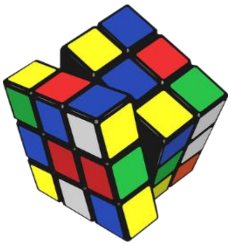
EJERCICIOS DE LA UNIDAD 1: LOGICA



EJERCICIOS PROPUESTOS

I) LÓGICA SIMBÓLICA

Ej.1) Indique cuales de los siguientes enunciados son proposiciones lógicas:

a) El año 2004 tuvo 366 días.

b) Los divisores positivos de 135

c) No pisar el césped

d) Los divisores positivos de 135 son 8 en total.

e) $2x + 5 = 8$

f) La frase del ítem "c" es proposición lógica.

g) Existe un x entero que cumple $2x + 5 = 8$

h) La ecuación $2x + 5 = 8$ tiene solución en el conjunto de Reales.

Ej.2) De las siguientes proposiciones lógicas, analice cuales son condicionales, escríbalas de forma " Si …… entonces …….″ e indique antecedente y consecuente:

a) El cuadrado de todo número par es también par.

b) Algunos números pares son también divisibles por 3.

c) Para cursar Análisis II es necesario tener aprobada Análisis I.

d) El resto de dividir 23456 por cuatro es cero.

e) Es suficiente tener 3 ejercicios correctos para aprobar el examen.

Ej.3) Analice lo pedido:

a) Sea t: $(p \wedge q \Rightarrow \sim r) \wedge \sim p$ Sabiendo que v(t) = V ¿se puede saber si r es Verdadera o Falsa? Justifique.

b) Sea t: $(\sim p \vee q \Rightarrow \sim r) \vee p$ Sabiendo que v(t) = F ¿se puede saber si r es Verdadera o Falsa? Justifique. ¿Y se puede saber si q es Verdadera o Falsa? Justifique.

Ej.4) Haciendo las tablas de verdad de las siguientes proposiciones, indique cuales son tautologías, contradicciones o contingencias:

a) $q \vee (q \wedge \sim p \Rightarrow p)$

b) $(p \Rightarrow q \vee r) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p \vee r$

c) $\sim (p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (r \vee \sim p)$

d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

e) $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$

Ej.5) Utilizando las leyes lógicas, simplifique:

a) $(p \vee q) \Rightarrow [p \vee (p \Leftrightarrow q)]$

b) $\sim [p \vee (q \Rightarrow r)] \vee \sim q$

c) $(p \Rightarrow r \vee q) \wedge (\sim q \vee r)$

Ej.6) Pruebe mediante el uso de leyes lógicas que las siguientes proposiciones son TAUTOLOGÍAS (Indique la ley usada en cada paso)

a) $(p \Rightarrow q) \wedge t \Leftrightarrow \sim(t \Rightarrow p) \vee (q \wedge t)$

b) $\sim(t \Rightarrow b) \vee (a \wedge t) \Leftrightarrow t \wedge (b \Rightarrow a)$

c) $[\sim (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow q] \Rightarrow (\sim q \vee p)$

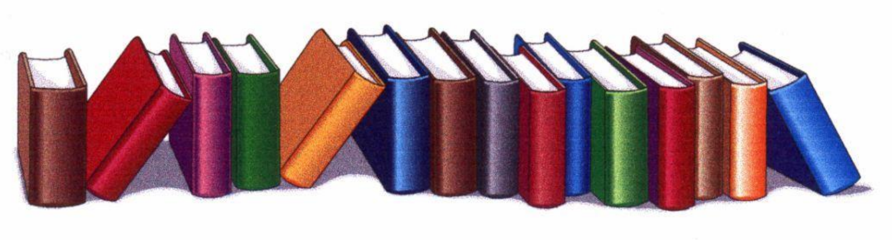
II) FUNCIONES PROPOSICIONALES

Ej.7) Escriba en lenguaje simbólico usando cuantificadores y funciones proposicionales, las siguientes proposiciones, indicando asimismo el conjunto Universal correspondiente:

a) Todos los alumnos del curso K1089 trabajan por la mañana.

b) Algunos datos de los clientes están incompletos o desactualizados.

c) Los libros de la biblioteca de Medrano tienen un código identificador y figuran en los archivos.



d) Existen grafos bipartitos que no son eulerianos.

e) Cualquier número real elevado al cuadrado es mayor o igual a cero.

Ej.8) Indique el valor de verdad, demostrando o justificando correctamente:

a) $\forall x \in \mathbb{Z}: \ x + x^2$ es par

b) $\exists x \in \mathbb{R}: x^4 + 16 = 0$

c) $\forall x \in U: \exists y \in U: (x < y \ \vee \ x < y^2)$ en $U = \{1, -2, 3, -4, 5, 0\}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}: \forall y \in \mathbb{R}: (x > y \Rightarrow x^2 > y^2)$

e) $\exists x \in \mathbb{R}: \forall y \in \mathbb{R}: (x^2 > y^2 \Rightarrow x > y)$

Ej.9) Indique el valor de verdad, demostrando o justificando correctamente:

a) $\exists x: p(x) \wedge \exists x: q(x)$ es equivalente a $\exists x: [p(x) \wedge q(x)]$

b) $\exists x: p(x) \vee \exists x: q(x)$ es equivalente a $\exists x: [p(x) \vee q(x)]$

c) $\forall x: p(x) \vee \forall x: q(x)$ es equivalente a $\forall x: [p(x) \vee q(x)]$

d) $\forall x: p(x) \wedge \forall x: q(x)$ es equivalente a $\forall x: [p(x) \wedge q(x)]$

III) RAZONAMIENTOS

Ej.10) Escriba en lenguaje simbólico los siguientes razonamientos, indicando el diccionario utilizado, y luego analice la validez de los mismos, demostrando por reglas de inferencia en caso de ser válidos y justificando en caso de ser inválidos:

a) Si me pagan el aguinaldo hoy, pagaré la deuda. Si me pagan el sueldo hoy, compraré los pasajes. Me pagan el sueldo o el aguinaldo hoy. Por lo tanto pagaré la deuda o compraré los pasajes.

b) Si no llueve y no hay viento entonces vuelo en el avión. Siempre que llueve me siento mal. Ayer no volé en el avión y me sentí bien. Por lo tanto, ayer estuvo ventoso.

c) Si llueve, Pablo va al cine. Siempre que Pablo va al cine, compra pochoclo o helado. Pablo compra pochoclo. Por lo tanto, llueve.

d) El planeta Kamino no figura en los Archivos. Si un planeta no figura en los Archivos, es porque no existe o bien porque alguien lo borró. El planeta Kamino existe. Por lo tanto, alguien lo debe haber borrado del Archivo.

Ej.11) Analice si los siguientes razonamientos son válidos o inválidos, demostrando o justificando según corresponda por el método del condicional asociado:

a) $\sim p \ ; \ q \Rightarrow t \vee r \ ; \ t \Rightarrow p \quad \therefore \ q \Rightarrow r$

b) $(p \wedge q) \Rightarrow r \ ; \ \sim r \vee t \ ; \ \sim t \quad \therefore \sim p$

c) $a \Rightarrow b \ ; \sim b \vee \sim c \ ; \ d \Rightarrow a \vee c \ \therefore \sim d$

d) $p \Rightarrow q \vee r \ ; \ p \vee (\sim t \vee s) \ ; \sim q \wedge \sim s \ ; \ s \Rightarrow \sim t \ \therefore \sim t$

Ej.12) Dado el siguiente razonamiento complete con una conclusión válida y demuestre por reglas de inferencia: "Si él iba solo y desarmado, su jefe no lo mataría. Para suplicarle perdón era necesario ir desarmado. Le suplicó pero igualmente su jefe lo mató." ¿Por qué?

Ej.13) Escriba en forma simbólica, previa definición de un diccionario y de un conjunto universal, y analice la validez de los siguientes razonamientos categóricos, demostrando por reglas de inferencia o justificando correctamente:

a) Todos los grafos completos son conexos. Existen grafos simples que no son conexos. Por lo tanto, existen grafos simples que no son completos.
b) Algunos invitados son ingenieros. Algunos ingenieros dan clases en la facultad. Por lo tanto, algunos invitados dan clases en la facultad.
c) Todos los bebés de Terapia estaban en incubadora o con respirador. Los que estaban en incubadora eran prematuros y de bajo peso. Lucio, uno de los bebés de Terapia, tenía buen peso. Por lo tanto, al menos un bebé de Terapia estaba con respirador.



d) Todas las matrices que tienen dos filas iguales no son inversibles. Las matrices inversibles tienen determinante distinto de cero. El determinante de la matriz "A" es cero. Por lo tanto, la matriz "A" tiene dos filas iguales.

☑ **Ej.14)** Indique un conjunto Universal y una interpretación de los esquemas proposicionales para comprobar la invalidez del siguiente razonamiento:

$$\forall x: [\ d(x) \Rightarrow c(x)\ ]\ ;\ \exists x: [\ \sim c(x) \wedge p(x)\ ]\ \therefore\ \forall x: [\ c(x) \vee p(x)\ ]$$

☑ **Ej.15)** Complete una conclusión válida para el siguiente razonamiento y demuestre:
$\forall x : [\ p(x) \vee q(x)\ ];\ \forall x: [\ p(x) \Rightarrow r(x)\ ];\ \sim r(a)$ por lo tanto $\exists x:$ ....

☑ **Ej.16)** Analice la validez de los siguientes razonamientos categóricos, demostrando por reglas de inferencia o justificando correctamente:

a) $\exists x: [\ p(x) \vee q(x)\ ]\ ;\ \exists x: [\ \sim q(x) \wedge r(x)\ ]\ \therefore\ \exists x: [\ p(x) \wedge r(x)\ ]$

b) $\forall x: \sim[\ p(x) \vee q(x)\ ]\ \therefore\ \exists x: \sim q(x)$

☑ **Ej.17)** Dadas las premisas: "Todas las frutas que están en la heladera están lavadas. Algunas frutas no están lavadas y son deliciosas."

Indique cual de las siguientes conclusiones es válida y demuestre por reglas de inferencia:

c_1: Algunas frutas están en la heladera y son deliciosas

c_2: Todas las frutas que están en la heladera son deliciosas

c_3: Algunas frutas no están en la heladera y son deliciosas

☑ **Ej.18)** Utilizando conjuntos reescriba los siguientes razonamientos categóricos y analice su validez con diagramas de Venn:

a) $\forall x: [\ p(x) \Rightarrow q(x)\ ]\ ;\ \sim q(a)\ \therefore\ \sim p(a)$

b) $\forall x : [\ a(x) \vee b(x)\ ]\ ;\ \exists x : c(x) \wedge \sim a(x)\ \therefore\ \exists x : c(x) \wedge b(x)$

RESPUESTAS UNIDAD 1 (LOGICA):

☑PARTE I

Ej.1) Son proposiciones lógicas: a, d, f, g, h

Ej.2)

a) Si un número es par entonces su cuadrado es par.

b) No es condicional, es conjunción.

c) Si se cursa Análisis II entonces está aprobada Análisis I.

d) No es condicional, es simple.

e) Si se tienen 3 ejercicios correctos entonces se aprueba el examen.

Ej.3)

a) No se puede saber el valor de r.

Justificación: como t es verdadera, entonces p es falsa y el condicional $(p \wedge q \Rightarrow \sim r)$ es verdadero. Y como el condicional tiene antecedente falso, el valor de verdad del consecuente no influye. O sea que r puede ser tanto verdadera como falsa.

b) r es verdadera, no se puede saber el valor de q

Justificación: Como t es falsa, entonces p es falsa y el condicional $(\sim p \vee q \Rightarrow \sim r)$ es falso. Para ello, el antecedente debe ser verdadero y el consecuente falso, con lo cual r debe ser verdadera y como p es falsa, el antecedente es verdadero cualquiera sea el valor de verdad de q.

Ej.4) a) Es tautología.

b) Es tautología.

c) Es contradicción.

d) Es contingencia.

e) Es contradicción.

Ej.5) a) $\sim q \vee p$

b) $\sim [(p \vee r) \wedge q]$

c) $\sim (p \vee q) \vee r$

Ej.6) Hay varias formas de demostrar este ejercicio. Consulta con tu docente para saber si lo has hecho bien.

☑PARTE II

Ej.7)

a) U = { x / x es alumnos del curso K1089 } m(x): "x trabaja por la mañana"

$\forall x \in U : m(x)$

b) U = { x / x es dato de los clientes }

i(x): " x está incompleto" d(x): "x está desactualizado".

$\exists x \in U : [\ i(x) \vee d(x)]$

c) U = { x / x es libro de la biblioteca de Medrano }

c(x): "x tiene un código identificador" a(x): "x figura en los archivos".

$\forall x \in U: [\ c(x) \wedge a(x)\ ]$

d) U = { x / x es grafo } b(x): "x es bipartito" e(x): "x es euleriano"

$\exists x \in U: [\ b(x) \wedge \sim e(x)\ ]$

e) $U = \mathbb{R}$ p(x): "$x^2 \geq 0$" $\forall x \in U: p(x)$

O bien directamente: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$

Ej.8)

a) VERDADERA
b) FALSA
c) VERDADERA
d) FALSA
e) VERDADERA

Ej.9)

a) FALSA.
b) VERDADERA
c) FALSA
d) VERDADERA

PARTE III

Ej.10)

a) VALIDO
b) VALIDO
c) INVALIDO
d) VALIDO

Ej.11)

a) VALIDO

b) INVALIDO Por ejemplo si v(p)= V , v(q)= F , v(r)= F , v(t)= F , resultan las premisas verdaderas y La conclusión falsa, por lo tanto el razonamiento es inválido.

c) INVALIDO Por ejemplo si v(a)= V , v(b)= V , v(c)= F , v(d)= V , resultan las premisas verdaderas y La conclusión falsa, por lo tanto el razonamiento es inválido.

d) INVALIDO Por ejemplo si v(p)= V , v(q)= F , v(r)= V , v(s)= F, v(t) = V , resultan las premisas verdaderas y La conclusión falsa, por lo tanto el razonamiento es inválido.

Ej.12) Lo mató porque no fue solo.

Explicación: considerando el diccionario:

s: “él va solo” d: “él va armado” m: “su jefe lo mata” p: “le suplica perdón”

Las premisas son: $s \wedge \sim d \Rightarrow \sim m$; $p \Rightarrow \sim d$; $p \wedge m$

De las cuales se desprende lo siguiente: como por la tercer premisa m es V, entonces en la primer premisa debe ser falso el antecedente, lo que implica que s es falsa o d es verdadera, pero como p es verdadera por la tercer premisa, de la segunda premisa se deduce que d es falsa, con lo cual solo queda que s es falsa.

Ej.13)

a) VALIDO. Se demuestra por reglas de inferencia.

b) INVALIDO. Se puede justificar dando un conjunto en el cual las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

c) VALIDO. Se demuestra por reglas de inferencia.

d) INVALIDO. Se puede justificar dando un conjunto en el cual las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Ej.14) Una posible interpretación es en el conjunto U = {5,4,3} siendo d(x): "x es múltiplo de 4" ; c(x): "x es par" ; p(x): "x es múltiplo de 5" , con lo cual las premisas son verdaderas y la conclusión falsa.

Ej.15) Una conclusión válida es: $\exists x : q(x)$

Demostración:

1. $\forall x : [\, p(x) \vee q(x) \,]$	premisa
2. $\forall x : [\, p(x) \Rightarrow r(x) \,]$	premisa
3. $\sim r(a)$	premisa
4. $p(a) \Rightarrow r(a)$	P.U. (2)
5. $\sim p(a)$	M.T. (4,3)
6. $p(a) \vee q(a)$	P.U. (1)
7. $q(a)$	S.D. (6,5)
8. $\exists x : q(x)$	G.E. (7)

Ej.16)

a) INVALIDO. Al ser dos existenciales, no se puede particularizar en el mismo elemento. O sea no necesariamente el que cumple el primer existencial, cumple el segundo. Para justificarlo correctamente debemos mostrar un conjunto universal y una interpretación de las funciones proposicionales que hagan las premisas verdaderas y la conclusión falsa.

b) VALIDO**.** Se demuestra por reglas de inferencia.

Ej.17) Es válida la C_3. Y se demuestra por reglas de inferencia.

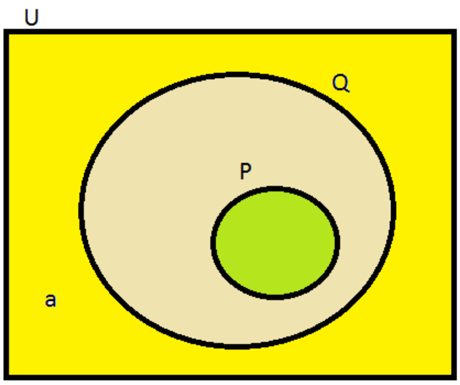
Ej.18)

a) Definiendo los conjuntos: P = { x / p(x) } Q = { x / q(x) } en un conjunto universal U, tal que a ∈ U, reescribimos el razonamiento:

$\forall x \in U: [\, x \in P \Rightarrow x \in Q \,] \;;\; a \notin Q \;\therefore\; a \notin P$

Y observando la primer premisa, vemos que es equivalente a $P \subseteq Q$

Entonces graficamos así:



b) Definiendo los conjuntos: A = { x / a(x) } B = { x / b(x) } y C = { x / c(x) } en un conjunto universal U, reescribimos el razonamiento:

$\forall x : [\, x \in A \vee x \in B \,] \;;\; \exists x : [\, x \in C \wedge x \notin A \,] \;\therefore\; \exists x : x \in C \wedge x \in B$

Teniendo en cuenta las definiciones de las operaciones con conjuntos, podemos reescribir:

$\forall x :\; x \in A \cup B \;;\; \exists x :\; x \in C - A \;\therefore\; \exists x : x \in C \cap B$

Y considerando la definición de conjunto vacío:

$\forall x :\; x \in A \cup B \;;\; C - A \neq \varnothing \;\therefore\; C \cap B \neq \varnothing$

Podemos graficar así: