Algebra y Geometría Analítica Lineal

Guía UTN -Resueltos

CONICAS – PRIMERA PARTE

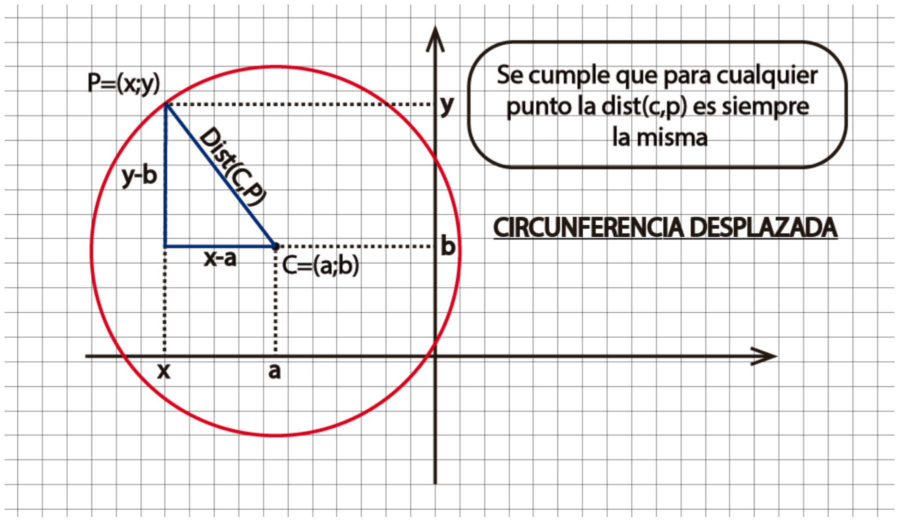
1-

Teniendo en cuenta la característica principal de una circunferencia vamos a seguir ciertos pasos para llegar a la expresión segmentaria de la misma, con la expresión del lugar geométrico que tenemos en cuestión:

$$f(x,y)=0$$

"Lugar geométrico"

CIRCUNFERENCIA



$$Dist(C,P)=R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

ECUACION SEGMENTARIA DE LA CIRCUNFERENCIA

$$\frac{(x-a)^2}{R^2}+\frac{(y-b)^2}{R^2}=1 \text{ con centro en } (a,b)$$

Si desplazamos los ejes:

$$\begin{cases} x'=x-a \\ y'=y-a \end{cases} \Rightarrow \frac{x'^2}{R^2}+\frac{y'^2}{R^2}=1 \text{ con centro en } (0,0)$$

a-

Como podemos observar de la ecuación debemos llegar a una expresión cuadrática, por lo tanto, completamos cuadrados con cada VARIABLE EN X Y EN Y:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ba + b^2$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 2y + 36 = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 36 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + 26 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = -26 \Rightarrow \nexists LG$$

b-

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$$
$$(x+4)^2 - 16 + y^2 + 15 = 0$$
$$(x+4)^2 + y^2 = 1$$

"Circ. con centro en (-4,0) de Radio 1"

c-

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$$
$$(x-2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4 + 8 = 0$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 0$$

"Punto (2,2)"

2-

a-

Si el diámetro cruza entre dichos puntos, el punto medio es el centro de nuestra circunferencia:

$$P_{Medio}(\vec{A},\vec{B}) = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$$

$$\begin{cases} (a,b) = \left(\frac{4-2}{2}, \frac{-3+7}{2}\right) = (1;2) = \vec{C} \\ Dist(\vec{C},P) = \left\|\vec{C}-\vec{P}\right\| = \left\|-3{,}5\right\| = \sqrt{34} = R \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 34$$

b-

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} \in f(x,y) \Rightarrow 3^2 + 2^2 - 4a + a^2 = R^2 \\ \vec{B} \in f(x,y) \Rightarrow (-1)^2 + 6^2 - 12a + a^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow Restamos$$

$$-24 + 8b = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 10$$

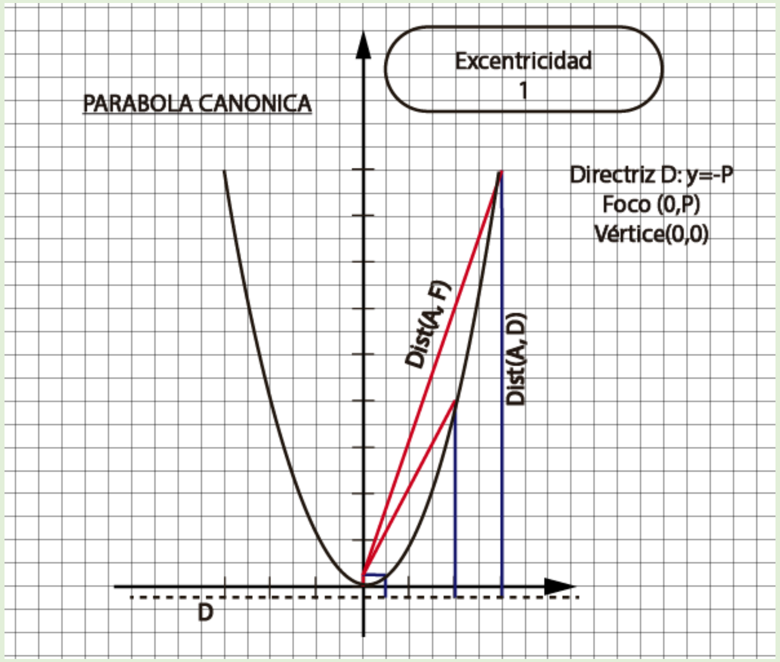
3-

CONICA

Dada una recta fija ***d*** denominada **DIRECTRIZ** y un punto fijo denominado **f FOCO** que se encuentra fuera de la directriz. Llamamos Cónica a aquellos lugares geométricos que cumplen que la distancia de cualquier punto al foco f es igual a la distancia de los mismos a la directriz d.

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{DP}} = e\ (Excentricidad)$$

PARÁBOLA



$$Siendo\ D \parallel x \wedge F \in E_y$$

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{DP}} = \frac{\sqrt{x^2 + (y-P)^2}}{y+P} \Rightarrow x^2 + (y-P)^2 = (y+P)^2 \Rightarrow$$

ECUACION DE LA PARÁBOLA CANÓNICA

$$x^2 = 4py$$

a-

$$6x = -4y^2$$

$$-\frac{3}{2}x = y^2 \Rightarrow D: x = -\left(-\frac{3}{2}:4\right) = \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$\mathbf{F = \left(-\frac{3}{8};0\right); D: x = \frac{3}{8}}$$

"Parábola que envuelve al eje x canónica"

b-

$$x^2 - 8y = 0$$

$$x^2 = 8y$$

$$x^2 = 8y \Rightarrow F = \left(0,\frac{8}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{F = (0;2); D: y = -2}$$

"Parábola que envuelve al eje y canónica"

4-

a-

Al realizar las cuentas realizando corrimientos en los ejes observamos que las proporciones se mantienen inalteradas, es decir, el foco mantiene la proporción como si solo se desplazó el eje, de igual manera la directriz:

ECUACION DE PARABOLA DEZPLAZADA EN V

$$\boldsymbol{Siendo\ V = (V_x;V_y) \wedge F(V_x,p+V_y) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{(x-V_x)^2 = 4p(y-V_y)}$$

$$\begin{cases}(x-2)^2 = 4p(y+3) \\ p-3 = -5\end{cases} \Rightarrow \mathbf{(x-2)^2 = -8(y+3)}$$

b-

Si sabemos que la directriz es paralela al eje y, entonces la ordenada del Foco coincide con la ordenada del Vértice:

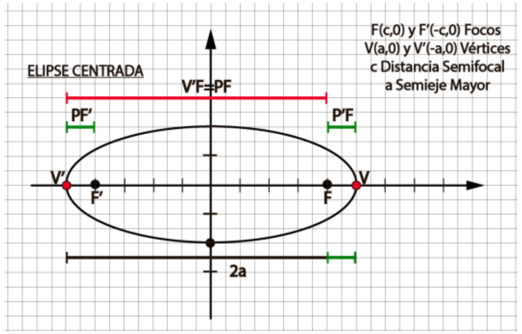
$$\begin{cases}(y-V_y)^2 = 4p(x-V_x) \\ V_y = F_y\ por\ D \parallel E_y\end{cases}$$

La directriz está corrida de forma opuesta al Foco:

$$\begin{cases}p - V_x = -d = -1 \\ p + V_x = F_x = -3\end{cases} \Rightarrow p = -2 \Rightarrow (y+2)^2 = -8(x+1)$$

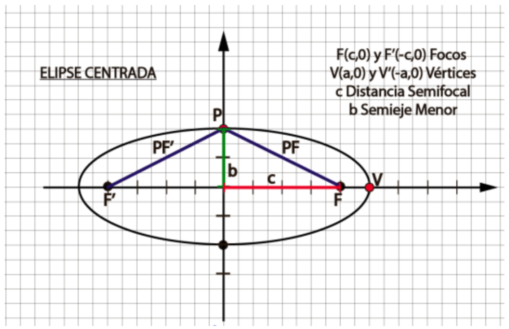
5-

La característica más importante de las elipses se encuentra en la proporcionalidad de las distancias de sus focos F y F' a cualquier punto P de la misma. Donde se dice, que la suma de las distancias de ***cualquier punto*** a los focos, es siempre 2 veces el Semieje Mayor, observemos tomando como referencia a V y los focos F y F':



$$\boldsymbol{\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a}$$

Y de ella surge la característica principal que nos permite encontrar una relación entre, Distancia SemiFocal c, Semieje Mayor a y Semieje Menor b, tomando P=(0,b), estando centrada la Elipse y con semieje mayor paralelo al Eje x:



$$2\overline{PF} = 2a \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$$

Con este mismo punto podemos hallar la expresión de la directriz:

$$\overline{PF} = \sqrt{c^2+b^2} = e\overline{PD} = ex_D \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x_D = \pm\frac{a}{e}}$$

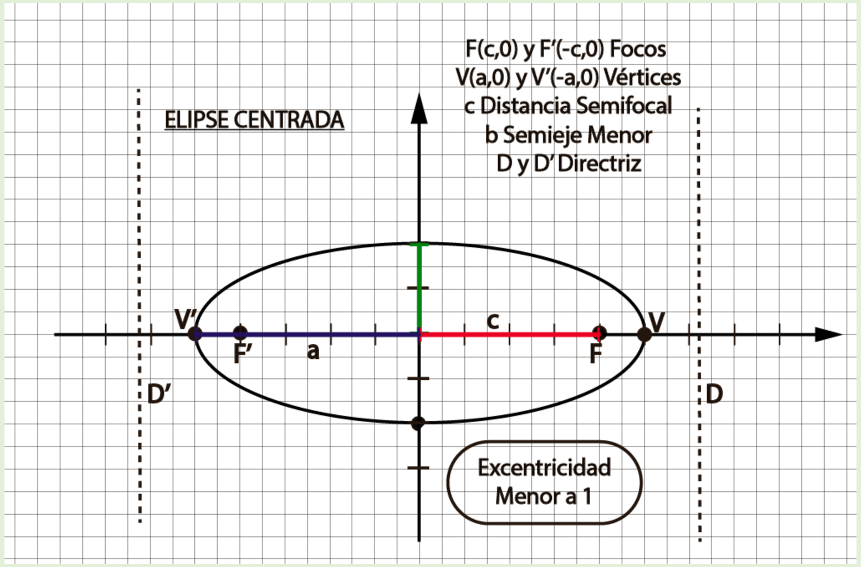
Con el VERTICE vamos a encontrar la excentricidad, es fácil porque está todo sobre la misma línea y ya tenemos una expresión de la Directriz:

$$\overline{PF} = e\overline{PD}$$
$$a - c = e\left(\frac{a}{e} - a\right)$$
$$a - c = a - ea$$
$$c = ea$$

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a} < 1}$$

Este razonamiento, podría ser válido, ya que no lleva demasiados pasos algebraicos, ni demasiadas cuentas, pero desarrollar la ecuación de la ELIPSE por medio de las distancias, es un trabajo que lleva su tiempo, no es tan simple como la PARÁBOLA, por esta razón, es mucho más simple recordar su fórmula segmentaria que se asemeja a la de una circunferencia y si, razonar un poco las anteriores en caso de olvido:

ELIPSE CENTRADA



ECUACION DE LA ELIPSE CENTRADA

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

a-

Simplemente debemos llegar a la Fórmula segmentaria de la elipse:

$$2x^2 + 3y^2 = 12$$
$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$$

"Elipse Centrada con Semieje Mayor en Eje x"

Coordenadas de los focos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6-4} \Rightarrow$$
$$\mathbf{F} = \left(\pm\sqrt{\mathbf{2}}; \mathbf{0}\right)$$

Coordenadas de los Vértices:

$$a^2 = 6 \Rightarrow$$
$$\mathbf{V} = \left(\pm\sqrt{\mathbf{6}}; \mathbf{0}\right)$$

b-

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

"Elipse Centrada con Semieje mayor en Eje y"

Coordenadas de los focos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} \Rightarrow$$
$$\mathbf{F} = (\mathbf{0}; \pm\mathbf{4})$$

Coordenadas de los Vértices:

$$a^2 = 25 \Rightarrow$$
$$\mathbf{V} = (\mathbf{0}; \pm\mathbf{5})$$

6-

a-

$$\begin{cases} El\ centro\ está\ alineado\ con\ el\ Foco \Rightarrow \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \\ LEM = |2a| \Rightarrow |a| = 3 \\ b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5\ con\ F = (0, \pm c) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1}$$

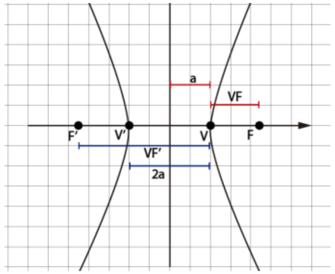
b-

$$\begin{cases} El\ centro\ está\ alineado\ con\ el\ Foco \Rightarrow \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \\ SEm = |b| = 4 \\ a^2 = c^2 + b^2 = \dfrac{289}{4}\ con\ F = (0, \pm c) = (0 \pm 7.5) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{4y^2}{289} + \frac{x^2}{16} = 1}$$

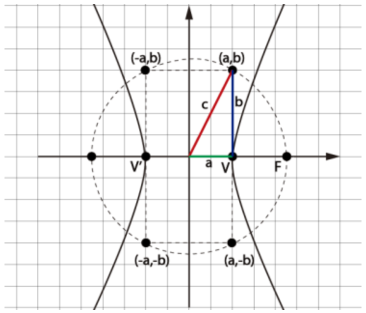
7-

Como en la elipse la característica principal, estaba en la distancia de cualquier punto a sus focos, en la HIPERBOLA pasa algo similar pero no es la característica más importante, sin embargo, si debemos saber que la diferencia de las distancias al foco de cualquier punto de la misma, es dos veces el semieje mayor, fácilmente verificable tomando como referencia uno de los vértices:



$$\boldsymbol{\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a}$$

Pero la característica más importante y fácilmente verificable es la relación entre los ejes Semifocal c, SemiEjePrincipal a y el SemiejeConjugado b. Donde el radio de la CIRCUNFERENCIA que contiene al rectángulo de lados 2b y 2a con centro en el origen coincide con c:

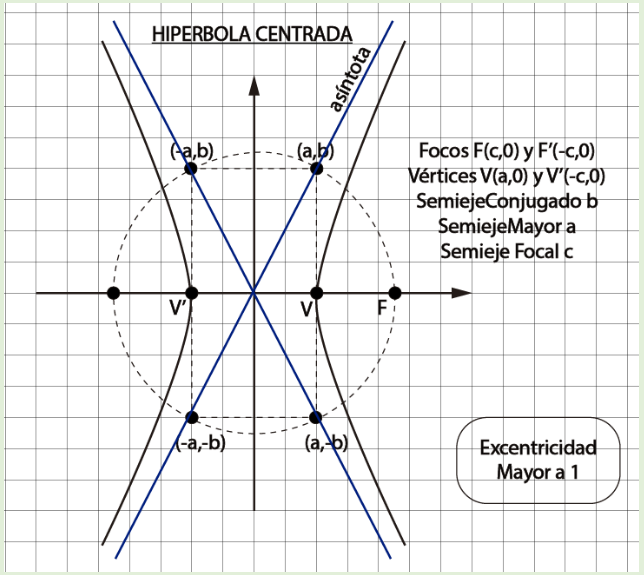


$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

Sin embargo, llegar a las ecuaciones de sus elementos, nos lleva a conceptos mucho más complejos con el desarrollo de la fórmula de CONICAS CUADRICAS que no lleva sentido por la semejanza que tiene con las ecuaciones de la Elipse. La excentricidad y sus Directrices llevan la misma forma:

$$\boldsymbol{D: x = \pm \frac{a}{e} \wedge e = \frac{c}{a} > 1}$$

HIPERBOLA



ECUACION DE LA ELIPSE CENTRADA

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

ASINTOTAS

Con Eje principal en x

$$\boldsymbol{y = \pm \frac{b}{a} x}$$

a-

$$a = 5 \wedge b = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{F = (\pm\sqrt{34}, 0)} \\ \mathbf{V = (\pm 5, 0)} \\ \mathbf{y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{3}{5} x} \end{cases}$$

b-

$$a = 4 \wedge b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 20 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{F = (0, \pm\sqrt{20})} \\ \mathbf{V = (0, \pm 4)} \\ \mathbf{y = \pm \frac{a}{b} x = \pm 2x} \end{cases}$$

“Tener en cuenta que la Asíntota tiene la pendiente Invertida en relación a nuestra fórmula, por tener Eje principal en y”

8-

a-

$$\begin{cases} El\ Vértice\ está\ alineado\ con\ el\ Foco \Rightarrow \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \\ b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1}$$

b-

$$\begin{cases} El\ Vértice\ está\ alineado\ con\ el\ Foco \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2b = a \\ c^2 = 10 = a^2 + b^2 = 4b^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{2} = 1}$$

8-

Las cónicas, son expresiones cuadráticas en función de x e y:

FORMULA GENERAL DE UNA CONICA

$$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cx^2y + Dxy^2 + Exy + F = 0}$$

a-

Completamos cuadrados para x e y:

$$9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$$
$$9x^2 + 54x + 16y^2 - 32y - 47 = 0$$
$$9(x^2 + 6x) + 16(y^2 - 2y) - 47 = 0$$
$$9(x+3)^2 - 81 + 16(y-1)^2 - 16 - 47 = 0$$
$$9(x+3)^2 + 16(y-1)^2 - 144 = 0$$
$$\frac{9(x+3)^2}{144} + \frac{16(y-1)^2}{144} = 1$$
$$\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

"Elipse de Eje Mayor x desplazada en (-3,1)"

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x'}{16} + \frac{y'}{9} = 1$$

b-

Completamos cuadrados para x:

$$x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 + 4y - 11 = 0$$
$$(x-3)^2 = 20 - 4y$$
$$(x-3)^2 = -4(y-5)$$

"Parábola de Eje Principal y desplazada en (3,5)"

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 5 \end{cases} \Rightarrow x'^2 = -4y'$$

c-

Completamos cuadrados para x e y:

$$4x^2 - 16x - 9y^2 + 18y + 7 = 0$$
$$4(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 2y) + 7 = 0$$
$$4(x-2)^2 - 16 - 9(y-1)^2 + 9 + 7 = 0$$
$$4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 0$$
$$4(x-2)^2 = 9(y-1)^2 =$$
$$2|(x-2)| = 3|(y-1)|$$

$$2x - 4 = 3y - 3 \wedge -2x + 4 = 3y - 3$$
$$\boldsymbol{2x - 3y = 1 \wedge 2x + 3y = 7}$$

"***Par de Rectas que se intersecan***"

d-

Completamos cuadrados para x e y:

$$4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$$
$$4y^2 + 40y - x^2 - 4x + 60 = 0$$
$$4(y+5)^2 - 100 - (x+2)^2 + 4 + 60 = 0$$
$$\frac{(y+5)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{36} = 0$$

"***Hiperbola de centro*** $\boldsymbol{(-2,-5)}$"

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{y'}{36} - \frac{x'}{9} = 1$$

e-

Completamos cuadrados para y:

$$x^2 + y^2 + 6y + 17 = 0$$
$$x^2 + (y+3)^2 - 9 + 17 = 0$$
$$x^2 + (y+3)^2 = -8 \Rightarrow \boldsymbol{\nexists f(x,y) = 0}$$

f-

Completamos cuadrados para y:

$$y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$$
$$y^2 - 2y - 10x + 21 = 0$$
$$(y-1)^2 - 1 - 10x + 21 = 0$$
$$(y-1)^2 = 10(x-2)$$

$$\text{"}\boldsymbol{Parábola\ con\ centro}\ (\mathbf{2,1})\text{"}$$

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+1 \end{cases} \Rightarrow y' = 10x'$$

PARAMETRIZACION – SEGUNDA PARTE

1-

Las curvas en el plano, se parametrizan con un UNICO PARAMETRO. Teniendo en cuenta el rango del mismo, y analizados de manera geométrica, si tenemos representación de cónicas lo que se puede observar es que podemos parametrizar en RADIAN, ya que podemos obtener mediante las fórmulas expresiones del tipo:

$$Cos^2(\alpha) + Sen^2(\alpha) = 1$$

a-

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\ si\ \begin{cases} \mathbf{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Cos(\alpha)} \\ \mathbf{y = \frac{1}{2}Sin(\alpha)} \end{cases} ; \boldsymbol{\alpha \in (0;\pi)}$$

b-

$$\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{\frac{5}{4}} = 1\ si\ \begin{cases} \mathbf{x = -1 + \sqrt{5}Cos(\alpha)} \\ \mathbf{y = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}Sin(\alpha)} \end{cases} ; \boldsymbol{\alpha \in (0;2\pi)}$$

c-

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(y+4)^2}{2} = 1$$

$$1 + Tg^2(\alpha) = Sec^2(x)$$

$$si\ \begin{cases} \mathbf{x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}Sec(\alpha)} \\ \mathbf{y = -4 + \sqrt{2}Tg(\alpha)} \end{cases} ; \boldsymbol{\alpha \in (0;2\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}}$$

c-

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = y + \frac{29}{4}\ si\ \begin{cases} \mathbf{x = \frac{5}{2} + t} \\ \mathbf{y = t^2 - \frac{29}{4}} \end{cases} ; \boldsymbol{\forall t \in \mathbb{R}}$$

Observen:

$$\boldsymbol{t^2 = t^2}$$

2-

En este ejercicio vamos al revés de como lo hicimos en 1, LAS RESTRICCIONES LA HALLAMOS REEMPLAZANDO T EN LAS COORDENADAS:

a-

$$\begin{cases} x = 4Cos(2t) \\ y = 4Sin(2t) \end{cases} = \begin{cases} x^2 = 16Cos^2(2t) \\ y^2 = 16Sin^2(2t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{y^2 + x^2 = 16\ con\ 0 \le x \le 2; 0 \le y \le 2}$$

b-

$$\begin{cases} x = 2Cos(\alpha) \\ y = 3Sin(\alpha) \end{cases} = \begin{cases} 9x^2 = 36Cos^2(\alpha) \\ 4y^2 = 36Sin^2(\alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1\ con\ y \ge 0}$$

c-

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{(x-1)^2 = y\ ; 0 \le x \le 2}$$

d-

$$\begin{cases} x = Sec(\alpha) \\ y = 5Tg(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = Sec^2(\alpha) \\ y^2 = 25Tg^2(\alpha) \end{cases}$$

$$Sec^2(\alpha) - Tg^2(\alpha) = 1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x^2 - \frac{y^2}{25} = 1\ \forall(x;y)}$$

3-

$$\begin{cases} \mathbf{x = t^2 - 1} \\ \mathbf{y = t} \end{cases} \mathbf{con\ 0 \le t < 2}$$

4

Este caso debemos hallar la función y encontrarle otra parametrización:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t^2 \\ y^2 = 1 - t^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

"Es una semicircunferencia de Radio 1 en el hemisferio positivo de y"

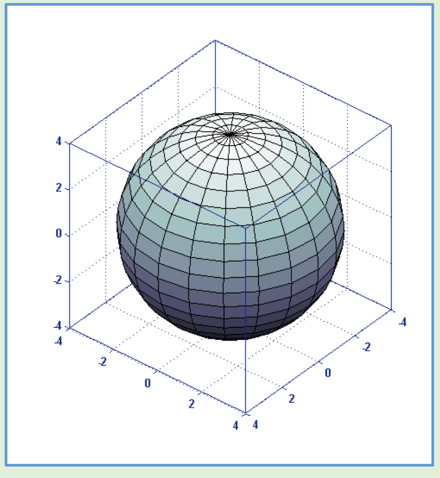
$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -Cos(\alpha)} \\ \mathbf{y = Sin(\alpha)} \end{cases} ; \boldsymbol{0 \le \alpha \le \pi}$$

El Signo menos es porque empieza en x =-1≠1

SUPERFICIES – TERCERA PARTE

1-

SUPERFICIE ESFERICA



ECUACION CANONICA DE LA ESFERA

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$$

a-

Completamos cuadrados para x, y y z:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 6z + 20 = 0$$
$$x^2 - 4x + y^2 + 4y + z^2 + 6z + 20 = 0$$
$$(x-2)^2 - 4 + (y+2)^2 - 4 + (z+3)^2 - 9 + 20 = 0$$
$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = -2 \Rightarrow \textbf{NO ES UNA SUPERFCIE ESFERICA}$$

b-

Completamos cuadrados para x, y y z:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x + 10y + 10 = 0$$
$$2x^2 - 6x + 2y^2 + 10y + 2z^2 + 10 = 0$$
$$x^2 - 3x + y^2 + 5y + z^2 + 5 = 0$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + z^2 + 5 = 0$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow$$
$$\mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}; -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}; \mathbf{0}\right)\ \boldsymbol{R} = \sqrt{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}}$$

c-

Completamos cuadrados para x, y y z:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 6 = 0$$
$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 6 = 0$$
$$(x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z+1) - 1 + 6 = 0$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1) = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$\textbf{Punto } (\mathbf{-1, 2, -1})$$

2-

Completamos cuadrados para x, y y z:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$
$$\left(x + \frac{a}{2}\right) - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right) - \frac{b^2}{4} + \left(z + \frac{c}{2}\right) - \frac{c^2}{4} + d = 0$$
$$4\left(x + \frac{a}{2}\right) - a^2 + 4\left(y + \frac{b}{2}\right) - b^2 + 4\left(z + \frac{c}{2}\right) - c^2 + 4d = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 > 4d}$$

3-

Veamos la intersección de ambas rectas:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ y - z = -1 \\ x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} = \begin{cases} 2(t+1) - 2t = 2 \\ 2t - 3t = -1 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \boldsymbol{L_1 \cap L_2 = \{(2,2,3)\}}$$

Si el plano es Tangente a la esfera, significa que debemos averiguar cuál es la distancia del centro, intersección de las rectas 1 y 2 a dicho plano, eso nos dará el radio de la misma:

$$Dist(L_1 \cap L_2 = C; \alpha) = \left\| Proy_{\vec{n}_{alpha}}(C) \right\| = \frac{|\overline{P_x C}|}{n_{alpha}} = \frac{|4 - 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \boldsymbol{R} \Rightarrow$$

$$\mathbf{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{16}{5}}$$

4-

En esta oportunidad la solución consta en Cortar con Planos paralelos a los PLANOS COORDENADOS y, además, las trazas con dichos planos cuando estamos en el espacio. Además, es evidente que, si hay una tercera variable, no se puede hablar de graficas en 2 dimensiones:

a-

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO XY:

$$\begin{cases} z = k \\ x^2 - y^2 = z \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 = k \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \boldsymbol{Hip\acute{e}rbola\ equilatera\ de\ lado\ \sqrt{k}\ env\ y} \\ k < 0 \Rightarrow \boldsymbol{Hip\acute{e}rbola\ equilatera\ de\ lado\ \sqrt{k}\ env\ x} \end{cases}$$

Caso particular k=0:

$$y^2 = x^2 \Rightarrow y = x \wedge y = -x \Rightarrow \boldsymbol{Rectas\ Secantes\ en\ (0,0,0)}$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZY:

$$\begin{cases} x = k \\ x^2 - y^2 = z \end{cases} \Rightarrow -y^2 = z - k^2 \Rightarrow \boldsymbol{Par\acute{a}bolas\ Invertidas\ dezplazadas\ en\ z\ k^2}$$

Caso particular k=0:

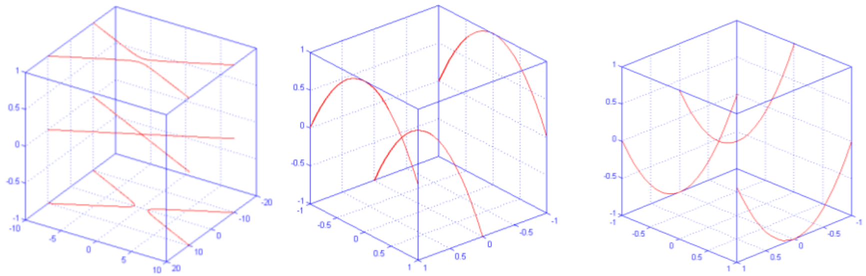
$$-y^2 = z \Rightarrow \boldsymbol{Par\acute{a}bola\ Inv\acute{e}rtida\ centrada}$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZX:

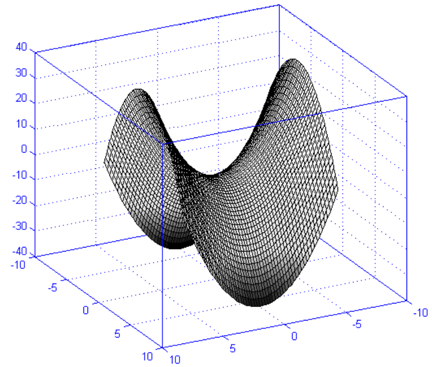
$$\begin{cases} y = k \\ x^2 - y^2 = z \end{cases} \Rightarrow x^2 = z + k^2 \Rightarrow \boldsymbol{Par\acute{a}bolas\ dezplazadas\ en\ z - k^2}$$

Caso particular k=0:

$$x^2 = z \Rightarrow \boldsymbol{Par\acute{a}bola\ centrada}$$



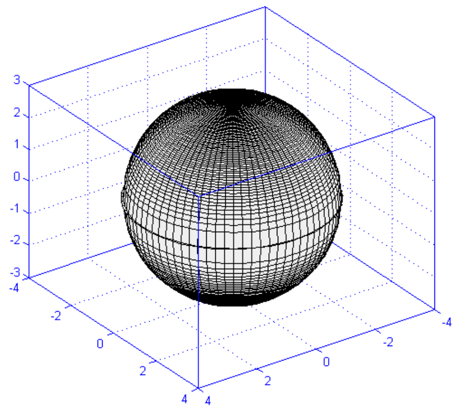
PARABOLOIDE HIPERBÓLICO



b-

NO ES NECESARIO VER LAS TRAZAS QUE SE GENERAN AL PASAR DISTINTOS PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS, TODOS DAN CIRCUNFERENCIAS DE RADIO MENOR A 3, Y EN 3 DA EL ORIGEN.

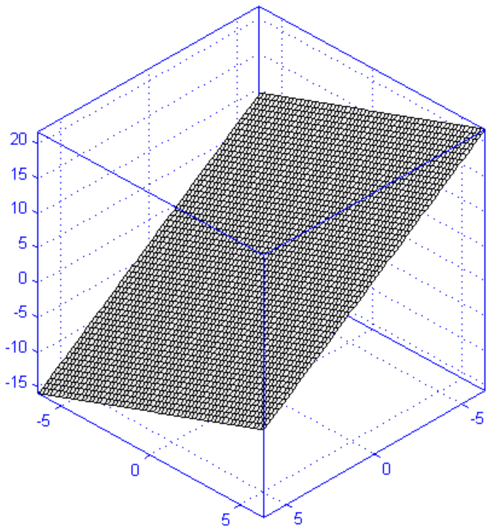
ESFERA DE RADIO 3



c-

NO ES NECESARIO VER LAS TRAZAS QUE SE GENERAN AL PASAR DISTINTOS PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS, TODOS DAN RECTAS, ADEMAS TIENE LA FORMA EVIDENTE DE UN PLANO DE n(2;-1,1).

PLANO DE NORMAL (2,-1, 1)



d-

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO XY:

$$\begin{cases} z = k \\ x^2 - 2y + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 = 2y \Rightarrow \boldsymbol{Parábola\ Dezplazada\ env\ y}$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZY:

$$\begin{cases} x = k \\ x^2 - 2y + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{k^2 + 2k + 1}{2} = y \Rightarrow \boldsymbol{Rectas\ PARALELAS\ AL\ EJE\ Z}$$

Caso particular k=0:

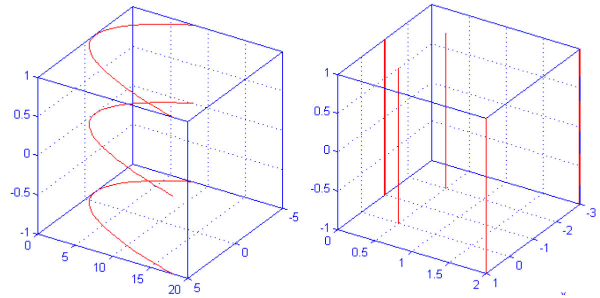
$$y = \frac{1}{2}$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZX:

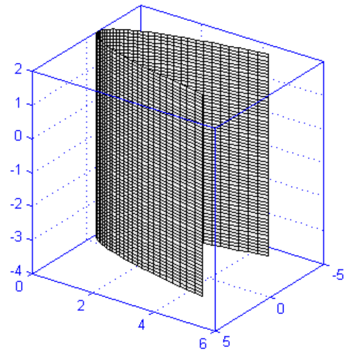
$$\begin{cases} y = k \\ x^2 - 2y + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 = 2k \Rightarrow 2\ \boldsymbol{Rectas\ PARALELAS\ AL\ EJE\ Z}$$

Caso particular k=0:

$$x = 1 \Rightarrow \boldsymbol{Parábola\ centrada}$$



CILINDRO PARABOLICO



En 2D es una PARABOLA QUE ENV AL EJE Y.

e-

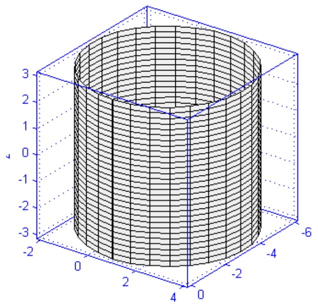
Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO XY:

$$\begin{cases} z = k \\ x^2 + 6x + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 10 \Rightarrow \boldsymbol{CIRCUNFERENCIAS}$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZY:

$$\begin{cases} x = k \\ x^2 + 6x + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (y-1)^2 = -k^2 - 6k + 1 \Rightarrow \boldsymbol{Rectas\ PARALELAS\ AL\ EJE\ Z}$$

CILINDRO RECTO



f-

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO XY:

$$\begin{cases} z = k \\ x^2 - 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4-k^2} - \frac{y^2}{2-\frac{k^2}{2}} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{Hipérbolas\ env\ x}$$

Caso particular k=2 o k=-2:

$$x = \pm 2y \Rightarrow \boldsymbol{Rectas\ secantes\ en\ el\ ORIGEN}$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZY:

$$\begin{cases} x = k \\ x^2 - 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{z^2}{4-k^2} - \frac{y^2}{2-\frac{k^2}{2}} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{Hipérbolas\ env\ z}$$

Caso particular k=2 o k=-2:

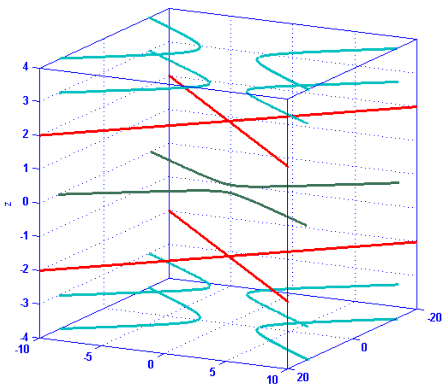
$$z = \pm 2y \Rightarrow \boldsymbol{Rectas\ secantes\ en\ el\ ORIGEN}$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZX:

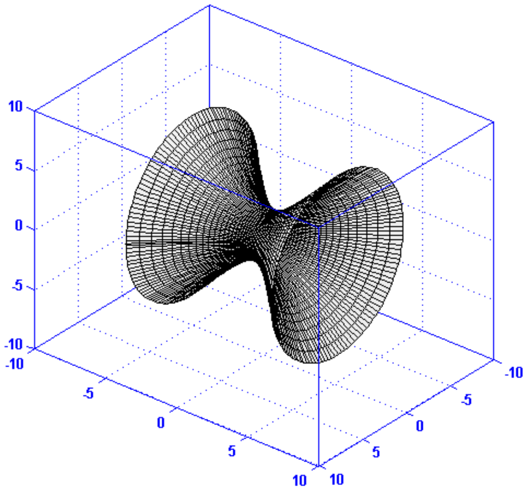
$$\begin{cases} y = k \\ x^2 - 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 = 2k^2 + 4 \Rightarrow \boldsymbol{Circunferencias}$$

Caso particular k=0:

$$x^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \boldsymbol{Circunferencia\ de\ Radio\ 2}$$



HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA



g-

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO XY:

$$\begin{cases} z = k \\ 2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{k}{2} + \frac{13}{4} \Rightarrow \boldsymbol{Circunferencias}$$

Caso particular k=-6.5:

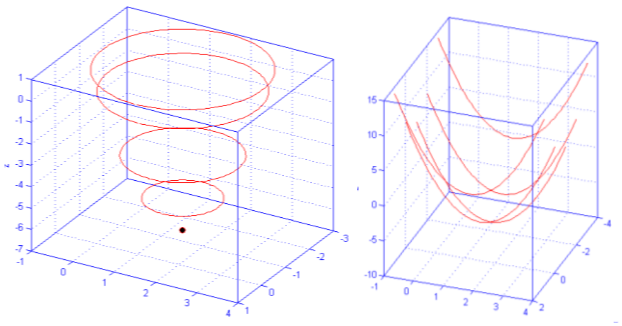
$$\Rightarrow El\ punto\ \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZY:

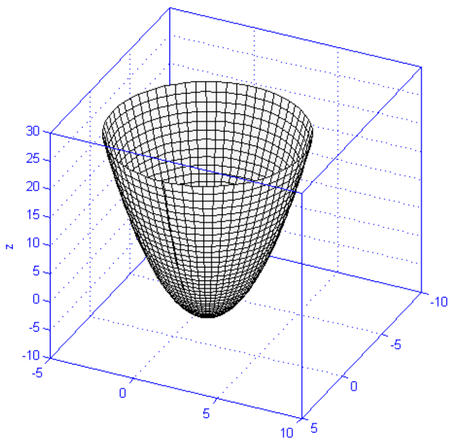
$$\begin{cases} x = k \\ 2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = z - \frac{9}{4} + k^2 + 2k \Rightarrow \boldsymbol{Parábolas\ env\ a\ z}$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZX:

$$\begin{cases} y = k \\ 2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Parábolas\ env\ a\ z}$$



PARABOLOIDE CIRCULAR



h-

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO XY:

$$\begin{cases} z = k \\ -4x^2 - y^2 + 2z^2 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = -8 + 2k^2 \Rightarrow \boldsymbol{Elipses}$$

Caso particular k=2 o k=-2

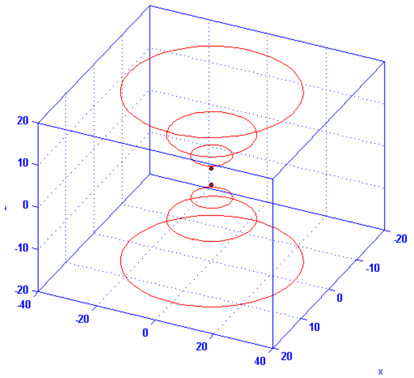
$$\Rightarrow El\ punto\ (0{,}0)$$

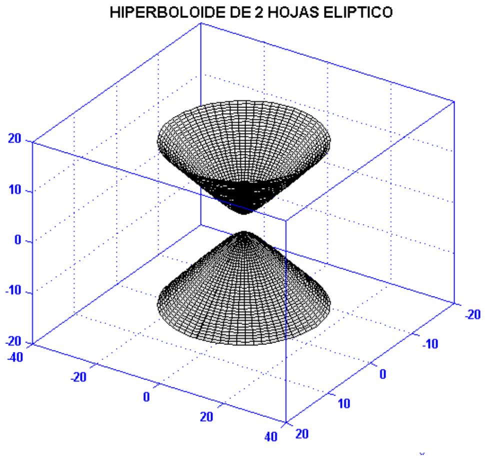
Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZY:

$$\begin{cases} x = k \\ -4x^2 - y^2 + 2z^2 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow -y^2 + \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 8 + 4k^2 \Rightarrow \boldsymbol{Hip\acute{e}rbolas\ que\ env\ a\ y}$$

Veamos las trazas con PLANOS PARALELOS AL PLANO ZX:

$$\begin{cases} y = k \\ -4x^2 - y^2 + 2z^2 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 8 + k^2 \Rightarrow \boldsymbol{Hip\acute{e}rbolas\ que\ env\ a\ y}$$





EL RESTO DE LOS EJERCICIOS SE ASEMEJAN. Y ESTAN LOS RESULTADOS EN LA PROPIA GUIA, NO PARECE RELEVANTE LOS DESARROLLE, CON LO VISTO YA ES SUFICIENTE PARA QUE LO PUEDAN REALIZAR.

PREFIERO TERMINAR ESTO PARA HACER LA SIGUIENTE UNIDAD (SIENDO LA ULTIMA, COMPLEJOS CON LOS RESULTADOS DE LA GUÍA Y LAS FÓRMULAS SE RESUELVEN FACIL) Y PONERME A RESOLVER LOS FINALES DE LA GUIA Y FINALES QUE PUEDA SUBIR.

AVISEN ANTE CUALQUIER ERROR EN CUALUQUIERA DE LAS GUIAS O FINALES QUE SUBO.