Índice general

1. Números Reales **3**
- 1.1. Revisión de los conjuntos numéricos. Naturales y enteros. 3
- 1.2. Representación de los enteros en la recta. 5
- 1.3. El conjunto de los números racionales. 6
- 1.4. Representación de los racionales en la recta. 7
- 1.5. Representación decimal de los números racionales. 9
- 1.6. Números Reales. 15
- 1.7. Intervalos reales. 17
- 1.8. Valor absoluto. 20
- 1.9. Exponentes y raíces. 23
- 1.10. Elementos de geometría. 25
- 1.11. EJERCICIOS 32

2. Funciones lineales y cuadráticas **41**
- 2.1. Concepto de función 41
- 2.2. Función lineal 43
  - 2.2.1. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos 44
  - 2.2.2. Ecuación de la recta conociendo un punto y su pendiente 45
- 2.3. Función cuadrática 46
  - 2.3.1. Forma canónica 50
  - 2.3.2. Raíces de una cuadrática 52
- 2.4. EJERCICIOS 54

3. Polinomios **58**
- 3.1. Definición y operaciones 58
- 3.2. Ceros o raíces de un polinomio 68
- 3.3. Factorización de polinomios 70
- 3.4. Expresiones racionales. 74
- 3.5. EJERCICIOS 77

4. Sistemas Lineales **81**
- 4.1. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. 81
- 4.2. Sistemas lineales equivalentes. 84
- 4.3. Resolución de los sistemas lineales: Eliminación de Gauss 86
- 4.4. Clasificación de los sistemas lineales. 92
- 4.5. Ejemplos de algunos problemas que se resuelven mediante sistemas lineales. 92
- 4.6. EJERCICIOS 95

5. Exponenciales y Logarítmicas **99**
5.1. Función exponencial . . . 99
5.2. Inversa de una función . . . 102
5.3. Funciones logarítmicas . . . 106
5.3.1. Propiedades. . . . 107
5.3.2. Dos logaritmos importantes: log y ln. . . . 107
5.3.3. Cambio de base . . . 107
5.4. ¿Cómo encontrar la inversa de una función? . . . 109
5.5. Las funciones $f(x) = \mathrm{e}^x$ y $g(x) = \ln x$ . . . 110
5.6. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. . . . 111
5.7. EJERCICIOS . . . 113

6. Otras funciones elementales. **116**
6.1. Funciones homográficas . . . 116
6.2. La función módulo: $f(x) = |x|$. . . . 122
6.3. La función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$ . . . 125
6.4. EJERCICIOS . . . 128

7. Composición de funciones **133**
7.1. La función identidad. . . . 136
7.2. Paridad e imparidad de una función. . . . 136
7.3. Traslaciones verticales y horizontales. . . . 138
7.4. EJERCICIOS . . . 139

8. Trigonometría **142**
8.1. Relaciones trigonométricas . . . 142
8.2. Valores de las razones trigonométricas de algunos ángulos particulares. . . . 146
8.3. Cálculo de los ángulos conociendo los lados de un triángulo rectángulo. . . . 148
8.4. Relación Pitagórica . . . 150
8.5. La circunferencia trigonométrica . . . 152
8.6. Algunas identidades importantes . . . 154
8.6.1. Paridad e imparidad del coseno y seno. . . . 154
8.6.2. Fórmulas de adición . . . 154
8.6.3. Ángulos suplementarios . . . 157
8.7. Área de un triángulo . . . 158
8.8. Teoremas del seno y del coseno . . . 159
8.9. Pendiente de una recta . . . 162
8.10. EJERCICIOS . . . 163

9. Funciones Trigonométricas **167**
9.1. Sistema de medición en radianes . . . 168
9.2. Funciones periódicas . . . 168
9.3. Las gráficas del Seno, Coseno y Tangente . . . 169
9.4. La función sinusoidal . . . 172
9.5. Inversas de las funciones trigonométricas . . . 175
9.6. Ecuaciones trigonométricas . . . 177
9.7. EJERCICIOS . . . 180

10. Vectores **184**
10.1. Vectores geométricos 186
10.2. Vectores en sistemas de coordenadas 189
10.3. Módulo de un vector 191
10.4. Producto escalar 193
10.5. Proyección ortogonal 195
10.6. Aplicaciones matemáticas a la estática. 196
10.7. Cinemática del punto material. 201
10.8. EJERCICIOS 225

1. Números Reales

El tiempo absoluto, verdadero y matemático, por sí mismo y por su propia naturaleza, fluye uniformemente sin relación a nada externo, y se dice con otro nombre, duración.

Sir Isaac Newton
Principios matemáticos de filosofía natural (1687)

La obra citada, reúne los trabajos de Newton en el campo de la física y en el de la matemática. En ella da cuenta de la mecánica celeste, expone sus famosas leyes y desarrolla lo que actualmente conocemos como "*Cálculo*".

Para la física de Newton, la que conocemos como física clásica, el *tiempo* es una magnitud continua. La *longitud, área, volumen, masa, presión, trabajo*, son otros ejemplos de magnitudes continuas. Estas magnitudes se representan mediante **números reales**. Los números reales y todas las herramientas desarrolladas alrededor de ellos nos permiten elaborar modelos matemáticos continuos, los cuales son fundamentales en la física e ingeniería.

El objeto de este primer capítulo es repasar algunos conceptos y propiedades asociadas a la del número real.

1.1. Revisión de los conjuntos numéricos. Naturales y enteros.

Vamos a comenzar recordando los distintos conjuntos numéricos que fueron aprendiendo en la escuela.

En primer lugar tenemos los *números naturales*,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

El conjunto de todos los números naturales se denota por $\mathbb{N}$. Es decir,

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

Por su parte, el conjunto de los *números enteros* (denotado por $\mathbb{Z}$) está formado por los números naturales, sus opuestos y el cero:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

Observación 1.1 $\mathbb{N}_0$ *denota al conjunto de los números naturales con el cero,* $\mathbb{Z}^+$ *al conjunto de enteros positivos y* $\mathbb{Z}^-$ *al de enteros negativos.*

Una de las relaciones más importantes definidas en el conjunto de los números enteros es la *divisibilidad*:

Definición (Divisibilidad)

Se dice que un entero a es *divisible* por un entero no nulo b si existe un entero k tal que

$$a = b \cdot k$$

También se dice que b es un *divisor* de a, o que a es un *múltiplo* de b.

Que a es divisible por b se denota por $b|a$.

Ejemplo 1.1 18 *es divisible por* 6*, pues* $6 \cdot 3 = 18$*. Equivalentemente decimos que* 6 *divide a* 18 *y que* 18 *es un múltiplo de* 6*. En símbolos,*

$$6|18$$

En particular, los múltiplos de 2 son los *números pares*. En símbolos,

$$\{2\,k : k \in \mathbb{Z}\}$$

es el conjunto de números pares.
Aquellos enteros que no son divisibles por 2 constituyen el conjunto de los *números impares*:

$$\{2\,k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$$

Recordemos también que un número natural p es *primo* si tiene exactamente dos divisores diferentes: 1 y el propio p.

Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11. Un teorema (Euclides, ca. 325 a.C. - ca. 265 a.C.) afirma que existen infinitos números primos.

Los números naturales diferentes del 1 que no son primos, se conocen como *números compuestos*. El 1 no es primo ni compuesto.

Uno de los resultados más importantes de la Aritmética afirma que todo número natural mayor que 1 puede escribirse como el producto de números primos y que este producto es, básicamente, único. De esta forma los números primos son una especie de "átomos" con los cuales podemos construir el resto de los naturales. Concretamente, tenemos el siguiente resultado:

Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número natural n mayor que 1 se factoriza de manera única (salvo el orden) como producto de números primos.

Ejemplo 1.2 *Los divisores primos de* 120 *son* $2, 3$ *y* 5*. La factorización en primos es*

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

El Teorema Fundamental de la Aritmética afirma que la factorización anterior es única, excepto por el orden de los factores. Escribimos de manera abreviada:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

En general, si $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son los factores primos de n, su factorización es de la forma

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

donde los α_i son números naturales.

Las definiciones de números primos y compuestos pueden extenderse fácilmente al conjunto de los números enteros: un entero es primo si su opuesto es un número primo. Análogamente, un entero es compuesto si su opuesto en un número compuesto. De esta forma, los números -1, 0 y 1 no son primos ni compuestos.

Definición (Máximo Común Divisor)

Sean a, b y d números enteros. Si $d|a$ y $d|b$ se dice que d es un *divisor común* de a y de b.
Dados dos enteros a y b, no simultáneamente nulos, al mayor de sus divisores comunes se lo conoce como el *máximo común divisor* de a y b.
Dos enteros a y b son *coprimos* si su máximo común divisor es igual a 1.

Ejemplo 1.3 *El* $mcd(15; 8) = 1$ *por lo tanto* 8 *y* 15 *son coprimos.*

1.2. Representación de los enteros en la recta.

Es posible representar a los números enteros mediante puntos en una recta. Para ello, tomamos arbitrariamente un punto cualquiera, que denominaremos *origen*, el cual representa al cero. A la derecha del cero ubicaremos los enteros positivos, mientras que a su izquierda, los negativos. Tomamos una medida para utilizar como *unidad* y marcamos cada punto de manera tal que dos enteros consecutivos distan en dicha unidad. Esto se muestra en la figura (1.1).

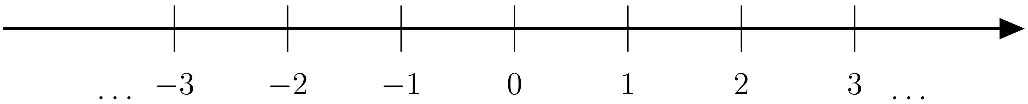


Figura 1.1: Enteros en la recta numérica

1.3. El conjunto de los números racionales.

Los números naturales surgen como una abstracción de la necesidad de los seres humanos de contar personas, animales, utensilios, distintos tipos de objetos, etc. Los números racionales, en realidad las fracciones de números naturales, aparecen relacionados con la necesidad de medir. Medir longitudes, capacidades, pesos, tiempo, etc. Así, por ejemplo, podemos hablar de "medio día", "tres cuartos de la jarra" o bien de "los cinco sextos de un año".

Definición (Conjunto de los números racionales)

Podemos pensar al conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, como el conjunto de todas las fracciones de tipo $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros con la condición $b \neq 0$. Es decir,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

Cuando consideramos una fracción $\frac{a}{b}$, a es el *numerador* y b el *denominador* de la fracción.

Si $n \in \mathbb{N}$, las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ representan la misma cantidad. Por ejemplo, las fracciones

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \text{etc.}$$

representan a un mismo número y se conocen como *fracciones equivalentes*.

Definición (fracciones equivalentes)

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son *equivalentes* si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$.

Puede observarse que, dada una fracción, existen infinitas fracciones equivalentes a ella.

Operaciones con números racionales.

1. Suma de racionales.

Recordemos que la suma dos fracciones de igual denominador, es la fracción que tiene como denominador dicho número y el numerador es la suma de los respectivos numeradores:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Cuando las fracciones que debemos sumar no tienen el mismo denominador, buscamos primero fracciones equivalentes a cada una de ellas, pero que tengan el mismo denominador. Para ello necesitamos un múltiplo común a ambos denominadores. En general, utilizamos el menor de los múltiplos comunes. Esto es lo que se conoce como *denominador común*. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular $\frac{5}{6} + \frac{1}{15}$. El menor de los múltiplos comunes de

6 y 15 es 30:

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{15}=\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}+\frac{1\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{25}{30}+\frac{2}{30}=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}$$

2. Multiplicación de racionales.

El producto de dos racionales, es la fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{b\,d}$$

3. División de racionales.

Para dividir un racional $\frac{a}{b}$ por otro racional $\frac{c}{d}$, no nulo, simplemente hay que multiplicar al primero por el inverso multiplicativo (o recíproco) del segundo:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\,d}{b\,c}$$

Definición (fracciones irreducibles)

Decimos que una fracción $\dfrac{a}{b}$ es *irreducible* si a y b son coprimos y $b>0$.

Toda fracción es equivalente a alguna fracción irreducible.

1.4. Representación de los racionales en la recta.

Mediante procedimientos geométricos es posible representar a los números racionales en la recta numérica. Utilizando regla y compás podemos identificar cada número racional con un punto de la recta numérica. Para ello necesitamos utilizar el siguiente resultado:

Teorema de Thales

Si dos rectas cualesquiera son cortadas por rectas paralelas, entonces los segmentos determinados sobre una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes determinados sobre la otra recta.

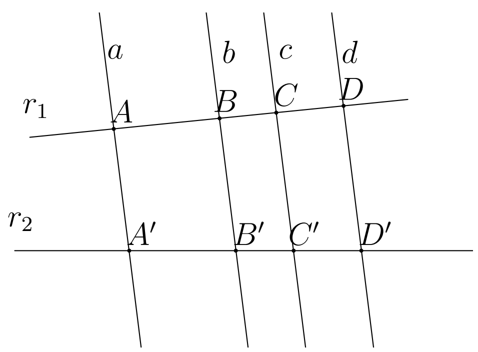


Figura 1.2: Teorema de Thales

Como las rectas a, b, c y d son paralelas se verifica que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Dado un segmento cualquiera, por ejemplo el segmento AB, aplicando el teorema de Thales podemos dividirlo en n partes iguales mediante el siguiente procedimiento:

1. Trazamos una semirrecta cualquiera con origen en A.
2. Con el compás marcamos los extremos de n segmentos congruentes consecutivos.
3. Unimos el extremo final del último segmento con el punto B.
4. Trazamos rectas paralelas a este último segmento que pase por los extremos de cada uno de los segmentos determinados en la semirrecta auxiliar.

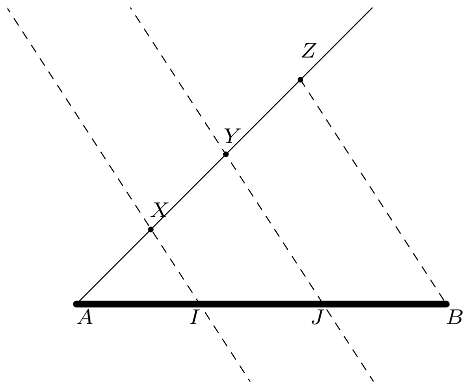


Figura 1.3: División del segmento AB en 3 partes iguales.

Si el segmento A fuese el 0 en la recta numérica y B el 1, los puntos I y J representarían las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ respectivamente. Así podemos ubicar todos los racionales positivos. Para determinar los negativos, sólo debemos considerar los simétricos de estos puntos respecto del origen.

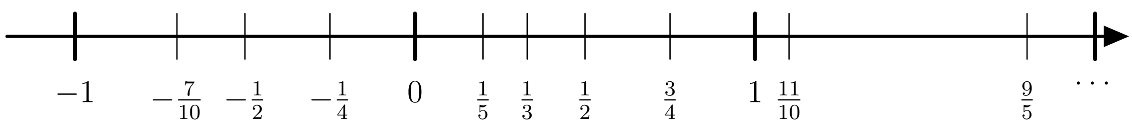


Figura 1.4: Algunos racionales en la recta numérica

La disposición de los números racionales en la recta los ordena naturalmente de manera tal que una racional a es "menor" que otro racional b si se encuentra a la izquierda de éste. Por ejemplo $-\frac{7}{10} < -\frac{1}{4}$, o $\frac{1}{5} < \frac{3}{4}$, según podemos observar en la figura 1.4.

Dicho orden, coincide con el llamado *orden usual* en $\mathbb{Q}$:

Definición (Orden en $\mathbb{Q}$)

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones con b y d positivos. Diremos que $\frac{a}{b}$ *es menor que* $\frac{c}{d}$ si

$$a \cdot d < b \cdot c$$

En tal caso escribiremos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

De manera similar, dadas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones con b y d positivos, diremos que $\frac{a}{b}$ *es menor o igual que* $\frac{c}{d}$ si

$$a \cdot d \leq b \cdot c$$

Si bien es posible ubicar cualquier racional en la recta, su representación tiene como dificultad que dados dos racionales distintos cualesquiera en la recta numérica, entre ellos existen otros infinitos racionales. En efecto, si consideramos dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, diferentes, tales que, por ejemplo, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces el promedio de ellos se encuentra entre ellos y también es un número racional. Es decir

$$\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$$

Por ejemplo,

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2} \text{ es decir, } \frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

esto es, $\frac{5}{12}$ se encuentra entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Luego podríamos considerar el promedio entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$, y así, seguir indefinidamente.

Esta característica de la distribución de los racionales en la recta numérica se conoce como *densidad de* $\mathbb{Q}$ *en la recta*:

Propiedad

Entre dos racionales distintos en la recta numérica, existen infinitos puntos que representan números racionales.

Todos los números racionales se corresponden con un punto en la recta numérica. ¿Es verdadera la implicación recíproca? Cada punto de la recta, ¿se corresponde con un número racional? En las próximas secciones trataremos esta importante cuestión.

1.5. Representación decimal de los números racionales.

Los números racionales también pueden ser expresados mediante su representación decimal. Para obtener esta representación sólo tenemos que dividir el numerador por el denominador de la fracción que representa a un racional dado.

Por ejemplo, calculando 1 dividido 4, obtenemos la representación o expresión decimal de $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

En el ejemplo anterior tenemos que a la "coma" le sigue una cantidad finita de dígitos. Con más precisión, sólo dos dígitos. En este caso, decimos que se trata de una *expresión decimal finita.*

Propiedad

Todas las expresiones decimales finitas corresponden a números racionales. Es decir, dada una expresión decimal finita $a, a_1a_2a_3 \ldots a_n$, existe una fracción $\frac{b}{c}$ de números enteros tales que

$$a, a_1a_2a_3 \ldots a_n = \frac{b}{c}$$

Demostración
Multiplicando y dividiendo $a, a_1a_2a_3 \ldots a_n$ por 10^n (recuerden que esto corre la coma n lugares hacia la derecha) tenemos que

$$a, a_1a_2a_3 \ldots a_n \cdot \frac{10^n}{10^n} = \frac{aa_1a_2a_3 \ldots a_n}{10^n}$$

que es una fracción de números enteros.

Ejemplo 1.4

$$0,25 = 0,25 \cdot \frac{10^2}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Observación 1.2 *Las expresiones decimales finitas corresponden a fracciones cuyo denominador es una potencia de* 10*. Si la fracción no fuese irreducible, podemos simplificarla, pero como los factores primos de* 10 *son* 2 *y* 5*, en el denominador sólo pueden aparecer números cuya factorización contenga só potencias de* 2 *y de* 5*. Por ejemplo,*

$$0,34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50} = \frac{17}{2 \cdot 5^2}$$

Ejemplo 1.5 *De la observación anterior,* $\frac{1}{7}$ *no tiene una expresión decimal finita, pues se trata de una fracción irreducible cuyo denominador es un primo distinto de* 2 *y distinto de* 5*.*

Para encontrar la representación decimal de $\frac{1}{7}$ tenemos que realizar la división. Como este proceso tendrá una cantidad infinita de pasos, pues en caso contrario el cociente tendría un número finito de dígitos, los restos obtenidos serán diferentes de 0. Los posibles restos varían entre 1 y 6, luego en a lo sumo seis pasos un resto deberá repetirse de forma tal que se generará una misma secuencia de restos que se repetirá de manera periódica:

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r} -\begin{array}{r}10\\7\end{array} \\ \hline -\begin{array}{r}30\\28\end{array} \\ \hline -\begin{array}{r}20\\15\end{array} \\ \hline -\begin{array}{r}60\\56\end{array} \\ \hline -\begin{array}{r}40\\35\end{array} \\ \hline -\begin{array}{r}50\\49\end{array} \\ \hline -\begin{array}{r}10\\7\end{array} \\ \hline 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{r} 7 \\ \hline 0,1428571\ldots \end{array}
\end{array}
$$

A partir de la repetición del resto 1, el ciclo vuelve a producirse. La representación decimal de $\frac{1}{7}$ es *infinita y periódica*:

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\cdots = 0,\overline{142857}$$

Propiedad

La representación decimal de una fracción irreducible cuyo denominador es un entero cuya factorización contiene al menos un primo distinto de 2 y de 5, es infinita y periódica.

Recíprocamente, toda expresión decimal periódica corresponde a un número racional.

Vamos a ver con un par de ejemplos cómo podemos encontrar la fracción si conocemos su representación periódica.

Ejemplo 1.6 *Determinar la fracción que corresponde al número* $1,\overline{26}$.

Llamemos x *al número* $1,\overline{26}$. *Es decir,*

$$x = 1,2626262626...$$

Como el período es de longitud 2 *(se repite el "26"), observen que si multiplicamos a* x *por* 100*, no cambia la parte decimal, pues se "corre" la coma dos lugares para la derecha:*

$$100\,x = 126,26262626...$$

Luego,

$$
\begin{array}{rr}
 & 100\,x = 126,26262626... \\
- & \\
 & x = \quad 1,262626... \\
\hline
 & 99\,x = 125
\end{array}
$$

Por lo tanto $x = \dfrac{125}{99}$*, es decir,*

$$1,2626262626... = \frac{125}{99}$$

Ejemplo 1.7 *Determinar la fracción que corresponde al número* $2,14\overline{83}$*.*
En este caso, el período también tiene longitud 2 *pero la parte decimal contiene una parte no periódica. Como en el ejemplo anterior, vamos a llamar* x *al número* $2,14\overline{83}$*. Vamos a multiplicar a* x *por dos potencias de* 10 *de manera que tengamos dos números con la misma parte decimal así cuando restemos nos quede un número entero.*

Por ejemplo, observen que $100\,x$ *y* $10\,000\,x$ *tienen la misma parte decimal. entonces,*

$$\begin{array}{rl} & 1\,0000\,x = 21483,83838383... \\ - & \\ & 100\,x = \quad 214,838383... \\ \hline & 9900\,x = 21269 \end{array}$$

de donde, $x = \dfrac{21269}{9900}$

Efectuando las divisiones es posible verificar los resultados.

Observación 1.3 *Consideremos el número* $x = 0,\overline{9} = 0,999999...$ *y apliquemos el razonamiento utilizado anteriormente:*

$$\begin{array}{rl} & 10\,x = 9,9999999... \\ - & \\ & x = \quad 0,9999999... \\ \hline & 9\,x = 9 \end{array}$$

Lo cual implica que x*, es decir* $0,\overline{9} = 1$*. Esto ocurre con todas las expresiones decimales que tengan período* 9*.* ***Existen números racionales que admiten dos representaciones decimales: Las fracciones irreducibles cuyos denominadores tienen sólo potencias de*** 2 ***y/o de*** 5***, pueden representarse mediante expresiones decimales finitas o bien mediante expresiones decimales infinitas con período*** 9

Ejemplo 1.8 *En función de la observación anterior, se tiene que* $0,4 = 0,3\overline{9}$ *o bien que* $1,28 = 1,27\overline{9}$*.*

Al finalizar la sección anterior nos preguntábamos si todo punto de la recta numérica se corresponde con un número racional. Ahora podemos agregar la siguiente pregunta: ¿Existen números que tengan una representación decimal infinita y no periódica?

Con respecto a esta última pregunta, la respuesta es SÍ. Es fácil construir una expresión decimal infinita y no periódica. Por ejemplo, consideren el número:

$$x = 0,34334333433334\ldots$$

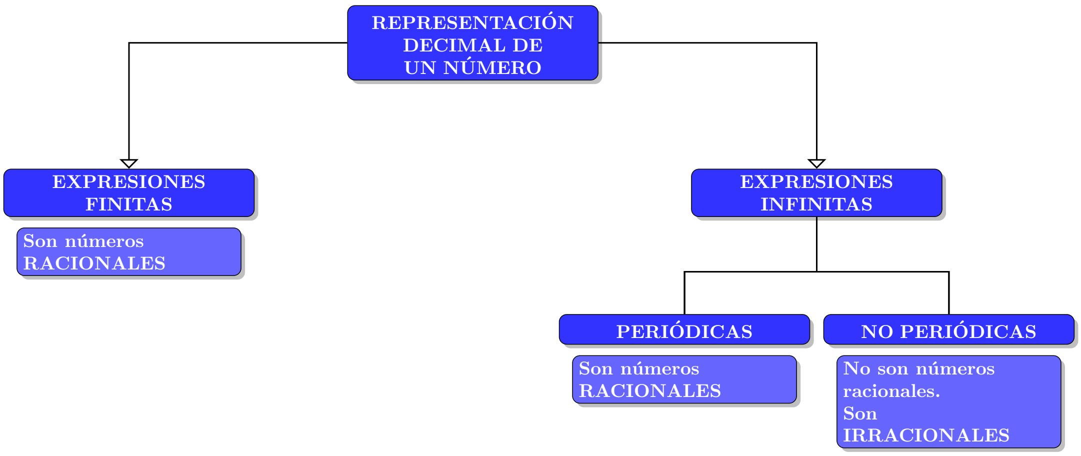
Este número (x) tiene infinitas cifras después de la coma y, tal como puede observarse en el patrón de su construcción, no es periódico, pues luego de cada 4 la cantidad de tres que sigue es mayor que la anterior. Por lo tanto el número x tiene una **representación decimal infinita y no periódica**. Teniendo en cuenta que todo número racional tiene una expresión decimal finita o infinita pero periódica, $x = 0,343343334333334\ldots$ no se corresponde con un número racional.

Definición (Números irracionales)

Decimos que un número es *irracional* si tiene una representación infinita y no periódica. Los números irracionales no pueden escribirse como la razón entre dos enteros.

Al conjunto de los números irracionales lo denotaremos con $\mathbb{I}$.

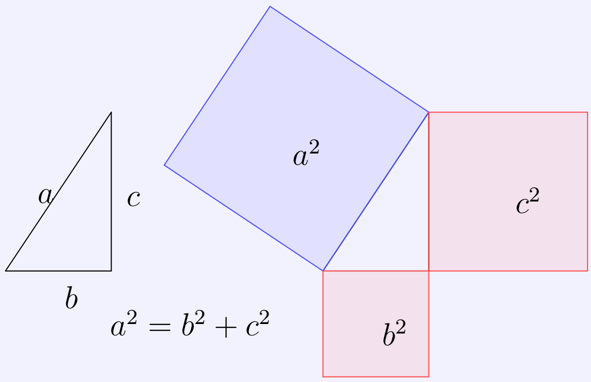
Resumimos lo anterior en el siguiente diagrama:



Los números irracionales (en particular los irracionales positivos) fueron conocidos y estudiados en la antigua Grecia. Los matemáticos griegos se encontraron con estos números al intentar realizar construcciones asociadas al Teorema de Pitágoras. Recordemos que:

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.



En particular, si consideramos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 unidad, según el Teorema de Pitágoras, su hipotenusa debe medir $\sqrt{2}$ unidades.

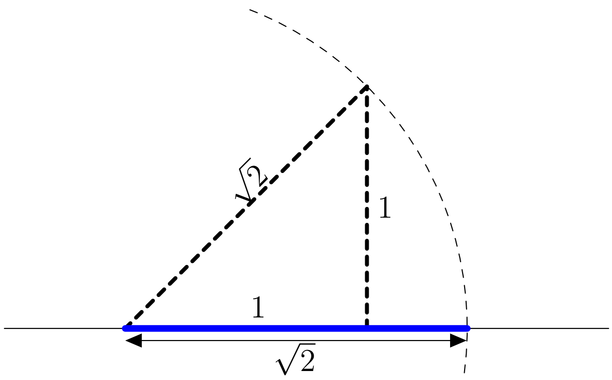


Figura 1.5: Segmento que mide $\sqrt{2}$

Los matemáticos griegos probaron que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente entre dos números enteros y, por lo tanto, no es un número racional. El argumento es, básicamente, el siguiente:

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Luego, existen enteros positivos a, b coprimos tales que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$. (Siempre es posible considerar que esta fracción es irreducible, caso contrario, simplificamos hasta obtener una fracción irreducible)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \tag{1.1}$$

La última igualdad nos dice que 2 divide a a^2. Pero, si un número primo divide al cuadrado de un número, entonces necesariamente debe dividir a ese número. Por lo tanto, 2 divide a a. Es decir a en un número par. En consecuencia existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = 2\,k. \tag{1.2}$$

Reemplazando en la ecuación (1.1),

$$2b^2 = a^2 \Leftrightarrow 2b^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow 2b^2 = 4k^2 \Leftrightarrow b^2 = 2k^2 \tag{1.3}$$

Como sucedió con a anteriormente, esto implica que b es par, es decir

$$b = 2\,k' \tag{1.4}$$

para algún entero k'.
De las ecuaciones (1.2) y (1.4) resulta que 2 es un divisor común de a y b lo cual contradice que sean coprimos. Esta contradicción surge de suponer que $\sqrt{2}$ es racional, por lo tanto debe ser irracional.

Observación 1.4 *Existen algoritmos que nos permiten determinar cualquier cantidad de dígitos del número $\sqrt{2}$. Si bien no es posible determinar todos sus dígitos, sabemos que, por ser un irracional, su representación decimal es infinita y no periódica.*

Observación 1.5 *Puede probarse que todos los números de la forma $\sqrt{n}$ donde $n \in \mathbb{N}$ o es un natural o es irracional. Por ejemplo, como $\sqrt{6}$ no es natural, es un número irracional.*

Observación 1.6 *La construcción de la figura 1.5 nos muestra que que existen puntos de la recta numérica que corresponden a números irracionales.*

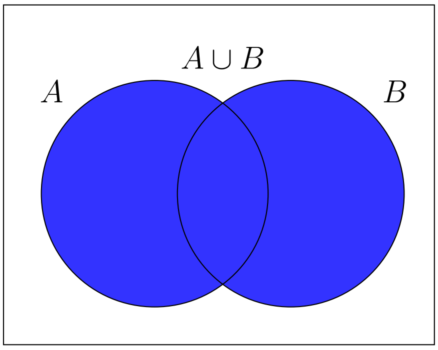
1.6. Números Reales.

Recordemos que dados dos conjuntos A y B, se llama *unión* de A y B al conjunto que contiene todos los elementos que están en el conjunto A o en el conjunto B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \;\vee\; x \in B\}$$

(El símbolo $\vee$ representa la disyunción de la lógica proposicional. $x \in A \;\vee\; x \in B$ se lee "*x pertenece a A o x pertenece a B*").

La representación de la unión en términos de diagramas de Venn, es:



Números reales

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es el que resulta de la unión entre el conjunto de los números racionales y el de los irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Por lo tanto, el conjunto de los números reales está formado por todos los números que admiten una representación decimal, finita o infinita y tanto periódica como no periódica.

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, se definen dos operaciones, la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$. Tanto la suma como el producto de dos números reales, es un número real. Estas operaciones verifican además las siguientes propiedades:

Propiedades de la suma:

1. (Asociatividad) Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifica que $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. (Conmutatividad) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica que $a + b = b + a$
3. (Existencia de elemento neutro) Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$, para todo número real a
4. (Existencia de opuestos) Para todo número real a, existe un real $-a$ tal que

$$a + (-a) = 0$$

El número $-a$ se conoce como *opuesto o inverso aditivo de* a.

Propiedades de la multiplicación:

1. (Asociatividad) Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifica que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
2. (Conmutatividad) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica que $a \cdot b = b \cdot a$
3. (Existencia de identidad) Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 1 = a$, para todo número real a
4. (Existencia de inverso multilicativo) Para todo número real $a \neq 0$, existe un real a^{-1} tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

El número a^{-1} se conoce como *recíproco o inverso multiplicativo de* a.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:
Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Leyes cancelativas:

1. Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$.
2. Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.

En función de la suma y multiplicación es posible definir la resta y división de números reales:

Restar es sumar el opuesto, $a - b =_{def} a + (-b)$

Dividir por un número real a, distinto de 0, es multiplicar por el inverso de a:

$$b/a =_{def} b \cdot a^{-1} \quad \text{con}\, a \neq 0$$

Orden en $\mathbb{R}$:

En el conjunto de los números reales también se define una relación de orden, el *menor o igual*, ($a \leq b$, se lee "a es menor igual que b"). Además diremos que *a es menor* que b, $a < b$, si se verifica que $a \leq b$ y $a \neq b$.

Por otra parte

$$a \geq b \textit{ es equivalente a decir que } b \leq a$$

Esto es, a es *mayor o igual* que b equivale a que b es menor igual que a.

$$a > b \textit{ es equivalente a decir que } b < a$$

Algunas propiedades importantes son:

1. (Reflexividad) $a \leq a$.
2. (Antisimetría) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$
3. (Transitividad) Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.
4. Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$
5. Si $a \leq b$ y $c > 0$ entonces $ac \leq bc$

La recta real:

Cada punto de la recta numérica se corresponde con un único número real y, recíprocamente, cada número real se corresponde con un único punto de la recta numérica o recta real.

En la recta real, un número a es menor que otro número b si el punto que se corresponde con a está a la izquierda del que se corresponde con b.

Los números *positivos* son los que están a la derecha del cero, mientras que los *negativos* a su izquierda.

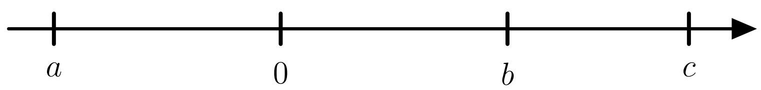


Figura 1.6: Orden en la recta real: $a < b < c$

$\mathbb{R}^+$ denota al conjunto de los reales positivos y $\mathbb{R}^-$ al de los negativos.

1.7. Intervalos reales.

Los intervalos reales constituyen los subconjuntos de números reales más elementales. En numerosas ocasiones a lo largo del Seminario vamos a utilizarlos.

Distinguiremos dos tipos de intervalos:

Intervalos acotados.

Vamos a definir tres tipos de intervalos acotados: abiertos, cerrados y semiabiertos (o semicerrados).

Dados dos números reales a y b con $a \leq b$ se denominan *intervalos acotados* a los siguientes conjuntos:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \textit{Intervalo abierto}$$

Figura 1.7: Intervalo abierto (a, b)

a y b se conocen como *extremos* del intervalo. En el caso de un intervalo abierto los extremos no pertenecen al conjunto, ya que contiene exclusivamente a los puntos estrictamente comprendidos entre ellos.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \textit{Intervalo cerrado}$$

A diferencia del caso anterior, este conjunto incluye los extremos del intervalo.

Figura 1.8: Intervalo cerrado $[a, b]$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \textit{Intervalo semicerrado por izquierda}$$

En este caso, incluye al extremo inferior, a, pero no contiene al superior, b.

Figura 1.9: Intervalo semicerrado por izquierda $[a, b)$

Por último,

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \textit{Intervalo semicerrado por derecha}$$

Intervalos No acotados.

Dado un número real a, los siguientes conjuntos se conocen como *intervalos no acotados*:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

Este conjunto contiene a todos los números menores que a. En este caso es abierto porque no incluye a dicho punto.

Figura 1.10: Intervalo semicerrado por derecha $(a, b]$

De manera similar podemos definir

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

Mientras que los intervalos acotados son segmentos sobre la recta real, los no acotados son semirrectas.

Figura 1.11: Intervalo no acotado $[a, +\infty)$

Observación 1.7 *El intervalo no acotado* $(-\infty, +\infty)$ *representa a toda la recta real.*

Ejemplo 1.9 *Determinen el conjunto solución de la siguiente desigualdad:*

$$\frac{2x-5}{5} - 1 > 3 - x$$

Aplicando las propiedades de la relación de $<$*, similares a las de* $\leq$ *en* $\mathbb{R}$*, podemos sumar uno en cada miembro de la desigualdad ("pasamos el* 1 *sumando") y luego multiplicar por* 5 *("pasamos el* 5 *multiplicando):*

$$\frac{2x-5}{5} - 1 > 3 - x \Leftrightarrow \frac{2x-5}{5} > 4 - x \Leftrightarrow 2x - 5 > 5\,(4 - x)$$

Es importante destacar que al multiplicar por 5 *se mantiene el sentido de la desigualdad porque estamos multiplicando por un número positivo, tal como se establece en la propiedad* 5 *de Orden en* $\mathbb{R}$*.*

Distribuimos y luego sumamos 5 *en ambos miembros:*

$$2x - 5 > 20 - 5x \Leftrightarrow 2x > 25 - 5x$$

Finalmente,

$$7x > 25 \Leftrightarrow x > \frac{25}{7}$$

Por lo tanto el conjunto solución es

$$\boxed{S = \left(\tfrac{25}{7}, +\infty\right)}$$

1.8. Valor absoluto.

Definición

Dado un número real x se llama *valor absoluto* de x, el cual se denota por $|x|$, al siguiente número:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es decir, el $|x|$ es el propio x cuando x es no negativo, y es el opuesto de x, $(-x)$, si es negativo.

El valor absoluto o módulo de un número real, puede interpretarse como la distancia de dicho número al origen en la recta numérica.

Por ejemplo, según la definición que hemos dado, $|-4| = 4$, pues como -4 es menor que 0 su valor absoluto es su opuesto: 4. Observemos que el -4 está a 4 unidades del 0 en la recta real. Por otra parte, $|7| = 7$ ya que $7 > 0$, la distancia del 7 al origen es, justamente, de 7 unidades.

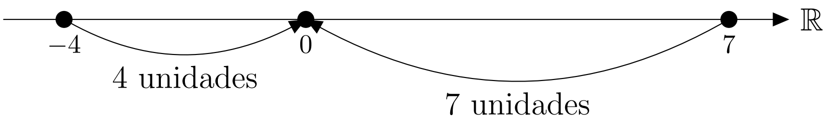


Figura 1.12: Interpretación del valor absoluto

Observación 1.8 *El valor absoluto también puede definirse como*

$$|x| = max\,\{x, -x\}$$

es decir, como el máximo valor entre el de x y su opuesto.

Entre las propiedades más importantes del valor absoluto podemos destacar las siguientes:

Propiedades del valor absoluto.

Sean a y b números reales cualesquiera y $k > 0$.

1. $|a| \geq 0$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|a| = |-a|$
4. $|a| \leq k$ equivale a $-k \leq a \leq k$
5. $|a| \geq k$ equivale a $a \leq -k$ o bien $k \leq a$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular)

Considerando la propiedad 4 y la interpretación geométrica que hemos dado del valor absoluto, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| < 5\}$$

nos está indicando al conjunto de todos los números reales que en la recta real distan del 0 en menos de 5 unidades. Este conjunto contiene a todos los números del intervalo $(-5, 5)$.

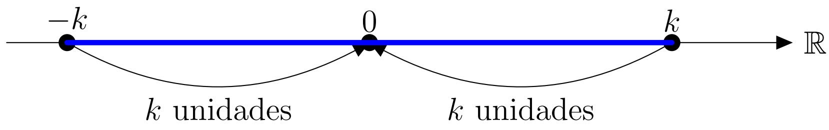


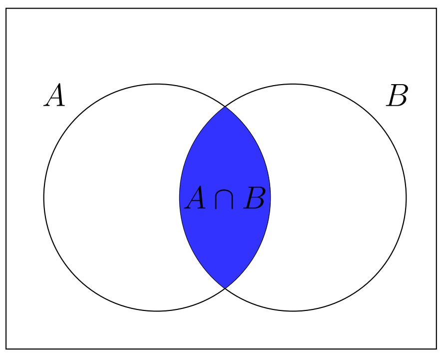
Figura 1.13: $|x| < k$

El conjunto solución de la desigualdad anterior puede pensarse como la intersección entre dos intervalos. En general, la intersección entre dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene a todos los elementos que están en A y en B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

(El símbolo $\wedge$ representa la conjunción de la lógica proposicional. $x \in A \wedge x \in B$ se lee "*x pertenece a A y x pertenece a B*")

La representación de la intersección en términos de diagramas de Venn, es:



De manera similar (propiedad 5) , el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| > 5\}$$

nos está indicando al conjunto de todos los números reales que en la recta real distan del 0 en más de 5 unidades. Este conjunto puede escribirse como la unión de dos intervalos no acotados:

$$(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$$

Ejemplo 1.10 *Determinar el conjunto solución de la siguiente desigualdad:*

$$1 < |2x - 3| \leq 9$$

Debemos buscar qué números reales satisfacen dos desigualdades al mismo tiempo: los que satisfacen $1 < |2x - 3|$ y, a su vez, $|2x - 3| \leq 9$. Cada una de estas desigualdades tendrá

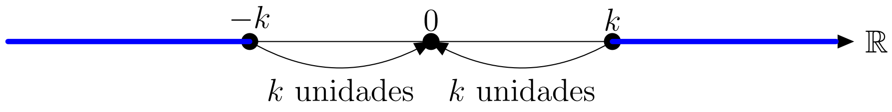


Figura 1.14: $|x| > k$

un conjunto solución, S_1 y S_2 y los números que estamos buscando deben pertenecer a su intersección: $S = S_1 \cap S_2$.

Aplicando la propiedad 5,

$$1 < |2x - 3| \Leftrightarrow 1 < 2x - 3, \text{ o bien}, 2x - 3 < -1 \Leftrightarrow 2 < x, \text{ o bien}, x < 1$$

El conjunto solución de esta primera desigualdad es

$$S_1 = (-\infty,\, 1) \cup (2,\, +\infty)$$

Por otra parte, aplicando la propiedad 4,

$$|2x - 3| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq 2x - 3 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$$

Luego,

$$S_2 = [-3,\, 6]$$

Finalmente obtenemos la intersección de S_1 y S_2 (ver la Figura 1.15):

$$\boxed{S = [-3,\, 1) \cup (2,\, 6]}$$

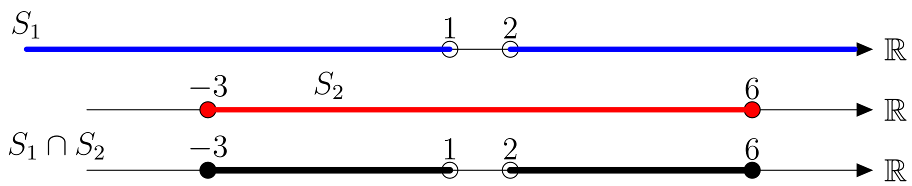


Figura 1.15: S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$

Observación 1.9 *Teniendo en cuenta que para todo número no negativo a el símbolo $\sqrt{a}$ denota al único número no negativo que al elevarlo al cuadrado da por resultado a, se tiene que*

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Es muy importante que tengan en cuenta que NO es posible simplificar la raíz con el cuadrado.

Ejemplo 1.11

$$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

El valor absoluto nos permite definir la distancia entre dos puntos en la recta real:

Definición (distancia entre dos puntos)

Se llama *distancia* de x a y al número real

$$d(x, y) = |x - y|$$

Ejemplo 1.12 *La distancia del* -3 *al* 5 *es igual a* $d(-3, 5) = |-3-5| = 8$.

1.9. Exponentes y raíces.

En esta sección vamos a repasar brevemente las propiedades de la potenciación y radicación.

Potenciación.

En primer lugar recordemos que dado cualquier número real a y cualquier natural n, tenemos que

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n-\text{veces}}$$

El número a se conoce como *base* mientras que n es el *exponente*.

En este caso, donde el exponente es un número natural, la potenciación es, simplemente, una multiplicación abreviada. En particular, entendemos que

$$a^1 = a$$

Cuando la base es diferente de cero, podemos extender la potenciación a exponentes enteros:

$$a^0 = 1; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

Propiedades de la potenciación

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, tenemos las siguientes propiedades:

1. $a^m\, a^n = a^{m+n}$ (Producto de potencias de igual base)
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (Cociente de poetencias de igual base ($a \neq 0$))
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (Potencia de potencia)
4. $(a\, b)^n = a^n\, b^n$ (La potenciación es distributiva respecto del producto)
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$ (La potenciación es distributiva respecto de la división)

Observación 1.10 *Las propiedades anteriores son también válidas en el caso de exponentes enteros negativos. Sólo hay que estar atentos de que no quede* 0 *en algún denominador.*

Radicación.

Dado un número real a, mayor o igual que 0, el símbolo $\sqrt{a}$ denota al único número real no negativo que al elevarlo al cuadrado da por resultado a:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \text{ y } b \geq 0$$

La condición de no negatividad de a se debe a que todo número real elevado al cuadrado (en realidad, elevado a cualquier exponente par) es siempre un número no negativo. Dicho de otra manera, ninguna potencia de un número real con exponente par es negativa.

Esta definición puede generalizarse para índices mayores que 2:

Definición (raíz n−ésima)

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

donde n es cualquier entero positivo mayor que 1. En el caso de que n sea par se tiene que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

La radicación tiene propiedades similares a las de la potenciación:

1. $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ (a y b deben ser no negativos en el caso n par)
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (a y b deben ser no negativos en el caso n par, además b debe ser, en cualquier caso, distinto de cero)
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\,m]{a}$ (a debe ser no negativo si n o m fuesen pares)

estas propiedades se corresponden con las 4, 5 y 3, respectivamente, de las propiedades de la potenciación.

Recordemos que también en la escuela media se han definido las potencias de exponente racional. Sea a un número real positivo, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Bajo estas condiciones,

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

manteniéndose las propiedades usuales de la potenciación.

Por último para los reales positivos es posible definir las potencias con exponente real (en particular, exponentes irracionales). La discusión de este hecho, escapa al alcance de los contenidos de este Seminario.

Racionalización de denominadores.

Las fracciones de números reales con denominadores irracionales presentan algunas dificultades para los cálculos "a mano" (sin embargo esto no es así cuando utilizamos calculadoras o softwares para cálculo numérico). Por ejemplo, es más difícil dividir "a mano" 3 por $\sqrt{2}$ que $\sqrt{5}$ por 7.

Racionalizar una fracción significa encontrar una fracción equivalente a ella, pero que tenga en el denominador un número racional. Mostraremos algunos casos donde esto es posible.

Ejemplo 1.13 *Vamos a racionalizar* $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Teniendo en cuanta que $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$ *y que* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$*, multiplicamos y dividimos la fracción por* $\sqrt{3}$*:*

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Obtuvimos así una fracción equivalente a la original, que tiene un número entero en su denominador.

Ejemplo 1.14 *En este ejemplo vamos a racionalizar una fracción que tiene en su denominador una raíz de índice superior a 2. La idea es similar a la del ejemplo anterior. Supongamos que queremos racionalizar* $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$*. Vamos a factorizar el 12 y determinar por quién multiplicamos y dividimos:*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{12}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2\,3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2\,3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2\,3^2}}{\sqrt[3]{2\,3^2}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2^3\,3^3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{6}$$

Ejemplo 1.15 *También puede ocurrir que en el denominador tengamos sumas o restas de raíces. Cuando éstas sean raíces cuadradas, podemos completar una diferencia de cuadrados para eliminar la o las raíces.*

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{6})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{6})}{-1} = 2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})$$

1.10. Elementos de geometría.

En esta sección vamos a repasar las definiciones y propiedades de las principales figuras planas y cuerpos geométricos.

Ángulos.

Dos ángulos son *complementarios* cuando la suma de sus medidas es igual a 90°, y son *suplementarios* si suman 180°. Por ejemplo, los ángulos adyacentes (aquellos que comparten un lado y sus otros lados son semirrectas opuestas) son suplementarios.

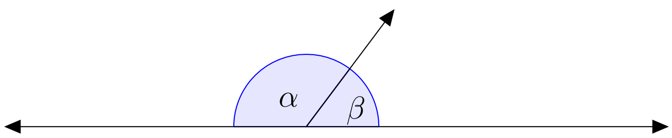
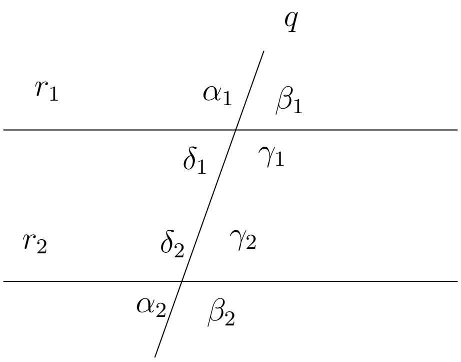


Figura 1.16: α y β son ángulos adyacentes

En el siguiente gráfico, las rectas r_1 y r_2 son paralelas y están cortadas por q.



Los ángulos α_1 y β_2 se llaman *alternos externos entre paralelas*. Estos ángulos tienen la misma medida. β_1 y α_2 también son alternos externos.

$$\alpha_1 = \beta_2 \qquad \alpha_2 = \beta_1$$

Los ángulos δ_1 y γ_2 se llaman *alternos internos entre paralelas*. Estos ángulos tienen la misma medida. γ_1 y δ_2 también son alternos internos.

$$\delta_1 = \gamma_2 \qquad \delta_2 = \gamma_1$$

Los ángulos δ_1 y δ_2 por un lado, y γ_1 y γ_2 por otro, se conocen como *conjugados internos entre paralelas*. De manera análoga, los ángulos α_1 y α_2 (β_1 y β_2) son *conjugados externos*. Los ángulos conjugados internos son suplementarios, al igual que los conjugados externos.

Por último, α_1 y δ_2 (δ_1 y α_2, β_1 y γ_2, γ_1 y β_2) se llaman *correspondientes entre paralelas*. Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.

Triángulos.

Recordemos que los triángulos pueden clasificarse según su lados y según sus ángulos. Un triángulo es *escaleno* si todos sus lados tienen diferentes medidas, *isósceles* si dos de sus lados son iguales y *equilátero* cuando sus tres lados son iguales. Además, es *acutángulo* si todos sus aángulos son agudos, *rectángulo* si tiene un ángulo recto y *obtusángulo* si uno de sus ángulos es obtuso.

Propiedades.

1. (Desigualdad triangular) En todo triángulo la suma de las medidas de dos de sus lados es mayor que la medida del restante.

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$

2. En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.

Se llama *mediana* correspondiente a un lado de un triángulo, al segmento que une el punto medio de dicho lado con el vértice opuesto.

La *mediatriz* correspondiente a un lado, es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de dicho lado.

La *altura* correspondiente a un lado de un triángulo, es el segmento perpendicular a la recta que contiene a dicho lado y tiene como uno de sus extremos al vértice opuesto a ese lado. También se llama altura a la medida del segmento que hemos definido.

Si h es la altura correspondiente a uno cualquiera de los lados (al que usualmente llamamos base) de un triángulo y B es la medida de ese lado, entonces

$$\boxed{A = \frac{B \cdot h}{2}}$$

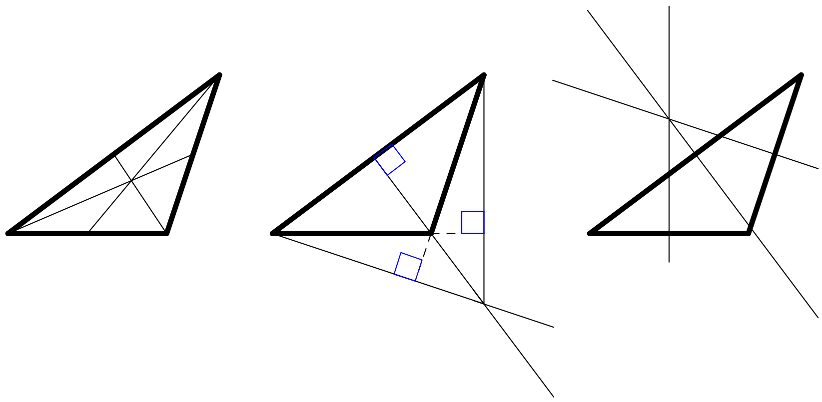


Figura 1.17: Medianas, alturas y mediatrices de triángulo.

donde A es el área del triángulo.

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se dicen *semejantes* si tienen sus tres pares de lados respectivamente proporcionales. Es decir, si se verifica que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Se tiene la siguiente:

Propiedad

Dos triángulos son semejantes si y sólo si sus ángulos correspondientes son congruentes.

Cuadriláteros.

Un *cuadrilátero* es la figura plana formada por cuatro puntos A, B, C y D, no alineados de a tres. Estos puntos son los vértices del cuadrilátero. Cuando el cuadrilátero se encuentra en un mismo semiplano respecto de la recta que contiene a cualquiera de sus lados, el cuadrilátero se llama *convexo*. Todas las definiciones y propiedades que enunciemos corresponden a cuadriláteros convexos.

Un *trapecio* es un cuadrilátero que tiene un sólo par de lados paralelos. Es usual llamar *bases* a estos lados paralelos. Cuando los lados no paralelos tienen la misma medida, se dice que el trapecio es *isósceles*.

La siguiente fórmula nos permite calcular su área:

$$\boxed{A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}}$$

donde b y B son las medidas de sus bases y h la de su altura.

Un *paralelogramo* es un cuadrilátero en el cual sus lados opuestos son paralelos.

Propiedades de los paralelogramos.

1. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
2. Los ángulos opuestos de un paraleogramo son congruentes.
3. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

Denotando por B (base) la medida de uno de los lados de un paralelogramo y por h a la altura correspondiente a dicho lado, su áre es

$$\boxed{A = B \cdot h}$$

Llamamos *rectángulo* al paralelogramo que tiene un ángulo recto. Además de tener las propiedades anteriores por el hecho de ser un paralelogramo, podemos agregar la siguiente:

Propiedad

Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

Un *rombo* es un paralelogramo que tiene todos sus lados de igual medida. Enunciaremos algunas propiedades particulares que tienen los rombos:

Propiedades del rombo.

1. Las diagonales del rombo son perpendiculares entre sí.
2. Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos que unen.

Si D y d son las medidas de las diagonales de un rombo, entonces su área también puede determinarse de la siguiente manera:

$$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Un *cuadrado* es un rombo que tiene un ángulo recto.

Circunferencia y círculo.

Se denomina *circunferencia* al lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *centro*. La distancia entre el centro de la circunferencia y cualquiera de sus puntos se llama *radio* de la circunferencia. También denominamos *radio* a cualquier segmento que una el centro de la circunferencia con uno de sus puntos. Una *cuerda* es un segmento que une dos puntos de una circunferencia. Cualquier cuerda que pase por el centro es un *diámetro*.

A la recta que pasa por un punto P de una circunferencia y es perpendicular al radio correspondiente a dicho punto, se la denomina *recta tangente a la circunferencia* en P.

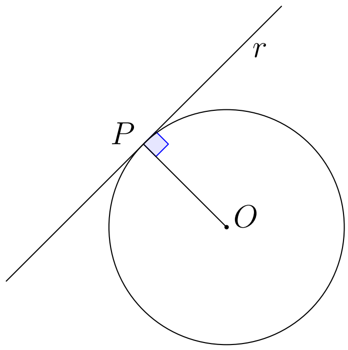


Figura 1.18: Recta tangente a una circunferencia en P.

Propiedad.

La recta tangente a una circunferencia en un punto corta a la circunferencia sólo en ese punto.

Sean A y B dos puntos cualesquiera de una circunferencia de centro en O. Se llama *ángulo central* correspondiente al arco AB al ángulo que tiene vértice en O y sus lados contienen a los segmentos OA y OB.

Un ángulo se dice *inscripto* en una circunferencia si su vértice, Q es un punto de la misma y sus lados cortan a la circunferencia en otros dos puntos distintos de Q.

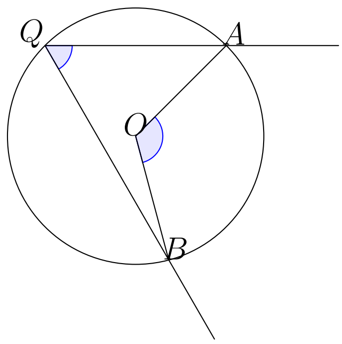


Figura 1.19: Ángulos centrales e inscriptos en una circunferencia.

Propiedad.

Todo ángulo inscripto en una circunferencia mide la mitad del ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco).

De esta propiedad se deduce que todo triángulo inscripto en una semicircunferencia es rectángulo.

Recordemos también que dada una circunferencia de centro en O y radio r, su longitud o perímetro es

$$\boxed{l = 2\,\pi\,r}$$

y que el área del círculo delimitado por dicha circunferencia es

$$\boxed{A = \pi\,r^2}$$

Polígonos.

Dados n puntos no alineados $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se llama *polígono* a la figura determinada por los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... $\overline{P_nP_1}$ (lados del polígono).

Diremos que un polígono es *convexo* si dados dos puntos cualesquiera de su interior, el segmento que los une está totalmente incluido en el polígono.

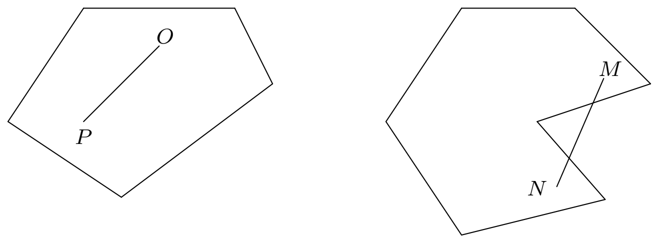


Figura 1.20: Polígonos convexos y no convexos.

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados ($n \geq 3$) es igual a

$$\boxed{S = (n-2)\,180°}$$

Un polígono convexo es un *polígono regular* si todos sus ángulos tienen la misma medida y todos sus lados son congruentes entre sí.

Se dice que un polígono convexo está *inscripto* en una circunferencia si todos sus vértices son puntos de ella. Se dice que está *circunscripto* a una circunferencia si los lados del polígono convexo son tangentes a la misma.

Propiedad.

Todo polígono regular está inscripto y circunscripto en una circunferencia.

En los polígonos regulares se conoce como *apotema* al segmento perprendicular a uno de sus lados y que tiene como uno de sus extremos al centro de la circunferencia que lo inscribe. Como los radios que unen el centro de la circunferencia con cada uno de los vértices de un polígono regular dividen al polígono en triángulos isósceles congruentes, y la apotema es la altura correspondiente al lado del polígono en cada uno de dichos triángulos, se deduce el área de un polígono regular de n lados es igual a

$$\boxed{A = \frac{l \cdot a}{2} \cdot n = \frac{\text{perímetro} \cdot a}{2}}$$

donde l es la medida del lado del polígono y a es la de su apotema.

Cuerpos geométricos.

Se llama *sólidos* o *cuerpos geométricos* a las figuras geométricas de tres dimensiones. Los poliedros, la esfera y el cilindro, son algunos ejemplos de estos objetos.

Un *prisma recto* es un poliedro que tiene dos caras congruentes sobre planos paralelos, llamadas *bases* y el resto de las caras son rectángulos perpendiculares a cada uno de estos planos.

Estas últimas caras se conocen como *caras laterales*.

El volumen de un prisma recto es el producto entre el área de su base (B) y su altura (h):

$$\boxed{V = B \cdot h}$$

Por su parte, el Área Total es la suma de las áreas de sus bases y su área lateral (suma de las áreas de las caras perpendiculares a las bases).

$$\boxed{A_{Total} = 2\,A_B + A_l}$$

donde A_B es el área de su base y A_l el ŕea lateral.

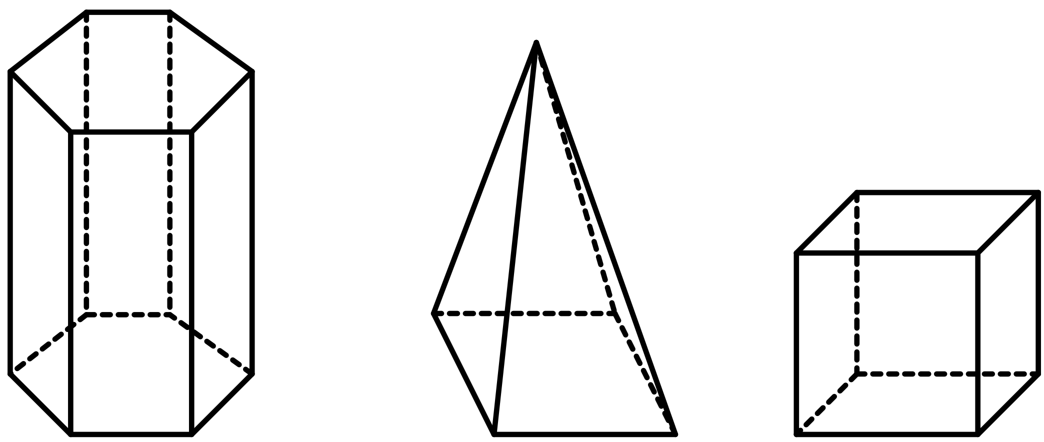


Figura 1.21: Prisma de base hexagonal, pirámide de base cuadrada y cubo.

Un *cubo* puede pensarse como un prisma recto donde sus bases y caras laterales son cuadrados congruentes.

Sea P un polígono convexo y V un punto que no pertenece al plano que incluye a P. Una *pirámide* es el poliedro que tiene como caras al polígono P, *base de la pirámide*, y a cada uno de los triángulos que se forman al unir el punto V con los vértices de la base. Se llama *altura* de la pirámide a la distancia de V al plano que contiene a P. También llamamos *altura* al segmento perpendicular al plano que contiene a P y tiene extremo en V. Cuando la base es un polígono regular y el pie de la altura coincide con el centro de la base, se dice que la pirámide es *regular*. En este caso, las caras laterales son triángulos isósceles congruentes. La altura de la cara lateral de una pirámide regular se conoce como *apotema* de la pirámide.

Es posible deducir que el área lateral de un pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de su base por la apotema, y su área total es

$$\boxed{A_{Total} = A_{Base} + S \cdot a}$$

donde S es el semiperímetro de su base y a la medida de su apotema.

También puede probarse que el volumen V de cualquier pirámide es un tercio del área de su base por la altura:

$$\boxed{V = \tfrac{1}{3}\,A_{Base} \cdot h}$$

Un *cono* (cono circular recto) es el cuerpo o sólido de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. La base del cono así obtenido es una circunferencia. La hipótenusa del triángulo rectángulo se llama *generatriz* del cono.

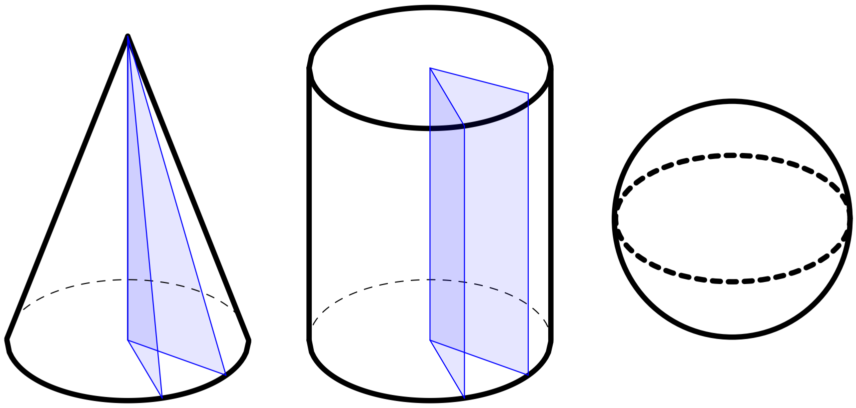


Figura 1.22: Cono, cilindro y esfera.

El área A del cono es

$$\boxed{A = \pi\, r^2 + \pi\, r\, g}$$

donde r es la medida del radio de la base y g la de la generatriz.

Su volumen es

$$\boxed{V = \tfrac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h}$$

El *cilindro* (cilindro circular recto) es el sólido que se obtiene al girar un rectángulo sobre uno de sus lados. Las bases son dos círculos. Su área total es

$$\boxed{A = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h}$$

mientras que su volumen es el producto entre el área de su base y su altura:

$$\boxed{V = \pi\, r^2\, h}$$

La *esfera* también puede definirse como un sólido de revolución: es el cuerpo que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro. Llamamos *superficie esférica* al conjunto de puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado *centro* de la esfera. El área de esta superficie es:

$$\boxed{A = 4\,\pi\, r^2}$$

y su volumen:

$$\boxed{V = \tfrac{4}{3}\,\pi\, r^3}$$

1.11. EJERCICIOS

1. Obtengan dos números naturales consecutivos cuya diferencia de cuadrados sea igual al número primo 31 .

Rta.: 16 y 15

2. Si sabe que la suma de dos números naturales es 30 y su máximo común divisor 6, determinen dichos números.

Rta.: 24 y 6 ; 18 y 12

3. Tres ómnibus salen de la misma estación terminal en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora 5 minutos, y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora 18 minutos, y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana, determinen:

   a) A qué hora volverán a salir juntos de la estación.
   b) El número de viajes efectuado por cada uno.

   Rta.: a) a las 12, a las 6 de la tarde y a la medianoche. b) 3 veces, 5 veces y 4 veces.

4. La madre de Gabriela compra 6 kg. de ciruelas para hacer mermelada. Los carozos quitados representan 1/4 del peso de las frutas. Añade un peso de azúcar igual al peso de la pulpa que queda. La mezcla pierde por la cocción 1/5 de su peso. Determinen el número de potes de 375 gramos que puede llenar con el dulce de ciruelas elaborado.

Rta.: 19 potes.

5. Un campesino ha recolectado 6,720 kg. de alfalfa con la que quiere alimentar a sus 7 vacas durante 120 días. Al cabo de 15 días, compra otras 3 vacas. Determinen la cantidad de alfalfa que le faltará para alimentar a sus vacas durante el tiempo previsto.

Rta.: 2520 kg

6. Dadas las siguientes proposiciones indique cuál es verdadera y cuál es falsa:

   a) El producto de un número impar de números negativos es negativo.
   b) La diferencia de dos números positivos es siempre positiva.
   c) El cociente de un número positivo y otro negativo es siempre un número negativo.
   d) La diferencia de un número positivo y otro negativo es siempre un número negativo.

7. Determinen el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

   a) $-3x > 9$

   Rta.: $S = (-\infty, -3)$

   b) $\dfrac{1}{x} + 3 > 4$

   Rta.: $S = (0, 1)$

   c) $x^2 - 2x \geq 0$

Rta.: $S = \mathbb{R} - (0, 2)$

d) $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$

Rta.: $S = (-1, 1)$

e) $\dfrac{1-x}{x+5} \leq 0$

Rta.: $S = (-\infty, -5) \cup [1, +\infty)$

f) $-1 \leq \dfrac{2x-3}{4} < 5$

Rta.:$S = [-1/2,\ 23/2)$

g) $-12 < 6 - 3x < -2$

Rta.: $S = (8/3,\ 6)$

h) $x \leq 3x + 2 \leq x + 6$

Rta.: $S = [-1,\ 2]$

8. Determinen el conjunto de todos los números reales tales que su cuadrado es menor que 3.

Rta.: $S = \left(-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$.

9. Determinen el conjunto de todos los números reales tales que su distancia a -3 sea menor que 5

Rta.: $(-8, 2)$.

10. Determinen el conjunto de todos los números reales tales que su distancia a 3 es mayor o igual que 4

Rta.: $(-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$.

11. ¿Para qué números reales se verifica que la suma del número y su reciproco es mayor que 2 ?

Rta.: $(0, +\infty) - \{1\}$.

12. Un punto x está 8 unidades distante de -3 A qué distancia está el punto x de 1 ?

Rta.: 12 unidades o 4 unidades.

13. La distancia entre $x - 1$ y 6 siendo $x < 0$, es igual a $|3x - 3|$. Calculen x.

Rta.: $x = -2$.

14. Encuentren el conjunto solución de:

a) $|2x - 1| \leq 2$

Rta.: $S = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

b) $|x+5| \geq 3$

Rta.: $S = (-\infty, -8] \cup [-2, +\infty)$.

c) $|2-4x| \leq 2$

Rta.: $S = [0, 1]$.

d) $\left|\frac{1}{x} + 3\right| > 4$

Rta.: $S = \left(-\frac{1}{7}, 0\right) \cup (0, 1)$.

e) $|2x-3| + 4 \geq 10$

Rta.: $S = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$.

f) $1 - x^2 > 0$

Rta.: $S = (-1, 1)$.

g) $0 < |x-1| < 4$

Rta.: $S = (-3, 1) \cup (1, 5)$.

h)) $3x^2 - 1 \leq 2$

Rta.: $S = [-1, 1]$.

i) $4x - x^2 > 4$

Rta.: $S = \varnothing$.

j) $|x^2 - 1| > 3$

Rta.: $S = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

15. Efectúen las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{10^{2n+1}}{10^{n+1}}$

Rta.: 10^n.

b) $\dfrac{x^{-3}y^4}{x^4y^{-3}} \quad (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$

Rta.: $x^{-7}y^7$.

c) $\dfrac{14a^7b^4\left(c^3\right)^2}{21a^6b^6c^8} \quad (a, b, c \neq 0)$

Rta.: $\frac{2}{3}ab^{-2}c^{-2}$.

d) $\dfrac{10^{x+y}10^{y-x}10^{y+1}}{10^{y+1}10^{2y+1}}$

Rta. : $0,1$.

e) $\left(a^{-1} - b^{-1}\right)^{-1}\left(a^{-1} + b^{-1}\right)^{-1} \quad (|a| \neq |b|, a \neq 0, b \neq 0)$

Rta.: $\dfrac{a^2b^2}{b^2 - a^2}$.

f) $\sqrt{\dfrac{a}{2}} - \sqrt{\dfrac{1}{2a}} - \sqrt{\dfrac{2}{a}} \quad (a > 0)$

Rta.: $\dfrac{(a-3)\sqrt{2a}}{2a}$.

g) $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$

Rta.:$2 + \sqrt{2}$.

h) $\dfrac{81^{0,25} + 9^{-0,5}}{(-27)^{\frac{1}{3}} + (-8)^{\frac{2}{3}}}$

Rta.: $\frac{10}{3}$.

16. Racionalicen el denominador de cada una de las siguientes fracciones.

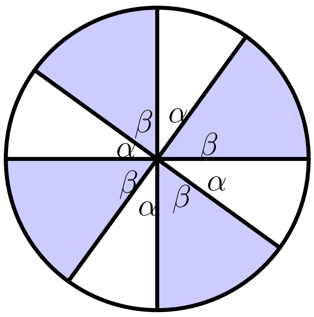
a) $\dfrac{2}{2-\sqrt{5}}$

Rta.: $-4 - 2\sqrt{5}$.

b) $\dfrac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$

Rta.: $-(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$.

17. Calculen el área de la zona sombreada sabiendo que $\alpha = \dfrac{2}{3}\beta$ y que la circunferencia tiene $10\,cm$ de radio. (Expresen el resultado en función de π)

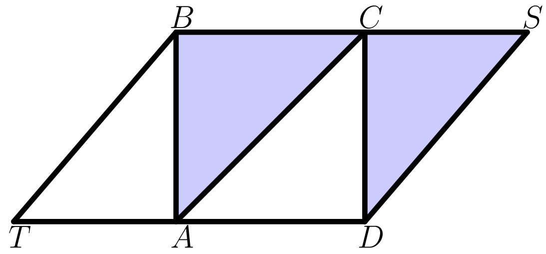


Rta.: $60\,\pi\,cm^2$.

18. Si rodeáramos la Tierra por el Ecuador con una cuerda, necesitaríamos cierta longitud de cuerda. ¿Cuánto debe aumentarse esa longitud para que la cuerda esté separada $1\,m$ de la superficie de la Tierra? (Expresen el resultado en función de π).

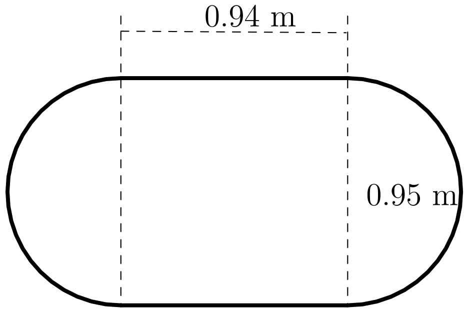
Rta.: $2\,\pi\,m$.

19. $ABCD$ es un cuadrado de lado $5\,cm$. La longitud de $\overline{BS}$ es $10\sqrt{2}\,cm$. Calcule, el área de la zona sombreada en la figura. (Expresen el resultado en función de $\sqrt{2}$).



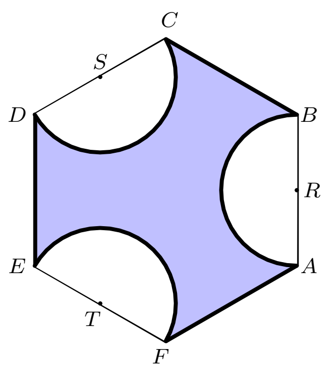
Rta.: $25\sqrt{2}\,cm^2$.

20. La figura representa una mesa. ¿Cuántas personas se podrán ubicar a su alrededor si cada una ocupa $0,54\ \ m$? (Utilicen $\pi = 3,14$).



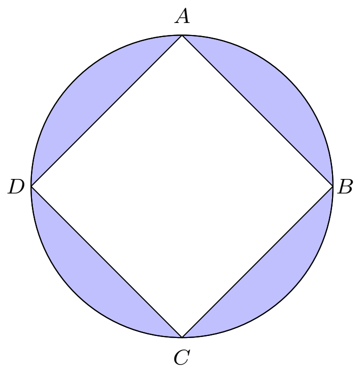
Rta.: 9 personas.

21. R, S y T son centros de circunferencias. $ABCDEF$ es un hexágono regular de lado igual $4\,cm$. Calculen el área de la figura sombreada.



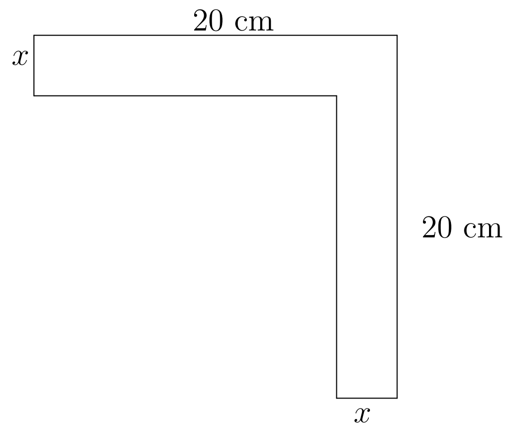
Rta.: $(24\sqrt{3}\ - 6\pi)\,cm^2$.

22. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado. La longitud de la circunferencia es $\sqrt{2}\,\pi\,cm$. Calculen el área de la figura sombreada en función de π.



Rta.: $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\ cm^2$.

23. La figura tiene una superficie de $111\,cm^2$. Determinen la longitud de x.



Rta.: $x = 3\,cm$.

24. Calculen el área total de un tanque cilíndrico de $2\,m$ de altura y radio de la base igual a $0,5\,m$. Calculen el volumen del tanque.

Rta.: Área $\approx 7{,}85\,m^2$ Volumen $= \dfrac{\pi}{2}\,m^3$.

25. Para construir una caja sin tapa se cortan cuadrados, de $2\,cm$ de lado, en las cuatro esquinas de una placa rectangular de $32\,cm$ de largo y $24\,cm$ de ancho, y se doblan los lados. Calculen el volumen de la caja.

Rta.: 1120 cm^3.

26. Calculen el volumen de material en una cáscara esférica cuyo radio interior es de 5 cm. y el exterior es de $5,125$ cm.

Rta.: $12,8\pi$ cm^3.

27. Calculen la altura de un tanque australiano, sabiendo que es la tercera parte del radio, y que, si se llena hasta los $\frac{2}{3}$, caben aún $18,84\,m^3$

Rta.: $h \cong 1,26$ m.

28. Hallen el radio de una esfera que tenga el mismo volumen que un cono de $30\,cm$ de altura y $20\,cm$ de diámetro.

Rta.: $\sqrt[3]{750}$ cm.

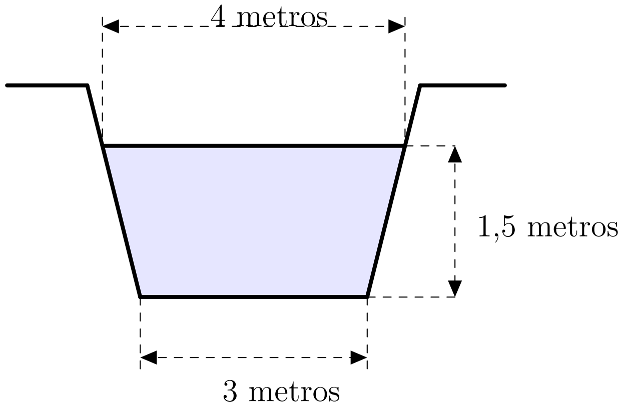
29. Calculen en cuánto tiempo se llenará una pileta cuyas dimensiones son $10\,m$, $5\,m$ y $2\,m$ sabiendo que las cinco canillas que se usan simultáneamente vierten cada una 10 litros por minuto.

Rta.: 1 día 9 horas 20 minutos.

30. Hallen el porcentaje de reducción de volumen cuando se hace una muesca cónica de $0,5$ de radio y $1\,cm$ de altura en cada extremo de una barra de acero cilíndrica de $1\,cm$ de radio y $4\,cm$ de longitud.

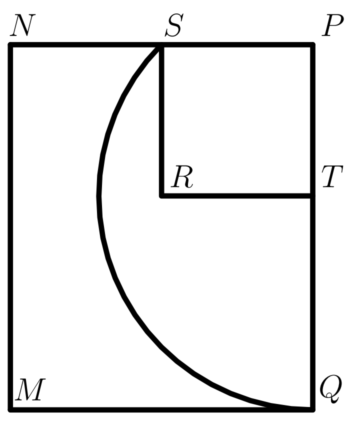
Rta: Porcentaje de Reducción $= \frac{25}{6}\,\% \cong 4,17\,\%$.

31. Un canal que conduce agua a una cierta fábrica tiene las dimensiones del dibujo. Sabiendo que la velocidad del agua es de $140\,m/min$, calculen el volumen de agua que pasa por segundo.



Rta.: 12,25 m^3/seg.

32. Se sabe que $RSPT$ es un cuadrado de $4\,cm^2$ de área y que $MNPQ$ es un rectángulo de área $20\,cm^2$, como se muestra en la figura. Sabiendo además que TQ es radio del arco de circunferencia que pasa por Q y S, hallen la medida del segmento MQ. (Expresen el resultado en función de $\sqrt{2}$).



Rta.: $10\sqrt{2} - 10\,cm$.

2. Funciones lineales y cuadráticas

2.1. Concepto de función

Definición de función

Se llama *función f de A en B* a toda relación que asigna a cada elemento x del conjunto A un único elemento y del conjunto B.

El conjunto A se llama *dominio* de la función y el conjunto B se llama *codominio* de la función o *conjunto de llegada*.

Para indicar que f es una función de A en B, escribimos

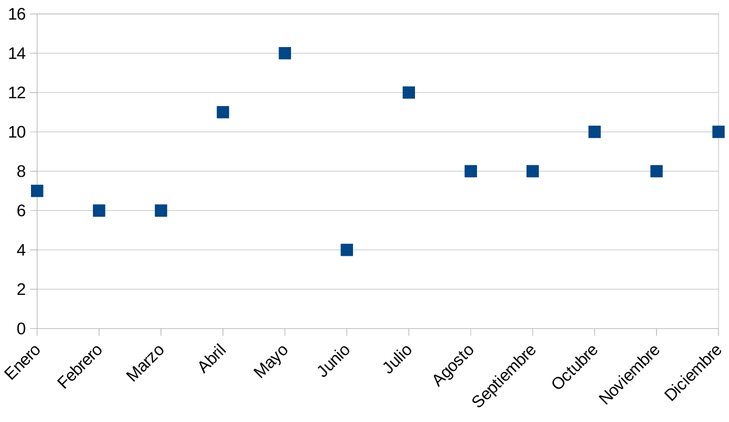
$$f : A \to B$$

Ejemplo 2.1 *La siguiente tabla muestra la cantidad de días con lluvia que tuvo cada mes del año* 2018 [1]*:*

Mes	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**
Número de días lluviosos	7	6	6	11	14	4	12	8	8	10	8	1

Observemos que a cada mes del año 2018 le corresponde un único número que indica la cantidad de días lluviosos de ese mes. Es decir, estamos definiendo una función que a cada mes le asigna un número.

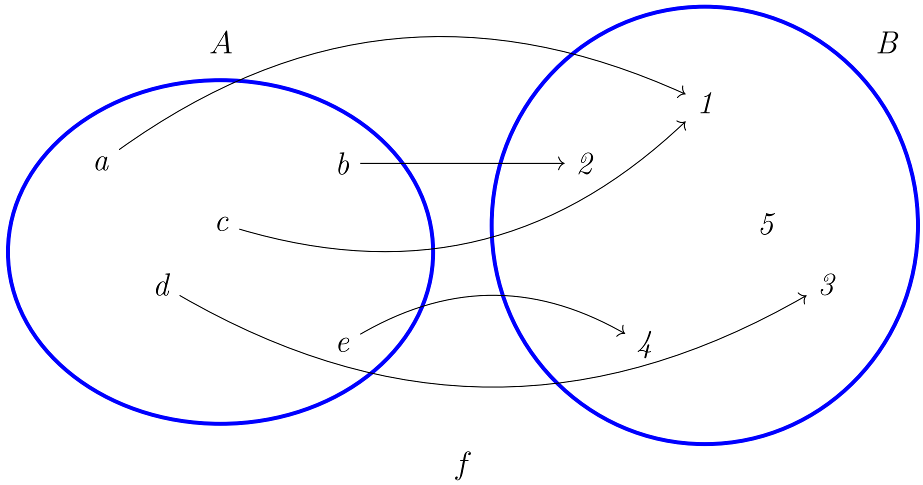
Esta función puede representarse gráficamente de la siguiente manera:



[1] Servicio Meteorológico Nacional. Observatorio Buenos Aires.

En este caso, el conjunto A es el conjunto que tiene como elementos a los meses del año y B podría ser el de los enteros entre 0 *y* 31*.*

Ejemplo 2.2 *Consideremos la siguiente función de A en B representada mediante un diagrama de Venn:*



Cada elemento del conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ (dominio de f) está asociado con un único elemento de $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (codominio). Para indicar que, por ejemplo, al elemento b la función f le hace corresponder el 2*, escribimos*

$$f(b) = 2$$

que se lee f ***de*** *b* ***es*** 2*, y decimos que* 2 ***es la imagen de*** *b* ***a través de*** *f .*

Observación 2.1 *Durante el Seminario, vamos a trabajar con funciones donde tanto el dominio como el codominio son subconjuntos del conjunto de todos números reales.*

Ejemplo 2.3 *Recordemos que dos magnitudes x e y son* ***directamente proporcionales*** *si existe una constante no nula k tal que*

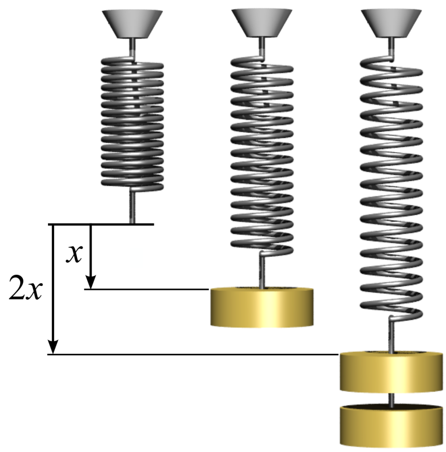
$$\frac{y}{x} = k$$

La constante k se conoce como ***constante de proporcionalidad directa****.*

En Física, la ***Ley de Hooke*** *establece que la fuerza necesaria para estirar un objeto elástico, por ejemplo un resorte, es directamente proporcional a la longitud del estiramiento:*

$$F = -kx$$

donde F es la fuerza aplicada, x la longitud que se estira o comprime el resorte, y k la constante de proporcionalidad, que depende de las características del material.



Observación 2.2 *Las funciones de proporcionalidad directa son casos particulares de las funciones lineales.*

2.2. Función lineal

Definición (Función Lineal)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama *lineal* si es de la forma

$$f(x) = ax + b$$

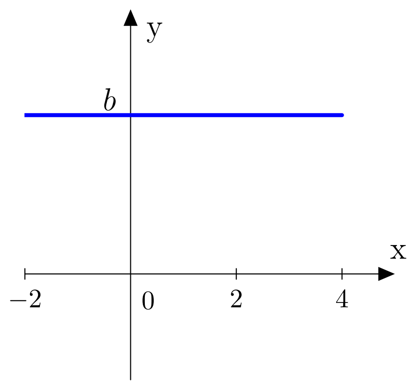
donde a y b son números reales conocidos.

Las gráficas de las funciones lineales son rectas. Podemos diferenciar dos casos generales:

1. Si la pendiente, a, es igual a cero, f es una función constante:

$$f(x) = b$$

Su gráfica es una recta horizontal que pasa por el punto $(0; b)$:



2. Si $a \neq 0$,

La recta corta al eje vertical (**eje de ordenadas**) en el punto $(0; b)$, de aquí que el coeficiente b se conoce como *ordenada al origen.*

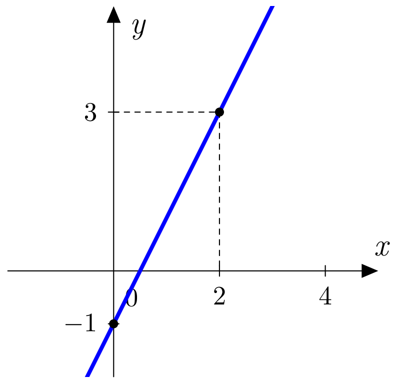
Ejemplo 2.4 *Grafiquen la función* $f(x) = 2x - 1$.

Solución:

Como la gráfica de una función lineal es una recta, para graficarla necesitamos conocer dos puntos. Ya tenemos la ordenada al origen, $b = -1$, *por lo tanto la recta pasa por el punto de coordenadas* $(0; -1)$. *Para encontrar otro punto de la recta, buscamos la imagen de un punto cualquiera, por ejemplo, de* $x = 2$*:*

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Luego, la recta también pasa por el punto $(2; 3)$. *Ubicamos esos dos puntos en el plano y trazamos la recta.*



Para determinar la intersección de la recta con el eje de abscisas(eje de las x), igualamos la función a cero:

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Luego, la recta corta al eje x en el punto $(\frac{1}{2}; 0)$.

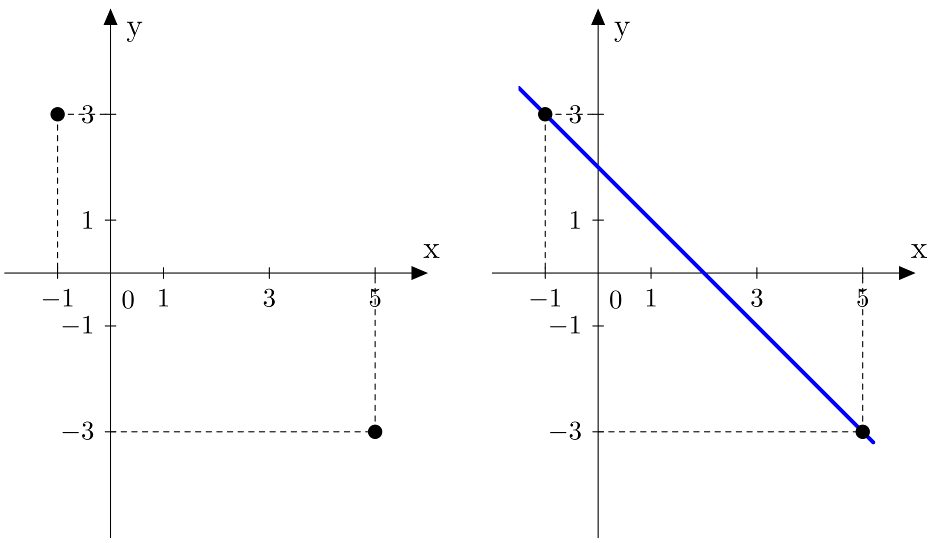
Ejercicio 2.1 *Grafiquen las siguientes funciones lineales y encuentren sus intersecciones con el eje de abscisas:*

1. $f(x) = 3x - 4$
2. $g(x) = -2x + 6$
3. $h(x) = \frac{2}{3}x$
4. $i(x) = -\frac{1}{2}x + 5$

2.2.1. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Así como es posible graficar una recta conociendo dos puntos, también podemos determinar su ecuación.

Supongamos que queremos determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1; 3)$ y $Q(5; -3)$.



El problema consiste en determinar una función de la forma

$$f(x) = ax + b \tag{2.1}$$

cuya gráfica pase por los puntos indicados. Que pase por P significa que al evaluar la función en $x = -1$, el valor de f es igual a 3. Similarmente, que pase por Q, significa que cuando $x = 5$, f es -3. Es decir, que $f(-1) = 3$ y $f(5) = -3$.

Reemplazando en la ecuación (2.1) resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 &= (-1)a + b \\ -3 &= 5a + b \end{cases}$$

Despejando b e igualando,

$$3 + a = -3 - 5a$$

De donde

$$6a = -6 \Leftrightarrow a = -1$$

y $b = 2$. Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación (2.1), finalmente obtenemos la expresión buscada:

$$f(x) = -x + 2$$

Ejercicio 2.2 *Determinen las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos:*

1. $A(2; 5)$ *y* $B(-4; 0)$
2. $A(-3; 1)$ *y* $B(0; 0)$
3. $A(3; 2)$ *y* $B(0; 6)$
4. $A(2; 2)$ *y* $B(4; 2)$

2.2.2. Ecuación de la recta conociendo un punto y su pendiente

Más adelante, vamos a ver detalladamente que la pendiente de una recta determina el ángulo que forma su gráfica con el eje horizontal. Si conocemos la pendiente (equivalentemente, el ángulo) y un punto por el que pasa, también podemos determinar su ecuación. El problema es similar al que resolvimos anteriormente. Por ejemplo, supongamos que debemos determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1; 3)$ y su pendiente es igual a -2. Como conocemos la pendiente, la función es de la forma:

$$f(x) = -2x + b$$

Sólo nos resta calcular su ordenada al origen. Por otra parte, cuando $x = 1$, debe ocurrir que y sea igual a 3. Es decir,

$$3 = -2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow 5 = b$$

Por lo tanto, la ecuación es

$$y = -2x + 5$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Dadas dos funciones lineales $y = a_1x + b_1$ e $y = a_2x + b_2$ sus gráficas son:

- **rectas paralelas** si $a_1 = a_2$ (es decir si tienen igual pendiente).
- **rectas perpendiculares** si $a_1.a_2 = -1$ (es decir, si el producto de sus pendientes es igual a -1).

Ejercicio 2.3 *Determinen la ecuación de la recta que pasa por el punto* $(-3, 2)$ *y es paralela a la gráfica de* $f(x) = -2x + 6$

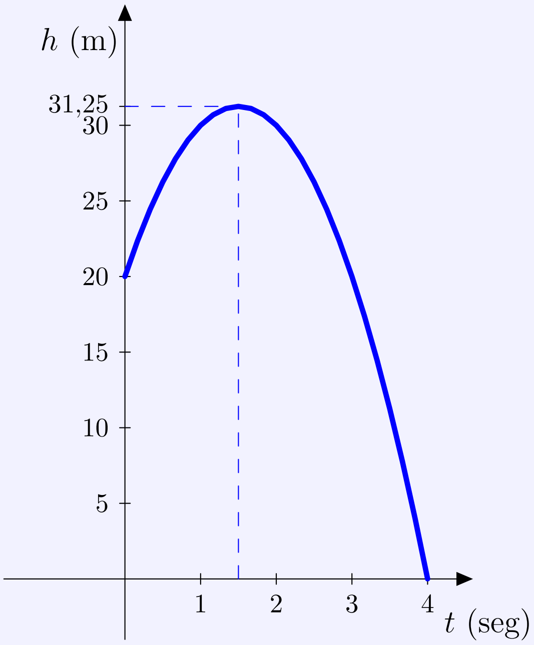
Ejercicio 2.4 *Escriban las ecuaciones de tres rectas que sean perpendiculares a la gráfica de* $y = 3x - 1$. *¿Cómo son las rectas entre sí?¿Por qué?*

2.3. Función cuadrática

Problema

El siguiente gráfico nos muestra la altura h en metros sobre el nivel del mar de una piedra arrojada hacia arriba desde un puente en función del tiempo t medido en segundos.

1. ¿Desde qué altura se arrojó la piedra?
2. ¿Cuál fue la mayor altura alcanzada por la piedra?
3. ¿En qué momento comienza a descender?
4. ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en caer al agua?



Un tiro vertical es un tipo de movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) que puede modelarse utilizando funciones cuadráticas.

Definición (Función Cuadrática)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama *cuadrática* si es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales conocidos y $a \neq 0$.

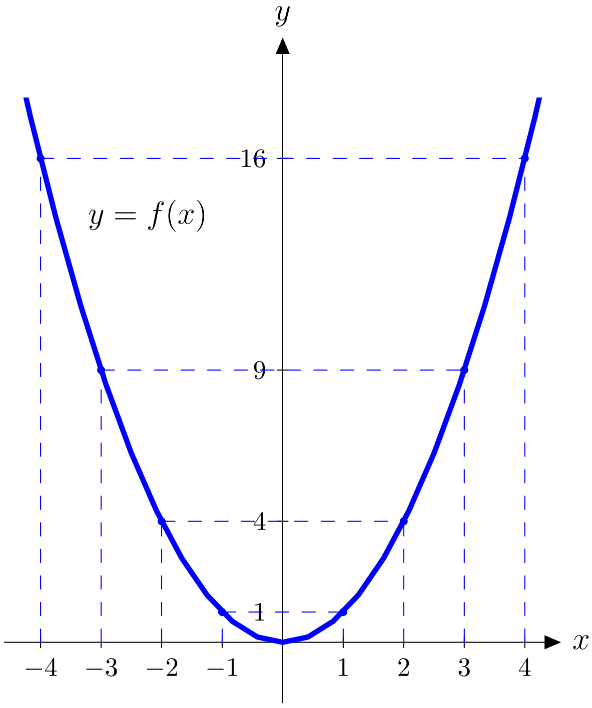
Las gráficas de las funciones cuadráticas se llaman *parábolas*.

Ejemplo 2.5 *El ejemplo más simple de función cuadrática es* $f(x) = x^2$ *(es decir, en donde* $a = 1$, $b = 0$ *y* $c = 0$*).*

Para graficar esta función observemos que los valores de f *son siempre mayores o iguales a cero, puesto que* $x^2 \geq 0$. *Además la función es simétrica con respecto del eje "y", ya que al elevar al cuadrado un número y su opuesto dan por resultado el mismo número:* $x^2 = (-x)^2$.

Realizaremos una tabla de valores para completar el gráfico.

x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

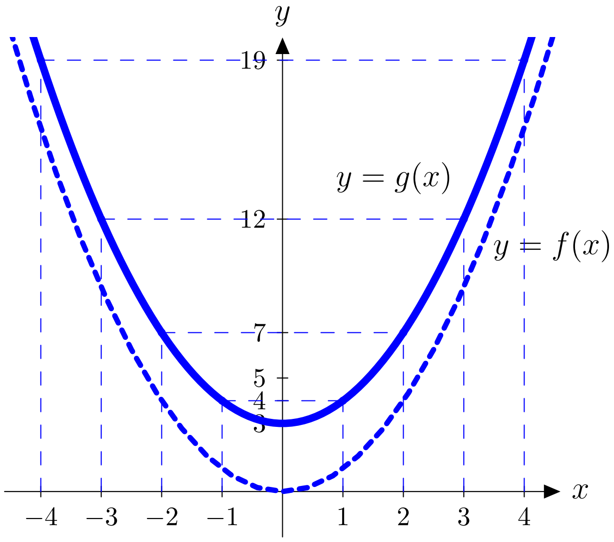


Podemos observar que:

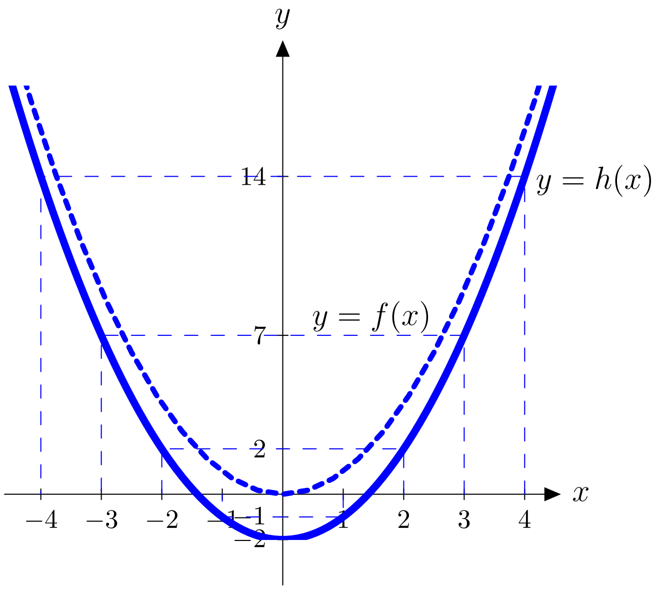
- La gráfica de la función es simétrica respecto del eje "y", la recta vertical $x = 0$ es **eje de simetría** de la gráfica de f.
- El menor valor que toma la función es 0 y esto ocurre cuando $x = 0$. El punto $(0; 0)$, en este ejemplo, se conoce como **vértice** de la parábola.
- La función es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty; 0)$ y estrictamente creciente en el $(0; +\infty)$.
- El conjunto imagen de f es $\mathbb{R}_0^+$.

Ejemplo 2.6 *Consideremos las gráficas de las funciones $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 - 2$.*

Notemos que la función $g(x)$ a cada número "x" le asigna el mismo número que la función $f(x) = x^2$ más 3 unidades, en otras palabras, $g(x) = f(x) + 3$. Esto nos dice que en cada "x" deberemos desplazar 3 unidades hacia arriba el gráfico de $f(x)$.



Razonando de manera análoga, para graficar la función h debemos desplazar verticalmente la gráfica de la función $f(x)$ en 2 unidades pero esta vez hacia abajo:

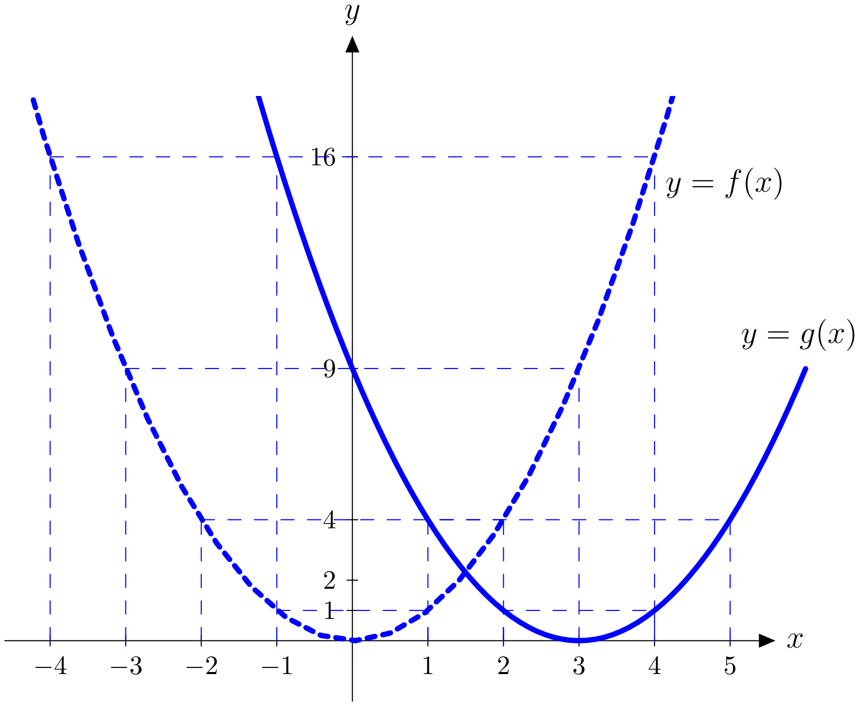


En general, la gráfica de $f(x) = x^2 + k$ es una parábola que tiene como vértice al punto $V(0; k)$.

Ejercicio 2.5 *Grafiquen las siguientes funciones cuadráticas.Indiquen en cada caso las coordenadas de su vértice y el conjunto imagen.*

1. $f(x) = x^2 + 4$
2. $f(x) = -x^2$
3. $f(x) = -x^2 + 5$
4. $f(x) = -x^2 - 3$

Consideremos ahora $g(x) = (x - 3)^2$. Nuevamente, tomando como referencia la función $f(x) = x^2$, para obtener mediante g los mismos valores que en la función $f(x)$ debemos tomar valores de x 3 unidades mayores. Por ejemplo, sabemos que $f(2) = 4$, para obtener este valor mediante g, x deber ser igual a 5, pues $g(5) = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4$. Esto mismo ocurre con cada valor de la variable x por lo que el gráfico de $g(x)$ es un desplazamiento horizontal del gráfico de f en 3 unidades hacia la derecha:



El gráfico de la función $g(x) = (x-3)^2$ es simétrico con respecto a la recta vertical $x = 3$ y su vértice es el punto $(3;0)$.
En general, la gráfica de $g(x) = (x-h)^2$ es un desplazamiento horizontal de la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Si $h > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha y si $h < 0$ hacia la izquierda. Su vértice tiene coordenadas $V(h;0)$.

Ejercicio 2.6 *Grafiquen las siguientes funciones cuadráticas.Indiquen en cada caso las coordenadas de su vértice y el conjunto imagen.*

1. $f(x) = (x-1)^2$
2. $f(x) = (x+3)^2$
3. $f(x) = -(x-2)^2$
4. $f(x) = -(x+4)^2$

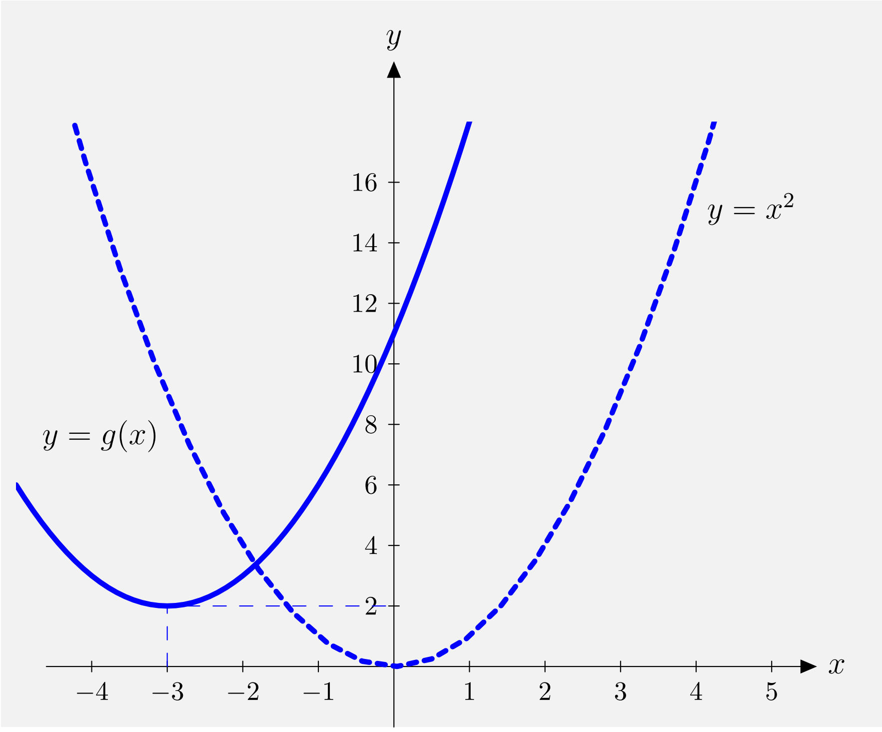
Ejemplo 2.7 *Vamos a graficar la función* $g(x) = (x+3)^2 + 2$

$$g(x) = (x - (-3))^2 + 2$$

Se desplaza 3 unidades hacia la izquierda

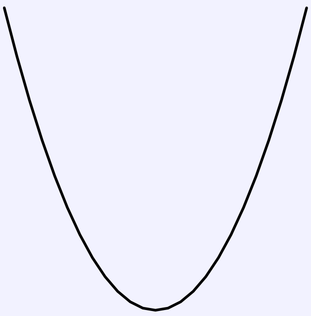
Se desplaza 2 unidades hacia arriba

El vértice tiene coordenadas $V(-3;2)$ y su gráfica es:

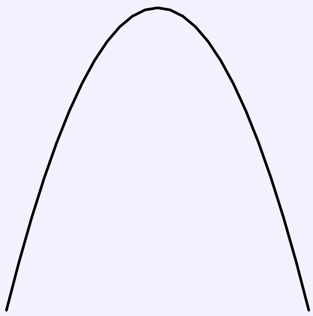


Observación 2.3 *EL signo del coeficiente principal a determina la concavidad de la parábola:*

si $a > 0$*:*



si $a < 0$*:*



2.3.1. Forma canónica

Toda función cuadrática dada en su forma polinómica, $f(x) = ax^2 + bx + c$, puede escribirse como

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \tag{2.2}$$

donde los número h y k son las coordenadas del vértice de la gráfica de f. Esta manera de escribir a f se conoce como la **forma canónica de una función cuadrática**.

Ejemplo 2.8 *Determinen la ecuación de la función cuadrática que pasa por el punto* $(3; -1)$ *y su vértice tiene coordenadas* $V(-1; 4)$*. Escriban la función en su forma polinómica.*

Solución:

Como conocemos las coordenadas del vértice de la parábola, resulta conveniente escribirla en su forma canónica. Reemplazando los valores de h y k en la ecuación (2.2) por -1 y 4 respectivamente, nos queda

$$f(x) = a(x+1)^2 + 4$$

Para obtener el valor del coeficiente principal, utilizamos el hecho de que la gráfica de f pasa por el punto $(3; -1)$:

$$-1 = a(3+1)^2 + 4 \Leftrightarrow -1 = 16a + 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{16} = a$$

Luego, $f(x) = -\frac{5}{16}(x+1)^2 + 4$. Para obtener la forma polinónica, solamente tenemos que hacer las cuentas:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{5}{16}(x+1)^2 + 4 = -\frac{5}{16}\left(x^2 + 2x + 1\right) + 4 = -\frac{5}{16}x^2 - \frac{10}{16}x - \frac{5}{16} + 4 \\ &= -\frac{5}{16}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{59}{16} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.7 *Determinen la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto $V(1; -2)$ y pasa por el punto $(0; 1)$.*

Ejercicio 2.8 *Se sabe que los puntos $(1; 4)$ y $(7; 4)$ pertenecen a la gráfica de una función cuadrática f. Además, el máximo valor de f es 10. Determinen f.*

Ejemplo 2.9 *Consideremos la función $f(x) = 2x^2 + 8x + 1$. Para obtener su forma canónica, debemos seguir un procedimiento que se conoce como "completar cuadrados":*

Primero sacamos factor común 2 en los términos que contienen x^2 y x:

$$f(x) = 2(x^2 + 4x) + 1$$

Luego, consideramos a

$$x^2 + 4x$$

como los dos primeros términos del cuadrado de un binomio: x^2 es el cuadrado de x y $4x$ es el "doble del primer término por el segundo".

Como $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$, para completar cuadrados procedemos de la siguiente manera:

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x+2)^2 - 4$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 8x + 1 \\ &= 2(x^2 + 4x) + 1 \\ &= 2\left[(x+2)^2 - 4\right] + 1 \\ &= 2\,(x+2)^2 - 8 + 1 \\ &= 2\,(x+2)^2 - 7 \end{aligned}$$

Observación 2.4 *La ventaja de tener escrita la función en la forma canónica, es que nos da las coordenadas de su vértice. En este caso, el punto $V(-2;-7)$.*

Ejercicio 2.9 *Escriban las formas canónicas de las siguientes funciones cuadráticas e indiquen las coordenadas del vértice de cada una de ellas:*

1. $f(x) = x^2 + 3x - 1$
2. $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$
3. $f(x) = -x^2 + 5x - 1$
4. $f(x) = -2x^2 + x + 3$

De manera general, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ podemos obtener su forma canónica completando cuadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

De la deducción anterior, resulta que la coordenada en x del vértice de la gráfica de f es:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

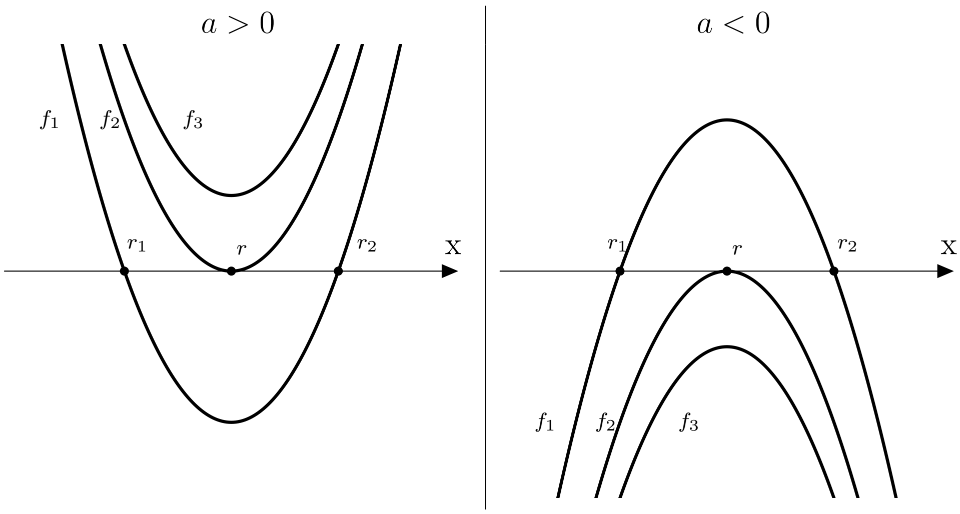
mientras que su coordenada en y es la imagen de dicho valor, es decir, $y_v = f(x_v)$.

2.3.2. Raíces de una cuadrática

Además del vértice, las raíces o ceros son puntos de gran importancia. Nos indican dónde la gráfica de una función cuadrática corta al eje horizontal. Para encontrar las raíces debemos resolver la ecuación

$$f(x) = 0$$

Las gráficas de las funciones cuadráticas pueden cortar una o dos veces al eje de abscisas o no cortarlo:



Ejemplo 2.10 *Consideremos la función*

$$f(x) = -2(x+1)^2 + 8$$

Como el coeficiente principal es negativo (-2) la gráfica es una parábola hacia abajo. Por otra parte el vértice tiene coordenadas $(-1;8)$ con lo cual está por arriba del eje de abscisas. Esto indica que la parábola debe cortar dos veces al eje.

En efecto, resolviendo la ecuación

$$0 = -2(x+1)^2 + 8 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow |x+1| = \sqrt{4}$$
$$\Leftrightarrow x+1 = 2 \text{ o } x+1 = -2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = -3$$

Por lo tanto la gráfica de f corta al eje "x" en $x = -3$ y en $x = 1$. Observemos que dichos valores son simétricos respecto de $x = -1$, ambos están a dos unidades del -1. Esto se debe a que la gráfica de f es simétrica respecto de la recta vertical $x = -1$ (eje de simetría de la parábola).

Fórmula resolvente

Más arriba, vimos que una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, puede escribirse en su forma canónica completando cuadrados:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Igualando a cero y considerando sin pérdida de generalidad que $a > 0$, resulta

$$0 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \Leftrightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

de donde

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \left|x + \frac{b}{2a}\right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \left|x + \frac{b}{2a}\right|$$

De esta forma obtenemos que

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \textbf{o bien} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Juntando ambas soluciones resulta la conocida:

Fórmula resolvente

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observación 2.5 *La expresión $b^2 - 4ac$ se conoce como discriminante de la ecuación cuadrática y determina la cantidad de soluciones que tiene la ecuación:*

1. *Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces $x_1 \neq x_2$ y la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes (la gráfica de f corta al eje "x" en dos puntos distintos).*

2. *Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces $x_1 = x_2$ y la ecuación tiene una sola solución real. Se dice que tiene una raíz doble (la gráfica de f corta al eje "x" en un sólo punto, su vértice).*

3. *Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene soluciones reales ya que ningún número negativo es el cuadrado de un número real (la gráfica de f no corta al eje "x").*

Ejemplo 2.11 *La función $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$ tiene dos raíces reales diferentes. Reemplazando $a = -2$, $b = 8$ y $c = 10$ en la fórmula resolvente, obtenemos los valores de dichas raíces:*

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-2)10}}{2(-2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{-4} = \frac{-8 \pm 12}{-4}$$

Por lo tanto, $x_1 = \dfrac{-8 + 12}{-4} = -1$ *y* $x_2 = \dfrac{-8 - 12}{-4} = 5$.

2.4. EJERCICIOS

1. Determinen la ecuación de la función lineal f sabiendo que $f(1) = -1$ y $f(5) = 3$.

2. La recta r es paralela a $y = -2x + 6$ y pasa por el punto $(1; -4)$. Determinen la ecuación de r.

3. Consideren la recta r cuya ecuación es $-x + 3y = 4$. Escriban tres puntos que pertenezcan a la recta.

4. ¿Pertenece el punto $(3; -3)$ a la gráfica de la función $f(x) = -2x + 3$?¿Por qué?

5. Sea r la recta de ecuación $y = 2x - 1$. Determinen, si existe, para qué valor o valores de $k \in \mathbb{R}$ el punto $(-k; k - 10) \in r$.

6. Escriban la ecuación de la recta que es perpendicular a la gráfica de $g(x) = 4x - 3$ y pasa por el punto $(5; 0)$.

7. Determinen analítica y gráficamente la intersección de las rectas $f(x) = -2x + 1$ y $g(x) = x - 8$.

8. Dadas las siguientes funciones cuadráticas,

$$f_1(x) = -x^2; \quad f_2(x) = x^2 - 3; \quad f_3(x) = x^2 + 4;$$

$$f_4(x) = x^2 + 3x; \quad f_5(x) = -x^2 + 3x + 4$$

se pide:

a) Indiquen las coordenadas de su intersección con el eje de ordenadas (eje de las y).

b) Escriban la ecuación de su eje de simetría.

c) Calculen las coordenadas de su vértice.

d) Determinen el conjunto imagen de f.

e) Determinen, si existen, los puntos de intersección de sus gráficas con el eje de abscisas (eje de las x).

f) Realicen un gráfico de de cada una de las funciones anteriores.

9. La función $f(x) = (x - m)(x - n)$ corta el eje horizontal en $x = -3$ y $x = 6$. Escriban f en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (forma polinómica) y luego determinen el menor valor que toma f.

10. La gráfica de $y = x^2 + bx + c$ corta al eje x en -2 y en 3. Encuentren los valores de b y de c.

11. Consideren la función $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

    a) Expresen $f(x)$ en la forma $a(x - k)^2 + h$ (forma canónica), donde a, k, h son constantes a determinar.

    b) Encuentren el mínimo valor de $f(x)$.

12. La ecuación de una curva se puede escribir en la forma $y = a(x - m)(x - n)$. Se sabe que la curva corta al eje x en -5 y en 3.

    a) Sabiendo que $(-3, 2)$ es un punto de la curva, hallen su ecuación.

    b) Calculen las coordenadas del vértice.

    c) Escriban la ecuación de la curva en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

    d) Escriban la ecuación de la curva en la forma $y = a(x - h)^2 + k$.

    e) Confeccionen un gráfico de la función donde se vean los puntos más importantes.

13. La fórmula $h = 30t - 5t^2$ nos da la altura h en metros que alcanza una pelota que es arrojada verticalmente en el aire a los t segundos de haber sido lanzada desde el suelo con una velocidad inicial de $30m/seg$. Determinen la máxima altura que puede alcanzar la pelota y el tiempo necesario para que ello ocurra.

14. La altura h en metros sobre el nivel del mar, de una piedra arrojada hacia arriba desde un puente, puede ser modelada mediante la función $h(t) = 20 + 15t - 4{,}9t^2$, donde t indica el tiempo, en segundos, desde que la piedra fue arrojada.

    a) ¿Desde qué altura se arrojó la piedra?

    b) ¿Cuál fue la mayor altura alcanzada por la piedra?

    c) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra por encima de los 20 metros?

    d) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en caer al agua?

15. La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale 0 para $x = 1$ y toma su máximo valor 8 para $x = 4$. Determinen f.

16. Determinen analíticamente las intersecciones de las gráficas de f y g sabiendo que

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \quad \text{y} \quad g(x) = -2x^2 + x + 1.$$

17. El perímetro de un rectángulo es de 34cm. Sabiendo que la diagonal tiene una longitud de 13cm, calculen las dimensiones del rectángulo.

18. Calculen el discriminante de la función $f(x) = 3x^2 + 5x + 8$. De allí muestre que

$$3x^2 + 5x + 8 > 0$$

para todos los valore de x.

19. La ecuación cuadrática $4x^2 + 4kx + 9 = 0$,con $k > 0$ tiene exactamente una solución. Encuentre el valor de k.

20. La ecuación cuadrática $kx^2-3x+(k+2) = 0$ tiene dos soluciones distintas. Encuentren los posibles valores de k.

21. La ecuación $kx^2 + 3x + 1 = 0$ tiene exactamente una solución. Encuentre el valor de k.

22. Dada la ecuación $(1 + 2k)x^2 - 10x + k - 2 = 0$, $k \in \mathbb{R}$, encuentren el conjunto de valores de k para los cuales la ecuación tiene raíces reales.

23. La ecuación $x^2 - 2kx + 1 = 0$ tiene dos raíces reales distintas. Encuentren el conjunto de todos los posibles valores de k.

24. Dada $f(x) = x^2 + x(2 - k) + k^2$, encuentren el rango de valores de k para los cuales $f(x) > 0$ para todo valor real de x.

25. ¿Para qué valores de k la ecuación $7kx^2 - kx + 2 = 0$, en la variable x, tiene sus dos raíces iguales?

26. Determinen para qué valores de a, si existen, las gráficas de f y g se cortan en un sólo punto, sabiendo que

$$f(x) = -x^2 + 5x + 8 \quad \text{y} \quad g(x) = ax^2 + x + 1.$$

27. Determinen las dimensiones de un rectángulo de 28 unidades de perímetro de manera tal que su área sea la mayor posible.

28. Una empresa fabrica latas cilíndricas de alumnio de distintos volúmenes.

    a) Suponiendo que las latas tienen 20cm de altura, escriban una fórmula para el área de su superficie en función del radio de su base.

    b) ¿Cuál debe ser el radio para que el área total sea igual a $979,68\text{cm}^2$?

    c) Escriban una fórmula para el área de su superficie en función del radio de su base y de su altura.

    d) Si el radio es una constante conocida, ¿a qué tipo de función corresponde el área en función de la altura?

e) Si la altura es una constante conocida, ¿a qué tipo de función corresponde el área en función del radio?

29. La cantidad de kilómetros que puede recorrer un automóvil sin cargar combustible, depende fundamentalmente de la velocidad con que se desplaza.
Una marca modeló el rendimiento de uno de sus autos mediante la siguiente función:

$$r(v) = -0,0033v^2 + 0,594v - 10,73$$

donde v es la velocidad en km/h (con $60 \leq v \leq 130$) y r representa el número de kilómetros que puede recorrer con un litro de combustible.

a) Suponiendo que el auto se desplaza a una velocidad constante de $110\,km/h$, ¿cuántos litros se necesitan para recorrer $400\,km$.

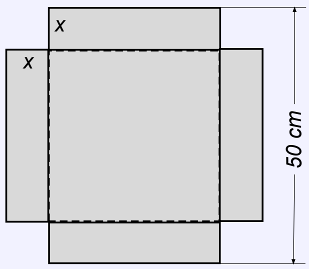
b) ¿A qué velocidad debe conducirse el vehículo para que el rendimiento sea el máximo posible?

30. Una empresa que organiza conciertos de rock determinó que para tener una asistencia de 800 espectadores debe cobrar \$600 cada entrada del espectáculo que está produciendo. Por otra parte, determinó que por cada \$10 que rebaje el valor de la entrada, el número de asistentes se incrementa en 50. Determinen a qué precio debe fijarse la entrada para que el dinero recaudado en el recital sea el mayor posible. ¿Cuántas personas concurren al recital en dicho caso?

3. Polinomios

Problema

Utilizando planchas cuadradas de aluminio de $50\,cm$ de lado, una empresa fabrica cajas sin tapa. Para ello corta cuadrados de igual tamaño en las esquinas y dobla las solapas que quedan, las cuales posteriormente serán soldadas.



Se desea conocer los siguientes datos:

1. ¿Cuáles son los valores que puede tomar x?
2. ¿Cuál es el volumen de la caja?
3. ¿Cuál es el área de la superficie exterior de la caja?

3.1. Definición y operaciones

Definición de polinomio

Se llama *polinomio de grado n* a toda expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$. Estos números se conocen como *coeficientes* del polinomio p. En particular, a_n es el *coeficiente principal* y a_0 el *término independiente*.

Cuando un polinomio tiene coeficiente principal 1 se llama *polinomio mónico*.

Cada término de un polinomio se conoce como *monomio*.

Observación 3.1 *De la definición anterior, las expresiones del tipo*

$$p(x) = a_0$$

son polinomios de grado 0*, pero no incluyen a* $p(x) = 0$ *ya que* a_n *debe ser distinto de* 0*. Este caso lo vamos a considerar aparte:*

Definición (Polinomio nulo)

Se llama *polinomio nulo* al polinomio

$$p(x) = 0$$

Vamos a convenir en que el polinomio nulo **no tiene grado**.

Notación 3.1 *El grado de un polinomio p lo denotaremos por $gr(p)$.*

Ejemplo 3.1 *El polinomio*

$$p(x) = -3x^4 + 5x^2 - x + 5$$

es un polinomio de grado 4, su coeficiente principal es -3 y su término independiente es 5.

Ejercicio 3.1 *Indiquen el grado, coeficiente principal y término independiente de los siguientes polinomios:*

1. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 2x + \sqrt{3}$
2. $g(x) = -\frac{1}{5}x^4 + 2x^3 - 4x$
3. $h(x) = 3x^4 + x^5 + 1 - 2x$
4. $i(x) = 8$
5. $j(x) = -x^2 + 5$
6. $k(x) = x^5$

Los polinomios constituyen las expresiones algebraicas más elementales ya que las operaciones que involucran son, básicamente, sumas y multiplicaciones.

Las siguientes expresiones algebraicas no son polinómicas:

1. $4x^3 + 3x^{-1} - 6$, ya que, en el segundo término x está elevado a la -1.

   Observación 3.2 *Por definición, los exponentes de las x deben ser enteros no negativos.*

2. $\sqrt{x^2 + 1}$, tampoco es un polinomio pues involucra una raíz cuadrada.
3. $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 1}{x - 3}$, en este caso, el problema radica en la división.
4. $5x^3 + x^{1/3} - 1$, nuevamente el problema está en uno de los exponentes: $1/3$, el cual no es un entero no negativo. Recordemos que este exponente indica una raíz cúbica. $(x^{1/3} = \sqrt[3]{x})$

Ejercicio 3.2 *Indiquen cuáles de las siguientes expresiones son polinómicas. En el caso de las que no lo sean, expliquen por qué.*

1. $p(x) = 3x^5 + \sqrt{2}x^3 - 1$
2. $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$
3. $p(x) = 3x^4 + x^{-2} + 1$
4. $p(x) = 3x^5 + \sqrt{2x^3} - 1$
5. $p(x) = -6$
6. $p(x) = 2^x - x^2$

Definición (igualdad de polinomios)

Dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son *iguales* si son del mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes (de igual grado) son iguales. Es decir, si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} ... + a_1 x + a_0 \text{ y } q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} ... + b_1 x + b_0$$

son dos polinomios de grado n, entonces $p(x) = q(x)$ sí y sólo si

$$a_n = b_n; a_{n-1} = b_{n-1}; \ldots ; a_1 = b_1; a_0 = b_0$$

o, de manera abreviada,

$$a_i = b_i \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots , n$$

Ejemplo 3.2 *Determinen los valores de α, β, γ para que los polinomios*

$$p(x) = 3x^4 - (\alpha + \beta)x^2 + \gamma \quad y \quad q(x) = (\alpha - 1)x^5 + 3x^4 + 4x^2 + (3\gamma + 1)$$

sean iguales.

Solución: *Si queremos que $p(x)$, $q(x)$ sean iguales, entonces deben tener el mismo grado. Como p es de grado 4 necesariamente α debe ser igual a 1, pues $\alpha - 1$ tiene que ser igual a 0.*

Por otra parte, $-(\alpha + \beta) = 4$.

$$\begin{aligned} -(1 + \beta) &= 4 \\ -1 - \beta &= 4 \\ -5 &= \beta \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} \gamma &= 3\gamma + 1 \\ -1 &= 3\gamma - \gamma \\ -1 &= 2\gamma \\ -\frac{1}{2} &= \gamma \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha = 1; \beta = -5; \gamma = -\frac{1}{2}$.
Reemplazando los valores de α, β y γ hallados, verificamos nuestra solución:

$$p(x) = 3x^4 - (1 - 5)x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 3x^4 + 4x^2 - \frac{1}{2}$$

y

$$q(x) = (1-1)x^5 + 3x^4 + 4x^2 + (3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1) = 3x^4 + 4x^2 - \frac{1}{2}$$

Suma de Polinomios

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$,

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

$$q(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0 \quad b_m \neq 0$$

donde $n \geq m$, se llama *suma* al polinomio

$$p(x) + q(x) = c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$$

cuyos coeficientes se obtienen sumando los respectivos coeficientes de los monomios de igual grado:

$$c_i = a_i + b_i, \ \textit{para } i = 0, 1, 2, \ldots n$$

(en el caso $m < n$ se consideran iguales a cero los coeficientes $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots b_n$)

Ejemplo 3.3 *Dados los polinomios*

$$p(x) = -5x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x - 5, \quad q(x) = -x^3 + 6x^2 - 5x + 2,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (-5x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x - 5) + (-x^3 + 6x^2 - 5x + 2) \\ &= -5x^4 + (1-1)x^3 + (-4+6)x^2 + (3-5)x + (-5+2) \\ &= -5x^4 + 2x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

es decir, $p(x) + q(x)$ se obtiene sumando entre sí los términos de igual grado de cada uno de los polinomios.

Observación 3.3 *Si p y q son dos polinomios con coeficientes reales, entonces se tiene que*

$$gr(p+q) \leq \ \textit{máx}\ \{gr(p); gr(q)\}.$$

Ejercicio 3.3 *Propongan dos polinomios de grado 3 tales que su suma tenga grado 2.*

En el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, se denomina *opuesto* de un número m a aquel que sumado a m da como resultado 0. El opuesto de m se denota por $-m$. Una de las características de la suma definida en $\mathbb{Z}$ es que cada número tiene su opuesto. Por ejemplo, el opuesto de 4 es -4, el opuesto de -7 es 7, y el opuesto de 0, es el propio 0.

De manera similar podemos definir el opuesto de un polinomio:

Definición (Opuesto de un polinomio)

Se llama *opuesto* del polinomio $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ al polinomio que sumado a p da como resultado el polinomio nulo. El opuesto de p tiene el mismo grado que p y sus coeficientes son los opuestos de los coeficientes de p. Se denota por $-p$:

$$-p(x) = -a_n x^n - ... - a_1 x - a_0$$

Ejemplo 3.4 *El opuesto del polinomio* $p(x) = 3x^2 - 8x + 12$*, es el polinomio*

$$-p(x) = -3x^2 + 8x - 12$$

ya que

$$\begin{aligned} p(x) + (-p(x)) &= (3x^2 - 8x + 12) + (-3x^2 + 8x - 12) \\ &= (3 - 3)x^2 + (-8 + 8)x + (12 - 12) \\ &= 0 \end{aligned}$$

o bien, simplemente, porque los coeficientes de $-p(x)$ *son los opuestos de los de* $p(x)$*.*

La existencia de opuestos en $\mathbb{Z}$ permite definir la resta de números enteros. Restarle a un entero m el entero n, es sumarle a m el opuesto de n:

$$m - n =_{\text{def}} m + (-n)$$

De la misma forma que como habitualmente se hace con los números enteros, la resta de polinomios se define a partir de la suma de opuestos.

Resta de polinomios

Dados dos polinomios p y q, se define la *resta* $p - q$ como el polinomio que se obtiene al sumarle a p el opuesto del polinomio q:

$$p(x) - q(x) =_{\text{def}} p(x) + (-q(x))$$

Ejemplo 3.5 *Calculen* $p - q$*, siendo* $p(x) = 7x^2 + 3x - 1$*,* $q(x) = -2x^3 + x^2 - 4x - 1$*.*

Solución: *Para calcular* $p(x) - q(x)$*, debemos sumar al polinomio* p *el opuesto de* q*. Por lo tanto, primero debemos obtener* $-q(x)$*:*

$$-q(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$$

Luego,

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= p(x) + (-q(x) \\ &= (7x^2 + 3x - 1) + (2x^3 - x^2 + 4x + 1) \\ &= 2x^3 + (7 - 1)x^2 + (3 + 4)x + (-1 + 1) \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 7x \end{aligned}$$

O bien, directamente

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (7x^2 + 3x - 1) - (-2x^3 + x^2 - 4x - 1) \\ &= 7x^2 + 3x - 1 + 2x^3 - x^2 + 4x + 1 \\ &= 2x^3 + 7x^2 - x^2 + 3x + 4x - 1 + 1 \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 7x \end{aligned}$$

(Observen que el "menos"delante de $q(x)$ cambia todos los signos de sus términos cuando quitamos los paréntesis.)

Ejercicio 3.4 *¿Cómo son los polinomios $p(x) - q(x)$ y $q(x) - p(x)$?*

Multiplicación de polinomios

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$,

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

$$q(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0 \quad b_m \neq 0$$

donde $n \geq m$, se llama *producto* al polinomio

$$p(x) \cdot q(x) = c_{n+m} x^{n+m} + ... + c_1 x + c_0$$

cuyos coeficientes se obtienen multiplicando cada término de $p(x)$ por cada término de $q(x)$ y, luego, sumando los término de igual grado.

Ejemplo 3.6 *Multipliquen el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ por el polinomio $q(x) = 3x - 1$. Para obtener el producto, primero aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:*

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (x^3 - 3x^2 + 2) \cdot (3x - 1) \\ &= (x^3)(3x) + (x^3)(-1) + (-3x^2)(3x) + (-3x^2)(-1) + 2(3x) + 2(-1) \\ &= 3x^4 - x^3 - 9x^3 + 3x^2 + 6x - 2 \end{aligned}$$

Finalmente, sumamos los términos (o monomios) de igual grado:

$$p(x) \cdot q(x) = 3x^4 - 10x^3 + 3x^2 + 6x - 2$$

Ejercicio 3.5 *Dados los polinomios $p(x) = 5x^2 - 1$, $q(x) = -x^3 + 2x + 1$, $s(x) = x^4 - x$, $t(x) = -x^2 + x + 1$, calculen:*

1. $p(x) \cdot q(x)$
2. $(p(x) - q(x)) \cdot r(x)$
3. $3q(x) - 2t(x)$
4. $(-p(x)) \cdot (q(x) + r(x) - t(x))$
5. $p(x) \cdot q(x) - r(x) \cdot t(x)$
6. $(p(x) + q(x)) \cdot (r(x) - t(x))$

Ejercicio 3.6 *Si el grado de p ($gr(p)$) es igual a n y el grado de q ($gr(q)$) es m, ¿por qué el grado $p(x)q(x)$ es $m+n$? Justifiquen sus respuestas.*

Teorema (Algoritmo de la división)

Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios tales que $q(x)$ es no nulo y además se verifica que $gr(p) \geq gr(q)$, entonces existen polinomios $c(x)$ y $r(x)$, únicos, tales que

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x) \tag{3.1}$$

donde $gr(r) < gr(q)$ o $r(x)$ es el polinomio nulo.

El polinomio $c(x)$ es el cociente de la división y $r(x)$ el resto.

El teorema anterior nos garantiza que siempre que el grado de un polinomio p sea mayor o igual que el de otro polinomio q vamos a poder encontrar dos polinomios c y r que verifiquen la igualdad (3.1) y las condiciones enunciadas respecto de sus grados.

El proceso de división es similar al procedimiento que se utiliza para dividir números. Para ejemplificar, vamos a calcular el cociente y el resto de dividir:

$$p(x) = 6x^5 + 2x^3 + x - 5 \text{ por } q(x) = 2x^2 - 1.$$

En primer lugar vamos a escribir el polinomio $p(x)$ completo y ordenado. Esto requiere escribir todos los coeficientes de p, completando con ceros cuando sea necesario y ordenados de mayor a menor según el grado correspondiente.

Escribimos entonces los polinomios como a continuación:

$$6x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 5 \quad \underline{|\, 2x^2 - 1}$$

Dividimos el primer término de $p(x)$ por el primero de $q(x)$, en este caso: $\frac{6x^5}{2x^2} = 3x^3$. Luego multiplicamos $q(x)$ por el polinomio obtenido anteriormente: $3x^3$, resultando: $6x^5 - 3x^3$. Escribimos como a continuación y restamos a $p(x)$ el polinomio obtenido: $6x^5 - 3x^3$ tal como lo ilustramos abajo:

$$\begin{array}{rl}
-\ 6x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 5 & \underline{|\, 2x^2 - 1} \\
\underline{6x^5 + 0x^4 - 3x^3} & \ \ 3x^3 \\
\cancel{0x^5} + \cancel{0x^4} + 5x^3 &
\end{array}$$

Si el resto de la división es de menor grado que el divisor o es el polinomio nulo, el algoritmo terminó. En caso contrario, repetimos este procedimiento hasta obtener el polinomio nulo o un polinomio de grado menor a $gr(q(x))$.

En nuestro ejemplo como $5x^3$ tiene grado mayor que 2 (el grado del divisor), debemos continuar. Dividimos $5x^3$ por el primero de $q(x)$: $\dfrac{5x^3}{2x^2} = \dfrac{5}{2}x$. Luego multiplicamos $q(x)$ por $\dfrac{5}{2}x$, resultando: $5x^3 - \dfrac{5}{2}x$:

$$
\begin{array}{rl}
6x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 5 & \big|\, 2x^2 - 1 \\
-\;6x^5 + 0x^4 - 3x^3 & \, 3x^3 + \frac{5}{2}x \\
\hline
\cancel{0x^5} + \cancel{0x^4} + 5x^3 + 0x^2 + x - 5 & \\
-\;5x^3 + 0x^2 - \frac{5}{2}x & \\
\hline
\cancel{0x^3} + \cancel{0x^2} + \frac{7}{2}x - 5 &
\end{array}
$$

Luego, el cociente es $c(x) = 3x^3 + \dfrac{5}{2}x$, el resto es $r(x) = \dfrac{7}{2}x - 5$

Se puede verificar que $p(x) = q(x)c(x) + r(x)$:

$$6x^5 + 2x^3 + x - 5 = (2x^2 - 1)\left(3x^3 + \frac{5}{2}x\right) + \frac{7}{2}x - 5$$

Ejemplo 3.7 *Vamos a calcular el cociente y resto de dividir* $p(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$ *por* $q(x) = x^2 - x + 1$

$$
\begin{array}{rr|l}
- & 6x^3 - 2x^2 + x + 3 & x^2 - x + 1 \\
 & 6x^3 - 6x^2 + 6x & \hline 6x + 4 \\
\hline
- & 4x^2 - 5x + 3 & \\
 & 4x^2 - 4x + 4 & \\
\hline
 & -x - 1 &
\end{array}
$$

El cociente es $c(x) = 6x + 4$ *y el resto* $r(x) = -x - 1$.

Ejemplo 3.8 *Hallen el cociente y el resto de dividir* $p(x) = 4x^6 - x^5 + x^4 + 2x^2 - 3x - 7$ *por* $q(x) = x^3 - x + 2$

Solución:

$$
\begin{array}{rr|l}
- & 4x^6 - x^5 + x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 3x - 7 & x^3 - x + 2 \\
 & 4x^6 - 4x^4 + 8x^3 & \hline 4x^3 - x^2 + 5x - 9 \\
\hline
- & -x^5 + 5x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x - 7 & \\
 & -x^5 + x^3 - 2x^2 & \\
\hline
- & 5x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 3x - 7 & \\
 & 5x^4 - 5x^2 + 10x & \\
\hline
- & -9x^3 + 9x^2 - 13x - 7 & \\
 & -9x^3 + 9x - 18 & \\
\hline
 & 9x^2 - 22x + 11 &
\end{array}
$$

Luego el cociente de la división es $c(x) = 4x^3 - x^2 + 5x - 9$ *y el resto es* $r(x) = 9x^2 - 22x + 11$.

Ejercicio 3.7 *Calculen el cociente y el resto que se obtienen al dividir el polinomio p por el polinomio q*

1. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1; \quad q(x) = x^2 - 1$
2. $p(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 - x; \quad q(x) = x^2 - x + 2$
3. $p(x) = x^6 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2; \quad q(x) = x^4 + x - 1$
4. $p(x) = 2x^4 - x^2 + 6; \quad q(x) = x + 3$

Ejercicio 3.8 *Si el grado de p es igual a n y el grado de q es m, ¿cuál es el grado del cociente que se obtiene al dividir $p(x)$ por $q(x)$? Justifiquen sus respuestas.*

Ejercicio 3.9 *Determinen, si existe, un polinomio $p(x)$ que multiplicado por $x^3 + 1$ dé como resultado $3x^5 + 5x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x - 1$*

Definición (Divisibilidad)

Decimos que un polinomio $p(x)$ es *divisible* por el polinomio $q(x)$ si existe un polinomio $c(x)$ tal que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x)$$

Observación 3.4 *De la definición anterior resulta que el polinomio $p(x)$ es divisible por el polinomio $q(x)$ si y sólo si el resto de su división es el polinomio nulo.*

Observación 3.5 *Decir que $p(x)$ es divisible por $q(x)$ es equivalente a decir que $q(x)$* ***divide a*** *$p(x)$, o que $p(x)$ es un* ***múltiplo*** *de $q(x)$.*

Notación 3.2 *Para indicar que $p(x)$ es divisible por $q(x)$ escribimos*

$$q(x)|p(x)$$

Son particularmente importantes las divisiones por polinomios de la forma $x - k$, donde k es cualquier número real. Estas divisiones pueden realizarse fácilmente mediante el algoritmo o regla de Ruffini. Describimos el procedimiento con el siguiente ejemplo:

Algoritmo de Ruffini

Vamos a dividir $p(x) = x^3 + x^2 - 1$ por $x - 2$. En este caso $k = 2$. Escribimos los coeficientes de $p(x)$, de manera completa y ordenada en una tabla como la que sigue:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
2 & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}$$

Paso 1: bajamos el primer coeficiente

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
2 & & & & \\
\hline
 & 1 & & &
\end{array}$$

Paso 2: multiplicamos por $2\,(k)$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & & &
\end{array}$$

Paso 3: Sumamos

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 3 & &
\end{array}$$

Y así hasta el final:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
2 & & 2 & 6 & 12 \\
\hline
 & 1 & 3 & 6 & 11
\end{array}$$

Los tres primeros números son los coeficientes del cociente de la división, $c(x) = x^2 + 3x + 6$ y el último es el resto $r(x) = 11$

Ejemplo 3.9 *Calculen el cociente y el resto de dividir a:*

(a) $p(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$ *por* $q(x) = x + 1$

Solución:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\
-1 & & -3 & 4 & -6 & 5 \\
\hline
 & 3 & -4 & 6 & -5 & 6
\end{array}$$

El cociente es $c(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6 - 5$ *y el resto es* $r(x) = 6$

(b) $p(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ *por* $x - 3$

Solución:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
3 & & 3 & 9 & 36 & 108 \\
\hline
 & 1 & 3 & 12 & 36 & 110
\end{array}$$

El cociente es $c(x) = x^3 + 3x^2 + 12x + 36$ *y el resto es* $r(x) = 110$

Ejercicio 3.10 *Calculen el cociente y el resto que se obtienen al dividir el polinomio* p *por el polinomio* q. *En cada caso indiquen si* $p(x)$ *es divisible por* $q(x)$.

1. $p(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x - 1; \quad q(x) = x - 1$
2. $p(x) = x^5 + 2x^2 - 3x^2 - x; \quad q(x) = x + 2$
3. $p(x) = 2x^4 + x^3 - 3; \quad q(x) = x + 1$
4. $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 12; \quad q(x) = x + 3$

3.2. Ceros o raíces de un polinomio

Definición (Valor numérico de un polinomio)

Se llama *valor numérico* del polinomio $p(x)$ para $x = k$, al valor que se obtiene al reemplazar la indeterminada x de p por el número k. Este valor se denota por $p(k)$.

Ejemplo 3.10 *Calculen el valor numérico de* $p(x) = -x^3 + 4x - 5$ *para* $x = 3$.

Solución:

$$p(3) = -(3)^3 + 4(3) - 5 = -27 + 12 - 5 = -20$$

Ya estamos en condiciones de definir uno de los conceptos más importantes asociados a los polinomios: el de cero o raíz de un polinomio. El cálculo de los ceros de un polinomio nos será de suma utilidad para resolver ecuaciones, inecuaciones y cualquier tipo de problema que requiera la factorización de ellos.

Definición (Cero o raíz de un polinomio)

Decimos que un número real α es un *cero o raíz* del polinomio $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$.

Ejemplo 3.11 -2 *es una raíz del polinomio* $p(x) = x^3 + x^2 - 5x - 6$ *pues*

$$p(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) - 6 = -8 + 4 + 10 - 6 = 0$$

Ejemplo 3.12 *Determinen el valor de* α *para que* 4 *sea raíz del polinomio*

$$p(x) = -x^3 + \alpha x^2 + 2x + 6$$

Solución:

Para que 4 sea una raíz de p, debe ocurrir que $p(4) = 0$. Luego,

$$0 = -(4)^3 + \alpha(4)^2 + 2(4) + 6$$
$$0 = -64 + 16\alpha + 8 + 6$$
$$0 = -50 + 16\alpha$$

Por lo tanto,

$$50 = 16\alpha \Leftrightarrow \frac{50}{16} = \alpha \Leftrightarrow \frac{25}{8} = \alpha$$

Recordemos que un polinomio p es divisible por otro polinomio q si el resto de dividir p por q es igual a cero. El siguiente teorema nos muestra que cuando el divisor es de la forma $q(x) = x - k$, podemos saber si p es divisible o no por q sin necesidad de realizar la división. Basta con calcular el valor numérico de p en $x = k$.

Teorema del resto:

El resto de dividir a $p(x)$ por un polinomio de la forma $x - k$, donde k es un número real cualquiera, es igual a $p(k)$.

Demostración:

Si $p(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 1, por el Algoritmo de la división, sabemos que existen polinomios $c(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$p(x) = (x - k)c(x) + r(x)$$

y $gr(r) < gr(q)$ o $r(x)$ es el polinomio nulo. En particular, como el $q(x)$ es de grado 1, $r(x)$ debe ser de grado 0 o igual al polinomio nulo, es decir $r(x) = r$.

Luego,

$$p(k) = (k - k)c(k) + r(k) = 0 + r$$

de donde $p(k) = r$.

$\square$

Ejemplo 3.13 *Calculen el resto de dividir $p(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x + 1$ por $q(x) = x + 1$.*

Solución:

En virtud del teorema del resto, sólo debemos evaluar $p(x)$ en $x = -1$:

$$p(-1) = -(-1)^4 - 2(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 2 + 3 - 1 + 1 = 4$$

Por lo tanto el resto de la división es $r(x) = 4$.

Ejemplo 3.14 *Hallen el valor de $a \in \mathbb{R}$ para al dividir $p(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 - 13$ por $x + 3$ el resto sea igual a 5.*

Solución: *Usando el teorema del resto se tiene: $p(-3) = 5$:*

$$\begin{aligned}
(-3)^4 + 3(-3)^3 + a(-3)^2 - 13 &= 5 \\
81 - 81 + 9a - 13 &= 5 \\
9a &= 18 \\
a &= 2
\end{aligned}$$

Del teorema del resto se deduce el siguiente resultado, sumamente importante:

Teorema

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz del polinomio $p(x)$, entonces $p(x)$ es divisible por $x - \alpha$.

Demostración:

Recordemos que $x - \alpha$ divide a $p(x)$ si el resto de su división es igual al polinomio nulo. Por el Teorema del Resto, sabemos que el resto de dividir a $p(x)$ por $x - \alpha$ es igual a $p(\alpha)$. Pero como por hipótesis se sabe que α es una raíz de $p(x)$, entonces, por definición de raíz, se tiene que $p(\alpha) = 0$, lo cual prueba el teorema.

$\square$

Ejercicio 3.11 *Determinen cuáles de los siguientes polinomios son divisibles por $x + 2$:*

1. $p(x) = -x^3 - 5x + 2$
2. $p(x) = -x^3 + 5x + 2$
3. $p(x) = 2x^4 + x^3 - 3$
4. $p(x) = x^4 + x^2 + 12x + 4$

Ejercicio 3.12 *¿Es $p(x) = x^{100} + x^{50} + 2$ divisible por $x + 5$? ¿Por qué?*

3.3. Factorización de polinomios

En la aritmética elemental resulta muy importante factorizar los números enteros. Factorizar un número significa escribirlo como el producto de otros. En particular, un importante resultado de la aritmética afirma que todo número entero positivo puede factorizarse de manera única (salvo el orden) como producto de números primos. Por ejemplo:

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

Los polinomios también se pueden factorizar como el producto de polinomios más elementales que llamaremos polinomios irreducibles.

Definición (Polinomio irreducible)

Un polinomio $p(x)$ de grado mayor o igual que 1 es irreducible si cualquier factorización de $p(x)$ en la forma $p(x) = m(x) \cdot n(x)$ implica que $gr(m) = 0$ o $gr(n) = 0$.

Un resultado fundamental es que un polinomio con coeficientes reales es irreducible (o irreducible en $\mathbb{R}$) si y sólo si es de grado 1 o es un polinomio de grado 2 sin raíces reales.

Observación 3.6 *De aquí en adelante, siempre que digamos que un polinomio es irreducible, significará que es irreducible en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 3.15 *Los polinomios $p(x) = 3x - 5$ y $q(x) = x^2 + 1$ son irreducibles. En el caso de $p(x)$ por ser de grado 1. Por su parte $q(x)$ es un polinomio de grado 2 y no tiene raíces reales, ya que cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$, k^2 es mayor o igual que cero y $q(k) = k^2 + 1 \geq 1$.*

Ejemplo 3.16 *El polinomio $p(x) = x^3 + x$ no es irreducible por ser de grado 3. Además puede verse que $p(x) = x(x^2 + 1)$, de donde admite ser escrito como el producto de dos polinomios y ninguno de ellos es de grado 0.*

Ejemplo 3.17 *Por último, el polinomio $p(x) = x^2 - 3x - 4$ tampoco es irreducible. Puede escribirse como el producto de dos polinomios de grado 1: $p(x) = (x - 4)(x + 1)$.*

Definición (Factorización de un polinomio)

Factorizar un polinomio $p(x)$ es escribirlo como el producto de polinomios irreducibles.

En particular, siempre es posible escribirlo como el producto de su coeficiente principal y una cantidad de factores irreducibles y mónicos.

Ejemplo 3.18 *El polinomio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ puede factorizarse como*

$$p(x) = 2(x - 1)(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Es decir, puede escribirse como el producto de su coeficiente principal, 2, y tres factores irreducibles:

$$(x - 1), (x + 1) \text{ y } \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Observación 3.7 *Notemos que cuando factorizamos un polinomio, conocemos las raíces del mismo.*
En efecto, las raíces de $p(x)$ son las soluciones de la ecuación

$$2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$$

Que es equivalente a

$$2(x - 1)(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \tag{3.2}$$

Un producto vale cero si y sólo si alguno de sus factores es igual a cero. Por lo tanto, debemos igualar a cero cada uno de los factores de la ecuación (3.2), de donde resulta que las soluciones son:

$$x_1 = 1;\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{3}{2}.$$

La factorización de polinomios, la divisibilidad, el cálculo de raíces y la resolución de ecuaciones, son partes de un mismo problema.

Definición (Multiplicidad de una raíz)

Decimos que *a es raíz de $p(x)$ de multiplicidad k* si $(x-a)^k$ divide a $p(x)$ y $(x-a)^{k+1}$ **no** divide a $p(x)$. En otras palabras, $p(x) = (x-a)^k q(x)$ con $q(a) \neq 0$.

En el caso en que $k = 1$, decimos que a es una raíz *simple*.

Ejemplo 3.19 *Consideremos el polinomio $p(x)$ cuya factorización es la siguiente:*

$$p(x) = -3(x-2)(x+5)^3x^2$$

Las raíces de $p(x)$ son

$$x_1 = 2,\ x_2 = -5 \text{ y } x_3 = 0.$$

En particular, 2 es una raíz simple, -5 una raíz triple (o de multiplicidad 3) y 0 una raíz doble (o de multiplicidad 2).

Teorema

Sea $p(x)$ un polinomio de grado n. Si $p(x)$ tiene n raíces reales, entonces puede escribirse en la forma:

$$p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdot(x-x_n)$$

donde $x_1, x_2, \ldots x_n$ son sus n raíces reales.

Ejemplo 3.20 *El polinomio $p(x) = 2x^2 - 6x + 4$ tiene como raíces a $x = 1$ y $x = 2$. Luego, su factorización es:*

$$p(x) = 2(x-1)(x-2)$$

Teorema de Gauss

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y término independiente diferente de cero. Si $p(x)$ tiene alguna raíz racional entonces es de la forma $\frac{a}{b}$ donde a es algún divisor del término independiente y b es un divisor del coeficiente principal.

Observación 3.8 *El Teorema de Gauss nos indica cómo consturir las posibles raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros. En general, los enteros a y b se consideran coprimos con el objeto de que la fracción $\frac{a}{b}$ sea irreducible.*

Ejemplo 3.21 *Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Para aplicar el Teorema de Gauss tenemos que obtener los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente principal. En este caso, los divisores de 6 y de 1 respectivamente,*

$$\textit{Divisores de } 6 : \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$$

$$\textit{Divisores de } 1 : \pm 1$$

Por lo tanto, las posibles raíces racionales son:

$$\frac{\pm 1}{\pm 1}; \frac{\pm 2}{\pm 1}; \frac{\pm 3}{\pm 1}; \frac{\pm 6}{\pm 1}$$

Es decir: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.
Como $p(1) = 0$, *entonces* 1 *es una raíz de* p. *En lugar de seguir probando, sabemos que* $(x-1)$ *es un divisor de* $p(x)$, *por lo tanto se puede escribir* $p(x) = (x-1)c(x)$ *donde* $c(x)$ *es el cociente de dividir a* p *por* $x-1$.

Efectuamos la división usamos el algoritmo de ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

De donde $p(x) = (x-1)(x^2+5x+6)$.

Para seguir factorizando $p(x)$, *buscamos las raíces de* $c(x) = x^2+5x+6$: $x = -3$; $x = -2$. *Nos queda entonces que* $x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$.

Luego $P(x) = (x-1)(x+3)(x+2)$.

Ejemplo 3.22 *Resuelvan la ecuación:* $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

Solución: *Resolver la ecuación anterior, es equivalente a determinar las raíces de*

$$p(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$$

Por el Teorema de Gauss, las posibles raíces ***racionales*** *de* $p(x)$ *se obtienen como el cociente entre divisores del término independiente* (1) *y divisores del coeficiente principal* (2). *Por lo tanto, las posibilidades se reducen a* $1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$.

Probando, tenemos que $p(1/2) = 0$. *Como* $x = 1/2$ *es raíz del polinomio, entonces éste es divisible por* $x - 1/2$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$p(x) = (2x^2+2x+2)(x-1/2) = 2(x^2+x+1)(x-1/2)$$

y la ecuación original es equivalente a:

$$2(x^2+x+1)(x-1/2) = 0$$

Como x^2+x+1 *no tiene raíces reales, y un producto es cero cuando alguno de sus factores es igual a cero, la única solución real es* $x = 1/2$.

Los siguientes resultados son sumamente importantes ya que nos adelantan información sobre las ecuaciones polinómicas:

Teorema

Si $p(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes **reales** entonces tiene como máximo n raíces reales.

Todo polinomio $p(x)$ de grado **impar** y coeficientes reales tiene **al menos** una raíz real.

3.4. Expresiones racionales.

Así como podemos pensar al conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales como el conjunto de todas las fracciones $\frac{a}{b}$, con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, podemos considerar el conjunto de "fracciones de polinomios":

Definición

Se llama *expresión racional* a toda fracción de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x)$ es distinto del polinomio nulo.

Observación 3.9 *Todo polinomio puede considerarse como una expresión racional cuyo denominador es un polinomio de grado* 0.

Operaciones con expresiones racionales.

Las operaciones con expresiones racionales son similares a las que solemos efectuar entre números racionales.

1. **Multiplicación**:
   Dadas dos expresiones racionales $\frac{p_1(x)}{q_1(x)}$ y $\frac{p_2(x)}{q_2(x)}$ su producto es la expresión cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los respectivos denominadores. Es decir,
   $$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x) \cdot p_2(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x)}$$
   Ejemplo 3.23
   $$\frac{x+1}{x^2-4} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{3x+3}{x^3-x^2-4x+4}$$

2. **División**:
   Al igual que ocurre con los números racionales, dividir dos expresiones racionales es simplemente multiplicar la primera por la expresión recíproca de la segunda:
   $$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} : \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{q_2(x)}{p_2(x)} = \frac{p_1(x) \cdot q_2(x)}{q_1(x) \cdot p_2(x)}$$

Ejemplo 3.24

$$\frac{x^2+1}{x} : \frac{3x}{x-1} = \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x-1}{3x} = \frac{x^3-x^2+x-1}{3x^2}$$

La suma (y resta) de expresiones racionales requiere calcular previamente un denominador común tal como se hace para sumar números racionales, donde tomamos el mínimo común múltiplo entre los denominadores de las fracciones que queremos sumar como denominador común. Vamos a seguir un camino similar.

Definición

Un *mínimo común múltiplo (mcm)* entre dos polinomios p y q de grado positivo es un polinomio m de grado mínimo que es múltiplo de p y de q.

Observación 3.10 *A diferencia de lo que ocurre en el conjunto de los números enteros, el mínimo común múltiplo entre dos polinomios no es único. Si $m(x)$ es un mínimo común múltiplo entre $p(x)$ y $q(x)$, entonces cualquier polinomio de la forma $s(x) = k \cdot m(x)$, donde k es un número real distinto de 0, también es un mínimo común múltiplo. Al margen de este punto, la noción de mínimo común múltiplo de dos polinomios es similar a la que conocemos entre números enteros.*

Si escribimos los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ como productos de polinomios irreducibles, el *producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente* es un mínimo común múltiplo de $p(x)$ y $q(x)$.

Ejemplo 3.25 *Determinen un $mcm(p(x), q(x))$ sabiendo que $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$, y $q(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x$.*

Solución: *En primer lugar debemos factorizar los polinomios:*

$$p(x) = 2(x-1)(x+1)(x+3) \quad y \quad q(x) = (x+3)^2(x-1)x$$

Un $mcm(p(x), q(x))$ es el polinomio

$$m(x) = (x-1)(x+1)(x+3)^2x$$

que se obtuvo multiplicando los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Observación 3.11 *De la misma manera se pueden encontrar un mínimo común múltiplo entre 3 o más polinomios.*

3. **Suma de expresiones racionales.** Para sumar expresiones racionales, buscamos un mínimo común múltiplo de todos los denominadores (denominador común) y procedemos de forma análoga a la suma de racionales.

   Ejemplo 3.26 *Calculen:* $\dfrac{2+x}{x^2+x} + \dfrac{3}{x^2+2x+1} - \dfrac{2}{x^2}$

   Solución:
   En primer lugar factorizamos los denominadores:

$$x^2 + x = x(x+1) \qquad x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Por lo tanto un mcm$(x^2+x,\, x^2+2x+1,\, x^2) = x^2(x+1)^2$. *Entonces,*

$$\begin{aligned}
\frac{2+x}{x^2+x}+\frac{3}{x^2+2x+1}-\frac{2}{x^2} &= \frac{2+x}{x(x+1)}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{2}{x^2}\\
&= \frac{(2+x)\,x\,(x+1)+3\cdot x^2-2\cdot(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}\\
&= \frac{2x^2+x^2+2x+x^3+3x^2-2x^2-4x-2}{x^2(x+1)^2}\\
&= \frac{x^3+4x^2-2x-2}{x^2(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Ecuaciones racionales.

Vamos a mostrar cómo resolver ecuaciones donde la incógnita aparece en una expresión fraccionaria. La idea fundamental es transformar la ecuación racional en una ecuación polinómica y luego igualarla a cero para determinar sus raíces.

Ejemplo 3.27 *En este primer ejemplo vamos a resolver la siguiente ecuación:*

$$\frac{2x+1}{x-3}=\frac{x-7}{x-1}$$

Recuerden que resolver una ecuación es encontrar los valores de la incógnita que satisfacen la igualdad planteada. Por lo tanto el primer paso es determinar todos los valores para los cuales la expresión tiene sentido, es decir, está bien definida. Observemos que

$$x \neq 3 \quad y \quad x \neq 1$$

pues dichos valores anulan el denominador.

$$\frac{2x+1}{x-3}=\frac{x-7}{x-1} \Leftrightarrow (2x+1)(x-1)=(x-7)(x-3) \Leftrightarrow$$
$$2x^2-x-1=x^2-10x+21 \Leftrightarrow x^2+9x-22=0$$

cuyas soluciones son

$$\boxed{x=2 \quad y \quad x=-11}$$

Verifiquen que estos valores satisfacen la ecuación original.

Ejemplo 3.28 *Veamos un segundo ejemplo. Resolver*

$$\frac{3x}{2x+1}=\frac{x+5}{x+1}+\frac{x-19}{2x^2+3x+1}$$

Como en el ejemplo anterior, vamos a determinar en primer lugar los ceros de cada denominador. Para eso resolvemos las ecuaciones

$$2x+1=0; \quad x+1=0; \quad 2x^2+3x+1=0$$

Sus soluciones son $x=-\frac{1}{2}$, $x=-1$ *y* $x=-\frac{1}{2}$, $\quad x=-1$, *respectivamente. Por lo tanto*

$$x \neq -\frac{1}{2} \quad x \neq -1$$

Ahora, vamos a sumar las fracciones del miembro derecho de la igualdad. Para ello, debemos factorizar y determinar un denominador común:

$$
\begin{aligned}
& \frac{3x}{2x+1} = \frac{x+5}{x+1} + \frac{x-19}{2x^2+3x+1} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3x}{2x+1} = \frac{x+5}{x+1} + \frac{x-19}{(2x+1)(x+1)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3x}{2x+1} = \frac{(x+5)(2x+1)+(x-19)}{(x+1)(2x+1)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3x}{\cancel{2x+1}} = \frac{(x+5)(2x+1)+(x-19)}{(x+1)\cancel{(2x+1)}} \\
\Leftrightarrow\ & 3x(x+1) = 2x^2+12x-14 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-9x+14=0
\end{aligned}
$$

Las soluciones son

$$\boxed{x=2 \quad y \quad x=7}$$

3.5. EJERCICIOS

1. Determinen los valores de m y n sabiendo que los polinomios $p(x) = 10x^2 - 8mx - 1$ es el opuesto de $q(x) = 3nx^2 - 40x + 1$.

   Rta.:$m = -5 \qquad n = -\dfrac{10}{3}$

2. Dados los polinomios $p(x) = x^2 - 4x + 4$ y $q(x) = 2x - 4$, calculen:

   a) $p(x) + q(x)$

   Rta.:$x^2 - 2x$

   b) $p(x) - 2q(x)$

   Rta.:$x^2 - 8x + 12$

   c) 3. $p(x) \cdot q(x)$

   Rta.: $6x^3 - 36x^2 + 72x - 48$

   d) $p(x) : q(x)$

   Rta.: $\frac{1}{2}x - 1$

   e) $(q(x))^2$

   Rta.: $4x^2 - 16x + 16$

   f) $(p(x))^2$

   Rta.:$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

   g) $(q(x))^3$

   Rta.: $8x^3 - 48x^2 + 96x - 64$

3. Determinen los números opuestos h y k para que: $p(x) = x^3 - x^2 + hx - k$ sea divisible por $q(x) = x + 2$

Rta.:$h = -12, \qquad k = 12$

4. ¿Cuál es el resto de dividir $p(x) = 3x^3 + 2x - 4$ por $q(x) = x + 1$?

Rta.:-9

5. Determinen el valor positivo de α para que: $p(x) = (\alpha - 1)x^3 - \alpha^2 x^2 + x - 10$ tenga a -2 como raíz.

Rta.: No existe un valor de α que verifique lo pedido.

6. Hallen el orden de multiplicidad de las raíces $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ de

$$p(x) = x^6 + x^5 - 5x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x$$

Rta.: $x_1 = 1$ orden 3; $\quad x_2 = -2$ orden 2.

7. Hallen el polinomio $p(x)$ de grado mínimo y tal que:

   a) Es reducido, -1 y 3 son raíces simples y 6 es una raíz doble.

   Rta.: $p(x) = x^4 - 14x^3 + 57x^2 - 36x - 108$.

   b) 2 y -2 son raíces simples y $p(-1) = 3$

   Rta.: $p(x) = -x^2 + 4$.

8. Factoricen el polinomio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

Rta.: $p(x) = 2(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$.

9. Dado el polinomio $p(x) = \frac{1}{k}x^2 - 5x + 2k$, determinen el valor no nulo de k, si se sabe que el doble de la suma de los ceros del polinomio es igual al producto de dichos ceros.

Rta.: $k = 5$.

10. Determinen los valores reales de a, b, α y β para que el polinomio $p(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$ sea igual al polinomio $q(x) = a(x + \alpha)^3 + b(x + \beta)$

Rta.: $a = 1$, $b = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

11. Determinen el valor real de a, para que el resto de la división entre $p(x) = -x^4 + 2x^2 - (a - 1)^2 x + 1$ y $b(x) = x + 1$ (en ese orden) sea igual a 11.

Rta.: 4 o -2.

12. Factoricen el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x$.

Rta.: $p(x) = x(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

13. Dado $p(x) = ax^3 + ax^2 + 7x + b$, determine los valores reales de a y b para que $p(x)$ sea divisible por $q(x) = x - 1$ y por $r(x) = x + 3$.

Rta.: $a = -\frac{7}{5}$, $b = -\frac{21}{5}$.

14. Hallen el polinomio $t(x)$ de grado mínimo sabiendo que $t(-2) = 30$; 4 y $-\dfrac{1}{3}$ son raíces simples y -1 es raíz doble.

Rta.: $t(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-4)(x+1)^2$.

15. Sea $p(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + (h+k)x - (h-k)$. Se pide:

    a) Calculen h y k sabiendo que 3 es raíz doble.

    Rta.: $h = \frac{15}{2}; \quad k = -\frac{3}{2}$.

    b) Factoricen a $p(x)$ suponiendo $h = \frac{15}{2}$ y $k = -\frac{3}{2}$

    Rta.: $p(x) = (x-1)(x+1)(x-3)^2$.

    c) Calculen h y k sabiendo que $p(-1) = 14$ y $p(-2) = 80$.

    Rta.: $h = \frac{1}{2}; \; k = \frac{29}{2}$.

    d) Obtengan el cociente y el resto de dividir $p(x)$ por $q(x) = x - 3$, suponiendo $h = k = 1$.

    Rta.: Cociente: $x^3 - 3x^2 - x - 1$, Resto -3.

16. Hallen el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

    a) $x^2 + 10x + \frac{25}{2} = 0$

    Rta.: $S = \left\{-5 + \frac{5}{2}\sqrt{2}, -5 - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right\}$.

    b) $3x^2 - 30x - 33 = 0$

    Rta.: $S = \{-1, 11\}$.

    c) $-5(x-3)(x-1) = 0$

    Rta.: $S = \{1, 3\}$.

17. Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Prueben que si x_1 y x_2 son soluciones de dicha ecuación, entonces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad \text{y} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

18. Determinen dos números tales que su suma sea s y su producto p.

    a) $s = 2$ y $p = 20$.

    b) $s = 12$ y $p = -64$.

19. Determinen el valor real de k, tal que:

a) $5kx^2 - (2k+10)x + 4 = 0$ tenga raíz doble.

Rta.: $k = 5$.

b) $3x^2 + kx - 2 = 0$ tenga una raíz igual a -2.

Rta.: $k = 5$.

20. Hallen el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 4x < 5$

Rta.: $S = (-1, 5)$.

b) $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 8 \geq 0$

Rta.: $S = (-\infty, -8] \cup [-2, +\infty)$.

c) $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$

Rta.: $S = \left[-\frac{1}{3}, 4\right]$.

21. Determinen los valores de A, B y C para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$

Rta.: $A = \frac{7}{5} \quad B = \frac{8}{5}$.

b) $)\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$

Rta.: $A = -1 \quad B = -\frac{1}{2} \quad C = \frac{3}{2}$.

c) $\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

Rta.: $A = 4 \quad B = -1 \quad C = 2$.

d) $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$

Rta.: $A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2} \quad C = \frac{1}{2}$.

22. Determinen el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{6-x}{x^2+4x+4} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{5-x}$

Rta.: $S = \left\{\frac{6}{11}\right\}$.

b) $\frac{x+4}{3x-6} - \frac{x-6}{4x-8} = \frac{x+1}{x-2}$

Rta.: $S = \varnothing$.

c) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \frac{x+1}{x-1} = 6$

Rta.: $S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$.

4. Sistemas Lineales

Problema

Se sabe que en una localidad de la Provincia de Buenos Aires, llamémosla P, el 20 % de la población con que contaba al comienzo del año migró a localidades vecinas mientras que el 80 % restante permaneció en P. Por otra parte, un 10 % de los habitantes de las localidades cercanas a P se trasladaron a ella y el 90 % restante permaceció en sus ciudades. Si al finalizar el año la población de P era de 38,000 personas y las localidades vecinas sumaban 132,000 habitantes, ¿cuántas personas comenzaron el año en P? (No se consideran los datos de nacimientos ni fallecimientos)

4.1. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

Las ecuaciones lineales son las más sencillas de todas las ecuaciones y por esta razón son las primeras que se introducen en la enseñanza elemental. Una ecuación lineal con una incógnita es una expresión del tipo

$$ax = b \tag{4.1}$$

donde a y b son constantes reales y x es la incógnita de la ecuación. Resolver la ecuación es determinar qué valor o valores de la incógnita satisfacen la igualdad planteada.

Si $a \neq 0$ la ecuación (4.1) tiene una única solución

$$x = \frac{b}{a}$$

En el caso $a = 0$ pueden ocurrir dos situaciones:

1. Si $b = 0$ todo número real satisface la ecuación (4.1) ya que
$$0\,k = 0$$
para todo $k \in \mathbb{R}$.
2. Si $b \neq 0$ la ecuación no tiene solución pues para cualquier k real se tiene que
$$0\,k = 0 \neq b$$

Una ecuación lineal con dos incógnitas, es una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \tag{4.2}$$

donde a_1, a_2 y b son constantes reales, mientras que x_1 y x_2 son las incógnitas de la ecuación.

Ejemplo 4.1 *Consideren la ecuación*

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones. En efecto, observen que si hacemos $x_1 = 0$ *resulta*

$$2x_2 = 6 \Leftrightarrow x_2 = 3$$

Por lo tanto,

$$\boxed{x_1 = 0, \;\; x_2 = 3}$$

es ***una*** *solución de la ecuación (4.2).*

Si ahora consideramos $x_1 = 4$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 2\,x_2 &= 6 \\ 2\,x_2 &= 6 - 12 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{x_1 = 4, \;\; x_2 = -3}$$

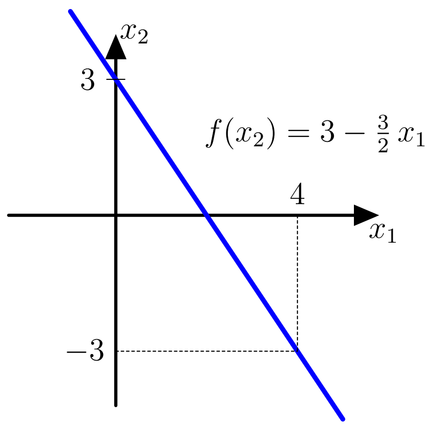
es ***otra*** *solución de la ecuación (4.2).*

Asignándole diferentes valores a x_1 *transformamos la ecuación (4.2) en una ecuación lineal con una sóla incógnita,* x_2.

Podemos interpretar geométricamente las soluciones de la ecuación (4.2). Partiendo de $3x_1 + 2x_2 = 6$ *es posible escribir* x_2 *en función de* x_1 *(es decir* $x_2 = f(x_1)$*) resultando*

$$x_2 = 3 - \frac{3}{2}\,x_1$$

La gráfica de esta función es una recta:



Cada punto de esta ecuación es una solución de la ecuación (4.2).

De manera similar podemos definir ecuaciones lineales con la cantidad de incógnitas que queramos:

Definición (ecuación lineal)

Las ecuaciones que se pueden expresar en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

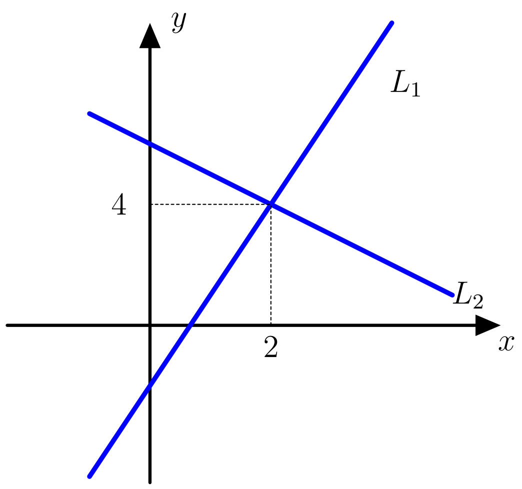
donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes reales, se conocen como *ecuaciones lineales con n incógnitas*. $x_1, x_2 \ldots x_n$ son las n incógnitas de la ecuación.

Un conjunto finito de ecuaciones lineales constituye un *sistema de ecuaciones lineales*.

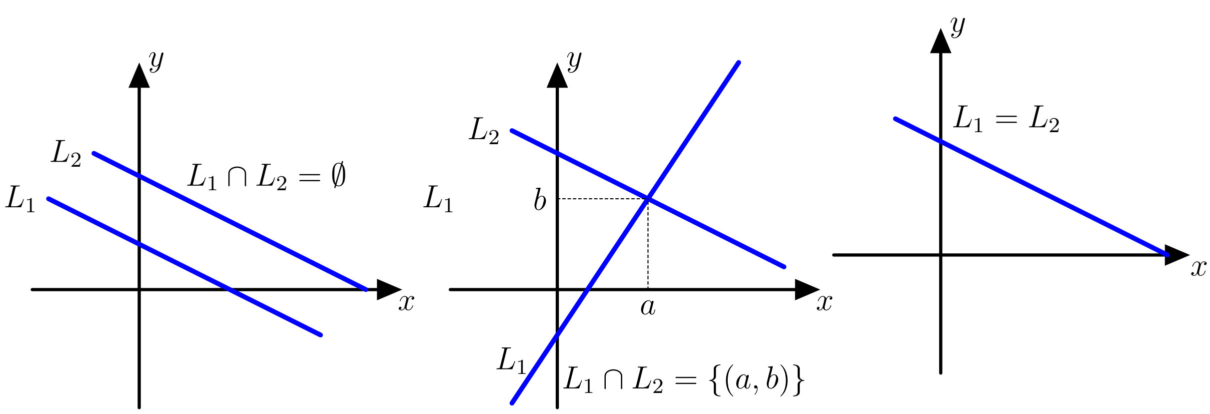
Ejemplo 4.2

$$\begin{cases} -3x + y &= -2 \qquad (E_1) \\ x + y &= 6 \qquad (E_2) \end{cases}$$

es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (2×2)*. Resolver el sistema es determinar todos los pares* (x, y) *que satisfacen las dos ecuaciones de manera simultánea. Desde el punto de vista gráfico, queremos determinar las coordenadas de los puntos de la recta* L_1*, cuya ecuación es* $-3x+y = -2$*, que pertenecen también a la recta* L_2*, de ecuación* $x + y = 6$*. Es decir, queremos encontrar el conjunto* $L_1 \cap L_2$*. En este caso es el* $\{(2, 4)\}$.



Observación 4.1 *De la interpretación gráfica de los sistemas de* 2×2 *se deduce que pueden tener ninguna, una o infinitas soluciones según la posición de las rectas definidas por las ecuaciones del sistema.*



Si las ecuaciones representan un par de rectas diferentes y paralelas, el sistema no tiene solución. Si representan un par de rectas no paralelas, el sistema tiene solución única y cuando las dos ecuaciones representan la misma recta, el sistema tiene infinitas soluciones.

Definición (Sistema de ecuaciones lineales)

Se llama *sistema de ecuaciones lineales* a cualquier conjunto finito de ecuaciones lineales. De manera formal, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $(m \times n)$ es un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde los a_{ij} y b_i son constantes reales. En particular los a_{ij} se conocen como los *coeficientes del sistema* y los b_i como los *términos independientes*. Las n incógnitas del sistema son $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Observación 4.2 *En el Seminario nos ocuparemos solamente de los sistemas con* 2 *y* 3 *incógnitas, aunque los procedimientos que vamos a emplear pueden utilizarse para sistemas de cualquier tamaño.*

4.2. Sistemas lineales equivalentes.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales es un punto central de una parte de la matemática que se conoce como Álgebra Lineal. En la enseñanza media se estudian varios métodos o procedimientos para resolver sistemas lineales de 2×2. Ya hemos tenido la oportunidad de discutir alguno de ellos cuando tuvimos que determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

Vamos a abordar este problema desde un punto de vista diferente al considerado hasta este momento. Comenzaremos con algunas observaciones y ejemplos.

El sistema

$$(A) \begin{cases} 3x - y & = & -1 & (E_1) \\ x + y & = & 5 & (E_2) \end{cases}$$

tiene como solución a $x = 1$ e $y = 4$. Vamos a “combinar”las ecuaciones del sistema (A) para obtener una nueva ecuación. Por ejemplo vamos a multiplicar ambos miembros de la ecuación E_2 por 2 y la restamos a la ecuación E_1:

$$\begin{array}{rcrc} 3x - y & = & -1 & (E_1) \\ 2x + 2y & = & 10 & (2 \cdot E_2) \\ \hline x - 3y & = & -11 & (E_1 - 2 \cdot E_2) \end{array}$$

Observemos que $x = 1$ e $y = 4$ también es solución de la ecuación $E_1 - 2 \cdot E_2$:

$$1 - 3 \cdot 4 = -11.$$

Por lo tanto, si armamos otro sistema de ecuaciones que tenga a la ecuación E_1 y la ecuación $E_1 - 2E_2$, también tendrá como solución al par $(1, 4)$:

$$(B)\left\{\begin{array}{rcrc} 3x - y & = & -1 & (E_1) \\ x - 3y & = & -11 & (E_1 - 2 \cdot E_2) \end{array}\right.$$

Definición (combinación lineal de ecuaciones.)

Sean E_1 y E_2 dos ecuaciones lineales. Se dice que una ecuación lineal E es *combinación lineal* de las ecuaciones E_1 y E_2 si existen números reales α y β tales que

$$E = \alpha E_1 + \beta E_2$$

Vamos a omitir los detalles técnicos, pero siempre se cumple que si todas las ecuaciones de un sistema de lineal (B) son combinaciones lineales de las ecuaciones de un sistema (A), entonces las soluciones del sistema (A) también son soluciones del sistema (B).

Ejemplo 4.3 *Consideremos el siguiente sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:*

$$(A)\left\{\begin{array}{rcrc} 2x + y - z & = & -3 & (E_1) \\ x + y + z & = & 2 & (E_2) \\ 3x + 2y + z & = & 2 & (E_3) \end{array}\right.$$

Este sistema tiene como solución a $x = 1, y = -2, z = 3$ como pueden verificar reemplazando estos valores en cada una de las tres ecuaciones del sistema.

El sistema (B) también es de 3×3 y todas sus ecuaciones son combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema (A):

$$(B)\left\{\begin{array}{rcrc} x - 2z & = & -5 & (E_1 - E_2) \\ x + y & = & -1 & (E_1 + 2E_2 - E_3) \\ 2x + y - 2z & = & -6 & (2E_1 + E_2 - E_3) \end{array}\right.$$

En función de lo dicho anteriormente, toda solución del sistemas (A) es solución del sistema (B). Pueden verificar que $x = 1, y = -2, z = 3$ satisfacen las tres ecuaciones del sistema (B).
¿Tienen los sistemas anteriores el mismo conjunto solución?. La respuesta es NO. De hecho, $x = -1, y = 0, z = 2$ es una solución del sistema (B) pero no del sistema (A). Por ejemplo, estos valores no satisfacen la primera ecuación de (A): $2(-1) + 0 - 2 = -2 - 2 = -4 \neq -3$. Estos ocurre porque, si bien todas las ecuaciones del sistema (B) son combinaciones lineales de las ecuaciones del sitema (A), no es cierto que todas las ecuaciones de (A) sean combinaciones lineales de las ecuaciones de (B).

El ejemplo anterior nos conduce a dar la siguiente

Definición (sistemas equivalentes)

Decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales son *equivalentes* si toda ecuación del primero de ellos es combinación lineal de las ecuaciones del segundo sistema y, recíprocamente, toda ecuación del segundo es combinación lineal de las ecuaciones del primero.

Finalmente, tenemos el siguiente resultado sumamente importante:

Teorema

Dos sistemas lineales equivalentes tienen exactamente el mismo conjunto solución

Notación: Para denotar que los sistemas (A) y (B) son equivalentes escribiremos

$$(A) \sim (B)$$

4.3. Resolución de los sistemas lineales: Eliminación de Gauss

Dado un sistema lineal, el procedimiento que seguiremos para determinar sus soluciones consiste en encontrar un sistema equivalente que sea más fácil de resolver y en consecuencia trabajar sobre este último. Para obtener este nuevo sistema, vamos a aplicar tres tipos de operaciones básicas que garantizan que ambos sistemas sean equivalentes y que además nos permitan eliminar incógnitas simplificando los sistemas a resolver. Estas operaciones son:

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
3. Sumar un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

Comenzaremos con un ejemplo de 2×2 pare que se entienda el objetivo del método:

Ejemplo 4.4 *Resuelvan el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -2x + 5y & = & 4 & (E_1) \\ 3x + 2y & = & 13 & (E_2) \end{array} \right.$$

Solución:

Vamos a aplicar las operaciones mencionadas para obtener un sistema equivalente donde una de las ecuaciones tenga una incógnita en lugar de dos. Por suspuesto, es posible eliminar tanto x como y. Eliminaremos la x de la segunda ecuación sólo con el objetivo de mecanizar el proceso. Multiplicaremos la ecuación E_1 por 3 y la E_2 por 2:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -2x + 5y & = & 4 & (E_1) \\ 3x + 2y & = & 13 & (E_2) \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcll} -6x + 15y & = & 12 & (3E_1) \\ 6x + 4y & = & 26 & (2E_2) \end{array} \right.$$

Ahora cambiamos la segunda ecuación por la suma de la primera y la segunda del segundo sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 5y & = & 4 \\ 3x + 2y & = & 13 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} -6x + 15y & = & 12 \\ 6x + 4y & = & 26 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcll} -6x + 15y & = & 12 & \\ 19y & = & 38 & (3E_1 + 2E_2) \end{array} \right.$$

Los tres sistemas tienen el mismo conjunto solución, pero el último es de resolución inmediata:

$$19y = 38 \Leftrightarrow y = 2$$

Reemplazando $y = 2$ en la primer ecuación, tenemos que

$$-6x + 30 = 12 \Leftrightarrow -6x = -18 \Leftrightarrow x = 3$$

Luego, el conjunto solución del sistema es

$$S = \{(3, 2)\}$$

Observación 4.3 *Es posible cambiar directamte la ecuación E_2 por $3E_1 + 2E_2$:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+5y & = & 4 \\ 3x+2y & = & 13 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcll} -2x+5y & = & 4 & \\ 19y & = & 38 & (3E_1+2E_2) \end{array}\right.$$

De donde $y = 2$ y posteriormente $x = 3$.

Ejemplo 4.5 *Probemos ahora con un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:*

$$\left\{\begin{array}{rcrl} 2x+y+z & = & 2 & (E_1) \\ -x-y+2z & = & 6 & (E_2) \\ 3x+2y+z & = & -4 & (E_3) \end{array}\right.$$

Con el objeto de sistematizar el procedimiento a seguir, el primer paso es verificar que en cada ecuación el orden en que aparecen las incógnitas sea el mismo. Si esto no ocurriese, ordenamos la ecuación que sea necesaria. En el caso de nuestro ejemplo, el sistema ya está ordenado. Es importante que el coeficiente de la primer incógnita en la primera ecuación (en este caso, 2) sea diferente de cero. En el caso de que esto no sea así, permutamos la ecuación con alguna donde el primer coeficiente no sea 0.

Buscaremos un sistema equivalente al que queremos resolver, pero que en las ecuaciones (E_2) y (E_3) no tenga x. Para esto vamos a operar cada una de estas ecuaciones con la ecuación $E_!$:

$$(A)\left\{\begin{array}{rcrl} 2x+y+z & = & 2 & (E_1) \\ -x-y+2z & = & 6 & (E_2) \\ 3x+2y+z & = & -4 & (E_3) \end{array}\right. \sim (A')\left\{\begin{array}{rcrl} 2x+y+z & = & 2 & (E_1) \\ -y+5z & = & 14 & (E_2' = 2E_2+E_1) \\ y-z & = & -14 & (E_3' = 2E_3-3E_1) \end{array}\right.$$

Por último, operando con las ecuaciones (E_2') y (E_3') vamos a obtener un tercer sistema (A'') que sea equivalente a los anteriores y en la última ecuación sólo tenga una incógnita: z.

$$(A) \sim (A')\left\{\begin{array}{rcrl} 2x+y+z & = & 2 & (E_1) \\ -y+5z & = & 14 & (E_2') \\ y-z & = & -14 & (E_3') \end{array}\right. \sim (A'')\left\{\begin{array}{rcrl} 2x+y+z & = & 2 & (E_1) \\ -y+5z & = & 14 & (E_2') \\ 4z & = & 0 & (E_3'' = E_2'+E_3') \end{array}\right.$$

Este último sistema es de resolución inmediata. La tercera ecuación nos permite determinar el valor de z:

$$4z = 0 \Leftrightarrow \boxed{\quad z = 0 \quad}$$

Reemplazando $z = 0$ en la segunda ecuación, obtenemos el valor de y:

$$-y+5z = 14 \Leftrightarrow -y+0 = 14 \Leftrightarrow \boxed{\quad y = -14 \quad}$$

Finalmente, reemplazondo $y = -14$ y $z = 0$ en la primera ecuación, calculamos el valor de x:

$$2x+y+z = 2 \Leftrightarrow 2x-14+0 = 2 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow \boxed{\quad x = 8 \quad}$$

El conjunto solución del sistema es $S = \{(8, -14, 0)\}$.

Observación 4.4 *El procedimiento seguido nos permite encontrar un sistema equivalente al original que está práctimamente resuelto. Esto se logra "eliminando" incógnitas de cada ecuación. Por este motivo se lo conoce como* ***método de eliminación*** *o, en homenaje a Gauss* $(1777-1855)$*, reconocido como el más grande de todos los matemáticos,* ***método de eliminación de Gauss****. Este método ya fue utilizado por otro grande, Newton* $(1643-1727)$ *mucho tiempo antes que Gauss y se han encontrado documentos que prueban que los matemáticos chinos utilizaban este sencillo procedimiento antes del año* 200 *después de Cristo.*

Observación 4.5 *Como trabajamos con los sistemas ordenados, podemos prescindir de las incógnitas y trabajar sólo con los coeficientes. Esto tiene una gran importancia desde el punto de vista computacional. En el ejemplo (4.5) podríamos haber simplificado la notación de la siguiente manera (los tres primeros números son los coeficientes de cada ecuación, mientras que el que está a la derecha de la línea vertical es el término independiente):*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2E_2+E_1 \\ 2E_3-3E_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ E_3+E_2 \end{array}$$

Nuevamente, la tercera línea de la última tabla nos está diciendo que $10z = 0$*, de donde* $z = 0$*. Luego seguimos como hicimos anteriormente.*

Observación 4.6 *En el método de eliminación los coeficientes del sistema deben quedar en forma* ***escalonada****. Esto implica que se deben cumplir las siguientes condiciones:*

1. *Las filas que tienen todos los coeficientes iguales a cero, filas nulas, se deben agrupar al final. Esto se obtiene permutando el orden de las ecuaciones.*

2. *Dadas dos filas consecutivas y no nulas, el primer coeficiente distinto de cero de la fila inferior debe aparecer a la derecha del primer coeficiente no nula de la fila superior.*

Un sistema escalonado tiene una configuración del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{array}\right) \tag{4.3}$$

Ejemplo 4.6 *Vamos a resolver ahora otro sistema de* 3×3*:*

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-3y+z & = & 1 \\ -2x+y+z & = & -2 \\ x-13y+7z & = & 0 \end{array}\right.$$

Para ello, vamos a armar las tablas con los coeficientes y luego encontraremos sistemas equivalentes eliminando sucesivamente las incógnitas y *y* z*.*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -13 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2E_1+E_2 \\ E_3-E_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad E_3 - 2E_2$$

La última línea del sistema nos dice que

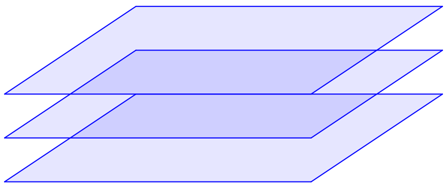
$$0x + 0y + 0z = -1$$

Claramente no existen valores de x, y y z que verifiquen dicha ecuación. Por lo tanto el sistema no tiene solución.

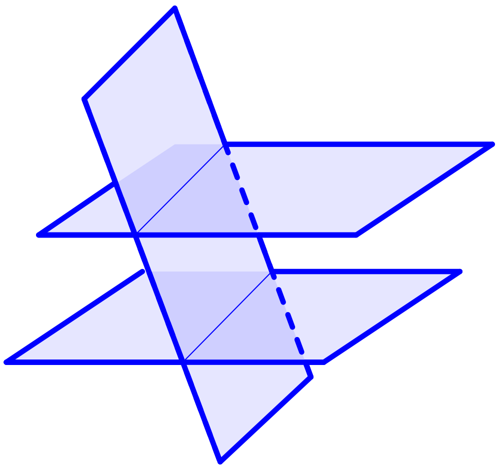
Así como las ecuaciones lineales con dos incógnitas representan rectas en $\mathbb{R}^2$, las ecuaciones lineales con tres incógnitas representan planos en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Cuando resolvemos sistemas con tres incógnitas estamos determinando si un conjunto de planos tienen uno o más puntos en común.

El hecho de que el sistema anterior no tenga solución implica que no hay puntos que pertenezcan a los tres planos. Los siguientes gráficos muestran distintas posibilidades en las cuales tres planos no poseen intersecciones comunes:

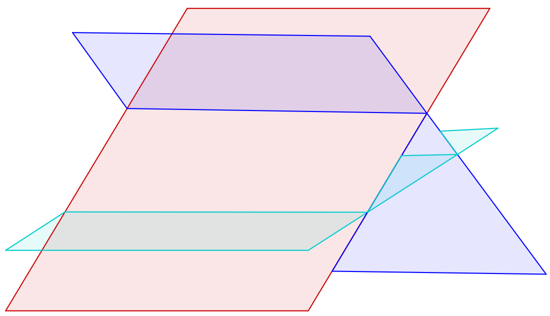


Una posibilidad es que las ecuaciones correspondan a tres planos paralelos no coincidentes



Otra posibilidad es que dos de las ecuaciones correspondan a planos paralelos no coincidentes

Por úlimo, no es necesario que haya algún par de planos paralelos. Este es el caso del sistema que hemos resuelto.



Ejemplo 4.7 *Vamos a resolver otro sistema de 3×3:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-3z &=& 1\\ x+y+2z &=& 0\\ -x-2y-9z &=& 1\end{array}\right.$$

El sistema ya está ordenado, nos quedamos con los coeficientes y términos independientes de cada ecuación y comenzamos a operar:

$$\left(\begin{array}{rrrcr} 2 & 1 & -3 & | & 1\\ 1 & 1 & 2 & | & 0\\ -1 & -2 & -9 & | & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrcr} 2 & 1 & -3 & | & 1\\ 0 & -1 & -7 & | & 1\\ 0 & -3 & -21 & | & 3\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ E_1-2E_2\\ 2E_3+E_1\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrcr} 2 & 1 & -3 & | & 1\\ 0 & -1 & -7 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ E_3-3E_2\end{array}$$

En este ejemplo, la tercera ecuación nos dice que:

$$0x+0y+0z=0$$

y esta condición la satisfacen todas las ternas de números reales. Por lo tanto, esta ecuación puede descartarse. En términos de sistemas de ecuaciones esto significa que el sistema original es equivalente (y por ende tiene el mismo conjunto solución) que otro sistema con sólo dos ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-3z &=& 1\\ x+y+2z &=& 0\\ -x-2y-9z &=& 1\end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-3z &=& 1\\ -y-7z &=& 1\end{array}\right.$$

Desde el punto de vista geométrico, cada ecuación de este último sistema representa un plano. Como el sistema tiene solución ya que no nos queda una fila con la forma

$$0\ 0\ 0 \mid\ \neq 0$$

debe tener infinitas soluciones, pues la intersección de dos planos es una recta.

En la segunda ecuación podemos escribir y en función de z, o z en función de y:

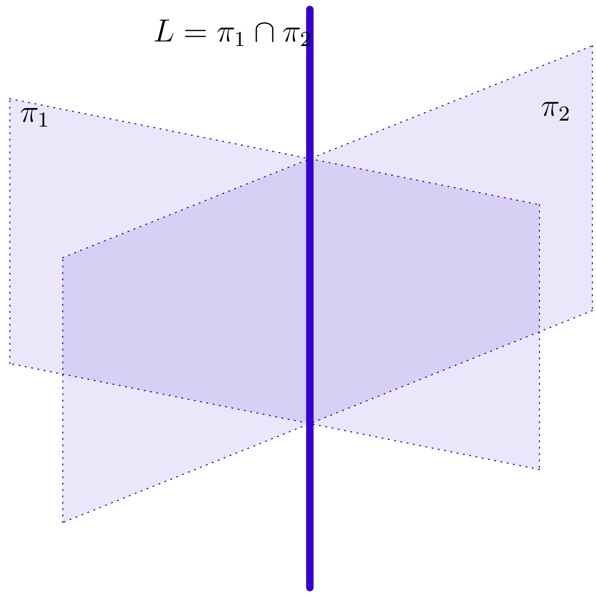
$$-y-7z=1 \Leftrightarrow y=-7z-1, \quad z\in\mathbb{R}$$

Sustituyendo y por $-7z-1$ en la primera ecuación, resulta:

$$2x+(-7z-1)-3z=1 \Leftrightarrow 2x=10z+2 \Leftrightarrow x=5z+1 \quad z\in\mathbb{R}$$

El conjunto solución del sistema es

$$\boxed{S=\{(5z+1,-7z-1,z)/z\in\mathbb{R}\}}$$



Ejemplo 4.8 *En este ejemplo vamos a resolver un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Geométricamente, es equivalente a determinar si tres rectas tienen algún punto en común. El sistema a resolver es:*

$$\begin{cases} 2x - y &= 5 \\ x + 2y &= -5 \\ -x + y &= -4 \end{cases}$$

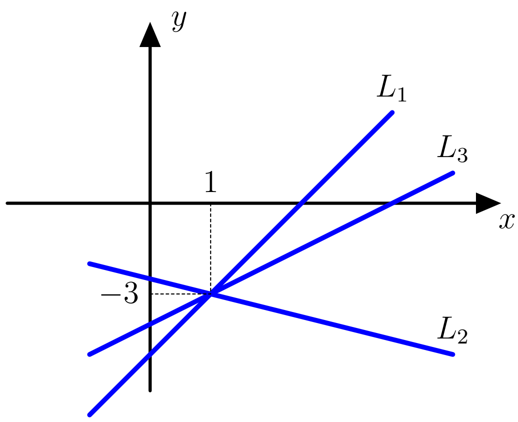
Vamos a escalonar el sistema:

$$\left(\begin{array}{rrcr} 2 & -1 & | & 5 \\ 1 & 2 & | & -5 \\ -1 & 1 & | & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrcr} 2 & -1 & | & 5 \\ 0 & -5 & | & 15 \\ 0 & 1 & | & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ E_1 - 2E_2 \\ 2E_3 + E_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrcr} 2 & -1 & | & 5 \\ 0 & -5 & | & 15 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 5E_3 + E_2 \end{array}$$

El sistema es compatible. Descartamos la última ecuación y lo resolvemos:

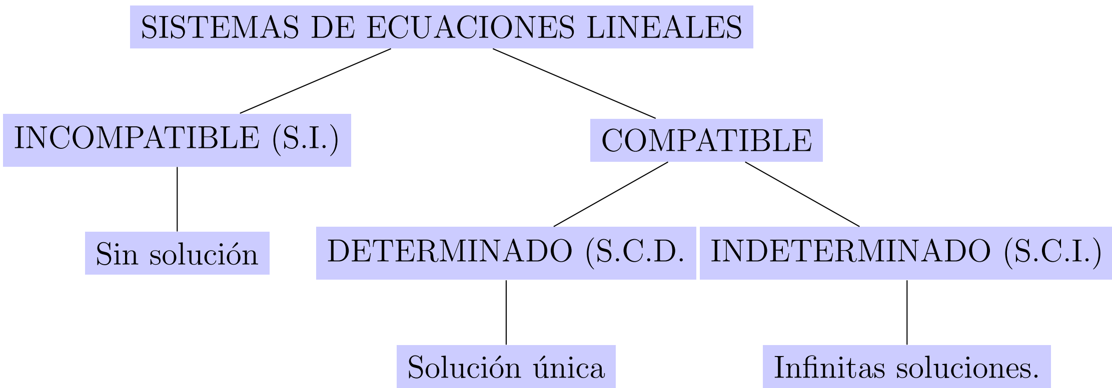
$$-5y = 15 \Leftrightarrow y = -3$$

Sustituyendo en la primera ecuación $2x - (-3) = 5 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$. *Las tres rectas se cortan en el punto* $(1, -3)$.



4.4. Clasificación de los sistemas lineales.

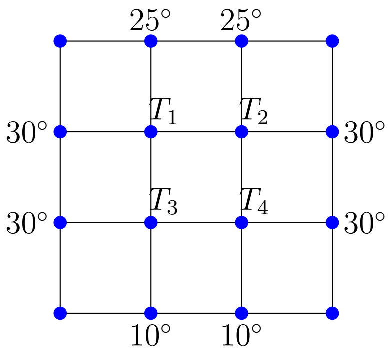
Hemos visto que los sistemas lineales pueden tener o no solución. Cuando un sistema tiene solución se dice que es **compatible**. En este caso puede tener solución única o infinitas soluciones. Cuando tiene solución única decimos que es **compatible determinado** mientras que si tiene más de una el sistemas es **compatible indeterminado**. Cuando no tiene solución, se llama **incompatible**.



4.5. Ejemplos de algunos problemas que se resuelven mediante sistemas lineales.

Ejemplo 4.9 ***Tranferencia de calor***

En este ejemplo vamos a ver cómo modelar y determinar la distribución de temperatura de una placa delgada si resultan conocidas las temperaturas que rodean la placa. La siguiente figura representa un corte transversal de una viga metálica donde el flujo de calor en la dirección perpendicular a la placa se considera despreciablble.



Se desea calcular la temperatura en cada uno de los 4 nodos interiores de la red: T_1, T_2, T_3 y T_4. La temperatura en cada uno de ellos es aproximadamente igual al promedio de la temperatura en cada uno de los nodos más cercanos. En nuestro modelo las consideraremos iguales a dicho promedio. Tenemos entonces que

$$T_1 = \frac{25 + T_2 + T_3 + 30}{4} \qquad T_2 = \frac{25 + 30 + T_4 + T_1}{4}$$

$$T_3 = \frac{30 + T_1 + T_4 + 10}{4} \qquad T_4 = \frac{T_3 + T_2 + 30 + 10}{4}$$

Estas ecuaciones nos conducen al sistema

$$\begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_3 &= 55 \\ -T_1 + 4T_2 - T_4 &= 55 \\ -T_1 + 4T_3 - T_4 &= 40 \\ -T_2 - T_3 + 4T_4 &= 40 \end{cases}$$

Resolución:

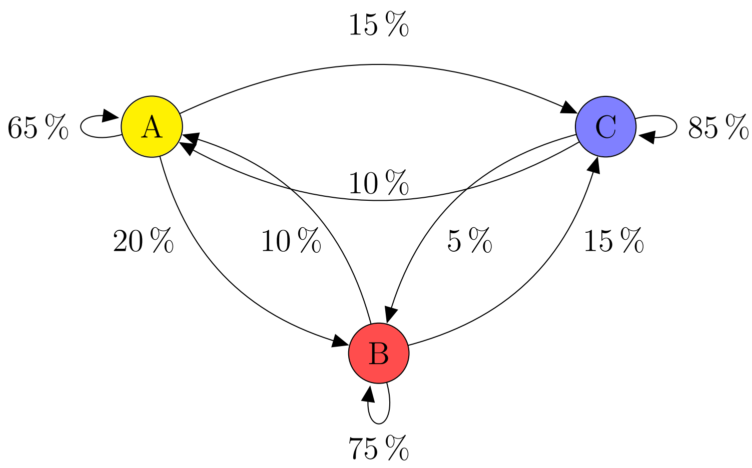
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 & 55 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 55 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 & 55 \\ 0 & 15 & -1 & -4 & 275 \\ 0 & -1 & 15 & -4 & 215 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_1 + 4E_2 \\ 4E_3 + E_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 & 55 \\ 0 & 15 & -1 & -4 & 275 \\ 0 & 0 & 224 & -64 & 3500 \\ 0 & 0 & -16 & 56 & 875 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 15E_3 + E_2 \\ 15E_4 + E_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 & 55 \\ 0 & 15 & -1 & -4 & -165 \\ 0 & 0 & 224 & -64 & 3500 \\ 0 & 0 & 0 & 720 & 15750 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ 14E_4 + E_3 \end{array}$$

De la última ecuación resulta que $T_4 = 15750/720 = 21,875°$. Continuando el proceso de sustituciones regresivas se obtienen los valores de las temperaturas en los otros nodos. ($T_3 = 21,875°$, $T_2 = 25,625°$ y $T_1 = 25,625°$)

Ejemplo 4.10 ***Problemas de intercambios***.

El siguiente digrafo (o grafo dirigido) nos muestra los cambios en las contrataciones de proveedores de internet de los clientes de tres empresas A, B y C. Por ejemplo, sabemos que al finalizar el año, el 10 % de los clientes de C decidieron pasarse la empresa A.



El número de clientes de la empresa A al finalizar el año fue igual a 36 500, el de B, 55 250 y el de C, 53 250. Sabiendo que no se incorporaron nuevos clientes al mercado y que todos los usuarios del servicio siguen manteniéndolo, se quiere determinar el número de usuarios de cada empresa al comienzo del año.

Traducimos la información de los movimientos de cada empresa en una ecuación. Sean x, y y z las cantidades de clientes que tienen las empresas A, B y C respectivamente, al comenzar el año. Por ejemplo, la empresa A pierde el 35 % (15 % + 20 %) de sus clientes, por ende conserva el 65 %, y recibe el 10 % de C más el 10 % de B, quedando su cartera en 36 500 usuarios:

$$36\,500 = 0,65x + 0,10y + 0,10z$$

De manera similar, planteamos las otras dos ecuaciones:

$$55\,250 = 0,20x + 0,75y + 0,05z \quad \text{(para B)}$$

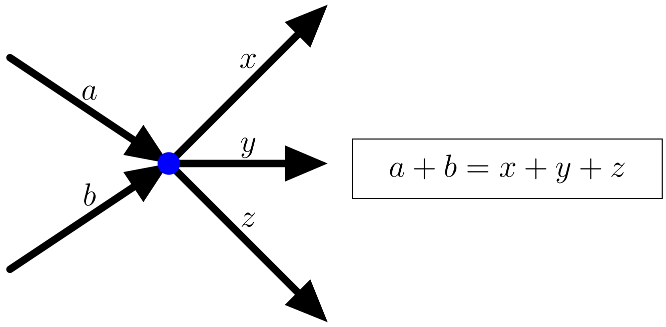
$$53\,250 = 0,15x + 0,15y + 0,85z \quad \text{(para C)}$$

Por lo tanto, para obtener la solución del problema debemos resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 0,65x + 0,10y + 0,10z &= 36\,500 \\ 0,20x + 0,75y + 0,05z &= 55\,250 \\ 0,15x + 0,15y + 0,85z &= 53\,250 \end{cases}$$

Ejemplo 4.11 ***Redes de flujo***

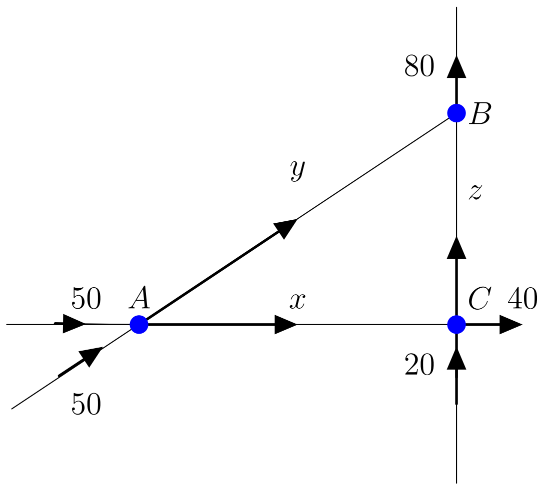
Una red de flujo es un grafo dirigido con ciertas características técnicas que no vamos a especificar completamente, pero que debe verificar un supuesto fundamental: la suma de los flujos entrantes a uno de los nodos[1] debe ser igual a la suma de los salientes:



Este principio de conservación del flujo es similar al establecido en la primera Ley de Kirchhoff para la circulación de corriente eléctrica.

Las redes de flujo nos permiten modelar, entre otros, problemas de tránsito de automóviles, flujo de caudales a través de tuberías y circulación de la corriente eléctrica.

Supongamos que en el siguiente diagrama se muestra el flujo de tránsito que entra y sale de cada calle en número de vehículos por unidad de tiempo.



Los nodos A, B y C denotan las intersecciones de tres arterias de la ciudad. Las variables x, y, z denotan el número de vehículos por unidad de tiempo que circulan entre las intersecciones A, B y C respectivamente. Como veremos, sus valores pueden obtenerse mediante un sistema lineal que es indeterminado. Sin embargo en estos problemas esto no significa que tenga infinitas soluciones ya que los valores de estas incógnitas sólo pueden ser enteros no negativos. Por ejemplo, en principio la cantidad de vehículos que transitará entre A y C debería estar entre 0 y 100 ¿Es realmente esto así?

[1] salvo en el caso de dos nodos especiales conocidos como *fuente* y *sumidero*.

El supuesto de conservación del flujo nos permite plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y &= 100 \\ y+z &= 80 \\ x+20 &= z+40 \end{cases}$$

Lo ordenamos y resolvemos mediante el método de eliminación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 100 \\ 0 & 1 & 1 & | & 80 \\ 1 & 0 & -1 & | & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 100 \\ 0 & 1 & 1 & | & 80 \\ 0 & -1 & -1 & | & -80 \end{pmatrix} E_3 - E_1 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 100 \\ 0 & 1 & 1 & | & 80 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que $y+z=80$ de donde $z=80-y$ y, reemplazando en la primera ecuación, $x=100-y$. El sistema es compatible indeterminado. Sin embargo en este caso como las incógnitas x, y y z representan cantidades de vehículos deben ser enteras y no negativas. Por la tanto

$$0 \leq y \leq 80$$

Como y varía entre 0 y 80 y $x=100-y$, no puede darse el caso de que $x=0$ pues esto implicaría que $y=100$ lo cual no es posible. El menor valor posible de x ocurre cuando y es máximo, es decir cuando es igual a 80 y, en consecuencia, $x=20$.

La solución del sistema es

$$\boxed{S = \{100-y, y, 80-y)/y \in \mathbb{N}_0, 0 \leq y \leq 80\}}$$

4.6. EJERCICIOS

1. Resuelvan los siguientes sistemas lineales:

   a) $\begin{cases} x+2y=6 \\ \dfrac{2x+y}{3} = y-6 \end{cases}$ $\qquad S = \{(-4,5)\}$

   b) $\begin{cases} x+4y=2-x \\ x=1-2y \end{cases}$ $\qquad S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x,y) = (1,0) + t(-2,1) \wedge t \in \mathbb{R}\}$

   c) $\begin{cases} 2(x-1,5y)-5=0 \\ \dfrac{x}{\frac{3}{2}} = y + \dfrac{5}{6} \end{cases}$ $\qquad S = \varnothing$

   d) $\begin{cases} x-4y=3x+2y \\ x=2x-2y \end{cases}$ $\qquad S = \{(0,0)\}$

   e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = y \end{cases}$ $\qquad S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x,y) = t\left(\frac{2}{3}, 1\right) \wedge t \in \mathbb{R}\right\}$

2. Resuelvan los siguientes sistemas lineales:

$$a)\ \begin{cases} x + 2y \quad\ = -3 \\ 2x + 3y - 2z = -10 \\ -x \quad + 6z = 9 \end{cases} \qquad S = \{(-15, 6, -1)\}$$

$$b)\ \begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ -2x + y + 3z = 9 \\ 4x + 2y + z = 11 \end{cases} \qquad S = \{(1, 2, 3)\}$$

$$c)\ \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 2z = 9 \\ x + 4y + 7z = 6 \end{cases} \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2 + 9\lambda, y = 1 - 4\lambda, z = \lambda, \lambda \in \mathrm{R}\}$$

$$d)\ \begin{cases} y - 2z = -5 \\ 2x - y + z = -2 \\ 4x - y = -4 \end{cases} \qquad S = \varnothing$$

$$e)\ \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 / x = -\lambda, y = 2\lambda, z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3. El cuerpo de un pez pesa 4 veces lo que pesa la cabeza y la cola 2 libras más que la cabeza. Si el pez pesa 20 libras, ¿cuál es el peso de cada parte?

   Rta:: 3 libras (cabeza); 12 libras (cuerpo); y cola 5 libras.

4. La edad de un padre es el cuádruplo de la edad de su hijo. Hace 3 años era el quintuplo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

   Rta.: padre 48 , hijo 12 libras.

5. Antonio tiene \$4 en monedas de 5 y de 20 centavos. Si en total tiene 29 monedas, ¿Cuántas son de 5 y cuántas son de 20 centavos?

   Rta:: 12 monedas de 5 y 17 de 20

6. En un número de dos cifras la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras resulta un nuevo número que sumado con el anterior da 121 . Determinen el número.

   Rta.: 83

7. Un estante contiene $\frac{3}{5}$ de la cantidad total de libros que están en el estante vecino. Si pasamos 10 libros del primero al segundo estante, éste tendrá el doble de libros que el primero. ¿Cuántos libros habia en cada librero?

Rta.: 90 y 150

8. Determinen los ángulos de un paralelogramo, que tiene la propiedad de que dos ángulos consecutivos difieren en 20°.

Rta.: 80° y 100°

9. Cuando se agrega un disco duro a una computadora personal, el sistema nuevo cuesta $U\$S\,2325$. Se sabe que $\frac{1}{3}$ del valor de la computadora más $\frac{1}{5}$ del valor del disco duro dan un total de $U\$S\,745$. ¿Cuál es el costo del disco duro?

10. Una compañía médica produce dos tipos de válvulas para el corazón; la estándar y la de lujo. Para hacer una válvula estándar son necesarios 5 minutos en el tomo y 10 en la prensa taladradora; para la válvula de lujo son necesarios 9 minutos en el torno y 15 en la prensa. Cierto día el torno estará disponible 4 horas y la prensa 7 horas. ¿ Cuántas válvulas de cada tipo deben hacerse para utilizar las dos máquinas todo el tiempo posible?

Rta.: 20 de lujo y 12 estándar.

11. Los precios por unidad de dos sustancias son \$6 y \$10. Averiguar que cantidad de cada sustancia debe mezclarse para obtener 50 unidades de mezcla a $\$7,60$ cada una.

Rta.: 30 y 20 unidades.

12. El día del parcial de Matemática se había previsto usar un cierto número de aulas. Al repartir 35 alumnos por aula quedaron 28 alumnos sin asiento. Entonces se ubicaron 38 alumnos en cada aula y quedaron 2 bancos libres. ¿Cuántos alumnos se presentaron al examen y cuántas aulas se utilizaron?

Rta.: 378 alumnos y 10 aulas.

13. Dado el sistema:

$$\begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -5 \\ x - y + (\alpha + 2)z = 2\alpha - 2 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

   a) Calculen α suponiendo que $(3, 9, 2)$ satisface el sistema.

   Rta.: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   b) Resuelvan el sistema para $\alpha = 0$

   Rta.: $\{(3, 9, 2)\}$ (obvio...).

14. Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2kx - 3y + z = 7 \\ -x + ky - 3z = 0 \\ 9x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

a) Calculen k suponiendo que $(1, 2, 3)$ satisface el sistema.

Rta.: $k = 5$

b) Resuelvan, el sistema para $k = 2$

Rta.:$\left\{\left(\frac{21}{25}, -\frac{42}{25}, -\frac{7}{5}\right)\right\}$

15. En algunas aplicaciones electrónicas es necesario analizar el valor de la corriente a través de ciertas trayectorias de un circuito. El estudio de tres circuitos A, B y C arroja los siguientes resultados:

$$\begin{cases} I_A - I_B - 2I_C = 1 \\ -I_A + 2I_B - 4I_C = 0 \\ -2I_A - 4I_B + 3I_C = 1 \end{cases}$$

Donde I_A, I_B, I_c representan las corrientes de las ramas A, B y C respectivamente. Determinen las corrientes de cada rama.

Rta.: $I_A = \frac{2}{37}, I_B = -\frac{17}{37}, I_C = -\frac{9}{37}$

16. En fisica se estudian las fuerzas que actúan sobre un objeto. En el caso de tres fuerzas F_1, F_2, F_3 que actúan sobre una viga, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 3F_1 + F_2 - F_3 = 2 \\ F_1 - 2F_2 + F_3 = 0 \\ 4F_1 - F_2 + F_3 = 3 \end{cases}$$

Calculen las fuerzas

Rta.: $F_1 = \frac{5}{7}, F_2 = \frac{6}{7}, F_3 = 1$

17. Dispone de tres tipos de fertilizantes con las composiciones indicadas en la siguiente tabla:

TIPO	FOSFATO	POTASIO	NITRÓGENO
A	10 %	30 %	60 %
B	20 %	40 %	40 %
C	20 %	30 %	50 %

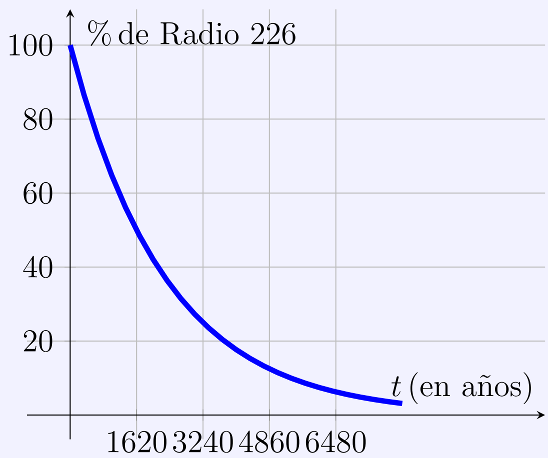
Un análisis de suelo muestra que los requerimientos de fertilizante para un determinado campo son 19 % de fosfato, 34 % de potasio y 47 % de nitrógeno. ¿ Puede obtener la mezcla correcta utilizando los tres tipos? Si es asi, ¿Cuántos kilogramos de cada uno deben mezclarse para obtener 100 kg. de la calidad deseada?

Rta.: A : 10 kg, B : 40 kg, C : 50 kg

5. Exponenciales y Logarítmicas

Problema

La semivida de un isótopo radioactivo es el tiempo necesario para que desintegre el 50 % de los átomos de una determinada muestra, es decir, el tiempo que tarda una muestra radioactiva en reducirse a su mitad. Por ejemplo el Carbono 14 tiene una semivida de 5730 años, mientras que la del Radio 226 es de 1620 años.
El siguiente diagrama muestra la curva de desintegración radioactiva del Radio 226:



1. ¿Qué porcentaje de la muestra queda luego de 4860 años?
2. ¿Cuántos años son necesarios para que la muestra se reduzca en un 75 %?
3. En un laboratorio tienen una muestra de Radio 226. Escriban una función que nos da el porcentaje de Radio que queda en la muestra en función del tiempo.
4. ¿Cuántos años son necesarios para que quede un 1 % de la muestra original?

5.1. Función exponencial

Definición

Se llama *función exponencial* a toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = a^x \quad \text{donde } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

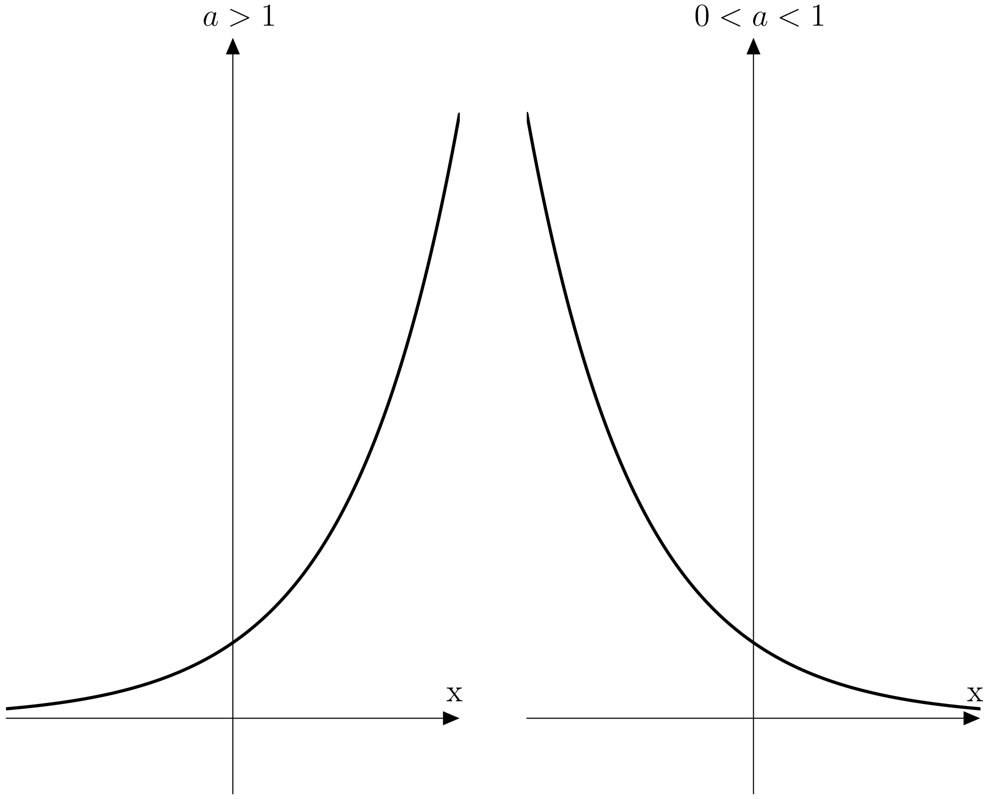
El número real a se conoce como *base* de la función exponencial.

Observación 5.1 *La primera de las restricciones anteriores, $a > 0$, es necesaria para que el dominio de la función sea todo $\mathbb{R}$ y de esta forma resulte apropiada para modelar fenómenos reales. Si la base fuese negativa, deberíamos excluir del dominio todos los números racionales representados mediante fracciones con denominador par, ya que, por ejemplo, $a^{1/2} = \sqrt{a}$ y no está definida en $\mathbb{R}$ la raíz cuadrada de un número negativo. Similarmente, tampoco estarían definidos los valores de $a^{1/4} = \sqrt[4]{a}; a^{1/6} = \sqrt[6]{a}$, etc. Si bien la justificación es más compleja, tampoco sería posible que la variable independiente tome valores irracionales.*

La condición $a \neq 1$ es simplemente para descartar el caso $f(x) = 1^x = 1$, en el cual la función es constante.

Básicamente, encontramos dos clases de funciones exponenciales:

1. Cuando $a > 1$,
2. Cuando $0 < a < 1$.



Notemos algunas características de las funciones exponenciales:

1. Sus gráficas están por arriba del eje de abscisas (eje x). Es decir, los valores que toma la función exponencial son siempre positivos. Luego, $Im(f) = \mathbb{R}^+$
2. Cortan al eje de ordenadas (eje y) en el punto $(0; 1)$, ya que $a^0 = 1$ cualquiera sea la base a.
3. Cuando la $a > 1$ la función es estrictamente creciente y cuando $0 < a < 1$, es estrictamente decreciente.
4. En todos los casos, las funciones exponenciales son funciones que a puntos diferentes del dominio les asignan imágenes distintas ente sí.

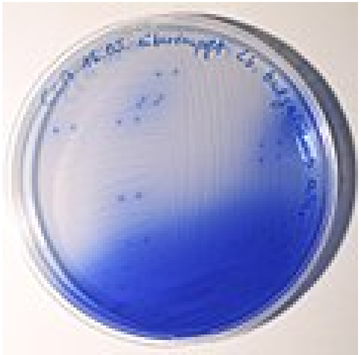
5. Es posible dar una forma un poco más general de las funciones exponenciales:

$$f(x) = m \cdot a^x$$

donde a es la base de la función exponencial y m es un parámetro que nos indica la intersección de la curva con el eje de ordenadas, ya que $f(0) = m \cdot a^0 = m \cdot 1 = m$. En particular, si se trata de modelar un fenómeno exponencial dependiente del tiempo, m nos indica el valor inicial (para $t = 0$) de la función.

Ejemplo 5.1 *En microbiología, las placas de Petri se utilizan para estudiar el comportamiento de microorganismos, cultivar bacterias, etc. Se trata de un recipiente redondo, de vidrio, que es posible cerrar y fue diseñado a fines del siglo XIX por el biólogo alemán Julius Petri.*

Supongamos que en una placa como la de la derecha, se colocan 100 *bacterias y se sabe que el cultivo se duplica cada una hora.*



1. *¿Cuántas bacterias se tienen al cabo de 5 horas?*
2. *¿Y al cabo de* 7 *horas y* 30 *minutos?*
3. *¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la población del cultivo sea de 200.000 bacterias?*

El número de bacterias que hay en la colonia, depende (en nuestro modelo) del tiempo que transcurre desde el momento en que comienza el experimento. Como en gran parte de los modelos poblacionales, en una primera etapa el crecimiento es exponencial. Para responder la primera pregunta, es posible realizar una tabla:

Tiempo (en horas)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de bacterias	100	200	400	800	1600	3200

Por lo tanto, en cinco horas el número de bacterias será igual a 3200. *Si bien con la tabla pudimos resolver la primera parte del ejemplo, no es posible utilizarla para las otras dos preguntas. Más aún, no sería práctica si quisiéramos conocer la población luego de tres días de comenzado el experimento.*

Teniendo en cuenta que la población inicial asciende a 100 *unidades* (m) *y la población se duplica (esto es la base de la función es* $a = 2$*) cada hora, resulta que*

$$P(t) = 100 \cdot 2^t$$

donde P *indica en número de bacterias y* t *el tiempo en horas.*

Utilizando la fórmula anterior, obtenemos, por ejemplo, que

$$P(5) = 100 \cdot 2^5 = 100 \cdot 32 = 3200$$

es decir, que a las cinco horas la población es de tres mil doscientas bacterias.
También podemos calcular la población en cualquier instante, en particular a las 7 *horas y media:*

$$P(7{,}5) = 100 \cdot 2^{7{,}5} \approx 18102$$

(aproximadamente 18102 *bacterias.)*
La tercer pregunta no la podemos responder con la misma facilidad. En este caso debemos determinar para qué valor de t la población es igual 200000*. Debemos resolver la ecuación*

$$200000 = 100 \cdot 2^t$$

Se trata de una ecuación exponencial. Para resolverla, deberíamos ''despejar''t (suponiendo que esto fuese posible). El problema está relacionado con la posibilidad de que exista una función que a cada instante t le asigne como imagen la población $P(t)$ correspondiente. Esta función se conoce como ***función inversa de P.***

5.2. Inversa de una función

Definición

Dada una función $f : A \to B$ se dice que $g : B \to A$ es la *función inversa* de f sí y sólo si se cumple que:

$$\text{si } f(a) = b \text{ entonces } g(b) = a \quad (\text{para toda } a \in A)$$

es decir si f asigna a un elemento a de su dominio el elemento b de su codominio, entonces g le asigna como imagen de dicho b, el elemento a.

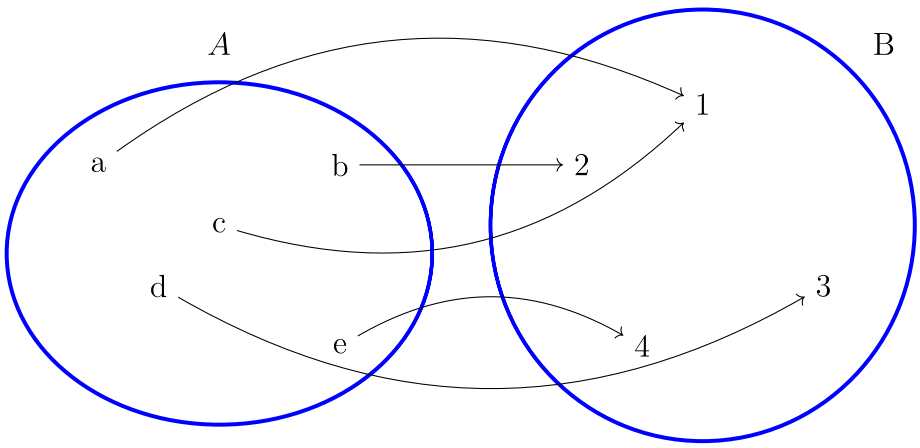
Para denotar que g es la inversa de f, escribimos:

$$g = f^{-1}$$

Observen que si g es la inversa de f también resulta que f es la inversa de g.

Veamos algunos ejemplos:

1. Sea $f : \{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ tal que:

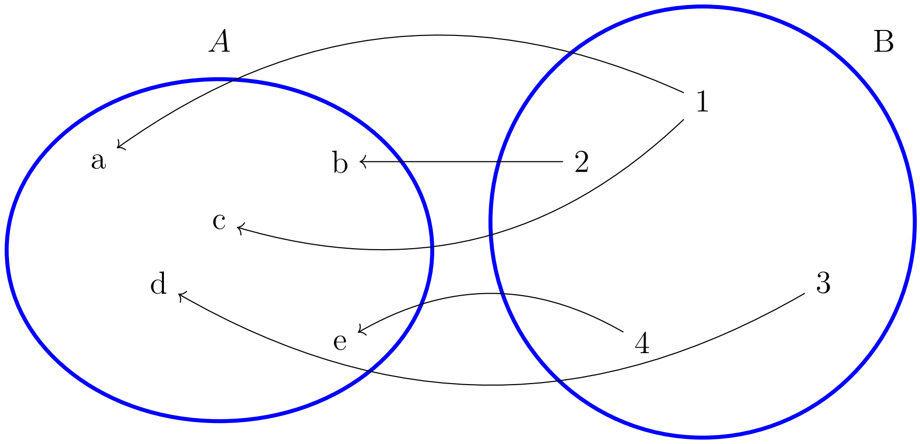


f

f no tiene función inversa ya que la correspondencia

$$g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d, e\}$$

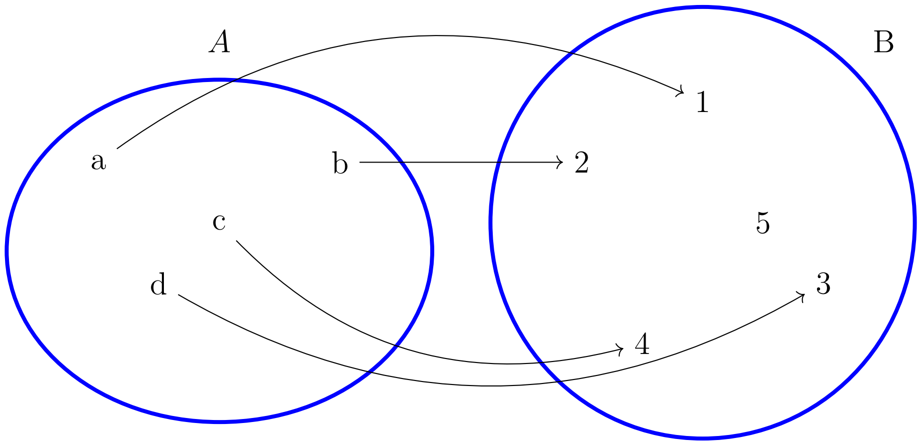
no es función pues $g(1) = a$ y también $g(1) = c$ es decir el 1 tiene dos imágenes a través de g.



g

Por lo tanto como g no es función, f no admite función inversa, o equivalentemente, no es inversible.

2. Consideremos ahora la función $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que:



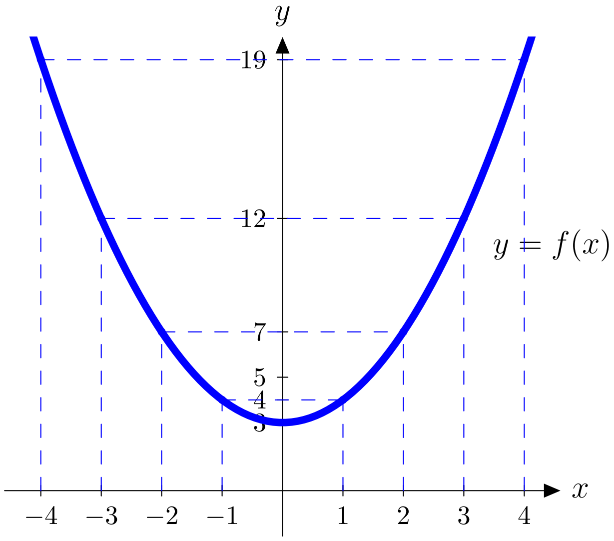
f

f no tiene función inversa ya que en la correspondencia

$$g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c, d\}$$

no es función pues no existe $g(5)$ es decir el 5 no tiene imagen a través de g. Por lo tanto como g no es función, f no admite función inversa.

3. Consideremos ahora la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 3$



> Así definida, f no es inversible, pues puntos distintos del dominio tienen la misma imagen. Por ejemplo, $f(1) = 4$ y $f(-1) = 4$, con lo cual la relación inversa, llamémosla g, debe asignar al 4 dos imágenes: el -1 y el 1, y por ende no es una función ya que a un mismo punto le asigna dos imágenes. Por otra parte tampoco es cierto que todo elemento del dominio de g tenga imagen por ejemplo no existe $g(0)$ ya que el 0 no pertenece a la imagen de f.

Los ejemplos anteriores nos muestran que no todas las funciones admiten función inversa. Para que una función sea inversible se deben satisfacer ciertas condiciones. Estos requerimientos nos conducen a dar las siguientes definiciones:

Definición (inyectividad)

Decimos que una función $f : A \to B$ es *inyectiva* si

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$

para toda x_1 y x_2 perteneciente a A (dominio de f).

Las funciones de los ejemplos 1 y 3 no son inyectivas pues hay elementos diferentes del dominio que tienen la misma imagen.

Definición (sobreyectividad)

Decimos que una función $f : A \to B$ es *sobreyectiva* si su codominio es igual a su conjunto imagen. Es decir

$$B = Im(f)$$

Las funciones de los ejemplos 2 y 3 no son sobreyectivas pues hay elementos del codominio que no son imágenes de ningún elemento del dominio.
En el caso del segundo ejemplo, $Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$ mientras que su codominio es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

En el ejemplo 3 el codominio es $\mathbb{R}$ y la imagen de f es el $[3; +\infty]$.

Observemos que si en el tercer ejemplo hubiésemos definido

$$f : \mathbb{R} \to [3; +\infty]/f(x) = x^2 + 3$$

la función sería sobreyectiva, aunque seguiría sin ser inyectiva.

Finalmente,

Definición (biyectividad)

Decimos que una función $f : A \to B$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Para que una función sea inversible es necesario que sea inyectiva y sobreyectiva. La inyectividad nos garantiza que en la correspondencia inversa no haya elementos con más de una imagen, mientras que la sobreyectividad garantiza la existencia de imágenes para todos los elementos del dominio de la relación inversa.

De esta forma tenemos el siguiente importante resultado:

Teorema

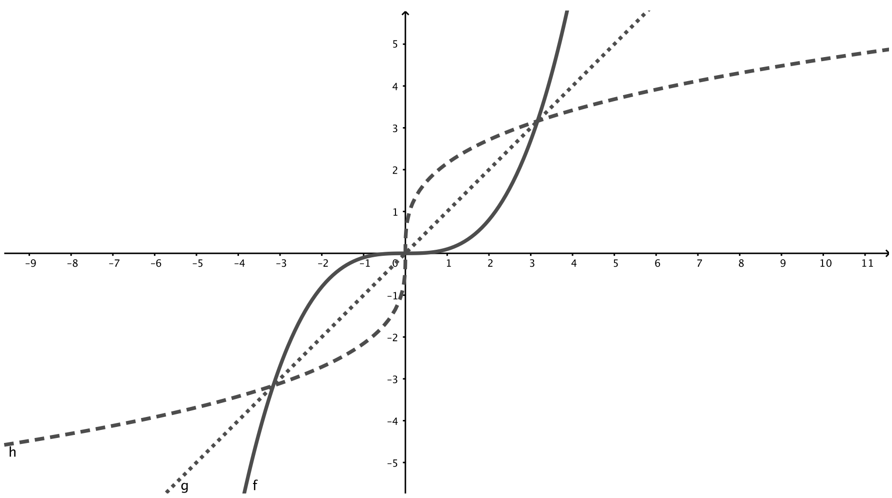
Una función f es inversible sí y sólo si es biyectiva.

Una propiedad muy útil que relaciona la gráfica de una función y la de su inversa, es la siguiente:

Propiedad

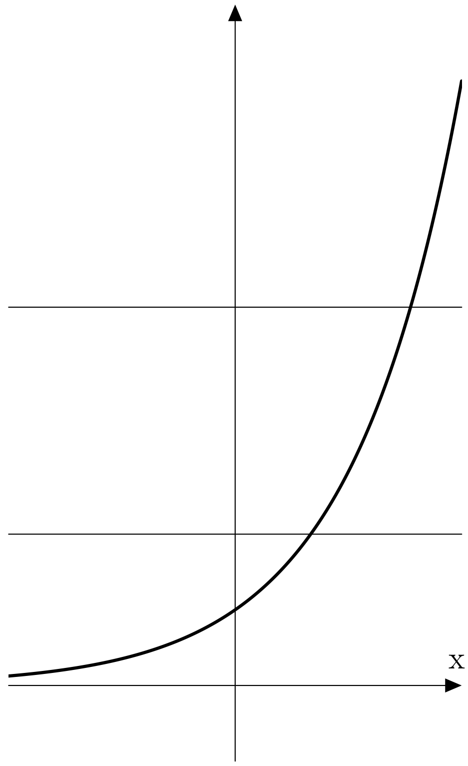
Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ es una función inversible, entonces las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

El siguiente gráfico muestra las gráficas de una función f y su inversa h. Sus gráficas son simétricas respectos de la recta $y = x$.



5.3. Funciones logarítmicas

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / f(x) = a^x$ con $a > 1$:



Como el conjunto imagen es $\mathbb{R}^+$, la función es sobreyectiva. Por otra parte, puntos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes. Esto puede observarse en la gráfica de f imaginando que trazamos rectas horizontales por cada uno de los infinitos puntos de su conjunto imagen. Cada una de estas rectas corta a la gráfica de f en un sólo punto, lo cual nos indica que es inyectiva (si alguna de estas rectas horizontales cortara a la función en dos puntos diferentes, habríamos encontrado dos elementos distintos del dominio con igual imagen). Algo similar ocurre cuando la base, a, está entre 0 y 1. Por lo tanto las funciones exponenciales son biyectivas y en consecuencia, admiten función inversa.

Definición (función logarítmica)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ a la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $g = f^{-1}$, se la denomina *función logarítmica en base a*.

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} / g(x) = \log_a(x)$$

Muy probablemente en la escuela secundaria hayan dicho que el logaritmo en base a de un número positivo x es un número real y sí y sólo si $a^y = x$. En símbolos,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Esta definición simplemente nos dice de otra forma que las funciones logarítmicas y exponenciales son funciones inversas.

5.3.1. Propiedades.

Las siguientes propiedades se deducen de la definición anterior. En todos los casos se supone que $a > 0$, $a \neq 1$, y $x, y > 0$:

1. $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$
2. $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$
3. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
4. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
5. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
6. $a^{\log_a x} = x$

Estas propiedades son de suma utilidad para la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

5.3.2. Dos logaritmos importantes: log y ln.

Hemos visto que cualquier número positivo distinto de 1 puede tomarse como base de un logaritmo. Sin embargo, en la práctica se utilizan fundamentalmente el logaritmo en base 10 y el logaritmo en base **e**. Ambos logaritmos son los que tradicionalmente están programados en las calculadoras científicas.

El logaritmo en base 10 es cómodo porque nuestro sistema de numeración es decimal mientras que el logaritmo en base **e**, también conocido como *logaritmo natural o neperiano*, es importante por sus propiedades en el Análisis Matemático. El número **e**, o número de Euler, es un número irracional, como π, vinculado con importantes problemas del Análisis, Cálculo de Probabilidades, y de la Matemática Aplicada, entre otras ramas de la Matemática.

Sus primeros dígitos son:

$$\mathrm{e} = 2,7182818284...$$

Notación:

Como es habitual, utilizaremos las siguientes notaciones:

$$\log \quad \text{para denotar al} \quad \log_{10} \quad \text{(logaritmo en base10)}$$

$$\ln \quad \text{para denotar al} \quad \log_{\mathrm{e}} \quad \text{(logaritmo natural)}$$

5.3.3. Cambio de base

Es posible restringirse a muy pocos logaritmos (también es importante el logaritmo en base 2, por su relación con el sistema binario propio de la computación) o incluso a uno (el neperiano) porque es posible expresar el logaritmo en una determinada base en función de otra.

La siguiente fórmula nos permite pasar de la base b a la base a:

$$\boxed{\log_b x = \frac{log_a x}{\log_a b}}$$

Demostración: Sea $y = \log_b x$. Aplicando la definición de logaritmo,

$$x = b^y$$

Tomando logaritmo en base a en ambos miembros de la igualdad anterior,

$$\log_a x = \log_a b^y$$

Por la propiedad 5 de 5.3.1,

$$\log_a x = y \cdot \log_a b$$

Como $b \neq 1$ y por lo tanto $\log_a b \neq 0$, dividimos por $\log_a b$, resultando que

$$\frac{\log_a x}{\log_a b} = y$$

pero como $y = \log_b x$, resulta la fórmula para el cambio de base:

$$\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$$

$\square$

Ejemplo 5.2 *Utilizando las propiedades de la sección 5.3.1, vamos a calcular el* $\log_4 32$.

Es conveniente recordar que estamos tratando de determinar a qué número hay que elevar el 4 *para que el resultado sea* 32. *Como* $4^2 = 16$ *y* $4^3 = 64$, *sabemos que el resultado debe ser un número comprendido entre* 2 *y* 3. *Por otra parte, como tanto el* 4 *como el* 32 *son potencias de* 2 *va a ser conveniente trabajar en base* 2.

Utilizando la fórmula para el cambio de base:

$$\log_4 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^2} = \frac{5\log_2 2}{2\log_2 2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Por supuesto, utilizando la calculadora,

$$\log_4 32 = \frac{\ln 32}{\ln 4} = 2,5$$

Ejemplo 5.3 *Retomando el problema del ejemplo 5.1, para contestar la tercera pregunta, debemos resolver la ecuación*

$$200000 = 100 \cdot 2^t$$

Para ello vamos a utilizar las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} 200000 &= 100 \cdot 2^t \\ 2000 &= 2^t \\ \log_2 2000 &= \log_2 2^t \\ \log_2 2000 &= t \cdot \log_2 2 \\ \log_2 2000 &= t \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\ln 2000}{\ln 2} \approx 10{,}97$$

Luego, se requieren casi 11 *horas para que el cultivo contenga* 200000 *bacterias.*

5.4. ¿Cómo encontrar la inversa de una función?

Hemos visto que si una función es inyectiva y sobreyectiva, entonces tiene inversa. Si $y = f(x)$ es biyectiva entonces para encontrar la inversa debemos escribir la variable x en función de y, siempre y cuando esto sea posible.

Utilicemos nuevamente el ejemplo 5.1 para plantear esta cuestión. Recordemos que la población P del cultivo depende del tiempo t transcurrido desde el momento en que se inició la experiencia. Más aún, la relación está dada por la expresión

$$P = 100 \cdot 2^t$$

Como se trata de una función biyectiva, entonces es inversible. Para encontrar la inversa debemos ''despejar"t:

$$P = 100 \cdot 2^t \Leftrightarrow \frac{P}{100} = 2^t \Leftrightarrow \ln\left(\frac{P}{100}\right) = \ln 2^t \Leftrightarrow \ln\left(\frac{P}{100}\right) = t \ln 2$$

de donde

$$t = \frac{\ln\left(\frac{P}{100}\right)}{\ln 2}$$

Esta última expresión, para cada posible población nos da el instante en que dicha cantidad será alcanzada. Desde el punto de vista funcional, es la inversa de la función original.

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 5.4 *Determinen la inversa de la función* $f(x) = e^{x-6} + 4$.

En primer lugar notemos que el dominio de f *es igual al conjunto de los números reales, ya que en las funciones exponenciales la variable independiente puede tomar cualquier valor. por otra parte, como para los distintos* x*, los valores que toma* e^{x-6} *es siempre mayor que* 0*, resulta que* $e^{x-6} + 4$ *debe ser siempre mayor que* 4*. Luego el conjunto imagen de* f *es el intervalo* $(4; +\infty)$*. Por lo tanto, definiendo*

$$f : \mathbb{R} \to (4; +\infty)/f(x) = e^{x-6} + 4$$

resulta biyectiva.

Para encontrar la inversa de f*, planteamos* $y = e^{x-6} + 4$ *y despejamos* x*:*

$$y = e^{x-6} + 4 \Leftrightarrow y - 4 = e^{x-6} \Leftrightarrow \ln(y-4) = x - 6 \Leftrightarrow 6 + \ln(y-4) = x$$

Por lo tanto $g(y) = 6 + \ln(y-4)$ *es la inversa de* f*. Como* $f : \mathbb{R} \to (4; +\infty)$ *su inversa* $g : (4; +\infty) \to \mathbb{R}$*. De hecho* $y - 4$ *debe ser mayor que* 0 *ya que los logaritmos se aplican a números positivos.*

Cuando no estamos trabajando en aplicaciones, podemos cambiar el nombre de las variables y escribir g (o en realidad f^{-1}) en función de x. Esto es conveniente para poder graficar en un mismo sistema las dos funciones f y su inversa f^{-1}.

Así nos queda:

$$f^{-1} : (4; +\infty) \to \mathbb{R} / f^{-1}(x) = 6 + \ln(x - 4)$$

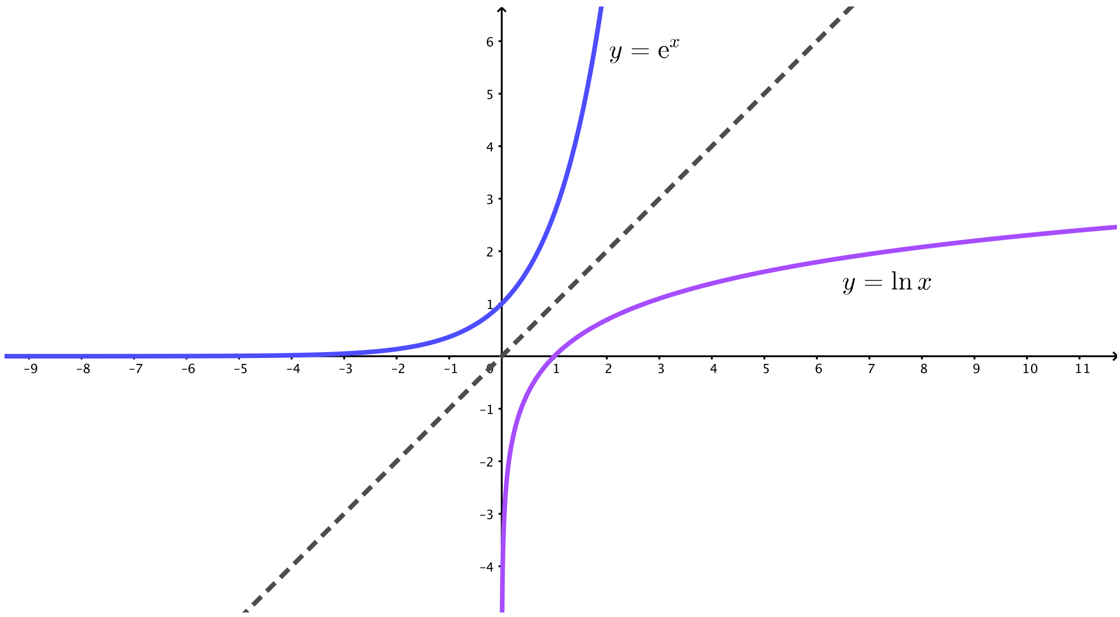
5.5. Las funciones $f(x) = \mathrm{e}^x$ y $g(x) = \ln x$

Al comienzo de la unidad vimos que existen dos clases de funciones exponenciales, las que tienen base mayor que 1 y las que tienen base entre 0 y 1. Las primeras son estrictamente crecientes y las segundas estrictamente decrecientes. Como $f(x) = \mathrm{e}^x$ tiene como base al número **e** y dicha constante es mayor que 1 ($\mathrm{e} \approx 2,718$), se trata de una función estrictamente creciente. Sabemos que las funciones exponenciales tienen imágenes positivas y en el caso en que la base es mayor que 1 es posible probar que a medida que la variable independiente *toma valores cada vez más chicos*, es decir, valores negativos cuyos módulos son *cada vez más grandes*, las imágenes son más próximas a cero. Esto lo vamos a indicar escribiendo que

$$\mathrm{e}^x \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Podemos expresar este hecho diciendo que la función exponencial $f(x) = \mathrm{e}^x$ tiene una *asíntota horizontal* para x tendiendo a *menos infinito*.

Por otra parte, teniendo en cuenta que $f(x) = \mathrm{e}^x$ y $g(x) = \ln x$ son funciones inversas entre sí, a partir del gráfico de la exponencial podemos obtener por simetría el gráfico del logaritmo natural:



Podemos observar que por la simetría, la asíntota horizontal de la función exponencial se transforma en una asíntota vertical en la logarítmica. Por otra parte, por ser inversas, el dominio de $f(x) = \mathrm{e}^x$ es la imagen de $g(x) = \ln x$, mientas que la imagen de f es el dominio del logaritmo.

Resumiendo, tenemos la siguiente información sobre el logaritmo natural (en realidad sobre cualquier logarítmica con base mayor que 1):

1. El dominio de $g(x) = \ln x$ es $\mathbb{R}^+$.
2. Su conjunto imagen es $\mathbb{R}$.
3. Es estrictamente creciente.
4. La recta $x = 0$ (el eje de ordenadas) es asíntota vertical de g.
5. $g(x) = \ln x$ corta al eje de abscisas en $x = 1$.

5.6. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Una ecuación exponencial es una ecuación donde la incógnita aparece únicamente como exponente de una o más potencias. Por ejemplo,

$$3^{2x-1} = \frac{1}{9}$$

En este caso, podemos abordar la ecuación desde distintas estrategias. Por ejemplo:

1. Cuando sea posible, utilizando propiedades de la potenciación, vamos a tratar de escribir una igualdad entre dos potencias de igual base:

   $$3^{2x-1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^{-2}$$

   Para que la segunda igualdad sea verdadera, como las bases son iguales, los exponentes también deben ser iguales. Por lo tanto:

   $$2x - 1 = -2$$

   de donde $x = -\frac{1}{2}$.

2. Esta ecuación también puede resolverse utilizando logaritmos. Aplicando logaritmos en base 3 en ambos miembros de la igualdad, resulta

   $$3^{2x-1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 3^{2x-1} = \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow (2x-1)\log_3 3 = \log_3 1 - \log_3 9$$

   $$\Leftrightarrow (2x-1) = 0 - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 5.5 *Resuelvan la siguiente ecuación:* $2^{x+2} + 2^x = 640$.

En esta ecuación no podemos aplicar logaritmos porque en el miembro izquierdo de la igualdad tenemos una suma y no existen propiedades sobre el logaritmo de una suma. Sin embargo, aprovechando las propiedades de la potenciación podemos escribir la ecuación de manera conveniente:

$$\begin{aligned} 2^{x+2} + 2^x &= 640 \\ 2^x \cdot 2^2 + 2^x &= 640 \\ 4 \cdot 2^x + 2^x &= 640 \\ 5 \cdot 2^x &= 640 \\ 2^x &= 128 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6 *Determinen el o los valores de x que satisfacen la siguiente igualdad:*

$$4^x - 2^x + 1 = 2^{1+x} - 1$$

Mediante propiedades de la potenciación, podemos simplificar un poco la ecuación original:

$$4^x - 2^x + 1 = 2^{1+x} - 1 \Leftrightarrow 4^x - 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x - 1$$

e igualando a 0, nos queda

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

El problema de esta última igualdad es que aparecen dos bases diferentes 2 y 4. Como 4 es una potencia de 2 podemos escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Sustituyendo por $z = 2^x$, la ecuación se convierte en una cuadrática en z:

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

cuyas soluciones son $z = 1$ y $z = 2$. Como $z = 2^x$ tenemos finalmente las ecuaciones $2^x = 1$ y $2^x = 2$, de donde x puede valer 0 o 1.

Ejemplo 5.7 *La Ley de Beer-Lambert nos permite determinar la cantidad de luz I que penetra a una profundidad de m metros en un océano, estableciendo que dicha cantidad está dada por*

$$I = I_0 \cdot c^m \tag{5.1}$$

donde I_0 es la cantidad de luz en la superficie y c es una constante entre 0 y 1 (¿por qué debe estar entre estos valores?). Se sabe que cuando la intensidad de la luz es inferior a un 1 % de la que ha penetrado desde la superficie, la luz no es suficiente para sea posible la fotosíntesis. Este nivel se conoce como profundidad eufótica. Se quiere determinar este nivel suponiendo que $c = 0,4$.

Resolución: *Tomando $I = 0,01 I_0$ y reemplazando en la ecuación (5.1), resulta*

$$0,01 I_0 = I_0 \cdot (0,4)^m$$

Cancelando los I_0, que no puede valer 0 (¿por qué?)

$$0,01 = (0,4)^m$$

y aplicando logaritmos

$$\ln 0,01 = \ln(0,4)^m \Leftrightarrow \ln 0,01 = m \cdot \ln(0,4) \Leftrightarrow m = \frac{\ln 0,01}{\ln 0,4} \Leftrightarrow m \approx 5$$

Para $c = 0,4$, la fotosíntesis no es posible a más de 5 metros.

Ejemplo 5.8 *Encuentren las soluciones de la ecuación*

$$\log_6 x + \log_6(x+5) = 2$$

Muchas ecuaciones logarítmicas se resuelven cuando llegamos a la igualdad entre dos logaritmos de igual base, pues

$$\text{si } \log_a f(x) = \log_a g(x) \text{ entonces debe ocurrir que } f(x) = g(x)$$

o bien, cuando podemos transformar la ecuación en una donde resulte un logaritmo igualada a un número real:

$$\log_a f(x) = k$$

donde podemos continuar aplicando la definición de logaritmo.

Este es el caso de la ecuación de nuestro ejemplo. Aplicando propiedades de los logaritmos y su definición

$$\log_6 x + \log_6(x+5) = 2 \Leftrightarrow \log_6(x(x+5)) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 6^2 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$$

Las soluciones de la última ecuación cuadrática son $x = 4$ y $x = -9$. Sin embargo, estas dos no necesariamente son soluciones de la ecuación original. De hecho debemos descartar $x = -9$ ya que al reemplazar dicho valor en la ecuación original nos quedarían logaritmos de números negativos. Por lo tanto la única solución de nuestra ecuación es $x = 4$.

IMPORTANTE: No se olviden de verificar que las soluciones halladas, sean soluciones de la ecuación original.

5.7. EJERCICIOS

1. Calculen, si existen, los ceros de las siguientes funciones exponenciales de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   a) $f(x) = 2 \cdot 2^x - 4$

   Rta.: $x = 1$.

   b) $h(x) = 9^x - 3^x$

   Rta.: $x = 0$.

   c) $g(x) = 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8$

   Rta.: $x_1 = 1, x_2 = 2$.

2. Resuelvan las siguientes ecuaciones logarítmicas:

   a) $\log[5 - 4\log(x+2)] = 0$

   Rta.: $S = \{8\}$.

   b) $\log\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log\frac{1}{2} - \log x$

   Rta.: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

   c) $\log 8 + (x^2 - 5x + 7)\log 3 = \log 24$

   Rta.: $S = \{2, 3\}$.

   d) $\log(2x) = 2\,\log(4x - 15)$

   Rta.: $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$.

e) $x^{\log x} = 100\, x$

Rta.: $S = \left\{\frac{1}{10},\, 100\right\}$.

3. Determinen el dominio y los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(x-2) + \log x - \log 8$

Rta.: $D = (2, +\infty) \quad C_0 = \{4\}$.

b) $h(x) = \log\left(2x^2 + 7x + 3\right)$

Rta.: $D = (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad C_0 = \{\frac{-7\pm\sqrt{33}}{4}\}$.

c) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$

Rta.: $D = (1, +\infty) \quad C_0 = \emptyset$.

d) $s(x) = \frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$

Rta.: $D = \mathrm{R} - \{0, 1\} \quad C_0 = \emptyset$.

e) $t(x) = \sqrt{\ln\left(e^{2x} - 1\right)}$

Rta.: $D = [\ln\sqrt{2}, +\infty) \quad C_0 = \{\ln\sqrt{2}\}$.

4. Determinen dominio e imagen de las siguientes funciones de forma tal que sean invertibles, luego determinen dicha función inversa.

a) $f(x) = 3^{2x-1}$

Rta.: $Dom\, f = \mathbb{R} \quad Im\, f = \mathbb{R}^+ \quad f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} / f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_3 x$.

b) $f(x) = \ln(x-1) - 2$

Rta.: $Dom\, f = (1, +\infty) \quad Im\, f = \mathbb{R} \quad f^{-1} : \mathbb{R} \to (1, +\infty) / f^{-1}(x) = 1 + e^{x+2}$.

c) $f(x) = \frac{x-3}{3-2x}$

Rta.: $Dom\, f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \quad Im\, f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} / f^{-1}(x) = \frac{3x+3}{2x+1}$.

d) $f(x) = x^2 - 4$

Rta.: $Dom\, f = [0, +\infty) \quad Im\, f = [-4, +\infty) \quad f^{-1} : [-4, +\infty) \to [0, +\infty) / f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$.

5. Cierto elemento radioactivo tiene vida media de 1690 años. Empezando con 30 miligramos habrá $q(t)$ miligramos después de t años, donde $q(t) = 30\left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$ (Se conoce como vida media al tiempo requerido para que desaparezca la mitad de una sustancia)

a) Determinen la constante k.

b) ¿Cuántos miligramos del elemento radioactivo quedarán después de 2500 años?

Rta.: a) $k = \frac{1}{1690} \approx 0,0005917$
b) $m \approx 10,76$ mg.

6. Determinen el valor real de x que satisface la ecuación:

$$2\log(\log x) = \log(3\log x + 2) - \log 2 \qquad \text{Rta.: } x = 100$$

Rta.: $x = 100$.

7. Determinen el conjunto solución de:

$$e^{3x+2} + 3e^{6x+2} = 4e^2$$

Rta.: $S = \{0\}$.

8. Determinen los valores reales de x que satisfacen la ecuación:

$$x^{\frac{1}{2}\log_2 x} = 16x$$

Rta.: $x = 16$, $x = \frac{1}{4}$.

6. Otras funciones elementales.

Problema

Un tanque contiene 1000 litros de agua pura. En un determinado momento, se le incorpora agua salada que contiene $0,05$ kilogramos de sal por litro de agua, a una razón de 5 litros por minuto.

1. ¿Qué cantidad de sal hay en la solución a los 10 minutos?
2. ¿Qué cantidad de sal hay en la solución a los t minutos?
3. ¿Qué tipo de función es la que proporciona la cantidad S de sal en la solución, en función del tiempo t?
4. ¿Cuál es la concentración de sal en la solución al minuto de comenzar este proceso?
5. ¿Y a los diez minutos?
6. Escriban una fórmula que permita determinar la concentración C de la sal en la solución a los t minutos de comenzada la experiencia.
7. Suponiendo que la capacidad del tanque fuese ilimitada, ¿cuál es el dominio de la función $C(t)$?
8. Multiplicando por 100 a la función $C(t)$, se obtiene la concentración porcentual, $P(t)$. Determinen si en algún momento el porcentaje de sal en el agua es del $2\,\%$. ¿Y del $10\,\%$?
9. Se sabe que el porcentaje de sal siempre será menor que un valor p. Determinen p.

6.1. Funciones homográficas

Se llama *función racional* a cualquier función de la forma

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R} / f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde p y q son polinomios.

En particular, las funciones polinómicas son funciones racionales donde su denominador, q, es un polinomio de grado 0.

Dentro de las funciones racionales, un caso particularmente importante es el de las funciones homográficas:

Definición

Se llama *función homográfica* a toda función de la forma

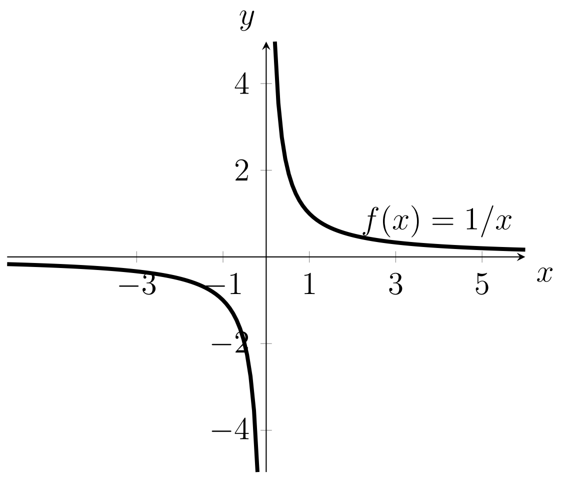
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{donde} \quad c \neq 0 \quad \text{y} \quad ad - bc \neq 0$$

El caso más elemental lo encontramos cuando $a = d = 0$ y $b = c = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Como el denominador no puede ser igual a 0, su dominio es:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$



La gráfica se conoce como *hipérbola* y tiene las siguientes características:

1. Cuando la variable independiente x, toma valores positivos cada vez más cercanos al 0, las imágenes son números positivos cada vez más grandes:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	$\cdots$
$f(x) = 1/x$	10	100	1000	10000	100000	1000000	$\cdots$

Diremos que la función *tiende a más infinito* cuando x *tiende a* 0 desde la derecha, o simbólicamente que

$$f(x) \to +\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+$$

Similarmente diremos que la función *tiende a menos infinito* cuando x *tiende a* 0 desde la izquierda. o simbólicamente que

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^-$$

Cuando una función tiene este comportamiento, decimos que tiene una *asíntota vertical*.

En este caso particular, la recta $x = 0$ es la asíntota vertical de $f(x) = \frac{1}{x}$.

2. También es interesante observar el comportamiento de la función cuando la variable independiente toma valores muy grandes. Puede verificarse que cuando x toma valores positivos cada vez mayores, las imágenes son cada vez más próximas a cero: Algo

x	10	100	1000	10000	100000	1000000	$\cdots$
$f(x) = 1/x$	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	$\cdots$

parecido ocurre cuando x toma valores negativos cada vez más chicos (o en valor absoluto cada vez más grande).

Diremos que la función tiende a 0, cuando x toma valores positivos cada vez mayores y negativos cada vez menores.
En símbolos,

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to +\infty$$

y

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Frente a este comportamiento vamos a decir que la recta $y = 0$ es *asíntota horizontal* de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Todas las funciones homográficas tienen características similares:

1. Sus gráficas son hipérbolas.

2. Presentan una asíntota vertical.

3. Presentan una asíntota horizontal.

En Análisis I van a demostrar que en una función homográfica

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

la asíntota horizontal es la recta de ecuación

$$\boxed{y = \frac{a}{c}}$$

y su asíntota vertical es

$$\boxed{x = -\frac{d}{c}}$$

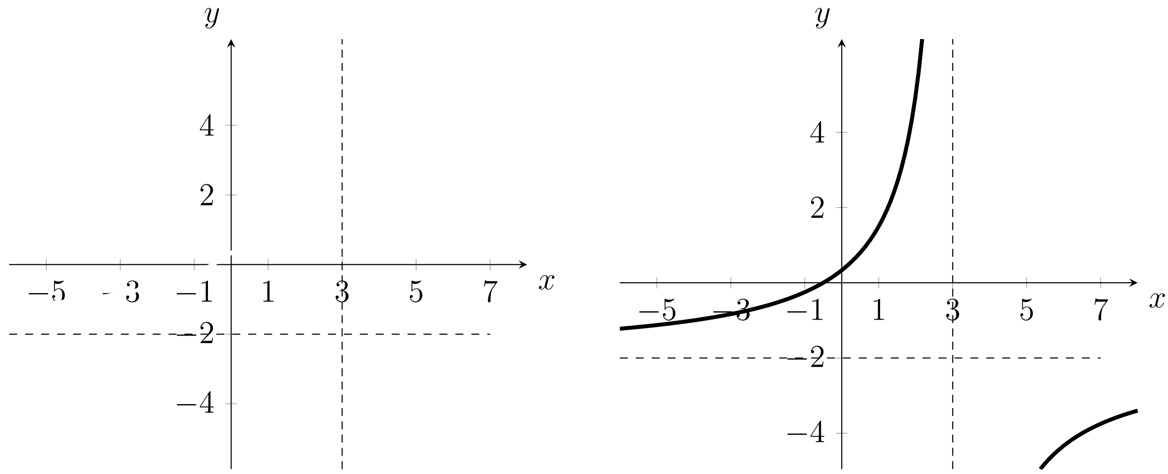
Ejemplo 6.1 *Grafiquen la función* $f(x) = \frac{2x+1}{-x+3}$.

En primer lugar, vamos a determinar el dominio de la función. Como no existe la división por 0*, debemos determinar cuándo el denominador el igual a* 0*:*

$$-x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = x$$

Por lo tanto, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Teniendo en cuenta que $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$ y $d = 3$, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales son, respectivamente, $y = -2$ y $x = 3$. En un sistema de ejes coordenados, graficamos estas dos rectas. Las asíntotas dividen al plano en cuatro nuevos cuadrantes. La gráfica de f es un hipérbola que ocupa dos cuadrantes opuestos de ellos cuatro. Luego determinamos un punto por el que pase la curva para saber qué cuadrantes ocupa. Por ejemplo, como $f(0) = 1/3$, pasa por el segundo (y por ende, también por el cuarto) cuadrante respecto de las asíntotas. Finalmente graficamos sus ramas:



Observemos las características fundamentales de f:

1. Su conjunto imagen es $Im(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$. Por lo tanto si la definimos
$$f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-2\}$$
la función es sobreyectiva.

2. La función también es inyectiva (imaginen que recorren todo el eje vertical con rectas horizontales: cortan a la gráfica a lo sumo una vez).

3. Como es biyectiva, entonces tiene inversa.

4. Interseca al eje y en el punto $(0; 1/3)$.

5. Interseca al eje x, en el punto $(-1/2; 0)$. En efecto,
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

6. Es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty; 3)$ y también en el intervalo $(3; +\infty)$.

Ejemplo 6.2 *Determinen la inversa de la función*
$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R} / f(x) = \frac{3x-2}{4x+1}$$
El dominio A de f, es el conjunto $\mathbb{R} - \{-1/4\}$ y su conjunto imagen, B, es $\mathbb{R} - \{3/4\}$, ya que su asíntota horizontal es la recta $y = 3/4$.
Para determinar la inversa de f, vamos a despejar x:
$$y = \frac{3x-2}{4x+1} \Leftrightarrow y \cdot (4x+1) = 3x - 2 \Leftrightarrow 4xy + y = 3x - 2$$

Agrupamos los términos que tienen x para luego sacarlo como factor común:

$$4xy - 3x = -y - 2 \Leftrightarrow x \cdot (4y - 3) = -y - 2 \Leftrightarrow x = \frac{-y-2}{4y-3}$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{-y-2}{4y-3}$$

Cambiando el nombre a la variable independiente, resulta

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{3/4\} \to \mathbb{R} - \{-1/4\} / f^{-1}(x) = \frac{-x-2}{4x-3}$$

Observemos que la inversa de una homográfica es también homográfica.

Ejemplo 6.3 *Determinen todos los valores de x para los cuales*

$$\frac{2x-1}{x+4} \leq 4$$

Vamos a resolver la inecuación analítica y gráficamente.

1. ***Resolución analítica (I)***
   En primer lugar observemos que $x \neq -4$, pues para ese valor no está definida la división pues se anula el denominador.

   Quisiéramos multiplicar ambos miembros por $x + 4$ (''pasar el" $x + 4$ multiplicando) para que se cancele el denominador de la fracción. Pero debemos tener cuidado porque puede tomar tanto valores negativos como positivos y, en caso de ser negativo, no se conserva el sentido de la desigualdad. Debemos considerar dos situaciones: $x + 4 > 0$ y $x + 4 < 0$.

   a) $x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$. *En este caso no cambia el sentido de la desigualdad.*

   $$\frac{2x-1}{x+4} \leq 4 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 4(x+4) \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 4x + 16 \Leftrightarrow -17 \leq 2x \Leftrightarrow -\frac{17}{2} \leq x$$

   Por lo tanto x debe pertenecer al intervalo $[-17/2; +\infty)$ y al mismo tiempo al intervalo $(-4; +\infty)$, es decir a su intersección:

   $$x \in [-17/2; +\infty) \cap (-4; +\infty) = (-4; +\infty)$$

   b) $x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -4$. *En este caso, al pasar multiplicando el denominador cambia el sentido de la desigualdad, pues estamos multiplicando por números negativos.*

   $$\frac{2x-1}{x+4} \leq 4 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 4(x+4) \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 4x + 16 \Leftrightarrow -17 \geq 2x \Leftrightarrow -\frac{17}{2} \geq x$$

   Por lo tanto x debe pertenecer al intervalo $(-\infty; -17/2]$ y al mismo tiempo al intervalo $(-\infty; -4)$, es decir a su intersección:

   $$x \in (-\infty; -17/2] \cap (-\infty; -4) = (-\infty; -17/2]$$

   De los resultados anteriores, $x \in (-4; +\infty)$ o bien $x \in (-\infty; -17/2]$. El conjunto solución es:

   $$S = (-\infty; -17/2] \cup (-4; +\infty)$$

2. ***Resolución analítica (II)***
Otra posibilidad es plantear la desigualdad a cero:

$$\frac{2x-1}{x+4} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+4} - 4 \leq 0$$

Efectuando la resta,

$$\frac{2x-1}{x+4} - 4 = \frac{(2x-1)-4(x+4)}{x+4} = \frac{2x-1-4x-16}{x+4} = \frac{-2x-17}{x+4}$$

Por lo tanto, la desigualdad original es equivalente a resolver

$$\frac{-2x-17}{x+4} \leq 0$$

Esto implica determinar para qué valores de x la fracción de la izquierda es negativa o nula. Pero una división es negativa cuando el numerador y denominador tienen signos diferentes. De allí surgen dos posibilidades:

a) $-2x-17 \geq 0$ *y* $x+4 < 0$, *o bien*

b) $-2x-17 \leq 0$ *y* $x+4 > 0$

a) *Por un lado tenemos que*

$$-2x-17 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 17 \Leftrightarrow x \leq -\frac{17}{2} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -17/2]$$

y además el denominador debe ser negativo:

$$x+4 < 0 \Leftrightarrow x < -4 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4)$$

Las dos soluciones las verifican simultáneamente los elementos del conjunto

$$S_1 = (-\infty; -17/2].$$

b) *Por otra parte queremos ver cuándo en numerador es menor o igual a* 0

$$-2x-17 \leq 0 \Leftrightarrow -2x \leq 17 \Leftrightarrow x \geq -\frac{17}{2} \Leftrightarrow x \in [-17/2; +\infty)$$

y el denominador positivo:

$$x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4 \Leftrightarrow x \in (-4; +\infty)$$

Las dos soluciones las verifican simultáneamente los elementos del conjunto

$$S_2 = (-4; +\infty).$$

Por lo tanto las soluciones están en S_1 o en S_2, es decir

$$S = (-\infty; -17/2] \cup (-4; +\infty)$$

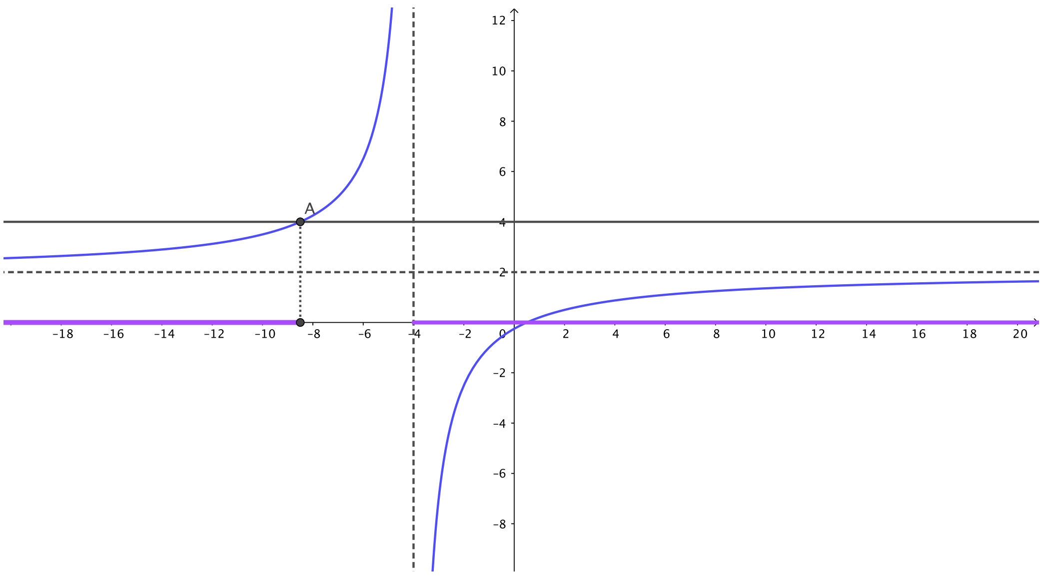
3. ***Resolución gráfica***
Podemos graficar la función homográfica

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4},$$

graficar la recta $y = 4$, determinar la intersección de las dos gráficas y ver para qué valores de x resulta que $f(x) \leq 4$. Para ello resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x-1}{x+4} = 4$$

cuya solución es $x = -17/2$ y luego graficamos:

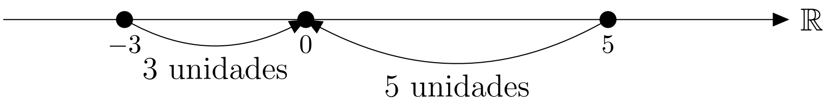


Las soluciones de la inecuación están dadas por todas las x cuyas imágenes a través de f están por debajo del 4 o son iguales a 4. Luego,

$$S = (-\infty; -17/2] \cup (-4; +\infty)$$

6.2. La función módulo: $f(x) = |x|$.

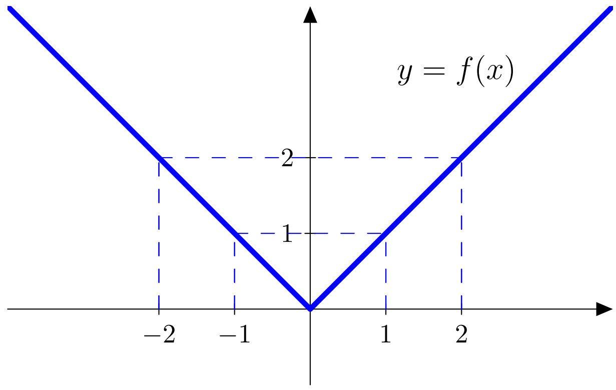
Recordemos que el valor absoluto o módulo de un número real, puede interpretarse como su distancia al origen en la recta numérica.
Así $|-3| = 3$ porque el -3 está a 3 unidades del 0 en la recta real, mientras $|5| = 5$ pues el 5 está a 5 unidades del origen.



Desde el punto de vista funcional, podemos pensar en una función que a los números no negativos les asigna como imagen el mismo número y a los negativos le asigna su opuesto. Es decir:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Su gráfica es:



La función módulo no es inyectiva (puntos simétricos respecto del 0 tienen la misma imagen). Su conjunto imagen es $Im(f) = \mathbb{R}_0^+$.

Ejemplo 6.4 *Grafiquen la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x+1| - 2$.*

En primer lugar observemos que los valores que toma la función son mayores o iguales que -2 ya que $|x+1|$ siempre toma valores mayores o igual a cero. Esto nos indica que el conjunto imagen es el intervalo $[-2; +\infty)$.

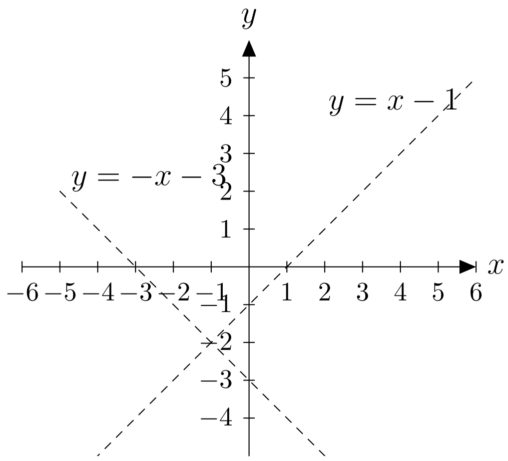
En general, para resolver problemas que involucran módulos es necesario ''sacar" las barras de módulo utilizando la definición:

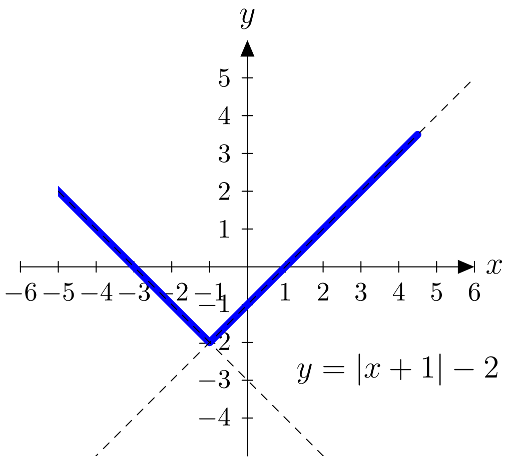
$$f(x) = |x+1| - 2 = \begin{cases} (x+1) - 2 & si \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1) - 2 & si \quad x+1 < 0 \end{cases}$$

Haciendo las cuentas,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x \geq -1 \\ -x - 3 & si \quad x < -1 \end{cases}$$

Podemos en primer término graficar las rectas $y = x - 1$ e $y = -x - 3$ y teniendo en cuenta que $f(x) = x - 1$ cuando $x \geq -1$ y que $f(x) = -x - 3$ en el caso que $x < -1$:



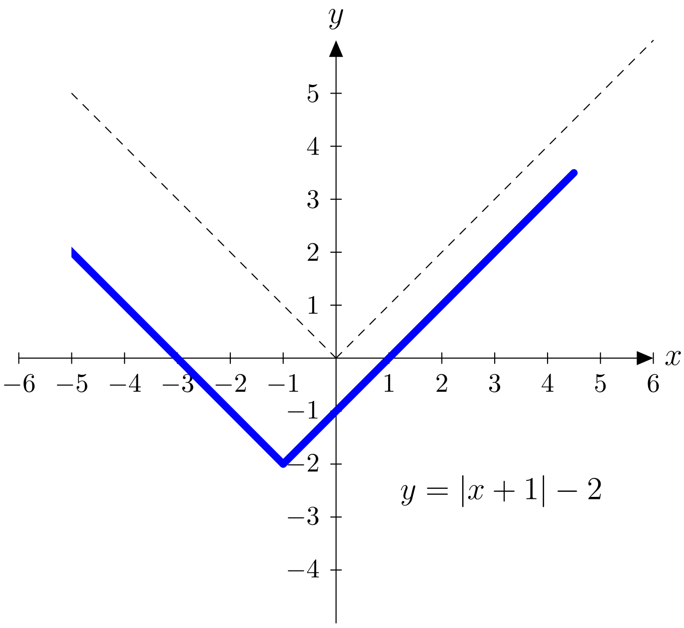


Por otro lado, podemos pensar la gráfica como desplazamientos horizontales y verticales de la función $y = |x|$.

$$f(x) = |x - (-1)| - 2$$

Se desplaza 1 unidad hacia la izquierda *Se desplaza 2 unidades hacia abajo*

A continuación podemos ver las gráficas de las dos funciones:



Ejemplo 6.5 *Resuelvan la siguiente inecuación:* $-|x-3| > -\frac{1}{2}x - 6$.
Resolución analítica:
Utilizando la definición de módulo, quitamos las barras:

1. $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. *En este caso, se tiene que* $|x-3| = x - 3$. *Entonces,*

$$-|x-3| > -\frac{1}{2}x-6 \Leftrightarrow -(x-3) > -\frac{1}{2}x-6 \Leftrightarrow -x+3 > -\frac{1}{2}x-6 \Leftrightarrow 9 > \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 18 > x$$

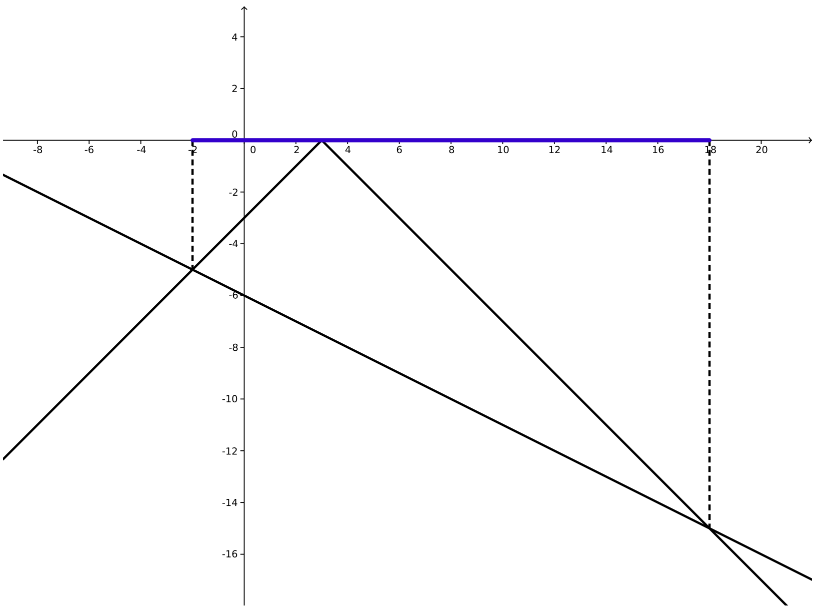
La solución de esta parte es $S_1 = [3; +\infty) \cap (-\infty; 18) = [3; 18)$.

2. $x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$. *En este caso, se tiene que* $|x-3| = -(x-3) = -x+3$. *Entonces,*

$$-|x-3| > -\frac{1}{2}x-6 \Leftrightarrow -(-x+3) > -\frac{1}{2}x-6 \Leftrightarrow x-3 > -\frac{1}{2}x-6 \Leftrightarrow 3 > -\frac{3}{2}x \Leftrightarrow -2 < x$$

La solución de esta parte es $S_2 = (-\infty; 3] \cap (-2; +\infty) = (-2; 3]$.

La solución es $S = S_1 \cup S_2 = (-2; 18)$.
Resolución gráfica*: Graficamos las funciones* $f(x) = -|x-3|$ *y* $g(x) = -\frac{1}{2}x - 6$



Hay que determinar analíticamenente las intersecciones de f con g ($x = -2$ y $x = 18$) y luego determinar cuándo la gráfica de f está por encima de la recta. En este caso cuando $x \in (-2; 18)$, que es el conjunto solución.

6.3. La función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$

En la sección 5.2, vimos que la función $f(x) = x^2$ no tiene inversa. Para ser precisos, vimos que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2$$

no es una función inversible ya que no es inyectiva (ni sobreyectiva).

La sobreyectividad no es un gran problema, ya que como su conjunto imagen es el de todos los reales mayores o iguales que cero, $\mathbb{R}_0^+$, definiéndolo como

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ / f(x) = x^2$$

es sobreyectiva.

Para que sea inversible, es necesario redefinir su dominio. Si en lugar de considerar todos los números reales, consideramos sólo los mayores o iguales que cero, en este caso f es también inyectiva y por ende, biyectiva. Entonces, dada la función

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / f(x) = x^2$$

su inversa es

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

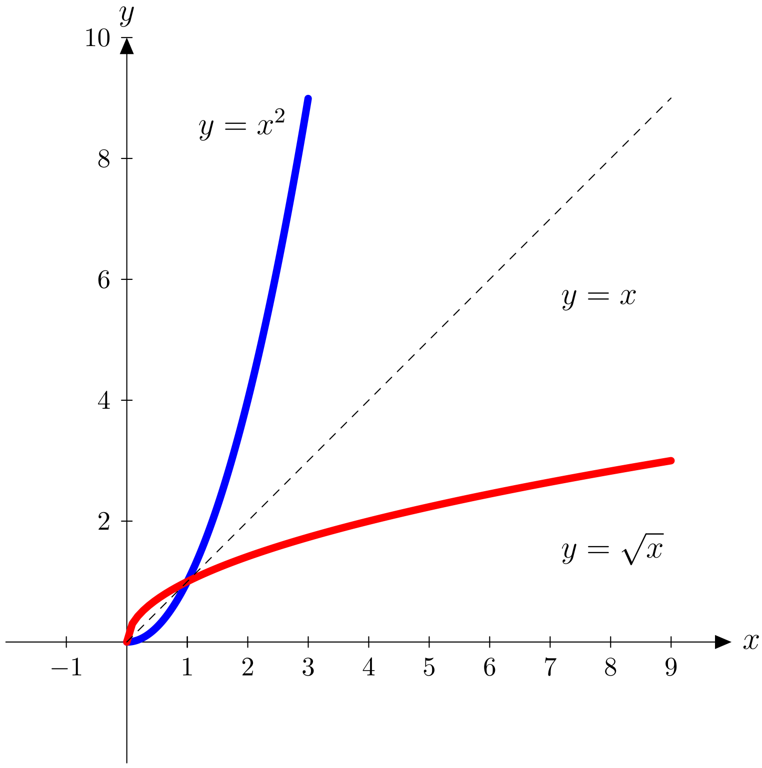
Observen que esta función tiene las siguientes características:

1. Se aplica a números **no negativos** (su dominio es $Dom(f) = \mathbb{R}_0^+$)

2. Sus imágenes también son no negativas.

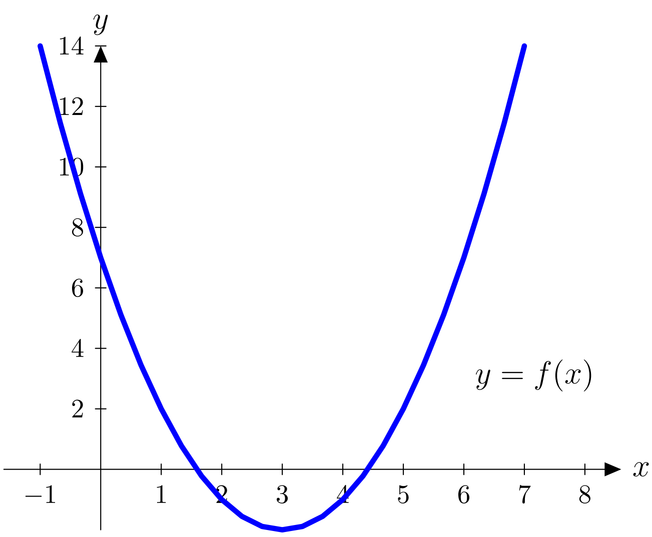
3. Su gráfica puede obtenerse aplicando a $f(x) = x^2$ una simetría respecto de la recta $y = x$ (recuerden que al estar restringido el dominio, la gráfica de f es sólo una rama de parábola).

4. Es estrictamente creciente en el intervalo $[0; +\infty)$.



Ejemplo 6.6 *Dada la función $f(x) = (x-3)^2 - 2$, definan su dominio e imagen para que admita inversa. Luego, encuentren dicha función.*

La gráfica de f es una parábola con vértice en el punto $(3; -2)$. Por otra parte, su coeficiente principal es positivo. Su gráfica es:



Para que f sea inyectiva, debemos restringir su dominio. Podemos elegir como dominio el conjunto $(-\infty; 3]$ o el $[3; +\infty)$. Por otra parte, como $(x-3)^2 \geq 0$, resulta que $(x-3)^2 - 2 \geq$

-2, *por lo tanto el conjunto imagen es el intervalo* $[-2; +\infty)$. *Definiendo* f *como*

$$f : [3; +\infty) \to [-2; +\infty) / f(x) = (x-3)^2 - 2$$

es biyectiva. y su inversa $f^{-1} : [-2; +\infty) \to [3; +\infty)$

Para calcular su inversa, despejamos x:

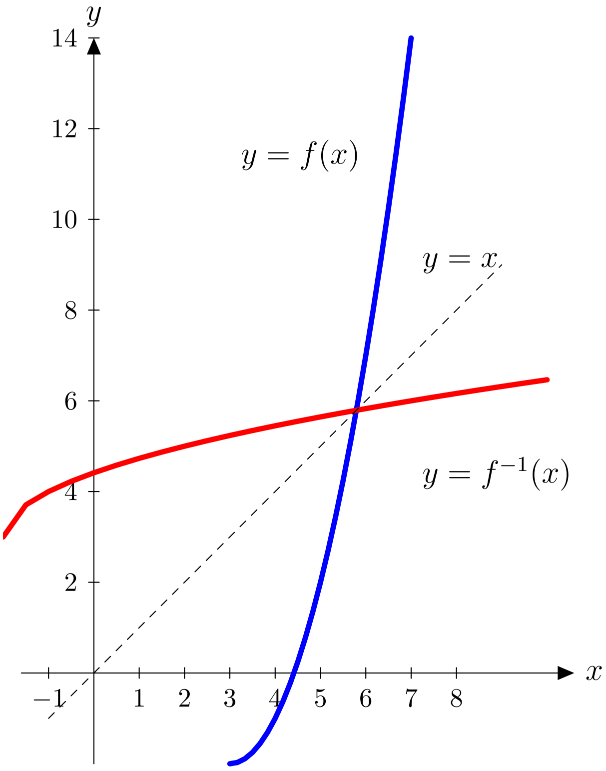
$$y = (x-3)^2 - 2 \Leftrightarrow y + 2 = (x-3)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y+2} = |x-3|$$

Como los valores de x *pertenecen al intervalo* $[3; +\infty)$, $x - 3 \geq 0$ *de donde* $|x-3| = x - 3$. *Por lo tanto resulta:*

$$\sqrt{y+2} = x - 3 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{y+2} = x$$

que para poder graficar en un mismo sistema de coordenadas, cambiamos el nombre a las variables y obtenemos $f^{-1} : [-2; +\infty) \to [3; +\infty)/$

$$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+2}$$



Ejemplo 6.7 *Determinen si las funciones* $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$ *y* $g(x) = \sqrt{x-2}$ *se intersectan.*

Queremos determinar si existen valores de x *para los cuales* $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x)$$
$$-\frac{1}{2}x + 5 = \sqrt{x-2}$$
$$\textit{Elevamos al cuadrado:}\quad \left(-\frac{1}{2}x + 5\right)^2 = x - 2$$
$$\frac{1}{4}x^2 - 5x + 25 = x - 2$$
$$\textit{Igualamos a cero:}\quad \frac{1}{4}x^2 - 6x + 27 = 0$$
$$\textit{Las raíces son:}\quad x_1 = 6; \quad x_2 = 18$$

Si verificamos los resultados obtenidos,

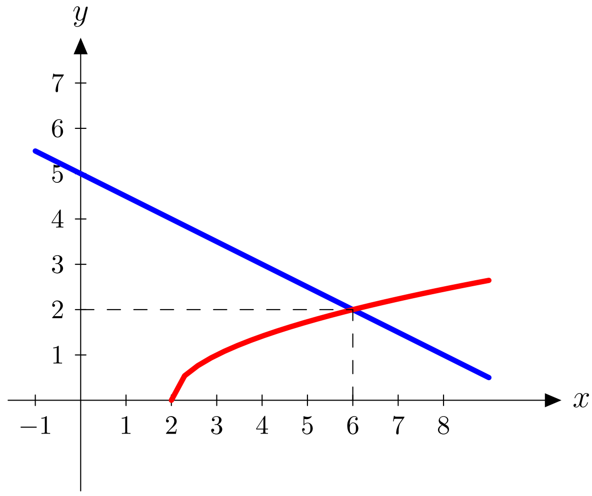
$$-\frac{1}{2}(6) + 5 = -3 + 5 = 2; \qquad \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2 \quad \boldsymbol{y} \quad 2 = 2$$

pero,

$$-\frac{1}{2}(18)+5=-9+5=-4; \qquad \sqrt{18-2}=\sqrt{16}=4 \quad \boldsymbol{y} \quad -4\neq 4$$

lo cual nos indica que $x=6$ es una solución de la ecuación, pero $x=18$ no lo es. Estas ''falsas soluciones"se conocen como ***soluciones extrañas*** *y no son soluciones de la ecuación planteada.*

Por lo tanto la ecuación tiene una única solución y las gráficas de f y g se cortan en el punto $(6;2)$.



Observación 6.1 *En este caso, la solución extraña surge al elevar al cuadrado, que el cuadrado de a sea igual al cuadrado de b no implica necesariamente que $a=b$. Por ejemplo, $(-4)^2=4^2$ y, sin embargo, $-4\neq 4$. Al resolver ecuaciones que contienen raíces cuadradas (o, en general, raíces de índice par) es posible que aparezcan raíces extrañas.*
VERIFIQUEN SIEMPRE LOS RESULTADOS OBTENIDOS Y DESCARTEN LAS FALSAS SOLUCIONES.

6.4. EJERCICIOS

1. Para cada una de las siguientes funciones homogáficas, determinen su dominio, imagen, ecuaciones de sus asíntotas y luego realicen un gráfico de las mismas.

    a) $f(x)=\frac{3x-4}{x+2}$

    b) $g(x)=\frac{4}{-2x+6}$

    c) $h(x)=\frac{2x}{x-3}$

    d) $i(x)=-\frac{x-1}{x}$

2. Determinen las inversas de las siguientes funciones. En cada caso indiquen el dominio e imagen de la función y de su inversa.

    a) $f_1(x)=\frac{x+24}{-x}$

    b) $f_2(x)=\frac{x}{-x-1}$

    c) $f_3(x)=\frac{1-x}{2x+1}$

    d) $f_4(x)=-\frac{1}{x}$

3. Determinen analítica y gráficamente el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{-x+6}{(1/2)x-4} > -5$ *b*) $\dfrac{2x+8}{x+2} \geq x+4$

4. Escriban la ecuación de una función homográfica que tenga como asíntota vertical a la recta $x = 3$ y su asíntota horizontal sea $y = -4$. ¿Es única? Justifiquen.

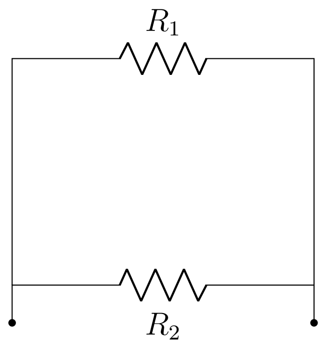
5. Determinen una fórmula de la función f sabiendo que es una función homográfica, que $f^{-1}(-1/2) = 0$, que $f(1) = \dfrac{1}{5}$ y que su asíntota horizontal es la recta de ecuación $y = \dfrac{2}{3}$.

6. En los circuitos eléctricos, las resistencias pueden estar conectadas en paralelo y/o en serie. Cuando varios resistores, con resistencias $R_1, R_2, \ldots R_n$ se encuentran conectados en paralelo la resistencia total, R_T, del circuito verifica la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

a) Demuestren que en el caso de dos resistencias en paralelo se verifica que

$$R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



b) Supongamos que $R_1 = 10$ ohms y que el el segundo resistor tiene una resistencia variable de x ohms. Escriban la resistencia total R_T en función de la resistencia variable x.

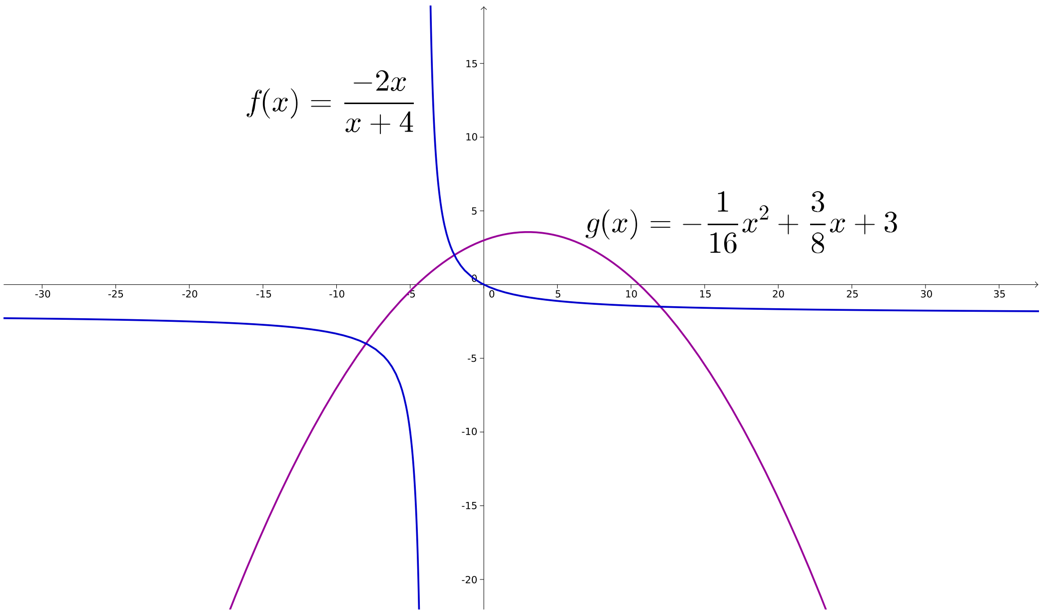
c) Indiquen el dominio, imagen y ecuación de la asíntota horizontal de la función $R_t(x)$.

d) ¿Cuál debe ser el valor de x para que la resistencia total sea de 5 ohms?

e) ¿Es posible que $R_T = 20$. ¿Por qué?

f) ¿Cómo interpretan físicamente la existencia de la asíntota horizontal?

7. Determinen los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \leq g(x)$:



8. Grafiquen las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = |x-4|+3$

   b) $f_2(x) = |x-4|-3$

   c) $f_3(x) = |x+4|$

   d) $f_4(x) = -|x|+4$

   e) $f_5(x) = -|x+2|+2$

   f) $f_6(x) = |2x+3|$

9. Para cada una de las siguientes funciones, definan el dominio más amplio posible para que sean inversibles, determinen su inversa (dando el dominio e imagen de ella) y grafiquen f y f^{-1}:

   a) $f(x) = 2(x+4)^2+1$

   b) $f(x) = x^2+6x+5$

   c) $f(x) = \sqrt{x-3}+4$

   d) $f(x) = -\sqrt{3x+1}-2$

10. Determinen el dominio de las siguientes funciones:

    a) $f_1(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+4}}$

    b) $f_2(x) = \sqrt{x^2+5x-14}$

    c) $f_3(x) = \sqrt{-x+6}$

    d) $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

11. Resuelvan las siguientes ecuaciones:

    a) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5} = 5$

    b) $1+\sqrt{x+3} = x-2$

    c) $5\sqrt{x+1} = x+7$

    d) $-\sqrt{4x+2} = 2x-3$

    e) $1+\sqrt{x} = x+4$

    f) $\sqrt{3x+8} = \sqrt{3x}+2$

12. Para qué valores de x resulta que

$$-\sqrt{x} \geq 2x-10$$

13. Dadas las funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \text{If} \,/ f(x) = e^{3x}$$
$$h : Dh \to Ih / h(x) = \tfrac{2x}{1-x}$$

Determinen:

a) $\{x \in \mathbb{R}/[f(x)]^2 + 9f(0) = 10f(x)\}$

Rta.: $\left\{0, \frac{2}{3}\ln 3\right\}$.

b) $h^{-1}(2)$

Rta.: $\frac{1}{2}$.

14. Dadas las funciones:

$$f : Df \to \mathbb{R}/f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-|1-x|}}$$
$$g : Dg \to \mathbb{R}/g(x) = \log_2 \frac{1-x}{1+x}$$

Determinen: $D\,f \cap D\,g$.

Rta.: $(-1, 1)$.

15. Determinen $[k, 1] \cap Dg$ sabiendo que la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = (1 - 2k)x^2 + 8kx - (2 + 8k)$$

tiene un único cero, y que $D\,g$ es el dominio de $g(x) = \log_3 \frac{-x+1}{x+1}$.

Rta.: $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$.

16. Dadas las funciones:

$$f : D_f \to Im_f/f(x) = \frac{2x-1}{1-x} \quad g : D_g \to \mathbb{R}/g(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/h(x) = -|2x + 1| + 1$$

Determinen:

a) las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales a la gráfica de f.

Rta.: $\mathrm{AV} : x = 1, \mathrm{AH} : y = -2$.

b) el dominio de g.

Rta.: $(-1, 1)$.

c) el conjunto de ceros de h.

Rta.: $\{-1, 0\}$.

d) la función f^{-1}.

Rta.: $f^1 : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathrm{R} - \{1\}/f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x+2}$.

17. Dadas las funciones:

$$f : D_f \to \mathbb{R}/f(x) = \log_3(4x + 2)$$
$$g : D_g \to \mathbb{R}/g(x) = \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 10x}}$$
$$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/t(x) = (x + 1)^2 + 1$$

Determinen:

a) $\{x \in R / 2 < t(x) \leq 10\}$

Rta.: $[-4, -2) \cup (0, 2]$.

b) $f^{-1}(0)$

Rta.: $-\frac{1}{4}$.

c) el dominio de g.

Rta.: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

7. Composición de funciones

Problema

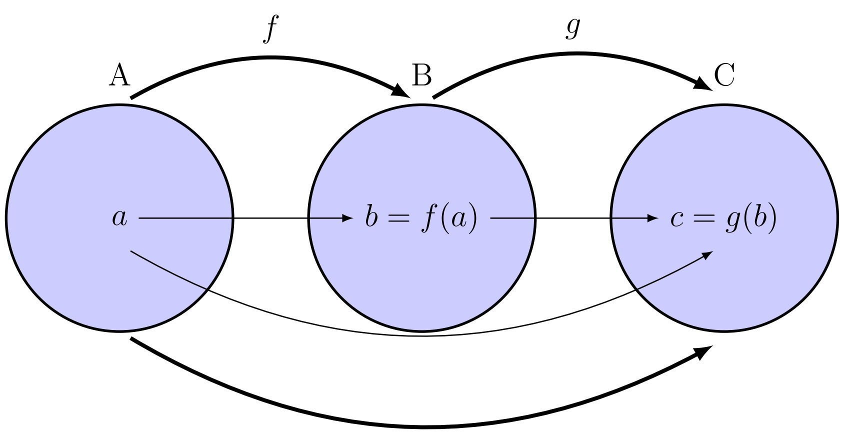
Un buque petrolero navega hacia el sur siguiendo una trayectoria paralela a la costa a $10\,km$ de distancia de la misma. A las 9 de la mañana pasa por el Faro de Punta Médanos.

1. Un tiempo más tarde, el barco se encuentra $50\,km$ al sur de su posición frente al Faro. ¿A qué distancia del mismo se encuentra?
2. ¿Cuántos kilómetros recorrió si se sabe que está a $90\,km$ del faro.
3. Escriban una función F que permita determinar la distancia del barco al faro en función de la distancia recorrida.

El barco viaja a una velocidad constante de 35 kilómetros por hora.

4. Escriban una función d que calcule la distancia recorrida por el buque en función del tiempo t, en horas.
5. ¿Cuánto tiempo debió pasar para que la embarcación diste en $90\,km$ del faro. ¿A qué hora ocurrió esto?
6. Escriban una función D que calcule la distancia del barco al faro en función del tiempo t en horas.

En el diagrama podemos observar dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$. La función f a cada punto a de su dominio (A) le asigna un punto $b = f(a)$ perteneciente a l conjunto B. A su vez la función g hace corresponder a cada punto de su dominio (B) un punto $c = g(b)$ en el conjunto C.



Podemos pensar que a se “transforma” en b por la acción de f y, de manera análoga, b se “transforma” en c mediante la aplicación de g. De esta forma, por la sucesiva acción de f y g, el punto a del dominio de f se “transforma” en el punto c perteneciente a la imagen de g. La composición de dos funciones f y g es una operación entre ellas que define una nueva función que realiza la acción conjunta de ellas.

Definición

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ la *función compuesta* $g \circ f$ (o composición de g y f) está definida por

$$g \circ f : A \to C/(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

No es necesario que el dominio de g sea igual al codominio de f, pero sí que la imagen de la función f esté contenida en el dominio de g, es decir,

$$Im\,(f) \subseteq Dom\,(g)$$

Ejemplo 7.1 *Dadas las funciones* $f(x) = x^2 + 1$ *y* $g(x) = -2x + 6$*, se pide determinar las funciones* $f \circ g$ *y* $g \circ f$ *y sus respectivos dominios.*
Solución:

1. *Aplicando la definición de composición,*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Esto es, dado un $x \in Dom\,(g)$*, se tiene que*

$$x \longmapsto g(x) \longmapsto f(g(x)) = (g(x))^2 + 1$$

$$x \longmapsto (-2x + 6) \longmapsto (-2x + 6)^2 + 1$$

Efectuando algunos cálculos obtenemos que

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 24x + 37$$

Por otra parte, tanto f *como* g*, al ser funciones polinómicas, están definidas en todo* $\mathbb{R}$*. Más aún,*

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

por lo tanto, en particular, se verifica que $Im\,(g) \subseteq Dom\,(f)$*. Luego,*

$$\boxed{f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/(f \circ g)(x) = 4x^2 - 24x + 37}$$

2. *Por otra parte, como* $Im\,(f) \subseteq Dom\,(g)$*, también podemos definir* $g \circ f$*.*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x) = g(x^2 + 1) = -2(x^2 + 1) + 6 = -2x^2 + 4$$

Luego,

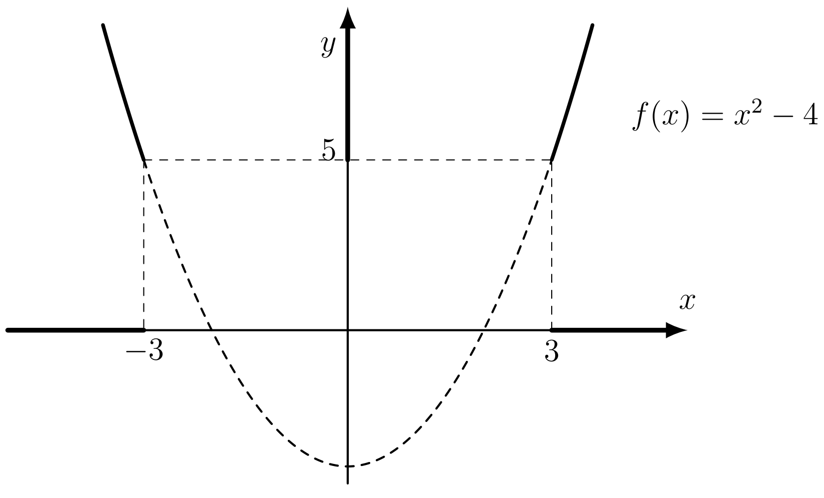
$$\boxed{g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/(g \circ f)(x) = -2x^2 + 4}$$

Observación 7.1 *El ejemplo anterior muestra que la composición de funciones no es una operación conmutativa.*

Ejemplo 7.2 *Dadas las funciones* $f(x) = x^2 - 4$ *y* $g(x) = \sqrt{x-5}$*, se pide determinar las funciones* $f \circ g$ *y* $g \circ f$ *y sus respectivos dominios.*
Solución:

1. *Como* f *es una función cuadrática su dominio es todo el conjunto de los números reales:*
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
Por su lado, para determinar el dominio de g*, recordemos que las raíces de índice par se aplican a números no negativos. Entonces debemos verificar que*
$$x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$$
Luego,
$$g : [5,\, +\infty) \to \mathbb{R}$$
Como el Dominio de f *es el conjunto de todos los números reales, necesariamente se verifica que la imagen de la función* g *está incluída en el dominio de* f*. Por lo tanto, se puede realizar la composición sin ningún inconveniente.*
$$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x-5}) = (\sqrt{x-5})^2 - 4 = x - 9$$
$$f \circ g : [5,\, +\infty) \to \mathbb{R} / (f \circ g)(x) = x - 9$$

2. *El conjunto imagen de* f *es el intervalo* $[-4,\, +\infty)$*. En este caso tenemos que*
$$Im\,(f) \nsubseteq Dom\,(g)$$
Para poder definir la composición $g \circ f$ *debemos restringir el dominio de* f *de manera tal que su conjunto imagen esté incluído en el* $[5,\, +\infty)$*.*



Para que la imagen de f *sea igual al* $[5,\, +\infty)$ *debemos restringir su dominio al conjunto* $\mathbb{R} - (-3,\, 3)$*. Definimos entonces*
$$f : (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \to [5, +\infty)$$
Ahora sí podemos encontrar la composición:
$$(g \circ f) : (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \to \mathbb{R} / (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

Ejemplo 7.3 *Dada $f(x) = \sqrt{x+3}$ determinen el valor $(f \circ f)(6)$.*
Solución:
Para que f esté definida en necesario que $x+3 \geq 0$. Por lo tanto, el $Dom\,(f) = [-3, +\infty)$. Por otra parte el conjunto imagen de f es $Im\,(f) = \mathbb{R}_0^+$. Esto es,

$$f : [-3, +\infty) \to \mathbb{R}_0^+$$

Como se verifica que $Im\,(f) \subseteq Dom\,(f)$. podemos plantear la composición pedida. Resulta así que

$$f \circ f : [-3, +\infty) \to \mathbb{R}_0^+ / (f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x+3}+3}$$

$$\boxed{(f \circ f)(6) = \sqrt{\sqrt{6+3}+3} = \sqrt{6}}$$

7.1. La función identidad.

Dado una conjunto A cualquiera, la función que a cada elemento $x \in A$ le asigna como imagen ese mismo elemento, se conoce como *función identidad* o bien *función identidad en* A:

$$id_A : A \to A / id_A(x) = x$$

En particular, en el conjunto de los números reales, la función identidad es la función

$$y = x$$

cuya gráfica es la recta que es bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Propiedad

Si $f : A \to B$ es una función biyectiva entonces se tiene que

1. $f \circ f^{-1} : B \to B / (f \circ f^{-1})(x) = x$ es la función id_B
2. $f^{-1} \circ f : A \to A / (f^{-1} \circ f)(x) = x$ es la función id_A

Observación 7.2 *Cuando f es una función biyectiva real y de variable real, de la propiedad anterior resulta que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recto $y = x$.*

7.2. Paridad e imparidad de una función.

Vamos a decir que un dominio D es *simétrico respecto del origen* si se verifica que si $x \in D$ entonces su opuesto, $-x$ también pertenece a D.

Definición

Sea una función definida en un conjunto simétrico respecto del origen. Decimos que f es una *función par* si se verifica que

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in Dom\,(f)$$

Las gráficas de las funciones pares son simétricas respecto del eje de ordenadas.

Ejemplo 7.4 *La función $f(x) = 3x^2 + 5$ es una función par.*

En efecto, en primer lugar el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ que es simétrico respecto del 0. Por otra parte,

$$f(-x) = 3(-x)^2 + 5 = 3x^2 + 5 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por lo tanto, verifica la definición de paridad.

Ejemplo 7.5 *La función $f(x) = \ln(x^4 - 16)$ es una función par.*

La función está definida si

$$x^4 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^4 > 16 \Leftrightarrow |x| > \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x < -2 \quad \textit{o bien} \quad x > 2$$

Luego, el dominio de la función es

$$Dom\,(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

que es simétrico respecto del origen. Además,

$$f(-x) = \ln((-x)^4 - 16) = \ln(x^4 - 16) = f(x)$$

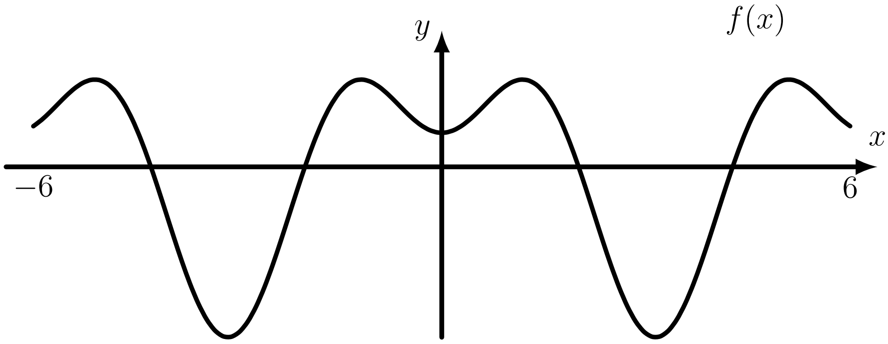
Ejemplo 7.6 *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ no es una función par, pues*

$$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 1 = -x^3 + 2x^2 - 1 \neq f(x)$$

Ejemplo 7.7 *La función $f(x) = \sqrt{x+7}$ tampoco es par. De hecho no tiene sentido preguntarse si es par ya que su dominio es el intervalo $[-7, +\infty)$ que no es simétrico respecto del 0.*

Ejemplo 7.8 *A continuación se observa la gráfica de la función*

$$f : [-6,\, 6] \to \mathbb{R}$$



Como es simétrica respecto del eje de ordenadas, sabemos que f es una función par.

Definición

Sea una función definida en un conjunto simétrico respecto del origen. Decimos que f es una *función impar* si se verifica que

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in Dom\,(f)$$

Las gráficas de las funciones impares son simétricas respecto del centro de coordenadas.

Ejemplo 7.9 *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^3$ es un ejemplo típico de una función impar:*

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Este mismo razonamiento puede aplicarse a todas las funciones

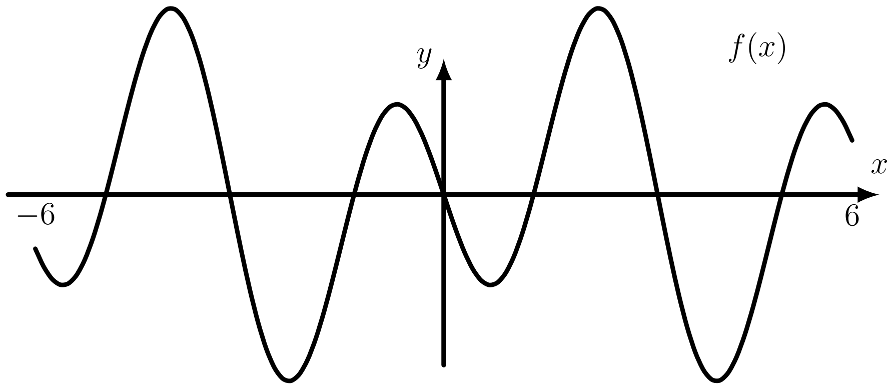
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^{2n+1} \quad con\ n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 7.10 *La función $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ también es impar:*

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$$

Ejemplo 7.11 *A continuación se observa la gráfica de la función*

$$f : [-6, 6] \to \mathbb{R}$$



Como es simétrica respecto del centro de coordenadas, sabemos que f es una función impar.

Ejemplo 7.12 *La función $f(x) = e^x$ definida en todo $\mathbb{R}$ no es par ni impar:*

$$f(-x) = e^{-x} \neq e^x = f(x)$$

por lo tanto no es par, pero también ocurre que

$$f(-x) = e^{-x} \neq -e^x = -f(x)$$

de donde resulta que tampoco es impar.

7.3. Traslaciones verticales y horizontales.

Al estudiar las gráficas de varias funciones elementales vimos que podemos analizar las gráficas que resultan de trasladar vertical u horizontalmente una función. Por ejemplo, al analizar la forma canónica de una cuadrática o los corrimientos de la función módulo.

Sean f y $g(x) = x + k$, con $k \in \mathbb{R}$ dos funciones tales que es posible definir las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + k$$

es una traslación vertical de k unidades (hacia arriba si $k > 0$, o hacia abajo si $k < 0$).

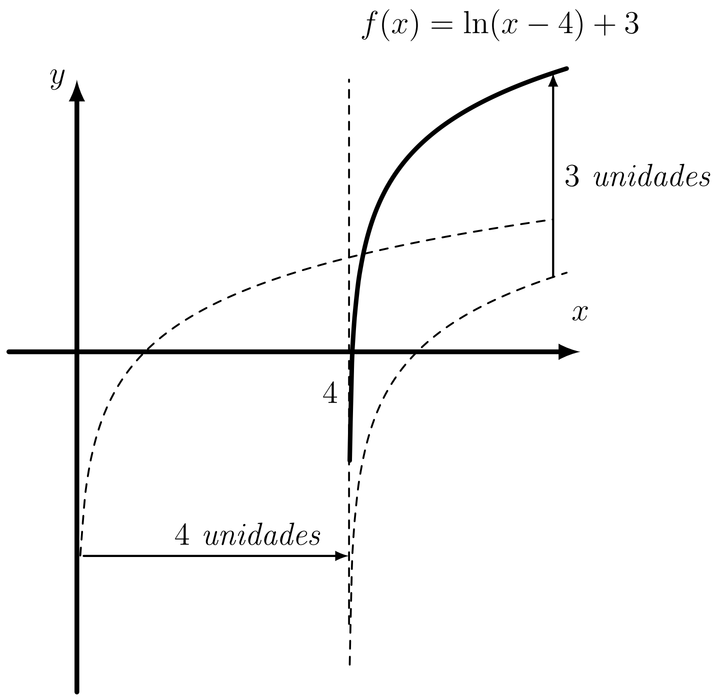
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + k)$$

es una traslación horizontal de k unidades (hacia la izquierda si $k > 0$, o hacia la derecha si $k < 0$).

Ejemplo 7.13 *Consideremos la función* $f(x) = \ln(x-4)+3$. *Esta función puede pensarse como la composición de las funciones* $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = x - 4$ *y* $f_3(x) = x + 3$*:*

$$(f_3 \circ (f_1 \circ f_2))(x) = f_3 \circ (\ln(f_2(x))) = f_3(\ln(x - 4)) = \ln(x - 4) + 3$$

La gráfica de f *puede entonces obtenerse trasladando la gráfica del logaritmo natural* 4 *unidades hacia la derecha y* 3 *hacia arriba.*



7.4. EJERCICIOS

1. Dadas f y h, $f \circ h$ y $h \circ f$, indicando, en cada caso, el dominio correspondiente.

   a) $f(x) = |x| \quad h(x) = \log x$

   b) $f(x) = e^x \quad h(x) = 2x$

   c) $f(x) = \ln(x^2 - 1) \quad h(x) = \sqrt{4 - x}$

2. Dadas $f(x) = \ln x$ y $h(x) = x + 3$,

a) Hallen el dominio e imagen de cada función.

b) Determinen $h^{-1} \circ f$ y $f \circ h^{-1}$. En caso de ser necesario, efectúen las restricciones para que estas composiciones puedan obtenerse.

3. Sean las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ y $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g^{-1}(x) = mx + n, m \neq 0$,. Sabiendo que $f(-3) = -14, f(2) = -4, f(1) = -2, g^{-1}(2) = 3$ y $g^{-1}(-1) = -3$, calculen $(f \circ g)(-1)$.

Rta.: -2.

4. Sean las funciones $f : D \to \mathbb{R} / f(x) = 2 + \ln \sqrt{4 - x}$ y $h : D \to \mathbb{R} / h(x) = \frac{x-3}{x^2-8x+15}$, determinen

a) $Df \cap Dh$

Rta.: $(-\infty, 3) \cup (3, 4)$.

b) el valor de $e^{f(x)} e^{-2}$ en $x = 0$

Rta.: 2.

c) la ecuación de la asíntota vertical a la gráfica de h.

Rta.: $x = 5$.

5. Dadas las funciones:

$$f : \mathbb{R} \to If / f(x) = e^{3x-1}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = -3x + 1$$
$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / S(x) = 3x^3 - x^2 - 3x + 1$$

Determinen:

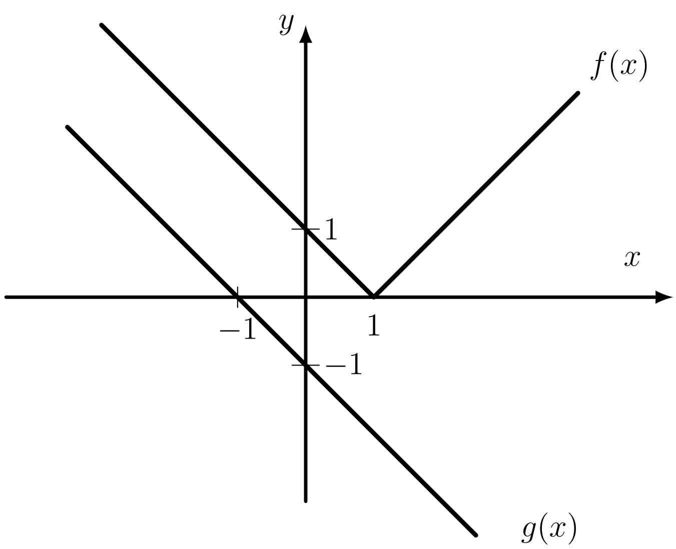
a) $g\left(f^{-1}\right)(e)$

Rta.: -1.

b) el conjunto de ceros de s

Rta.: $\left\{-1, 1, \frac{1}{3}\right\}$.

6. Observen el gráfico de las dos funciones f y g.



Determinen:

a) $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Rta.: $-\frac{3}{2}$.

b) $(f \circ g)(1)$

Rta.: 3.

c) $(f - g)(-1)$

Rta.: 2.

7. Dadas las funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \text{ If } / f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/g \text{ es función lineal}$$
$$h : D \to \mathbb{R}/h(x) = \ln x$$
$$p : Dom \to Im/p(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$$

Determinen:

a) las ecuaciones de la asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de

$$\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$$

Rta.: $y = \frac{1}{a^2}, x = -\frac{b}{a}$ con $a \neq 0$.

b) $\{x \in \mathbb{R}/(f \circ h)(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}/(f \circ p)(x) = 1\}$

Rta.: $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R}/p(x-1) = p(x+3)\}$

Rta.: $\{-1\}$.

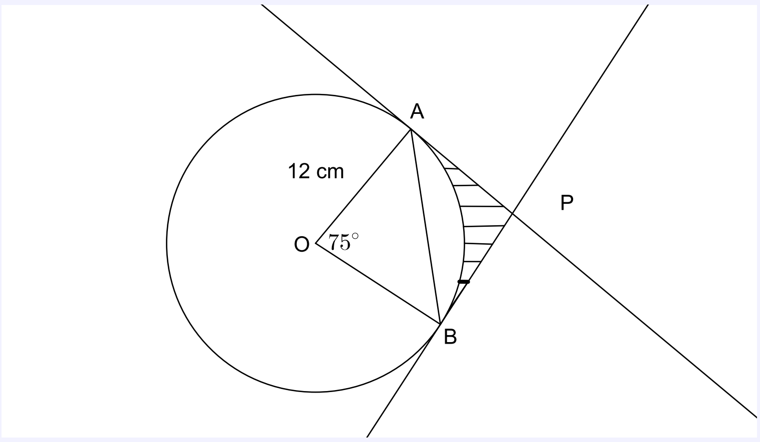
d) $f^{-1}(1)$

Rta.: 2.

8. Trigonometría

Problema

En el diagrama se muestra un círculo de centro en O y radio de 12 cm. La cuerda AB subtiende un ángulo de $75°$ con el centro. Las tangentes al círculo en A y en B se cortan en P.



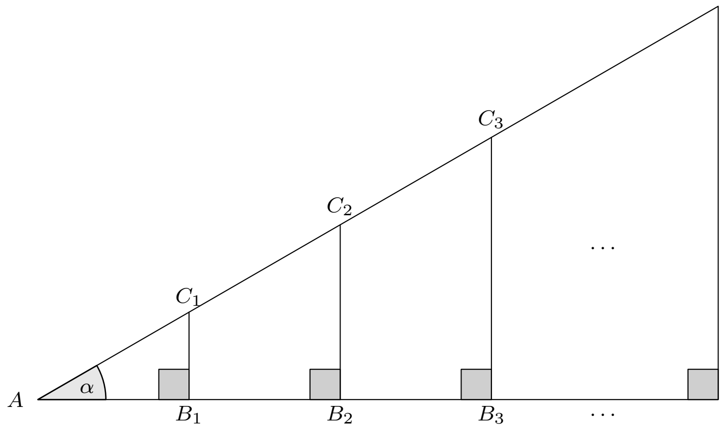
Determinen el área de la región rayada.

8.1. Relaciones trigonométricas

Dado un triángulo rectángulo, sus lados están relacionados entre sí por el Teorema de Pitágoras, mientras que sus ángulos interiores, como en todo triángulo, suman $180°$. Recordemos que la *trigonometría* estudia la relación entre los lados y ángulos de los triángulos rectángulos. Esta palabra deriva del griego *trigonos*, triángulo y *metron*, medida. Su significado nos remite al *estudio de la medición de triángulos.*

El origen de la trigonometría es sumamente remoto y aparece en estudios sobre problemas astronómicos e ingenieriles de los antiguos babilonios y egipcios. Se han encontrado documentos (tablillas y papiros) que evidencian ciertos conocimientos trigonométricos que datan de hace aproximadamente 4,000 años.

Consideremos todos los triángulos rectángulos que tienen un mismo ángulo agudo de medida $\alpha°$.



Como todos estos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente de igual medida (son todos rectángulos y tienen un ángulo común, $\angle A$), son todos semejantes entre sí. Por lo tanto las razones entre los lados homólogos son iguales y sólo dependen de la medida del $\angle A$. Por ejemplo,

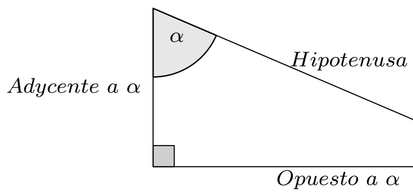
$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \cdots = k$$

Dado entonces un triángulo rectángulo cuyos lados midan a, b y c podemos plantear seis razones entre dichas medidas

$$\frac{a}{b}; \frac{a}{c}; \frac{b}{a}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a}; \frac{c}{b}$$

cuyos valores dependen únicamente de las medidas de sus ángulos agudos. Estas seis razones dan lugar a las seis relaciones trigonométricas.

Consideremos un triángulo rectángulo y llamemos α a uno de sus ángulos agudos. Al lado opuesto al ángulo α lo llamamos *cateto opuesto a* α mientras que el otro cateto es el *cateto adyacente al ángulo* α.



Definición

Dado un triángulo rectángulo, donde uno de sus ángulos agudos es α, se definen las siguientes relaciones trigonométricas conocidas como *seno, coseno, tangente, cotangente, secante* y *cosecante* del ángulo α:

$$sen(\alpha) = \frac{cat.\, opuesto\ a\ \alpha}{hipotenusa} \qquad cos(\alpha) = \frac{cat.\, adyacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$tg(\alpha) = \frac{cat.\, opuesto\ a\ \alpha}{cat.\, adyacente\ a\ \alpha} \qquad cotg(\alpha) = \frac{cat.adyacente\ \ a\ \alpha}{cat.\, opuesto\ a\ \alpha}$$

$$sec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cat.\, adyacente\ a\ \alpha} \qquad cosec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cat.\, opuesto\ a\ \alpha}$$

Observación 8.1 *De la definición anterior se tiene que:*

$$cosec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cat.\, opuesto\ a\ \alpha} = \frac{1}{\frac{cat.\, opuesto\ a\ \alpha}{hipotenusa}} = \frac{1}{sen(\alpha)}$$

De manera similar, puede verse que

$$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} \qquad y \qquad cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}$$

Por otra parte, resulta la siguiente igualdad:

Proposición

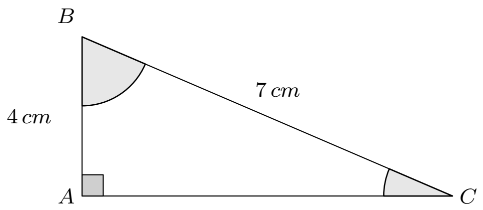
En todo triángulo rectángulo se verifica que

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

Aplicando las definiciones de seno y coseno:

$$\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{\frac{cat.\, opuesto\ a\ \alpha}{\cancel{hipotenusa}}}{\frac{cat.\, adyadente\ a\ \alpha}{\cancel{hipotenusa}}} = \frac{cat.\, opuesto\ a\ \alpha}{cat.\, adyacente\ a\ \alpha} = tg(\alpha)$$

Ejemplo 8.1 *Sabiendo que en el triángulo $\triangle ABC$, rectángulo en A el lado $\overline{AB}$ mide $4cm$ y el lado $\overline{BC}$ mide $7cm$,*



calculen los valores exactos de

1. $sen(\angle B)$
2. $cos(\angle B)$
3. $tg(\angle B)$
4. $cotg(\angle B)$
5. $sec(\angle B)$
6. $cosec(\angle B)$

Solución:

Para poder calcular todas las razones trigonométricas asociadas al $\angle B$, necesitamos conocer primero la medida del $\overline{AC}$. Aplicando el Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} 4^2 + \overline{AC}^2 &= 7^2 \\ \overline{AC}^2 &= 49 - 16 \\ \overline{AC} &= \sqrt{33}\, cm \end{aligned}$$

Aplicando ahora las definiciones de las distintas razones trigonométricas, tenemos que

1. $sen(\angle B) = \dfrac{cat.\,op.\ al\ \angle B}{hip.} = \dfrac{\sqrt{33}}{7}$
2. $cos(\angle B) = \dfrac{cat.\,ady.\ al\ \angle B}{hip.} = \dfrac{4}{7}$
3. $tg(\angle B) = \dfrac{cat.\,op.\ al\ \angle B}{cat.\,ady.\ al\ \angle B} = \dfrac{\sqrt{33}}{4}$
4. $cotg(\angle B) = \dfrac{1}{tg(\angle B)} = \dfrac{4}{\sqrt{33}}$
5. $sec(\angle B) = \dfrac{1}{cos(\angle B)} = \dfrac{7}{4}$
6. $cosec(\angle B) = \dfrac{1}{sen(\angle B)} = \dfrac{7}{\sqrt{33}}$

Ejemplo 8.2 *Con los datos del ejemplo anterior, calculen los valores exactos de*

1. $sen(\angle C)$
2. $cos(\angle C)$
3. $tg(\angle C)$
4. $cotg(\angle C)$
5. $sec(\angle C)$
6. $cosec(\angle C)$

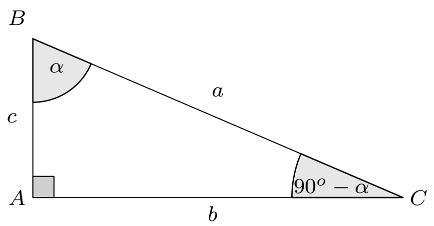
Solución:
Aplicando las definiciones y los datos del ejemplo anterior,

1. $sen(\angle C) = \dfrac{cat.\,op.\ al\ \angle C}{hip.} = \dfrac{4}{7}$
2. $cos(\angle C) = \dfrac{cat.\,ady.\ al\ \angle C}{hip.} = \dfrac{\sqrt{33}}{7}$
3. $tg(\angle C) = \dfrac{cat.\,op.\ al\ \angle C}{cat.\,ady.\ al\ \angle C} = \dfrac{4}{\sqrt{33}}$
4. $cotg(\angle C) = \dfrac{1}{tg(\angle C)} = \dfrac{\sqrt{33}}{4}$
5. $sec(\angle C) = \dfrac{1}{cos(\angle C)} = \dfrac{7}{\sqrt{33}}$
6. $cosec(\angle C) = \dfrac{1}{sen(\angle C)} = \dfrac{7}{4}$

Observación 8.2 *En los ejercicios anteriores puede notarse, por ejemplo, que*

$$sen(\angle B) = cos(\angle C), \quad sec(\angle B) = cosec(\angle C), \quad tg(\angle B) = cotg(\angle C)$$

Como en todo triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios, se tiene que



$$sen(\alpha) = \frac{b}{a} = cos(90^o - \alpha)$$

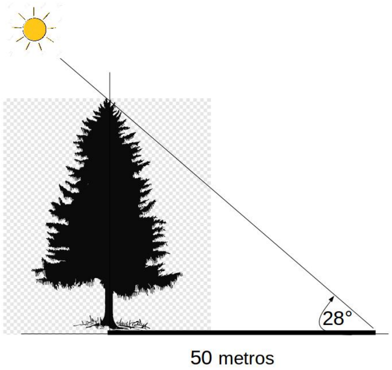
Es decir, en seno de un ángulo es igual al ***co****seno de su* ***co****mplemento. De hecho, el prefijo* ***co****, deriva de* ***complemento*** *y da a entender que el coseno de un ángulo es el seno del complemento de dicho ángulo.*

Similarmente, se tienen las siguientes relaciones:

$$sec(\alpha) = \frac{a}{c} = cosec(90^o - \alpha) \quad y \quad tg(\alpha) = \frac{b}{c} = cotg(90^o - \alpha)$$

Ejemplo 8.3 *Un árbol proyecta una sombra de* 50 *metros de largo. Sabiendo que el ángulo de elevación del sol es de* 28^o*, determinen la altura del árbol.*
Solución:

Considerando el triángulo rectángulo que forma la altura del árbol, su sombra y el rayo de luz, tenemos como dato uno de los catetos (su sombra) y queremos determinar el otro. Como una de las razones trigonométricas que relaciona los dos catetos de un triángulo es la tangente, podemos plantear,



$$tg(28^o) = \frac{altura}{50} \Rightarrow 50 \cdot tg(28^o) = altura$$

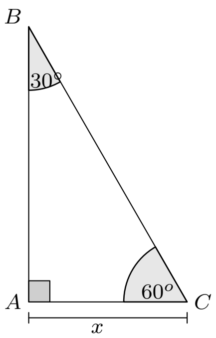
El árbol mide aproximadamente $26,58$ *metros.*

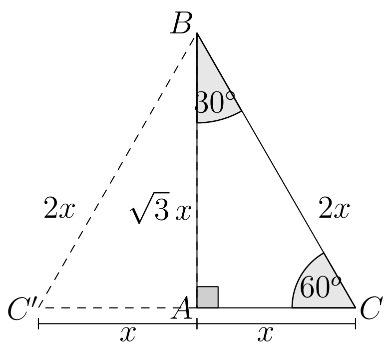
8.2. Valores de las razones trigonométricas de algunos ángulos particulares.

Vamos a determinar, en primer lugar, el valor de estas razones para un ángulo α que mida 60°. Para esto vamos a considerar un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con un ángulo de 60°. Reflejando respecto de la recta que contiene al lado AB, obtenemos el triángulo $\triangle CBC'$ que es equilátero y sus lados miden dos veces la medida de $\overline{AC}$. Aplicando el Teorema de Pitágoras podemos calcular la medida de $\overline{AB}$:

$$(2x)^2 = (x)^2 + \overline{AB}^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3}\,x$$





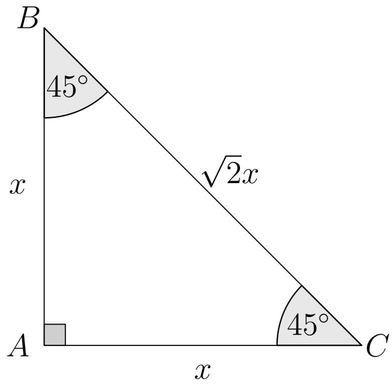
La información obtenida nos permite también calcular las razones asociadas a un ángulo de 30°. Tenemos entonces los siguientes resultados:

1. $sen(30°) = \dfrac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \dfrac{1}{2}$
2. $cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $tg(30°) = \dfrac{sen(30°}{cos(30°)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
4. $cosec(30°) = \dfrac{1}{sen(30°)} = 2$
5. $sec(30°) = \dfrac{1}{cos(30°)} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
6. $cotg(30°) = \dfrac{1}{tg(30°)} = \sqrt{3}$

Para determinar los valores asociados a un ángulo de 60°, podemos nuevamente utilizar los datos obtenidos o bien, aplicar la propiedad de los ángulos complementarios:

1. $cos(60°) = \dfrac{1}{2}$
2. $sen(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $cotg(60°) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
4. $sec(60°) = 2$
5. $cosec(60°) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
6. $tg(60°) = \sqrt{3}$

Si ahora consideramos un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 45°, como es isósceles,

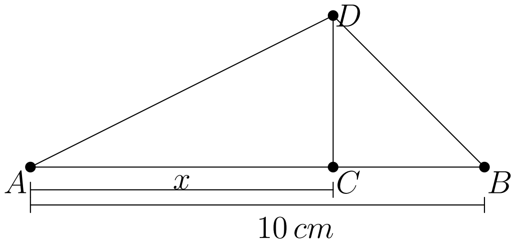


Una vez más, por el Teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$
$$x^2 + x^2 = \overline{BC}^2$$
$$\sqrt{2}\,x = \overline{BC}$$

1. $sen(45°) = \dfrac{\cancel{x}}{\sqrt{2}\cancel{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $cos(45°) = \dfrac{\cancel{x}}{\sqrt{2}\cancel{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $tg(45°) = \dfrac{sen(45°)}{cos(45°)} = 1$
4. $cosec(45°) = \dfrac{1}{sen(45°)} = \sqrt{2}$
5. $sec(45°) = \dfrac{1}{cos(45°)} = \sqrt{2}$
6. $cotg(45°) = \dfrac{1}{tg(45°)} = 1$

Ejemplo 8.4 *Sabiendo que el triángulo $\triangle BCD$ es isósceles y rectángulo en C, que el lado $\overline{AB}$ mide $10\,cm$ y el $\angle BDA$ mide 105^o, calculen la medida del segmento $\overline{AC}$*



Solución:
Como el triángulo $\triangle BCD$ *es rectángulo e isósceles, sus catetos* $\overline{BC}$ *y* $\overline{CD}$ *tienen igual medida,* $(10-x)\,cm$ *y, además, los ángulos* $\angle CBD$ *y* $\angle BDC$ *miden* 45^o *cada uno.*

Por otra parte, sabemos que

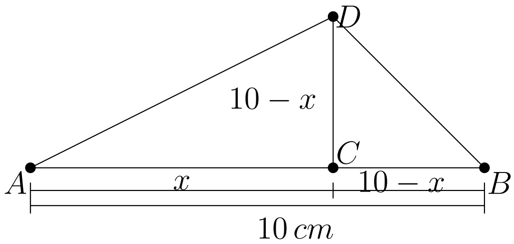
$$\angle ADC + \angle CDB = \angle ADB$$

Utilizando los datos del problema y los obtenidos,

$$\angle ADC + 45^o = 105^o \Rightarrow \angle ADC = 60^o$$

de donde

$$\angle A = 30^o$$



Trabajando en el $\triangle ACD$, *como* $\angle A = 30^o$

$$tg(30^o) = \frac{10-x}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10-x}{x} \Rightarrow \sqrt{3}\,x = 3\,(10-x)$$

$$\sqrt{3}\,x + 3x = 30 \Rightarrow (\sqrt{3}+3)\,x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{3}+3} \approx 6,34$$

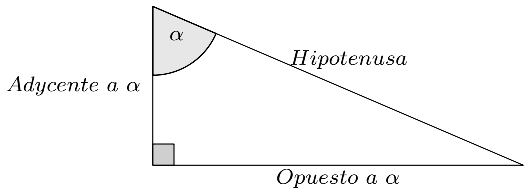
Por lo tanto el lado $\overline{AC}$ *mide aproximadamente* $6,34\,cm$.

8.3. Cálculo de los ángulos conociendo los lados de un triángulo rectángulo.

Si conocemos las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, podemos determinar también las medidas de sus ángulos agudos. Más adelante, estudiaremos en detalle las funciones trigonométricas y sus inversas. Por el momento, vamos a resolver este problema utilizando la calculadora.

Como existen diferentes sistemas de medición de ángulos, en primer lugar, debemos verificar la configuración de nuestra calculadora. Para utilizar el sistema sexagesimal debe estar en modo DEGREE (grados sexagesimales).

Si tenemos como datos dos lados de un triángulo rectángulo, entonces, por Pitágoras, conocemos los tres. Para determinar las mediadas de los ángulos agudos podemos usar cualquiera de las 3 relaciones trigonométricas que las calculadoras tienen de forma directa.



Por ejemplo, como

$$sen(\alpha) = \frac{Op}{H}.$$

$$\boxed{SHIFT} + \boxed{sin} + \boxed{(Op/H)} + \boxed{\circ\ '\ ''}$$

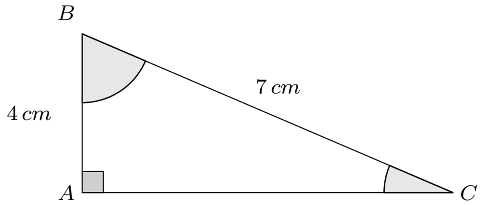
Del mismo modo, utilizando las medidas del cateto adyacente y la hipotenusa,

$$\boxed{SHIFT} + \boxed{\cos} + \boxed{(Ady/H)} + \boxed{\circ\ '\ ''}$$

o bien, usando las medidas de los catetos,

$$\boxed{SHIFT} + \boxed{tg} + \boxed{(Op/Ady)} + \boxed{\circ\ '\ ''}$$

Ejemplo 8.5 *Calcular las medidas de los ángulos del triángulo rectángulo del ejemplo 8.1.*



Solución: Para calcular la medida de $\angle B$, como tenemos la medida de su cateto adyacente y de la hipotenusa, sabemos que:

$$cos(\angle B) = \frac{4}{7}$$

Haciendo en la calculadora,

$$\boxed{SHIFT} + \boxed{\cos} + \boxed{(4/7)}$$

que da como resultado:

$$\angle B \approx 55,15^\circ$$

Como los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ son complementarios,

$$\angle C = 90^\circ - 55,15^\circ = 34,85^\circ$$

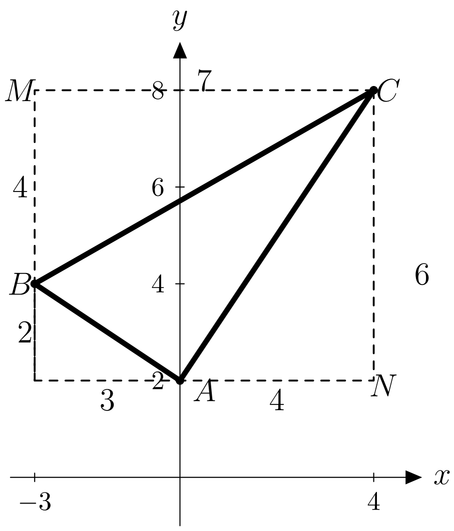
Ejemplo 8.6 *Determinen la medida de los ángulos interiores del triángulo ABC sabiendo que $A = (0,2)$, $B = (-3,4)$ y $C = (4,8)$*
Solución: *Vamos a comenzar calculando la medida de los lados del triángulo. Utilizando el Teorema de Pitágoras,*

$$\overline{AB} = \sqrt{13}, \quad \overline{AC} = \sqrt{52} \quad \textit{\textbf{y}} \quad \overline{BC} = \sqrt{65}$$

Por otra parte, como

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{52})^2 = 65 = (\sqrt{65})^2 = \overline{BC}^2$$

el triángulo es rectángulo en A.
Los triángulos $\triangle MCB$ y $\triangle NCA$ también son rectángulos. Como conocemos las mdidas de sus lados, podemos plantear las siguientes igualdades:



$$tg(\angle MCB) = \frac{4}{7} \Rightarrow \angle MCB \approx 29,74°$$

Similarmente,

$$tg(\angle ACN) = \frac{4}{6} \Rightarrow \angle ACN \approx 33,69°$$

Como $\angle MCB + \angle ACB + \angle ACN = 90°$, tenemos que

$$\boxed{\angle ACB \approx 26,57°}$$

Los ángulos ABC y ACB son complementarios, luego $\angle ABC \approx 63,43°$.

8.4. Relación Pitagórica

Una de las relaciones trigonómetricas más importantes deriva del Teorema de Pitágoras y nos permite relacionar el seno con el coseno de un mismo ángulo:

Relación Pitagórica

En todo triángulo rectángulo y para cualquiera de sus ángulos, se verifica que

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

Aplicando nuevamente las definiciones de seno y coseno, se tiene que

$$\begin{aligned} sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= \frac{(cat.\, opuesto\ a\ \alpha)^2}{(hipotenusa)^2} + \frac{(cat.\, adyacente\ a\ \alpha)^2}{(hipotenusa)^2} \\ &= \frac{(cat.\, opuesto\ a\ \alpha)^2 + (cat.\, adyacente\ a\ \alpha)^2}{(hipotenusa)^2} \\ &= \frac{(hipotenusa)^2}{(hipotenusa)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pues, por el Teorema de Pitágoras, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Ejemplo 8.7 *Sabiendo que el* $sen(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$, *determinen los valores del* $cos(\alpha)$ *y* $\mathrm{tg}(\alpha)$ *donde* α *es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo .*
Solución:
Por la identidad pitagórica,

$$\begin{aligned} sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 \\ \frac{2}{25} + cos^2(\alpha) &= 1 \\ cos^2(\alpha) &= 1 - \frac{2}{25} \\ |cos(\alpha)| &= \sqrt{\frac{23}{25}} \end{aligned}$$

Observemos que $|cos(\alpha)| = cos(\alpha)$ *pues al ser* α *un ángulo de un triángulo rectángulo, su coseno es la razón entre dos números positivos. Por lo tanto,*

$$\boxed{cos(\alpha) = \frac{\sqrt{23}}{5}}$$

Ejemplo 8.8 *Determinen la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que uno de sus ángulos verifica la ecuación:*

$$6\, cos^2(\alpha) + 5\, sen(\alpha) = 7$$

Solución:
Aplicando la relación pitagórica, podemos transformar la ecuación en otra equivalente que contenga $sen^2(\alpha)$ *y* $sen(\alpha)$.

$$\begin{aligned} 6\, cos^2(\alpha) + 5\, sen(\alpha) &= 7 \\ 6\,(1 - sen^2(\alpha)) + 5\, sen(\alpha) &= 7 \\ -6\, sen^2(\alpha)) + 5\, sen(\alpha) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo sen(α) *por* z*, resulta la siguiente ecuación cuadrática*

$$-6z^2 + 5z - 1 = 0$$

que tiene como soluciones a $z = \dfrac{1}{2}$ *y a* $z = \dfrac{1}{3}$*. Como* $z = sen(\alpha)$ *resultan las siguientes dos posibilidades:*

1. $sen(\alpha) = 1/2$*:*

$$sen(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 30°}$$

Por lo tanto uno de los ángulos mide $30°$ *y el otro* $60°$*.*

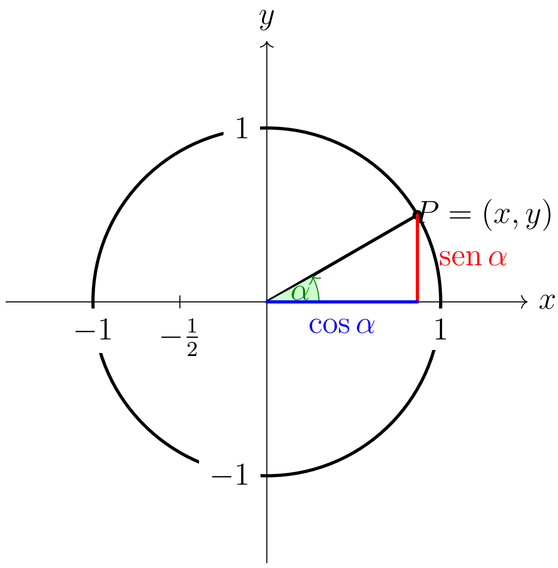
2. $sen(\alpha) = 1/3$*:*

$$sen(\alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\alpha \approx 19{,}47°}$$

Por lo tanto uno de los ángulos mide aproximadamente $19{,}47°$ *y el otro* $70{,}53°$*.*

8.5. La circunferencia trigonométrica

Consideremos una circunferencia de radio 1, con centro en el centro de coordenadas, un punto P de coordenadas (x, y) sobre la circunferencia y en el primer cuadrante y el segmento OP (radio de la circunferencia).



Como la circunferencia tiene radio 1,

$$sen(\alpha) = \frac{y}{1} = y,$$

es decir, el seno del ángulo está dado por la ordenada del punto P.
De forma similar,

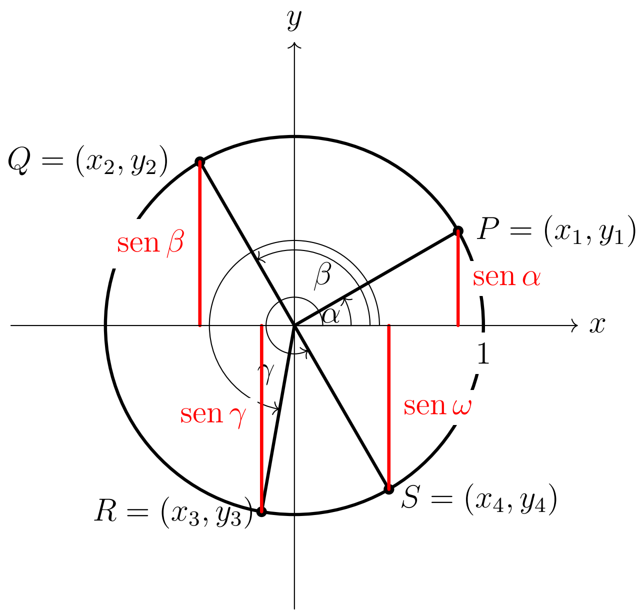
$$cos(\alpha) = \frac{x}{1} = x,$$

siendo el $cos(\alpha)$ la medida de la abscisa de P.

Los valores del seno y coseno del ángulo α se corresponden con la ordenada y la abscisa respectiva del punto P. Los valores de estas razones no dependen del radio de la circunferencia sino, únicamente de la medida del ángulo α. Considerar una circunferencia de radio 1 nos proporciona la enorme ventaja de poder asociar estas razones con los segmentos representados.

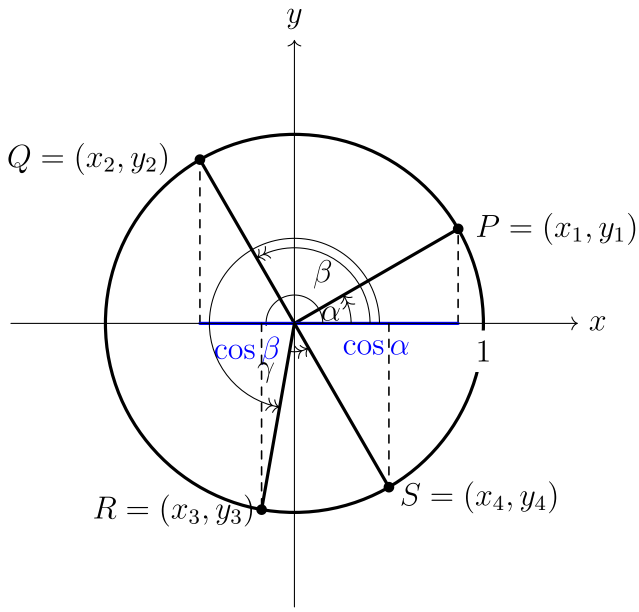
Esto nos permite independizar la idea de las razones trigonométricas respecto de los triángulos rectángulos, pudiendo definir estos valores para cualquier ángulo, en principio entre $0°$ y $360°$.

En el siguiente gráfico mostramos algunos ejemplos de los segmentos representativos del seno:



Observen que tanto en el primer cuadrante como en el segundo, los valores que toma el *seno* son positivos, pues $y_1, y_2 > 0$ mientras que en el tercero y cuarto son negativos, ya que $y_3, y_4 < 0$.

Similarmente, mostramos algunos ejemplos de los segmentos representativos del coseno:



Observen que tanto en el primer cuadrante como en el cuarto, los valores que toma el *coseno* son positivos, pues $x_1, x_4 > 0$ mientras que en el segundo y tercero son negativos, ya que $x_2, x_3 < 0$.

También pueden encontrarse segmentos representativos del resto de las relaciones trigonométricas. Más adelante veremos, en particular, aquellos que permiten determinar los valores de la tangente.

Observación 8.3 *Considerando que los valores del coseno y seno quedan establecidos por las coordenadas x e y, respectivamente de un punto P sobre la circunferencia trigonométrica, éstos varían entre -1 y 1. Es decir,*

$$-1 \leq cos(\alpha) \leq 1, \quad -1 \leq sen(\alpha) \leq 1$$

para cualquier α.

La siguiente tabla nos muestra algunos valores particulares del seno y del coseno. Los mismos surgen al considerar los segmentos representativos de dicho valores en la circunferencia trigonométrica.

	Ángulos			
	0°	90°	180°	270°
Seno	0	1	0	−1
Coseno	1	0	−1	0

8.6. Algunas identidades importantes

Existen muchas identidades donde intervienen relaciones trigonométricas. Hemos visto, por ejemplo que

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1,$$

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)},$$

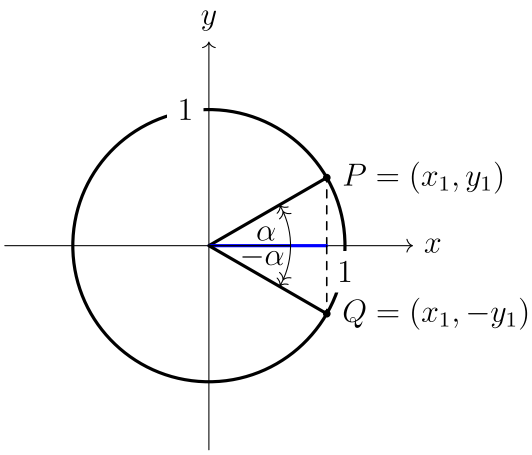
$$sen(90° - \alpha) = cos(\alpha)$$

8.6.1. Paridad e imparidad del coseno y seno.

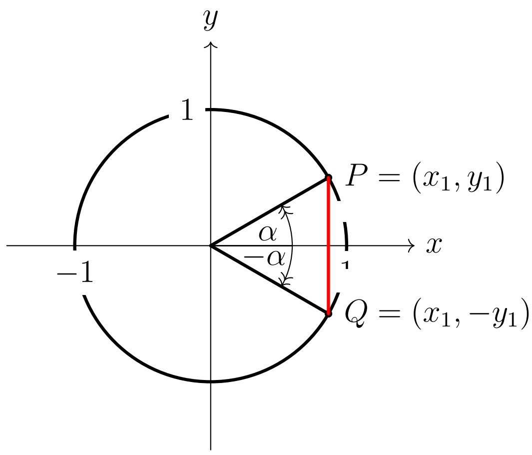
En la circunferencia trigonométrica se conviene en considerar ángulos "positivos" cuando lo medimos en el sentido antihorario y "negativos" cuando lo hacemos en el sentido horario. Con estas consideraciones resultan inmediatas las siguientes identidades:

$$cos(-\alpha) = cos(\alpha) \tag{8.1}$$

$$sen(-\alpha) = -sen(\alpha) \tag{8.2}$$



$cos(-\alpha) = cos(\alpha)$



$sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$

8.6.2. Fórmulas de adición

Son particularmente útiles las conocidas fórmulas de adición de ángulos:

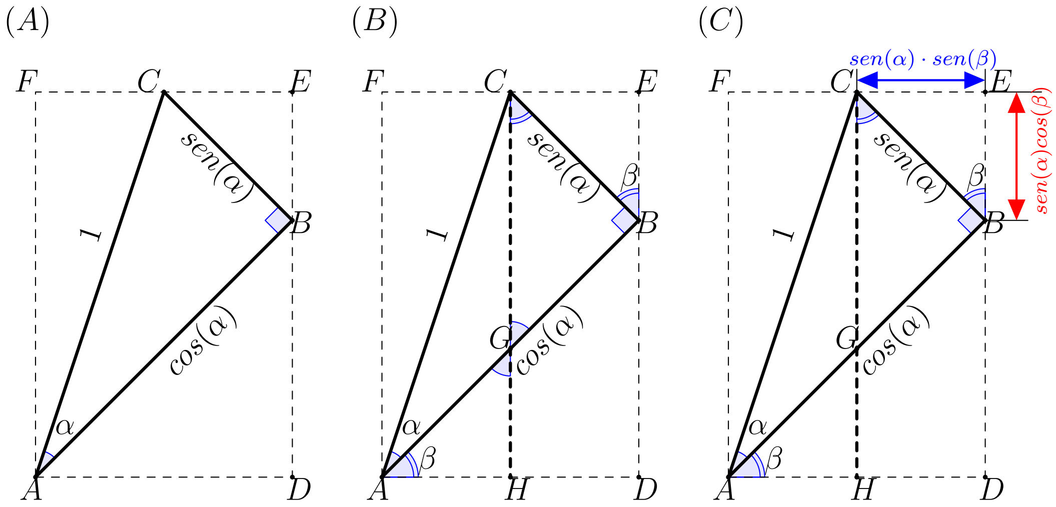
$$\boxed{sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha) \cdot cos(\beta) + sen(\beta) \cdot cos(\alpha)} \tag{8.3}$$

y

$$\boxed{cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sen(\alpha) \cdot sen(\beta)} \tag{8.4}$$

Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ rectángulo en B, cuya hipotenusa mida una unidad e inscripto en un rectángulo $ADEF$ tal como se muestra en la figura (A). Sea α el ángulo $\angle BAC$. Por definición de seno y coseno, tenemos que

$$sen(\alpha) = \overline{BC} \quad \text{y} \quad cos(\alpha) = \overline{AB}$$



Consideremos ahora el ángulo $\angle DAB$ (β) y tracemos una paralela al segmento AF que pase por el punto C. Esta recta corta al lado AB en G y al segmento AD en H, tal como se muestra en la figura (B). Observen que los ángulos $\angle AGH$ y $\angle CGB$ tienen la misma medida por ser opuestos por el vértice. Como los triángulos $\triangle AGH$ y $\triangle CGB$ son rectángulos, resulta que el ángulo $\angle GCB$ es congruente con el $\angle BAH$. Por otra parte, el ángulo $\angle GCB$ es congruente con el $\angle CBE$ por ser alternos internos entre paralelas. Por lo tanto los tres tienen la misma mediada, tal como se indica en la figura (B).

En el triángulo CEB tenemos que

$$sen(\beta) = \frac{\overline{CE}}{sen(\alpha)} \Rightarrow \overline{CE} = sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$$

Similarmente,

$$cos(\beta) = \frac{\overline{BE}}{sen(\alpha)} \Rightarrow \overline{BE} = sen(\alpha) \cdot cos(\beta)$$

Esta información se representó en la figura (C).

Planteando las mismas relaciones en el triángulo $\triangle ABD$, tenemos que:

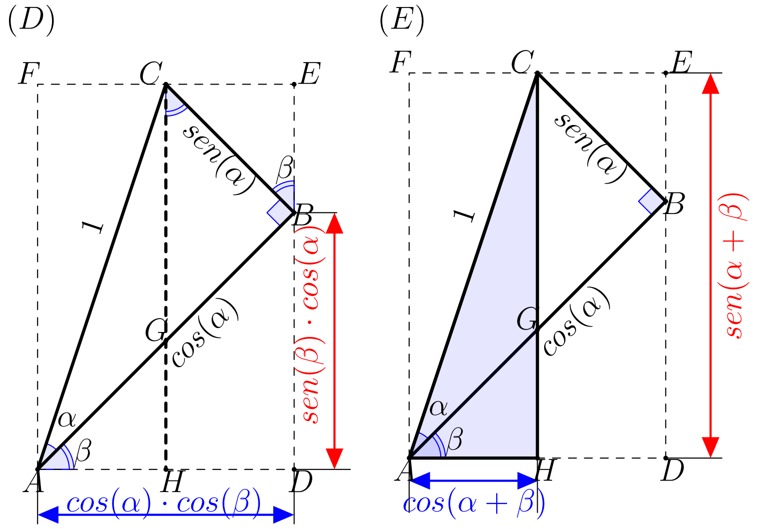
$$sen(\beta) = \frac{\overline{BD}}{cos(\alpha)} \Rightarrow \overline{BD} = sen(\beta) \cdot cos(\alpha)$$

y,

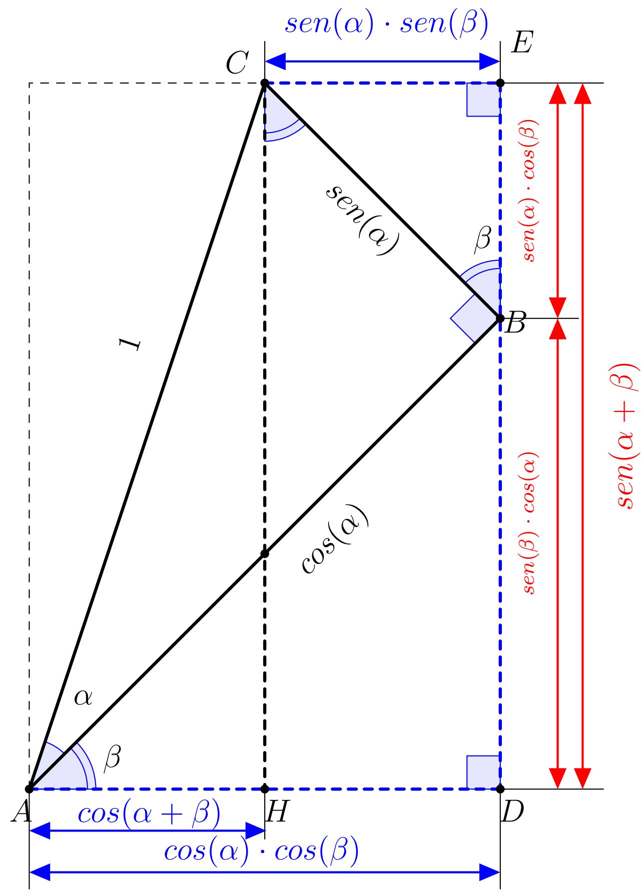
$$cos(\beta) = \frac{\overline{AD}}{cos(\alpha)} \Rightarrow \overline{AD} = cos(\alpha) \cdot cos(\beta)$$

Por último trabajando en el triángulo rectángulo $\triangle AHC$ Tenemos que $\overline{CH} = sen(\alpha + \beta)$

y $\overline{AH} = cos(\alpha + \beta)$:



Reuniendo los resultados de las figuras (C), (D) y (E), se deducen las identidades 8.3 y 8.4:



Un caso particular que en ocasiones resulta útil se obtiene cuando $\alpha = \beta$:

$$\begin{aligned} cos(\alpha + \alpha) &= cos(\alpha) \cdot cos(\alpha) - sen(\alpha) \cdot sen(\alpha) \\ &= cos^2\alpha - sen^2(\alpha) \end{aligned}$$

$$\boxed{cos(2\,\alpha) = cos^2\alpha - sen^2(\alpha)} \tag{8.5}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} sen(\alpha+\alpha) &= sen(\alpha)\cdot cos(\alpha) + sen(\alpha)\cdot cos(\alpha) \\ &= 2\, sen(\alpha)\cdot cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\boxed{sen(2\,\alpha) = 2\, sen(\alpha) cos(\alpha)} \tag{8.6}$$

Finalmente, aplicando por 8.3 y 8.2, tenemos que

$$\begin{aligned} sen(\alpha-\beta) &= sen(\alpha+(-\beta)) \\ &= sen(\alpha)\cdot cos(-\beta) + sen(-\beta)\cdot cos(\alpha) \\ &= sen(\alpha)\cdot cos(\beta) - sen(\beta)\cdot cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)\cdot cos(\beta) - sen(\beta)\cdot cos(\alpha)} \tag{8.7}$$

De las ecuaciones 8.4 y 8.1 obtenemos

$$\boxed{cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) + sen(\alpha)\cdot sen(\beta)} \tag{8.8}$$

8.6.3. Ángulos suplementarios

Aplicando las fórmulas 8.7 y 8.8 podemos establecer la relación entre el seno y el coseno de un ángulo y su suplemento:

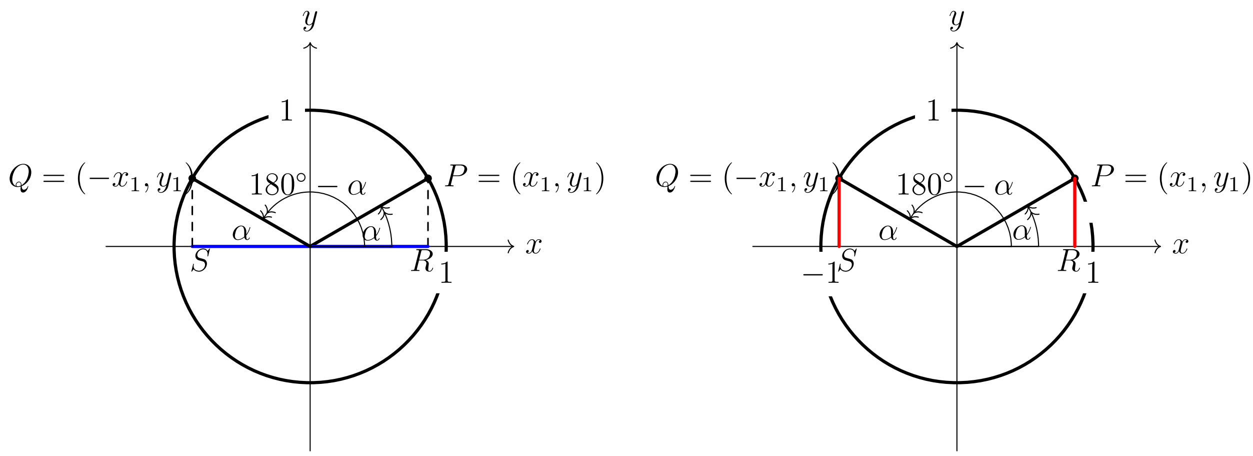
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180° - \alpha) &= \operatorname{sen}(180°)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\cos(180°) \\ &= 0\cdot\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\cdot(-1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)} \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned} \cos(180° - \alpha) &= \cos(180°)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(180°) \\ &= -1\cdot\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\cdot 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)} \tag{8.10}$$

Estas fórmulas también pueden ser deducidas de la circunferencia trigonométrica. Sea $O = (0,0)$, R el punto de coordenadas $(x_1, 0)$ y S el de coordenadas $(-x_1, 0)$. Como los triángulos $\triangle OPR$ y $\triangle OQS$ son congruentes, se tiene que $\overline{PR} = \overline{QS}$ y $\overline{OR} = \overline{OS}$. De estas igualdades se deducen las relaciones entre α y su suplemento.

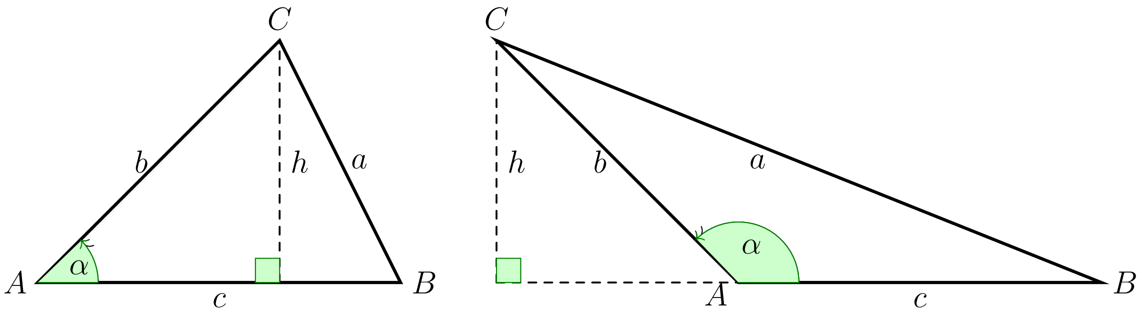


$cos(180° - \alpha) = -cos(\alpha)$ $sen(180° - \alpha) = sen(\alpha)$

8.7. Área de un triángulo

Es posible calcular el área de un triángulo conociendo la medida de dos de sus las lados y el ángulo comprendido.

Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ y supongamos que conocemos las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Como es habitual, denotemos por c y b, respectivamente, dichas medidas.



$h = b \cdot \text{sen}(\alpha))$ $\qquad$ $h = b \cdot \text{sen}(180° - \alpha) = b \cdot \text{sen}(\alpha)$

Tanto si el triángulo es acutángulo como obtusángulo, tomando como "base" el lado $\overline{AB}$, la altura h correspondiente a ese lado es

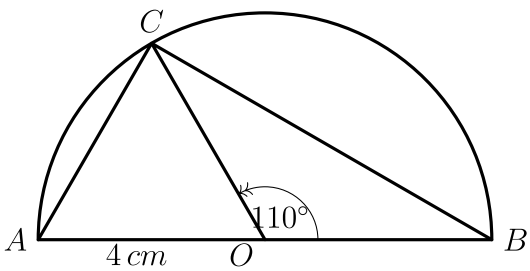
$$h = b\ \text{sen}(\alpha)$$

Como el área de un triángulo es $\frac{Base \cdot h}{2}$, resulta que el área del triángulo $\triangle ABC$ es:

$$\boxed{[\triangle ABC] = \tfrac{1}{2}\, b\, c\ \text{sen}(\alpha)}$$

donde α es el ángulo comprendido por $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Ejemplo 8.9 *Determinen el área del triángulo $\triangle ABC$ sabiendo que está inscripto en una semicircunferencia de centro en O y radio $4\,cm$ y que el ángulo $\angle BOC$ mide $110°$.*



***Solución**:*
Como $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son radios de la semicircunferencia, tenemos que

$$\begin{aligned}[\triangle BOC] &= \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \text{sen}(110° \\ &\approx 7,52\, cm^2\end{aligned}$$

Por otra parte, los triángulos $\triangle AOC$ y $\triangle BOC$ tiene igual área pues tienen igual base e igual altura. Luego,

$$[ABC] = [AOC] + [BOC] \approx 15,04\, cm^2$$

8.8. Teoremas del seno y del coseno

Los teoremas del seno y del coseno nos permiten relacionar las medidas de los lados y ángulos de un triángulo cualquiera. Generalizan la trigonometría a triángulos que no son necesariamente rectángulos.

Teorema del Seno

En todo triángulo $\triangle ABC$ se verifica que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Si además consideramos la circunferencia que inscribe al $\triangle ABC$, se verifica que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)} = 2r$$

donde r es el radio de la circunferencia.

Demostración:
Consideremos el $\triangle ABC$ y sea $\mathcal{C}$ la circunferencia que lo inscribe. Trazamos el diámetro que contiene al vértice C y denotamos por X a su otro extremo.

El $\triangle XBC$ es rectángulo en B por estar inscripto en una semicircunferencia. Luego,

$$\operatorname{sen}(\angle X) = \frac{a}{2r}$$

En la Figura 1, $\angle A = \angle X$ por ser ángulos inscriptos que abarcan el mismo arco de circunferencia, mientras que en la Figura 2, $\angle X$ y $\angle A$ son suplementarios pues el cuadrilátero $ABCX$ está inscripto en una circunferencia, en ambos casos se tiene que $\operatorname{sen}(\angle X) = \operatorname{sen}(\angle A)$. Luego,

$$\operatorname{sen}(\angle A) = \frac{a}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{a}{\operatorname{sen}(\angle A)}$$

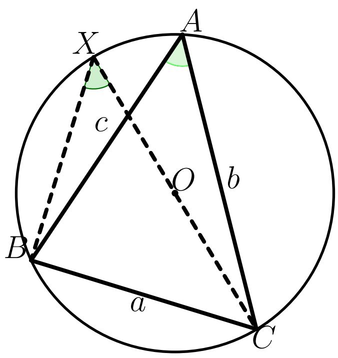


Figura1

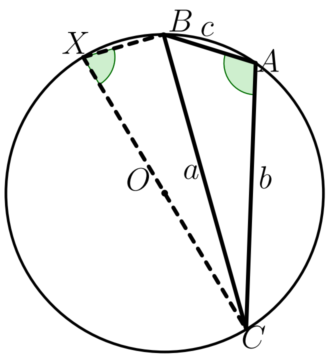


Figura2

Aplicando el mismo razonamiento a los otros ángulos del triángulo, se obtiene que

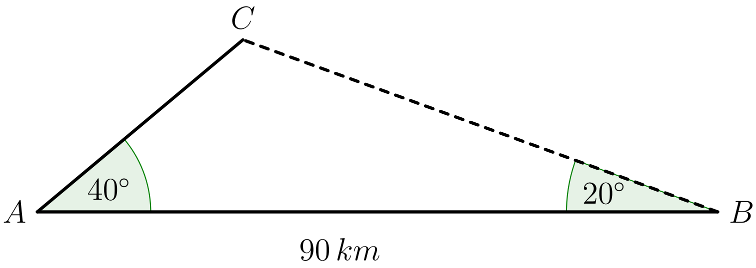
$$2r = \frac{b}{\operatorname{sen}(\angle B)}, \qquad 2r = \frac{c}{\operatorname{sen}(\angle C)}$$

de donde resutla que

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)} = 2r$$

Este teorema es útil cuando conocemos un sólo lado de un triángulo y dos de sus ángulos.

Ejemplo 8.10 *Los puntos A, B y C representan tres ciudades, Existen caminos rectilíneos AB y AC que conectan la ciudad A con las otras dos. En este momento se está constuyendo una ruta, también rectilínea, que unirá B con C. Se sabe que A está a $90\,km$ de B y la medida de los siguientes ángulos: $\angle BAC = 40°$ y $\angle ABC = 20°$. ¿Qué longitud tendrá la ruta que se está construyendo?*
Solución:
Realicemos una figura de análisis:

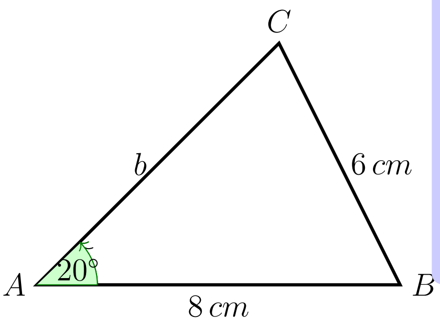


En primer lugar, observemos que el $\angle C$ mide $120°$. Aplicando el Teorema del Seno,

$$\frac{\text{sen}(120°)}{90} = \frac{\text{sen}(40°)}{\overline{CB}} \Rightarrow \overline{CB} = \frac{90 \cdot \text{sen}(40°)}{\text{sen}(120°)}$$

$$\boxed{\overline{CB} = 66{,}8\,km}$$

Ejemplo 8.11 *Se sabe que en el triángulo ABC, $\overline{AB} = 8\,cm$, $\overline{BC} = 6\,cm$ y $\angle A = 20°$. Calculen el área del $\triangle ABC$.*
Solución:
Realicemos una figura de análisis:



Tenemos como datos la medida de dos lados y del ángulo opuesto a uno de ellos. Aplicando el Teorema del Seno,

$$\frac{\text{sen}(20°)}{6} = \frac{\text{sen}(\angle C)}{8}$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\angle C) = 0{,}456$$

Haciendo en la calculadora,

$$\boxed{SHIFT} + \boxed{\text{sin}} + \boxed{0{,}456}$$

obtenemos que $\angle C = 27,13°$ y, por lo tanto

$$\angle B = 180° - (20° + 27,13°) = 132,87°$$

Sin embargo, esta no es la única solución posible. La ecuación

$$\text{sen}(\angle C) = 0,456$$

no tiene solución única. En realidad, las ecuaciones trigonométricas, cuando tienen solución, tienen infinitas. En el contexto de un problema de triángulos, es posible que $\angle C$ tome dos valores, como efectivamente ocurre en este caso: $\angle C = 27,13°$ o puede ser que $\angle C = 152,87°$ ya que α y su suplemtento, $180^{-}\alpha$ tiene el mismo seno.

En este segundo caso,

$$\angle B = 180° - (20° + 152,87°) = 7,13°$$

Por lo tanto, tenemos dos posibilidades:

Caso 1: $\angle C = 27,13°$ y, por lo tanto $\angle B = 132,87°$

El área del $\triangle ABC$ es $[\triangle ABC] = 1/2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \text{sen}\, 132,87°$

$$\boxed{[\triangle ABC] = 17,59\, cm^2}$$

Caso 2: $\angle C = 152,87°$ y, por lo tanto $\angle B = 7,13°$

El área del $\triangle ABC$ es $[\triangle ABC] = 1/2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \text{sen}\, 7,13°$

$$\boxed{[\triangle ABC] = 2,98\, cm^2}$$

Teorema del Coseno

En todo triángulo $\triangle ABC$ se verifica que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cdot \cos(\angle A)$$

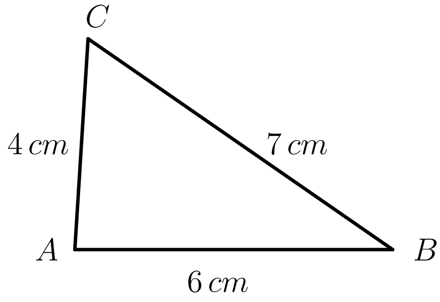
(El cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos dos veces el coseno del ángulo comprendido por el producto entre la medida de estos dos lados)
Demostración: La veremos en el capítulo 7.

Este teorema nos permite resolver problemas cuando conocemos los tres lados de un triángulo, o bien, dos de sus lados y el ángulo comprendido por ellos. (Con otros datos es preferible utilizar el teorema del seno)

Observación 8.4 *Este teorema es una generalización del Teorema de Pitágoras. Si el* $\angle A = 90°$, *resulta*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cdot \cos(90°) \\ &= b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cdot 0 \\ &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 8.12 *Determinen la medida del* $\angle B$ *del triángulo* $\triangle ABC$ *sabiendo que* $\overline{AB} = 6\,cm$, $\overline{AC} = 4\,cm$ *y* $\overline{BC} = 7\,cm$.
Solución:



Por el Teorema del Coseno tenemos que

$$4^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos(\angle B)$$
$$\frac{16 - 36 - 49}{-84} = cos(\angle B)$$
$$\frac{69}{84} = cos(\angle B)$$

$$\boxed{SHIFT} + \boxed{\cos} + \boxed{\tfrac{69}{84}}$$

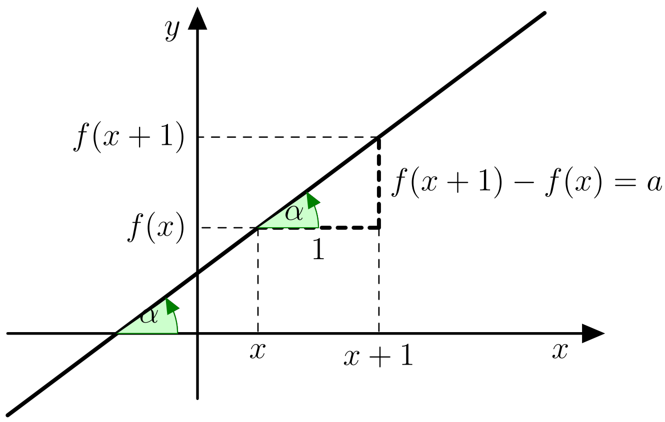
El ángulo $\angle B$ *mide aproximadamente* $34,77°$.

8.9. Pendiente de una recta

Sea $f(x) = ax + b$ una función lineal cualquiera. sabemos que su gráfica es una recta y hemos visto que su pendiente está relacionada con inclinación de la misma respecto del eje de abscisas. Más precisamente, la pendiente nos indica la variación de la función cuando la variable independiente se incrementa en una unidad a partir de un valor cualquiera. Es decir,

$$f(x+1) - f(x) = a \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ahora podemos profundizar su relación con el ángulo de inclinación.



Por la definición de tangente se tiene que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma con el semieje positivo de las abscisas:

$$\boxed{a = \operatorname{tg}(\alpha)}$$

8.10. EJERCICIOS

1. Un velero navega alrededor de una boya fija describiendo una circunferencia. El arco recorrido por el velero desde su posición inicial hasta su posición final es de $1700\,m$ y abarca un ángulo central de 120°. Calcule la distancia desde el velero hasta la boya.

2. Resuelvan las siguientes ecuaciones, expresando el resultado de manera exacta:

   a) $\operatorname{cosec} 60^\circ\, x - \operatorname{tg} 45^\circ\, x + 1 = 0.$

   b) $(\operatorname{sen} 60^\circ - \cos 45^\circ)x = 1 - \operatorname{sen} 45^\circ$

3. Para cada una de las igualdades propuestas determine el conjunto de existencia y establezca si es una identidad.

   a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$

   b) $\dfrac{1-\cos(2\alpha)+\operatorname{sen}(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)+\operatorname{sen}(2\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$

   c) $\cos(45^\circ + x) + \operatorname{sen}(x - 45^\circ) = 0$

   d) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\ \alpha$

   e) $\operatorname{tg}(\text{ arcsenx }) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones para $0 \leq x < 360^\circ$.

   a) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

   b) $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$

   c) $(2\cos x + 1)(2\operatorname{sen} x - \sqrt{2}) = 0$

   d) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

   e) $1 - \cos x = \sqrt{3}\operatorname{sen} x$

   f) $\cos(2x) - \cos x = 0$

   g) $\operatorname{tg}(45^\circ + x) + \operatorname{tg}(45^\circ - x) = 2$

   h) $\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) + \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$

   i) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 1$

   j) $\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x = 0$

5. Encuentre la ecuacion de la recta con ángulo de inclinacion 120° que pasa por el punto (1,2)

6. Determine el ángulo de inclinación de la recta $5x + 2y = 6$

7. En el triangulo $\triangle MNP$ (rectángulo en N) el lado $\overline{MP}$ es cinco veces mayor que el $\overline{MN}$. Calcule el ángulo $\angle M$.
   Rta. : $78^\circ 27' 46''$

8. El hilo de un barrilete se encuentra tenso y foma un ángulo de $54^\circ 20'$ con la horizontal. Encuentre la altura del barrilete con respecto al suelo si el hilo mide $85\,m$ y el operador sostiene al mismo a $1,5$m del suelo.
   Rta. : $70,6$m

9. Un ingeniero desea construir una rampa de $50\,m$ de largo que se levanta $5\,m$ del suelo. Calcule el ángulo que debe formar la rampa con la horizontal.
   Rta. : $5°44'21''$

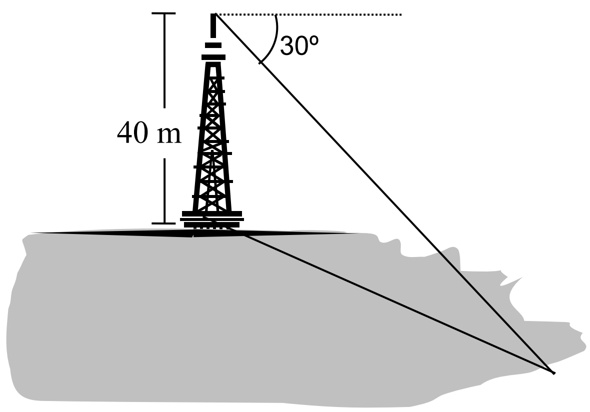
10. Desde dos departamentos ubicados en el séptimo y cuarto piso (distantes $9\,m$), se observa que los ángulos de depresión de un objeto situado en la acera son de $60°$ y $45°$ respectivamente. Calcule la distancia entre la base del edificio y el objeto, y la medida de la altura hasta el punto de observación en el septimo piso.
    Rta. : $d = \frac{9}{2}(\sqrt{3}+1); \quad h = \frac{9}{2}(3+\sqrt{3})$

11. La sombra de una persona de 1,80m de alto, producida por un foco de alumbrado es inicialmente de 3,60m. Después, la persona se para justo en el lugar donde terminaba su sombra, comprobando que ésta mide ahora 4m. ¿A qué altura esta el foco y a que distancia se encontraba inicialmente la persona del pie del foco?
    Rta.: altura: 18m, distancia: 32,4m

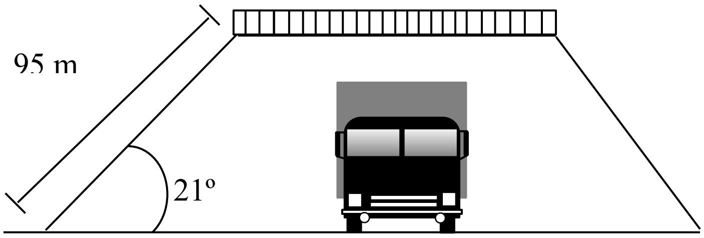
12. Desde la azotea de un edificio y desde una ventana situada 9m debajo, se observa que los ángulos de depresión de un objeto situado en el piso son $45°$ y $30°$ respectivamente. Calcule la distancia entre la base del edificio y el objeto, y la altura del edificio.
    Rta. : $d = h = \frac{9}{2}(3+\sqrt{3})$

13. Un paralelepípedo recto-rectángulo tiene $8\,cm\ x\ 6\,cm\ x\ 4\,cm$. Calcule el ángulo formado por la diagonal de la base y la diagonal de la caja (ambas diagonales parten del mismo vértice).
    Rta.:$\approx 21°48'$

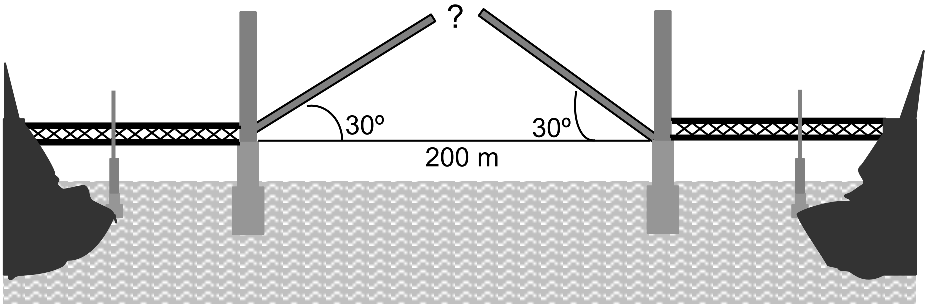
14. Una torre de $40\,m$ de altura está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de $30°$. ¿Cuál es el ancho del lago?
    Rta.: $69,28\,m$



15. El ángulo de elevación de una rampa de $9,5\,m$ que lleva a un puente sobre una avenida es de $21°$. Determine la altura que puede tener un camión para pasar por debajo del puente.
    Rta.: $3,4\,m$

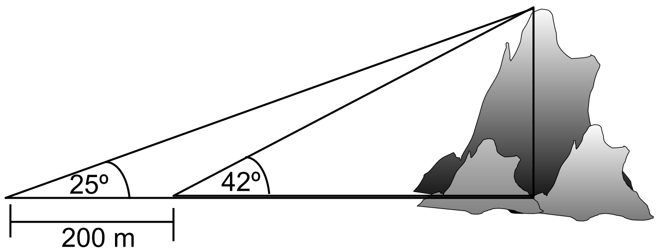


16. Un puente sobre un río tiene $200\,m$ de largo. Las dos secciones del puente rotan hacia arriba formando un ángulo de $30°$ para dar paso a los barcos. Un motociclista quiere saltar de una sección a otra, él sabe que puede dar saltos hasta de $20\,m$, ¿puede el motociclista saltar de un lado a otro, sin peligro?



Rta.: No, la separación entre las dos secciones es de $26,79\,m$

17. Un topógrafo determina que desde el punto A en el suelo el ángulo de elevación hasta la cima de una montaña mide $25°$. Cuando él se encuentra en un punto a $200\,m$ más cerca de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de $42°$. ¿Cuál es la altura de la montaña? (Suponga que la base de la montaña y los dos puntos de observación están sobre la misma recta).
Rta.: $193,44\,m$



18. Una escalera se apoya en una pared vertical, formando un ángulo θ con la horizontal y su punto más alto está a $4\sqrt{3}\,m$ de altura respecto al suelo. Cuando el ángulo disminuye $15°$ el punto más alto de la escalera queda a $2\sqrt{2}$ metros de altura. ¿Cuál es la longitud de la escalera?
Rta.: aprox. $16,5\,m$

19. Determine el área de un triángulo equilátero con lado de longitud $10\,cm$.
    Rta.: $25\sqrt{3}\,cm^2$.

20. Un triángulo tiene un área de $16\,cm^2$. Si dos de sus lados miden $5\,cm$ y $7\,cm$, respectivamente. Determine el ángulo que forman estos dos lados.
    Rta.: $66°$

21. Determine el área de un triángulo cuya base mide $16\,m$ y los ángulos adyacentes a la misma son de $65°$ y $32°$, respectivamente. Rta.: 62 cm2

22. Dos observadores colocados a $110\,m$ de separación en A y en B, en la orilla de un río están mirando una torre situada en la orilla opuesta en el punto C. Midieron los ángulos $\angle CAB$ y $\angle CBA$ fueron de $43°$ y $57°$, respectivamente. ¿A qué distancia esta el primer observador de la torre?
    Rta.: $93,7\,m$

23. Un poste telegráfico está inclinado con un ángulo de $15°$ de la vertical del sol. El poste produce una sombra de 10 metros de largo cuando el ángulo de elevación del sol es de $24°$. Encuentre la longitud del poste.
    Rta.: $4,1\,m$

24. Los puntos A y B son los extremos de un túnel que pasará debajo de una montaña. Desde un punto C, lejos de la montaña, un topógrafo puede ver esos puntos y determinar que AC mide $480\,m$, CB mide $320\,m$ y el ángulo C mide $72°$. ¿Cuál es la longitud del túnel?
    Rta.: $487,72\,m$

25. Los lados de un triángulo miden $5\,cm$, $8\,cm$ y $12\,cm$. Determine los ángulos del triángulo.
    Rta.: $18°$ $29°$ y $133°$

26. Un trozo de alambre de $60\,cm$ de largo es doblado en forma de triángulo. Si dos de sus lados tienen $24\,cm$ y $20\,cm$ de longitud, determine el mayor ángulo del triángulo.
    Rta.: $82°50'$

9. Funciones Trigonométricas

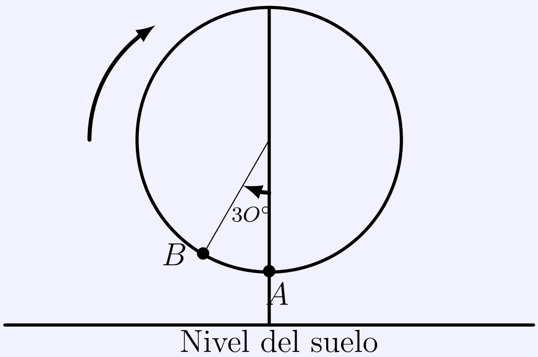
Problema

En el año 2000 se inauguró en Londres una noria gigante, conocida como el London Eye.

Esta enorme rueda, que se tranformó en una de las principales atracciones turísticas de Gran Bretaña, tiene 120 metros de diámetro y alcanza una altura máxima de 135 metros. Cada una de sus 32 cápsulas tiene una capacidad de alrededor de 25 pasajeros y demora unos 30 minutos en completar una revolución.

Desde una determinada posición una persona la observa girar en el sentido horario a velocidad angular constante. En ese momento un grupo de personas sube a una de las cápsulas (el punto A del diagrama).

1. ¿Cuánto tiempo tardan en llegar a la posición B?
2. ¿A qué altura se encuentran, respecto del nivel del piso, cuando llegan a dicha posición?
3. ¿Cuándo vuelven a estar por segunda vez a esa misma altura?¿Y por tercera vez?
4. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que se encuentren a $126,96$ metros de altura?
5. Determinen una función h que calcule la altura de la cápsula, t minutos después de pasar por A. tiempo

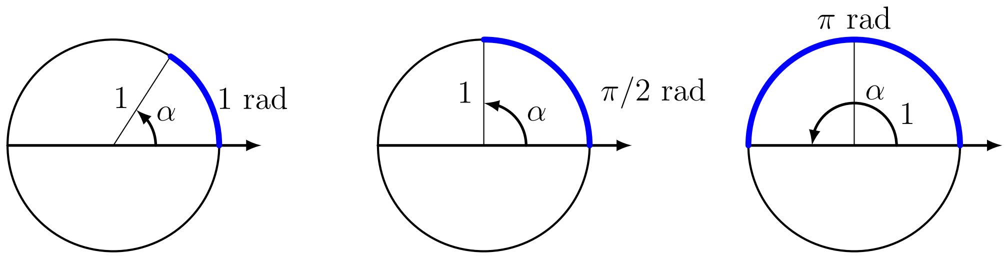


9.1. Sistema de medición en radianes

Hasta aquí hemos considerado todos los ángulos medidos en el sistema sexagesimal. Existen otros sistemas posibles. Particularmente, el más apropiado para trabajar con funciones trigonométricas (o funciones circulares) en Cálculo, es el sistema de medición de ángulos en radianes.

Definición

Consideremos un ángulo cualquiera α y la circunferencia de radio 1 que tiene como centro al vértice de α. La medida en *radianes* de este ángulo es la longitud del arco que subtiende.



La conversión de un sistema al otro se basa en que la longitud del arco de circunferencia es directamente proporcional al ángulo que subtiende.

Como un ángulo de un giro completo mide 360° y la longitud de la circunferencia de radio 1 es de π unidades, se tiene que

$$\boxed{360^\circ = 2\,\pi\,\mathrm{rad} \Rightarrow 1\,\mathrm{rad} = \left(\tfrac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ}$$

Ejemplo 9.1 *Expresen* 45° *en radianes.*
Solución:
Como $360^\circ = 2\,\pi\,rad \Rightarrow 1\,rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, *se tiene que*

$$1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)\,rad$$

Por lo tanto,

$$45^\circ = 45\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)\,rad = \frac{\pi}{4}\,rad$$

9.2. Funciones periódicas

Definición

Decimos que una función f es *periódica* con *período* T, si para toda x del dominio de f se verifica que $x+T$ también pertenece al dominio de f y además

$$f(x) = f(x+T)$$

Observación 9.1 *Es inmediato que si f es una función periódica con período T, también se verifica que es periódica con período kT con $k \in \mathbb{Z}$, es decir todo múltiplo entero de un período también es un período. De aquí en adelante consideraremos como el período de una función al menor número positivo T que verifica la definición anterior.*

Ejemplo 9.2 *Las funciones seno y coseno son funciones periódicas con período $T = 2\pi$.*

Ejemplo 9.3 *La función tangente tiene período $T = \pi$.*

En efecto, recordando que $tg\, x = \dfrac{sen\, x}{\cos\, x}$ y las identidades

$$sen\,(x + \pi) = -sen\, x$$

$$\cos\,(x + \pi) = -\cos\, x$$

se tiene que

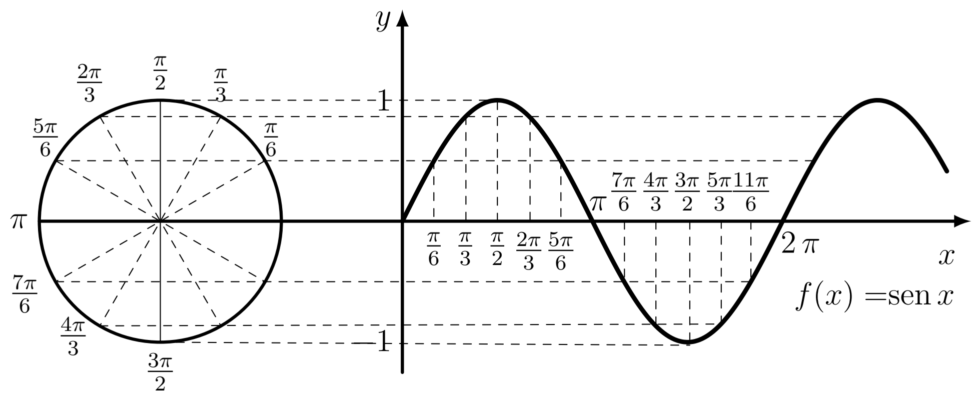
$$tg\,(x + \pi) = \frac{sen\,(x + \pi)}{cos\,(x + \pi)} = \frac{-sen\, x}{-\cos\, x} = \frac{sen\, x}{\cos\, x} = tg\, x$$

para toda x en el dominio de la función tangente.

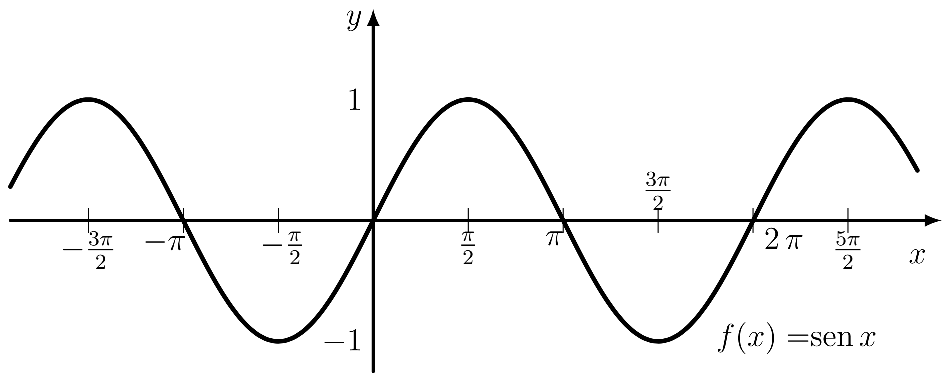
9.3. Las gráficas del Seno, Coseno y Tangente

Recordemos que en la circunferencia trigonométrica, el valor del seno de un ángulo, medido en el sentido antihorario, está dado por la ordenada del punto que es extremo del arco que subtiende dicho ángulo.

El siguiente diagrama muestra cómo puede construirse la gráfica de la función seno trasladando sobre un sistema de ejes cartesianos las ordenadas asociadas a cada ángulo.



La gráfica, conocida como *sinusoide*, puede extenderse a todo el eje positivo considerando ángulos de más de un giro. Puede observarse que si hacemos esto, los valores del seno van a repetirse con cada uno de estos giros. Por ello, esta función tiene un período igual a $2\,\pi$. Por otra parte, considerando negativos los ángulos medidos en el sentido de la agujas del reloj, también podemos extender su dominio a los reales negativos.



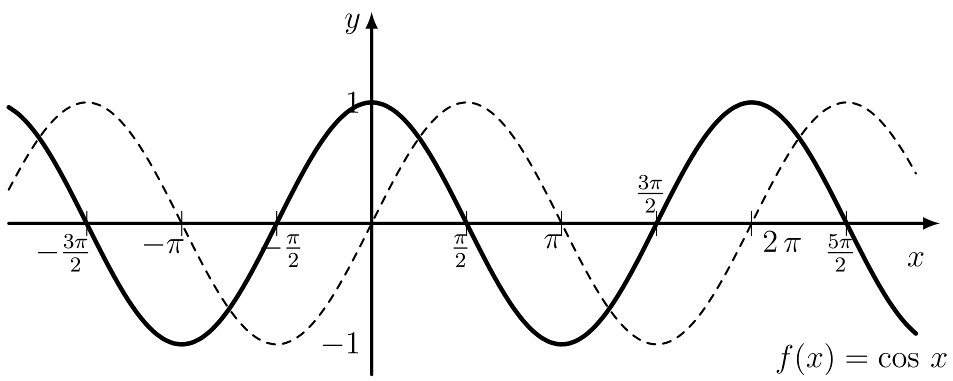
De esta forma, su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen el intervalo $[-1, 1]$. Toma el valor cero en todo los múltiplos enteros de π. Es decir, su conjunto de ceros es

$$C_0 = \{k\,\pi/k \in \mathbb{Z}\}$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

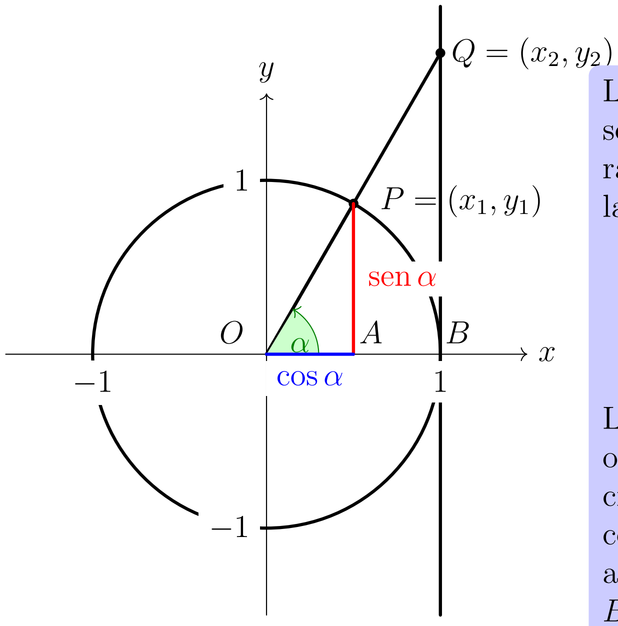
la gráfica del coseno es simplemente un desplazamiento horizontal de la gráfica del seno (se desplaza $\pi/2$ “hacia la izquierda”):



Por lo tanto, la función coseno también está definida en todo $\mathbb{R}$ y su imagen es el $[-1, 1]$, Corta al eje de abscisas en todos los múltiplos impares de $\pi/2$:

$$C_0 = \{(2k + 1)\,\frac{\pi}{2}/k \in \mathbb{Z}\}$$

Para obtener el gráfico de la función tangente, vamos primero a determinar cuál es su segmento representativo. Tracemos la recta tangente a la circunferencia en el punto $(1, 0)$:



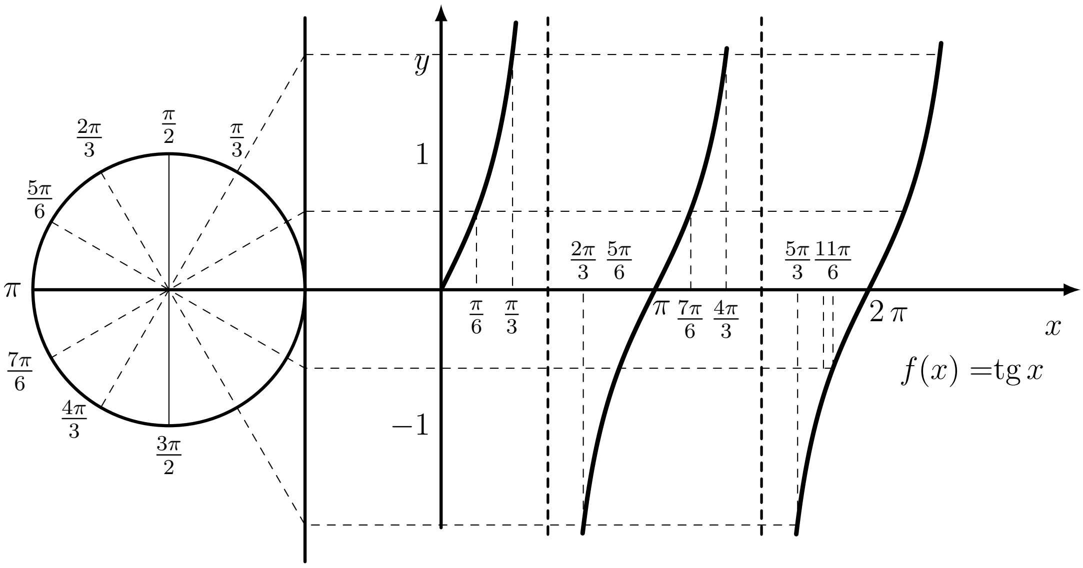
Los triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle BOQ$ son semejantes, por lo tanto las razones entre lados homólogos es la misma:

$$\frac{AP}{OA} = \frac{QB}{OB} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{QB}{1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = QB = y_2$$

Luego, la $\operatorname{tg}\alpha$ está dada por la ordenada del punto de intersección entre el lado del ángulo que contiene a P y la recta tangente a la circunferencia en el punto $B = (1, 0)$.

Seguiremos un procedimiento similar al que realizamos para determinar la gráfica del seno:



Tal como señalamos anteriormente, la función tangente es una función de período $T = \pi$. Tiene infinitas asíntotas verticales. Estas rectas pasan por todas las abscisas que son múltiplos impares de $\pi/2$. Por otra parte, su ceros (que son los ceros de la función seno) se encuentran en los múltiplos de π:

$$C_0 = \{k\,\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

Las funciones trigonométricas son de gran importancia en las aplicaciones. Son fundamentales para resolver problemas donde intervienen ondas electromagnéticas o sonoras, problemas de vibraciones, resonancias, etc. Permiten modelar fenómenos cíclicos o periódicos.

9.4. La función sinusoidal

Definición

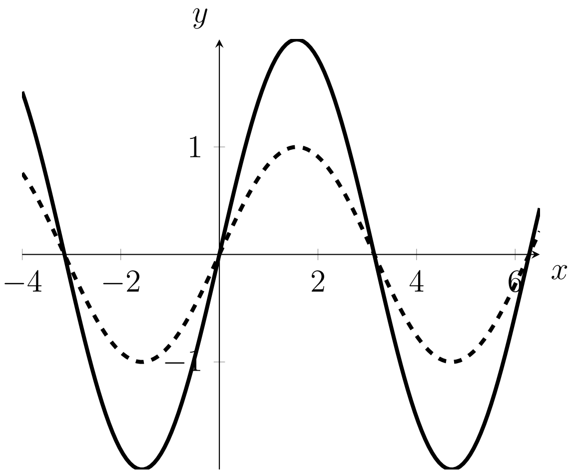
Llamamos función *sinusoidal* o *senoidal* a toda función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) \tag{9.1}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y además $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Hemos visto que los valores que toma la función seno oscilan entre -1 y 1, su conjunto imagen es $Im(\text{sen}) = [-1, 1]$. Si consideramos la función $f(x) = a \operatorname{sen} x$, al multiplicar todas las ordenadas por un valor $a \neq 0$, obtenemos todos los valores comprendidos entre $-a$ y a. Esto equivale a efectuar un cambio de escala en la gráfica de la función seno.

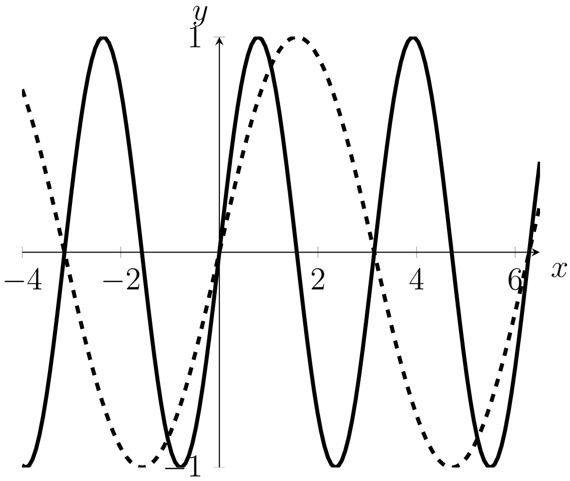
El siguiente diagrama muestra las gráficas de las funciones $f(x) = 2\text{sen}\, x$ (en trazo continuo) y $g(x) = \operatorname{sen} x$ (en líneas punteadas):



El parámetro b de la función sinusoidal (9.1) influye sobre su período y se lo conoce como *pulsación* de la misma. Puede probarse que

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

Cuando la pulsación es un número natural, nos dice cuántas ondas hay en un intervalo de longitud 2π. En el siguiente gráfico tenemos las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ (en trazo continuo) y $g(x) = \operatorname{sen} x$ (en líneas punteadas). Puede observarse que por cada onda completa de la gráfica de g hay dos ondas de f:



El número c se conoce como *fase inicial* de (9.1).

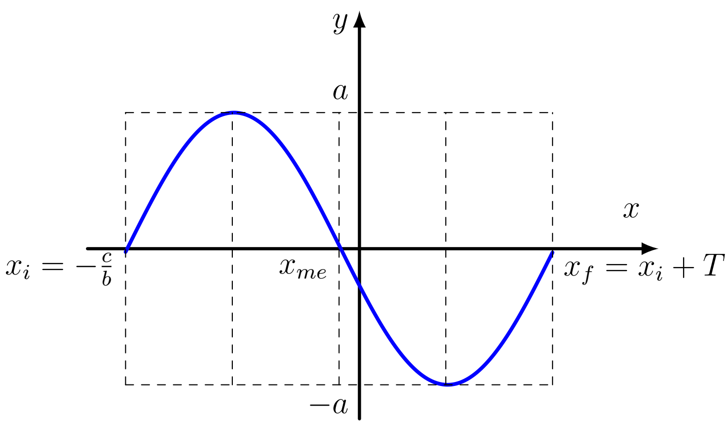
Consideremos una función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c)$$

y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $a > 0$. Para graficarla podemos proceder de la siguiente forma:

1. Su amplitud, a, nos indica que la gráfica de f está acotada entre a y $-a$.
2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow bx + c = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{c}{b}$. Este valor, que podemos denotarlo por x_i nos indica el "inicio"de una onda.
3. Calculamos su período $T = \dfrac{2\,\pi}{|b|}$ y determinamos el "final"de la onda: $x_f = x_i + T$ (la onda "termina"donde "comienza la siguiente")

   Estos cuatro números, a, $-a$, x_i y x_f, determinan un rectángulo que inscribe a la onda.
4. En el punto medio entre x_i y x_f, esto es $x_{me} = \dfrac{x_i + x_f}{2}$ la función vale 0. Y en los puntos medios entre x_i y x_{me}, y entre x_{me} y x_f la función alcanza sus valores máximos y mínimos. En general es recomendable verificar si alcanza un máximo o un mínimo en el primero de estos puntos.



5. Finalmente podemos graficar todas las ondas que necesitemos.

Ejemplo 9.4 *Graficar la función* $f(x) = 2\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ *en el intervalo* $[-\pi, 3/2\,\pi]$.

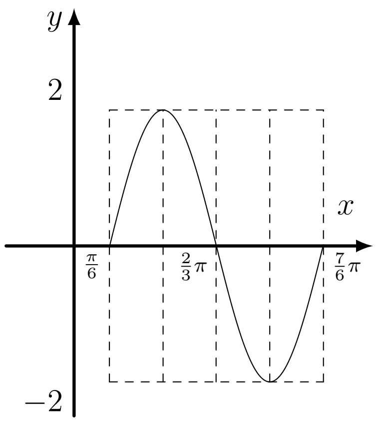
Solución
Sabemos que la onda oscila entre -2 *y* 2*. Por otra parte,*

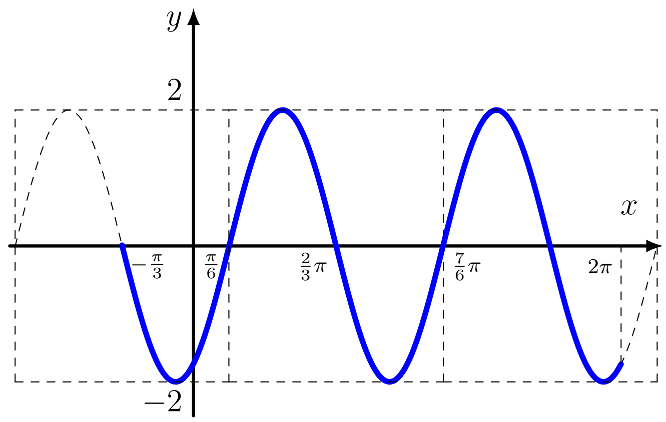
$$x_i = \frac{\pi}{6}, \quad T = \pi, \quad \text{y, por lo tanto,} \quad x_f = \frac{7}{6}\,\pi$$

Además f *vale* 0 *en* $x = \dfrac{x_i + x_f}{2} = \dfrac{1/6\,\pi + 7/6\,\pi}{2} = \dfrac{2}{3}\,\pi$*.*
Consideramos también los puntos

$$x = \frac{\pi/6 + 2/3\,\pi}{2} = \frac{5}{12}\,\pi \quad y \quad x = \frac{2/3\,\pi + 7/6\pi}{2} = \frac{11}{12}\,\pi$$

Como $f(5/12\,\pi) = 2\,\text{sen}(5/6\,\pi - 1/3\,\pi) = 2\,\text{sen}(1/2\,\pi) = 2$*, alcanza su máximo valor en* $5/12\,\pi$ *y, por ende, el mínimo valor,* -2*, en* $11/12\,\pi$*. Con esta información graficamos una onda y luego hacemos todas las copias que se necesiten:*





En el diagrama de la derecha hemos representado a f *en el intervalo* $[-\pi/3, 2\,\pi]$*.*

Ejemplo 9.5 *Graficar la función* $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ *en el intervalo* $[-\pi, 2\,\pi]$.

Solución
Vamos a escribir la función en términos del seno en lugar del coseno. Para ello nuevamente utilizaremos que $\cos(x) = \text{sen}(x + \pi/2)$*:*

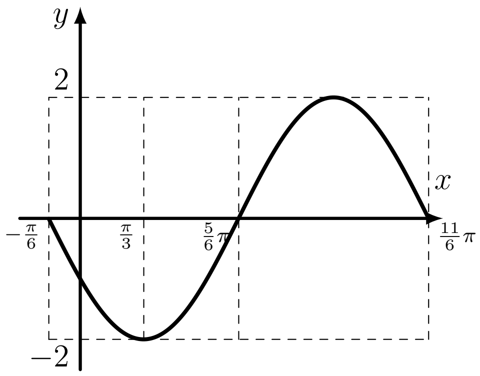
$$f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -2\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

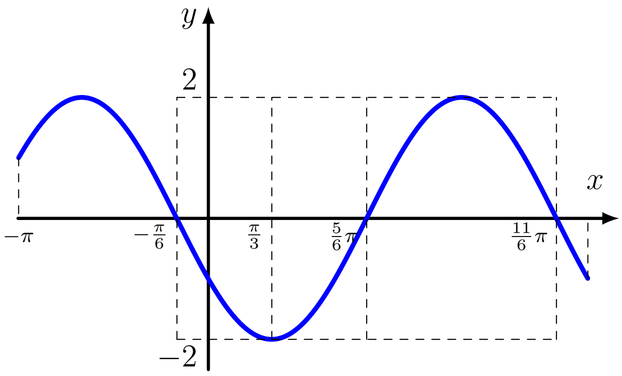
Podemos graficar una onda que oscila entre -2 *y* 2*, su período* $T = 2\,\pi$*, y que esté comprendida entre* $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ *y* $x_f = -\frac{\pi}{6} + 2\,\pi = \frac{11}{6}\pi$*. El punto medio de estos valores es* $x_{me} = \frac{5}{6}\pi$*. Luego,*

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = f\left(\frac{11}{6}\pi\right) = 0$$

Por último, en $x = \frac{1}{3}\pi$ f *toma el valor* $f(\pi/3) = -2$*, que es su mínimo valor.*

Con toda esta información, graficamos una onda y luego extendemos la gráfica al intervalo solicitado:





9.5. Inversas de las funciones trigonométricas

Como pudimos observar, las funciones trigonométricas no son inyectivas. En realidad, ninguna función periódica es inyectiva. Justamente, el hecho de que $f(x) = f(x+T)$ para todo x y un cierto T, nos muestra que existen puntos diferentes del dominio que tienen la misma imagen y, por ende, f no puede ser inyectiva.

Sin embargo, podemos restringir el dominio de la funciones trigonométricas de forma tal de que sean inyectivas. Estas restricciones no afectan la resolución de problemas, ya que por su periodicidad podemos siempre encontrar los valores que necesitemos en cualquier intervalo de su dominio.

La función Arco Seno

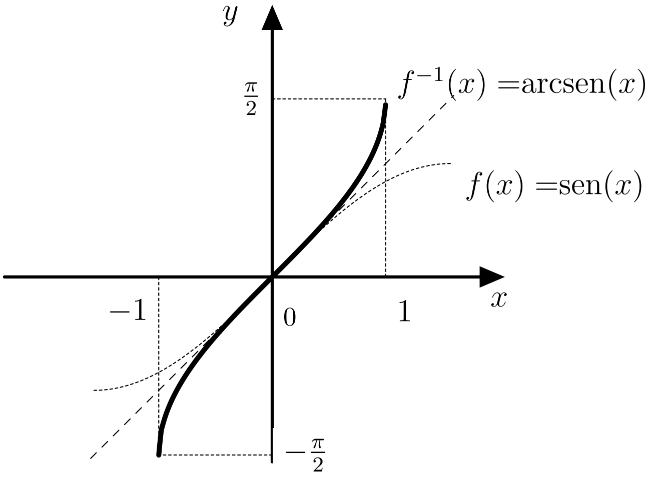
Si definimos la función seno como

$$\text{sen}: \left[-\frac{1}{2}\,\pi,\ \frac{1}{2}\,\pi\right] \to [-1,1]$$

entonces es biyectiva y, por lo tanto, admite función inversa. Su inversa es la función *arco seno*,

$$arcsen: [-1,1] \to \left[-\frac{1}{2}\,\pi,\ \frac{1}{2}\,\pi\right]$$

Recordemos que la gráfica de una función y de su inversa son simétricas respecto de la recta $y = x$. En la siguiente figura pueden ver su gráfica:



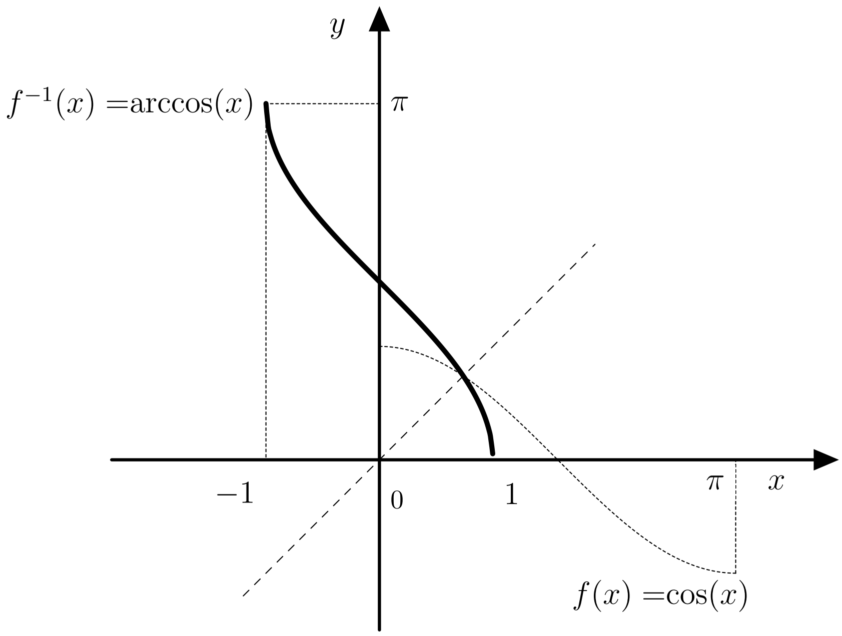
La función Arco Coseno

De forma análoga, podemos definir la inversa de la función coseno, restringiendo su dominio a un intervalo donde sea inyectiva. En este caso, el intervalo elegido es el $[0, \pi]$:

$$\cos : [0,\, \pi] \to [-1, 1]$$

entonces es biyectiva y, por lo tanto, admite función inversa. Su inversa es la función *arco coseno*,

$$arccos : [-1, 1] \to [0\, \pi,]$$



La función Arco Tangente

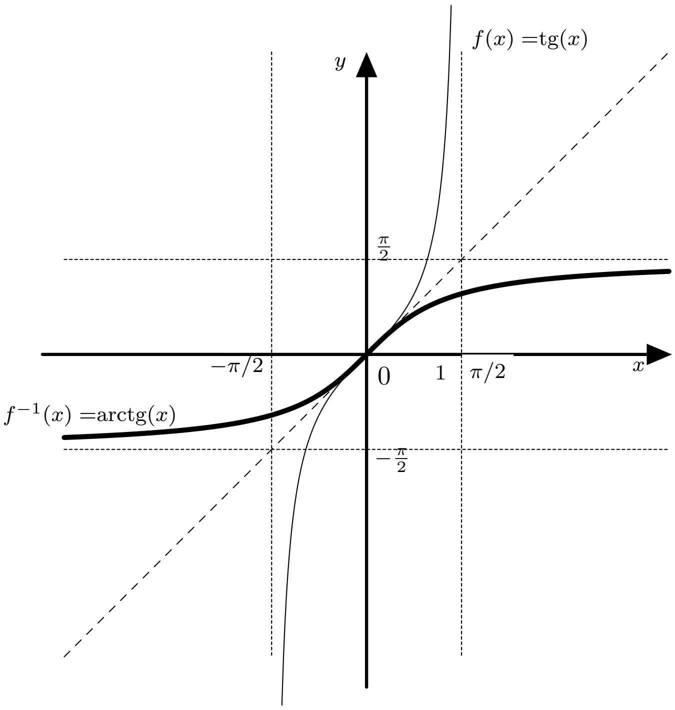
Por último veremos la gráfica de la inversa de la función tangente. Vamos a definirla en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$:

$$\text{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

Su inversa es la función *arco tangente*,

$$arctg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Las asíntotas verticales de la tangente se transforman, como consecuencia de la simetría, en asíntotas horizontales.



Las rectas $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica del arco tangente.

9.6. Ecuaciones trigonométricas

Una de las características de las ecuaciones trigonométricas es que si tienen una solución entonces tienen infinitas. Esto se debe a la periodicidad de las funciones circulares. En los problemas geométricos el número de soluciones es finito ya que en general se reduce a medidas de ángulos entre 0 y π radianes. En otros contextos puede interesarnos determinar las soluciones en algún intervalo real y por último, de forma más general, encontrar todas las soluciones de la ecuación. Para encontrar una solución haremos uso de las inversas de las funciones circulares. Luego una vez encontrada una solución, vamos a utilizar las gráficas de las funciones trigonométricas para determinar todas las que necesitemos (por supuesto, existen otros caminos posibles).

Ejemplo 9.6 *Determinar todas las soluciones de la ecuación*

$$\text{sen}(3x) = \frac{1}{2}$$

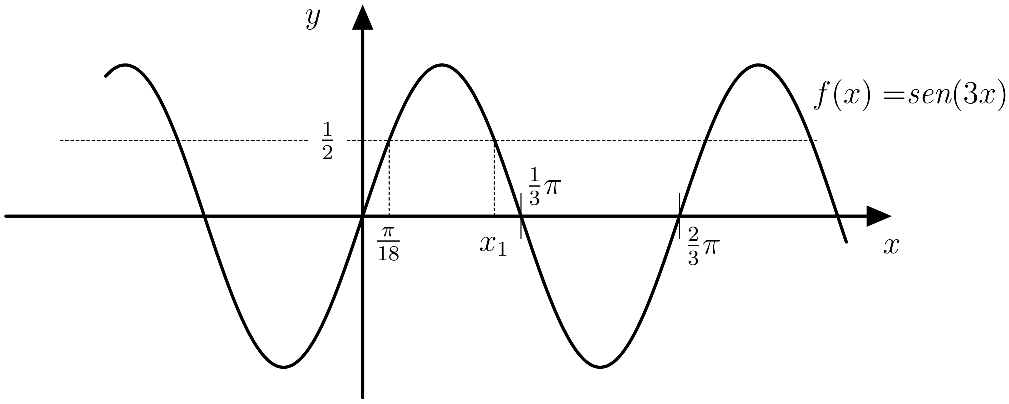
Solución:
En primer lugar, para $3x$ entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ se tiene que

$$\text{sen}(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = arcsen\frac{1}{2}$$
$$3x = \frac{1}{6}\,\pi$$
$$x = \frac{1}{18}\,\pi$$

Esta es una de las soluciones de la ecuación que queremos resolver.

Por otra parte, la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$*, es una onda que oscila entre* -1 *y* 1*, y su período es* $T = 2/3\,\pi$*. La recta* $y = 1/2$ *corta infinitas veces su gráfica. Las abscisas de cada uno de estos puntos es una solución de la ecuación.*

A continuación se muestra un gráfico de esta función, observen que en un período hay dos soluciones, $x_0 = \pi/18$ *y* x_1*:*



Para obtener x_1 *vamos a utilizar las simetrías de la gráfica de esta sinusoide: La distancia de* x_1 *a* $\frac{1}{3}$*pi es igual a la distancia de* $\frac{\pi}{18}$ *al origen. Luego,*

$$\frac{1}{3}\pi - x_1 = \frac{1}{18}\pi \Rightarrow \boxed{x_1 = \tfrac{5}{18}\pi}$$

A partir de estas dos soluciones, obtenemos las demás como consecuencia de la periodicidad de la onda:

$$\boxed{x = \tfrac{1}{18}\pi + \tfrac{2}{3}k\pi, \quad x = \tfrac{5}{18}\pi + \tfrac{2}{3}k\pi \quad \textbf{\textit{con}}\ k \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplo 9.7 *Determinar todas las soluciones de la ecuación*

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\cos^2 x$$

en el intervalo $[0,\, 2\pi]$.
Solución*:*
Recordemos que el $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}\,x\,\cos x$*. Por lo tanto,*

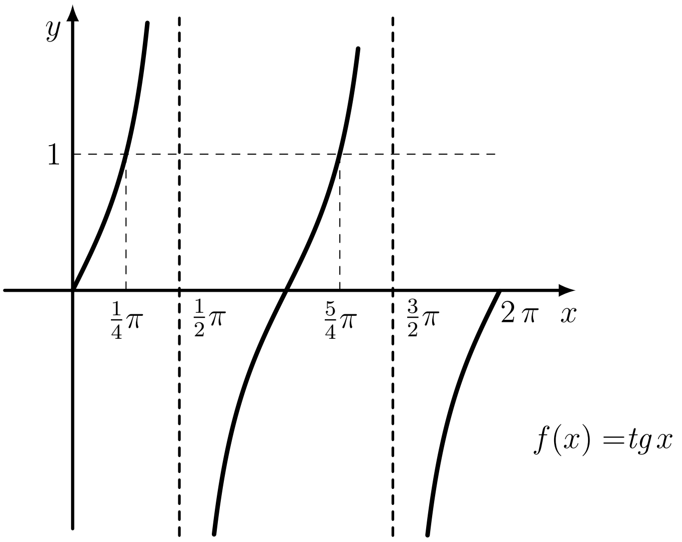
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) &= 2\cos^2 x\\
2\operatorname{sen}\,x\,\cos x &= 2\cos^2 x\\
\operatorname{sen}\,x\,\cos x &= \cos^2 x\\
0 &= \cos^2 x - \operatorname{sen}\,x\,\cos x\\
0 &= \cos x(\cos x - \operatorname{sen} x)
\end{aligned}$$

Como un producto es igual a 0 *si alguno de sus factores es* 0*, tenemos que* $\cos x = 0$ *o bien* $\cos x - \operatorname{sen} x = 0$.

Hemos visto que los ceros de la función coseno ocurren en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$*. En el intervalo* $[0,\, 2\pi]$ *se encuentran* $x_1 = \frac{1}{2}\pi$ *y* $x_2 = \frac{3}{2}\pi$*.*

Por otra parte,

$$\cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow 1 = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow x_3 = \frac{\pi}{4}$$



Como el período de la función tangente es $T = \pi$, la otra solución en el intervalo $[0,\, 2\pi]$ es $x_4 = \frac{5}{4}\pi$. Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es:

$$\boxed{S = \left\{\tfrac{1}{2}\,\pi,\ \tfrac{3}{2}\,\pi,\ \tfrac{1}{4}\,\pi,\ \tfrac{5}{4}\,\pi\right\}}$$

Ejemplo 9.8 *Determinen todas las soluciones de la siguiente ecuación:*

$$2\,\mathrm{sen}^2\,x = 3\cos x$$

Solución:
Aplicando la identidad pitagórica, tenenos que

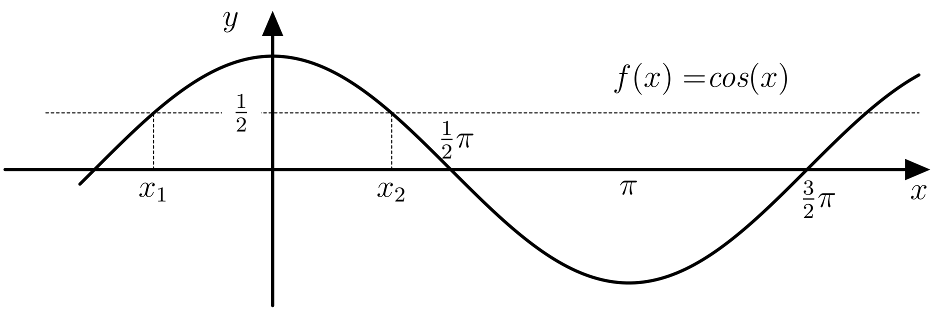
$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{sen}^2\,x &= 3\cos x \\ 2(1-\cos^2 x) &= 3\cos x \\ 0 &= 2\,\cos^2 x + 3\cos x - 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo $z = \cos x$, resulta la ecuación cuadrática

$$2z^2 + 3z - 2 = 0$$

cuyas soluciones son $z = 1/2$ y $z = -2$.Es decir,

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad y \quad \cos x = -2$$



Con la calculadora obtenemos que $x_2 = \frac{1}{3}\pi$ y por simetría, $x_1 = -\frac{1}{3}\pi$. Como el período del coseno es $T = 2\pi$, las soluciones de $\cos x = 1/2$ son

$$\boxed{x = -\tfrac{1}{3}\pi + 2k\pi \quad y \quad x = \tfrac{1}{3}\pi + 2k\pi \quad con \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Como por otra parte la ecuación $\cos x = -2$ no tiene solución pues el coseno oscila entre -1 y 1, las anteriores son todas las soluciones del problema.

9.7. EJERCICIOS

1. Completen la siguiente tabla:

sen$t$	$\cos t$	sen$(t+\pi)$	$\cos(t+\pi)$	sen$(\pi - t)$	sen$(2\pi - t)$	Menor valor positivo de t
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$					
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$-\frac{1}{2}$			$-\frac{\sqrt{3}}{2}$			
-1						
			$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$	
	0				-1	

2. Calcule sin utilizar calculadora:

   a) $\operatorname{sen}\left(2 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   Rta. : 1

   b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)$

   Rta.: 3

   c) $\operatorname{arcsen}(\arccos 1)$

   Rta.: 0

   d) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

   Rta.: $\sqrt{3}/2$

   e) $\sec(\operatorname{arctg}(-1))$

Rta.: $\sqrt{2}$

3. La intensidad I de la corriente (en amperes) en un alambre de un circuito de corriente alternada satisface: $I = 30\text{sen}(100\,\pi\,t)$ donde t es el tiempo medido en segundos.

   a) ¿Cuál es el periodo?

   Rta.:$\frac{1}{50}$seg

   b) ¿Cuántos ciclos (periodos) hay en un segundo?

   Rta.:50

   c) ¿Cuál es la máxima intensidad en la corriente?

   Rta.:30 amperes

4. Un objeto viaja por una vía circular, centrada en el origen, con una velocidad angular constante. La coordenada y del objeto en función del tiempo (t en segundos) está dada por:
$$y = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$$
¿En qué tiempo t el objeto cruza el eje x ? ¿ Existe un solo t?

   Rta.:$t = \frac{7}{12} + k, k \in Z_0^+$

5. Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 50Hz (Hertz) dada por.
$$i(t) = 30\,\text{sen}\left[100\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)\right]$$
donde $i(t)$ es la corriente medida en amperes, en t segundos. Halle el valor positivo más pequeño de t para que la corriente sea de 15 amperes.

   Rta.:$\frac{1}{360}$seg

6. Demuestren que si $x = a\,\cos\alpha$ e $y = b\,\text{sen}\alpha$, entonces $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

7. Demuestren que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes desigualdades:

   a) $4 + 4\text{sen}x - \cos^2 x \geq 0$

   b) $\text{sen}^2x + 4\cos x - 4 \leq 0$

8. Hallen el valor de k para que la recta de ecuacion $4x + ky = 5$ tenga un ángulo de inclinación de $\frac{3}{4}\,\pi$. Grafiquen para el valor de k hallado.

   Rta.: $k = 4$

9. Si consideran
$$\cos\beta = \frac{1+2k}{6k-1} \quad \text{y} \quad \sec\beta = \frac{2}{4k-5}$$
¿Cuál es el valor de k para que se verifiquen las igualdades anteriores sabiendo que β pertenece al primer cuadrante?

Rta.: $k = \frac{3}{2}$

10. Encuentren los valores de $\gamma \in [0,\, \pi]$ tales que:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)}{-\operatorname{tg}(\pi - \gamma)} = \sqrt{3}\cos\gamma$$

Rta.: $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\right\}$

11. Calculen los valores de $\beta \in [0, 2\pi]$ que verifiquen:

$$3\operatorname{tg}(\beta - \pi) = \sqrt{3}\sec\beta\,\operatorname{sen}\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)$$

Rta.: $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\right\}$

12. Dadas las funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$
$$g : [0, 2\pi) \to R/g(x) = \cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x$$

Determinen:

$$\{x \in \mathrm{R}/f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathrm{R}/g(x) = 0\}$$

Rta.: $\left\{1, \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\right\}$

13. Sabiendo que $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = -\dfrac{3}{2}$ son respectivamente las ecuaciones de la asíntota vertical y de la asíntota horizontal al gráfico de

$$f : D_f \to I_f/f(x) = \frac{mx + 5}{nx - 1}$$

y $g : R \to R/g(x) = \operatorname{sen} x$, calculen $\left(f^{-1} \circ g\right)(\pi)$.

Rta.: $\frac{5}{3}$

14. Determinen el conjunto solución de la ecuación:

$$2^{1-\cos x} = \sqrt{2}, \quad \forall x \in [0, 2\pi)$$

Rta.: $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}$

15. Dadas las siguientes funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 3\operatorname{sen}\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right)$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+/g(x) = 3^x$$
$$h : D_h \to I_h/h(x) = \tfrac{3-x}{2+x}$$
$$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/t(x) = x^2 - x$$

Determinen:

a) las raíces reales de la ecuación $g(x) + \frac{3}{g(x)} - 4 = 0$

Rta.: $x = 1, x = 0$

b) La amplitud y el periodo de f.

Rta.: 3 y π

c) $h^{-1}(0)$

Rta.: 3

d) $(t \circ f)(-\pi)$ (dar el valor exacto).

Rta.: $-\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{27}{4}$

16. Si se sabe que $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}, \alpha > 0, \beta > 0, \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{3}$, calculen el valor exacto de:

$$\operatorname{sen}(2\alpha + \beta)$$

Rta.: $\frac{7}{9}$

17. Dadas las funciones

$$f : D_f \to \mathbb{R}/f(x) = 9^{\log_4 x} + 27$$
$$g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}/g(x) = \operatorname{sen}(2x) - \cos x$$

Determinen:

$$\left\{x \in R/f(x) = 12 \cdot 3^{\log_4 x}\right\} \cup \{x \in [0, 2\pi)/g(x) = 0\}$$

Rta.: $\left\{4, 16, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

10. Vectores

En la Física existen distinto tipos de magnitudes. Entre ellas las magnitudes escalares y las vectoriales. Las primeras quedan determinadas dando un solo número real: su medida. Las longitudes son ejemplos de estas magnitudes. Hay otras para las cuales un número es insuficiente para determinarlas. El ejemplo típico es el de la velocidad, piensen en la velocidad del viento: además de conocer su intensidad, que estará dada por un número, es necesario conocer su **dirección** y **sentido**. No es suficiente saber,que es de $35\,km/h$, la información está incompleta si no sabemos, por ejemplo, que su orientación es de Norte a Sur. Estas magnitudes se conocen como **magnitudes vectoriales**. Las fuerzas constituyen otro ejemplo importante.

Las magnitudes vectoriales se representan mediante *segmentos orientados*. En una cierta escala su longitud representa la intensidad, la dirección es la de la recta que lo contiene (o cualquier recta paralela) y el sentido está dado por la orientación del segmento.

La medición requiere un número real, llamado *cantidad* y un símbolo que define la unidad, permitiendo interpretar a la magnitud, número de veces que la unidad está contenida en la cantidad.

Existen diferentes sistemas de unidades, pero a partir del año 1960, el Comité Internacional de Pesas y Medidas, adoptó un *Sistema Internacional de Unidades* cuyas siglas son SI, el cual fue incorporado por la mayoría de los países a sus textos legales y reglamentaciones.

En el año 1972, nuestro país instituyó el *Sistema Métrico Legal Argentino* (SIMELA) y adoptó el SI. Este sistema contiene actualmente siete unidades básicas para magnitudes consideradas independientes.

Las unidades básicas del sistema internacional son las que aparecen en la tabla siguiente:

UNIDADES BÁSICAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)		
MAGNITUD	**NOMBRE**	**SIMBOLO**
LONGITUD	METRO	m
MASA	KILOGRAMO	kg
TIEMPO	SEGUNDO	s
INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA	AMPERE	A
TEMPERATURA	KELVIN	K
CANTIDAD DE MATERIA	MOL	mol
INTENSIDAD LUMINOSA	CANDELA	cd

UNIDADES SUPLEMENTARIAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL		
MAGNITUD	**NOMBRE**	**SIMBOLO**
ANGULO PLANO	RADIAN	rad
ANGULO SÓLIDO	ESTEREORADIAN	sr

UNIDADES DERIVADAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL				
MAGNITUD	**NOMBRE**	**SÍMBOLO**	**DERIVADAS**	**BÁSICAS**
FRECUENCIA	HERTZ	Hz		$\mathbf{s^{-1}}$
FUERZA	NEWTON	N		$\mathbf{mkgs^{-2}}$
PRESIÓN	PASCAL	Pa	N/m^2	$\mathbf{m^{-1}kgs^{-2}}$
ENERGÍA	JOULE	J	Nm	$\mathbf{m^2kgs^{-2}}$
POTENCIA	WATT	W	J/s	$\mathbf{m^2kgs^{-3}}$
CARGA ELÉTRICA	COULOMB	C		**sA**
TENSIÓN ELÉCTRICA	VOLT	V	W/A	$\mathbf{m^2kgs^{-3}A^{-1}}$
RESISTENCIA ELÉCTRICA	OHM	Ω	V/A	$\mathbf{m^2kgs^{-3}A^{-2}}$
CONDUCTANCIA	SIEMENS	S	A/V	$\mathbf{m^{-2}kg^{-1}s^3A^2}$
CAPACITANCIA	FARAD	F	C/V	$\mathbf{m^{-2}kg^{-1}s^4A^2}$
FLUJO MAGNÉTICO	WEBER	Wb	V·s	$\mathbf{m^2kgs^{-2}A^{-1}}$
INDUCTANCIA	HENRY	H	Wb/A	$\mathbf{m^2kgs^{-2}A^{-2}}$
INDUCCIÓN MAGNÉTICA	TESLA	T	Wb/m^2	$\mathbf{kgs^{-2}A^{-1}}$
FLUJO LUMINOSO	LUMEN	Lm		**cdsr**
INTENSIDAD LUMINOSA	LUX	lx	Lm/m^2	$\mathbf{cdsrm^{-2}}$
TEMPERATURA CELSIUS	GRADOS CELSIUS	° C		**K**

Los prefijos SI para la formación de múltiplos y submúltiplos son los siguientes:

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{-6}	micro	μ
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m

UNIDADES de longitud, fuerza, capacidad, área y volumen

Unidades de longitud						
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Unidades de fuerza				
kN	daN	N	dN	mN

Unidades de capacidad						
kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

Unidades de área						
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Unidades de volumen						
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

10.1. Vectores geométricos

Un segmento de recta queda determinado por sus extremos. Cuando estos puntos están dados en un cierto orden, se dice que el segmento está *orientado*.

Definición. (Vector)

Se llama **vector** a todo segmento orientado. El primero de los puntos que lo determinan se llama *origen* y el segundo **extremo** del vector.

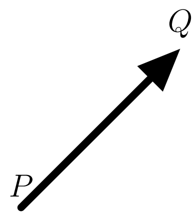


Figura 10.1: Vector $\overrightarrow{PQ}$

La recta que contiene al vector $\vec{PQ}$ (o cualquier recta paralela a ella) determina la dirección del mismo. El sentido está dado por la orientación del segmento (origen en P u origen en Q)

Vamos a decir que dos vectores son **paralelos** cuando tienen la misma dirección.

Definición (Módulo de un vector)

Se llama **módulo (o norma)** de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define. Al módulo de un vector $\vec{v}$ lo denotaremos de la siguiente manera:

$$|| \vec{v} ||$$

En esta primera parte el objetivo es definir las operaciones básicas entre vectores. Estas operaciones surgen naturalmente de problemas de la Física. Por ejemplo la aplicación de dos o varias fuerzas sobre un mismo punto nos conduce a la necesidad de la suma de fuerzas cuyo resultado será la acción conjunta de todas ellas. Para poder definir la suma de vectores debemos definir un concepto previo sumamente importante:

Definición (Vectores equivalentes)

Dos vectores se dicen **equivalentes** si tienen igual módulo, dirección y sentido.

Por otra parte, seguramente recordarán de sus clases de Física que para sumar vectores es posible aplicar la "regla del paralelogramo": dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con origen en un mismo punto, construimos un paralelogramo trazando por el extremo de $\vec{w}$ una paralela al $\vec{v}$ y por el extremo de $\vec{v}$ una paralela al $\vec{w}$. La suma ("resultante") es el vector que tiene su origen en el origen de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y extremo en el vértice opuesto del paralelogramo. Apoyados

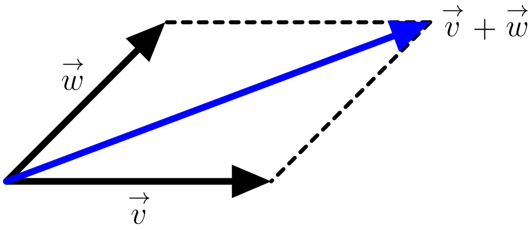


Figura 10.2: Regla del paralelogramo

en las propiedades geométricas de los paralelogramos, esta regla puede simplificarse:

Suma de vectores.

Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son dos vectores cualesquiera, entonces la **suma** $\vec{v}+\vec{w}$ es el vector que se determina de la siguiente manera: se coloca el vector $\vec{w}$ (en realidad, un vector equivalente a $\vec{w}$) de modo que su origen coincida con el extremo de $\vec{v}$. Luego, el vector $\vec{v}+\vec{w}$ se representa mediante el segmento orientado cuyo origen es el de $\vec{v}$ y su extremo el de $\vec{w}$.

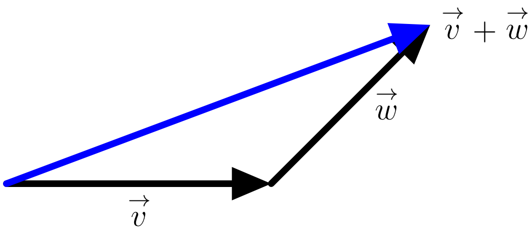


Figura 10.3: Suma de vectores.

La definición anterior puede generalizarse fácilmente a la suma de tres o más vectores. Simplemente hay que colocar los vectores de manera tal que el origen de cada uno coincida con el extremo del anterior. Luego, el vector que une el origen del primero con el extremo del último es la suma de todos ellos.

Según la regla anterior puede ocurrir que al sumar vectores el origen del primero de ellos coincida con el extremo del último:

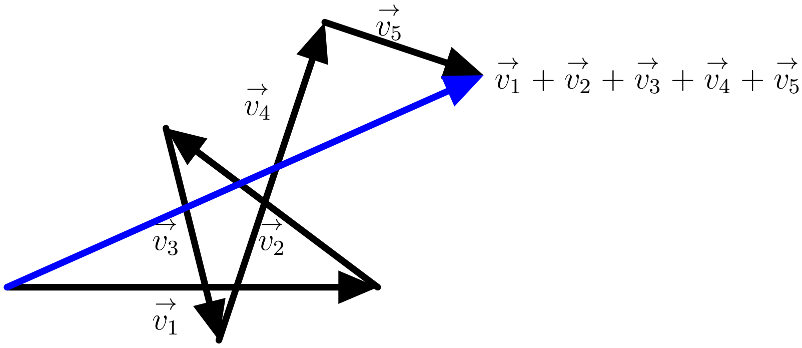


Figura 10.4: Regla de la poligonal.

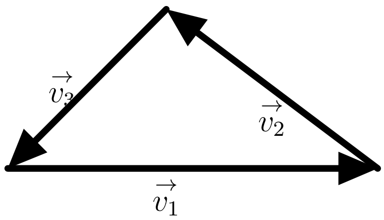


Figura 10.5: Resultante nula.

Definiciones (Vector nulo y opuesto de un vector)

Se conviene en definir al **vector nulo** como aquel que tiene módulo 0. Geométricamente es un punto (no un segmento) y carece tanto de sentido como de dirección.

Se llama **opuesto** del vector $\vec{v}$ al vector que tiene igual dirección, igual módulo y sentido contrario al de $\vec{v}$. Este vector se denota por $-\vec{v}$

Propiedad 10.1 *De las definiciones anteriores se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:*

1. La suma de vectores es asociativa, es decir, para vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ cualesquiera, es cierto que
$$\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right)$$
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ (conmutatividad de la suma)
3. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ (el vector nulo es neutro respecto de la suma)
4. $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

Definición (Resta de vectores)

Se llama **diferencia** $\vec{v} - \vec{w}$ de dos vectores, a la suma del vector $\vec{v}$ y el opuesto de $\vec{w}$. Es decir,
$$\vec{v} - \vec{w} =_{\text{def}} \vec{v} + (-\vec{w})$$

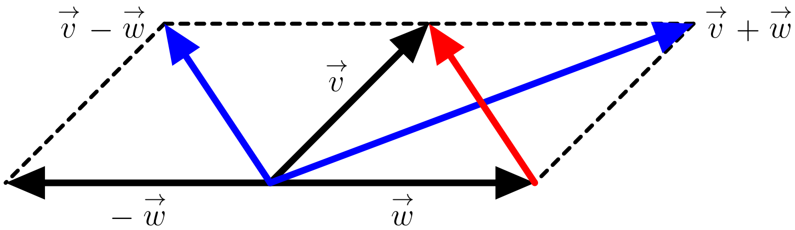


Figura 10.6: Resta de vectores.

Observación 10.1 *Tal como se puede observar en la figura anterior, $\vec{v} - \vec{w}$ puede representarse mediante la "otra"diagonal del paralelogramo determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$.*

Definición (Producto de un escalar por un vector).

Sea $\vec{v} \neq \vec{0}$ y $k \neq 0$. Se define el *producto* $k\,\vec{v}$ como el vector cuya longitud es $|k|$ veces la longitud de $\vec{v}$ y cuya dirección es la de $\vec{v}$. Si además $k > 0$, entonces $k\,\vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{v}$, y en el caso $k < 0$, tiene el sentido contrario al de $\vec{v}$. Al vector $k\,\vec{v}$ se lo denomina *múltiplo escalar de* $\vec{v}$.

Además, se conviene en definir que si $k = 0$ o $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $k\,\vec{v} = \vec{0}$.

Observación 10.2 *De la definición anterior, resulta que* $(-1)\,\vec{v} = -\,\vec{v}$.

Observación 10.3 *De la definición de paralelismo, resulta que dos vectores no nulos $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos si existe un $k \neq 0$ tal que $\vec{v} = k\,\vec{w}$.*

10.2. Vectores en sistemas de coordenadas

Dado un sistema de coordenadas rectangulares, se llama **coordenadas cartesianas** o **componentes** de un vector a las coordenadas de un vector equivalente cuyo origen es el centro de coordenadas.

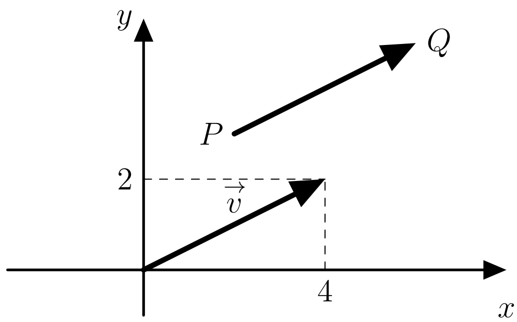


Figura 10.7: Vectores en un sistema de coordenadas.

Las coordenadas de $\overrightarrow{PQ}$ son las coordenadas del extremo de $\vec{v}$, es decir, $(4, 2)$ Se escribe: $\overrightarrow{PQ} = (4, 2)$.

La introducción de un sistema de coordenadas permite simplificar los cálculos en los problemas que involucran vectores.

Consideren los vectores $\vec{v} = (x_1, y_1)$ y $\vec{w} = (x_2, y_2)$ Puede observarse que naturalmente la suma está dada por:

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

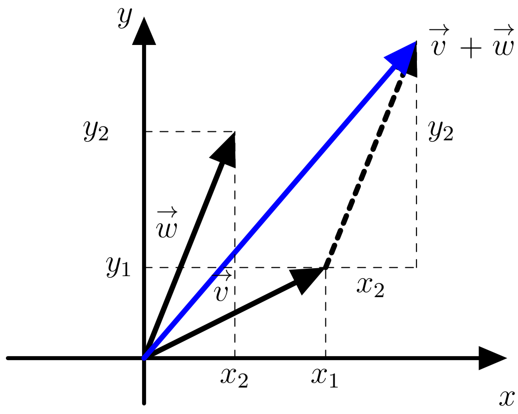


Figura 10.8: Suma de vectores en un sistema de coordenadas

También es inmediato que si $k \in \mathbb{R}$, entonces,

$$k\,\vec{v} = (kx_1, ky_1)$$

De esta forma, tenemos definidas la suma y el producto por un escalar cuando los vectores están dados en un sistema de coordenadas.

Por último, si P y Q son dos puntos del espacio (o del plano), para obtener las componentes del vector $\overrightarrow{PQ}$, solo hay que observar que como

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

resulta

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

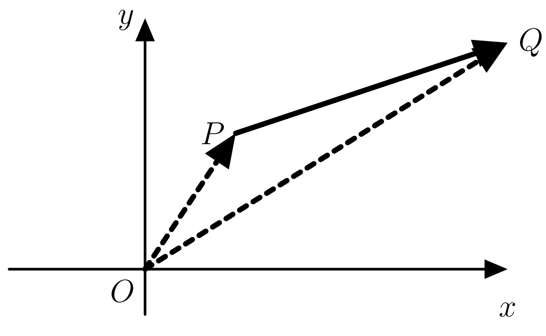


Figura 10.9: Componentes del vector $\overrightarrow{PQ}$.

10.3. Módulo de un vector

Utilizaremos los términos **longitud**, **módulo** y **norma** de un vector, como sinónimos.

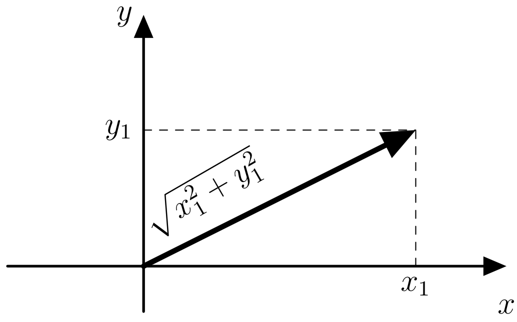


Figura 10.10: Módulo de un vector en un sistema de coordenadas.

Si $\vec{v} = (x_1, y_1)$, entonces, según el Teorema de Pitágoras, $|| \vec{v} || = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Propiedad 10.2 *La longitud de un vector posee las siguientes propiedades:*

1. $||k \vec{v} || = |k| \cdot || \vec{v} ||$
2. (Desigualdad triangular) $|| \vec{v} + \vec{w} || \leq || \vec{v} || + || \vec{w} ||$

Demostración.

1. Sea $\vec{v} = (x, y)$. Entonces, aplicando la definición de módulo, la definición del producto de un escalar por un vector y propiedades de los números reales se tiene que:

$$\begin{aligned} ||k \vec{v} || &= ||k(x, y)|| = ||(kx, ky)|| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} \\ &= \sqrt{k^2 \cdot (x^2 + y^2)} = \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = |k| \cdot || \vec{v} || \end{aligned}$$

□

2. Si en el triángulo formado por los vectores $\vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{v} + \vec{w}$, aplicamos el Teorema del coseno, se tiene que:

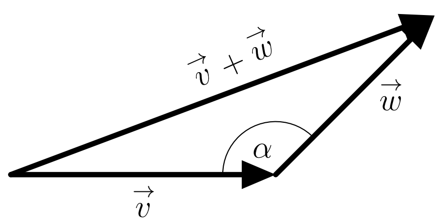


Figura 10.11: Desigualdad triangular.

$$|| \vec{v} + \vec{w} ||^2 = || \vec{v} ||^2 + || \vec{w} ||^2 - 2|| \vec{v} || \cdot || \vec{w} || \cos \alpha$$

Como el $\cos\alpha \geq -1$, resulta

$$|| \vec{v} + \vec{w} ||^2 \leq || \vec{v} ||^2 + || \vec{w} ||^2 + 2|| \vec{v} || \cdot || \vec{w} || = \left(|| \vec{v} || + || \vec{w} ||\right)^2$$

Cancelando los cuadrados, la desigualdad deseada queda establecida.

□

Definición (Vector unitario).

Decimos que un vector es **unitario** o un **versor** si tiene módulo 1.

Normalizar un vector no nulo es encontrar otro vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que el vector dado.

Para normalizar un vector $\vec{v}$ debemos encontrar otro vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w}= k \vec{v}$ con $k \in \mathbb{R}$ y $|| \vec{w} || = 1$. La proposición 10.2 nos dice cómo resolver este problema. En efecto, teniendo en cuenta que

$$1 = || \vec{w} || = ||k\cdot \vec{v} || = |k| \cdot || \vec{v} ||$$

resulta que el k necesario debe satisfacer

$$|k| = \frac{1}{|| \vec{v} ||}$$

La existencia de dos posibles valores para k, claramente obedece a que existen dos vectores unitarios que tengan la dirección de $\vec{v}$. Para que conserve el sentido elegimos directamente

$$k = \frac{1}{|| \vec{v} ||}$$

Ejemplo 10.1 *Queremos normalizar el vector* $\vec{v}= (1, 3)$. *En primer lugar, calculamos su módulo:*

$$|| \vec{v} || = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Luego, el $\vec{w}$ *buscado es*

$$\vec{w}= \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

Notación i, j

Llamaremos $\vec{i}$ y $\vec{j}$ a los vectores unitarios (o versores) sobre los ejes coordenados x e y respectivamente, en sus direcciones positivas. Esto es, $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1,)$.

Ejemplo 10.2 *Si* $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, *entonces* $\vec{v} = 3(1, 0) + 4(0, 1)$, *luego,* $\vec{v} = (3, 4)$.

10.4. Producto escalar

Vamos a definir una nueva operación entre vectores de $\mathbb{R}^2$: el producto escalar. Este producto, tal como lo indica su nombre, nos dará como resultado un escalar. Así como el concepto de módulo de un vector nos permite introducir la idea de distancias, el producto escalar incorpora otra noción geométrica: la de ángulo.

Definición (Producto escalar).

Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, definimos el *producto escalar* entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{v} = \vec{0} \text{ o } \vec{w} = \vec{0}; \\ || \vec{v} || \cdot || \vec{w} || \cdot \cos\alpha & \text{si } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{w} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

donde α es el ángulo comprendido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

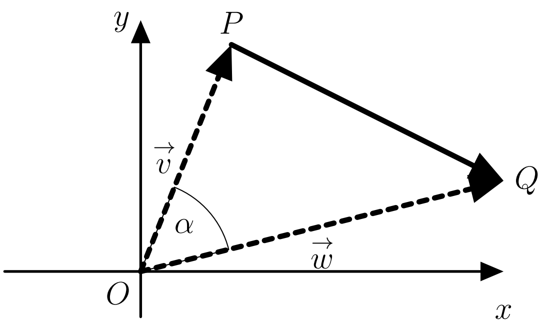


Figura 10.12: Producto escalar.

Si consideramos el triángulo determinado por los puntos P, Q y O (centro de coordenadas), aplicando el teorema del coseno, se tiene que:

$$|| \vec{PQ} ||^2 = || \vec{v} ||^2 + || \vec{w} ||^2 - 2 \cdot || \vec{v} || \cdot || \vec{w} || \cdot \cos\alpha \tag{10.1}$$

Como $\vec{PQ} + \vec{v} = \vec{w}$, $\vec{PQ} = \vec{w} - \vec{v}$ y teniendo en cuenta que $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$ reemplazando en (10.1) resulta

$$\begin{aligned} 2 \cdot || \vec{v} || \cdot || \vec{w} || \cdot \cos\alpha &= || \vec{v} ||^2 + || \vec{w} ||^2 - || \vec{PQ} ||^2 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - \big((w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2\big) \\ &= 2v_1w_1 + 2v_2w_2 \end{aligned}$$

de donde, finalmente, se obtiene que

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2}$$

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que se verifica que

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = || \vec{v} ||^2,$$

o, equivalentemente, $\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = || \vec{v} ||$.

Ejemplo 10.3 *Vamos a determinar el ángulo comprendido entre los vectores* $\vec{v}=(-1,4)$ *y* $\vec{w}=(3,2)$. *Aplicando la definición del producto escalar y la fórmula hallada más arriba,*

$$(-1,4)(3,2)=||(-1,4)||\cdot||(3,2)||\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow -3+8=\sqrt{17}\sqrt{13}\cos\alpha$$

$$\frac{5}{\sqrt{221}}=\cos\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha=70,35^\circ}$$

Teorema

Dos vectores no nulos son perpendiculares si y solo si su producto escalar es igual a cero.

Demostración.
($\Rightarrow$). Comenzaremos probando que si los vectores son perpendiculares su producto escalar es cero. Aplicando la definición de producto escalar y sabiendo que el ángulo entre los vectores de 90° (por ser perpendiculares) se tiene que

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=||\,\vec{v}\,||\cdot||\,\vec{w}\,||\cdot\cos 90^\circ=||\,\vec{v}\,||\cdot||\,\vec{w}\,||\cdot 0=0$$

□

($\Leftarrow$) Ahora, vamos a considerar que $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$. Nuevamente, aplicando la definición de producto escalar,

$$0=||\,\vec{v}\,||\cdot||\,\vec{w}\,||\cdot\cos\alpha$$

Como un producto es igual a 0 si alguno de sus factores es 0 resulta que $||\,\vec{v}\,||=0$ 0 $||\,\vec{w}\,||=0$ o $\cos\alpha=0$, pero por hipótesis los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son no nulos, por lo tanto sus módulos son mayores que cero. Luego

$$\cos\alpha=0$$

y como $0^\circ\leq\alpha\leq 180^\circ$ la única posibilidad es $\alpha=90^\circ$. Luego, los vectores son perpendiculares.

□

Definición (Vectores ortogonales)

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero.

Observación 10.4 *El vector nulo es ortogonal a todos los demás vectores.*

El producto escalar verifica las siguientes igualdades:

Propiedad 10.3 *Propiedades aritméticas del producto escalar:*

1. $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3. $k(\vec{v}\cdot\vec{w})=(k\,\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot(k\,\vec{w})$
4. $\vec{v}\cdot\vec{v}>0$ si $\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\vec{v}\cdot\vec{v}=0$ si $\vec{v}=\vec{0}$

10.5. Proyección ortogonal

En Física es bastante usual el hecho de descomponer una fuerza en la suma de otras dos, una de ellas en una cierta dirección dada y la otra ortogonal a la primera. Este problema nos conduce a la idea de la proyección ortogonal de un vector sobre otro.

Consideremos los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. El objetivo es determinar dos vectores $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$ que verifiquen las siguientes condiciones:

1. $\vec{v} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$.
2. $\vec{w_1} \| \vec{w}$.
3. $\vec{w_1} \perp \vec{w_2}$.

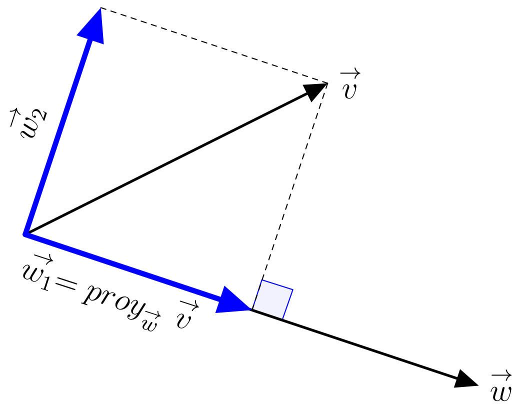


Figura 10.13: Proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$

El vector $\vec{w_2}$ se conoce como la *componente vectorial de $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{w}$.*

Como los vectores $\vec{w_1}$ y $\vec{w}$ son paralelos, existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w_1} = k \cdot \vec{w}$. Por lo tanto para determinar la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ sólo es necesario calcular dicho escalar k. Para ello partiremos de la descomposición del vector $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$$

Como $\vec{w_1} = k \cdot \vec{w}$, reemplazando en la expresión anterior, resulta

$$\vec{v} = k \cdot \vec{w} + \vec{w_2}$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros de la igualdad anterior y utilizando el hecho de que $\vec{w} \perp \vec{w_2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= (k \cdot \vec{w} + \vec{w_2}) \cdot \vec{w} \\ &= (k \cdot \vec{w}) \cdot \vec{w} + (\vec{w_2} \cdot \vec{w}) \\ &= k \cdot (\vec{w} \cdot \vec{w}) + 0 \\ &= k \cdot || \vec{w} ||^2\end{aligned}$$

de donde

$$k = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|| \vec{w} ||^2}$$

y, finalmente

$$\vec{w}_1 = \text{proy}_{\vec{w}}\, \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|| \vec{w} ||^2} \cdot \vec{w}$$

Por último, vamos a calcular el módulo del vector proyección:

$$||\text{proy}_{\vec{w}} \vec{v}|| = \left|\left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|| \vec{w} ||^2} \cdot \vec{w} \right|\right| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|| \vec{w} ||^2} \cdot || \vec{w} || = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|| \vec{w} ||}$$

Utilizando la definición del producto escalar, también es posible escribir el módulo del vector proyección como

$$||\text{proy}_{\vec{w}} \vec{v}|| = ||\vec{v}|| \cdot |\cos \alpha|$$

expresión a la que podríamos haber llegado aplicando trigonometría elemental.

10.6. Aplicaciones matemáticas a la estática.

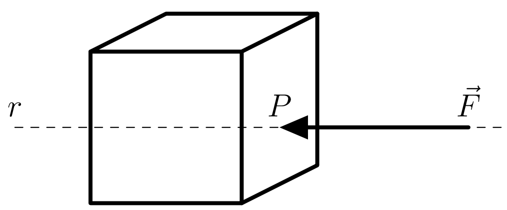
La física es una ciencia natural que abarca distintos campos. Nosotros nos vamos a introducir en el de la mecánica, el cual se dedica al estudio de las interacciones que se ejercen entre distintos cuerpos y de sus consecuencias: movimiento y deformación. Específicamente nuestras aplicaciones se han de ocupar, de las interacciones que se ejercen sobre un cuerpo rígido o indeformable y de su movimiento. Estos temas pertenecen a dos ramas importantes de la mecánica: estática y cinemática, respectivamente.

Nociones elementales de estática.

Concepto de fuerza.

Se llama *fuerza* a la acción que ejercida sobre un cuerpo tiene como consecuencia la modificación de su forma y/o estado cinemático. Su efecto depende de su intensidad, dirección, sentido y punto de aplicación. Por ende, se trata de una magnitud vectorial.

La unidad del Sistema S.I. que se utiliza mara medir la intensidad (módulo) de una fuerza es el *Newton* (N).



$|\vec{F}|$: Intensidad

r: Recta de acción (Dirección)

Flecha: indica el sentido

P: Punto de aplicación

Figura 10.14: La fuerza es una magnitud vectorial.

Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, este conjunto de acciones se conoce como *sistema de fuerzas.*

Definición

En este contexto, un *punto material* o *partícula* es una abstracción por la cual consideramos al cuerpo que se está tratando como si fuese un punto geométrico, es decir, carente de dimensión.

Al conjunto de dos o más fuerzas que actúan sobre un cuerpo (o sobre un punto material) lo hemos denominado sistema de fuerzas. Estos sistemas pueden clasificarse en sistemas colineales, planos y espaciales.

Un sistema de fuerzas plano o espacial se llama *concurrente* si las rectas de acción de todas las fuerzas del sistema pasan por un mismo punto. En caso contrario, al sistema de fuerzas se lo denomina *no concurrente.*

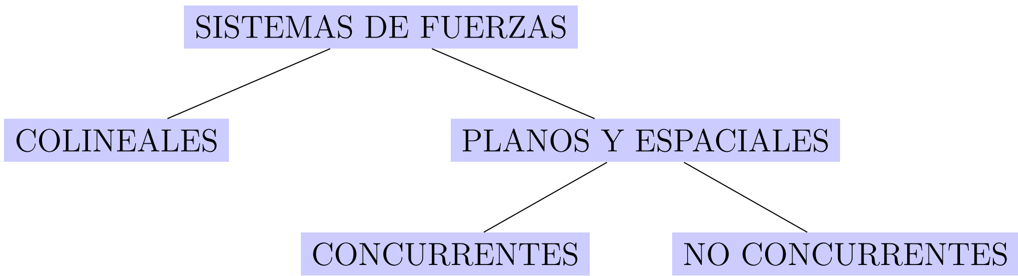


Figura 10.15: Clasificación de los sistemas de fuerzas.

Estudiar los sistemas de fuerzas nos permite decidir, si el sistema en cuestión produce efecto o no sobre el cuerpo rígido o el punto material sobre el cual se aplica. Para ello, se simplifica el sistema inicial a otro sistema equivalente, que produzca el mismo efecto y cuyo número de elementos sea el menor posible. En el caso particular de los sistemas planos se reduce a un sistema de fuerzas concurrentes equivalente de resolución simple.

En particular, si el sistema se reduce a un sistema nulo, se dice que está en equilibrio y el cuerpo rígido no modifica su estado cinemático.

Las aplicaciones que vamos a considerar se realizarán sobre sistemas colineales y sistemas planos de fuerzas concurrentes a un punto.

Sistemas planos de fuerzas concurrentes.

Si el sistema plano está constituido por dos fuerzas, cuyas rectas de acción concurren a un punto propio, puede ser reducido a un sistema equivalente de una única fuerza, llamada resultante, cuya recta de acción pasa por el punto de concurrencia y se determina por la regla del paralelogramo.

Para equilibrar el sistema de fuerzas, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, bastará con aplicar al cuerpo rígido o punto material, una fuerza de igual intensidad (igual módulo), igual recta de acción (igual dirección) y sentido opuesto a la fuerza $\vec{R}$, que llamaremos *equilibrante* $\vec{E}$.

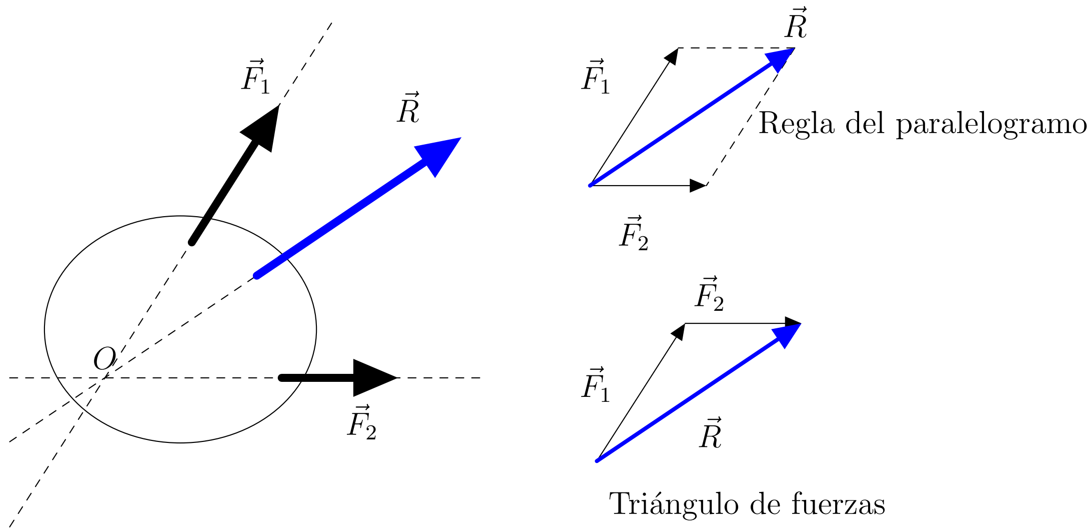


Figura 10.16: Determinación de la fuerza resultante.

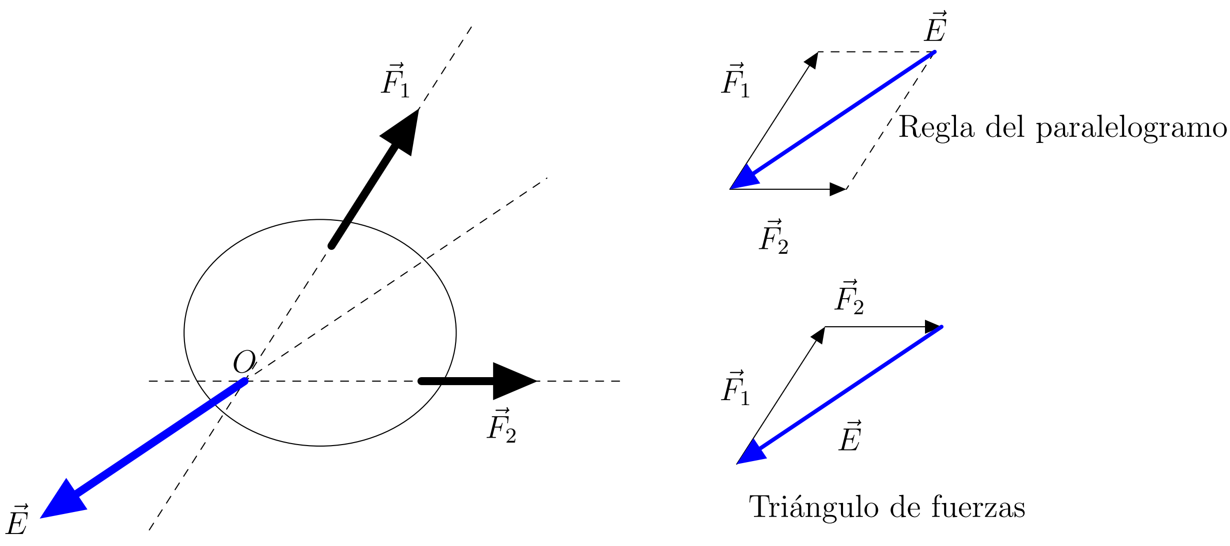


Figura 10.17: Determinación de la fuerza equilibrante.

Descomposición de una fuerza según dos direcciones concurrentes con ella.

La regla del paralelogramo puede ser utilizada para descomponer una fuerza en dos direcciones dadas, con la condición de que las tres direcciones concurran a un mismo punto.

Si las direcciones consideradas son perpendiculares, es posible asociar un sistema de referencias ortogonal en donde la fuerza $\vec{F}$ se descomponga en las proyecciones de la misma sobre cada uno de los ejes coordenados.

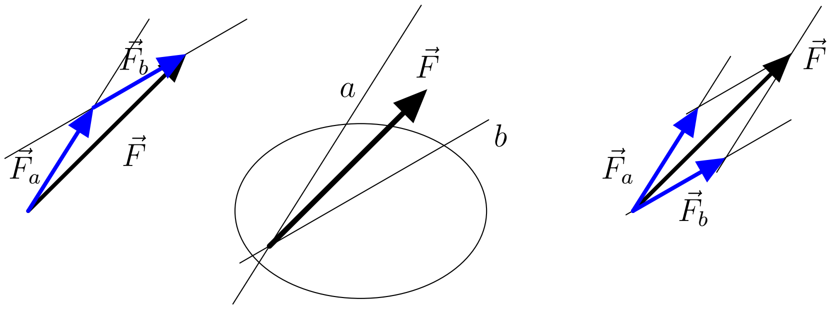


Figura 10.18: Descomposición de $\vec{F}$ en las direcciones de a y b.

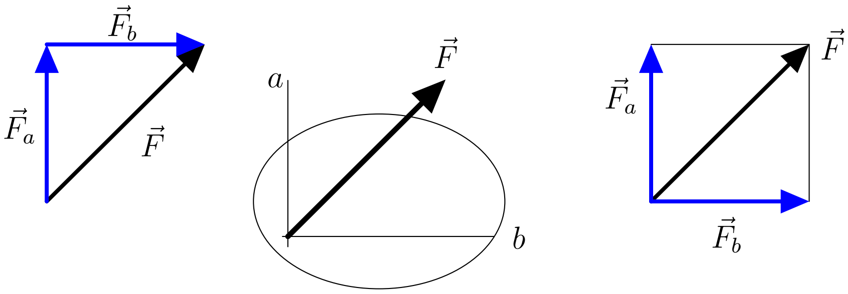


Figura 10.19: Descomposición de $\vec{F}$ en direcciones perpendiculares.

Resolución analítica de sistemas planos de fuerzas.

Dado un sistema cartesiano de ejes XY, el vector representativo de una fuerza puede ser indicado por su intensidad y el ángulo α medido en el sentido antihorario, desde el semieje positivo x, hasta la recta de acción de fuerza. Su notación será $\vec{F} = (F,\, \alpha)$.

La expresión cartesiana de la fuerza $\vec{F}$ resulta de realizar la proyección de la misma sobre cada uno de los ejes coordenados. De acuerdo con lo anterior la expresión analítica de una fuerza $\vec{F} = (F,\, \alpha)$ en un sistema cartesiano será:

$$\vec{F}(x, y) = (F,\, \alpha) = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} = (F\,\cos\alpha)\,\vec{i} + (F\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\vec{j} = (F_x,\, F_y)$$

(Recuerden que $F = ||\vec{F}||$)

El par ordenado (x, y) indica el punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$ o un punto de su recta de acción si está actuando sobre un cuerpo rígido.

Ejemplo 10.4 *Dado el sistema de ejes cartesianos xy y las fuerzas:* $\vec{F}_1(0, 0) = (10\,N,\, 210°)$ *y* $\vec{F}_2(0, 0) = (20N\,, 60°)$ *determinen su expresión cartesiana.*

Resolución.

Consideramos el módulo y ángulo de $\vec{F}_1$ para determinar sus proyecciones sobre los ejes:

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j} = (10\,\cos 210°)\,\vec{i} + (10\,\mathrm{sen}\,210°)\,\vec{j} = -5\sqrt{3}\,N\,\vec{i} - 5\,N\,\vec{j} = (-5\sqrt{3}, -5)N$$

Análogamente, calculamos las proyecciones de la fuerza $\vec{F}_2$:

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} = (20\,\cos 60°)\,\vec{i} + (20\,\mathrm{sen}\,60°)\,\vec{j} = 10\,N\,\vec{i} + 10\,\sqrt{3}\,N\,\vec{j} = (10,\, \sqrt{3})N$$

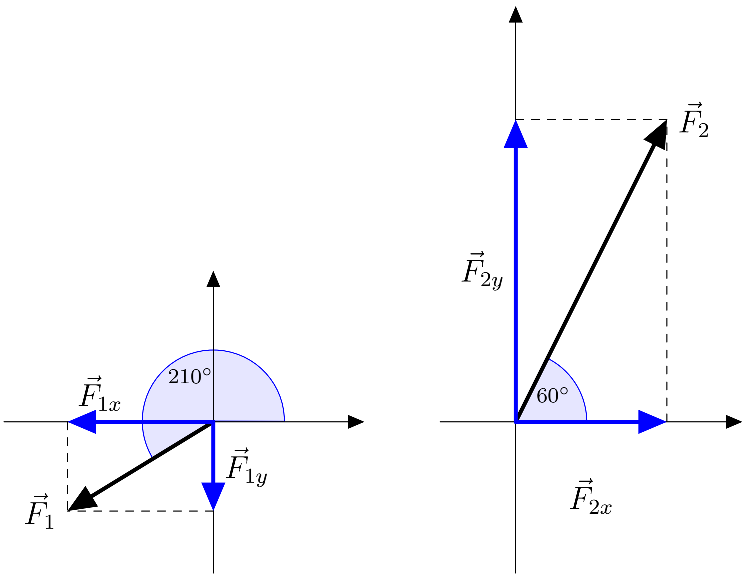


Figura 10.20: Descomposición de fuerzas en sus proyecciones sobre los ejes.

Ecuaciones generales de equilibrio.

Cuando se tiene un sistema plano de fuerzas concurrentes a un punto, estas fuerzas se refieren a un par de ejes cartesianos ortogonales y se aplican en el punto de concurrencia. Se ha señalado previamente que un sistema de fuerzas está en equilibrio cuando su resultante es nula. Para que un sistema plano de fuerzas concurrentes esté en equilibrio es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos \alpha_i = 0 \quad \text{(Ecuación de proyección sobre } x)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \operatorname{sen} \alpha_i = 0 \quad \text{(Ecuación de proyección sobre } y)$$

Ejemplo 10.5 *Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes, comprueben analíticamente su equilibrio.*

$$\vec{F}_1 = (5N, 270°) \;\; \vec{F}_2 = (\sqrt{52}N, 146,3°) \;\; \vec{F}_3 = (7N, 0°) \;\; \vec{F}_4 = (\sqrt{2}N, 135°)$$

Resolución:

Se plantean las dos ecuaciones de proyección, sobre los ejes x e y:

$$\sum_{i=1}^{4} F_{ix} = \sum_{i=1}^{4} F_i \cos \alpha_i = 5N \cos 270° + \sqrt{52}N \cos 146{,}3° + 7N \cos 0° + \sqrt{2}N \cos 135° =$$
$$= 0N - 6N + 7N - 1N = 0N$$
$$\sum_{i=1}^{4} F_{iy} = \sum_{i=1}^{4} F_i \operatorname{sen} \alpha_i = 5N \operatorname{sen} 270° + \sqrt{52}N \operatorname{sen} 146{,}3° + 7N \operatorname{sen} 0° + \sqrt{2}N \operatorname{sen} 135° =$$
$$= -5N + 4N + 0N + 1N = 0N$$

Las dos ecuaciones de proyección resultan iguales a cero; por lo tanto el sistema de fuerzas dado, se encuentra en equilibrio.

Ejemplo 10.6 *En un punto de un cuerpo rígido actúan las fuerzas:*

$$\overline{F1}(0,0) = (50, 50\sqrt{3})\mathrm{N}, \overline{F2}(0,0) = (200, 0)\mathrm{N}, \bar{F}_3(0,0) = (100\ \mathrm{N}, 330°)$$

Determinen la fuerza resultante.

Resolución:

$$\sum F_{\mathrm{xi}} = F_{1\mathrm{x}} + F_{2\mathrm{x}} + F_{3\mathrm{x}} = 50 + 200 + |100| \cos 330° = 250 + 50\sqrt{3} \cong 336,6\ \mathrm{N} = \mathrm{R_x}$$
$$\sum F_{\mathrm{yi}} = F_{1\mathrm{y}} + F_{2\mathrm{y}} + F_{3\mathrm{y}} = 50\sqrt{3} + |100| \operatorname{sen} 330° = 50\sqrt{3} - 50 \cong 36,6\ \mathrm{N} = \mathrm{R_y}$$
$$\mathrm{R}(0,0) = (336{,}6;\ 36{,}6)\mathrm{N}$$

10.7. Cinemática del punto material.

La *cinemática* es la parte de la física que estudia el movimiento prescindiendo de las causas que lo producen. Cuando observamos el movimiento de un automóvil y nos hacemos preguntas tales como: ¿Dónde se encontrará el coche media hora después de pasar por un semáforo? ¿Qué velocidad posee en un instante dado? ¿Tiene velocidad constante?, etc., estas preguntas se pueden contestar sin saber por qué se mueve el vehículo.

Los problemas que resuelve la cinemática son, fundamentalmente, determinar la posición, desplazamiento, velocidad y aceleración de un objeto en función del tiempo.

En esta sección haremos un estudio detallado de una serie de movimientos muy simples que se pueden tomar como modelos para la comprensión de otros más complejos.

Movimiento.

El fenómeno físico con el que estamos más familiarizados y conocemos mejor es el movimiento. Estamos rodeados de multitud de objetos que se mueven, que pasan del estado de reposo al estado de movimiento y viceversa. Desde muy pequeños tenemos un concepto intuitivo de este fenómeno que nos permite afirmar si un cuerpo en un momento dado, está en reposo o está animado de movimiento. ¿Qué criterio empleamos para distinguir el estado de reposo del estado de movimiento? Un criterio podría ser este: "Un cuerpo se mueve cuando un punto cualquiera de ese cuerpo cambia de lugar".

La localización de un cuerpo en el espacio respecto de un sistema de referencia recibe el nombre de *posición*.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos dar la siguiente definición: *movimiento* es un cambio continuo de posición respecto de un sistema de referencia fijo.

Si el sistema de referencia no está fijo, el movimiento que podemos estudiar es el movimiento relativo que posee un cuerpo respecto del sistema. Por ejemplo, un avión deja caer un objeto. Si el sistema de referencia es el avión, el piloto solamente observa el movimiento de caída del objeto que es el movimiento relativo. Para el piloto el objeto tiene movimiento rectilíneo: lo ve siempre debajo del avión, aunque cada vez más lejos.

En cambio, un individuo que estuviera en tierra o fuera del avión, sistema fijo respecto del avión y del objeto, observaría además del movimiento de caída que el objeto se traslada horizontalmente con la misma velocidad del avión formando una trayectoria parabólica.

En todo movimiento hay que distinguir tres elementos fundamentales: el cuerpo que se mueve o móvil, el sistema de referencia que se emplea y la trayectoria.

El móvil: una partícula o punto material.

Esta abstracción se hace por sencillez. Para conocer el movimiento de un cuerpo real habría que conocer el movimiento de todos sus puntos, el estudio del movimiento así considerado puede ser complicado.

Cuando un automóvil se desplaza por una ruta, además del movimiento de traslación que observamos, posee otros movimientos: vibratorios, producidos por los amortiguamientos, de balanceo, al tomar una curva, etc. Esta complicación se evita considerando el móvil como una partícula.

A su vez, el estudio del movimiento de una partícula posee rigor matemático. La posición de un punto respecto de un sistema de referencia viene determinada por un **vector**; el estudio del movimiento del punto se reduce al estudio geométrico de dicho punto.

Realmente no existe en la naturaleza un móvil sin dimensiones pero hay muchos cuerpos que en su movimiento se comportan como partículas materiales.

Además un cuerpo no tiene que ser necesariamente pequeño para que pueda considerarse como una partícula, todo depende del sistema de referencia que se tome: un automóvil no se comporta como una partícula para el que lo conduce, sin embargo se comporta como una partícula para el observador que sobrevuela la ruta en helicóptero.

Por lo tanto, partícula material es un término relativo que depende de las dimensiones que intervengan en cada problema concreto.

Un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables frente al vector de posición es una *partícula.*

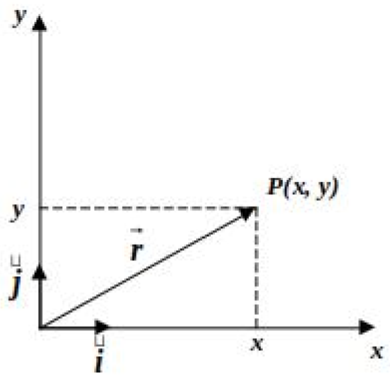
Sistema de referencia. Vector posición.

Para conocer la posición de un punto en cualquier instante es necesario fijar otro punto como referencia.

Para fijar la posición de una partícula utilizaremos el sistema ortogonal bidimensional, el punto de referencia que utilizaremos será el de origen 0, de los ejes cartesianos.

Es necesario aclarar aquí que realizaremos un estudio en dos dimensiones, pudiendo generalizarse dichos conceptos a tres dimensiones.

La posición del punto P en cualquier instante vendrá determinada por el vector que une el punto de referencia con el punto móvil. Este vector recibe el nombre de *vector posición*.



Este vector posición tiene dos componentes que son las coordenadas de su extremo:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Cuando el punto P se mueve, su vector posición variará con el tiempo y puede expresarse de la forma:

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

Esta expresión recibe el nombre de *expresión instantánea*, dando valores a t vamos obteniendo las distintas posiciones de una partícula móvil.

Para hallar la distancia que existe, en cualquier instante, entre la partícula móvil y el sistema de referencia se halla el módulo del vector posición:

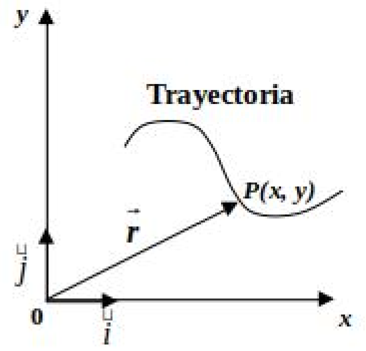
$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Que vendrá expresado en las mismas unidades de longitud que las coordenadas x e y.

Trayectoria.

El punto $P(x, y)$ está en reposo cuando sus coordenadas permanecen constantes con el tiempo. El punto estará en movimiento cuando por lo menos una coordenada varíe con el tiempo.

Cuando el punto $P(x, y)$ se mueve, sus coordenadas van tomando distintos valores con el tiempo. El conjunto de estos valores recibe el nombre de *trayectoria*.



La trayectoria es el lugar geométrico de las sucesivas posiciones que va tomando la partícula móvil en el espacio.

La ecuación de la trayectoria puede venir expresada:

1. En forma vectorial:
2. En forma paramétrica: x = f(t), y = f(t)
3. En forma continua: En el caso que la trayectoria sea plana, la ecuación cartesiana sería de la forma y = f(x)

Ejemplo 10.7 *El movimiento de una partícula viene dado por $x = t$, $y = 2t-1$, en donde x e y se miden en metros y t en segundos. Calculen:*

1. *La posición de la partícula en cualquier instante.*
2. *La posición inicial de la partícula.*
3. *La posición de la partícula a los 5 segundos.*
4. *¿A qué distancia del sistema de referencia se encuentra la partícula en ese instante?*

Resolución:

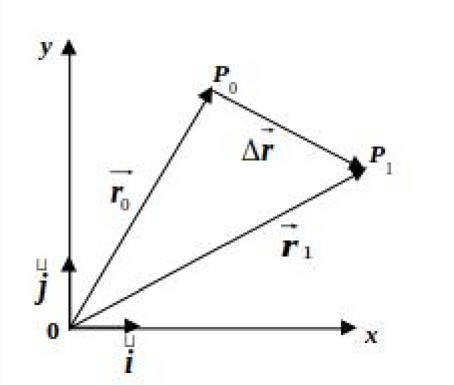
1. La posición en cualquier instante viene dada por el vector posición, es decir:
$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = t\,\vec{i} + (2t-1)\,\vec{j}$$
2. La posición inicial la determinamos para $t = 0$:
$$\vec{r}(0) = 0\,\vec{i} - 1\,\vec{j}$$
Cuando empezamos a contar el tiempo, la partícula se encuentra en el punto $P_0 = (0,\,-1)$.
3. La posición a los 5 segundos es:
$$\vec{r}(5) = 5\,\vec{i} + 9\,\vec{j},$$
es decir, que en ese instante la partícula se encuentra en el punto $P_5 = (5,\,9)$.

4. La distancia al origen se encuentra calculando el módulo del vector posición para el instante considerado, en nuestro caso es:

$$||\vec{r}(5)|| = \sqrt{25+81} \approx 10,29 \,\text{metros}.$$

Vector desplazamiento.

Supongamos una partícula que inicialmente, $t = 0$, se encuentra en la posición P_0 definida por el vector $\vec{r_0}$, posición inicial, y al cabo de un tiempo t_1 se encuentra en la posición P_1 definida por el vector $\vec{r_1}$. Decimos que la partícula se ha desplazado de $P-0$ a $P-1$.
Este desplazamiento viene determinado por el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ que une la posición inicial con la posición final.



Este vector recibe el nombre de *vector desplazamiento* y lo podemos definir como el vector que tiene su origen en el punto P_0 y su extremo en el punto P_1.

El vector desplazamiento entre dos posiciones es siempre el mismo, cualquiera sea la trayectoria.

Matemáticamente el vector desplazamiento se obtiene sustrayendo el vector de posición inicial al vector de posición final: $\Delta\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_0}$.

Si $\vec{r_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ y $\vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, entonces el vector desplazamiento será:

$$\Delta\vec{r} = (x_1 - x_0)\,\vec{i} + (y_1 - y_0\,\vec{j} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j}$$

Finalmente se escribe:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j}}$$

Ejemplo 10.8 *Un punto se mueve en el plano xy según las ecuaciones:* $x = 2 - t$, $y = t^2$. *Calculen:*

1. *La posición inicial y la posición* 4 *segundos después.*
2. *El desplazamiento en ese intervalo de tiempo.*
3. *La ecuación de la trayectoria.*

Resolución:

1. La posición en cualquier instante viene dada por el vector:

$$\vec{r}(t) = (2-t)\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$$

En $t = 0$ y para $t = 4$ dicho vector tiene la forma:

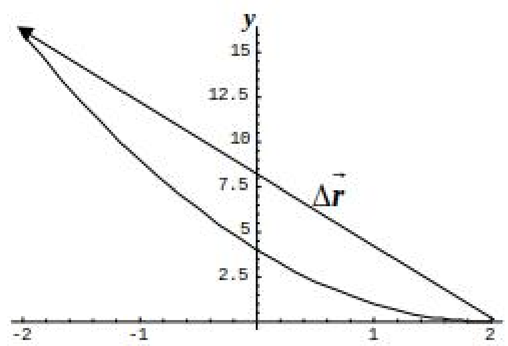
$$\vec{r}(0) = 2\,\vec{i} \text{ y } \vec{r}(4) = -2\,\vec{i} + 16\,\vec{j} \text{ respectivamente.}$$

Por lo tanto, las posiciones buscadas son:

$$P_0 = (2,0) \text{ y } P_4 = (-2,16)$$

2. El desplazamiento es:
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = -4\,\vec{i} + 16\,\vec{j}$$

3. Como la trayectoria es plana su ecuación puede expresarse en forma cartesiana, esto lo obtenemos despejando el parámetro t de una de las ecuaciones paramétricas y reemplazando en la otra, es decir:
$$t = 2 - x \rightarrow y = (2-x)^2 = x^2 - 4x + 4$$
La trayectoria es una parábola, para representarla debemos darle valores a t desde 0 a 4, recordando que:
$$t = 0 \rightarrow P_0 = (2, 0)$$
$$t = 4 \rightarrow P_4 = (-2, 16)$$
Graficamos la trayectoria y el vector desplazamiento:



Distancia recorrida.

Es la magnitud escalar, Δs, que mide la longitud de la trayectoria. Coincide con el desplazamiento en el caso de que el movimiento sea rectilíneo y además no cambie de sentido.

Cuando lanzamos una piedra verticalmente hacia arriba, el espacio coincide con el desplazamiento mientras la piedra esta subiendo, pero cuando la piedra inicia el descenso, el desplazamiento disminuye, mientras el espacio recorrido sigue aumentando.

Cuando la piedra llega al punto de partida, el desplazamiento es nulo mientras que el espacio recorrido es igual al doble de la altura alcanzada.

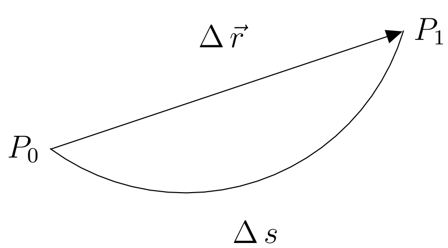


Figura 10.21: Desplazamiento y espacio recorrido

Velocidad.

Para conocer el movimiento de una partícula no basta conocer su posición en cualquier momento. Es necesario, además, conocer como varía dicha posición en el transcurso del tiempo. A la variación del vector posición la hemos llamado desplazamiento.

Para relacionar la variación del vector posición o vector de desplazamiento con el tiempo, introducimos una nueva magnitud: la *velocidad.*

Velocidad media.

LLamamos *velocidad media* al desplazamiento que experimenta el móvil en la unidad de tiempo. Físicamente, la velocidad representa la rapidez con que se produce el desplazamiento.

En el movimiento rectilíneo se cumple:

$$\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Matemáticamente, la velocidad media en un intervalo de tiempo se define como *el vector que resulta de dividir el desplazamiento producido entre el intervalo de tiempo empleado*:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

El vector velocidad media tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento. A partir de lo anterior se puede escribir:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\vec{j}$$

Las expresiones $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}, \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ son magnitudes escalares que representan los valores medios de la velocidad sobre los ejes cartesianos. Son las componentes del vector velocidad media cuyo módulo vale:

$$v_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

La velocidad media nos da poca información acerca del movimiento. Solamente relaciona el vector desplazamiento total producido en un intervalo de tiempo con dicho intervalo. No nos dice nada sobre la trayectoria que ha seguido la partícula, ni si ha llevado siempre la misma velocidad en todo el intervalo de tiempo. Además, si la partícula vuelve al punto de partida al cabo de un tiempo, el desplazamiento será nulo y la velocidad media también. *La velocidad media puede ser nula en un intervalo de tiempo y no serlo en intervalos más pequeños.*

Si queremos más información del movimiento en el intervalo $\Delta\,t$, tomamos intervalos $\Delta\,t_1, \Delta\,t_2, \ldots$ más pequeños a los que corresponden desplazamientos más pequeños. El número de intervalos que tomemos puede ser tal, que cada intervalo de tiempo sea tan pequeño como queramos. Si el número de intervalos es suficientemente grande, se puede hallar la velocidad de la partícula en cualquier instante o en cualquier punto de trayectoria. Así llegamos al concepto de velocidad instantánea.

Velocidad Instantánea.

Físicamente, representa la velocidad que posee una partícula en un instante determinado o la velocidad que posee en un punto determinado de la trayectoria.

Matemáticamente se define como el *límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.*

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Observación 10.5 *Esta expresión no tiene otro sentido que el de indicar que se define la velocidad instantánea cuando el intervalo de tiempo considerado es tan pequeño como se quiera, el operador límite que aparece en dicha expresión es indicativo de esta condición; ustedes estudiarán muy profundamente el tratamiento del concepto de límite en el curso de Análisis Matemático I.*

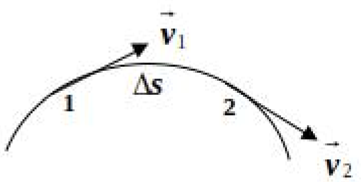
Se puede demostrar que el vector velocidad instantánea puede ser referido al sistema de coordenadas y su expresión según sus componentes cartesianas será: $\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$.

Estas componentes son el valor numérico de las velocidades instantáneas según los ejes coordenados.

El valor numérico de la velocidad instantánea se obtiene hallando su módulo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

El vector velocidad instantánea en un punto $P(x, y)$ de la trayectoria es un *vector cuya dirección es tangente a la trayectoria en dicho punto y el sentido coincide con el del movimiento.*



La velocidad se mide en $\frac{m}{s}$ en el S.I. de unidades.

Aceleración.

Aceleración, en general, es la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo. Al ser la velocidad una magnitud vectorial existirá aceleración siempre que la velocidad varíe en cualquiera de sus elementos: módulo, dirección y sentido.

Por ejemplo, se lanza una pelota contra la pared con una velocidad de $5\,m/s$, la pelota rebota y sale en la misma dirección con una velocidad de $5\,m/s$. En este caso hay aceleración porque la velocidad ha cambiado de sentido.

Otro ejemplo, un automóvil se desplaza sobre una trayectoria rectilínea con una velocidad de $60\,km/h$ y en un instante posterior su velocidad vale $85\,km/h$, en este caso la velocidad se mantiene constante en dirección y sentido pero ha variado su módulo, en consecuencia hay aceleración.

Para determinar el movimiento de una partícula no basta saber que la velocidad varía, es necesario saber cómo se produce esa variación en el transcurso del tiempo. Por esto se introducen los conceptos de aceleración media y aceleración instantánea.

Aceleración media.

Físicamente, representa como varía la velocidad en un intervalo de tiempo. Matemáticamente, se define como el vector que resulta de dividir la variación de velocidad que se ha producido en un intervalo de tiempo entre dicho intervalo.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\,\vec{j}$$

La aceleración media tiene escaso valor práctico. En cambio, la aceleración instantánea tiene una gran importancia. Por tanto, a partir de ahora siempre que hablemos de aceleración nos estaremos refiriendo a la aceleración instantánea.

Aceleración instantánea.

Físicamente se define como la aceleración que tiene una partícula en cualquier instante o la aceleración que tiene en cualquier punto de la trayectoria.

Matemáticamente, es el *valor límite que toma la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero*:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\,\vec{v}}{\Delta\,t}$$

La expresión de la aceleración instantánea en sus componentes cartesianas es:

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

El módulo de la aceleración instantánea será:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Además, la aceleración instantánea es igual a la suma de dos aceleraciones, una en la dirección de la tangente, *aceleración tangencial*, y otra en la dirección normal, *aceleración normal*, en cada punto de la trayectoria.

Estas dos aceleraciones reciben el nombre de *componentes intrínsecas* de la aceleración.

La aceleración tangencial es un vector cuya dirección es tangente a la trayectoria en cada punto y su sentido coincide con el sentido del movimiento. Es debida a la variación de velocidad en valor numérico.

La aceleración normal es un vector cuya dirección es normal a la trayectoria y sentido hacia el centro de la curvatura. Es debida al cambio de dirección y recibe el nombre de

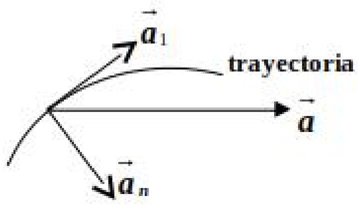


Figura 10.22: Componentes intrínsecas de la aceleración

aceleración centrípeta.

La expresión de la aceleración instantánea referida a un sistema intrínseco a la trayectoria tiene dos componentes:

La aceleración se mide en $\frac{m}{s^2}$ en el S.I. de unidades.

Tipos de movimientos.

Los distintos movimientos que puede tomar una partícula se clasifican atendiendo fundamentalmente a dos criterios: la trayectoria y la aceleración.

1. Según la trayectoria los movimientos pueden ser:
   • **Rectilíneos** si la trayectoria es una recta.
   • **Curvilíneos** si la trayectoria es una curva: circulares, parabólicos, etc.

2. Según la aceleración los movimientos se clasifican en:
   • **Uniformes** si no tienen aceleración.
   • **Acelerados** si tienen aceleración. Si esta es constante el movimiento se llama uniformemente acelerado.

CINEMÁTICA DE ALGUNOS MOVIMIENTOS:

Movimiento uniforme.

En particular estudiaremos el movimiento rectilíneo uniforme.

Un movimiento es *rectilíneo y uniforme* cuando su velocidad es constante. Esto supone:

1. La velocidad es constante en dirección y sentido, por lo tanto la trayectoria es una recta.

2. La velocidad es constante en módulo, recorre espacios iguales en tiempos iguales.

También se puede definir en función de la aceleración diciendo que un movimiento es *rectilíneo y uniforme* cuando no tiene aceleración.

La ecuación vectorial del movimiento es: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + v\,t,\ \vec{t} \geq 0$. Para este movimiento podemos elegir un sistema de referencia unidimensional, haciendo que uno de los ejes, por ejemplo el eje x, coincida con la dirección del movimiento: $r(x, 0, 0)$.

Así, la ecuación anterior se reduce a una ecuación escalar:

$$x(t) = x_0 + v\,t$$

Esta es la ecuación de la posición, también llamada *ecuación horaria*.

Diagramas del movimiento rectilíneo y uniforme

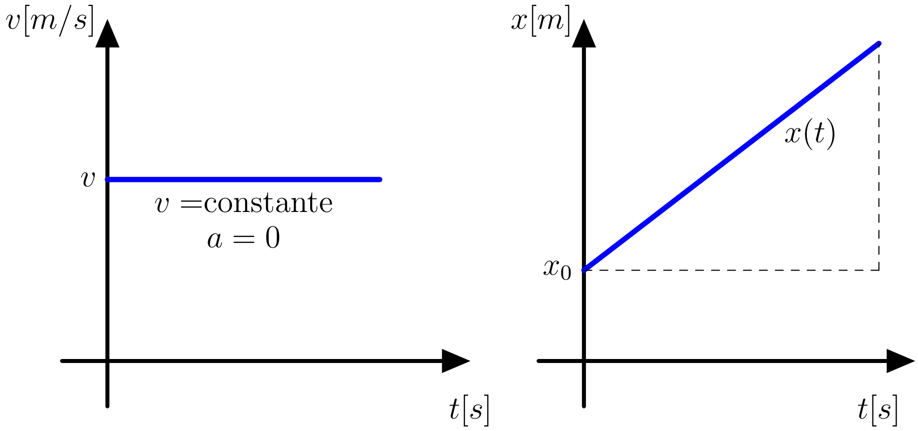


Figura 10.23: Diagramas del movimiento rectilíneo uniforme.

1. Diagrama $v - t$: Es la representación gráfica de la función $v = f(t)$. Se trata de una recta paralela al eje de los tiempos.
2. Diagrama $x - t$: Es la representación gráfica de la función $x = g(t)$ donde $x(t) = x_0 + v\,t$. Se trata de una recta cuya ordenada al origen, x_0, es la posición inicial, y cuya pendiente es la velocidad.

En el movimiento rectilíneo uniforme la velocidad media y la velocidad instantánea coinciden. Los diagramas mencionados se muestran en la figura anterior.

Abordemos ahora algún problema que se presenta al tratar con situaciones que involucran este tipo de movimiento, por ejemplo, con los llamados *encuentros*.

Ejemplo 10.9 *Un automóvil sale de Buenos Aires con destino a Rosario a una velocidad constante de* $120\,km/h$ *por un camino recto, y simultáneamente parte desde Rosario hacia Buenos Aires otro automóvil a* $80\,km/h$*. Si la distancia entre ambas ciudades es de* $300\,km$*, determinen gráfica y analíticamente:*

1. *¿Al cabo de cuánto tiempo desde la partida se producirá el encuentro?*
2. *¿A qué distancia de Buenos Aires se cruzarán?*

Resolución:

Considerado un sistema de referencia, se determinan las ecuaciones de movimiento $x_1(t)$ y $x_2(t)$. La condición del encuentro nos impone que en algún instante las posiciones de ambos móviles sean coincidentes, es decir, si t_e es el tiempo en que se produce el encuentro, entonces $x_1(t_e) = x_2(t_e)$. Este planteo nos permite resolver el problema gráfica y analíticamente.

Elegimos un sistema de coordenadas con origen en Buenos Aires y de dirección y sentido hacia Rosario.

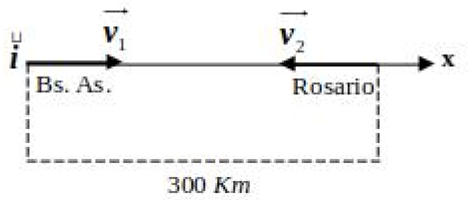


Figura 10.24: Diagrama con las condiciones iniciales del problema

Como los móviles parten simultáneamente se comienza a contar los tiempos desde el momento de la partida. La ecuación que describe el movimiento es:$x(t) = x_0 + v\,t$.

Para el auto que parte desde Buenos Aires, como este sale del origen de coordenadas se considera $x_1(0) = 0$ y como su velocidad es coincidente con el sentido positivo del sistema de referencia la misma es $\vec{v}_1 = 120\,\vec{i}$, que en términos de la ecuación horaria correspondiente al móvil (ecuación escalar) será: $v_1 = 120\,km/h$.

El auto que parte de Rosario se halla a $300\,km$ en el sentido positivo del sistema de referencia en el instante del origen de tiempos, por lo tanto $x_2(0) = 300$ y se desplaza con velocidad de sentido opuesto al positivo del sistema, es decir que $\vec{v}_2 = -80\,\vec{i}$, velocidad que en la ecuación horaria correspondiente a este móvil se considerará $v_2 = -80\,km/h$.

Las ecuaciones horarias en ambos móviles resultan:

$$x_1(t) = 120\,t, \quad x_2(t) = 300 - 80\,t$$

En las cuales t es positivo o nulo y se mide en horas, mientras que x se mide en kilómetros.

Planteamos la condición de encuentro:

$$x_1(t_3) = x_2(t_e) \Leftrightarrow 120\,t = 300 - 80\,t$$

Resolviendo la ecuación anterior se determina que los automóviles se encuentran a la hora y media del instante de partida.

El automóvil que partió desde Buenos Aires ha recorrido en ese tiempo: $x_1(1,5) = 120\,km/h \cdot 1,5\,h = 180\,km$, y como consecuencia de la condición de encuentro, la coordenada de la posición del automóvil que partió desde Rosario es: $x_2(1,5) = 180\,km$.

El automóvil que partió desde Rosario recorrió una distancia igual a:

$$|x_2(t_e) - x_2(0)| = |180\,km - 300\,km| = 120\,km$$

Podemos resolver el problema gráficamente representando las ecuaciones horarias $x = x_1(t)$ y $x = x_2(t)$, y encontrar el instante t_e para el cual las gráficas se cortan:

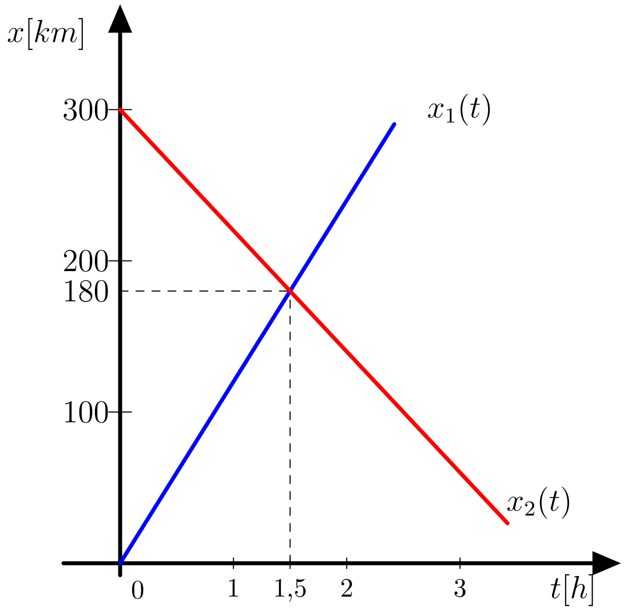


Figura 10.25: Resolución gráfica

Es clara la coincidencia de resultados entre la resolución gráfica y la analítica.

Movimiento Rectilíneo uniformemente acelerado.

Se llama *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* a aquel movimiento que no tiene aceleración normal y su aceleración tangencial es constante.

Si elegimos como sistema de referencia la dirección del movimiento, igual que hicimos en el movimiento rectilíneo uniforme, todas las magnitudes vectoriales se convierten en escalares.

En este movimiento la aceleración media es constante, es decir, no depende del intervalo de tiempo $\Delta\, t$ considerado y en consecuencia esta coincide con la aceleración instantánea.

Por lo tanto la representación gráfica de la función $a = f(t)$ es una recta paralela al eje de los tiempos.

Entonces se puede obtener la ecuación de la velocidad en cualquier instante:

$$a = \frac{\Delta\, v}{\Delta\, t} = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0} \Leftarrow v(t) = v_0 + a\,(t - t_0)$$

En la cual la velocidad es aquella que posee el móvil en el instante t_0. Si consideramos $t_0 = 0$ como el origen de la medición de tiempos en el movimiento, entonces la velocidad v_0 se llama velocidad inicial y la ecuación que permite calcular la velocidad en cualquier instante adquiere la forma:

$$\boxed{v(t) = v_0 + a\,t}$$

La representación gráfica de la función $v = f(t)$ es una recta cuya ordenada al origen es la velocidad inicial y cuya pendiente es la aceleración.

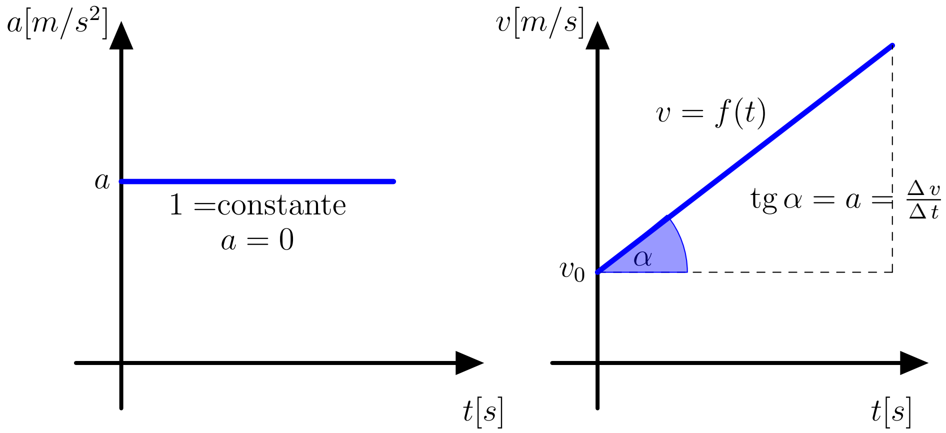


Figura 10.26: Diagramas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Para hallar la ecuación de la posición en cualquier instante, es decir la ecuación horaria de este movimiento, se puede demostrar que la misma se obtiene calculando el área que limita la gráfica anterior y el eje de los tiempos.

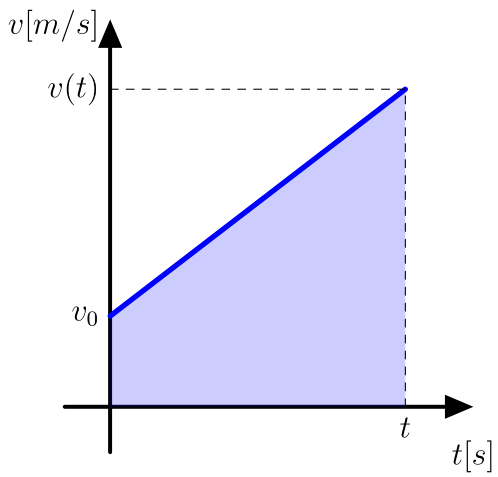


Figura 10.27: $A = x - x_0$.

El desplazamiento en el movimiento que estudiamos queda definido por la diferencia $x - x_0$, en la cual x es la posición alcanzada en el instante t y x_0 es la posición inicial.

El área sombreada en la figura (un trapecio) es:

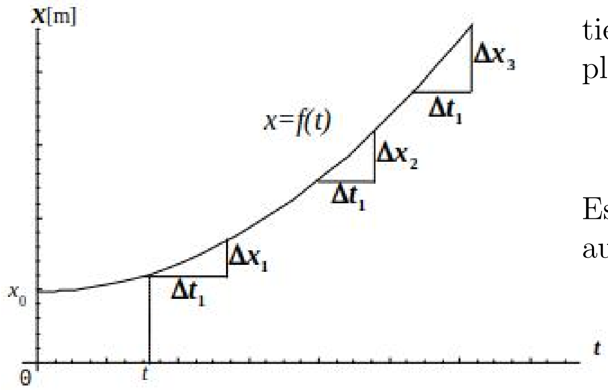
$$A = x - x_0 = \frac{(v(t) + v_0)\, t}{2}$$

Entonces, como $v(t) = v_0 + a\,t$, reemplazando en la fórmula anterior, resulta finalmente:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2}$$

Esta es la llamada *ecuación horaria del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* y nos permite calcular la posición del móvil en cualquier instante.

La representación gráfica de la función $x = f(t)$ es una parábola cuya ordenada al origen es la posición inicial y la pendiente de la recta tangente a la gráfica en cualquier instante es el módulo de la velocidad instantánea.



Se puede apreciar como a intervalos de tiempo iguales entre sí, $\Delta\, t_1$ se producen desplazamientos cada vez mayores:

$$\Delta\, x_1 < \Delta\, x_2 < \Delta\, x_3 < \ldots$$

Esto indica que el módulo de la velocidad aumenta en cada instante.

Ejemplo 10.10 *Un tren parte de una estación con aceleración constante y al cabo de* 10 *segundos alcanza una velocidad de* $72\, km/h$. *Mantiene esta velocidad durante* 2 *minutos. Al llegar a la estación siguiente frena uniformemente recorriendo* 200 *metros hasta parar. Se supone movimiento rectilíneo. Calculen:*

1. *La aceleración en la primera etapa del movimiento.*
2. *El espacio que recorre mientras acelera.*
3. *La aceleración que tiene en la última etapa.*
4. *El tiempo que ha estado en movimiento.*
5. *El espacio total recorrido.*
6. *Dibujen los diagramas* $a = a(t)$ *y* $v = v(t)$

Resolución.
Primera etapa:

1. Tomamos como referencia la estación de partida: $x = 0 \quad v_0 = 72\frac{km}{h} = 20\frac{m}{s} \quad t = 10s$. La aceleración es: $a = \frac{v(t)-v_0}{t} = \frac{20\frac{m}{s}-0}{10s} = 2\frac{m}{s^2}$
2. El espacio recorrido es: Como $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ entonces $s = x(t) - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, de donde,
$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\, 2\, \frac{m}{s^2}\, 100\, s^2 = 100\, m$$
Última etapa:
$$v_0 = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(t) = 0 \quad s = x(t) - x_0 = 200 \text{ m}$$
De la ecuación horaria $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ y de la ecuación de la velocidad $v(t) = v_0 + at$, eliminando el tiempo se obtiene la relación:
$$\boxed{v(t)^2 - {v_0}^2 = 2a\,(x(t) - x_0)}$$
Esta última es muy útil en la práctica pues relaciona la velocidad con la posición, entonces:

3. La aceleración en la última etapa es:

$$a = \frac{v(t)^2 - {v_0}^2}{2s} = \frac{0 - 400\frac{m^2}{s^2}}{400m} = -1\frac{m}{s^2}$$

El tiempo que ha tardado en parar es:

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a} = \frac{0 - 20\frac{m}{s}}{-1\frac{m}{s^2}} = 20 \text{ s}$$

4. Tiempo en movimiento:
Primera etapa: $t_1 = 10$ s
Segunda etapa: $t_2 = 2$ min $= 120$ s
Última etapa: $t_3 = 20$ s
El tiempo total en movimiento es: $t = 150$ s

5. El espacio total recorrido:
Primera etapa: $s_1 = 100, m$
Segunda etapa: $s_2 = v\,t = 20\,\frac{m}{s}\,120\,s = 2400\,m$
Última etapa: $s_3 = 200\,m$
El espacio total recorrido es: $s = 2700\,m$

6. A continuación están los diagramas de la aceleración y velocidad en función del tiempo:

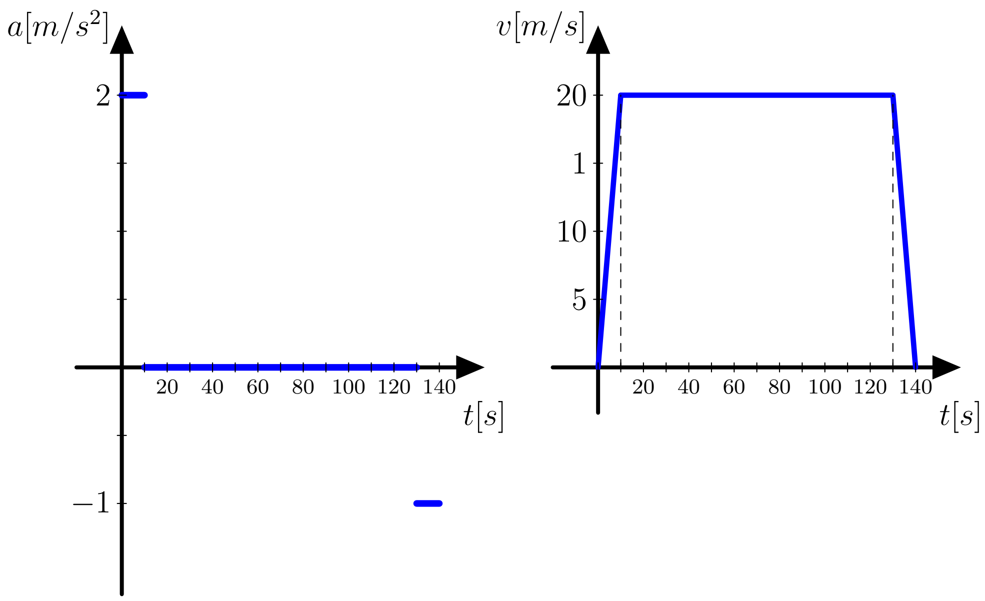


Figura 10.28: Diagramas de aceleración y velocidad.

Veamos ahora un problema de encuentro.

Ejemplo 10.11 *En el momento en que se enciende la luz verde de un semáforo, arranca un automóvil con una aceleración constante de $4\,m/s^2$. En ese instante, un camión que lleva una velocidad constante de $16\,m/s$ alcanza y rebasa al automóvil. En dicho momento ambos vehículos se encuentran en el mismo lugar.*

a) ¿Cuánto tiempo tardará el automóvil en alcanzar al camión?

b) ¿A qué distancia del semáforo alcanza el automóvil al camión?

c) ¿A qué velocidad irá el automóvil en el momento de alcanzar al camión?

d) Determinen gráficamente las respuestas de los ítems (a) y (b).

Resolución:

Tomamos como origen del sistema de referencia al semáforo. Los movimientos de ambos móviles son rectilíneos, el camión esta animado de un movimiento rectilíneo uniforme y el automóvil de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Considerando el origen de tiempos, $t_0 = 0$, el instante en que se pone el semáforo en verde se cumplirá que: $x_{0a} = x_{0c} = 0$. Dado este sistema de referencia la velocidad inicial para el automóvil es $v_{0a} = 0$ y la velocidad del camión es $v_c = 16\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) La condición de encuentro es $x_a\left(t_e\right) = x_c\left(t_e\right)$, es decir planteamos que:

$$x_{0c} + v_c t = x_{0a} + v_{0a} + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{con } t = t_e$$
$$16\,\frac{m}{s}\,t = \frac{4}{2}\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

La ecuación a resolver es:

$$2t^2 - 16t = 0 \Rightarrow t(2t - 16) = 0$$

Las soluciones de la misma son entonces: $t_e = 0$ y $t_e = 8$ s

Es decir que el automóvil tardará 8 segundos en volver a encontrarse con el camión. Decimos "volver" a encontrarse puesto que en el instante $t_e = 0$ los móviles estaban juntos en el semáforo.

b) El automóvil alcanzará al camión la distancia dada por: $x_a\left(t_e\right) = x_a(8)$

$$x_a(8) = \frac{1}{2}\,4\frac{m}{s^2}\,64\,s^2 = 128\,m$$

Esta distancia también estará dada por: $x_c\left(t_e\right) = x_c(8) = 16\frac{\text{m}}{\text{s}}8$ s $= 128$ m c) Al momento de alcanzar al camión el automóvil se mueve con una velocidad de:

$$v_a\left(t_e\right) = v_{0a} + at_e = 4\frac{m}{s^2}8s = 32\frac{m}{s}$$

d) La representación gráfica del problema la obtenemos representando la función $x = f(t)$ de ambos móviles:

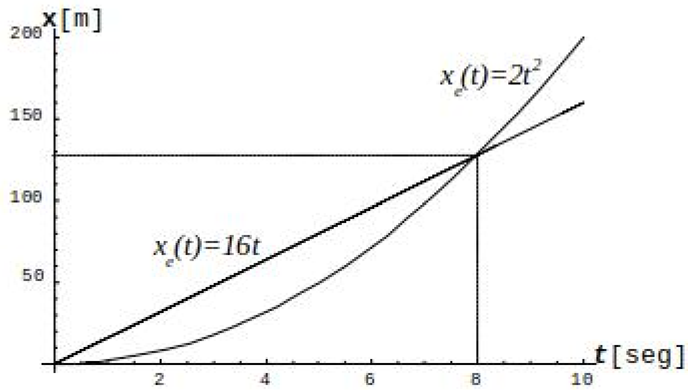


Figura 10.29: Momento del encuentro.

Caída de los cuerpos. Tiro vertical.

Un ejemplo de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es el de un cuerpo que cae hacia la Tierra. Si no hay resistencia del aire la experiencia muestra que todos los cuerpos, independientemente de su forma, tamaño y peso, caen con la misma aceleración en la misma región de la superficie terrestre. Esta aceleración es constante y se denomina *aceleración de la gravedad*, es un vector cuya dirección es vertical, su sentido hacia el centro de la Tierra y cuyo módulo cerca de la superficie terrestre vale aproximadamente: $g = 9,8\, m/s^2$. A este movimiento lo llamaremos caída libre.

"Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco cada vez más velocidad.¿Por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proporción? Ahora bien; si observamos con cierta atención el problema; no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va aumentando siempre de la misma manera". (Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre Dos Nuevas Ciencias. Jornada tercera. Galileo Galilei. 1638)

Recibe el nombre de *proyectil* todo cuerpo que una vez disparado, se mueve bajo la acción de la gravedad. Cuando lanzamos un cuerpo desde la superficie de la Tierra hacia arriba según una trayectoria rectilínea se tratará del movimiento de un proyectil. En particular, a este movimiento lo llamamos tiro vertical.

Este movimiento es también un ejemplo de movimiento uniformemente acelerado.

Como en ambos movimientos las trayectorias son rectilíneas las ecuaciones vectoriales se reducen a ecuaciones escalares si el sistema de referencia se adopta según la dirección del movimiento.

Se trata de estudiar el movimiento de un cuerpo lanzado hacia arriba. El punto 0 es el origen del sistema de referencia y la dirección del movimiento el eje y. La aceleración del

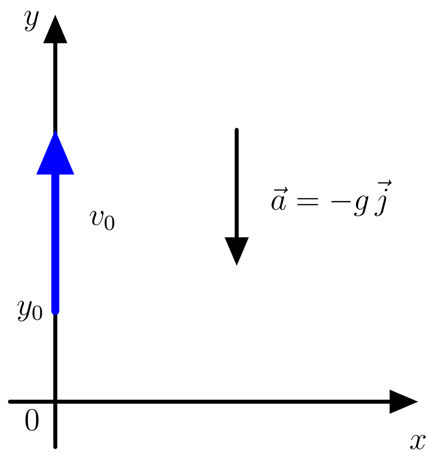


Figura 10.30: Tiro vertical.

movimiento, según el sistema de referencia, en términos escalares es:

$$a = -g$$

A la posición de cuerpo en cualquier instante se le da el nombre de altura, y dicha posición es:

$$y(t) = y_0 + v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

La velocidad en cualquier instante es:

$$v(t) = v_0 - g\,t$$

Ejemplo 10.12 *Desde la azotea de un edificio de 80 metros de altura se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de. Calculen:*

1. *La altura respecto de la calle a la que se encuentra 1 segundo después de ser lanzada.*
2. *La altura máxima que alcanza sobre la calle.*
3. *La posición respecto de la calle a los 4 segundos.*
4. *El tiempo que tarda en llegar a la calle.*
5. *La velocidad que tiene a los 3 segundos.*
6. *La velocidad con que llega al suelo.*

Resolución:

1. La altura respecto de la azotea es:

$$y_a = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} 1\ \text{s} - \frac{1}{2} 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 1\ \text{s}^2 = 15,1\ \text{m}$$

   Altura respecto del suelo: $y(1) = 80m + 20\frac{m}{s}1s - \frac{1}{2}9,8\frac{m}{s^2}1s^2 = 95,1m$

2. Alcanzará la altura máxima cuando $v(t) = 0 : v(t) = v_0 - gt \Rightarrow t = \frac{v(t)-v_0}{-g}$

$$t = \frac{-20\frac{m}{s}}{-9,8\frac{m}{s^2}} \cong 2s$$

   Hasta este instante el movimiento de la piedra es un tiro vertical, a partir de este instante la misma estará animada del movimiento de caída libre. La altura máxima respecto de la calle es:

$$y_m = y(2) = 80m + 20\frac{m}{s}2s - \frac{1}{2}9,8\frac{m}{s^2}4s^2 = 100,4m$$

3. Altura a los 4 segundos respecto del suelo:

$$y(4) = 80m + 20\frac{m}{s}4s - \frac{1}{2}9,8\frac{m}{s^2}16s^2 = 81,6m$$

4. Llega a la calle cuando $y(t) = 0 \Rightarrow 80+20t-\frac{1}{2}9,8t^2 = 0$ (no hemos escrito las unidades para que reconozca fácilmente la ecuación de segundo grado). Las soluciones de la misma son:

$$t_1 = \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 4{,}80{,}4,9}}{-9,8} \cong -2,48 \text{ s} \quad t_2 = \frac{-20 - \sqrt{20^2 + 4{,}80{,}4,9}}{-9,8} \cong 6,56 \text{ s}$$

   La primera de estas soluciones debe ser descartada por tratarse de un valor negativo de tiempo, la piedra llega al suelo después de aproximadamente 6,56 segundos de ser lanzada.

5. $v(t) = v_0 - gt \Rightarrow v(3) = 20\frac{m}{s} - 9,8\frac{m}{s^2}3s = -9,4\frac{m}{s}$ el signo menos indica que la piedra en ese momento está bajando (recuerden que el sistema de referencia tiene sentido positivo según la dirección posítiva del eje y). En este instante la piedra está animada con un movimiento de caída libre.

6. $v(6,56) = 20\,m/s - 9,8\,m/s^2\,6,56\,s = -44,28\,m/s$ Podemos graficar la altura alcanzada por la piedra en función del tiempo a partir de la ecuación

$$y(t) = 80 + 20\,t - \frac{1}{2}\,9,8\,t^2$$

Movimiento en un plano. Tiro oblicuo.

En los movimientos rectilíneos considerados hasta aquí el vector velocidad y el vector aceleración tienen la misma dirección, es decir son colineales.

Cuando esto no se cumple, el movimiento se realiza en una trayectoria curva, un ejemplo es el llamado *tiro oblicuo* donde el vector aceleración es constante pero no es colineal con el vector velocidad. Este movimiento también se llama: *movimiento de los proyectiles.*

El tiro oblicuo tiene lugar cuando la velocidad inicial forma un ángulo α con el horizonte. El movimiento se realiza en un plano. Para determinar este plano se toma como referencia un sistema cartesiano con origen en el punto de lanzamiento, el eje x es la horizontal y el

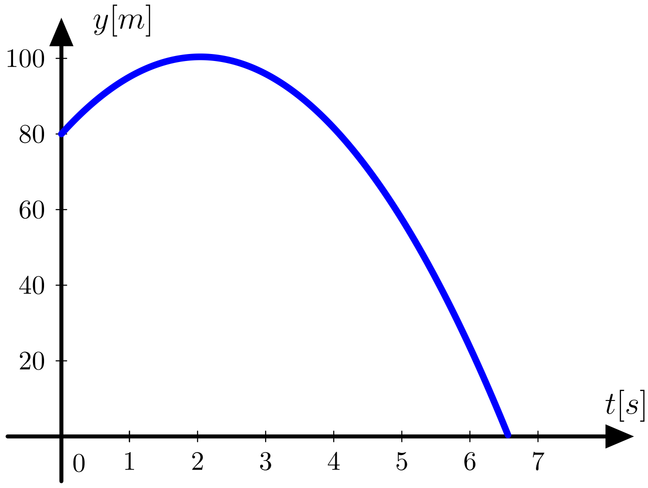


Figura 10.31: Altura en función del tiempo

eje y es la vertical.

"Un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe con dicho movimiento una línea semiparabólica" (consideraciones y demostraciones matemáticas sobre Dos Nuevas Ciencias. Jornada cuarta. Galileo Galilei. 1638).

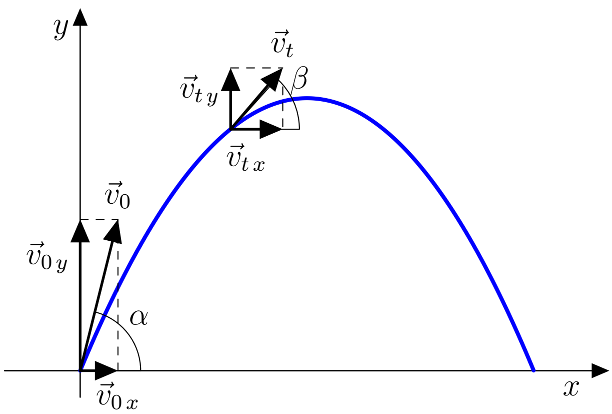


Figura 10.32: Tiro Oblicuo

La velocidad para $t = 0$ recibe el nombre de *velocidad inicial* o *velocidad de disparo*, el ángulo α recibe el nombre de *ángulo de tiro* o *ángulo de elevación*.

La velocidad inicial se puede descomponer en dos velocidades según los ejes de referencia:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

Así, el movimiento del proyectil se puede considerar como el movimiento resultante de otros dos:

- Movimiento horizontal: es un movimiento uniforme con $a_x = 0$.

- Movimiento vertical: es un movimiento uniformemente acelerado con $a_y = -g$.

Las ecuaciones del movimiento horizontal son:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ x(t) = v_x t = v_0 \cos\alpha\, t \end{cases}$$

Las ecuaciones del movimiento vertical son:

$$\begin{cases} v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\, t \\ y(t) = v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

Velocidad instantánea del proyectil:

$$\vec{v}_t = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad \text{o} \quad \vec{v}\,(v_x, v_y)$$

El módulo de dicha velocidad es: $v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.
Pendiente de $\vec{v}$: $\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x}$

Posición instantánea: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{o} \quad \vec{r}(x, y)$.

Ejemplo 10.13 *Un cañón dispara un proyectil con una velocidad de* $400\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *y un ángulo de elevación de* $30°$*. Calculen*

1. *La posición y la velocidad del proyectil a los* 5 *segundos.*
2. *¿En qué instante el proyectil se encuentra a* 1000 *metros de altura? ¿Qué velocidad tiene en esos instantes?*
3. *La altura máxima alcanzada por el proyectil.*
4. *La velocidad en ese instante.*
5. *El alcance máximo.*
6. *¿Con qué velocidad llega a la horizontal del punto de lanzamiento?*
7. *Ecuación de la trayectoria. Consideren* $g = 10\, m/s^2$.

Resolución

1. Posición a los 5 segundos:

$$x(5) = 400\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\frac{\sqrt{3}}{2}5\ \mathrm{s} = 1000\sqrt{3}\ \mathrm{m}$$

$$y(5) = 400\frac{m}{s}\frac{1}{2}5s - \frac{1}{2}10\frac{m}{s^2}25s^2 = 875m \quad \text{entonces} \quad \vec{r}_5(1000\sqrt{3}, 875)$$

Velocidad a los 5 segundos:

$$v_x = 400\frac{m}{s}\frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

$$v_y = 400\frac{m}{s}\frac{1}{2} - 10\frac{m}{s^2}5s = 150\frac{m}{s}$$

entonces

$$\vec{v}_5(200\sqrt{3}, 150)\frac{m}{s}$$

El módulo de dicha velocidad es: $v_5 = \sqrt{(200\sqrt{3})^2 + 150^2} \cong 377,49\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{150}{200\sqrt{3}} = 0,43 \Rightarrow \beta = 23,4^\circ$$

A los 5 segundos el proyectil se encuentra en un punto situado a una distancia horizontal de $200\sqrt{3}$ metros y a una altura de 150 metros. En ese instante su velocidad es de $377,49\frac{\text{m}}{\text{s}}$y forma un ángulo de $23,4^\circ$ con la horizontal.

2. Se encontrará a 1000 metros de altura cuando $y(t) = 1000$ m.

$$v_0 \operatorname{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 = 1000 \Rightarrow 400\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}10t^2 = 1000$$
$$5t^2 - 200t + 1000 = 0 \Rightarrow t^2 - 40t + 200 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son: $t_1 \cong 5,86$ s y $t_2 \cong 34,14$ s.

La velocidad en esos instantes es:

Velocidad para $t_1 = 5,86$ s :

$$v_x = v_0\cos\alpha = 200\sqrt{3}\frac{m}{s} \text{ y } v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt_1 = 141,4\frac{m}{s}$$
$$\vec{v}_{al}(200\sqrt{3}, 141,4)\frac{m}{s} \Rightarrow v_{t1} = \sqrt{(200\sqrt{3})^2 + 141,4^2} = 374,15\frac{m}{s}$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{141,4}{200\sqrt{3}} = 0,4 > 0 \Rightarrow \beta = 22,2^\circ \quad \text{El proyectil esta subiendo.}$$

Velocidad para $t_2 = 34,14$ s :

$$v_x = v_0\cos\alpha = 200\sqrt{3}\frac{m}{s} \text{ y } v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt_2 = -141,4\frac{m}{s}$$
$$\vec{v}_{t2}(200\sqrt{3}, -141,4)\frac{m}{s} \Rightarrow v_{t2} = \sqrt{(200\sqrt{3})^2 + (-141,4)^2} = 374,15\frac{m}{s}$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-141,4}{200\sqrt{3}} = -0,4 < 0 \Rightarrow \beta = -22,2^\circ \quad \text{El proyectil esta bajando.}$$

Hay dos instantes para los cuales el proyectil se encuentra a la misma altura. Para el tiempo más pequeño está subiendo y para el mayor está bajando. En ambos instantes el módulo de la velocidad es el mismo.

3. Se alcanza la altura máxima cuando: $v_y = 0$

$$v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\,t = 0 \Rightarrow t = \frac{-v_0 \operatorname{sen}\alpha}{-g} = \frac{-200\frac{m}{s}}{-10\frac{m}{s^2}} = 20s$$

Este es el tiempo que tarda en alcanzar dicha altura, luego:

$$y_m = y(20) = 400\frac{m}{s}\frac{1}{2}20s - \frac{1}{2}10\frac{m}{s^2}400s^2 = 2000m$$

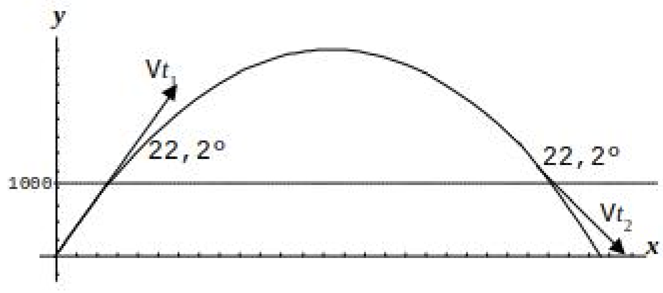


Figura 10.33: Ejemplo Tiro Oblicuo

4. La velocidad en la altura máxima es:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha = 200\sqrt{3}\frac{m}{s} \\ v_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v = 200\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$$

5. El proyectil tiene el alcance máximo cuando: $y(t) = 0$

$$y(t) = v_0 \operatorname{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow 200t - 5t^2 = 0$$

$t_1 = 0$ El proyectil se encuentra en el punto de partida $t_2 = 40$ s.

El proyectil tarda 40 segundos en volver a la horizontal del punto de partida, observe que el tiempo que tarda en volver al suelo es el doble de lo que tarda en subir.

Sustituyendo en la fórmula de desplazamiento horizontal este tiempo de 40 segundos se obtiene:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha = 200\sqrt{3}\frac{m}{s} \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\, t_2 = 200\, m/s - 400\, m/s = -200\, m/s \end{cases}$$

$$v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(200\sqrt{3})^2 + (-200)^2} = 400\, m/s$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-200}{200\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \beta = -30°$$

Vuelve al suelo con la misma velocidad en módulo con que salió y formando el mismo ángulo con la horizontal, aunque de sentido contrario.

Observación 10.6 *En este problema cuando hacemos referencia al suelo nos referimos a la horizontal del punto de salida.*

6. Para hallar la ecuación de la trayectoria eliminamos t en las componentes del vector posición, estamos buscando la función $y = f(x)$.

$$x = v_0 \cos \alpha t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y = v_0 \operatorname{sen} \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \operatorname{sen} \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{24000}$$

Es una parábola del tipo $\quad y = ax^2 + bx$

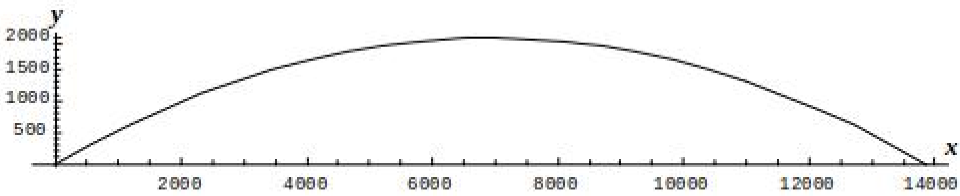
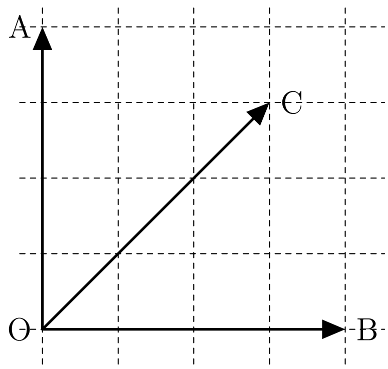


Figura 10.34: Gráfica de la trayectoria

10.8. EJERCICIOS

1. De acuerdo con el siguiente gráfico, hallen:



   a) $\overline{OC} - (\overline{OA} + \overline{OB})$.

   b) $\overline{OA} - (\overline{OC} + \overline{OB})$.

   c) $\left(-\frac{1}{2}\right) \overline{OA} + (\overline{OC} + \overline{OB})$.

2. Sean α y β números reales, indiquen cuáles de las siguientes expresiones son escalares y cuáles son vectores, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores de un plano.

   a) $-\vec{a}$ *b)* $|\vec{a}|$ *c)* $\vec{a} + \vec{b}$ *d)* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *e)* $a \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$

   f) $\alpha \cdot \bar{a}$ *g)* $\alpha \cdot \bar{\beta}$ *h)* $|\vec{a} + \vec{b}|$ *i)* $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ *j)* $\dfrac{\vec{a}}{\beta} \quad \beta \neq 0$

3. Determinen la relación que existe entre los vectores **M** y **N** (no nulos) sabiendo que:
   a) El vector suma es el vector nulo.
   b) El vector diferencia es el vector nulo.
   c) El vector suma es cuatro veces el vector diferencia.

   Rta.: *c)* $\mathbf{M} = \frac{5}{3}\mathbf{N}$

4. Determinen: $\frac{2}{5}\vec{a}, \quad 3 \cdot (\vec{a}+\vec{b})y|4\vec{a}-3\vec{b}|$ para los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dados:

$$\vec{a}=(-2,5) \quad \vec{b}=(2,-8)$$

   Rta.: $\left(-\frac{4}{5},2\right);(0,-9);2\sqrt{533}$

5. Dados los vectores $\vec{u}=(5,-4);\vec{v}=(4,1)$ y $\vec{w}=(1,2)$. Determinen, si existen, los escalares λyβ de modo que $\vec{u}=\lambda\vec{v}+\beta\vec{w}$

   Rta.: $\lambda=2 \wedge \beta=-3$

6. Determinen las componentes del vector $\vec{x}$ si se verifica la igualdad $3\vec{a}-5\vec{b}+2\vec{x}=\overrightarrow{0}$, siendo $\vec{a}=(-3,1) \quad \vec{b}=(-2,5)$

   Rta.: $\left(-\frac{1}{2},11\right)$

7. Determine los valores reales de t, para que el vector $\vec{a}=t\,\vec{i}+(t+1)\,\vec{j}$ tenga módulo $\sqrt{5}$.

   Rta.: $t=1 \vee t=-2$

8. Deteminen el vector de módulo 4 que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\vec{a}=-6\vec{i}+8\vec{j}$

   Rta.: $-\frac{12}{5}\overset{r}{i}+\frac{16}{5}j$

9. Dados los vectores $\vec{p}=-3\bar{i}+\bar{j} \quad y \quad \vec{q}=2\vec{i}+3\bar{j}$. Calculen:
   a) El producto escalar entre los mismos.
   b) El angulo que determinan.
   c) El vector proyección de $\vec{p}$ sobre $\vec{q}$.
   d) El vector proyección de $\vec{q}$ sobre $\vec{p}$.

   Rta.: $a)-3;b)105°15;c)-\frac{6}{13}\bar{i}-\frac{9}{13}\bar{j};d)\,\frac{9}{10}\bar{i}-\frac{3}{10}\bar{j}$

10. Deteminen la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, si se sabe que $\vec{u}=\vec{i}-4\vec{j}$ y $\vec{v}$ tiene como origen y extremo los puntos $(-2,4)$ y $(-5,1)$ respectivamente.

    Rta.: $-\frac{3}{2}\bar{i}-\frac{3}{2}\bar{j}$

11. a) Calculen el producto escalar entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si se sabe que:

$$|\vec{a}|=3 \quad y \quad \vec{a}=-2\vec{b}$$

    b) Deteminen un vector que sea ortogonal al vector $\vec{a}=(1,7)$ y de igual módulo.

    Rta.: $a)\,\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{9}{2}$ b) $(-7,1)$ o $(7,-1)$

12. Calculen $|\vec{x}|$ sabiendo que $\vec{a}$ es ortogonal a $\vec{x}-\vec{a}, |\vec{a}|=2$ y el ángulo que forman $\vec{x}$ y $\vec{a}$ es $\frac{\pi}{4}$

    Rta.: $|\vec{x}|=2\sqrt{2}$

13. Encuentren el ángulo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si se sabe que $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ y $\vec{v}$ tiene primera componente igual a -2 y es perpendicular a $\vec{w}=6\bar{i}+4\bar{j}$

    Rta.: $70°33'$

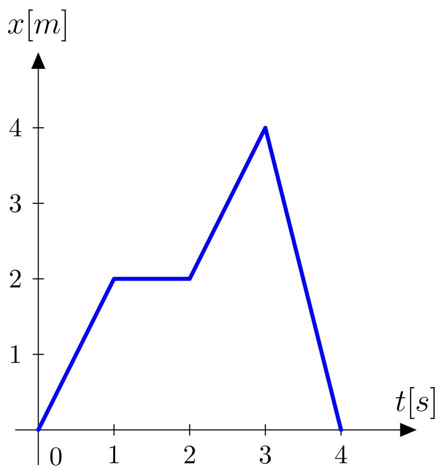
14. Dados los puntos $A = (0, -2); B = (-3, 0)$; y $C = (2, 2)$. Determinen:
a) El perímetro del tríngulo ABC.
b) Los angulos interiores del triangulo ABC.
Rta.: a) $\sqrt{13} + \sqrt{29} + \sqrt{20}$; b) $\angle A = 82°52'$, $\angle B = 55°29'$, $\angle C = 41°38'$

15. Dados los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 5)$ descompongan el vector $\vec{b}$ en la suma de dos vectores, uno que tenga la misma dirección de $\vec{a}$ y el otro en una dirección ortogonal al mismo.
Rta.: $\vec{b} = (13/5,\ 26/5) + (2/5,\ 1/5)$.

16. Una partícula se mueve a lo largo del eje x según la ecuación: $x = t^2 - t - 2$, en las unidades del S.I. Calculen:
a) La posición inicial de la partícula.
b) En qué instantes pasa la partícula por el origen de coordenadas.
c) Dónde se encuentra la partícula al cabo de 5 segundos.
d) La velocidad media en el intervalo de tiempo 2 a 3 segundos.

Rta.: a) $x_0 = -2m$ b) $t = 2$ s c) $x(5) = 18$ m d) $v_m = 4\frac{m}{s}$

17. El diagrama x - t de un movimiento rectilíneo es el siguiente:
a) Dar toda la información que se pueda de este movimiento.
b) Dibujen el diagrama $v - $f.



18. Un vehiculo que tiene un vector velocidad inicial $\vec{v}_0 = (15, 0)\frac{m}{s}$ aumenta su velocidad según un vector aceleración $\vec{a} = (1, 0)\frac{m}{s^2}$. Calculen:

a) La distancia recorrida en 6 segundos.
b) Si disminuye su velocidad a razón de $1\frac{m}{s}$ cada segundo, calcule la distancia recorrida en 6 segundos y el tiempo que tardará en detenerse.

Rta.: a) 108 metros b) 72 metros, $t = 15$ segundos

19. La velocidad de un tren se reduce uniformemente de $12\frac{m}{s}$ a $5\frac{m}{s}$. Sabiendo que durante ese tiempo recorre una distancia de 100 metros, calculen:

a) El vector aceleración.
b) La distancia que recorre a continuación hasta detenerse suponiendo la misma aceleración.

Rta.: a) $\vec{a} = (-0,595,0)\frac{m}{s^2}$ b) 21 metros

20. Un cuerpo, partiendo del reposo, cae por un plano inclinado sin rozamiento con una aceleración uniforme recorriendo 9 metros en 3 segundos. ¿Cuánto tiempo tardará en adquirir una velocidad de $24\frac{m}{s}$ desde que empieza a moverse?

    Rta.: $t = 12$ s

21. Un automóvil está parado en un semáforo esperando a que se ponga en verde, en el instante en que esto ocurre es adelantado por un camión con vector velocidad constante $\vec{v} = (60,0)\frac{\text{km}}{h}$; 2 segundos más tarde arranca el automóvil con vector aceleración constante $\vec{a} = (2,0)\frac{m}{s^2}$ y que después de 15 segundos de estar acelerando mantiene la velocidad adquirida. Calculen:

    a) ¿A qué distancia del semáforo alcanza el automóvil al camión?
    b) ¿Qué vector velocidad tiene el automóvil en ese instante?

    Rta.: a) $355,85$ metros b) $\vec{v} = (108,0)\frac{\text{km}}{\text{h}}$

22. Desde un punto situado en el vector posición $\vec{r} = (0,100)$m se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con un vector velocidad inicial $\vec{v} = (0,50)\frac{m}{s}$, 2 segundos más tarde se lanza desde el suelo otro cuerpo verticalmente hacia arriba siendo su vector posición $\vec{r} = (10,0)m$ y su vector velocidad $\vec{v} = (0,150)\frac{m}{s}$. Si se desprecia la resistencia del aire y se considera aceleración de la gravedad $|\vec{g}| = 9,8\frac{m}{s^2}$, calculen:

    a) ¿Cuánto tiempo desde su lanzamiento tarda el segundo en alcanzar el primero?
    b) ¿En qué vector posición lo alcanza?
    c) ¿Qué vectores velocidad tiene cada uno en ese instante?
    d) ¿Dónde se encuentra el segundo cuando el primero alcanza la altura máxima?
    e) ¿Dónde se encuentra el segundo cuando el primero llega al suelo?

    Rta.: a) $1,5$ s b) $\bar{r} = (0,215)$m c) $\overline{v_1} = (0,15{,}7)\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\overline{v_2} = (0,135{,}3)\frac{\text{m}}{\text{s}}$ d) $\overline{r_2} = (0,418)$m e) $\overline{r_2} = (0,1005)$m

23. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde una altura de 50 metros y se observa que tarda 15 segundos en llegar al suelo. Si se desprecia la resistencia del aire y la aceleración de la gravedad vale $|\bar{g}| = 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, calculen:

    a) ¿Con qué velocidad se lanzó?
    b) ¿Qué velocidad tiene 2 segundos antes de llegar al suelo?
    c) ¿Con qué velocidad lle ga al suelo?
    d) ¿Qué altura alcanza?

    Rta: a) $v_0 = 70,16\frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) $v = -57\frac{m}{s}$ c) $v = -76,9\frac{\text{m}}{\text{s}}$ d) $301,14$ metros del suelo.

24. Se golpea una pelota de golf de manera que su velocidad inicial forma un ángulo de 45° con la horizontal. La pelota alcanza el suelo a una distancia de 180 metros del

punto en que se lanzó. Calculen su velocidad inicial y el tiempo durante el cual ha estado en el aire. Se desprecia la resistencia del aire. $|\vec{g}| = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Rta.: $v_0 = 42 \frac{m}{s}$ $\quad t = 6,06s$

25. Se dispara un cañón con un ángulo de elevación de 30°y un vector velocidad inicial de módulo $|\vec{v}_0| = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Si se desprecia la resistencia del aire y $|g| = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, calculen:

    a) El alcance horizontal del proyectil.
    b) El vector velocidad del proyectil al llegar al suelo.
    c) Si a la mitad del recorrido hubiese una colina de 600 metros de altitud, ¿tropezaría con ella?

    Rta.: a) 3533,3 metros b) $\vec{v} = (100\sqrt{3}, -100) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ c) Tropieza

26. Calculen el ángulo de elevación $\alpha < \frac{\pi}{4}$ con el que debe ser lanzado un proyectil con una velocidad inicial de $400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ para alcanzar un blanco situado sobre la horizontal del punto de lanzamiento y a 5000 metros de distancia del punto de disparo. Se desprecia la resistencia del aire.

    Rta:: $\alpha = 8,9°$

27. Se lanza una piedra desde una altura de 1 metro sobre el suelo con una velocidad de $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ formando un ángulo de 26° con la horizontal. Sabiendo que a una distancia de 120 metros del punto de lanzamiento se encuentra un muro de 2 metros de altura, calculen a qué altura por encima de este pasará la piedra. Se desprecia la resistencia del aire.

    Rta.: 3,2 metros

28. Un estudiante quiere lanzar una pelota por encima de una casa de 40 metros de altura situada a 20 metros de distancia. Para ello, lanza la pelota con una velocidad de $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$y un ángulo de 45°. La pelota abandona la mano del estudiante a una altura de 1,2 metros del suelo. ¿Pasará la pelota por encima del edificio? En caso afirmativo, ¿a qué altura por encima del edificio lo hará? En caso negativo, ¿en qué punto chocará la pelota con el edificio?

    Rta.: No pasa y choca con el edificio a 18,75 metros del suelo.

29. Dadas las fuerzas por sus componentes cartesianas, indiquen su intensidad y ángulo director.

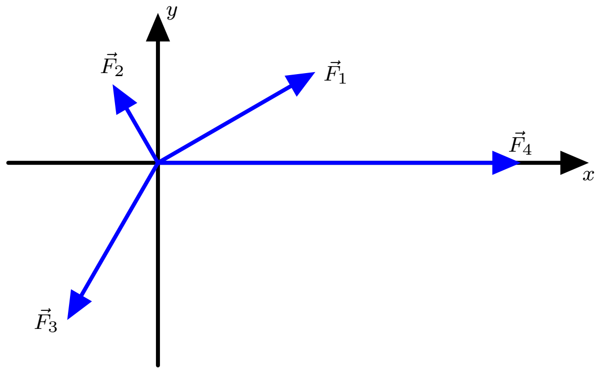
    $$\begin{array}{llll} \vec{F}_1 = (6,0)N & \vec{F}_2 = (-20,0)N & \vec{F}_3 = (0,10)N & \vec{F}_4 = (0,-30)N \\ \vec{F}_5 = (3,4)N & \vec{F}_6 = (-20,10)N & \vec{F}_7 = (-6,-3)N & \vec{F}_8 = (20,-100)N \end{array}$$

    Rta.:

    $$\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_1 = (6N, 0°) \quad \vec{F}_2 = (20N, 180°) \quad \vec{F}_3 = (10N, 90°) \\ \vec{F}_4 = (30N, 270°)\ \vec{F}_5 = (5N, 53{,}1°)\ \vec{F}_6 = \left(\sqrt{500}N, 153,4°\right) \\ \vec{F}_7 = \left(\sqrt{45}N, 206,6°\right)\ \vec{F}_8 = \left(\sqrt{10400}N, 281,3°\right) N \end{array}}$$

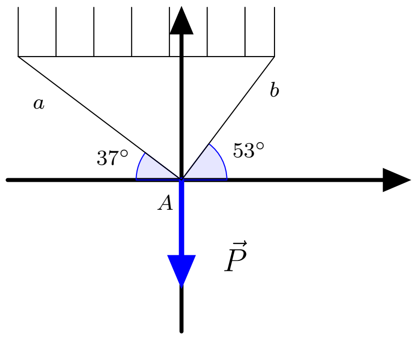
30. Dado el siguiente sistema plano de fuerzas concurrentes a un punto material, se desea deteminar analíticamente la fuerza equilibrante del sistema.

$\vec{F}_1(0,0) = (100N, 30°)$
$\vec{F}_2(0,0) = (20N, 120°)$
$\vec{F}_3(0,0) = (100N, 240°)$
$\vec{F}_4(0,0) = (200N, 0°)$



Rta.: $\vec{E}(0,\,0) = (-226{,}6;\,19{,}28)N = (227{,}42N;\,175{,}1°)$.

31. Equilibren la fuerza $\vec{P}\,(100N, 270°)$, con dos fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ según las direcciones a y b, de las barras rígidas de la figura.



Rta.: $\vec{F}_1 = (-48, 36)N = (60N, 143°)$ $\quad \vec{F}_2 = (48, 64)N = (80N, 53°)$

32. Dado el siguiente sistema plano de fuerzas concurrentes:
$\overline{F_1} = (100, 100)N, \overline{F_2} = (-300, 200)N, \overline{F_3} = (200N, 45°)\,, \overline{F_4} = (100N, 150°)$
Determinen la fuerza resultante.

Rta: $\overline{\mathbf{E}} \cong (-145{,}5, 491)\mathrm{N}$

33. Dado un sistema plano de fuerzas concurrentes en equilibrio:
$\overline{\mathbf{F}_1} = (100, \mathbf{F}_{1\mathrm{Y}})\,\mathrm{N}, \overline{\mathbf{F}_2}(-300, 200)\mathrm{N}, \overline{\mathbf{F}_3} = (\mathbf{F}_{3\mathrm{X}}, -400)\,\mathrm{N}$

Determinen las componentes $\mathbf{F}_{1\mathrm{Y}}, \mathbf{F}_{3\mathrm{X}}$.

Rta: $\mathbf{F}_{1\mathrm{Y}} = 200\ \mathrm{N}, \mathbf{F}_{3\mathrm{X}} = 200\ \mathrm{N}$