Algebra y Geometría Analítica Lineal

Guía Resuelta - UTN

ESPACIOS VECTORIALES

1-

$W \subseteq V$ ***ES SUBESPACIO*** $\Leftrightarrow$ ***W es Espacio Vectorial***

<u>CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE:</u>

1. $\mathbf{0_V \in W}$
2. $\boldsymbol{u, v \in W \Rightarrow u + v \in W}$
3. $\boldsymbol{v \in W; k \in \mathbb{R} \Rightarrow kv \in W}$

a-

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (x_1, x_2) = \lambda(0,1); \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- ✓ **1.** $\boldsymbol{Si\ \lambda = 0 \Rightarrow (0,0) \in A}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{\lambda(0,1) + \beta(0,1) = (\lambda + \beta)(0,1) = k(0,1) \in A}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{k(\lambda(0,1)) = (k\lambda)(0,1) = t(0,1) \in A}$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^2$ → ES UNA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN

b-

$$B = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (x_1, x_2) = \lambda\left(-\frac{3}{2}, 1\right); \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

- ✓ **1.** $\boldsymbol{Si\ \lambda = 0 \Rightarrow (0,0) \in A}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{\lambda\left(-\frac{3}{2},1\right) + \beta\left(-\frac{3}{2},1\right) = (\lambda+\beta)\left(-\frac{3}{2},1\right) = k\left(-\frac{3}{2},1\right) \in B}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{k\left(\lambda\left(-\frac{3}{2},1\right)\right) = (k\lambda)\left(-\frac{3}{2},1\right) = t\left(-\frac{3}{2},1\right) \in B}$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^2$ → ES UNA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN

c-

$$C = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (x_1, x_2) = \lambda\left(\frac{2}{3}, 1\right) + (1,0); \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

- ✓ **1.** $\boldsymbol{Si\ \lambda = -\frac{3}{2} \Rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right) \neq 0 \in A \Rightarrow (0,0) \notin C}$
- ✓ **NO ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^2$ → ES UNA RECTA QUE NO PASA POR EL ORIGEN

d-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{Si\ \lambda = 0 \Rightarrow (0,0) \in D}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{(x_1 + y_1, x_2 + y_2): x_i + y_i \leq 0 \in D}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{(\lambda x_1, \lambda x_2) si\ \lambda < 0 \Rightarrow \lambda x_1 \geq 0 \notin D}$
- ✓ **NO ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^2$ →es el recinto por debajo de x_1

2-

a-

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) = \lambda(2, -1, 1); \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- ✓ **1.** $\boldsymbol{Si\ \lambda = 0 \Rightarrow (0,0,0) \in A}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{\lambda}(2,-1,1) + \boldsymbol{\beta}(2,-1,1) = (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\beta})(2,-1,1) = \boldsymbol{k}(2,-1,1) \in \boldsymbol{A}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\lambda}(2,-1,1)) = (\boldsymbol{k\lambda})(2,-1,1) = \boldsymbol{t}(2,-1,1) \in \boldsymbol{A}$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^3$ → ES UNA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN

b-

$$B = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) = \lambda\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) + \beta(-2,0,1); \lambda, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

- ✓ **1.** $\boldsymbol{Si\ \lambda = \beta = 0 \Rightarrow (0,0,0) \in B}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{Es\ LCI\ para\ la\ suma}$ **(2 DIRECCCIONES INCLUIDAS EN UN PLANO)**
- ✓ **3.** $\boldsymbol{Es\ LCI\ para\ el\ producto\ por\ escalar.}$ **(ESCALAR UNA DIRECCECION)**
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^3$ → ES UN PLANO QUE PASA POR EL ORIGEN

c-

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) = (2,0,0) + \lambda(-1,1,0) + \beta(0,0,1); \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$$

- ✓ **1.** $\boldsymbol{(0,0,0) \notin C}$
- ✓ **NO ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^3$ → ES UN PLANO QUE NO PASA POR EL ORIGEN

d-

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 2x_2 \vee x_1 = -2x_2\}$$

- ✓ **1.** $\boldsymbol{(0,0,0) \in D}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{(2x_3, x_2, x_3) + (-2x_3, x_2, x_3) = (0, 2x_2, 2x_3) si\ x_3 = 1\ ; 0 \neq 2}$
- ✓ **NO ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^3$ → SON DOS PLANOS

3-

a-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{(0,0,0,0) \in W \Rightarrow x_1 + x_2 - x_4 = 0 + 0 - 0 = 0}$
- ✓ **2.** $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \Rightarrow (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_4 + y_4) = 0$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{(kx_1, kx_2, kx_3, kx_4)} \Rightarrow kx_1 + kx_2 - kx_4 = 0$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^4$

b-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{\vec{0} \in W \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_n = 0 \Rightarrow x_1 = x_n = 0}$
- ✓ **2.** $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \Rightarrow x_1 = x_n \wedge y_1 = y_n \Rightarrow x_1 + y_1 = x_n + y_n$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{(kx_1, kx_2, kx_3, kx_4)} \Rightarrow x_1 = x_n \Rightarrow kx_1 = kx_n$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^4$

c-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \Rightarrow Det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{Det(A + B) \neq 0}$
- ✓ **NO ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^{2\,x\,2}$

d-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \Rightarrow 0 + 0 + 0 = 0}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B) = 0}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{Traza(kA) = kTraza(A) = 0}$
- ✓ **ES SUBESPACIO** $\mathbb{R}^{3\,x\,3}$

4-

a-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{Si\ p = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 : 0 + 0 - 20 = 0}$
- ✓ $\boldsymbol{2(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \Rightarrow}$
  $\boldsymbol{(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) - 2(a_2 + b_2) = 0}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 \Rightarrow ka_0 + ka_1 - 2ka_2 = 0}$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** V

b-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{p = 0 \in W}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{gr(P_2(x) + T_2(x)) \leq 2}$
- ✓ **NO ES SUBESPACIO DE** V

c-

- ✓ **1.** $\boldsymbol{Si\ p = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0 : 0 - 0 + 0 = 0 \wedge 20 - 0 = 0}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{(a_0 + y_0) - (a_1 + y_1) + (a_2 + y_2) = 0 \wedge 2(a_2 + y_2) - (a_3 + y_3) = 0}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{ka_0 - ka_1 + ka_2 = 0 \wedge k2a_2 - ka_3 = 0}$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** V

d-

$W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2 / a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 0\}$ $(relación\ de\ sus\ a_i)$

- ✓ **1.** $\boldsymbol{Si\ p = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 : 0 - 20 + 40 = 0}$
- ✓ **2.** $\boldsymbol{(a_0 + y_0) - 2(a_1 + y_1) + 4(a_2 + y_2) = 0}$
- ✓ **3.** $\boldsymbol{ka_0 - 2ka_1 + 4ka_2 = 0}$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** V

5-

a-

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ \beta = -1 \\ 2\alpha + \beta = 3 \end{cases} \textit{Absurdo} \Rightarrow \text{No es CL}$$

b-

$$t^2 + 4t - 3 = (\alpha + 2\beta)t^2 + (-2\alpha - 3\beta + \omega)t + 5\alpha + 3\omega \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -2\alpha - 3\beta + \omega = 4 \\ 5\alpha + 3\omega = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ -2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 5 & 0 & 3 & | & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -10 & 3 & | & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 13 & | & 52 \end{pmatrix} \text{ ES CL}$$

$$p(x) = -3p_1(x) + 2p_2(x) + 4p_3(x)$$

c-

$$(1,2,0) = (2\alpha + 2\beta + 2\omega, \alpha + \beta(1+k) + 2\omega, -\alpha + \beta k + \omega) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 2\omega = 1 \\ \alpha + (1+k)\beta + 2\omega = 2 \\ -\alpha + k\beta + \omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1+k & 2 & | & 2 \\ -1 & k & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2k & 2 & | & 3 \\ 0 & 2k+2 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2k & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 4k-4 & | & -4k-6 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow -4 - 6 \neq 0 \Rightarrow \text{SI}$$
$$\text{si } k \neq 1 \text{ SCD} \Rightarrow \text{son CL}$$

6-

a-

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\omega = 0 \\ \alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \textit{observar}: Dim(R^2) = 2 \ y \ |S| = 3$$

$$Dim < |S| \Rightarrow \text{LD}$$

"¡¡¡Cuidado!!! Los VECTORES SON LD no así las FILAS de la matriz que resulta como sistema"

b-

Un Unico vector siempre es LI *ya que la unica solucion es* $\lambda = 0$

c-

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\omega = 0 \\ 3\alpha + \beta + 4\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{LD}$$

d-

$$\begin{cases} \alpha + 2\omega = 0 \\ 3\alpha + 3\beta + 4\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow Dim(P_3) = 4 - 2(Son\ x^{n_i} = 0) = 2\ |S| = 3 \Rightarrow$$

$$Dim < Rango \Rightarrow \text{LD}$$

e-

$$\lambda\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ LD}$$

f-

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\omega = 0 \\ 2\alpha + 4\omega = 0 \\ \beta + \omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{LD}$$

7-

a-

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + k\omega + 3\tau = 0 \\ \beta + \omega - k\tau = 0 \\ \alpha - \omega + \tau = 0 \end{cases} = \begin{cases} \beta + k\omega + 3\tau = 0 \\ \beta + \omega - k\tau = 0 \\ -\omega + \tau = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -k & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 3 & | & 0 \\ 0 & 1-k & -k-3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 3 & | & 0 \\ 0 & 1-k & -k-3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2k-2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq -1$$

8-

a-

$$si\ \vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\ x\ \vec{v} = \vec{0}\ LD \Rightarrow \text{F}$$

b-

$$(si\ \vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{w}\}LI \wedge \{\vec{v}, \vec{w}\}LI) \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}\ LD \Rightarrow \text{F}$$

c-

Comprobamos que el nuevo conjunto es LI:

$$0_V = \alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{v} + \vec{w}) + \omega\vec{w} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \omega = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow LI \Rightarrow \text{V}$$

9-

a-

$$\bar{X} = \alpha(1,2,3) + \beta(0,1,1) \Rightarrow \text{PLANO QUE PASA POR EL ORIGEN}$$
$$SI\ \alpha = -2\ y\ \beta = 3 \Rightarrow v \in S$$

b-

$$\bar{X} = \alpha(1,2) + \beta(1,1) \Rightarrow \text{TODO } \mathbb{R}^2$$

c-

$$\bar{X} = \alpha(1,-1,-2) + \beta(-2,2,4) = \alpha(1,-1,-2) - \beta(1,-1,-2) \Rightarrow NO\ ES\ BASE$$
$$\bar{X} = \alpha(1,-1,-2) \Rightarrow \text{RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN}$$
$$v \notin S$$

d-

$$\overline{X} = \alpha(-3,1,-1) + \beta(-1,5,3) + \omega(1,2,2)$$

Veamo si Son BASE

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -14 & -10 & | & 0 \\ 0 & -7 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -14 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow LD$$

$$\overline{X} = \alpha(-3,1,-1) + \beta(-1,5,3) \Rightarrow \text{PLANO QUE PASA POR EL ORIGEN}$$

$$v \notin S$$

10-

a-

$$\textit{Veamos primero si son Base} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \textit{ NO ES BASE}$$

$$\overline{X} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\,x\,2} / z = t = y\right\}$$

Observen que x puede ser cualquier número, por eso no se lo toma como una propiedad del conjunto.

b-

$$\overline{X} = \alpha(-3x) + \beta(x^2+x+1) = \beta x^2 + (-3\alpha+\beta)x + \beta \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \beta \\ a_1 = -3\alpha + \beta \\ a_0 = \beta \end{cases}$$

$$W = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_2 / a_0 = a_2\}$$

Observen que a_1 puede ser cualquier número, por eso no se lo toma como una propiedad del conjunto.

11-

a-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ NO ES}$$

b-

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ES BASE}$$

c-

$$0_V \in S \Rightarrow \text{ NO ES}$$

d-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ES BASE}$$

12-

a-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ES BASE}$$

b-

$$(1,2,-1) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \omega(1,0,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow [(1,2,-1)]_B = (2,0,-1)$$

13-

a-

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ES BASE}$$

b-

"Tener en cuenta como se distribuyen los coeficientes, por eso T"

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T x \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_3 = 2 \\ -3a_3 + a_2 = -3 \\ 3a_3 + a_1 = 0 \\ -a_3 - a_2 - a_1 + a_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow [(2x^3 - 3x^2 + 4)]_B = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 3$$

15-

i-

a-

- ✓ **1.** $N = 0 \in \textit{Diagonal}$
- ✓ **2.** $A + B \in \textit{Diagonal}$
- ✓ **3.** $kA \in \textit{Diagonal}$
- ✓ **ES SUBESPACIO DE** $\mathbb{R}^{n\,x\,n}$

b-

$$(\textit{Para } n = 2)\ \textit{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = S_1 \textit{ ES BASE} \Rightarrow \textit{Dim}(S_1) = 2$$

$$(\textit{Para } n = 3)\ \textit{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = S_1 \textit{ ES BASE} \Rightarrow \textit{Dim}(S_1) = 3$$

ii-

a-

✓ 1. $N = 0 \in Simétrica$

✓ 2. $A + B \in Simétrica$

✓ 3. $kA \in Simétrica$

✓ ES SUBESPACIO DE $\mathbb{R}^{n\,x\,n}$

b-

$$(Para\ n = 2)\ Gen\left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}\right) = S_2\ ES\ BASE \Rightarrow Dim(S_2) = 3$$

$$(Para\ n = 3)$$

$$Gen\left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\right) = S_2$$

$$ES\ BASE \Rightarrow Dim(S_2) = 6$$

iii-

a-

✓ 1. $N = 0 \in Antisimétrica$

✓ 2. $A + B \in Antisimétrica$

✓ 3. $kA \in Antisimétrica$

✓ ES SUBESPACIO DE $\mathbb{R}^{n\,x\,n}$

b-

$$(Para\ n = 2)\ Gen\left(\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}\right) = S_3\ ES\ BASE \Rightarrow Dim(S_3) = 1$$

$$(Para\ n = 3)$$

$$Gen\left(\left\{\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right\}\right) = S_3\ \ ES\ BASE \Rightarrow Dim(S_1) = 3$$

iv-

a-

✓ 1. $N = 0 \notin Ortogonal$

✓ NO ES SUBESPACIO DE $\mathbb{R}^{n\,x\,n}$

16-

a-

✓ 1. $N = 0 \in S\ por\ A0_V = N$

✓ 2. $X + Y \in S \Rightarrow A(X+Y) = AX + AY = N + N = N$

✓ 3. $kX \in S \Rightarrow A(kX) = kAX = kN = N$

✓ ES SUBESPACIO DE $\mathbb{R}^{3\,x\,1}$

b-

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\2 & -1 & -3\\5 & 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\0 & -7 & -11\\0 & -7 & -11\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3x + 2y + z = 0 \Rightarrow 3x + 2z - \dfrac{7}{11}y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{11}z\\ -7y - 11z = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{7}{11}y\end{cases}$$

$$S = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix}-5\\11\\-7\end{pmatrix}\right\}\right) \Rightarrow Dim(S) = 1$$

17-

$$A \cap B = \{v \in V / v \in A \wedge v \in B\}$$

a-

*E*s la RECTA resultante de la intersección de 2 PLANOS NO PARALELOS.

$$Base(S \cap T) = \{N_S x N_T\} = \left\{\left(\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & -1 & 1\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}\right)\right\} = \{(-3,-1,5)\} \Rightarrow \mathrm{Dim(S \cap T) = 1}$$

b-

*E*s el PUNTO resultante de la intersección de 1 PLANO y una RECTA.

$$\begin{cases}x_1 - x_2 - 3x_3 = 0\\x_1 + x_2 - x_3 = 0\\x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2\end{cases} = \begin{cases}-3x_3 = 0\\2x_1 - x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow sol = \{(0,0,0)\} \Rightarrow \mathrm{Dim(S \cap T) = 0}$$

c-

$$\begin{cases}x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\\x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\\x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\end{cases} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\1 & -2 & -1 & 0\\1 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\0 & -1 & 0 & -1\\0 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\0 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\\-x_2 - x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_4 \Rightarrow\\x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -3x_4\end{cases}$$

$$Base(S \cap T) = \{(-5,-1,-3,1)\} \Rightarrow \mathrm{Dim(S \cap T) = 1}$$

d-

$$\begin{cases}a_{12} = 0\\a_{21} = 0\\a_{11} = \alpha\\a_{12} = \alpha + \beta\\a_{21} = \alpha + \beta\\a_{22} = 4\alpha + \beta\end{cases} = \begin{cases}a_{12} = 0\\a_{21} = 0\\a_{11} = \alpha\\0 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = -\beta\\a_{22} = 4\alpha + \beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_{12} = 0\\a_{21} = 0\\a_{11} = \alpha\\0 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = -\beta\\a_{22} = -3\beta\end{cases}$$

$$Base(S \cap T) = \left\{\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{Dim(S \cap T) = 1}$$

18-

$$A + B = \{v \in V / v = a + b\,, a \in A, b \in B\}\ Si\ A \cap B = \{0_v\} \Rightarrow A \oplus \mathrm{B}$$

a-

$$\begin{cases}Base\ S = \{(1,0,-2)(0,1,1)\}\\Base\ T = \{(-2,1,0)(-1,0,1)\}\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\-2 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & -4\\0 & 0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & -4\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$\mathrm{S + T} = \mathbb{R}^3$ y hay 3 li y 1 Dep, NO HAY SUMA DIRECTA

b-

$$\begin{cases}Base\ S = \{(1,1,0)(3,0,1)\}\\Base\ T = \{N_A x N_B\} = \{(1,1,2)\}\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\3 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -3 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S \oplus T} = \mathbb{R}^3$$

c-

$$\begin{cases} Base\ S=\{(2,1,0,-4)(1,0,1,1)\} \\ Base\ T=\{(-2,1,0,0)(2,0,1,0)(-1,0,0,1)\}\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S+T=\mathbb{R}^4}$$

d-

$$\begin{cases} Base\ S=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\ Base\ T=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3\ li}$$

$$\mathbf{S+T=Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}\ o\ Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\}}$$

19-

$$\begin{cases} Base\ S_1=\{(0,2,1)\} \\ Base\ S_2=\{(1,1,0)\}\end{cases} \Rightarrow S_2 \subseteq S = Gen\{v,(1,1,0)\}$$

$$necesitamos\ un\ v\ LI\ con\ S_1 y (1,1,0)\ para\ S\oplus S_1=\mathbb{R}^3 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & v_2-v_1 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2v_3-v_2+v_1 \end{pmatrix}\ Luego\ 2v_3-v_2+v_1 \neq 0$$

$$Usaron\ v=(1,0,1) \Rightarrow s=Gen\{(1,0,1)(1,1,0)\} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha+\beta \\ x_2=\beta \\ x_3=\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{S=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1-x_2-x_3=0\}}$$

20-

Primero buscamos V para intersecarlo con W, podemos buscar V o bien con el generador, o sabiendo que representa un plano con sus dos direcciones determinadas por el conjunto, por lo tanto, su normal es el resultado del producto vectorial de ellos, nosotros lo haremos por el generador:

$$(x,y,z)=(\beta,\beta+\alpha,-2\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \beta=x \\ -2\alpha=z \end{cases} \Rightarrow y=\alpha+\beta=x-\frac{z}{2} \Rightarrow \mathbf{2x-2y-z=0}$$

Ahora intersecamos con W:

$$\begin{cases} 2x-2y-z=0 \\ -x+hy-z=0 \end{cases} \Rightarrow Restanos\ para\ evitar\ Gauss \Rightarrow 3x-(2+h)y=0 \Rightarrow$$

$$W\cap V=\{(x.y.z)\in\mathbb{R}^3/\lambda(2+h,3,-2+2h)\}$$

Ahora Igualamos con S, es una simétrica de Recta, su dirección son los denominadores:

$$\lambda_1(2+h,3,-2+2h)=\lambda_2(h^2-4,3,4) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(2+h)=\lambda_2(h^2-4) \\ 3\lambda_1=3\lambda_2 \\ \lambda_1(-2+2h)=4\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+h=h^2-4 \\ -2+2h=4 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{h=3}$$

21-

a-

Observen que S_1 es una Recta, resultante de la intersección de dos planos, con el producto vectorial de sus normales sacamos el vector generador de la recta.

Observen que S_2 es un plano por lo tanto está generado por sus dos direcciones en relación a la formula general de S_2:

$$\begin{cases} Base\ S_1=\left\{\left(1,-2,-\frac{5}{k}\right)\right\} \\ Base\ S_2=\{(-3k,1,0),(1,0,1)\}\end{cases} \Rightarrow$$

Como la Recta está incluida en el plano, cualquier punto de S_1 sirve como punto perteneciente al plano también. Si elegimos una CL con coeficiente 1 para S_1:

$$\begin{cases} -3k\alpha+\beta=1 \\ \alpha=-2 \\ \beta=-\frac{5}{k} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{6k-\frac{5}{k}=1 \Rightarrow 6k^2-k-5=6(k-1)\left(k+\frac{5}{6}\right) \Rightarrow k=1 \vee k=-\frac{5}{6}}$$

b-

$$\begin{cases} S_1+S_2=Base_1\cup Base_2\ y\ si\ v_i\ LI \Rightarrow S_1\oplus S_2 \\ Si\ son\ Li \Rightarrow \begin{cases} Dim(S_1)=1 \\ Dim(S_2)=2 \end{cases} \Rightarrow S_1\oplus S_2=\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{5}{k} \\ -3k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{5}{k} \\ 0 & 1-6k & -15 \\ 0 & 2 & 1+\frac{5}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{5}{k} \\ 0 & 1-6k & -15 \\ 0 & 0 & \left(1+\frac{5}{k}\right)(1-6k)+30 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{1-6k+\frac{5}{k}=k-6k^2+5=k^2-\frac{1}{6}k-\frac{5}{6}\neq 0 \Rightarrow \mathbb{R}-\left\{1,-\frac{5}{6}\right\}}$$

22-

a-

$$\mathbf{Base\ S=\{(-2,1,0),(3,0,1)\} \Rightarrow S^{\perp}=\left\{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\}=\{(1,2,-3)\}}$$

Es la Recta perpendicular al PLANO S que pasa por el origen.

b-

$$\mathbf{Base\ S=\{N_A x N_B\}=\left\{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}\right\}=\{(-4,4,1)\} \Rightarrow S^{\perp}=\{x\in\mathbb{R}^3/-4x_1+4x_2+x_3=0\}}$$

Es el Plano perpendicular a la RECTA intersección de los planos A y B que pasa por el origen.

c-

Buscamos que vectores son Base de S despejando componentes en la definición de S:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_2 \\ x_3 - x_2 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = (x_3 - x_2, x_2, x_3, 3x_3) \Rightarrow \boldsymbol{Base_S} = \{(\mathbf{1,0,1,3})(\mathbf{-1,1,0,0})\}$$

Como buscamos el Complemento ortogonal, el resultado de Multiplicar escalarmente, o lo que llamamos PRODUCTO INTERNO, a sus vectores, encontraremos la expresión de su complemento ortogonal, y de ello su base, ya que multiplicar elementos ortogonales, da 0:

$$S^{\perp}\begin{cases} (1,0,1,3)(u_1,u_2,u_3,u_4) = 0 \\ (-1,1,0,0)(u_1,u_2,u_3,u_4) = 0 \end{cases} \begin{cases} u_1 + u_3 + 3u_4 = 0 \\ -u_1 + u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S^{\perp} = \{(u_1, u_1, -u_1 - 3u_4, u_4)\} \Rightarrow \mathbf{Gen(S^{\perp}) = \{(1,1,-1,0)(0,0,-3,1)\}}$$

d-

Veamos si el Generador es Base y luego multipliquemos la base por componentes ortogonales como en c:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LD \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Base_S} = \{(\mathbf{1,2,3,-2}), (\mathbf{0,-1,-5,1})\}$$

Uso la Base resultante Generadora de S, aclaro, podemos usar los Vectores Originales o los de la matriz Triangulada, ya que son LI y generadores de S, ya que son una combinación lineal de las originales:

$$S^{\perp}\begin{cases} (-1,2,3,-2)(u_1,u_2,u_3,u_4) = 0 \\ (0,-1,-5,1)(u_1,u_2,u_3,u_4) = 0 \end{cases} \begin{cases} -u_1 + 2(-5u_3 + u_4) + 3u_3 - 2u_4 = 0 \\ -u_2 - 5u_3 + u_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S^{\perp} = \{(-7u_3; -5u_3 + u_4; u_3; u_4)\} \Rightarrow \mathbf{Gen(S^{\perp}) = \{(-7,-5,1,0)(0,1,0,1)\}}$$

23-

Buscamos S ortogonal:

$$\boldsymbol{S^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}}$$

Buscamos S ortogonal intersección T:

$$\boldsymbol{S^{\perp} \cap T} = \begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 - x_4 = 0} \\ \boldsymbol{x_3 + x_4 = 0} \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 - x_3 - 2x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_4 = -x_3} \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{-x_3 - 2x_2 + x_2 - x_3 - 2x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 = -x_3 - 2x_2} \\ \boldsymbol{x_4 = -x_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{-4x_3 = x_2} \\ \boldsymbol{x_1 = 7x_3} \\ \boldsymbol{x_4 = -x_3} \end{cases}$$

$$\mathbf{Gen(S^{\perp} \cap T) = \{(7,-4,1,-1)\}}$$