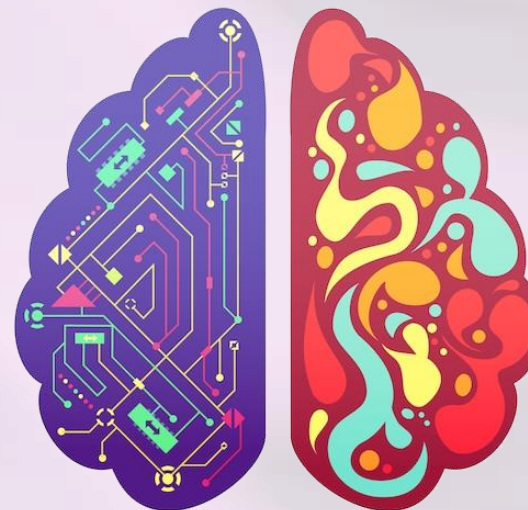
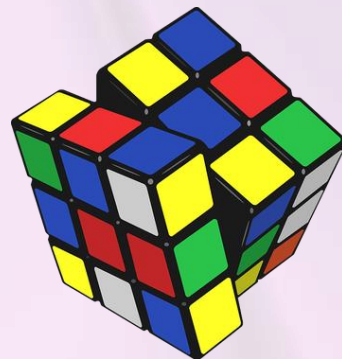




Lógica y Estructuras
Discretas UTN.BA

APUNTE TEORICO

Unidad 1: Lógica proposicional y razonamientos



Ing. María Alicia Piñeiro

¿Qué es una proposición lógica?

Una proposición lógica es todo enunciado susceptible de ser verdadero o falso.

Las proposiciones lógicas se denotan con letras minúsculas.

Si a una proposición la denotamos p , para indicar su valor de verdad escribimos $\mathcal{V}(p)$

Ejemplos:

p : "Cuatro es un número impar"

$\mathcal{V}(p) = F$ (valor de verdad de p es Falso)

q : "París es la capital de Francia"

$\mathcal{V}(q) = V$ (valor de verdad de q es Verdadero)

 **Ejercicio:** Indica si los siguientes enunciados son o no proposiciones lógicas:

1) El cielo es verde. ☐ Si ☐ NO

2) ¿Qué hora es? ☐ Si ☐ NO

3) $2 + 3 = 5$ ☐ Si ☐ NO

4) ¡ Hola ! ☐ Si ☐ NO

5) x es un número entero ☐ Si ☐ NO

6) Esta materia es muy útil. ☐ Si ☐ NO

De las que son proposiciones lógicas, indica el valor de verdad, es decir si son verdaderas o falsas.

Unidad: Lógica proposicional y Razonamientos

Lógica

Hasta ahora hemos estado trabajando con proposiciones lógicas que enunciaban una única idea cada una. Se las llama **proposiciones simples**. Pero muchas veces combinamos una o más proposiciones simples para formar **proposiciones compuestas**.



Las proposiciones simples se combinan a través de las **operaciones lógicas** (conjunción, disyunción, negación, condicional y bicondicional). Para denotarlas se utilizan los **conectivos lógicos**.

Ejemplo:

Dadas las proposiciones:

p : "Cuatro es un número impar"

q : "París es la capital de Francia"

Una forma de combinarlas es:

$p \wedge q$: "Cuatro es un número impar y París es la capital de Francia".



¿Cuál es el valor de verdad de esta proposición compuesta?

Para mostrar todas las posibilidades de valores de verdad de las proposiciones simples, utilizamos las **TABLAS DE VERDAD**.

OPERACIONES LÓGICAS

CONJUNCIÓN

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Con una conjunción se da a entender la simultaneidad de las dos proposiciones.

La conjunción únicamente es VERDADERA cuando ambas proposiciones simples lo son. Si bien el nexo conjuntivo mas común es la “y”, hay otras formas de indicar conjunciones.

Ejemplos:

- 1) Estamos en invierno **pero** hace calor.
- 2) Esta tarde debo estudiar, **además** no me gusta jugar al football.
- 3) Tu prima es muy bonita, **también** es inteligente.



Ejercicio:

Sean las proposiciones:

p: 91 es número primo

q: π no es un número racional

r: 252 es múltiplo de 6

Indica cual de las siguientes conjunciones es verdadera:

1) $p \wedge r$

2) $p \wedge q$

3) $q \wedge r$

OPERACIONES LÓGICAS

DISYUNCIÓN

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción expresa la posibilidad de una de las dos proposiciones o ambas, ya que es inclusiva.

Solamente una disyunción es FALSA cuando las dos proposiciones que la forman lo son. El nexo mas común que expresa disyunción es la “o”.

Ejemplos:

- 1) Debemos presentar documento **o** credencial para rendir el examen.
- 2) Le puedo cobrar en efectivo **o bien** con tarjeta de débito.



Ejercicio:

Sean las proposiciones:

p: 119 es número primo

q: π es un número racional

r: 252 es múltiplo de 4

Indica cual de las siguientes disyunciones es falsa:

1) $p \vee r$

2) $p \vee q$

3) $q \vee r$

OPERACIONES LÓGICAS

DISYUNCIÓN EXCLUYENTE

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En este caso, como la disyunción es excluyente, significa que solo una de las proposiciones debe ser verdadera. Es decir, solamente una disyunción excluyente es verdadera cuando los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman son distintos. En el lenguaje coloquial debe expresarse explícitamente el sentido excluyente.

Veremos
luego una
equivalencia
de esta
operación

Ejemplos:

- 1) Pueden recuperar el primer parcial **o** el segundo **pero no ambos**.
- 2) Nos iremos a la playa **o bien** a las sierras, a **uno de los dos**.



Ejercicio:

Piensa un caso concreto donde se utilice la disyunción excluyente

OPERACIONES LÓGICAS

CONDICIONAL

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La estructura condicional, indica que si se cumple una determinada condición (p), entonces se debe cumplir la otra (q). Por eso, la única forma en que un condicional sea falso, es partiendo de una proposición verdadera y que la otra sea falsa. En los tres casos restantes, el condicional es verdadero.

Si bien, la forma mas común de indicar un condicional es “si....entonces....”, hay otras maneras, como mostramos en los ejemplos.

Ejemplos:

- 1) Si una matriz es ortogonal entonces es inversible.
- 2) El cuadrado de todo número par es par.
- 3) Es necesario ser mayor de edad para ingresar al casino.

Cuando un condicional

$$p \Rightarrow q$$

es **verdadero**, se dice
que p **implica** q.

OPERACIONES LÓGICAS

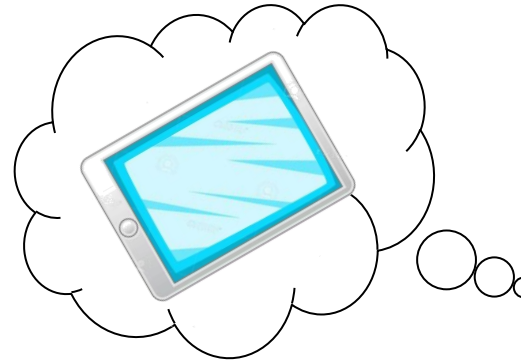
CONDICIONAL

Veamos un ejemplo para entender bien la tabla del condicional:

Alicia le dice a Juan:



Si apruebas
el examen,
te regalo
una tablet



Hay cuatro situaciones que pueden darse:

- 1) Juan aprueba el examen y Alicia le regala la tablet.
- 2) Juan aprueba el examen y Alicia NO le regala la tablet.
- 3) Juan NO aprueba el examen y Alicia le regala la tablet.
- 4) Juan NO aprueba el examen y Alicia NO le regala la tablet.

Cada una de esas situaciones representa un renglón de la tabla de verdad, si consideramos:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p: Juan aprueba el examen

q: Alicia le regala la tablet

OPERACIONES LÓGICAS

CONDICIONAL

Analicemos cada uno de los casos para ver si podemos confiar en lo que promete Alicia.

En la **1)** Juan hizo lo que debía y Alicia **cumplió su promesa**, o sea el condicional se ha cumplido.

En la **2)** Juan hizo lo que debía pero Alicia **NO cumplió su parte**, por lo cual tenemos toda la razón en reprocharle que no ha cumplido su promesa.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Pero tanto en la **3)** como en la **4)**, Juan no aprueba el examen. Y Alicia solo prometió lo que iba a hacer si Juan aprobaba. No dijo nada en caso de que no aprobara. Por lo tanto, si le regala igual la tablet o no, **no está faltando a su promesa**. Nosotros, si ocurre alguno de estos casos, no tenemos elementos suficientes para condenar a Alicia por incumplidora. Por eso, al igual que en un juicio cuando no hay pruebas se declara inocente al acusado, el **CONDICIONAL es VERDADERO**.

OPERACIONES LÓGICAS

BICONCONDICIONAL

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

En este caso, al ser bicondicional, los valores de verdad de ambas proposiciones deben tener el mismo valor de verdad.

Los bicondicionales verdaderos indican una **equivalencia lógica**.

Si un bicondicional

$$p \Leftrightarrow q$$

es **verdadero**, se dice que

p es equivalente a q.

Ejemplos:

- 1) Una matriz cuadrada es inversible **si y solo** si su determinante no es nulo.
- 2) **Solamente si** aprueban los parciales y el TP firman la materia.
- 3) Es **necesario y suficiente** ser socio para obtener el descuento.



Ejercicio:

Piensa un caso concreto que se simbolice a través de un bicondicional

OPERACIONES LÓGICAS

NEGACIÓN

p	$\sim p$
V	F
F	V

Esta última operación lógica es una operación unaria, es decir se le aplica a una sola proposición (no es binaria como las anteriores), por eso su tabla de verdad consta únicamente de dos renglones.

La negación cambia el valor de verdad de la proposición a la que se le aplica. Si bien se lee como “no”, hay varias maneras de indicar una negación.

Ejemplos:

- 1) El tres **no** es un número par.
- 2) **No es cierto que** hoy es domingo.
- 3) **Es falso que** la división es cerrada en Reales.



Ejercicio:

Revisa las operaciones binarias anteriores y descubre dos de ellas que una es la negación de la otra.

TABLAS DE VERDAD DE PROPOSICIONES COMPUESTAS

Hemos visto las tablas de verdad de las operaciones lógicas, algunas de 4 renglones porque operaban 2 proposiciones y la de la negación tenía 2 renglones porque constaba de una única proposición simple.

Si tuviésemos más proposiciones simples, ¿cuántos renglones tendría la tabla de verdad?

Si en una proposición compuesta hay n proposiciones simples, la tabla de verdad tiene 2^n renglones.

Ejemplo:

La proposición compuesta: $\sim p \wedge q \Rightarrow r$ está formada por 3 proposiciones simples diferentes, con lo cual su tabla de verdad tendrá $2^3 = 8$ renglones.

Quando no hay paréntesis, corchetes o llaves se deben interpretar las operaciones lógicas en el siguiente orden:

1	\sim
2	\wedge
3	\vee
4	\Rightarrow
5	\Leftrightarrow



Ejercicio:

Indica cómo se interpreta: $\sim p \wedge q \Rightarrow r$

1) $\sim [p \wedge (q \Rightarrow r)]$

2) $\sim [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

3) $[(\sim p) \wedge q] \Rightarrow r$

4) $(\sim p) \wedge (q \Rightarrow r)$

TABLAS DE VERDAD DE PROPOSICIONES COMPUESTAS

Teniendo en cuenta los conectivos lógicos, construiremos la tabla de verdad de algunas proposiciones compuestas, para ello vamos a ir haciendo en cada nueva columna de a una operación por vez:

Ejemplo 1) $q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

q	p	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F

Ejemplo 2) $p \Rightarrow p \vee q$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Ejemplo 3) $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Observa los resultados

TAUTOLOGIA, CONTRADICCION Y CONTINGENCIA

- ❖ Una proposición compuesta que es **siempre verdadera** independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman, se llama: **TAUTOLOGIA**
- ❖ Una proposición compuesta que es **siempre falsa** independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman, se llama: **CONTRADICCION**
- ❖ Una proposición compuesta que en algunos casos es verdadera y en otros falsa dependiendo de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman, se llama: **CONTINGENCIA**

Ejercicio:

Indica de las proposiciones del ejemplo anterior cual es cada una.

1) $q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

2) $p \Rightarrow p \vee q$

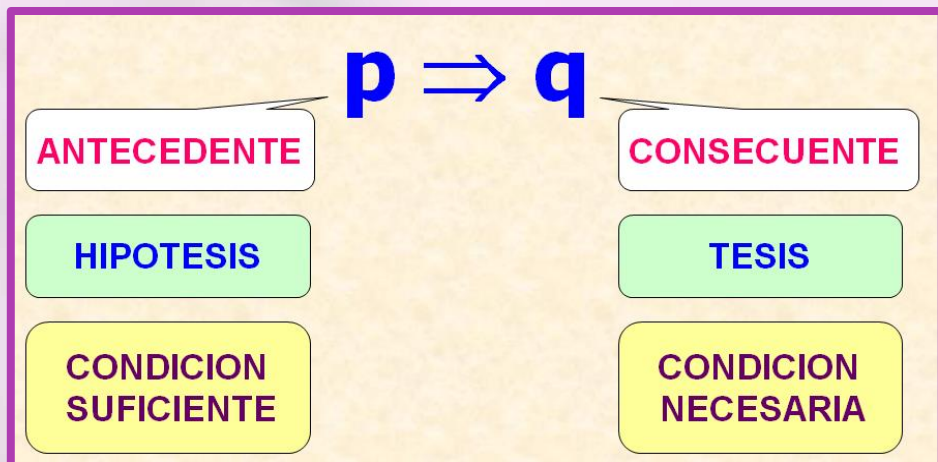
3) $p \wedge \sim p$

A las tautologías se las denota con **V** y a las contradicciones con **F**

CONDICIONALES

Ya conocemos los condicionales pero vamos a estudiar un poco mas de ellos porque a lo largo de esta materia y de muchas otras nos encontraremos muchas veces en presencia de Teoremas o propiedades que son condicionales. Y debemos saber interpretarlos bien, ya que pueden venir expresados de formas diferentes.

Primero veamos los nombres de cada una de las partes de la proposición condicional:



Ejemplo:

Sean las siguientes proposiciones simples:

a: "llueve" b: "hay nubes en el cielo"

$a \Rightarrow b$ es cierto: "Si llueve, hay nubes en el cielo"

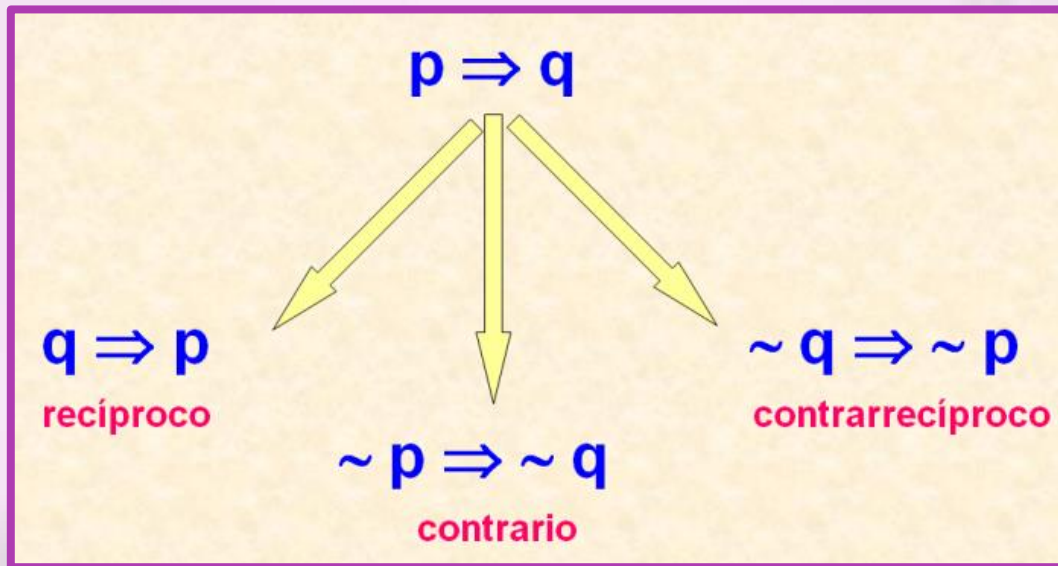
Por lo tanto, otra forma de indicarlo es diciendo:

"**Es necesario** que haya nubes para que llueva".

O lo mismo puede decirse "**Es suficiente** que llueva para saber que hay nubes en cielo"

CONDICIONALES ASOCIADOS A UNO DADO

A partir de un condicional podemos formar otros:



Si el condicional es verdadero:

El recíproco no
siempre va a ser
verdadero

El contrario no
siempre va a ser
verdadero



Ejercicio:

Si hacemos la tabla de verdad del
contrarrecíproco: $\sim q \Rightarrow \sim p$

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Compárala con la tabla de $p \Rightarrow q$



¿Cómo son? ¿Qué significa?

PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Las proposiciones que tienen idénticas tablas de verdad se llaman **EQUIVALENTES**.

Ello lo indicamos con el símbolo \equiv que significa EQUIVALENTES.

Ejemplo:

En el caso de la página anterior, demostramos que el contrarrecíproco es equivalente al condicional, lo podemos escribir:

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (p \Rightarrow q)$$



¿Cómo demostramos esta equivalencia?

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Hagamos la tabla de verdad de: $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Vemos que es idéntica a la de $p \Rightarrow q$

Por lo tanto son equivalentes.



A PENSAR...

La afirmación:

“El cuadrado de todo número impar, es también impar”

¿Es un condicional?

Sí, lo es ya que se podría escribir así y es equivalente:

“Si un número es impar, entonces su cuadrado es impar”

O bien de esta forma, un poco más simbólica:

“Si x es impar, entonces x^2 es impar”

Nota: en cualquiera de los casos se está considerando únicamente a números enteros.



¿Cómo
podemos
demostrarlo?

Dem: Como x es impar, entonces $x = 2k+1$
con k entero

Luego lo elevamos al cuadrado : $x^2 = (2k+1)^2$

Desarrollamos el cuadrado: $x^2 = 4k^2 + 2(2k) + 1$

Sacando factor común, lo expresamos así:

$$\Rightarrow x^2 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\text{es entero}} + 1 \Rightarrow x^2 \text{ es impar}$$

porque es el doble de un entero más 1



A PENSAR...

Ahora pensemos esta otra afirmación:

“Si el cuadrado de un número es impar, el número también lo es”

Ya vemos claramente que es un condicional, pero...
¿es verdadero? Podemos escribirlo más simbólicamente:

“Si x^2 es impar, entonces x es impar”

Analicemos:

Si x^2 es impar, entonces $x^2 = 2k+1$ con k entero

¿Cómo obtengo x ?



Al intentar partir del antecedente para llegar al consecuente, se nos dificultó, entonces:



¿Cómo podemos demostrarlo?

Podemos usar el CONTRARRECÍPROCO!!!

En este caso es: “Si x es par, entonces x^2 es par”

Dem: Como x es par, entonces $x = 2k$ con k entero

$$\text{Luego: } x^2 = (2k)^2 \Rightarrow x^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2(2k^2) \quad \text{siendo } (2k^2) \text{ entero}$$

$$\Rightarrow x^2 \text{ es par}$$

Por ser el contrarrecíproco equivalente al directo, ha quedado demostrado.

PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Ejemplo:

Mostraremos que la proposición $\sim(a \vee b)$ es equivalente a $\sim a \wedge \sim b$ haciendo la tabla de verdad de $\sim(a \vee b) \Leftrightarrow \sim a \wedge \sim b$

a	b	$a \vee b$	$\sim(a \vee b)$	$\sim a$	$\sim b$	$\sim a \wedge \sim b$	$\sim(a \vee b) \Leftrightarrow \sim a \wedge \sim b$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Esta equivalencia es una de las principales y se denomina Ley de De Morgan.

De la misma manera que hemos demostrado esta equivalencia, se pueden demostrar muchas más. En la próxima página te mostraremos una lista de las equivalencias lógicas principales.

Si dos proposiciones p y q son equivalentes, entonces $p \Leftrightarrow q$ es una TAUOLOGIA

DIO UNA
TAUTOLOGÍA

LEYES LOGICAS

Estas leyes o propiedades lógicas son equivalencias que nos resultarán útiles más adelante.

Todas estas leyes se demuestran haciendo la TABLA DE VERDAD de cada una.

1	Involución	$\sim(\sim p) \equiv p$
2	Conmutatividad	$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad p \vee q \equiv q \vee p$
3	Asociatividad	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
4	Distributividad	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5	Idempotencia	$p \wedge p \equiv p \quad p \vee p \equiv p$
6	De Morgan	$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q) \quad \sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$
7	Absorción	$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$
8	Identidad	$p \wedge V \equiv p \quad p \vee F \equiv p$
9	Dominación	$p \vee V \equiv V \quad p \wedge F \equiv F$
10	Bicondicional	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
11	Condicional	$p \Rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$
12	Tercero excluido	$p \vee (\sim p) \equiv V$
13	Simplificación	$p \wedge q \Rightarrow p \equiv V$
14	Adición	$p \Rightarrow p \vee q \equiv V$

LEYES LOGICAS



¿Para qué utilizaremos las leyes lógicas?

Las podemos utilizar, por ejemplo, para simplificar proposiciones compuestas.



Ejercicio:

Simplifica la proposición:

$$\sim [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

Ejemplo:

Simplificar la siguiente proposición:

$$p \Rightarrow \sim [(\sim p \Rightarrow q) \wedge \sim (\sim p \wedge r)]$$

Apliquemos equivalencia del condicional en $(\sim p \Rightarrow q)$

y al mismo tiempo apliquemos De Morgan en la otra parte: $\sim (\sim p \wedge r)$.

Obtenemos: $p \Rightarrow \sim [(\sim (\sim p) \vee q) \wedge [\sim (\sim p) \vee (\sim r)]]$

Ahora apliquemos la ley involutiva en $\sim (\sim p)$:

$$p \Rightarrow \sim [(p \vee q) \wedge [p \vee (\sim r)]]$$

Distributiva de \vee respecto de \wedge : $p \Rightarrow \sim [p \vee (q \wedge \sim r)]$

Equivalencia del condicional: $\sim p \vee \sim [p \vee (q \wedge \sim r)]$

Apliquemos nuevamente De Morgan: $\sim p \vee [\sim p \wedge \sim (q \wedge \sim r)]$

Finalmente, por absorción: $\sim p$

FUNCIÓN PROPOSICIONAL (o PREDICADO)

Ejemplo introductorio:

Consideremos el siguiente enunciado:

" x es un número par "



¿Es proposición lógica?

No, pues como no se indica el valor de x , no tiene valor de verdad.

Y estos otros enunciados:

" 8 es un número par "

" Todos los números enteros son pares "



¿Son proposiciones lógicas?

Sí, ya que tienen valor de verdad (el primero es V y el segundo es F).

El primer enunciado puede denotarse $p(x)$ para indicar que depende de una variable x

$p(x)$: " x es un número par "

Con lo cual los otros enunciados se escriben:

$p(8)$ (Significa que 8 cumple lo indicado en $p(x)$)

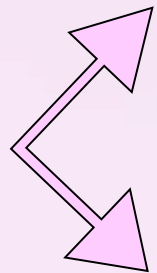
$\forall x \in \mathbb{Z}: p(x)$ (Significa que todo número entero cumple $p(x)$)

FUNCIÓN PROPOSICIONAL (o PREDICADO)

Veamos la definición:

Sea A un conjunto no vacío, llamamos **predicado** o **función proposicional** con **dominio en A** a toda **expresión $p(x)$** tal que para cualquier elemento “ a ” del conjunto A se verifica que **$p(a)$ es proposición.**

Las funciones proposicionales son enunciados con variables que se pueden convertir en proposiciones lógicas de las siguientes formas:

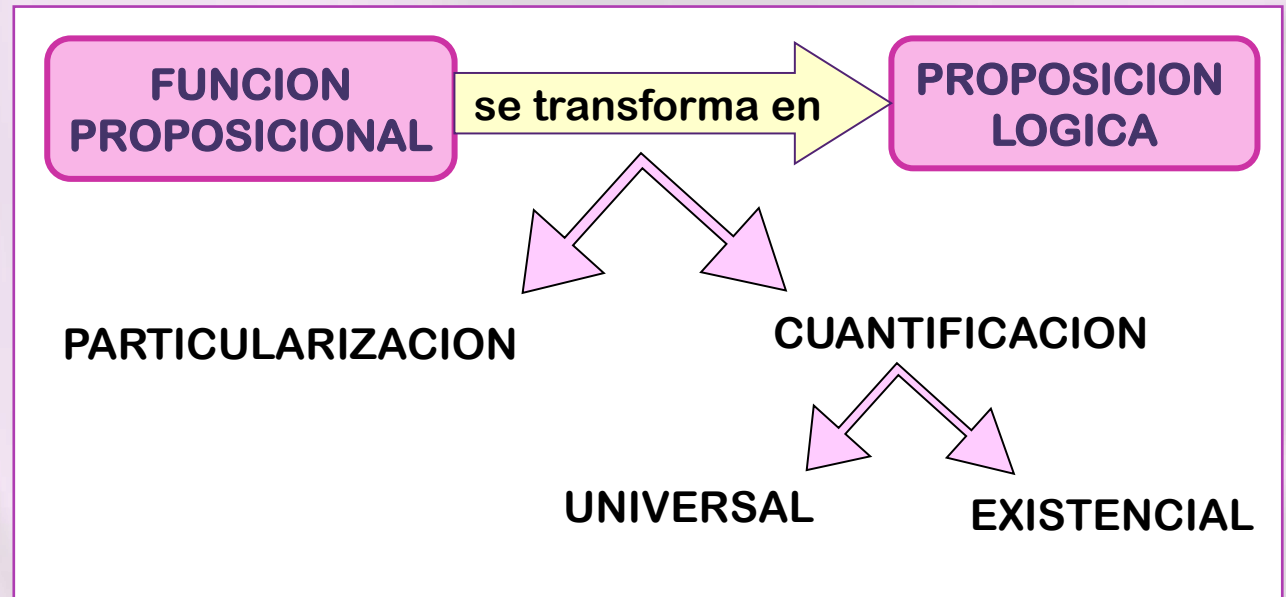


1) **PARTICULARIZANDO:** Asignando valores a las variables.

Ejemplo: “8 es un número par”

2) **CUANTIFICANDO:** anteponiendo un cuantificador por cada variable.

Ejemplo: “todos los números enteros son pares”



FUNCIÓN PROPOSICIONAL (o PREDICADO)

CUANTIFICADORES

UNIVERSAL: \forall (Se lee “Para todo”)

EXISTENCIAL: \exists (Se lee “Existe al menos un”)

Ejemplos: Sean los conjuntos: $A = \{ 10, 15, 20 \}$ $B = \{ 3, 6, 9, 12 \}$
y las funciones proposicionales: $P(x)$: “x es múltiplo de 5” $Q(x)$: “x es par”

“Todos los elementos del conjunto A son múltiplos de 5” se escribe: $\forall x \in A : P(x)$

“Algunos elementos del conjunto B son pares” se escribe: $\exists x \in B : Q(x)$

“ Algunos elementos del conjunto A son pares y múltiplos de 5” se escribe:

$$\exists x \in A : [P(x) \wedge Q(x)]$$



Ejercicio:

Considerando los conjuntos A y B del ejemplo anterior:

- 1) ¿Existen elementos de B que sean impares y múltiplos de 5? ¿Cómo se escribe?
- 2) ¿Es cierto que todos los múltiplos de 5 del conjunto A son impares? ¿Cómo se escribe?

FUNCIÓN PROPOSICIONAL (o PREDICADO)

PREDICADOS CON DOS O MAS VARIABLES

Existen predicados con más de una variable, por ejemplo:

$p(x,y)$: "x es el doble de y"

$q(x,y,z)$: " $x + y = z$ "

En estos casos, para tener una proposición lógica, deben cuantificarse todas las variables, un cuantificador por cada una, por ejemplo:

$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : \text{"x es el doble de y"}$

$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : \exists z \in \mathbb{Z} : \text{"x + y = z"}$

VARIABLES LIBRES Y VARIABLES ACOTADAS:

Si las variables de una función proposicional están afectadas por un cuantificador, ya sea universal o existencial; diremos entonces que son variables **acotadas**. En cambio, las variables que no están afectadas por un cuantificador; son variables **libres**.

$\forall x: x + y < 5$ la "x" es acotada , la "y" es libre



Ejercicio: Analiza el valor de verdad:

1) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 5$

2) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y$

FUNCIÓN PROPOSICIONAL (o PREDICADO)



¿Es lo mismo $\forall x: \exists y: p(x,y)$ que $\exists y: \forall x: p(x,y)$?

No es lo mismo, en el primer caso, si elegimos un x cualquiera, debe existir un y tal que cumplan $p(x,y)$, o sea cada x puede tener un y distinto.

En cambio, en el segundo caso dice que existe un y que con cualquier x cumple $p(x,y)$

Ejemplo:

$\forall x \in \mathbb{R}: \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 5$ es verdadera

$\exists y \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}: x + y = 5$ es falsa

Esto significa que los cuantificadores **no conmutan**, es decir no se los puede cambiar de lugar, sin que afecten a la proposición.



¿Es lo mismo $\exists x: p(x) \wedge \exists x: q(x)$ que $\exists x: [p(x) \wedge q(x)]$?



Pensalo !!!

NEGACIÓN DE PROPOSICIONES CON CUANTIFICADORES

Supongamos que María dice: “ Todos los alumnos de este curso aprobaron el parcial”

Y Hernán le responde: “Eso no es verdad. Aquí hay un alumno que no aprobó”



¿Es suficiente la justificación que da Hernán?

En otra ocasión, María dice: “Algún alumno de este curso aprobó el parcial” Y nuevamente Hernán está en desacuerdo.



¿Qué debería hacer ahora para justificar su posición?

Como conclusión del ejemplo anterior, podemos decir que:

$$\sim [\forall x : p(x)] \equiv \exists x : \sim p(x)$$

$$\sim [\exists x : p(x)] \equiv \forall x : \sim p(x)$$



Ejercicio: Escribe la negación de:

p: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

q: $\exists x \in \mathbb{R} : (x + 3 = 8 \wedge x > 4)$

r: $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \bullet y = y$

s: $\forall x \in \mathbb{R} : (x > 0 \Rightarrow x + 2 > 3)$

RAZONAMIENTOS

¿Qué es un razonamiento?

Es un conjunto de proposiciones en el cual una de ellas, llamada **CONCLUSIÓN**, se afirma sobre la base de las demás llamadas **PREMISAS**.

Esquemáticamente:

PREMISA 1

PREMISA 2



PREMISA N

Se lee:
"Por lo tanto"



CONCLUSION

Ejemplo:

"El ladrón tenía llave de la puerta o entró por la ventana. Si entró por la ventana, pisoteó las macetas. Las macetas no están pisoteadas. Por lo tanto, el ladrón tenía llave de la puerta."

En este razonamiento, podemos identificar tres premisas:

P1: "El ladrón tenía llave de la puerta o entró por la ventana"

P2: "Si entró por la ventana, pisoteó las macetas".

P3: "Las macetas no están pisoteadas".

Y la conclusión: "el ladrón tenía llave de la puerta"

SIMBOLIZANDO UN RAZONAMIENTO

Consideremos el razonamiento del ejemplo anterior:

Para poder simbolizarlo hay que definir un diccionario.

Por ejemplo, si consideramos el siguiente diccionario:

p: “El ladrón tenía llave de la puerta”

v: “El ladrón entró por la ventana”

m: “El ladrón pisoteó las macetas”

Podemos escribir el razonamiento en forma simbólica:

$p \vee v ; v \Rightarrow m ; \sim m \quad \therefore p$

premisas conclusión

$$p \vee v$$

$$v \Rightarrow m$$

$$\sim m$$

$$\therefore p$$

“El ladrón tenía llave de la puerta o entró por la ventana. Si entró por la ventana, pisoteó las macetas. Las macetas no están pisoteadas. Por lo tanto, el ladrón tenía llave de la puerta.”



Ejercicio:

Escribe en forma simbólica el siguiente razonamiento previa identificación de las proposiciones lógicas y definición de un diccionario:

Para bajar de peso debo hacer dieta o ir al gimnasio.

Si voy al gimnasio gasto dinero. Quiero bajar de peso sin gastar dinero. Entonces voy a hacer dieta.

¿Cuándo es válido un razonamiento?

Cuando de premisas VERDADERAS, NO se puede extraer una conclusión FALSA.

Ejemplo:

El siguiente razonamiento no es válido.

$$p \Rightarrow q ; \sim p \wedge r \therefore \sim q$$

Si consideramos $v(p) = F$, $v(q) = V$, $v(r) = V$, resultan ser las premisas verdaderas pero la conclusión falsa, por lo cual este razonamiento es inválido.



¿Te parece que es válido este razonamiento?

$$p \vee v ; v \Rightarrow m ; \sim m \therefore p$$



¿Y este es válido?

Para bajar de peso debo hacer dieta o ir al gimnasio. Si voy al gimnasio gasto dinero. Quiero bajar de peso sin gastar dinero. Entonces voy a hacer dieta.

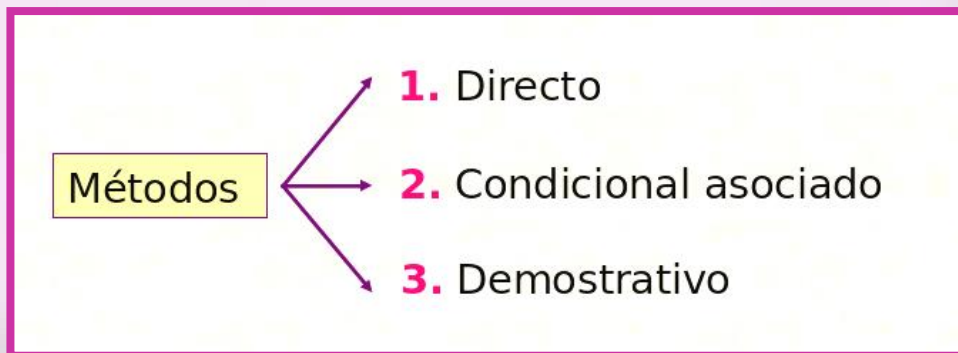


IMPORTANTE:

Si un razonamiento es válido, no significa que sus premisas sean V, sino que en caso de serlo, la conclusión también lo es.

MÉTODOS PARA PROBAR LA VALIDEZ DE UN RAZONAMIENTO

Existen varias formas de probar la validez de un razonamiento, aquí usaremos las siguientes:




1. MÉTODO DIRECTO

Este método consiste en partir de la verdad de las premisas, e ir trabajando con ellas hasta llegar a la conclusión.

Ejemplo:

$$p \vee v ; v \Rightarrow m ; \sim m \therefore p$$

Solamente analizaremos los casos en que todas las premisas son verdaderas.  ¿Por qué?

Como $\mathcal{V}(\sim m) = V$ por ser premisa entonces $\mathcal{V}(m) = F$

Luego, como $\mathcal{V}(v \Rightarrow m) = V$ por ser premisa, pero $\mathcal{V}(m) = F$ entonces debe ser $\mathcal{V}(v) = F$

Por último, como $\mathcal{V}(p \vee v) = V$ por ser premisa, pero $\mathcal{V}(v) = F$ entonces debe ser $\mathcal{V}(p) = V$

Y esta es la conclusión que resulta ser necesariamente verdadera.

2. MÉTODO DEL CONDICIONAL ASOCIADO

Consiste en armar un condicional cuyo antecedente es la conjunción de todas las premisas, y su consecuente es la conclusión. Luego debe demostrarse que dicho condicional es verdadero. Si lo es, el razonamiento será válido.

Ejemplo:

El condicional asociado del ejemplo 1 (el del ladrón) es:

$$[(p \vee v) \wedge (v \Rightarrow m) \wedge (\sim m)] \Rightarrow p$$



¿Es siempre verdadero?

¿Cómo lo demostramos?

Para probar que es verdadero, podemos hacer la tabla de verdad y verificar que sea una tautología, o sea que todos los renglones sean verdaderos.

Si queremos hacerlo por un camino más rápido, podemos tratar de encontrar algún renglón que sea falso (si ello ocurriera el razonamiento sería inválido). Si resultara imposible hallar un renglón falso, quedará garantizada la validez del razonamiento.

2. MÉTODO DEL CONDICIONAL ASOCIADO

Analicemos si este condicional es tautológico (verdadero):

Veamos si es posible que algún renglón de la tabla de verdad sea falso. Para ello se necesita que las premisas sean todas verdaderas y al mismo tiempo la conclusión sea falsa.

Como p es falsa pero $v(p \vee v) = V$ por ser premisa, debe ser necesariamente $v(v) = V$. Teniendo en cuenta esto último y el hecho que $v(v \Rightarrow m) = V$ por ser premisa, resulta que $v(m) = V$. Pero por otro lado, la premisa $v(\sim m) = V$ con lo cual se deduce que $v(m) = F$.

Como nos encontramos con una contradicción (que la misma proposición m debe ser por un lado V y por otro F), significa que nunca el condicional va a ser falso, y por lo tanto el razonamiento es VALIDO.

$$[(p \vee v) \wedge (v \Rightarrow m) \wedge (\sim m)] \Rightarrow p$$

$$\underbrace{(p \vee v)}_V \wedge \underbrace{(v \Rightarrow m)}_V \wedge \underbrace{(\sim m)}_V \Rightarrow p \downarrow F$$

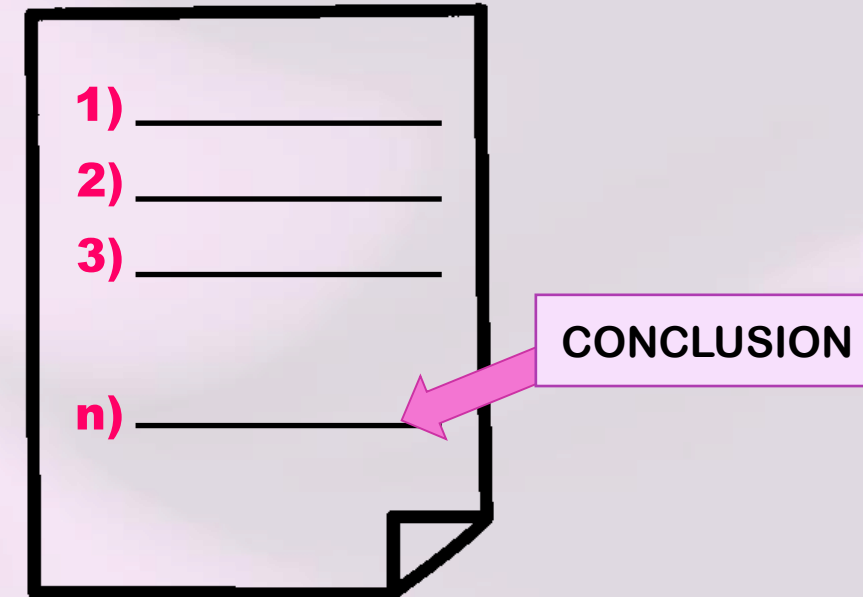
$$\underbrace{(p \vee v)}_V \wedge \underbrace{(v \Rightarrow m)}_V \wedge \underbrace{(\sim m)}_V \Rightarrow p \downarrow F$$

3. MÉTODO DEMOSTRATIVO

Es un método más formal y ordenado, que elabora una lista numerada de proposiciones lógicas con el objetivo de llegar a tener en algún elemento de la lista a la conclusión del razonamiento.

Las proposiciones que se pueden incorporar a la lista pueden ser únicamente por tres motivos:

- a) ser premisas
- b) ser equivalencias lógicas de otras proposiciones anteriores de la lista
- c) obtenerse a partir de otras proposiciones anteriores de la lista a través de reglas de inferencia.



En cada renglón, debe justificarse a la derecha de dónde provino señalando el o los renglones que se han utilizado. El objetivo es llegar en algún renglón a obtener la conclusión. Si se llega, significa que el razonamiento es válido.

¿Qué son las Reglas de Inferencia?

Las reglas de inferencia son pequeños razonamientos que ya está demostrado que son válidos, y sirven para probar la validez de razonamientos más complejos. Cada una de ellas, tiene un nombre que la identifica y dos siglas.

Las principales reglas de inferencia son:

Modus Ponens (M.P.)	$A \Rightarrow B ; A \therefore B$
Modus Tollens (M.T.)	$A \Rightarrow B ; \sim B \therefore \sim A$
Silogismo hipotético (S.H.)	$A \Rightarrow B ; B \Rightarrow C \therefore A \Rightarrow C$
Silogismo disyuntivo (S.D.)	$A \vee B ; \sim A \therefore B$
Ley de Combinación (L.C.)	$A ; B \therefore A \wedge B$

Ejemplo:

Retomemos el razonamiento 1 (del ladrón):

$$[(p \vee v) \wedge (v \Rightarrow m) \wedge (\sim m)] \Rightarrow p$$

Y esta vez demostremos su validez por método demostrativo:

- | | | |
|-----------|-------------------|--------------|
| 1) | $v \Rightarrow m$ | premisa |
| 2) | $\sim m$ | premisa |
| 3) | $\sim v$ | M.T. (1 y 2) |
| 4) | $p \vee v$ | premisa |
| 5) | p | S.D. (4 y 3) |

Llegamos a
la conclusión

VALIDO

Otro ejemplo RESUELTO:

Demostrar la validez del razonamiento:

$$p \Rightarrow q \vee r ; q \Rightarrow t ; \sim t \therefore \sim p \vee r$$

- | | | |
|----|--------------------------|------------------------------|
| 1) | $p \Rightarrow q \vee r$ | premisa |
| 2) | $q \Rightarrow t$ | premisa |
| 3) | $\sim t$ | premisa |
| 4) | $\sim q$ | M.T. (2,3) |
| 5) | $\sim p \vee (q \vee r)$ | Equivalencia condicional (1) |
| 6) | $(\sim p \vee r) \vee q$ | Asociativa y conmutativa (5) |
| 7) | $\sim p \vee r$ | S.D. (6,4) |

VALIDO



Ejercicio:

Prueba la validez del siguiente razonamiento usando el Método DEMOSTRATIVO:

Para bajar de peso debo hacer dieta o ir al gimnasio. Si voy al gimnasio gasto dinero.

Quiero bajar de peso sin gastar dinero.

Entonces voy a hacer dieta.

IMPORTANTE:

Si al intentar demostrar la validez de un razonamiento por este método, no logramos llegar a la conclusión, eso no garantiza que sea inválido.

RAZONAMIENTOS CATEGÓRICOS



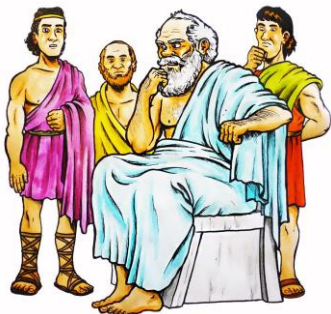
PARA PENSAR...

Consideremos el siguiente razonamiento:

*Todos los hombres son mortales.
Sócrates es un hombre.
Por lo tanto Sócrates es mortal.*



¿Te parece que es un razonamiento válido?



Lo escribimos en forma simbólica:

$$\forall x:[h(x) \Rightarrow m(x)] ; h(\text{Sócrates}) \therefore m(\text{Sócrates})$$

Siendo las funciones proposicionales usadas:

$h(x)$: “x es hombre” $m(x)$: “x es mortal”

Aunque creamos que es válido, se nos complica la demostración, ya que no se puede usar por ejemplo un Modus Ponens directamente pues la primera premisa tiene un cuantificador. En estos casos primero debe particularizarse.

REGLAS DE INFERENCIA PARA RAZONAMIENTOS CATEGÓRICOS

Los razonamientos que tienen proposiciones cuantificadas se denominan categóricos. Para poder demostrar ese tipo de razonamientos, debemos agregar algunas reglas de inferencia más, que nos permiten “poner” o “sacar” los cuantificadores.

Particularización universal (P.U.)	$\forall x: p(x) \therefore p(a)$
Generalización universal (G.U.)	$p(a) \therefore \forall x: p(x)$ Nota: si a es genérico
Particularización existencial (P.E.)	$\exists x: p(x) \therefore p(a)$
Generalización existencial (G.E.)	$p(a) \therefore \exists x: p(x)$

Ejemplo:

Demostremos el ejemplo de Sócrates

$\forall x: [h(x) \Rightarrow m(x)] ; h(\text{Sócrates}) \therefore m(\text{Sócrates})$

1. $\forall x: [h(x) \Rightarrow m(x)]$ premisa
2. $h(\text{Sócrates}) \Rightarrow m(\text{Sócrates})$ P.U.(1)
3. $h(\text{Sócrates})$ premisa
4. $m(\text{Sócrates})$ M.P. (2,3)

VALIDO

RAZONAMIENTOS CATEGÓRICOS

A tener en cuenta:

Las particularizaciones hay que usarlas siempre antes de utilizar otras reglas de inferencia (Modus Ponens, Tollens, silogismos, etc.) ya que no se pueden usar estas otras si hay cuantificadores.

Si tenemos proposiciones existenciales, al particularizar en un elemento “a”, éste no es genérico. En cambio si particularizamos una proposición universal (con \forall), el elemento es genérico.

Otro ejemplo:

$\exists x: [p(x) \vee q(x)] ; \forall x: [q(x) \Rightarrow r(x)]$

$\therefore \exists x: [p(x) \vee r(x)]$

- | | |
|---|------------------------|
| 1. $\exists x : (p(x) \vee q(x))$ | premisa |
| 2. $\forall x: (q(x) \Rightarrow r(x))$ | premisa |
| 3. $p(a) \vee q(a)$ | P.E. (1) |
| 4. $q(a) \Rightarrow r(a)$ | P.U. (2) |
| 5. $\sim p(a) \Rightarrow q(a)$ | Equiv. condicional (3) |
| 6. $\sim p(a) \Rightarrow r(a)$ | S.H. (5,4) |
| 7. $p(a) \vee r(a)$ | equiv. cond. (6) |
| 8. $\exists x: (p(x) \vee r(x))$ | G.E. (7) |

VALIDO



¿Hubiese sido lo mismo cambiar de lugar los pasos 3 y 4? ¿Por qué?

RAZONAMIENTOS CATEGÓRICOS



Ejercicio:

Dado el siguiente razonamiento:

Todos los invitados a la cena son ingenieros o abogados. Los que son ingenieros estudiaron en la UTN. Ariel, uno de los invitados, no estudió en la UTN. Por lo tanto, al menos un invitado es abogado.



Se pide:

1. Define el diccionario
2. Prueba por método demostrativo



PARA PENSAR...

¿Es válido el siguiente razonamiento?

$\exists x: p(x)$

$\forall x: [q(x) \Rightarrow p(x)]$

$\therefore \exists x: q(x)$



¿De qué forma podemos justificar que es inválido?

RAZONAMIENTOS CATEGORICOS INVÁLIDOS

Para justificar que un razonamiento categórico es INVÁLIDO, la forma correcta es dando una interpretación concreta que lo invalide, es decir definiendo un conjunto y dando funciones proposicionales que hagan las premisas verdaderas y la conclusión falsa.

Ejemplo: Mostraremos que el siguiente razonamiento es inválido:

$$\exists x: [a(x) \Rightarrow \sim b(x)] ; c(m) \vee b(m) ; \sim c(m) \therefore \exists x: \sim a(x)$$

Consideremos el conjunto: $U = \{ 3, 4, 6 \}$, el valor de $m=6$

y los predicados: $a(x)$: “x es entero” $b(x)$: “x es par” $c(x)$: “x es múltiplo de 4”

Veamos las premisas: $\exists x: [a(x) \rightarrow \sim b(x)]$ es verdadera pues se cumple con $x=3$

$c(6) \vee b(6)$ es verdadera pues se cumple $b(6)$ y $\sim c(6)$ también es verdadera

Pero la conclusión: $\exists x: \sim a(x)$ es FALSA ya que todos los números son enteros.



INVALIDO

RAZONAMIENTOS CATEGORICOS INVÁLIDOS



Ejercicio:

Analiza si el siguiente razonamiento es o no válido:

Algunos sillones están tapizados.

Algunos sillones son blancos.



Todos los sillones blancos tienen almohadones. Por lo tanto, algunos sillones están tapizados y tienen almohadones.



Y si cambiamos la primera palabra, ¿este nuevo razonamiento es válido?

Te proponemos que ahora trates de hacer los ejercicios de la Guía de Ejercicios para afianzar los temas vistos.



INTERPRETACIÓN CONJUNTISTA DE ALGUNOS RAZONAMIENTOS

Una forma de interpretar algunos razonamientos categóricos es relacionando con Teoría de Conjuntos. Te recomendamos que luego de ver ese tema, regreses aquí para poder comprender esta parte.



¿Recuerdas el razonamiento de Sócrates?

$\forall x: [h(x) \Rightarrow m(x)] ; h(\text{Sócrates}) \therefore m(\text{Sócrates})$

Podemos definir dos conjuntos (uno por cada función proposicional, serían los conjuntos de verdad de cada una de las funciones proposicionales):

$H = \{x \in U / h(x) \text{ es verdadera}\} = \{x \in U / x \text{ es hombre}\}$

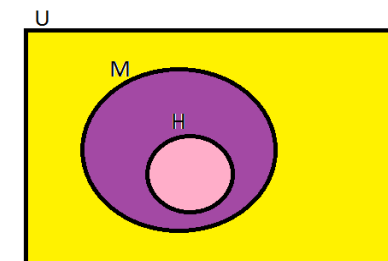
$M = \{x \in U / m(x) \text{ es verdadera}\} = \{x \in U / x \text{ es mortal}\}$

Ahora se observamos la primera premisa, vemos que coincide con la definición de inclusión.

Podemos reescribirla en términos de conjuntos:

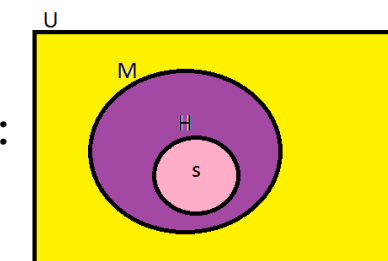
$$H \subseteq M$$

Con esto podemos hacer un diagrama de Venn:



La segunda premisa es: Sócrates \in H

Entonces ubicamos a Sócrates (s) en el diagrama:



Y ahora si observamos el diagrama que hicimos, analizamos si se cumple la conclusión: Sócrates \in M

La cual es verdadera, por lo tanto comprobamos la validez del razonamiento.