

ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

Ing. Pedro Vardanega - Ing. Alicia Alvarez

U.D.3 Matemática

**Guía complementaria
de ejercicios de
Algebra y Geometría Analítica**

BM1BP2

GUÍA COMPLEMENTARIA DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
- CURSO DE VERANO -
EJERCICIOS DE RECTA Y PLANO

1) Sean las rectas $L_1: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-ky=4 \end{cases}$, $L_2: \frac{x-1}{2} = y+2 = z$

a) Halle $k \in \mathbb{R}$, si existe, tal que L_1 sea paralela al vector $\vec{v} = (1,1,0)$.

b) Para $k = -1$, determine si L_1 y L_2 son coplanares o alabeadas, y halle la ecuación del plano que las contiene y/o la distancia entre ellas, según corresponda.

Rta.: a) No existe k b) Son alabeadas, $\text{dist}(L_1, L_2) = \frac{11}{\sqrt{35}}$

2) Calcule la distancia de la recta $L_1: (x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$ al plano π que contiene al eje "z" y que es paralelo a la recta L_1 . Grafique el plano.

Rta.: $x - y = 0$; $\text{dist}(L_1, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) Dadas la recta $r: (x, y, z) = (1 + t, kt, 2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(-3, 1, 2)$, $B(1, 2, 1)$

a) Halle $k \in \mathbb{R}$, si existe, tal que B pertenezca a la recta r .

b) Para $k = 2$, halle la ecuación paramétrica del plano que pasa por A y contiene a la recta r .

Rta.: a) No existe k b) $\begin{cases} x = -3 + 4t_1 + t_2 \\ y = 1 - t_1 + 2t_2 \\ z = 2 - t_2 \end{cases}; t_1 \in \mathbb{R} \wedge t_2 \in \mathbb{R}$

4) Sean las rectas: $L_1: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 \\ z = -\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $L_2: x + 2 = -y = -(z - 1)$

a) Determine si son alabeadas.

b) Calcule la distancia entre ellas o su intersección, según corresponda

Rta.: a) Son alabeadas b) $\text{dist}(L_1, L_2) = \frac{2}{\sqrt{6}}$

5) Sean las rectas: $r_1: x + 1 = y + 2 = \frac{z}{3}$; $r_2: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Obtenga las ecuaciones de todos los planos π que cumplen con las siguientes condiciones:

$\pi \perp r_1$ y $\text{distancia}(\pi, r_2) = \sqrt{11}$

Rta.: $\pi_1: x + y + 3z + 1 = 0$; $\pi_2: x + y + 3z - 21 = 0$

6) Sean: $r: \begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ x + tz + h = 0 \end{cases}$ y $\pi: x + y + z + 1 = 0$

Determine los valores de t y $h \in \mathbb{R}$ para los cuales $r \subset \pi$

Rta.: $t = \frac{1}{2} \wedge h = 1$

7) Sean: la recta $r: (x, y, z) = (1 + \lambda, -1 - 2\lambda, 2 + k\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

y el plano $\pi : (x, y, z) = (\alpha + \beta, 1 - \beta, 2 + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \beta \in \mathbb{R}$

a) Halle el valor de "k" para que la recta "r" sea paralela al plano π .

b) Para el valor de "k" hallado, calcule la distancia entre la recta y el plano.

Rta.: a) $k = -1$ b) $\text{dist}(r, \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8) Dadas las rectas: $L_1 : \frac{x-1}{-1} = y-2 = z$; $L_2 : \begin{cases} x = 1-2\beta \\ y = 3+\beta \\ z = 1+\beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

a) Demuestre que se cortan en un único punto, y calcule las coordenadas de dicho punto.

b) Halle la proyección del punto $A(1,1,0)$ sobre el plano que determinan las rectas L_1 y L_2 .

Rta.: a) $I(-1,4,2)$ b) $\pi : y - z - 2 = 0$; $A' \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right)$

9) Sea la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - kz = 0 \end{cases}$

a) Halle todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que la distancia de la recta al origen de coordenadas sea $d = 1$

b) Grafique ambos planos y la recta intersección cuando $k = 1$

Rta.: a) $k = -1$ b) $r : (x, y, z) = (t, 1-2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$

10) Sean los planos: $\pi_1 : x + y - 2z - k = 0$; $\pi_2 : x + y = 1$.

a) Halle $k \in \mathbb{R}$, si existe, tal que la recta que determinan ambos planos esté incluida en el plano coordenado $z = 0$

b) Para $k = 2$, grafique ambos planos utilizando sus trazas, y la recta intersección entre ambos planos.

Rta.: a) $k = 1$ b) $r : (x, y, z) = \left(t, 1-t, -\frac{1}{2} \right)$, $t \in \mathbb{R}$

11) Dado el plano $\pi : (x, y, z) = (1, 0, 5) + t_1(1, 1, -1) + t_2(1, 0, 1)$ y el haz de planos

$\alpha_i : (y-z) + k(x-z-1) = 0$, halle un plano perteneciente al haz que sea perpendicular a π .

Rta: $x + 2y - 3z - 1 = 0$

12) Sean $L_1 : \begin{cases} 2x - 4y + z + 1 = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ y $L_2 : \frac{x-1}{a} = \frac{y+2}{4} = z$

a) Halle "a" para que L_1 y L_2 sean coplanares.

b) Encuentre todos los puntos P pertenecientes al eje "y" tal que la distancia al plano que contiene a L_1 y L_2 sea igual a $\sqrt{41}$

Rta: a) $a = 2$ b) $P_1(0; -23; 0)$, $P_2(0; 18; 0)$

13) Dada la recta $L : \begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\alpha : x + y + z = 9$

a) Halle la ecuación del plano β , que contiene a la recta L y es perpendicular al plano α .

b) Halle la proyección de la recta L sobre el plano α .

Rta: a) $\beta : 2x - y - z + 1 = 0$ b) $L' : (x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, \lambda, \frac{19}{3} - \lambda \right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

14) Halle los valores de las constantes "a" y "b", tal que la proyección de la recta

$$r : \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+at \\ z = bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ sobre el plano } \pi : x+2z = 30 \text{ resulte un solo punto. Encuentre dicho punto.}$$

Rta: $a = 0 \wedge b = -4 \quad P(6; 1; 12)$

- 15) Determine la ecuación de la recta que contiene al origen, es perpendicular a la recta

$$r : x = y-5 \wedge z = 2y-3 \text{ y corta a la recta } s : y = 2x+1 \wedge z = x+2$$

Rta: $(x, y, z) = (t, t, -t); t \in \mathbb{R}$

- 16) Obtenga la ecuación de la recta que pasa por $A(3, 6, 4)$, corta al eje z y es paralela al plano $\pi : x-3y+5z-6=0$. Calcule la distancia de la recta al plano.

Rta: $r : (x, y, z) = (3+t, 6+2t, 4+t) \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{dist}(r, \pi) = \frac{1}{\sqrt{35}}$

- 17) Halle la ecuación del plano que contiene a la recta $s : \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ y forma un ángulo de 30° con la recta $r : (x, y, z) = (-1; 0; 1)t \quad t \in \mathbb{R}$, grafique la recta s y los planos. ¿Cuál es la posición relativa de s y r ? Justifique

Rta: $\alpha_1 : x-y-1=0 \quad \alpha_2 : x+y-5=0 \quad \text{Alabeadas}$

- 18) Dada la recta $L : x-2 = y-1 = \frac{-z-3}{2}$

a) Halle la proyección de L sobre el plano $\pi : x+y+z=0$

b) Halle la ecuación del plano que contiene a L y a su proyección.

Rta: a) Es la recta L , ya que la recta L está contenida en el plano π .

b) $(a+2b)x + (-a)y + bz + (-a-b) = 0$, es un haz de planos que se construye con dos planos cualesquiera que contengan a la recta L .

- 19) Halle el punto contenido en la recta $r : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+t \\ z = 2+2t \end{cases}$ cuya proyección sobre el plano "yz"

es $(0; 1; -2)$.

Rta: $(3; 1; -2)$

- 20) Halle todos los puntos P del plano "xy" tal que la distancia al plano $\alpha : 3y+4z-12=0$ es igual a 1. ¿Qué lugar geométrico representa el conjunto de todos los puntos P ? Grafique.

Rta: $\begin{cases} y = \frac{17}{3} \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{7}{3} \\ z = 0 \end{cases}$ dos rectas paralelas al eje x .

EJERCICIOS DE ESPACIO VECTORIAL

- 21) Justifique si la siguiente afirmación es V o F (Si es verdadera debe demostrarlo y si es falsa es suficiente con un contraejemplo)

Sea el espacio vectorial $(V; +; \cdot; \mathbb{R}; \cdot)$

Si $A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \subset V$ es l. indep. entonces $B = \{\vec{u} - 2\vec{w}, \vec{u} + \vec{v}, k\vec{w} - \vec{u} + \vec{v}\}$ es l. indep.

Rta: Falso, si $k = 4$, B no es linealmente independiente.

- 22) Dado el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \times (1; -1; 2) = (0; 0; 0)\}$

- a) Dé la interpretación geométrica de S .
 b) Analice si S es un subespacio de \mathbb{R}^3 y en caso afirmativo halle una base y su dimensión.

Rta: a) Es una recta que contiene al origen y es paralela al vector $(1; -1; 2)$ **b)** S es un subespacio de dimensión uno donde $\{(1; -1; 2)\}$ es una base.

Nota: \times : producto vectorial o cruz

23) Sean S y W subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}; \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \lambda(a, b, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- a) Obtenga, si existen, $a, b \in \mathbb{R} / W \subset S$. Interprete geoméricamente.
 b) Verifique si para $a = b = 1$, $S \oplus W$ es suma directa, justifique su respuesta.

Rta.: a) $\forall a \in \mathbb{R} \wedge b = a + 1$. La recta W esta incluida en el plano S . **b)** Para éste caso no se verifica la condición anterior por lo tanto la recta no está incluida en el plano, la intersección es el origen y la suma es directa.

24) Dado el conjunto $B = \{kx^2 + k; x^2 - kx; x^2 + kx + 1\} \subset P_2$

- a) Halle todos los valores reales de k para que B sea una base de P_2 .
 b) Para $k = 1$ halle las coordenadas de los vectores de la base canónica en la base B .

Rta.: a) $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ **b)** $x^2_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad 1_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

25) Dado el conjunto $A = \{x^2 + kx - 1; 2x^2 - 2x; 1\} \subset P_2$.

- a) Halle $k \in \mathbb{R} / A$ resulte linealmente dependiente.
 b) Para el valor de k del ítem anterior, halle el espacio generado por A , una base y su dimensión.

Rta: a) $k = -1$ **b)** $E(A) = \{p \in P_2 / p(x) = ax^2 - ax + b\}, B = \{x^2 - x; 1\}, \dim E(A) = 2$

26) Sea $S = \text{gen}\{(0, k, 1), (1, -1, 0), (2, 1, 2)\}$ obtenga $k \in \mathbb{R} / \dim S = 2$, y extienda una base de S a una base de \mathbb{R}^3 , con una base de S^\perp .

Rta.: k $= \frac{3}{2}; \quad B = \{(1, -1, 0), (2, 1, 2), (2, 2, -3)\}$

27) Dados los conjuntos:

$$B = \{(-1, 0, 1), (2, -1, 0)\}, \text{ base de } S \subset \mathbb{R}^3 \text{ y } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$$

- a) Demuestre que W es un subespacio de \mathbb{R}^3 , halle una base y su dimensión.
 b) Halle $S+W$ ¿La suma $S+W$ es directa? Justifique.

Rta.: a) $B_W = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1)\}; \dim W = 2$ **b)** $S+W = \mathbb{R}^3$ la suma no es directa ya que $S \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (-3, 2, -1)t \wedge t \in \mathbb{R}\}$

28) Sean los subespacios: $W_1 = \text{gen}\{(-1, 1, 0), (0, -2, 1), (-1, 3, -1)\}$ y $W_2 = \text{gen}\{(2, a, 1)\}$

- a) Halle "a" para que la suma $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$
 b) Para $a = -4$, encuentre el $W_1 \cap W_2$, una base y su dimensión. Interprete geoméricamente y grafique ambos subespacios.

Rta.: a) $a \neq -4$ **b)** Si $a = -4: W_2 \subset W_1 \therefore W_1 \cap W_2 = W_2; B_{W_2} = \{(2, -4, 1)\} \dim W_2 = 1$

W_1 es un plano y W_2 una recta.

29) Sea el conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b-1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-1 \\ b \\ c+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^{3 \times 1}$. Encuentre los valores de "a", "b"

y "c" para que las coordenadas del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sean $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para los valores hallados, verifique

que B es base de $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

Rta.: $a = 1 \wedge b = 2 \wedge c = -1$

30) Sean los subespacios de P_2 :

$$S = \text{gen} \{ x + x^2; -1 + x \} \quad y \quad W = \{ p(x) = a + bx + cx^2 / a = 0 \wedge b = c \}$$

a) Halle $S + W$, $S \cap W$, bases y dimensión de cada operación. Indique, justificando la respuesta si la suma es directa.

Rta.: $W \subset S \therefore S + W = S$; $B_S = \{x + x^2; -1 + x\}$; $\dim S = 2$

$S \cap W = W$; $B_W = \{x + x^2\}$; $\dim W = 1$. La suma no es directa.

31) Sea S subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ tal que:

$$S = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 / 3x - 2y = 0 \wedge y + z + u = 0\}. \text{ Obtenga una base y la dimensión de S y de } S^\perp$$

Rta.: $B_S = \{(2, 3, -3, 0); (0, 0, 1, -1)\}$; $\dim S = 2$; $B_{S^\perp} = \{(3, -2, 0, 0); (0, 1, 1, 1)\}$; $\dim S^\perp = 2$

32) Sea $B_1 = \{v_1; v_2; v_3\}$ y $B_2 = \{v_1 + 2v_2 + v_3; v_2 + v_3; -v_2 + v_3\}$ bases de \mathbb{R}^3 , proporcione todos los $w \in \mathbb{R}^3$ que tienen las mismas coordenadas en B_1 y B_2

Rta.: $[w]_{B_1} = \begin{bmatrix} h \\ -h \\ 2h \end{bmatrix}$ para $i = 1 \vee i = 2$ o también $w = h(v_1 - v_2 + 2v_3) \forall h \in \mathbb{R}$

EJERCICIOS DE MATRICES Y DETERMINANTES

33) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine el valor de "a", si existe, para que la dimensión del espacio columna sea igual a 2. Justifique su respuesta

b) Para $a = 1$, defina mediante ecuaciones el espacio generado por las columnas de la matriz A.

Rta.: a) $a = 1$, $\text{rango}(A) = \dim(\text{Ec}(A)) = 2$ b) $\text{Ec}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$

34) Analice la validez de la siguiente proposición. Demuestre en caso de ser verdadera, o proporcione un contraejemplo en caso de ser falsa:

a) Si $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ es una matriz inversible entonces $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

b) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices inversibles entonces $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Rta.: a) Verdadero, demuestre que: $(kA)(k^{-1}A^{-1}) = (k^{-1}A^{-1})(kA) = I$

b) Falso Si: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$

35) Obtenga todas las matrices: $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Sugerencia: Premultiplique la ecuación por la matriz P

Rta: $P = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{5}{2}a & -b \end{pmatrix} \wedge a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$

36) Dado el conjunto: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

a) Halle una base y la dimensión del espacio generado por A.

b) Halle $k \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \in \text{gen}(A)$

Rta: a) $\overline{A} = \text{gen}(A) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / X = \begin{pmatrix} a & b \\ -a-3b & 2a+b \end{pmatrix} \wedge a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$B_{\overline{A}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}; \dim(\overline{A}) = 2 \quad \text{b) } k = -2$

37) Dado $S = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / XA = AX \wedge A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, halle:

a) Una matriz genérica $X \in S$, una base y la dimensión de S

b) La relación que deben cumplir los coeficientes de la matriz genérica X para que sea singular.

Rta: a) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \wedge a, b \in \mathbb{R}$ son todas las matrices que conmutan con A.

$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}; \dim S = 2 \quad \text{b) } |a| = |b|$

38) Dado el conjunto $S = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ es antisimétrica y } A^2 = N_{3,3} \}$

a) ¿Es $(S; +; \mathbb{R}; \cdot)$ un subespacio de $(\mathbb{R}^{3 \times 3}; +; \mathbb{R}; \cdot)$?

b) Si a) es afirmativo: halle una base y la dimensión de S

Rta: a) Si, $S = \{ N^{3 \times 3} \}$ espacio nulo **b)** No existe base, $\dim S = 0$

39) Probar que si las matrices A y B son idempotentes, permutables y del mismo orden, entonces A.B es idempotente

Rta: $\forall A \in \mathbb{R}^{p \times p} \forall B \in \mathbb{R}^{p \times p}: A^2 = A \wedge B^2 = B \wedge AB = BA \Rightarrow (AB)^2 = AB$

Dem

$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = A^2 B^2 = AB$

40) Sea A una matriz cuadrada de orden n e idempotente y $B = 2A - I$, demuestre que B es involutiva.

Rta: $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}: A^2 = A \wedge B = 2A - I \Rightarrow B^2 = I$

a) Dem

$$\begin{aligned} B^2 &= BB = (2A - I)(2A - I) = (2A)(2A) + (2A)(-I) + (-I)(2A) + (-I)(-I) = \\ &= (2 \cdot 2)(AA) + [2 \cdot (-1)](AI) + [(-1) \cdot 2](IA) + [(-1)(-1)](II) = \\ &= 4A^2 + (-2)A + (-2)A + I = 4A + [-2 + (-2)]A + I = 4A + (-4)A + I = [4 + (-4)]A + I = 0A + I = N + I = I \end{aligned}$$

41) Dado $S = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ es simétrica } \wedge \text{Tr}(A) = 0 \wedge a_{12} = a_{13} \}$

a) Pruebe que $(S; +; \mathbb{R}; \cdot)$ es un subespacio de $(\mathbb{R}^{3 \times 3}; +; \mathbb{R}; \cdot)$

b) Halle una base y la dimensión de S.

Rta: a) Sugerencia: La demostración la puede realizar con el elemento genérico del espacio

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & c & d \\ b & d & -(a+c) \end{pmatrix} \text{ o utilizando el sistema de 3 ecuaciones } \begin{cases} A = A^T \\ \text{Tr}(A) = 0 \\ a_{12} = a_{13} \end{cases}$$

$$\text{b) } B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim S = 4$$

42) Dados $S = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / |A| = 0 \wedge \text{Tr}(A) = 0 \}$ y $W = \{ B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / B = -B^T \}$

- a) Es S un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? En caso afirmativo dar una base y la dimensión.
 b) Es W un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? En caso afirmativo dar una base y la dimensión.
 c) Es $S \cap W$ un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? En caso afirmativo dar una base y la dimensión.

Rta: a) No, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S \wedge \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in S \wedge \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \notin S$ la suma no es ley de composición interna en S .

b) Si, sugerencia $W = \{ B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \}$ una base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim W = 1$

c) Si, es el espacio nulo: $S \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; no posee base; $\dim S \cap W = 0$

43) Dado el subespacio $S = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ es triang. sup. y } a_{k1} + a_{k2} + a_{k3} = 0 \text{ para } k = 1, 2, 3 \}$

Determine una base y la dimensión de S . ¿Existe $A \in S$ tal que A sea inversible? Justifique.

Rta: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim S = 3$; No, $\text{rg}(A) < 3$

44) Justifique si cada una de las siguientes afirmaciones son V o F (si es verdadera, debe demostrarlo, si es falsa es suficiente con un contraejemplo)

a) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} / |B| \neq 0 \Rightarrow |B^{-1}AB^T| = |A|$

b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n} / A^T A = I \Rightarrow |A| = 1$

c) Sean $A, B, I \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / |A| = 1 \wedge B = 2I \Rightarrow |A^2 B^{-1} + A^2 B| = \frac{125}{8}$

Rta.: a) V b) F c) V

45) Sea $A = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ donde A_j indica la columna j de A y sea

$B = (-A_3 \ 2A_4 + A_2 \ A_1 \ 5A_4)$. Calcule: $\det((A^T)^2 \cdot 2B^{-1})$ sabiendo que $\det(A) = a \neq 0$

Rta: $\frac{16}{5}a$

46) Dada $A = (A^1 \ A^2 \ A^3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con $|A| = 3$ Calcule:

a) $\left| \frac{1}{3} A^T \cdot B \right|$ siendo $B = (A^1 - 2A^2 \ A^1 \ \frac{1}{3} A^3)$

b) $\left| (A^T)^{-1} \cdot \frac{1}{2} M^T \right|$ siendo $M = \begin{pmatrix} -A^2 & 2A^2 + A^1 & 3A^3 \end{pmatrix}$

c) Justifique porque la matriz $E = B \cdot M$ es inversible

d) ¿Las columnas de E son linealmente independientes o dependientes? Justifique.

Rta: a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{3}{8}$ c) Como $|B| = 2 \neq 0 \wedge |M| = 9 \neq 0$, entonces ambas matrices tienen rango tres y por lo tanto son inversibles y también es inversible su producto $E^{-1} = (B \cdot M)^{-1} = M^{-1} \cdot B^{-1}$. d) Como $|E| = 18 \neq 0$ entonces el rango de la matriz es tres, igual al rango columna, por lo tanto las columnas de E son linealmente independientes.

47) Sea P una matriz antisimétrica de orden " n " impar. ¿Cuánto vale el determinante de P ? Justifique.

Nota: P es antisimétrica $\Leftrightarrow P = -P^T$

Rta.: $|P| = 0$ Sugerencia: Aplique la función determinante a la ecuación: $P = -P^T$ y propiedades.

48) Siendo $A_{n,n} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n} / a_{ij} = \begin{cases} x & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ Halle $B = \{x \in \mathbb{Z} / |A_{4,4}| = |A_{3,3}|\}$

Rta.: $|A_{4,4}| = (x+3) \cdot (x-1)^3$; $|A_{3,3}| = (x+2) \cdot (x-1)^2$; $B = \{1\}$

49) Dada la matriz $A_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n} / a_{ij} = \begin{cases} x^i & \text{si } j=1 \\ j^i & \text{si } j \neq 1 \end{cases}$ Halle $B = \{x \in \mathbb{R} / A_3 \text{ sea singular}\}$

Rta.: $|A_3| = 6x(x-2)(x-3)$ $B = \{0; 2; 3\}$

50) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x-2 & 0 & x+2 \\ x-2 & x-3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Indique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ la matriz A es singular.

b) Para los valores de x obtenidos en a), encuentre el espacio columna de A , dé una base y su dimensión.

c) Para $x=0$, calcule $\left| (A^{-1})^2 \cdot 2B^T \right|$ siendo $B = \begin{pmatrix} A^2 - 2A^1 & A^3 & -A^2 \end{pmatrix}$

Rta.: a) $x = -2$ $|A| = (x+2) \cdot (x^2 - 3x + 4)$

b) $\text{Ec}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / -10x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$ Una base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim \text{Ec}(A) = 2$

c) $|A| = 8 \Rightarrow |B| = -16 \Rightarrow \left| (A^{-1})^2 \cdot B^T \right| = -2$

PARCIALES Y RECUPERATORIOS PARTE A
10-2-2010 PARCIAL A CURSO DE VERANO

- 1) Dados los planos: $\pi_1 : x - y = 0$; $\pi_2 : y + z + 1 = 0$

Halle la ecuación de todos los planos que son perpendiculares a los planos anteriores y cuya distancia al origen de coordenadas es igual a 1. Grafique las soluciones

- 2) Dadas las rectas $r_1 : x = y = z + 4$ y $r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = a \end{cases}$

a) Qué valores debe tomar la constante "a" para que las rectas sean coplanares, encuentre el plano que las contiene.

b) Para $a = 0$, calcule la distancia entre las rectas.

- 3) Sean S y W subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + ay + z = 0\} ; W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \lambda(1, 0, b), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

a) Encuentre una base ortonormal de S.

b) Halle los valores de a y b tal que:

i) El complemento ortogonal de S sea igual a W, dé una interpretación geométrica.

ii) La suma S+W sea directa, dé una interpretación geométrica.

- 4) Dado el siguiente subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot)$

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A = A^T\}$$

a) Encuentre una base y la dimensión de S.

b) Halle las coordenadas de I (I matriz identidad) en la base obtenida en el ítem anterior.

c) Sea el subespacio $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A = A^T \wedge AB = BA \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset S$

Encuentre un elemento genérico del W.

- 5) Sean $A = (A_1 \ A_2 \ A_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / \text{Det}(A) = k \neq 0$ y

$$B = (A_1 - 3A_2, \alpha A_2 + 2A_3, -A_1)$$

Verifique que B es inversible para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y obtenga $\text{Det}(B^{-1})$ en función de k.

RESOLUCIÓN FECHA 10-2-2010:

1)

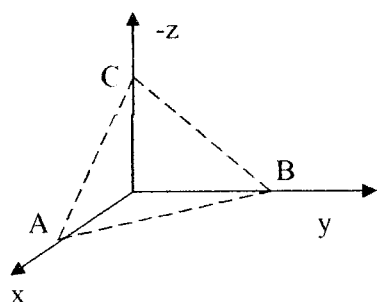
Hallar: $\alpha / \alpha \perp \pi_1 \wedge \alpha \perp \pi_2 \wedge \text{dist}(\alpha, O) = 1$

$$\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_{\pi_2} \wedge \text{dist}(\alpha, O) = 1 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} \wedge \frac{|d|}{\sqrt{3}} = 1$$

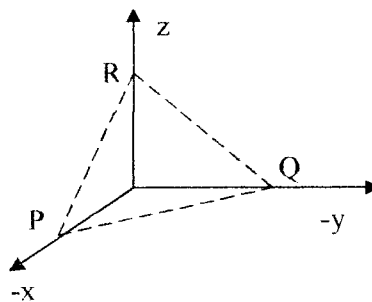
$$\vec{n}_\alpha = (-1, -1, 1) \wedge (d = \sqrt{3} \vee d = -\sqrt{3})$$

$$\alpha_1 : -x - y + z + \sqrt{3} = 0 \qquad \alpha_2 : -x - y + z - \sqrt{3} = 0$$

$$A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), C(0, 0, -\sqrt{3}) \qquad P(-\sqrt{3}, 0, 0), Q(0, -\sqrt{3}, 0), R(0, 0, \sqrt{3})$$



5^{to} octante



3^{er} octante

2) a)

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -4 + t \end{cases} \quad A(0,0,-4) \in r_1 \wedge \vec{u}_1 = (1,1,1) // r_1$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = a \\ z = \lambda \end{cases} \quad B(2,a,0) \in r_2 \wedge \vec{u}_2 = (0,0,1) // r_2$$

$$r_1 \text{ y } r_2 \text{ son coplanares} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0 \quad \boxed{a = 2}$$

Hallar $\pi / r_1 \subset \pi \wedge r_2 \subset \pi$

$$\forall (x,y,z) \in \pi : \overrightarrow{AP}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0$$

$$\boxed{x - y = 0}$$

b) Si $a = 0$ las rectas son alabeadas

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \boxed{\text{dist}(r_1, r_2) = \sqrt{2}}$$

3) a) Para cualquier valor real de "a" la dimensión del espacio es dos y el lugar geométrico es un plano. Existen infinitas bases ortonormales de S, cualquier par de vectores ortogonales normalizados que sean vectores posición de puntos del plano S, por ejemplo:

$$\vec{u} = (1,0,-1) \wedge \vec{v} / \vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v} \in S \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{n} \quad (\vec{n} \text{ un normal de } S)$$

$$\text{Una solución : } \vec{v} = \vec{u} \times \vec{n} = (a, -2, a)$$

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{a}{\sqrt{2a^2+4}}, \frac{-2}{\sqrt{2a^2+4}}, \frac{a}{\sqrt{2a^2+4}} \right) \right\}$$

b)

$$i) \forall (x,y,z) \in S : \langle (x,y,z), (1,a,1) \rangle = 0 \Rightarrow (1,a,1) \in S^\perp$$

$$S^\perp = W \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} / (1,a,1) = t(1,0,b)$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{b} \wedge a = 0$$

$$\boxed{a = 0 \wedge b = 1}$$

S plano perpendicular a $(1,a,1)$ y W es una recta perpendicular al plano S en el origen.

$$S + W \text{ es directa} \Leftrightarrow S \cap W = \{(0,0,0)\}$$

$$ii) S \cap W : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = b\lambda \\ \lambda + b\lambda = 0 \end{cases} \quad \text{comp. det.} \Rightarrow (1+b)\lambda = 0 \wedge 1+b \neq 0$$

$a \in \mathbb{R} \wedge b \neq -1$, la recta no debe estar contenida en el plano.

4) a) Existen infinitas bases, por ej.: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim S = 3$

b) $[I]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \wedge a, b \in \mathbb{R}$

5) $\text{Det}(B) = 6k \wedge k \neq 0 \therefore B$ es inversible $\text{Det}(B^{-1}) = \frac{1}{6k}$

01-03-10 1er REC. PARCIAL A CURSO DE VERANO

1) Dados: $\pi: x + ay - z + 4 = 0$ y $L: (x, y, z) = (1, 0, b) + (2, 1, 1)t; \forall t \in \mathbb{R}$

Encuentre el valor de las constantes "a" y "b" de tal forma que:

a) La recta se encuentre a una distancia igual a $\sqrt{3}$ unidades del plano.

b) La recta esté contenida en el plano.

2) Dados los planos: $\pi_1: 3x + 2y + z - 6 = 0$ y $\pi_2: x + 2z - 4 = 0$

a) Halle la recta intersección de los planos y grafique los planos y la recta.

b) Encuentre el plano que contiene a la recta anterior y es perpendicular al plano $\alpha: x = 5$

3) Los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (-2, a, -2)$ pertenecen al mismo subespacio S de \mathbb{R}^3 y

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}.$$

Halle, si existe, el valor de la constante "a" de tal forma que:

a) $\dim(S^\perp) = 2$. Obtenga una base de S^\perp

b) $S + T = \mathbb{R}^3$.

4) Dado el conjunto:

$$A = \{1 + x; -1 + x^2; x + x^2\} \subset P_2$$

Indique V o F, justifique su respuesta:

a) A es una base de P_2

b) $p(x) = -3 - x + 2x^2 \in \text{gen}(A)$

5) Sean A, B dos matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Analice la validez de las siguientes proposiciones, justifique la respuesta:

a) Si $A \cdot B - A^2 = I$ entonces A es inversible

b) Si $A^2 = N$ entonces $A = N$ (N es la matriz nula de $\mathbb{R}^{n \times n}$)

RESOLUCIÓN FECHA 01-03-10

1) a)

$$\pi: x + ay - z + 4 = 0 \quad \text{y} \quad L: (x, y, z) = (1, 0, b) + (2, 1, 1)t$$

$$L // \pi \wedge \text{dist}(L, \pi) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \vec{u}_L \perp \vec{n}_\pi \wedge \text{dist}(A, \pi) = \sqrt{3}, \forall A \in L$$

Datos: $\vec{u}_L = (2,1,1)$; $\vec{n}_\pi = (1,a,-1)$; $A(1,0,b)$

$$(2,1,1)(1,a,-1) = 0 \wedge \frac{|1+a \cdot 0 - b + 4|}{\|\vec{n}_\pi\|} = \sqrt{3} \Rightarrow a = -1 \wedge \frac{|-b+5|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$a = -1 \wedge (b = 2 \vee b = 8)$$

b)

$$L \subset \pi \Leftrightarrow \forall P: P \in L \Rightarrow P \in \pi$$

$$P(1+2t, t, b+t)$$

$$1+2t+at-(b+t)+4=0$$

$$(a+1)t = -5+b \Rightarrow a+1=0 \wedge -5+b=0$$

$$a = -1 \wedge b = 5$$

También se puede resolver :

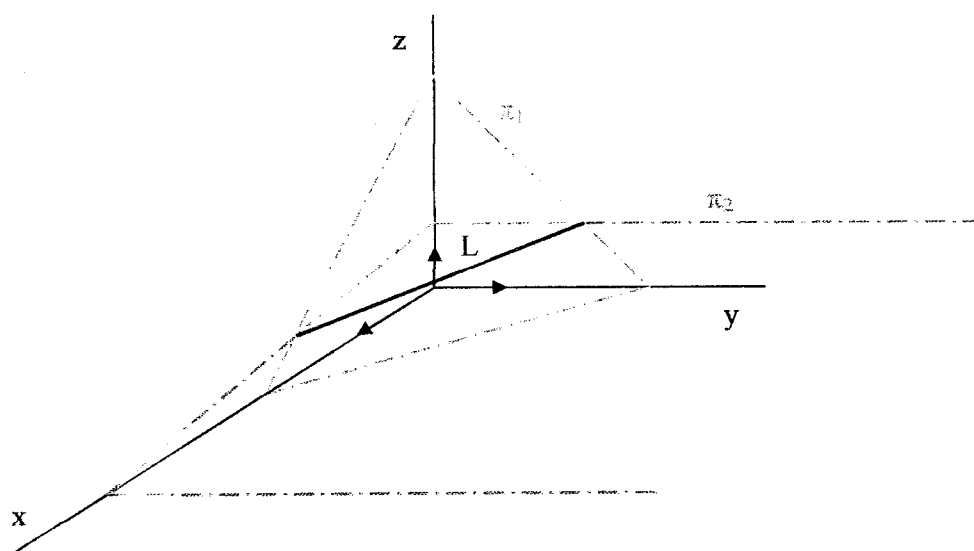
Del ítem a)

$$L \subset \pi \Leftrightarrow L // \pi \wedge \text{dist}(L, \pi) = 0$$

$$a = -1 \wedge b = 5$$

2) a)

$$L = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} 3x + 2y + z - 6 = 0 \\ x + 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad L : \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = -3 + 5t \\ z = 2t \end{cases}$$



b)

$$\text{ec. del haz: } (3a+b)x + (2a)y + (a+2b)z + (-6a-4b) = 0$$

$$\pi_3 \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_3} \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{n}_{\pi_3} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow (3a+b; 2a; a+2b)(1;0;0) = 0 \Rightarrow 3a+b=0$$

Una solución no trivial: $a = 1 \wedge b = -3$

$$\pi_3: 2y - 5z + 6 = 0$$

$$\dim(S^\perp) = 2 \Rightarrow \dim(S) = 1$$

$$(\dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3))$$

$$\exists k \in \mathbb{R} / \vec{v} = k \vec{u} \Rightarrow \exists k = -2 / (-2, a, -2) = k(1, 0, 1) \wedge a = 0 \quad a=0$$

$$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$$

$$B_S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$$

b)

Como $\vec{u} = (1, 0, 1) \in T \wedge \vec{v} = (-2, a, -2) \in T \Rightarrow \text{gen}(\vec{u}, \vec{v}) \subset T \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow S + T = T$

$$\therefore \forall a \in \mathbb{R} / S + T = \mathbb{R}^3$$

4) a)

$\dim(P_2) = 3$ si A es L.I. \Rightarrow A es base de P_2

$$\alpha(1+x) + \beta(-1+x^2) + \gamma(x+x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = a \\ \gamma = -a \end{cases} \text{ infinitas soluciones}$$

A no es linealmente independiente por lo tanto no es base. **Falso**

b)

De a) $\dim(\text{gen}(A)) = 2$

$$-3 - x + 2x^2 = \alpha(1+x) + \beta(-1+x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -3 \\ \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases} \text{ Verdadero}$$

5) a) **Verdadero**

$$AB - A^2 = I \Rightarrow |AB - A^2| = |I| \Rightarrow |A(B - A)| = 1 \Rightarrow |A||B - A| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible}$$

b) **Falso**

$$\text{Contraejemplo } \exists A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A^2 = N \wedge A \neq N$$

04-03-10 2do REC. PARCIAL A CURSO DE VERANO

1) Dadas las rectas:

$$L_1: x + 2 = \frac{y}{a} = z \quad ; \quad L_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = b \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

a) Halle los valores de las constantes reales "a" y "b" tal que las rectas L_1 y L_2 se corten formando un ángulo recto.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, calcule la distancia entre las rectas

2) Dado el plano $\pi: (x, y, z) = (1, -1, 1) + (1, 0, 1)t_1 + (0, 1, 1)t_2; t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y la recta

$$L: (x, y, z) = (1, 1, 1)\lambda; \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Encuentre:}$$

a) El plano que contiene a la recta L y es perpendicular al plano π .

b) La proyección de la recta L sobre el plano π .

3) Dado el conjunto $A = \{(1, 1, 0), (0, a, 1), (2, b, 0)\}$

a) Encuentre el rango del conjunto para los distintos valores de las constantes a y b.

b) Para $a = b = 2$, halle el espacio generado por A y dé una base de dicho espacio.

c) Halle las coordenadas del vector $\vec{u} = (-1, 5, 3)$ en la base que obtuvo en el ítem anterior.

4) Dado el siguiente subespacio de \mathbb{R}^4 : $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 = x_2 = x_3\}$. Encuentre

a) Una base del complemento ortogonal de S.

b) Construya una base de \mathbb{R}^4 con una base de S y la base que obtuvo en el ítem anterior.

5) Dada la matriz: $A = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} / \text{Det}(A) = a \wedge a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Calcule:

$$\text{Det}(2A^2 B^{-1}), \text{ siendo } B = (A_1 + 2A_3 \quad -A_3 \quad A_2 \quad 3A_4)$$

RESOLUCIÓN FECHA 04-03-10

1) a)

$$A(-2,0,0) \in L_1; \vec{u}_1 = (1, a, 1) // L_1 (a \neq 0) \quad B(1,2,b) \in L_2; \vec{u}_2 = (1,1,0) // L_2$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow (1, a, 1)(1, 1, 0) = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \therefore a = -1 \quad (\text{cond. de perpendicularidad})$$

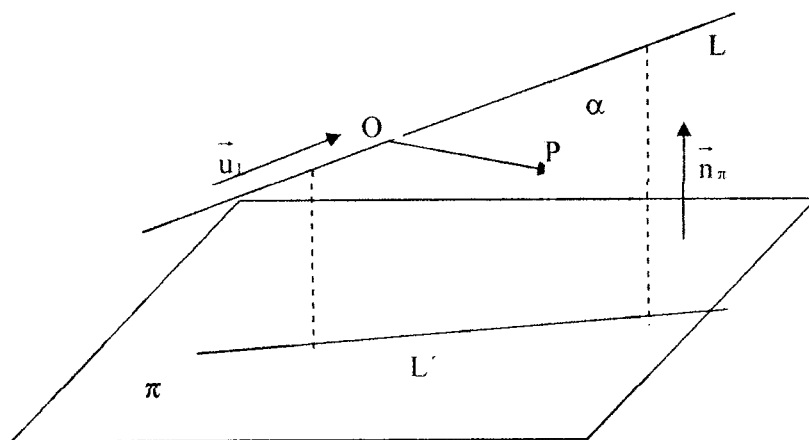
$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ coplanares} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \boxed{a = -1 \wedge b = \frac{1}{2}}$$

b)

$$b = 0 \Rightarrow b \neq \frac{1}{2} \therefore \text{las rectas son alabeadas } \text{dist}(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\|(-1, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\text{dist}(L_1, L_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$2) \text{ a) } \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \pi: x+y-z+1=0$$



Construyo $\alpha / L \subset \alpha \wedge \alpha \perp \pi \therefore \alpha: \overrightarrow{OP}(\vec{u}_1 \times \vec{n}_\pi) = 0$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\alpha: x - y = 0}$$

b) $L = \pi \cap \alpha : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$$L : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

3) a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - b$$

Si $b \neq 2 : \text{rg}(A) = 3$

Si $b = 2 : \text{rg}(A) < 3 \wedge \{(1,1,0); (0,a,1)\} \text{ L.I.} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

$$\forall a \in \mathbb{R} \wedge b \neq 2 : \text{rg}(A) = 3$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \wedge b = 2 : \text{rg}(A) = 2$$

b) Si $a = b = 2 : \text{rg}(A) = 2 \therefore \text{gen}(A) = \text{gen}\{(1,1,0); (0,2,1)\}$

$$\begin{aligned} \text{gen}(A) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = (1,1,0)\lambda_1 + (0,2,1)\lambda_2\} \text{ Una base } B_A = \{(1,1,0), (0,2,1)\} \\ \text{gen}(A) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = -1 \wedge \beta = 3 \therefore \vec{u}_{B_A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,1,0)t_1 + (0,0,0,1)t_2\}$

Una base de $S : B_S = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$

$$S^\perp : \begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1,1,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0,0,0,1) \rangle = 0 \end{cases} \quad S^\perp : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad S^\perp : \begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Una base de } S^\perp : B_{S^\perp} = \{(1,0,-1,0), (0,1,-1,0)\}$$

$$\text{Una base de } \mathbb{R}^4 : B = B_S \cup B_{S^\perp} = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,-1,0)\}$$

$$\begin{aligned} 5) \text{Det}(B) &= \text{Det}(A_1 + 2A_3 \quad -A_3 \quad A_2 \quad 3A_4) \underset{1^\circ C + 2^\circ 3^\circ C}{=} \text{Det}(A_1 \quad -A_3 \quad A_2 \quad 3A_4) \underset{\substack{\text{ext}(-1) \\ \text{ext} 3}}{=} \\ &= -3\text{Det}(A_1 \quad A_3 \quad A_2 \quad A_4) \underset{A_3 \leftrightarrow A_2}{=} 3\text{Det}(A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4) = 3a \end{aligned}$$

$$\text{Det}(2A^2 B^{-1}) = \text{Det}(2A^2) \text{Det}(B^{-1}) = 2^4 \text{Det}(A^2) [\text{Det}(B)]^{-1} = 16 [\text{Det}(A)]^2 [\text{Det}(B)]^{-1} = 16a^2 (3a)^{-1} = \frac{16}{3}a$$

$$\text{Det}(2A^2 B^{-1}) = \frac{16}{3}a$$

EJERCICIOS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

51) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Qué relación deben cumplir las constantes reales a y b para que la dimensión del subespacio solución $S_h = \{ \forall X \in \mathbb{R}^3 / AX = N \}$ sea igual a uno y encuentre dicha solución.
 b) Para la matriz que obtuvo en el ítem anterior encuentre el espacio columna y su dimensión.
 c) Calcule la intersección y la suma de los dos subespacios anteriores e indique en qué casos son complementos ortogonales.

Rta.: a) $ab = 1$; $S_h = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (-a, 1, 1)t \wedge t \in \mathbb{R} \}$

52) b) $Ec(A) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - ay - az = 0 \}$; $\dim Ec(A) = 2$

53) c) $S_h \cap Ec(A) = \{ (0, 0, 0) \}$; $S_h \oplus Ec(A) = \mathbb{R}^3$

Son complementos ortogonales si: $(a = b = 1 \vee a = b = -1)$

52) Dada la función: $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / F(X) = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Encuentre el conjunto imagen de la función y justifique porque es un subespacio del codominio.
 b) Halle todos los vectores cuya imagen es el mismo vector ($AX=X$). Cuál es la interpretación geométrica.

Rta.: a) $Im(F) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \}$, plano que contiene al origen

b) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (1, -1, 0)t \wedge t \in \mathbb{R} \}$, recta que contiene al origen

53) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(1, 0, 2) = (0, 0, 0)$; $T(0, 3, 0) = (-1, 2, 1)$; $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$

¿Define una transformación lineal? ¿Es única? Justifique su respuesta, y si es afirmativa, halle la expresión analítica de la transformación lineal.

Rta.: Si, es única ya que el conjunto $\{ (1, 0, 2), (0, 3, 0), (1, 0, 0) \}$ es una base del dominio de T

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}y; \frac{2}{3}y; \frac{1}{3}y \right)$

54) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 / T(1, 0, 1) = (0, 0, 2, 1)$; $T(1, a, 1) = (1, 0, 0, 0)$; $T(2, 0, a) = (0, -2, 0, 0)$

- a) Halle todos los $a \in \mathbb{R} / T$ define una transformación lineal única (única para cada valor de a hallado).
 b) Sea $a = 1$, obtenga la expresión analítica de la transformación lineal.

Rta.:

a) $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$ $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 / T(x, y, z) = \left(\frac{y}{a}; \frac{2x - 2z}{a - 2}; \frac{2ax - 4z}{a - 2} - \frac{2}{a}y; \frac{ax - 2z}{a - 2} - \frac{y}{a} \right)$

b) Si $a = 1$: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 / T(x, y, z) = (y; -2x + 2z; -2x - 2y + 4z; -x - y + 2z)$

- 55) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: T(x, y, z) = (x - z, 3y)$. Halle el núcleo y la imagen, y una base de cada uno. Verifique el teorema de las dimensiones.

Rta.: $\text{Nu}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (1, 0, 1)\lambda\}; B_{\text{Nu}(T)} = \{(1, 0, 1)\}; \dim \text{Nu}(T) = 1$

$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2; B_{\text{Im}(T)} = \{(1, 0), (0, 1)\}; \dim \text{Im}(T) = 2; \dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3$

- 56) Halle la expresión analítica de una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$\text{Nu}(T) = \text{gen}\{(-2, 1, 0)\}$, Imagen T : vectores posición incluidos en el plano $\pi: x + 2y - 3z = 0$

Rta.: Una de ellas es: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (3x + 6y + 2z, -z, x + 2y)$

- 57) Defina, si es posible, una transformación lineal $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$T(1, 0, 0, 1) = (0, 2, 0); T(0, 1, 0, 1) = (0, 1, 0); T(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 1)$ y cuyo núcleo sea $\text{Nu}(T) = \text{gen}\{(0, 0, 0, 1)\}$

¿Cuál es la dimensión del núcleo y de la imagen? Justifique su respuesta. Halle la imagen de T .

Rta.: $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(1, 0, 0, 1) = (0, 2, 0) \wedge T(0, 1, 0, 1) = (0, 1, 0) \wedge T(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 1) \wedge T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$\dim \text{Nu}(T) = 1; \dim \text{Im}(T) = 3; \dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^4; \text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$

- 58) Halle $a \in \mathbb{R}$ tal que exista una única transformación lineal que cumpla las siguientes condiciones:

$T(0, 2, 0) = (2, 0, 2); T(1, 0, 1) = (0, 1, 2); T(1, 1, 1) = (a, 1, 3); \text{Nu}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = -y = z\}$

Justifique

Obtenga la expresión analítica de la transformación, su imagen y verifique el teorema de las dimensiones.

Rta.: $a = 1; T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (-2x + y + 2z, 2x - z, 2x + y)$

$\dim \text{Nu}(T) = 1; \dim \text{Im}(T) = 2; \text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (1, 0, 1)t_1 + (2, -1, 0)t_2 \wedge t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$

59) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halle $a \in \mathbb{R}$ tal que $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sea una transformación lineal cuyo núcleo

tenga dimensión distinta de cero.

- b) Con el valor de a obtenido anteriormente, halle la expresión analítica de la transformación lineal y una base de su imagen.

Rta.: a) $a = 1$

b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x + y; -2y + z; x + z\right); B_{\text{Im}(T)} = \{(1, -2, 0); (0, 1, 1)\}$

- 60) Sea π el plano que contiene al eje "z" y al punto $(1, 2, 1)$. Defina una transformación lineal

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que verifique:

$\text{Nu}(F) \subseteq \pi$ e $\text{Im}(F) = \{M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / M \text{ es simétrica y de traza nula}\}$

Obtenga la expresión analítica de F y el núcleo.

Rta.: Una de ellas es:

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} / F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}; \text{Nu}(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (0, 0, 1)\lambda\}$$

61) Sea $M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en las bases

$B_1 = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 3)\}$; $B_2 = \{(1, 1), (0, 2)\}$. Halle la expresión analítica de la transformación, núcleo, imagen y una base de cada uno.

Rta.: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x, y, z) = \left(y - \frac{2}{3}z, 2x + 3y\right);$

$\text{Nu}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (-3, 2, 3)\lambda \wedge \lambda \in \mathbb{R}\}; B_{\text{Nu}(T)} = \{(-3, 2, 3)\}; \dim \text{Nu}(T) = 1$

$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2; B_{\text{Im}(T)} = \{(1, 0), (0, 1)\}; \dim \text{Im}(T) = 2$

62) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x, y, z) = (x - 2z, y + 3x)$ y las bases $B_1 = \{(-1, 1, 0), (0, 0, 3), (2, 0, 0)\}; B_2 = \{(0, 1), (-2, 1)\}$

a) Halle la matriz asociada a la transformación lineal en las bases B_1, B_2

b) Halle las coordenadas, en la base B_2 , de la imagen por la transformación lineal del vector

$\vec{u} = (3, 1, 2)$

Rta.: a) $M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 & 7 \\ \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\left[T\left(\begin{pmatrix} \vec{u} \end{pmatrix}\right)\right]_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

63) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y las bases: $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, -3, 1), (0, 0, -2)\}$

y $B_2 = \{(2, 0), (0, -1)\}$

a) Halle $a \in \mathbb{R}$, si existe, tal que $T(2, 0, 1) = (1, -5/2)$

b) Si $a = 1$, obtenga, utilizando la matriz M , la imagen del vector $(1, 0, -3)$

Rta.: a) $a = 1$ b) $\left(8; -\frac{1}{2}\right)$

64) Sea $M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en las bases

$B_1 = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 2)\}; B_2 = \{(1, -1), (0, 1)\}$

Halle la expresión analítica de la transformación lineal, núcleo, imagen y una base de cada uno.

Rta.: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x, y, z) = \left(x + y + \frac{1}{2}z, -x + \frac{1}{2}z\right)$

$$\text{Nu}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (1, -2, 2)\lambda \wedge \lambda \in \mathbb{R}\}; \quad B_{\text{Nu}(T)} = \{(1, -2, 2)\}; \quad \dim \text{Nu}(T) = 1$$

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2; \quad B_{\text{Im}(T)} = \{(1, 0), (0, 1)\}; \quad \dim \text{Im}(T) = 2$$

65) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / la matriz asociada a la transformación lineal es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{B_1 B_2}$ siendo:

$$B_1 = \{(2, 0, 0), (0, -2, 1), (0, 0, 1)\} \quad B_2 = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 3)\}$$

a) Sin obtener la expresión analítica de la transformación lineal, calcule la dimensión del núcleo de la transformación lineal.

b) Encuentre la imagen de $\bar{u} = (3, 0, 1)$ expresada en la base canónica, utilizando la matriz A.

Rta.: a) $\dim \text{Nu}(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(A) = 3 - 3 = 0$ b) $T(\bar{u}) = (1, 1, 9)$

66) Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y) = (x + 2y, y, -x + y)$ una transformación lineal

a) Halle B_1 : base de \mathbb{R}^2 / $M(T)_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ siendo $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

b) Halle una base y la dimensión de la imagen de T.

c) **Rta:** a) $B_1 = \{(-1; 1); (1; 1)\}$ b) $\{(1; 1; 0); (1; 0; 1)\}$, $\dim \text{Im}(T) = 2$

67) Sea $T: V \rightarrow W / T(X) = Y$ una transformación lineal. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justifique o dé un contraejemplo.

a) Si $\{X_1; X_2; \dots; X_n\}$ es linealmente independiente entonces $\{T(X_1); T(X_2); \dots; T(X_n)\}$ es linealmente independiente.

b) Si $A = \{X_1; X_2\} \subset V$ entonces $B = \{T(X_1 + X_2)\} \subset \text{Im}(T)$.

Rta: a) Falsa, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0)$; $A = \{(1, 0); (0, 1)\}$ es l.i. y $B = \{(0, 0)\}$ no es l.i.

b) Verdadera

68) Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(x, y) = (2x - y, y)$

Halle, si es posible, una base B de \mathbb{R}^2 / $M(T)_{B|B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rta: Existen infinitas bases B, son de la forma $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \right\}$ con $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

69) Dada la función $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para todo vector $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = u \times v \quad \text{donde } v = (1, -1, 2) \text{ vector constante.}$$

Nota: $(u \times v)$ producto vectorial

a) Demuestre que F es una transformación lineal.

b) Encuentre el núcleo y la imagen e interprete geoméricamente.

Rta: a) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = (2y + z; -2x + z; -x - y)$

b) $\text{Nu}(F) = \{(x, y, z) = (1, -1, 2)\lambda \wedge \lambda \in \mathbb{R}\}$ el núcleo es una recta que contiene al origen y es paralela al vector $(1, -1, 2)$

$\text{Im}(F) = \{(x, y, z) = (1, 1, 0)\alpha + (-2, 0, 1)\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ la imagen es un plano que contiene al origen y es perpendicular al vector $(1, -1, 2)$. El núcleo y la imagen son complementos ortogonales.

70) La matriz asociada a una transformación lineal $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, respecto a las respectivas bases

canónicas es $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 2 & 2 \\ k & 2 \end{pmatrix}$

a) Hallar todos los valores de k para que F sea inyectiva.

b) Para $k = 0$, y una base $B_1 = \{(1, 2), (-1, 3)\}$, encuentre una base B_2 de \mathbb{R}^3 tal que la matriz asociada a F respecto a éstas bases sea:

c) $M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justificar

Rta: a) $k \in \mathbb{R} - \{2\}$ b) $B_2 = \{(2, 6, 4), (-2, 4, 6), (a, b, c)\}$ tal que $a - b + c \neq 0$

EJERCICIOS DE AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

71) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿ A es diagonalizable? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué vectores permanecen constantes luego de la transformación lineal?

i) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Rta.: a) No, $\dim S_{\lambda=1} = 1$, no existe una base de \mathbb{R}^2 para la cual la matriz A resulta diagonal.

b) $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0, 1)t \wedge t \in \mathbb{R}$

72) Si $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es una matriz tal que su polinomio característico tiene las siguientes raíces $\lambda_1 = 2$ raíz simple, $\lambda_2 = -1$ raíz doble y $\lambda_3 = 0$ raíz simple. Estudie si A es diagonalizable en los siguientes casos; en caso afirmativo halle la matriz D correspondiente, y P tal que $D = P^{-1}AP$. Justifique.

a) $S_{\lambda_1} = \text{gen}\{(1, 1, 1, 1)\}$; $S_{\lambda_2} = \text{gen}\{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0)\}$; $S_{\lambda_3} = \text{gen}\{(3, 2, 1, 0)\}$

b) $S_{\lambda_1} = \text{gen}\{(2, 3, 4, 5)\}$; $S_{\lambda_2} = \text{gen}\{(0, 1, 2, 0), (1, 2, 3, 0)\}$; $S_{\lambda_3} = \text{gen}\{(1, 0, 2, 0)\}$

Rta: a) A no es diagonalizable ya que el subespacio propio asociado a λ_2 tiene dimensión uno y la multiplicidad de la raíz es dos.

b) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge |P| \neq 0$

73) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ asociada a una T.L. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(\vec{u}) = A \vec{u}$

- a) Halle los valores propios y los correspondientes espacios propios, una base y dimensiones.
- b) Basándose en los autovalores justifique porqué la transformación es un automorfismo.
- c) Si la matriz A es diagonalizable, halle la matriz D y la matriz P tal que: $D = P^{-1} A P$

Rta.: a) $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 3$ doble. $S_1 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / (x; y; z) = (1; 2; 1) a\}$; $B_{S1} = \{(1; 2; 1)\}$;

$\dim S_1 = 1$ $S_2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / (x; y; z) = (1; 0; -1) b + (0; 1; 0) c\}$; $B_{S2} = \{(1; 0; -1); (0; 1; 0)\}$; $\dim S_2 = 2$

b) Como los autovalores no son nulos entonces $|D| = |A| \neq 0$ por lo tanto el rango de la matriz A es tres igual a la dimensión de la imagen y en consecuencia la dimensión del núcleo es cero por el teorema de la dimensión, la transformación es sobreyectiva e inyectiva (isomorfismo) y además es una transformación en \mathbb{R}^3 (endomorfismo) por lo tanto es un automorfismo.

c) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

74) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Encuentre los valores propios y los vectores propios.
- b) Existe una matriz P tal que $P^{-1} A P$ sea una matriz diagonal?, en caso afirmativo encuentre la matriz semejante a A que es diagonal.

Rta.: a) autovalores 0 y 3 $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de autovectores.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{[B][B]} = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

75) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Demuestre que :

- a) Si $(a - d)^2 + 4bc > 0$ entonces A es diagonalizable.
- b) Si $a = d = 1$, $b = 3$ y $c = -1$, verifique si la matriz es diagonalizable en \mathbb{R} .

Rta.: a) El 1er miembro de la desigualdad es el discriminante de la ecuación característica y como es positivo las raíces de dicha ecuación (autovalores) son reales y distintas por lo tanto los autovectores asociados son linealmente independientes y constituyen una base para la cual la matriz A resulta diagonal.

b) A no es diagonalizable ya que la ecuación característica no posee raíces reales.

76) Demuestre que:

- a) Si $\lambda=0$ es un autovalor de la matriz A entonces A no es invertible.
 b) Si λ es autovalor de la matriz A entonces $\bar{\lambda}$ es autovalor de su traspuesta.

Rta: a) $|A-\lambda I| = 0 \wedge \lambda = 0 \Rightarrow |A| = 0 \therefore A$ no es invertible

b) λ es autovalor de A: $|A-\lambda I| = |(A-\lambda I)^T| = |A^T - (\lambda I)^T| = |A^T - \lambda I^T| = |A^T - \lambda I|$

Por transitiva de la igualdad: $|A-\lambda I| = |A^T - \lambda I|$ los polinomios característicos de A y A^T son iguales por lo tanto los autovalores también lo son.

77) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ halle los valores de b y k reales para que A sea diagonalizable.

Rta.: $\forall b \in \mathbb{R} \wedge k=0$; $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

78) Demuestre que:

Si dos matrices semejantes entonces poseen los mismos autovalores.

Encuentre un contraejemplo que muestre que el recíproco del anterior no es válido.

Rta.: a) A y B semejantes $\Rightarrow \exists P/B = P^{-1}AP \Rightarrow |B-\lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P| =$

$= |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}| |A - \lambda I| |P| = |P^{-1}| |P| |A - \lambda I| = |A - \lambda I|$

Por transitiva de la igualdad: $|B-\lambda I| = |A-\lambda I|$ los polinomios característicos de A y B son iguales por lo tanto los autovalores también lo son.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tienen la misma ecuación característica: $\lambda^2=0$ y no son semejantes:

$\nexists P/B = P^{-1}AP$. Dos matrices pueden tener los mismos autovalores y no ser semejantes.

79) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

a) Verifique si es diagonalizable. Si lo es, halle la matriz $P/PAP^{-1} = D$

b) Halle todos los vectores de \mathbb{R}^3 tales que permanecen constantes luego de la transformación lineal

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rta.: a) A no es diagonalizable, el autovalor es triple (1) y la dimensión del subesp. propio es uno.

b) $S_{\lambda=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (0, 0, t)t\}$

80) Sea la matriz $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Halle los autovalores de la matriz C y determine qué vectores de \mathbb{R}^3 permanecen sin cambio luego de aplicarles la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(\vec{u}) = C \vec{u}$

Rta.: autovalores $\{-2, 1, 2\}$ $S_{\lambda=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (0, -1, 1)t\}$

81) Justifique si es V o F:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diagonalizable: $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} / P^{-1}AP = D$ entonces $A^4 = PD^4P^{-1}$

Rta.: $P^{-1}AP = D$

Premultiplicamos por P y posmultiplicamos por P^{-1} : $P(P^{-1}AP)P^{-1} = PD P^{-1}$

Asociatividad del producto: $(PP^{-1})A(P P^{-1}) = PD P^{-1}$

P^{-1} es la inversa de P: $PP^{-1} = I$ (neutro del producto): $A = PD P^{-1}$

$$A^4 = (PD P^{-1})^4$$

$$A^4 = [(PD P^{-1})(PD P^{-1})][(PD P^{-1})(PD P^{-1})]$$

Asociatividad del producto y $PP^{-1} = I$

$$A^4 = (PD^2 P^{-1})(PD^2 P^{-1})$$

$$A^4 = PD^4 P^{-1}$$

También se puede expresar como: Si λ es autovalor de A entonces λ^4 es autovalor de A^4 .

82) Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtenga todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que:

a) Sus autovalores sean distintos. ¿Es diagonalizable para estos valores de a?

b) A tenga un autovalor de multiplicidad 2. ¿es diagonalizable? Justifique.

Rta.: a) Como A es una matriz triangular los autovalores son los elementos de la diagonal principal entonces $a \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$. Si ya que los los autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes y constituyen una base para la cual la matriz A resulta diagonal.

b) $a = 1 \vee a = 2$. Para $a=1$, el autovalor doble es $\lambda=1$ y $\dim S_{\lambda=1} = 1$ entonces A no es diagonalizable. Para $a=2$, el autovalor doble es $\lambda=2$ y $\dim S_{\lambda=2} = 2$ entonces A es diagonalizable.

83) Sabiendo que la matriz asociada a una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cumple con:

Es simétrica, $T(1;0;0) = (2;0;1)$, $T(0;1;0) = (0;3;0)$ y el vector $(1;1;1)$ es un autovector.

Encuentre los autovalores y los autoespacios asociados y justifique porque son ortogonales.

Rta.: Autovalores: 2 y 3 (doble). Autoespacios:

$S_{\lambda=2} = \text{gen}\{(1;0;-1)\}$; $S_{\lambda=3} = \text{gen}\{(1;0;1), (0;1;0)\}$ Porque la matriz es simétrica

84) Se desea obtener la proyección de un punto cualquiera del espacio sobre el plano $\pi: x + y + z = 0$

a) Mediante una transformación lineal cuya matriz asociada resulte diagonal.

b) Mediante una transformación lineal cuya matriz asociada opere en base canónica.

c) Compare lo que obtuvo en el ítem anterior con la proyección de un punto sobre un plano visto en geometría.

Rta.: a) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(X) = AX$ si la base elegida es $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$

$$A_{[B;B]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ matriz standard.}$$

c) Siendo $P'(x', y', z')$ la proyección de $P(x, y, z)$ sobre el plano π entonces:

$$P' \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right) \text{ lo mismo que se obtiene haciendo: } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS DE CÓNICAS

85) Sea la ecuación $x^2 - y^2 - 2x - 6y - 9 = 0$

Identifique y grafique la curva.

Rta.: $(x-1)^2 - (y+3)^2 = 1$. Hipérbola equilátera con centro en $C(1, -3)$

86) Dada $9x^2 + ky^2 + 54x - 2ky + 17 = 0$ encuentre si es posible, k real para que la ecuación en el plano corresponda a una elipse de semieje mayor $a = 3$ y eje focal paralelo al eje y .

Rta.: $k=8$; $\frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

87) Sea la curva $x^2 - 2x + 3hy^2 + 9ky = 89$ que pasa por los puntos $A(4, 3)$ y $B(4, -3)$

Halle h y k reales, identifique y grafique la curva.

Rta.: $h = 3 \wedge k = 0$; $\frac{(x-1)^2}{90} + \frac{y^2}{10} = 1$. Elipse con centro en $C(1, 0)$, eje focal eje x ,

radio mayor= $a = \sqrt{90}$ y radio menor= $b = \sqrt{10}$

88) Dada la ecuación: $x^2 + hy^2 - 4x = 0$ en \mathbb{R}^2 .

Qué lugar geométrico representa para los distintos valores de la constante h .

Rta.: Si $h < 0$ hipérbola con centro en $C(2, 0)$ y eje focal eje x . Si $h = 0$ dos rectas paralelas $x=0$; $x=4$. Si $h > 0$ elipse con centro en $C(2, 0)$, en particular si $h=1$ circunferencia de radio $R=2$.

89) La siguiente ecuación en \mathbb{R}^2 corresponde a una hipérbola: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

a) Escriba la ecuación de todas las hipérbolas que tengan las mismas asíntotas que la dada y el mismo eje focal.

b) Escriba la ecuación de todas las hipérbolas que tengan las mismas asíntotas que la dada pero que sean de eje focal paralelo al eje y .

Rta.: a) $\frac{(x+2)^2}{9k} - \frac{(y+3)^2}{4k} = 1 \wedge k > 0$ **b)** $\frac{(x+2)^2}{9k} - \frac{(y+3)^2}{4k} = 1 \wedge k < 0$

90)

- a) Halle la ecuación de una parábola sabiendo que su lado recto tiene una longitud de 4 unidades, su foco está sobre el eje y negativo, y el vértice en el origen.
b) Grafique y parametrize la parábola hallada, indicando en el gráfico la dirección en que se recorre la parábola.

Rta.: a) $x^2 = -4y$ b) $c: \vec{r}(t) = (x, y) = \left(t, -\frac{t^2}{4}\right)$; $t \in \mathbb{R}$

- 91) Escriba las ecuaciones paramétricas de la ecuación cartesiana $y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ para $1 \leq x \leq 2$. Identifique y grafique la curva.

Rta.: $c: \vec{r}(t) = (x, y) = \left(1 + \frac{1}{4}t^2, 2 + t\right)$; $-2 \leq t \leq 2$ arco de parábola recorrida desde A(2,0) hasta B(2,4), con vértice en (1,2) eje focal paralelo al eje x

- 92) Sea la curva $c: \vec{r}(t) = (x, y) = (1 - 3\cos t, 2 + \sin t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$

- a) Identifique y grafique la curva
b) Reparametrice la curva de modo que recorra el arco que desde A(1,3) hasta B(-2,2)

Rta.: a) $\frac{(x-1)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$ Elipse con centro en C(1,2) , eje focal paralelo al eje x , radio mayor= $a=3$ y radio menor= $b=1$. b) $c: \vec{r}(t) = (x, y) = (1 + 3\cos t, 2 + \sin t)$; $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

- 93) Sea la curva $c: \vec{r} = (1 + 4\cos t, 1 - \sin t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$

Halle la ecuación cartesiana, identifique , grafique e indique en qué dirección se recorre.

Rta.: $\frac{(x-1)^2}{16} + (y-1)^2 = 1$ Elipse con centro en C(1,1) y radio mayor= $a=4$ y radio menor= $b=1$. Para la forma paramétrica la curva se recorre en sentido horario partiendo del punto (5,1).

- 94) Parametrice la curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ de modo que se recorra en dirección antihoraria desde el punto (0,3) hasta el punto (2,0). Grafique la porción de curva recorrida.

Rta.: $c: \vec{r}(t) = (x, y) = (2\sin t, 3\cos t)$; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ Elipse con centro en el origen eje focal eje y , radio mayor $a=3$ y radio menor $b=2$.

- 95) Parametrice la curva $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ de modo que se recorra en dirección antihoraria. Grafique la curva.

Rta.: $c: \vec{r}(t) = (x, y) = (1 + \cos t, 2\sin t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$. Elipse con centro en C(1,0), eje focal paralelo al eje x , radio mayor= $a=3$ y radio menor= $b=2$

EJERCICIOS DE SUPERFICIES

96) Sea la superficie $\sigma: Ax^2 + (A-5)y^2 = Bz$

a) Halle el conjunto de valores $A, B \in \mathbb{R} / \sigma$ sea un paraboloides.

b) Si $A = 5$ y $B = 1$ identifique y grafique la superficie utilizando sus trazas.

Rta.: a) $A \neq 0 \wedge A \neq 5 \wedge B \neq 0$ b) Cilindro parabólico

97) Sea la superficie: $Ax^2 + B(y-1)^2 + C(z+2)^2 = 1$

a) Halle $A, B, C \in \mathbb{R}$ tal que:

La intersección con el plano $y = 1$ sea la curva $x^2 - (z+2)^2 = -1$ y la intersección con el plano

$x = 1$ sea la curva $\frac{-(y-1)^2}{4} + (z+2)^2 = 2$. Grafique e identifique la superficie

b) Grafique e identifique la superficie cuando $A = \frac{1}{4} \wedge B = -1 \wedge C = 0$

Rta.: a) $A = -1 \wedge B = -\frac{1}{4} \wedge C = 1$ hiperboloide de dos hojas b) Cilindro hiperbólico

98) Sea la superficie: $\sigma: A(x-1)^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

Identifique y grafique la superficie sabiendo que se cumplen simultáneamente:

$\sigma \cap (y=0)$: circunferencia de radio 2

$\sigma \cap (z=0)$: hipérbola de semiejes 2 y 3

Rta.: $A = C = \frac{1}{4} \wedge B = -\frac{1}{9}$ Hiperboloide de una hoja de revolución de eje paralelo al eje y .

99) Sea la superficie $\sigma: A(x-1)^2 + By^2 + z^2 = 1$.

a) Halle $A, B \in \mathbb{R}$ tal que:

$\sigma \cap (x=1)$: elipse de eje focal paralelo al eje y , semiejes de longitudes 2 y 1

$\sigma \cap (z=0)$: hipérbola tal que una de sus asíntotas tiene pendiente $m = \sqrt{2}$

b) Grafique e identifique la superficie cuando $A = 1 \wedge B = 0$

Rta.: a) $A = -\frac{1}{2} \wedge B = \frac{1}{4}$ Hiperboloide de una hoja de eje x . b) Cilindro circular de eje // eje y

100) Sea la superficie $\sigma: Ax^2 + (A-1)y^2 + 2Az^2 = 1$

a) Halle, si existen, todos los valores de $A \in \mathbb{R}$ tales que la superficie sea:

i) Elipsoide

ii) Hiperboloide de una hoja

iii) Superficie cilíndrica elíptica

b) Identifique y grafique la superficie si $A = \frac{1}{2}$

Rta.: a) i) $A > 1$ ii) $0 < A < 1$ iii) $A = 1$ b) caso ii) Hiperboloide de una hoja de eje y .

101) Dada la ecuación $x^2 + b^2y^2 - z^2 = k^2$, halle los valores de b y k de manera que la ecuación corresponda a:

a) Un hiperboloide de una hoja de revolución, cuya traza con el plano $x = 3$ es una hipérbola equilátera de semiejes iguales a 3.

b) Una superficie cilíndrica cuya traza con el plano $z = 1$ es un par de rectas paralelas tales que la distancia entre ambas es $2\sqrt{5}$.

Rta: a) $|b|=1 \wedge |k|=\sqrt{18}$ b) $b=0 \wedge |k|=2$

102) Analice por sus trazas, identifique y grafique para los distintos valores de A y B

$$-A^2x^2 - y^2 + \frac{z^2}{4} = B$$

Rta: $A=0 \wedge B \neq 0$ cilindro hiperbólico. $A=B=0$ dos planos que contienen al eje x.

$A \neq 0 \wedge B > 0$ hiperboloide de dos hojas. $A \neq 0 \wedge B < 0$ hiperboloide de una hoja. $A \neq 0 \wedge B = 0$ superficie cónica.

103) Halle la ecuación y grafique la superficie generada por el giro de $\begin{cases} x=0 \\ z^2=y \end{cases}$ alrededor del eje y.

Rta: $x^2+z^2=y$ Paraboloide de revolución

104) Dada la ecuación $x^2 + Ay^2 = Bz$ en R^3

Determine A y B de manera que la ecuación corresponda a:

a) Un paraboloide hiperbólico cuya traza con el plano xy sea un par de rectas perpendiculares, grafique.

b) Un paraboloide elíptico cuya traza con el plano $z = 1$ sea una elipse de eje focal eje x, grafique.

c) Un cilindro parabólico cuya traza con el plano $y = -1$ sea una parábola con foco en $F(0; -1; -1)$, grafique.

Rta: a) $A = -1 \wedge B \neq 0$, b) $A > 1 \wedge B > 0$, c) $A = 0 \wedge B = -4$

105) Dada la superficie esférica: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y + k = 0$ y el plano $\alpha: x - y - \frac{1}{2} = 0$

Determine el valor de k para que la esfera sea tangente al plano y el punto de tangencia.

Rta: $k = \frac{5}{4}$; $T\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$

EJERCICIOS DE ROTOTRASLACIÓN

106) Sea la curva: $x^2 - 6xy + y^2 + 1 = 0$

a) Mediante una rotación, identifique la curva

b) Grafique la curva en el nuevo sistema de coordenadas, superpuesto al sistema original.

Rta.: a) $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{P|B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

$\frac{x'^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y'^2}{\frac{1}{4}} = 1$ Hipérbola con centro en el origen y eje focal eje x'.

107) Sea la curva $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 1$

a) Mediante una rotación, identifique la curva.

b) Grafique la curva en el nuevo sistema de coordenadas, superpuesto al sistema original.

Rta.: $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{|B|B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{6}} = 1 \quad \text{Elipse con centro en el origen y eje focal eje } x'.$$

108) Halle todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $x^2 + 2axy + 4y^2 = 1$ represente un par de rectas. Grafique para alguno de los valores hallados.

Rta.: $|a| = 2$. Si $a=2$: $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{|B|B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right); \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{5}} \vee x' = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{dos rectas paralelas al eje } y' \text{ y equidistantes del origen.}$$

Si $a=-2$: $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A_{|B|B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right); \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \vee y' = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{dos rectas paralelas al eje } x' \text{ y equidistantes del origen.}$$

109) Sea la curva: $3x^2 - 8xy - 12y^2 = 52$ Identifique la curva y grafíquela en el sistema original de coordenadas superpuesto al nuevo sistema de coordenadas.

Rta.: $P = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{|B|B} = \begin{pmatrix} -13 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \right); \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}} \right) \right\}$

$$-\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{13} = 1 \quad \text{Hipérbola con centro en el origen y eje focal eje } y'.$$

110) Para la siguiente ecuación: reduzca a la forma canónica, identifique el lugar geométrico en \mathbb{R}^2 y grafique.

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$$

Rta.: $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$; $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $x'^2 = -4\sqrt{2}y'$ Parábola

111) Dada la ecuación $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$ en \mathbb{R}^2 lleve a la forma canónica, identifique y grafique.

Rta: Elipse $\frac{x''^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y''^2}{\frac{9}{16}} = 1$ ecs. de traslación $\begin{cases} x'' = x' + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{1}{4\sqrt{5}} \end{cases}$

112) Dada la ecuación $16x^2 + kxy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ en \mathbb{R}^2

a) Halle $k \in \mathbb{R}$ de manera que la ecuación corresponda a una parábola.

b) Para el valor de $k < 0$ obtenido en **a)**, lleve a la forma canónica y grafique.

Rta: **a)** $|k|=24$ **b)** $P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $A_{|B|B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \right\}$ $y'^2 = 2x'$

113) Dada la ecuación $2xy - 4x = 1$ en \mathbb{R}^2 lleve a la forma canónica, identifique y grafique.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A_{|B|B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$x''^2 - y''^2 = 1 \text{ ecs. de traslación } \begin{cases} x'' = x' - \sqrt{2} \\ y'' = y' - \sqrt{2} \end{cases} \text{ Hipérbola equilátera}$$

PARCIALES Y RECUPERATORIOS PARTE B

25/02/2010 PARCIAL B CURSO DE VERANO

1)

Dada la transformación lineal: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 / T(x; y; z) = (x - y; ax - ay; x + ay; x - y + az)$

a) Halle los valores de la constante "a", si existen, tal que la transformación resulte inyectiva.

b) Para $a = -1$, encuentre todos los vectores de \mathbb{R}^3 , que tengan por imagen al vector $(1, -1, 1, 1)$.

2)

a) Encuentre la matriz (A) que caracteriza a una transformación lineal T que cumpla con:

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \text{Nu}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (1, -1, 2)t\} \text{ y } \forall \vec{u} \in S: T(\vec{u}) = 3\vec{u}$

Siendo $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}$

b) Basándose en las características de la transformación dadas anteriormente, justifique porque la matriz asociada a la TL (A) es diagonalizable y halle: $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / P^{-1}AP = D$

3) Dada la ecuación: $x^2 + ky^2 - 8y = 0$ en \mathbb{R}^2

a) Analicela e identifique el lugar geométrico para los distintos valores de la constante "k".

b) Para $k = 4$ grafique la curva y halle una forma paramétrica.

4) La siguiente ecuación $x^2 + A(z-1)^2 = By$ en \mathbb{R}^3 representa una superficie, en qué casos se trata de:

a) Un paraboloide de revolución, indique el eje de giro y grafique.

b) Un cilindro parabólico recto cuya intersección con el plano $y = 2$ sean dos rectas que se encuentran a una distancia igual a 2 del plano $x = 0$, grafique la superficie y las rectas.

5) Indique V o F, justifique o muestre un contraejemplo según corresponda:

a) Si $A^2 = A$ y λ es autovalor de A entonces λ^2 es autovalor de A.

b) Si el rango de una matriz cuadrada es menor que el orden entonces dicha matriz no es diagonalizable.

RESOLUCIÓN FECHA 25/02/2010

1) a) T es inyectiva sii $\dim \text{Nu}(T) = 0$ y $\dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ entonces

$\dim \text{Im}(T) = 3 = \text{rg}(A)$; T es inyectiva sii $\text{rg}(A) = 3$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & -a & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \therefore \text{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow a+1 \neq 0 \wedge a \neq 0$$

T es inyectiva sii $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (0, -1, 0) + (1, 1, 0) t\}$$

C no es subespacio de \mathbb{R}^3 ya que el vector nulo no pertenece al conjunto (no es espacio vectorial).

2) a) $B_S = \{(1, 0, 1); (0, 1, 0)\}$ base de S

$$T(1, 0, 1) = (3, 0, 3) ; T(0, 1, 0) = (0, 3, 0) \text{ y } T(1, -1, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^\circ f - 1^\circ f + 2^\circ f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 6 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $(1, -1, 2)$ autovector asociado al autovalor 0; $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$ autovectores asociados al autovalor 3 y $\{(1, 0, 1); (0, 1, 0); (1, -1, 2)\}$ base de \mathbb{R}^3 , por lo tanto A es diagonalizable, siendo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) a) $x^2 + ky^2 - 8y = 0$

Si $k=0$ $x^2 = 8y$ Parábola

$$\text{Si } k \neq 0 : x^2 + k\left(y^2 - \frac{8}{k}y + \frac{16}{k^2}\right) = \frac{16}{k}$$

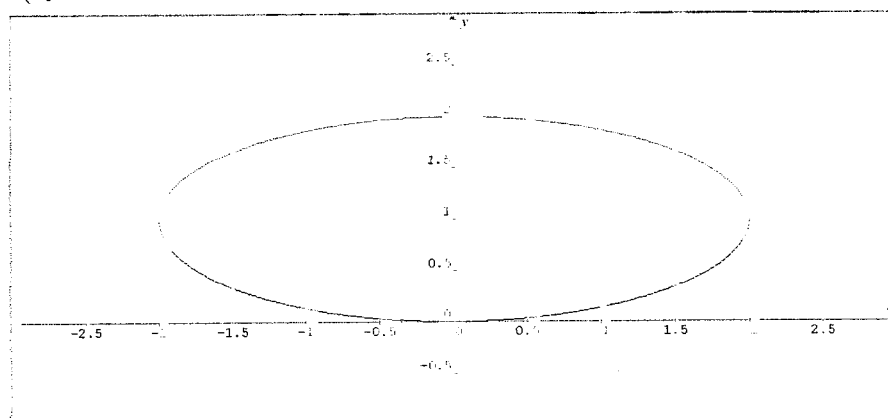
$$x^2 + k\left(y - \frac{4}{k}\right)^2 = \frac{16}{k} \quad \frac{x^2}{\frac{16}{k}} + \frac{\left(y - \frac{4}{k}\right)^2}{\frac{16}{k^2}} = 1 \text{ Cónica con centro en } C\left(0, \frac{4}{k}\right)$$

Si $k < 0$: hipérbola de eje focal paralelo al eje y

Si $k > 0$: elipse (en particular si $k=1$ circunferencia de radio=4)

$$\text{b) Si } k = 4 : \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \text{ Elipse con centro en } C(0, 1) \text{ y eje focal // eje } x$$

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



4)

- a) $x^2 + A(z-1)^2 = By$ Paraboloide de revolución $A=1$ y $B \neq 0$
Eje de giro paralelo al eje y

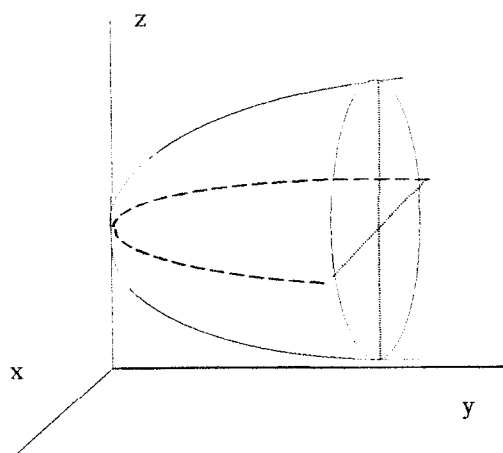
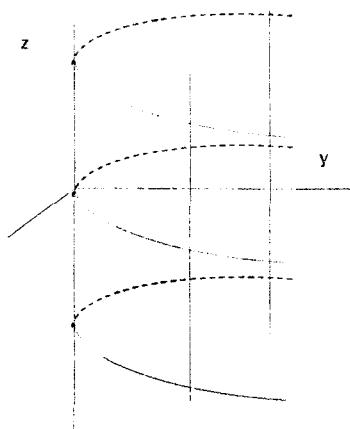


Gráfico Caso $B > 0$

- b) $x^2 + A(z-1)^2 = By$ Cilindro parabólico recto $A=0$ y $B \neq 0$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x^2 = 2B \end{cases} \quad B > 0 \quad r_1 : \begin{cases} x = \sqrt{2B} \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = -\sqrt{2B} \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \quad \sqrt{2B} = 2 \Rightarrow B = 2$$

Cilindro parabólico recto $A = 0$ y $B = 2$ $x^2 = 2y$



5) a) V

$$\left| A - \lambda^2 I \right|_{A^2 - A} = \left| A^2 - \lambda^2 I \right| = \left| (A - \lambda I)(A + \lambda I) \right| \underset{\text{prop det}}{=} \underbrace{\left| (A - \lambda I) \right|}_0 \left| (A + \lambda I) \right| \underset{\lambda \text{ es autovalor de } A}{=} 0$$

$= 0 \left| (A + \lambda I) \right| = 0$ por transitiva de la igualdad $\left| A - \lambda^2 I \right| = 0 \Rightarrow \lambda^2$ es autovalor de A

b) F, contraejemplo $N_{2 \times 2}$ el rango es cero, el orden es dos y es diagonalizable en cualquier base.

02-03-10 1er REC. PARCIAL B CURSO DE VERANO

1) Encuentre un endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(X) = AX$ con $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que cumpla con:

Todos los puntos del plano $\pi: x + y + z = 0$ tengan por imagen un punto de la recta $r: x = y = z$ y la dimensión del núcleo sea igual a 1.

2) Sea $T: P_3 \rightarrow P_2 / T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$ una transformación lineal. Halle:

a) La matriz standard asociada a T.

b) Los conjuntos núcleo e imagen como combinación lineal de una base y sus dimensiones.

3) Dada la ecuación: $x^2 + ay^2 + by = c$ en \mathbb{R}^2

a) Halle el valor de las constantes reales "a", "b" y "c" tal que corresponda a una circunferencia con centro en (0;2) y que contenga al punto (1,1).

b) Para $a = c = -1$, analice e identifique la curva.

4) Sea la curva \mathcal{C} definida en forma paramétrica por: $\mathcal{C}: (x; y) = (3 - t^2; 1 + t) \wedge -1 \leq t \leq 2$

Grafique e identifique la curva.

5) Dada la ecuación: $x^2 - y^2 + z^2 = A$ en \mathbb{R}^3 .

a) Identifique mediante sus trazas para los distintos valores de la constante A.

b) En un mismo gráfico represente las superficies que se obtienen para $A = -1$, $A = 1$ y $A = 0$.

RESOLUCIÓN FECHA 02-03-10

1) Una solución puede ser:

$$B_x = \{(1,0,-1), (0,1,-1)\} \rightarrow B_r = \{(1,1,1)\} \wedge B_{Nu} = \{(0,0,1)\}$$

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(X) = AX / T(1,0,-1) = (1,1,1) \wedge T(0,1,-1) = (1,1,1) \wedge T(0,0,1) = (0,0,0)$$

2) a)

$$\begin{cases} T(1) = 0 \\ T(x) = 1 \\ T(x^2) = 2x \\ T(x^3) = 3x^2 \end{cases} : A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\text{rg}(A) = 3 = \dim \text{Im}(T) \therefore \text{Im}(T) = P_2; B_{\text{Im}} = \{1; x; x^2\}$$

$$\dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim(P_3) \Rightarrow \dim \text{Nu}(T) = 1$$

$$\text{Nu}(T) : \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \therefore$$

$$\boxed{\text{Nu}(T) = \{ \forall p(x) \in P_3 / p(x) = a \wedge a \in \mathbb{R} \}; \dim \text{Nu}(T) = 1; B_{\text{Nu}} = \{1\} \\ \text{Im}(T) = P_2; \dim \text{Im}(T) = 3; B_{\text{Im}} = \{1; x; x^2\}}$$

3)a)

$$\text{Circunf} \therefore a = 1: x^2 + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4} \right) = c + \frac{b^2}{4}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{b}{2} \right)^2 = c + \frac{b^2}{4}; \text{Centro } (0, 2) \Rightarrow -\frac{b}{2} = 2 \therefore b = -4$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = c + 4; (1, 1) \in C \Rightarrow 2 = c + 4 \therefore c = -2$$

$$\boxed{a = 1 \wedge b = -4 \wedge c = -2} \\ \boxed{x^2 + (y - 2)^2 = 2}$$

b)

$$x^2 - y^2 + by = -1$$

$$x^2 - \left(y^2 - by + \frac{b^2}{4} \right) = -1 + \frac{b^2}{4}$$

$$x^2 - \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 = -1 + \frac{b^2}{4}$$

Si $-1 + \frac{b^2}{4} \neq 0$ hipérbola con centro en $\left(0; \frac{b}{2} \right)$

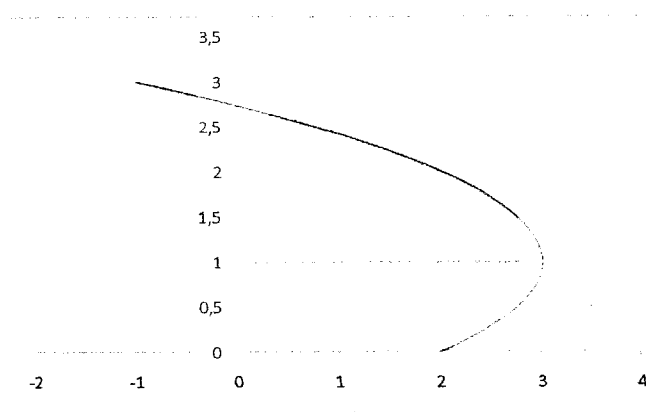
Si $-1 + \frac{b^2}{4} = 0$ dos rectas concurrentes en $\left(0; \frac{b}{2} \right)$ asíntotas de las hipérbolas anteriores

$$\begin{aligned} b = -2 \vee b = 2: & \quad L_1: x - \left(y - \frac{b}{2} \right) = 0; L_2: x + \left(y - \frac{b}{2} \right) = 0 \\ -2 < b < 2: & \quad \text{Hipérbolas de eje focal eje } x \\ b < -2 \vee b > 2 & \quad \text{Hipérbolas de eje focal paralelo al eje } y \end{aligned}$$

4)

$$\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = 1 + t \end{cases} \wedge -1 \leq t \leq 2 \quad \begin{cases} t = y - 1 \\ x = 3 - (y - 1)^2 \end{cases} \wedge -1 \leq t \leq 2$$

$$(y - 1)^2 = -(x - 3) \wedge 0 \leq y \leq 3 \quad \text{Parábola con vértice en } V(3;1) \text{ y eje focal } y=1$$



5)a)

$A < 0$: Hiperbolide de dos hojas de revolución de eje y

$A > 0$: Hiperbolide de una hoja de revolución de eje y

$A=0$: Cono asintótico de los hiperboloides.

04-03-10 2do REC. PARCIAL B CURSO DE VERANO

- 1) Construya un endomorfismo T de \mathbb{R}^4 que cumpla con:

$$\text{Nu}(T) = \text{Im}(T) = S \wedge S \subset W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \sum_{i=1}^4 x_i = 0 \right\}$$

- 2) Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (matriz standard asociada a T)

- a) Encuentre una base para la cual la matriz A resulte diagonal.
 b) Grafique un cuadrado unitario con un vértice en el origen y los lados con direcciones coincidentes con la base anterior y grafique su transformado.

- 3) Dada la ecuación: $x^2 + 2y^2 - 6x - 12y = 0$ en \mathbb{R}^2

- a) Identifique y grafique el lugar geométrico.
 b) Dé una forma paramétrica e indique la trayectoria en el gráfico anterior.

- 4) Analice la siguiente ecuación: $x^2 + Ay^2 = 2x$, identifique y grafique para $A=0$ y $A<0$ en:

- a) \mathbb{R}^2
 b) \mathbb{R}^3

- 5) Indique V o F, demuestre o dé un contraejemplo según corresponda:

Si $F: V \rightarrow W / Y = F(X)$ es una transformación lineal:

- a) Si $\{F(X_1), F(X_2)\}$ es l. independiente entonces $\{X_1, X_2\}$ es l. independiente.
 b) Si $\dim V < \dim W$ entonces T no es sobreyectiva.

RESOLUCIÓN FECHA 04-03-2010

- 1) Un endomorfismo puede ser:

Como $\text{Nu}(T) = \text{Im}(T) = S \wedge \dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) = 4 \Rightarrow \dim S = 2$

$$S \subset W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_4 = -(x_1 + x_2 + x_3) \right\}; B_W = \{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\}$$

Una base de S puede ser: $B_S = \{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1)\}$ Base del núcleo y de la imagen

$$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 / \begin{cases} T(1,0,0,-1) = (0,0,0,0) \\ T(0,1,0,-1) = (0,0,0,0) \\ T(0,0,1,0) = (1,0,0,-1) \\ T(0,0,0,1) = (0,1,0,-1) \end{cases} \therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) a)

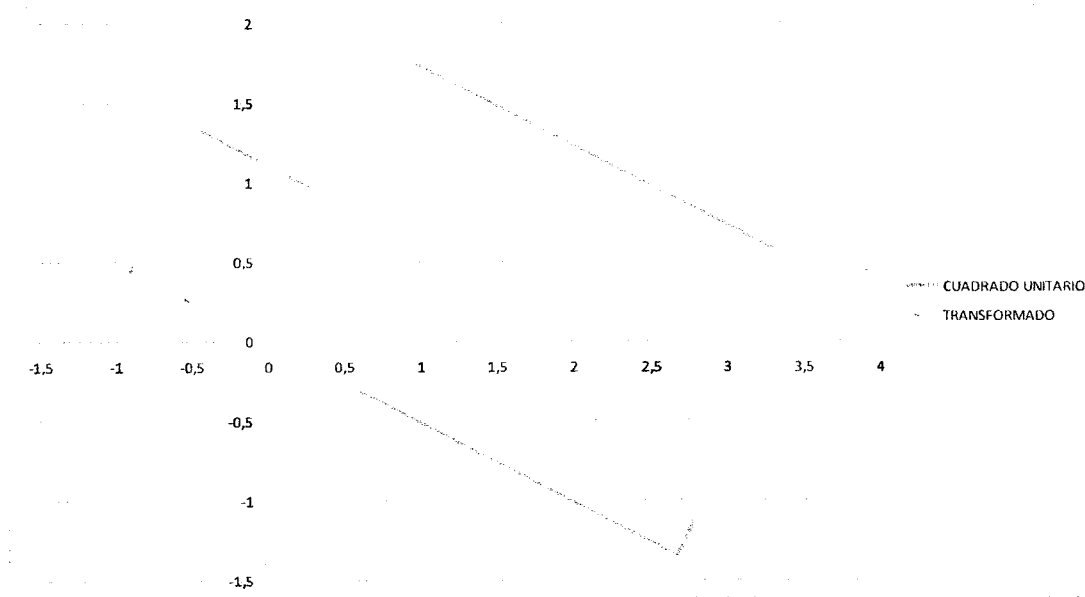
$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ Ecuación característica; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -3$ autovalores

Si $\lambda_1 = 2$: $-2x + y = 0 \therefore y = 2x \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Si $\lambda_2 = -3$: $x + 2y = 0 \therefore x = -2y \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B = \{(1,2), (-2,1)\}$ Base de autovectores $D = A_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b)

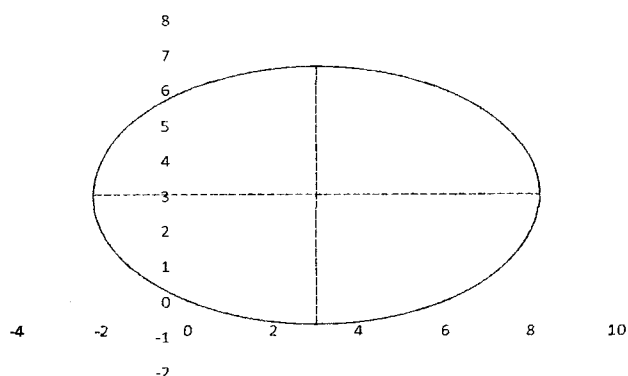


3) a)

$$(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 6y + 9) = 27$$

$$\frac{(x-3)^2}{27} + \frac{(y-3)^2}{\frac{27}{2}} = 1$$

Elipse con centro en $C(3,3)$ eje focal paralelo al eje x



b)

$$(x, y) = (3, 3) + \left(3\sqrt{3} \cos t, 3\sqrt{\frac{3}{2}} \sin t \right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

4) Analice la siguiente ecuación: $x^2 + Ay^2 = 2x$, identifique y grafique para $A=0$ y $A<0$ en:

a) $A=0$

$$x^2 = 2x : x = 0 ; x = 2 \text{ dos rectas paralelas al eje } y$$

$A<0$

$$(x-1)^2 + Ay^2 = 1 \text{ hipérbola con centro en } (1,0) \text{ y eje focal eje } x$$

b) $A=0$

$$x^2 = 2x : x = 0 ; x = 2 \text{ dos planos paralelos al plano } yz$$

$A<0$

$$(x-1)^2 + Ay^2 = 1 \text{ cilindro hiperbólico}$$

5) a) Verdadero

$$\alpha X_1 + \beta X_2 = O_v \quad (1)$$

$$F(\alpha X_1 + \beta X_2) = F(O_v)$$

$$\alpha F(X_1) + \beta F(X_2) = O_w$$

Como $\{F(X_1), F(X_2)\}$ es L.I. entonces $\alpha = \beta = 0$ única solución

Por lo tanto de (1) $\{X_1, X_2\}$ L.I.

b) Verdadero

$$\dim V < \dim W \wedge \dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V \Rightarrow \dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) < \dim W$$

$$\dim \text{Im}(T) < \dim W \therefore T \text{ no sobreyectiva}$$
