oregon 1977, Proc. Symp. Pure Math. 33, No.2, 247-290 (1979).
- [Gab12] O. Gabber. *On pseudo-reductive groups and compactification theorems*, Oberwolfach Reports (2012), 2371–2374.
- [GT80] S. Greco & C. Traverso. *On seminormal schemes*, Compositio Math. 40 (1980), no. 3, 325–365.
- [Fal03] G. Faltings. *Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 5, No. 1, 41-68 (2003).
- [FSch] L. Fargues & P. Scholze. *Geometrization of the local Langlands correspondence*, in preparation.
- [KL16] K. Kedlaya & R. Liu. *Relative  $p$ -adic Hodge theory, II: Imperfect period rings*, Vorveröffentlichung, <https://arxiv.org/abs/1602.06899>.
- [KP18] M. Kisin & G. Pappas. *Integral models of Shimura varieties with parahoric level structure*. Publ. Math. de l'I.H.É.S., 128 (2018), 121 - 218.
- [Lan00] E. Landvogt. *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building*, J. Reine Angew. Math., 518 (2000), 213-241.
- [Lev16] B. Levin. *Local models for Weil-restricted groups*, Compositio Math. 152 (2016), 2563-2601.
- [Man80] M. Manaresi. *Some properties of weakly normal varieties*, Nagoya Math. J. 77 (1980), 61–74.
- [Mat88] O. Mathieu. *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales*, Astérisque vol. 159-160 (1988).
- [Mit85] D. Mitzman. *Integral bases for affine Lie algebras and their universal enveloping algebras*, Contemporary Mathematics, 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1985).
- [PR08] G. Pappas & M. Rapoport. *Twisted loop groups and their affine flag varieties*. Adv. Math. 219, No. 1, 118-198 (2008).
- [PZ13] G. Pappas & X. Zhu. *Local models of Shimura varieties and a conjecture of Kottwitz*. Invent. Math. 194, No. 1, 147-254 (2013).
- [PL17] J. N. Pereira Lourenço. *The Riemannian Hebbarkeitssätze for pseudorigid spaces*, preprint, <https://arxiv.org/abs/1711.06903>.
- [Ray70] M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 119, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Sch17] P. Scholze. *Étale cohomology of diamonds*, preprint, <https://arxiv.org/abs/1709.07343>.
- [SW20] P. Scholze & J. Weinstein. *Berkeley lectures on  $p$ -adic geometry*, Ann. of Math. Studies 207 (2020).
- [SGA3] SGA3, *Schémas en groupes. III: Structure des schémas en groupes réductifs*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 153, Springer-Verlag, Berlin, 1962/1964.
- [StaProj] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*, available at [stacks.math.columbia.edu](https://stacks.math.columbia.edu).
- [Ti84] J. Tits. *Groups and group functors attached to Kac-Moody data*, Arbeitstagung Bonn 1984, p. 193-223.
- [Zhu14] X. Zhu. *On the coherence conjecture of Pappas and Rapoport*. Ann. Math. (2) 180, No. 1, 1-85 (2014).
- [Zhu17] X. Zhu. *Affine Grassmannians and the geometric Satake in mixed-characteristic*. Ann. Math. (2) 185, No. 2, 403-492 (2017).

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT BONN, ENDENICHER ALLEE 60, 53115 BONN, DEUTSCH-  
LAND

*Email address:* `lourenco@math.uni-bonn.de`