Algebra y Geometría Analítica Lineal

Guía Resuelta- UTN

TRANSFORMACIONES LINEALES

1-

$\boldsymbol{Sea\ T: W \to S\ \ Una\ Transformaci\tilde{n}on\ Lineal}$

<u>CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE:</u>

1. $\boldsymbol{T(0_w) = O_S}$
2. $\boldsymbol{T(v+u) = T(v) + T(u)}$
3. $\boldsymbol{v \in W; k \in \mathbb{R} \Rightarrow T(kv) = kT(v)}$

a-

- ✓ $\boldsymbol{1.\ T(0,0) = (0,0) \in S}$
- ✓ $\boldsymbol{2.\ T\big(u_1 + v_1, -(u_2 + v_2)\big) = T(u) + T(v)}$
- ✓ $\boldsymbol{3.\ T(\lambda v_1, -\lambda v_2) = \lambda T(v)}$
- ✓ **ES TL**

b-

- ✓ $\boldsymbol{1.\ T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ como\ Dim\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow Rango(A) = 0}$
- ✓ $\boldsymbol{2.\ \begin{cases} T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 \\ T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \end{cases}}$
- ✓ **NO ES TL**

c-

- ✓ $\boldsymbol{1.\ T(0) = 0.p(0)}$
- ✓ $\boldsymbol{2.\ T(p_0(x) + p_1(x)) = (p_0 + p_1)(0) = T\big(p_0(x)\big) + T\big(p_1(x)\big)}$
- ✓ $\boldsymbol{3.\ T(\lambda p_0(x))\ = \lambda p_0(0) = \lambda T(p_0(x))}$
- ✓ **ES TL**

d-

- ✓ $\boldsymbol{1.\ T\big(\vec{0}_W\big) = \vec{0}_W.\vec{a} = \vec{0}}$
- ✓ $\boldsymbol{2.\ T(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v})\vec{a} = \vec{a}\vec{u} + a\vec{v} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})}$
- ✓ $\boldsymbol{3.\ T(\lambda\vec{u})\ = \lambda\vec{a}\vec{u} = \lambda T(\vec{u})}$
- ✓ **ES TL**

e-

- ✓ $\boldsymbol{1.\ T\big(\vec{0}_W\big) = \vec{0}_W + \vec{a} \neq \vec{0}}$
- ✓ **NO ES TL**
- ✓ **La mecánica para el siguiente y dos es la misma, lo dejo.**

3-

$$\begin{cases} T(v+2w) = T(v) + 2T(w) = 3v - w \\ T(v-w) = T(v) - T(w) = 2v - 4w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textit{si Resto} \Rightarrow \mathbf{T(w) = \frac{v}{3} + w} \\ \textit{Si Sumo } y * 2 \Rightarrow \mathbf{T(v) = \frac{7}{3}v - 3w} \end{cases}$$

4-

Si representamos una combinación Lineal del dominio, deberíamos poder llegar a que su transformada se pueda expresar como combinación lineal de sus elementos transformados, esto siempre y cuando exista la transformada de los vectores.

No solo eso, sino que, además, si es una base del Dominio, podemos asegurar que obtenemos al transformarlo, el espacio generado de su imagen. Es lo que en Algebra llamamos el **Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales.**

Observemos que si el dominio es de dimensión n la base para representarlo debe contener n vectores li, además si fueran ld, obtendríamos o bien un SCI o SI sin poder llegar a UNICA EXPRESIÓN EN SU IMAGEN. Vamos a los Ejercicios:

a-

Veamos si son LI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{LD \Rightarrow NO\ SON\ BASE}$$

Veamos si Corresponde o No a una TL, conociendo alguna CL del Dominio:

$$(2,-1,2) = 2(1,1,1) - 3(0,1,0)$$
$$T(2,-1,2) = 2T(1,1,1) - 3T(0,1,0)$$
$$(2,5,-7) = 2(1,1,1) - 3(0,-1,3)$$
$$(2,5,-7) = (2,5,-7) \Rightarrow$$
$$\mathbf{Multiples\ TL}$$

b-

Veamos si son LI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{LD \Rightarrow NO\ SON\ BASE}$$

Veamos si Corresponde o No a una TL, conociendo alguna CL del Dominio:

$$(1,0,1) = (1,1,1) - (0,1,0)$$
$$T(1,0,1) = T(1,1,1) - T(0,1,0)$$
$$(2,5,-7) = (1,1,1) - (0,-1,3)$$
$$(2,5,-7) = (1,2,-2) \Rightarrow$$
$$\mathbf{\nexists TL}$$

c-

Veamos si son LI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{LI \Rightarrow SON\ BASE}$$

Busquemos la expresión de la TL:

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,3) + \beta(0,1,1) + w(1,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + w = x \\ \beta = y \\ 3\alpha + \beta = z \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{z-y}{3} = \alpha \Rightarrow w = \frac{3x - z + y}{3}} \Rightarrow$$

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,3) + \beta(0,1,1) + w(1,0,0)$$
$$T(x,y,z) = \frac{z-y}{3}T(1,0,3) + yT(0,1,1) + \frac{3x-z+y}{3}T(1,0,0)$$
$$T(x,y,z) = \frac{z-y}{3}(1,1,1) + y(0,-1,3) + \frac{3x-z+y}{3}(2,5,-7)$$
$$\mathbf{T(x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}z + 2x + \frac{1}{3}y, -\frac{4}{3}z + \frac{1}{3} + 5x, \frac{8}{3}z + \frac{1}{3}y - 7x\right)}$$

5-

Tenemos 2 transformaciones, si son base es suficiente para recrear todo el espacio que es de dimensión 2, analicemos eso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow LI$$

$$(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(0,-1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ 2\alpha - \beta = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x,y) = x(1,2) + (2x-y)(0,1)$$
$$T(x,y) = xT(1,2) + (2x-y)T(0,1)$$
$$T(x,y) = x(3,-1) + (2x-y)(1,5)$$
$$T(x,y) = (3x + 2x - y, -x + 10x - 5y)$$
$$\mathbf{T(x,y) = (5x - y, 9x - 5y)}$$

6-

Podemos hacerlo de dos maneras, o descomponer lo que queremos transformar en esos dominios donde se conoce la transformación, o bien con ellos hallar la expresión de la transformación si son una base. Como son li y la dimensión de los polinomios de grado dos, son de 3(se le suma el grado nulo) podemos usarlos diciendo:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = \alpha(x^2) + \beta(x+1) + w(x-1)$$

$$\begin{cases} a_2 = \alpha \\ a_1 = \beta + w \\ a_0 = \beta - w \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 + a_0}{2} = \beta \Rightarrow w = \frac{a_1 - a_0}{2}$$

$$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_2x^3 + \frac{a_1 - a_0}{2}x \Rightarrow T(4x^2 - x + 2) = \boldsymbol{4x^3 - \frac{3}{2}x}$$

7-

Veamos si representan una base de dimensión 3, ya que los espacios de polinomios menores o igual a 2, son representativos en dimensión tres por el agregado de su término independiente:

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&-3\end{pmatrix}\Rightarrow LI\Rightarrow Base\ de\ p_2$$

Busquemos la expresión de la transformada:

$$a_2x^2+a_1x+a_0=\alpha(1+x)+\beta(2x+x^2)+w(-1-x^2)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\beta-w=a_2\\\alpha+2\beta=a_1\\\alpha-w=a_0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1&a_2\\1&2&0&a_1\\1&0&-1&a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&a_1\\0&1&-1&a_2\\1&0&-1&a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&a_1\\0&1&-1&a_2\\0&-2&-1&a_0-a_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&a_1\\0&1&-1&a_2\\0&0&-3&a_0-a_1+2a_2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$a_2x^2+a_1x+a_0=\left(\frac{2a_0+a_1-2a_2}{3}\right)(1+x)+\left(\frac{-a_0+a_1+a_2}{3}\right)(2x+x^2)+\left(\frac{-a_0+a_1-2a_2}{3}\right)(-1-x^2)$$

$$T(a_2x^2+a_1x+a_0)=\left(\frac{2a_0+a_1-2a_2}{3}\right)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\left(\frac{-a_0+a_1+a_2}{3}\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\left(\frac{-a_0+a_1-2a_2}{3}\right)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

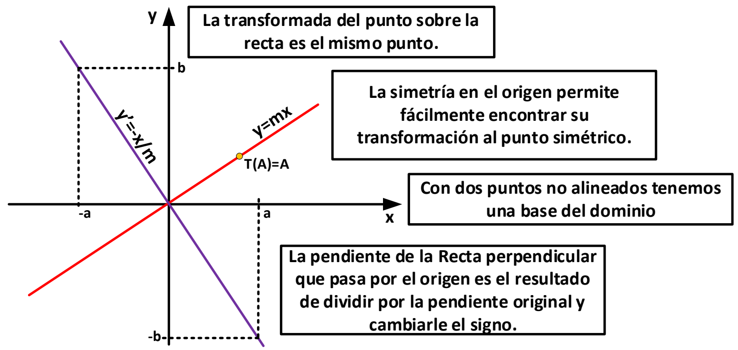
$$\mathbf{T(a_2x^2+a_1x+a_0)=\begin{pmatrix}\frac{-a_0+a_1+a_2}{3}&\frac{2a_0+a_1-2a_2}{3}\\\frac{-a_0+a_1-2a_2}{3}&\frac{-a_0+a_1+a_2}{3}\end{pmatrix}}$$ **NO COINCIDE CON GUIA**

"Para verificar realizar las Transformaciones"

8-

Estos ejercicios nos obligan a esquematizar, y la idea es encontrar una base del dominio que nos permita, además, de fácilmente descubrir cuál es la transformación de cada uno de ellos, cuál sería la expresión asociada a la misma.

a-



$$\begin{cases}T(1,3)=(1,3)\\T(3,-1)=(-3,1)\end{cases}$$

Busquemos la Expresión:

$$(x,y)=\alpha(1,3)+\beta(3,-1)\Rightarrow\begin{cases}\alpha+3\beta=x\\3\alpha-\beta=y\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{x+3y}{10}$$

$$(x,y)=\frac{x+3y}{10}(1,3)+\frac{9x-3y}{3}(3,-1)$$
$$T(x,y)=\frac{x+3y}{10}T(1,3)+\frac{9x-3y}{3}T(3,-1)$$
$$T(x,y)=\frac{x+3y}{10}(1,3)+\frac{9x-3y}{30}(-3,1)$$

$$\mathbf{T(x,y)=\left(-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y;\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y\right)}$$

b-

Sabemos que las coordenadas se pueden escribir como:

$$\vec{v}=\big(vCos(\alpha);vSin(\alpha)\big)\ Siendo\ \alpha\ el\ ángulo\ director\ de\ x.$$

$$\begin{cases}T(2,0)=\left(2Cos\left(0-\frac{\pi}{3}\right),2Sin\left(0-\frac{\pi}{3}\right)\right)=(1,-\sqrt{3})\\T(0,2)=\left(2Cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right),2Sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=(\sqrt{3};1)\end{cases}$$

Busquemos la Expresión:

$$(x,y)=\alpha(2,0)+\beta(0,2)$$

$$\begin{cases}2\alpha=x\\2\beta=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{x}{2}\\\beta=\frac{y}{2}\end{cases}$$

$$(x,y)=\frac{x}{2}(2,0)+\frac{y}{2}(0,2)$$

$$T(x,y)=\frac{x}{2}(1,-\sqrt{3})+\frac{y}{2}(\sqrt{3},1)=$$
$$\mathbf{\left(\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2},-\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}\right)}$$

c-

Teniendo en cuenta la primera imagen, cualquier punto que se encuentre sobre la recta se queda en la recta, y en particular la recta perpendicular a la misma, fácilmente hallable va a parar al origen:

$$\begin{cases} T(1,-1) = (1,-1) \\ T(1,1) = (0;0) \end{cases}$$

Busquemos la Expresión:

$$(x,y) = \alpha(1,-1) + \beta(1,1)$$

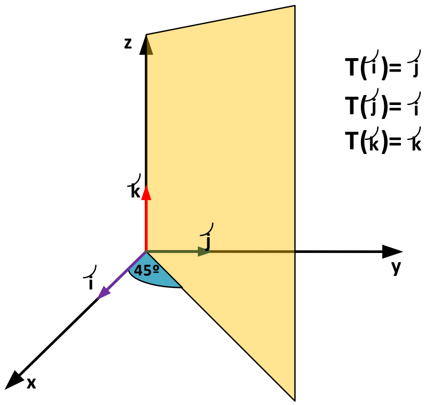
$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -\alpha + \beta = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x-y}{2} \\ \beta = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

$$T(x,y) = \frac{x-y}{2}T(1,-1) + \frac{x+y}{2}T(1,1) = \frac{x-y}{2}(1,-1) = \left(\mathbf{\frac{x-y}{2}}, \mathbf{\frac{y-x}{2}}\right)$$

9-

Observen que, para este caso, siempre necesitamos bases de dimensión 3.

a-



$$\begin{cases} T(1,0,0) = (0,1,0) \\ T(0,1,0) = (1,0,0) \\ T(0,0,1) = (0,0,1) \end{cases}$$

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + w(0,0,1)$$
$$T(x,y,z) = x(0.1.0) + y(1,0,0) + z(0,0,1) = (\mathbf{y,x,z})$$

b-

La estrategia es la misma, solo que ahora el plano, contiene al eje x y tiene otra dirección, si vemos la traza el plano$_{yz}$ tenemos una recta a 45 grados nuevamente pero decreciente tomando como paso al Eje y.

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,0,0) \\ T(0,1,0) = (0,0,-1) \\ T(0,0,1) = (0,-1,0) \end{cases}$$

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + w(0,0,1)$$
$$T(x,y,z) = x(1.0.0) + y(0,0,-1) + z(0,-1,0) = (\mathbf{x,-z,-y})$$

10-

$$\boldsymbol{Nu(T) = \{v \in Dom(T) / T(v) = 0_w\}}$$

a-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{0_V \in Nu(T) \Rightarrow T(0_V) = 0_W}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{T(u+v) = T(u) + T(v) = 0_W + 0_W = 0_W}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda 0_W = 0_W}$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE V**

b-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{0_W \in Im(T) \Rightarrow T(0_w) = 0_W}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{T(u+v) = T(u) + T(v)}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{T(\lambda v) = \lambda T(v)}$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE W**

11-

a-

$A - A^T = 0 \Rightarrow A = A^T$ *DEFINICIÓN DE MATRIZ SIMÉTRICA*

b-

$A - A^T = W$ *DEFINICION DE MATRIZ ANTISIMÉTRICA*

12

a-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - 2z = 0 \Rightarrow Nu(T) = \mathbf{Gen(2,0,1)}$$

b-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & a \\ -2 & 1 & 4 & b \\ -1 & 3 & 2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & a \\ 0 & 5 & 0 & b+2a \\ 0 & 5 & 0 & c+a \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c = b + a}$$

“Observen que a b y c son componentes de la IMAGEN”

$$Vector\ Genérico = (a,b,b+a) = \mathbf{Gen(\{(1,0,1),(0,1,1)\})}$$

13-

$$Nu(T)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^{2x2}/a+b-c-d=0\right\}\Rightarrow a=-b+c+d$$

$$Nu(T)=\left\{\begin{pmatrix} -b+c+d & b \\ c & d\end{pmatrix}\right\}=\mathbf{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$Im(T)=a+b-c-d=x$$

"Observen que la Dim(V)=Dim(Nu(T))+Dim(Im(T))"

Por lo tanto, la imagen es cualquier número Real, ya que es de dimensión uno y está en los Reales, por ejemplo, podemos usar como elemento generador a 1.

14-

Necesitamos encontrar una expresión que represente las propiedades que nos pide en el enunciado. Por lo tanto, como hicimos hasta el momento necesitamos 4 transformaciones donde los elementos del Dominio formen una base, es decir elementos LI:

$$\begin{cases} T(v_1)=w_1 \\ T(v_2)=w_2 \\ T(v_3)=w_3 \end{cases} y\ Dim(V)=3\Rightarrow\{v_1,v_2,v_3\}Base\ de\ Dom$$

$$Nu(T)=Gen(\{(x,-3x,-2x)\}=Gen(\{(1,-3,-2)\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} T(1,-3,-2)=0_W \\ T(v_2)=w_2 \\ T(v_3)=w_3 \end{cases}$$

En segundo lugar, tenemos los generadores de la imagen, es decir, tenemos 2 elementos que son parte de la imagen.

$$\begin{cases} T(1,-3,-2)=0_W \\ T(v_2)=(2,-1,0) \\ T(v_2)=(0,1,-2) \end{cases}\Rightarrow Si\ usamos\ Canónicos\begin{cases} T(1,-3,-2)=0_W \\ T(1,0,0)=(2,-1,0) \\ T(0,1,0)=(0,1,-2) \end{cases}$$

$$(x,y,z)=\alpha(1,-3,-2)+\beta(1,0,0)+w(0,1,0)$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=x \\ -3\alpha+w=y \\ -2\alpha=z \end{cases}\Rightarrow(x,y,z)=-\frac{z}{2}(1,-3,-2)+\left(x+\frac{z}{2}\right)(1,0,0)+\left(y-\frac{3}{2}z\right)(0,1,0)$$

$$T(x,y,z)=\left(x+\frac{z}{2}\right)(2,-1,0)+\left(y-\frac{3}{2}z\right)(0,1,-2)=\mathbf{(2x+z,-x-2z+y,-2y+3z)}$$

15-

Necesitamos encontrar una expresión que represente las propiedades que nos pide en el enunciado. Por lo tanto, como hicimos hasta el momento necesitamos 4 transformaciones donde los elementos del Dominio formen una base, es decir elementos LI:

$$\begin{cases} T(v_1)=w_1 \\ T(v_2)=w_2 \\ T(v_3)=w_3 \\ t(v_4)=w_4 \end{cases} y\ Dim(V)=4\Rightarrow\{v_1,v_2,v_3,v_3\}Base\ de\ Dom$$

$$Nu(T)=Gen\{(-y,y,z,z)\}=Gen\{(-1,1,0,0)(0,0,1,1)\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} T(-1,1,0,0)=0_W \\ T(0,0,1,1)=0_W \\ T(0,1,0,0)=(0,1,0) \\ t(0,0,1,0)=(1,0,0) \end{cases}\begin{matrix} Agrego\ Canónicos\ porque\ no\ tengo\ mas\ restricciones \\ y\ son\ LI\ con\ los\ demás, si\ no\ lo\ ven\ VERIFIQUEN \end{matrix}$$

$$(x,y,z,t)=\alpha(-1,1,0,0)+\beta(0,0,1,1)+\gamma(0,1,0,0)+\omega(0,0,1,0)$$

$$\begin{cases} -\alpha=x \\ \alpha+\gamma=y \\ \beta+\omega=z \\ \beta=w \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha=-x \\ \gamma=y+x \\ \omega=z-w \\ \beta=w \end{cases}$$

$$T(x,y,z,t)=-xT(-1,1,0,0)+wT(0,0,1,1)+(y+x)T(0,1,0,0)+(z-w)T(0,0,1,0)$$

$$T(x,y,z,t)=(y+x)(0,1,0)+(z-w)(1,0,0)=\mathbf{(z-w,y+x,0)}$$

16-

Necesitamos encontrar una expresión que represente las propiedades que nos pide en el enunciado. Por lo tanto, como hicimos hasta el momento necesitamos 4 transformaciones donde los elementos del Dominio formen una base, es decir elementos LI:

$$\begin{cases} T(v_1)=w_1 \\ T(v_2)=w_2 \\ T(v_3)=w_3 \end{cases} y\ Dim(V)=3\Rightarrow\{v_1,v_2,v_3\}Base\ de\ Dom$$

$$Nu(T)=Gen\{(2y,y,-2y)\}=Gen\{(2,1,-2)\}\Rightarrow Dim\big(Nu(T)\big)=1\Rightarrow$$

$$Dim\big(Im(T)\big)+Im\big(Nu(T)\big)=Dim(V)=Dim(\mathbb{R}^3)=3\Rightarrow Dim\big(Im(T)\big)=2\ UN\ PLANO$$

$$\begin{cases} T(2,1,-2)=0_V \\ T(1,0,0)=(1,0,1) \\ T(0,1,0)=(0,1,0) \end{cases} y\ Dim(V)=3\Rightarrow\{v_1,v_2,v_3\}Base\ de\ Dom$$

$$(x,y,z)=\alpha(2,1,-2)+\beta(1,0,0)+w(0,1,0)$$

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=x\\ \alpha+w=y\\ -2\alpha=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=x+z\\ w=y+\dfrac{z}{2}\\ \alpha=-\dfrac{z}{2}\end{cases}$$

$$(x,y,z)=-\frac{z}{2}(2,1,-2)+(x+z)(1,0,1)+\left(y+\frac{z}{2}\right)(0,1,0)$$

$$T(x,y,z)=-\frac{z}{2}T(2,1,-2)+(x+z)T(1,0,0)+\left(y+\frac{z}{2}\right)T(0,1,0)$$

$$T(x,y,z)=(x+z)(1,0,1)+\left(y+\frac{z}{2}\right)(0,1,0)=\left(x+z,y+\frac{z}{2},x+z\right)$$

HAY MUCHAS SOLUCIONES, ESTA DA COMO EL DE LA GUÍA

$$Gen\left\{\left(1,\frac{1}{2},1\right),(0,1,0),(1,0,1)\right\}\ son\ LD\ podemos\ usar\ 2\ \{(0,1,0)(1,0,1)\}$$

"Sugiero genérico de la Imagen como (a,b,c) y las coordenadas de la CL (x,y,z)"

$$\begin{cases}y=a\\ x=b\\ y=c\end{cases}\Rightarrow c=a\Rightarrow Im(T)=\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\in\mathbb{R}^3/\mathbf{x}-\mathbf{z}=\mathbf{0}\}$$

17-

$$Sea\ T:V\to V/T(V)=V$$

Veamos si es MONOMORFISMO O INYECTIVA:

$$\boldsymbol{Nu(T)=\{0_V\}}$$

Veamos si es EPIMORFISMO O SOBREYECTIVA:

$$\boldsymbol{Im(T)=W}$$

$$Dim(V)-Dim\big(Nu(T)\big)=2=Dim\big(Im(T)\big)\Rightarrow Im(T)=V$$

18-

$$Dim(R^n)-Dim\big(Nu(T)\big)=n=Dim\big(Im(T)\big)\Rightarrow Im(T)=R^n\Leftrightarrow Nu(T)=\{0_v\}$$

19-

a-

$$\begin{cases}-2x+2y-2z=0\\ (k-1)x++(1-k)y+(k^2-1)z=0\ \Rightarrow\\ -x+y-z=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}-2&2&-2\\ k-1&1-k&k^2-1\\ -1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&-2\\ 0&0&-2k^2+2k\\ 0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow NO\ MONOMORFISMO\Rightarrow\forall SCI$$

∀k

b-

Deben quedar tres variables $\Rightarrow -2k^2+2k=0\Rightarrow \mathbf{k=1\vee k=0}$

c-

$$\mathrm{Dim}\big(\mathrm{Im(T)}\big)=2\Rightarrow\mathrm{Nu(T)}=\mathrm{Dim(V)}-\mathrm{Dim}\big(\mathrm{Im(T)}\big)=1\Rightarrow$$

Deben quedar 2 variables $\Rightarrow -2k^2+2k\neq 0\Rightarrow \mathbf{k\neq 1\wedge k\neq 0}$

20-

Veamos si es MONOMORFISMO O INYECTIVA:

$$\begin{cases}a=0\\ b=0\\ b=0\\ a+c=0\end{cases}\Rightarrow Nu(T)=\{P_0\}\ \textbf{ES MONOMORFISMO}$$

Veamos si es EPIMORFISMO O SOBREYECTIVA:

$$Dim(P_2)-Dim\big(Nu(t)\big)=3-0=3\neq Im(\mathbb{R}^{2x2})=4$$

21-

La Matriz asociada a una Transformación Lineal respecto de una base, no asocia VECTORES sino coordenadas de ellas a dichas bases, luego lo que haremos es trabajar con dichas coordenadas, para ello transformaremos los elementos de la base B

Para a-

Es en las mismas Bases

$$B=\{(1,0),(0,1)\}\ Base\ Canónica\ de\ \mathbb{R}^2$$

$$Im(T)=B'=\{(1,0)(0;1)\}\ Base\ de\ la\ Imagen$$

Transformamos los Elementos de la Base y buscamos las coordenadas en la base B':

$$\begin{cases}T(1,0)=(1,-1)=\alpha(1,0)+\beta(0,1)\\ T(0,1)=(2,1)=\alpha(1,0)+\beta(0,1)\end{cases}\Rightarrow[T(V_B)]_{B'}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\begin{cases}[T(1,0)]_{B'}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\\ [T(0,1)]_{B'}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\end{cases}$$

Cada una de estas coordenadas representan las Columnas de la Matriz asociada:

$$Si\ Dim(V)=n\Rightarrow M(T)_{BB'}=\{[T(V_1)]_{B'};\ [T(V_2)]_{B'};\dots;[T(V_n)]_{B'}\}$$

$$\mathbf{M(T)_{BB'}}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\ \mathbf{-1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Para b-

Es en las mismas Bases

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0)(0,0,1)\}\ Base\ Canónica\ de\ \mathbb{R}^2$$
$$Im(T) = B' = \{(1,0,0),(0,1,0)(0,0,1)\}\ Base\ de\ la\ Imagen$$

Transformamos los Elementos de la Base y buscamos las coordenadas en la base B':

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \omega(0,0,1) \\ T(0,1,0) = (0,2,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \omega(0,0,1) \\ T(0,0,1) = (-1,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \omega(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$[T(V_B)]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \omega \end{pmatrix} \begin{cases} [T(1,0,0)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ [T(0,1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [T(0,1)]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Cada una de estas coordenadas representan las Columnas de la Matriz asociada:

$$\mathbf{M(T)_{BB'}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Para c-

Son en las mismas Bases: CANONICAS DE R TRES

Transformamos los Elementos de la Base y buscamos las coordenadas en la base B':

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (3,2,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \omega(0,0,1) \\ T(0,1,0) = (4,5,2) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \omega(0,0,1) \\ T(0,0,1) = (1,3,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \omega(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$[T(V_B)]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \omega \end{pmatrix} \begin{cases} [T(1,0,0)]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ [T(0,1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ [T(0,1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M(T)_{BB'}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

22-

a-

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & a & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & a & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -a-1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1-2 \end{pmatrix}$$

$$Rg(A) = 2 \Rightarrow a + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \mathbf{a = 1}$$

b-

Las coordenadas de la transformación de los Elementos de la base, coinciden con el valor de la Transformación de los mismos, es decir con el de cada columna de la Matriz Asociada a la Transformación.

$$\begin{cases} T(1,0,0,0) = (2,-3,-1) \\ T(0,1,0,0) = (1,a,1) \\ T(0,0,1,0) = (-1,1,0) \\ T(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \end{cases} \Rightarrow Luego\ T(0,0,0,1) \in Nu(T) \neq \{0_V\} \Rightarrow \nexists T\ MONOMORFA$$

23-

a-

Para que T sea EPIMORFISMO:

$$Dim(V) = Dim(\mathbb{R}^{2x2}) = 4 = Dim(Nu(T)) + Dim(Im(T)) \Rightarrow$$
$$Dim(Nu(T)) = 4 - Dim(Im(T)) = 4 - 3 = 1 \Rightarrow Dim(S) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k+1 \\ 2k & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k+1 \\ 0 & -2+2k & 0 & 4-2k(k+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 + 2k = 0 \Rightarrow k = 1 \\ k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k = 1 \vee k = -2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{k = 1}$$

b-

$$\begin{cases} T(1,-1,0,1) = 0_W \\ T(0,-2,0,4) = 0_W \\ T(0,0,1,0) = (1,1,0) \\ T(1,0,0,0) = (2,1,3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,-1.0,1) + \beta(0,-2,0,4) + \gamma(0,0,1,0) + \omega(1,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \omega = a \\ -\alpha - 2\beta = b \\ \gamma = c \\ \alpha + 4\beta = d \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{b+d}{2} \Rightarrow \alpha = -2b - d \Rightarrow$$

$$T(x,y,z,t) = c(1,1,0) + (a+2b+d)(2,1,3) =$$
$$\mathbf{(c + 4b + 2d + 2a, c + a + 2b + d, 3a + 6b + 3d)}$$

24-

a-

$$Dim(V) = Dim\big(Nu(T)\big) + Dim\big(Im(T)\big) \Rightarrow 5 = 3 + 2 \Rightarrow \textbf{VERDADERO}$$

b-

$$Dim(V) = Dim\big(Nu(T)\big) + Dim\big(Im(T)\big) \Rightarrow Dim\big(Nu(T)\big) = 1 \Rightarrow \textbf{VERDADERO}$$

c-

$$Dim(V) = Dim\big(Nu(T)\big) + Dim\big(Im(T)\big) \Rightarrow Dim\big(Nu(T)\big) = 0 \Rightarrow \textbf{VERDADERO}$$

d-

$$Dim(V) = Dim\big(Nu(T)\big) + Dim\big(Im(T)\big) \Rightarrow Dim\big(Nu(T)\big) = 0 \Rightarrow \textbf{FALSO POR C}$$

e-

$$Dim(V) = Dim\big(Nu(T)\big) + Dim\big(Im(T)\big) \Rightarrow Dim\big(Nu(T)\big) = 0 \Rightarrow \textbf{FALSO POR C}$$

25-

$$Matrices\ Estandar \begin{cases} \mathrm{M_b(T)_{BB'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{M_c(T)_{BB'}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{M_a(T)_{BB'}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$M(T)_{BB'} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (M(T)_{BB'})^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M(T^{-1})_{B'B} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Si\ A = M(T)_{BB'} \Rightarrow (M(T)_{BB'})^{-1} = M(T^{-1})_{B'B}\ con\ Det(A) \neq 0$$

$$Det(\mathrm{M_a(T)_{BB'}}) = Det(A) = Det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0\ Admite\ inversa$$

$$T^{-1}(V) = F(W) = V = \{v_i \in V / T(v_i) = W\}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \{(x, y) \in V / T(V) = W\}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left\{(a, b) \in W / \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y; \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y\right)\right\}$$

"Si toman una transformación y le aplican la inversa, obtienen el vector que fue transformado"

$$Det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3(5-6) - 4(2-3) + 1(4-5) = -3 + 4 - 1 = 0$$

"No hay Inversa"

$$Det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 * 2 - 1 * (-2) = 4$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T}{4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to P_2 = \left\{ a + bx + cx^2 \in P_2 \middle/ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to P_2 = \left\{ a + bx + cx^2 \in P_2 / \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}y: -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z\right) \right\}$$

$$\mathbf{T^{-1}(x, y, z) = \frac{x + z}{2} + \frac{y}{2}t + \left(\frac{z - x}{2}\right)t^2}$$

"Si toman una transformación y le aplican la inversa, obtienen el vector que fue transformado"

Por Ejemplo, tomemos el vector (1,0,1), imagen de la transformación original:

- ✓ $\mathrm{T^{-1}(1,0,1)} = \frac{1+1}{2} + \frac{0}{2}\mathrm{t} + \left(\frac{1-1}{2}\right)\mathrm{t}^2 = 1 \equiv (1,0,0)$

26-

$$\begin{cases} T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \end{cases} Se\ cumple\ que\ Im(T_2) \subseteq Dom(T_1) \Rightarrow \exists T_1 \circ T_2$$

$$T_1 \circ T_2 = T_1\big(T_2(x,y)\big) = T_1(x,y,x-y) = (\mathbf{x-y, 2x-y})$$

$$\begin{cases} T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \end{cases} Se\ cumple\ que\ Im(T_1) \subseteq Dom(T_2) \Rightarrow \exists T_2 \circ T_1$$

$$T_2 \circ T_1 = T_2\big(T_1(x,y,z)\big) = T_2(x-y, x+z) = (\mathbf{x-y, x+z, -z-y})$$

Verifiquemos con el producto de las ***Matrices Estándar*** de cada transformación:

$$M(T_1)_{\mathbb{R}^3\mathbb{R}^2} = A_{T_1}^{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(T_2)_{\mathbb{R}^2\mathbb{R}^3} = A_{T_1}^{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

✓ $$T_1 \circ T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x-y, 2x-y)$$

✓ $$T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (x-y, x+z, -y-z)$$

Si observan detenidamente, siempre trabajamos con las coordenadas de los Vectores, lo que ocurre en base Canónica es que coinciden las coordenadas con los valores idénticos de las componentes de ellos sin necesidad de expresarlos como una combinación lineal de ambas bases.

27-

Busquemos la primera composición:

$$T_1 \circ T_2 = M(T_1)_{\mathbb{R}^3\mathbb{R}^2} * M(T_2)_{\mathbb{R}^3\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Im(T_1 \circ T_2) = (2y+4z, 2x) = Gen\{(2,0),(4,0),(0,2)\}$$
$$no\ son\ base\ y\ forman\ todo\ W \Rightarrow$$

$$\mathbf{Im(T_1 \circ T_2) = Gen\{(1,0),(0,1)\}}$$

$$\mathbf{Nu(T_1 \circ T_2) = Gen\{(0,-2,1)\} = \{(x,y,z)/x = 0 \wedge y + 2z = 0\}}$$

$$Det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow A^{-1} = Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$

$$T_1 \circ T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x+2y, -2x+2z)$$

$$\mathbf{Nu\big(T_1 \circ T_2^{-1}\big) = Gen\{(1,-1,1)\}}$$

28-

a-

$$\mathbf{M(Id)_{B_1E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \textbf{ Es la de Cambio de Base}$$

b-

$$\begin{cases} (1,0,0) = \alpha(3,0,0) + \beta(-1,1,0) + \omega(1,-1,1) \Rightarrow [T(1,0,0)]_{B_2} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)^T \\ (0,1,0) = \alpha(3,0,0) + \beta(-1,1,0) + \omega(1,-1,1) \Rightarrow [T(0,1,0)]_{B_2} = \left(\frac{1}{3}, 1, 0\right)^T \\ (0,0,1) = \alpha(3,0,0) + \beta(-1,1,0) + \omega(1,-1,1) \Rightarrow [T(0,1,0)]_{B_2} = (0,1,1)^T \end{cases}$$

$$\mathbf{M(Id)_{EB_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \textbf{ Es la de Cambio de Base}$$

c-

$$\begin{cases} (3,0,0) = \alpha(1,2,-1) + \beta(1,-1,0) + \omega(0,-1,2) \Rightarrow [T(3,0,0)]_{B_2} = \left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)^T \\ (-1,1,0) = \alpha(1,2,-1) + \beta(1,-1,0) + \omega(0,-1,2) \Rightarrow [T(-1,1,0)]_{B_2} = (0,-1,0)^T \\ (1,-1,1) = \alpha(1,2,-1) + \beta(1,-1,0) + \omega(0,-1,2) \Rightarrow [T(0,1,0)]_{B_2} = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)^T \end{cases}$$

$$\mathbf{M(Id)_{B_1B_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{6}{5}} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{5}} \\ \mathbf{\frac{9}{5}} & \mathbf{-1} & \mathbf{\frac{4}{5}} \\ \mathbf{\frac{3}{5}} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} \textbf{ Es la de Cambio de Base}$$

29-

a-

$$Siendo\ P = M(Id)_{B_1B_2} \Rightarrow P.[u]_{B_1} = [T(u)]_{B_2} = [u]_{B_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B2}}$$

b-

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \Rightarrow [\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{B1}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \\ \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}$$

c-

$$\begin{cases} (\mathbf{1},\mathbf{0}) = \mathbf{1}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1}) - \mathbf{2}(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2}) \\ (\mathbf{1},-\mathbf{1}) = \mathbf{1}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1}) + \mathbf{0}(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2}) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{B_2} = \left\{(\mathbf{1},-\mathbf{1}),;\left(\mathbf{0},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\right\}$$

30-

a-

$$\begin{cases} T(1) = (1,0) = \alpha(-1,1) + \beta(1,0) \Rightarrow [T(1)]_{B_2} = (0,1)^T \\ T(x) = (0,3) = \alpha(-1,1) + \beta(1,0) \Rightarrow [T(x)]_{B_2} = (3,3)^T \\ T(x^2) = (1,0) = \alpha(-1,1) + \beta(1,0) \Rightarrow [T(x^2)]_{B_2} = (0,1)^T \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M(T)}_{\mathbf{B_1B_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

b-

$$\begin{cases} T(x^2+x) = (1,3) = \alpha(-1,1) + \beta(1,0) \Rightarrow [T(1)]_{B_2} = (3,4)^T \\ T(-x+1) = (1,-3) = \alpha(-1,1) + \beta(1,0) \Rightarrow [T(x)]_{B_2} = (-3,-2)^T \Rightarrow \\ T(3) = (3,0) = \alpha(-1,1) + \beta(1,0) \Rightarrow [T(x^2)]_{B_2} = (0,3)^T \end{cases}$$

$$\mathbf{M(T)}_{\mathbf{B_1B_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

31-

"Recuerden que son coordenadas, hay que pasarlas a base"

$$Si\ T(p) = (2,1,0) \Rightarrow (2,1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,1) + \omega(0,0,1) \Rightarrow [T(p)]_{B'} = (1,1,-1)^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ 1 - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]_B = (1,-1)^T \Rightarrow$$

$$p(x) = 1(1) - 1(x) = \mathbf{1 - x}$$

32-

a-

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,-2,0) = \alpha(3,0,3) + \beta(0,1,2) + \omega(0,0,-2) \Rightarrow [T(1,0,0)]_B = \left(\frac{1}{3};-2;-\frac{3}{2}\right) \\ T(0,1,0) = (0,1,-3) = \alpha(3,0,3) + \beta(0,1,2) + \omega(0,0,-2) \Rightarrow [T(0,1,0)]_B = \left(0;1;\frac{5}{2}\right) \\ T(0,0,1) = (0,1,-3) = \alpha(3,0,3) + \beta(0,1,2) + \omega(0,0,-2) \Rightarrow [T(0,0,1)]_B = \left(\frac{1}{3};1;\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{M_{EB}(T)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} & \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} & \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}$$

b-

Las coordenadas de la base del dominio de la transformación lineal coinciden con el vector a transformar porque partimos de la base canónica:

$$\mathrm{M_{EB}(T)}\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}_{\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ -\dfrac{3}{2} & \dfrac{5}{2} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = [T(2,1,0)]_B \Rightarrow$$

$$T(2,-1,0) = 1(3,0,3) - 4(0,1,2) - 4(0,0,-2) = \mathbf{(3,-4.3)}$$

33-

Encontremos las coordenadas del elemento a transformar:

$$(1,2,3) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,-1,0) + \omega(0,0,-1) = [(1,2,3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Encontremos las coordenadas de la transformación:

$$(4,2,1) = \alpha(1,1,-1) + \beta(2,-1,0) + \omega(1,0,0) = [T(1,2,3)]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 - 2 - 3a = 11 \Rightarrow \mathbf{a = -4}$$

34-

Buscamos las coordenadas de la base:

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,2,0) + \omega(0,1,1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = \dfrac{y-z}{2} \\ \omega = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{y-z}{2} \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{3y-z}{2} \\ \dfrac{4x+y-z}{2} \end{pmatrix}_{B'}$$

$$T(x,y,z) = x(2,0,0) + \frac{3y-z}{2}(0,0,1) + \frac{4x+y-z}{2}(0,-2,0) =$$

$$\left(\mathbf{2x}, -\mathbf{4x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \frac{\mathbf{3y - z}}{\mathbf{2}}\right) = Gen\left\{(2,-4,0),\left(0,-1,\frac{3}{2}\right),\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)\right\} \Rightarrow Dom(Im) = 3$$

$\mathbf{Nu(T)} = \{\mathbf{0_V}\}$ *ya que es de dimensión cero.* $D(im) + D(Nu) = D(V)$