Algebra y Geometría Analítica Lineal

Guía UTN -Resueltos

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1-

a-

Busquemos la matriz estándar de la Transformación:

$$M_{EE}(T) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Recuerden:

$$\begin{cases} T(1,0) = (-2,5) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) \Rightarrow [T(1,0)] = (-2;5)^T \\ T(0,1) = (-2,1) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) \Rightarrow [T(1,0)] = (-2;1)^T \end{cases}$$

"Es más fácil ver los generadores de la Transformación y formar con ellos la base y encolumnarlos"

Busquemos los autovalores:

$$\boldsymbol{Det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2+\lambda)(\lambda-1) - 5*2 = \lambda^2 + \lambda - 12}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \lambda_1 = 3 \wedge \lambda_2 = -4}$$

Busquemos el autoespacio generado por cada autovalor, primero por 3:

$$T_{\lambda_1=3} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = 3x \\ -5x + y = 3y \end{cases} = \begin{cases} -5x - 2y = 0 \\ -5x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 1\ Ecuación\ LI$$

$$\boldsymbol{S_{\lambda=3} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -5x = 2y\}\ por\ lo\ tanto\ coincide\ con\ S_3}$$

Busquemos el autoespacio generado por -4:

$$T_{\lambda_1=-4} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -4x \\ -5x + y = -4y \end{cases} = \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -5x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow 1\ Ecuación\ LI$$

$$\boldsymbol{S_{\lambda=-4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}\ por\ lo\ tanto\ coincide\ con\ S_1}$$

PARA S_2 LA TRANSFORMACIÓN NO COINCIDE CON EL SUBESPACIO GENERADO POR LOS AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

b-

b1-

Si observamos el autoespacio generado por el Autovalor -4 coincide con el vector a transformar. Podemos decir en general:

$$\boldsymbol{S_\lambda \; es\; el\; Subespacio\; asociado\; al\; autovalor\; \lambda\; y\; A \in S_\lambda \Rightarrow T(A) = \lambda A}$$

- ✓ $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{S_1} = \boldsymbol{S_{\lambda=-4}} \Rightarrow \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = M_{EE}(T)\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = (-4x, -4x)$

b2-

Si observamos el autoespacio generado por el Autovalor -3 coincide con el vector a transformar:

$$\boldsymbol{A = (-2,5) \Rightarrow -5 * (-2) = 2 * 5 = 10 \Rightarrow A \in S_{\lambda=3} \therefore T(-2,5) = \lambda(-2,5) \wedge \lambda = 3}$$

FALSO

2-

$$Det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = x^3 - 7x^2 + 36 = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 3 \wedge \lambda_2 = 6 \wedge \lambda_3 = -2}$$

Busquemos el autoespacio generado por 3:

$$S_{\lambda_1=3} = \begin{cases} x + y + 3z = 3x \\ x + 5y + z = 3y \\ 3x + y + z = 3z \end{cases} = \begin{cases} -2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x + y + 3z = 0 \\ 0 - 5y - 5z = 0 \\ 0 - 5y - 5x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\; EC\; LI\; en\; un\; Espacio\; de\; Dim(V) = 3 \Rightarrow \; queda\; Dim = 1$$

$$\mathbf{S_{\lambda_1=3} = Gen\{(-1, 1, -1)\}}$$

Busquemos el autoespacio generado por 6:

$$S_{\lambda_2=6} = \begin{cases} x + y + 3z = 6x \\ x + 5y + z = 6y \\ 3x + y + z = 6z \end{cases} = \begin{cases} -5x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases} = \begin{cases} -5x + y + 3z = 0 \\ 0 + 4y - 8z = 0 \\ 0 - 8y + 16z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\; EC\; LI\; en\; un\; Espacio\; de\; Dim(V) = 3 \Rightarrow \; queda\; Dim = 1$$

$$\mathbf{S_{\lambda_2=3} = Gen\{(1, 2, 1)\}}$$

Busquemos el autoespacio generado por -2:

$$S_{\lambda_3=-2} = \begin{cases} x + y + 3z = -2x \\ x + 5y + z = -2y \\ 3x + y + z = -2z \end{cases} = \begin{cases} 3x + y + 3z = 0 \\ x + 7y + z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x + y + 3z = 0 \\ 0 + 20y + 0z = 0 \\ 0 + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\; EC\; LI\; en\; un\; Espacio\; de\; Dim(V) = 3 \Rightarrow \; queda\; Dim = 1$$

$$\mathbf{S_{\lambda_3=-2} = Gen\{(-1, 0, 1)\}}$$

$$\mathbf{Base(\mathbb{R}^3) = \{(-1, 1, -1)(1, 2, 1)(-1, 0, 1)\} = \bigcup_{i=1}^{n} T_{\lambda_i}}$$

3-

a-

$$Det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 1}$$

$$S_\lambda = Gen\{(1,0)\}$$

b-

$$Det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = 2}$$

Busquemos el autoespacio generado por -1:

$$S_{\lambda_1=-1} = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S_{\lambda_1} = \{(-1, 0, 1)(-1, 1, 0)\}}$$

Busquemos el autoespacio generado por 2:

$$S_{\lambda_2=2} = \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 0 + 3y - 3z = 0 \\ 0 - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_{\lambda_2} = \{(1, 1, 1)\}}$$

c-

$$Det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 3}$$

Busquemos el autoespacio generado por 1:

$$S_{\lambda_1=1} = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S_{\lambda_1} = \{(-1, 0, 1)\}}$$

Busquemos el autoespacio generado por 3:

$$S_{\lambda_2=2} = \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{S_{\lambda_2} = \{(1, 0, 1)\}}$$

4-

a-

$$Det\begin{pmatrix}3-\lambda & 0 & 6\\ 0 & -3-\lambda & 0\\ 5 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}=x^3-2x^2-39x-72=0\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1=-3\wedge\lambda_2=8}$$

Busquemos el autoespacio generado por -3:

$$S_{\lambda_1=1}=\begin{cases}6x+6z=0\\ 0=0\\ 5x+5z=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{S_{\lambda_1}}=\{(\mathbf{-1,0,1})(\mathbf{0,1,0})\}$$

Busquemos el autoespacio generado por 8:

$$S_{\lambda_1=1}=\begin{cases}-5x+6z=0\\ 5y=0\\ 5x-6z=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{S_{\lambda_1}}=\{(\mathbf{6,0,5})\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{6}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5}\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{P^{-1}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{11} & 0 & \frac{6}{11}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 0 & -3 & 0\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{15}{11} & 0 & -\frac{18}{11}\\ 0 & -3 & 0\\ \frac{8}{11} & 0 & \frac{8}{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

b-

$$Det\begin{pmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 2\\ 2 & 3 & 1-\lambda\end{pmatrix}=x^3-7x^2+8x+16=0\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1=4\wedge\lambda_2=1}$$

Busquemos el autoespacio generado por 4 con multiplicidad 2:

$$S_{\lambda_2=2}=\begin{cases}0=0\\ -2y+2z=0\\ 2x+3y-3z=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{S_{\lambda_1}}=\{(\mathbf{0,1,1})\}\Rightarrow \boldsymbol{m_{\lambda_1}=2\neq Dim(S_{\lambda_1})=1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{No\ diagonalizable}$$

5-

a-

$$Det(A-\lambda I)=0\Rightarrow Si\ \lambda=0: Det(A)=0\Rightarrow \nexists A^{-1}$$

b-

$$Det(A-\lambda I)=(a_{11}-\lambda_1)(a_{22}-\lambda_2)\dots(a_{nn}-\lambda_n)\Rightarrow\ \lambda=\{a_{11};a_{22};\dots;a_{nn}\}$$

c-

$$Det(A-\lambda I)=Det(A-\lambda I)^T=Det(A^T-\lambda I)=0$$

6-

$$Det(B-\lambda I)=Det(P^{-1}AP-P^{-1}\lambda IP)=Det\big(P^{-1}P(A-\lambda I)\big)=\frac{Det(P)}{Det(P)}Det(A-\lambda I)=$$
$$Det(A-\lambda I)=0$$

7-

$$A=A^2$$
$$Det(A)Det(A-I)=0\Rightarrow\lambda=0\vee\lambda=1$$

8-

$$de(AB)=Det(BA)=Det(I\lambda)\Rightarrow Det(BA-\lambda I)$$

9-

$$\begin{cases}T(1,0,0)=(1,0,0)\\ T(0,1,0)=(0,1,0)\\ T(0,0,1)=(0,0,-1)\end{cases}\Rightarrow M_{EE}(T)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Busquemos el autoespacio generado por 1:

$$S_{\lambda_1}=Gen\{(1,0,0),(0,10)\}$$

Busquemos el autoespacio generado por -1:

$$S_{\lambda_2}=Gen\{(0,0,1)\}$$

$$B=S_{\lambda_1}\cup S_{\lambda_2}=\{(\mathbf{1,0,0}),(\mathbf{0,1,0}),(\mathbf{0,0,1})\}$$

10-

$$\begin{cases}T(1,0,0)=(2,0,0)\\ T(0,1,0)=(-3,-1,0)\\ T(0,0,1)=(5,5,4)\end{cases}\Rightarrow M_{EE}(T)=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda=\{-1,2,4\}$$

Busquemos el autoespacio generado por -1:

$$\{x=y;z=0\}\Rightarrow S_{\lambda_1}=Gen\{(1,1,0)\}$$

Busquemos el autoespacio generado por 2:

$$\{y=z=0\}\Rightarrow S_{\lambda_2}=Gen\{(1,0,0)\}$$

Busquemos el autoespacio generado por 4:

$$\{x=z;y=z\}\Rightarrow S_{\lambda_3}=Gen\{(1,1,1)\}$$

$$B=S_{\lambda_1}\cup S_{\lambda_2}\cup S_{\lambda_3}=\{(\mathbf{1,1,0}),(\mathbf{1,0,0}),(\mathbf{1,1,1})\}$$

11-

a-

Si tiene n autovalores tiene n Autovectores, y por propiedad los Autovectores de distintos autoespacios tienen elementos LI entre sí por definición

VERDADERO

b-

Puede tener un autovalor o más con distinta multiplicidad, si la multiplicidad algebraica, es decir, la de su polinomio característico coincide con la geométrica, la dimensión del autoespacio asociado al autovalor en cuestión, es diagonalizable.

FALSO

c-

De la misma manera que dijimos que un Autovalor puede tener multiplicidad algebraica mayor a 1 en b- al determinar que pueden haber autoespacios con dimensión mayor, hace que para un mismo autovalor hayan más de un Autovector posible li.

FALSO

d-

Si buscamos el determinante, que genera los polinomios característicos para sacar los autovalores, observaremos que el grado del polinomio coincide o es menor que el orden de la matriz. Ya que como máximo se van a multiplicar n veces la diagonal consecutivamente. Generando un polinomio en función del autovalor no mayor a n.

VERDADERO

e-

Como ya determinamos, el tipo de matriz que multiplica al vector x es del tipo autovectorial, por lo tanto, este tipo de matrices ya vimos que generan subespacios generados por elementos que no son el vector nulo, esto implica que el determinante sea cero, y por lo tanto la solución sea INDETERMINADA.

FALSO

12-

a-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1+2+a=1 \\ 2+1+b=1 \\ 2+2+c=1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a=-2; b=-2; c=-3}$$

b-

Para ver si es diagonalizable debemos investigar si tenemos suficientes autovectores li con cada autoespacio generado:

$$Det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = x^3+x^2-x-1=0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1=-1; \lambda_2=1}$$

Busquemos el autoespacio generado por -1:

$$S_{\lambda_1=-1} = \begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}_{\boldsymbol{\lambda_1}} = \{(\mathbf{1,0,1})(\mathbf{-1,1,0})\}$$

Busquemos el autoespacio generado por 1:

$$S_{\lambda_2=1} = \begin{cases} 2y-2z=0 \\ 2x-2z=0 \\ 2x+2y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}_{\boldsymbol{\lambda_2}} = \{(\mathbf{1,1,1})\}$$

$$B = S_{\lambda_1} \cup S_{\lambda_2} = \{(\mathbf{1,0,1}),(\mathbf{-1,1,0}),(\mathbf{1,1,1})\}$$

13-

Solo se pueden diagonalizar ORTOGONALMENTE, matrices simétricas.

a-

$$Det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = x^2-3x-4=0 \Rightarrow \lambda_1=-1 \wedge \lambda_2=4$$

Busquemos el autoespacio generado por -1:

$$S_{\lambda_1=-1} = \begin{cases} 4x+2y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}_{\boldsymbol{\lambda_1}} = \{(\mathbf{1,-2})\}$$

Busquemos el autoespacio generado por 4:

$$S_{\lambda_2=4} = \begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}_{\boldsymbol{\lambda_2}} = \{(\mathbf{2,1})\}$$

$$(\mathbf{1,-2}) \perp (\mathbf{2,1}) \ \boldsymbol{ya\ que}\ (\mathbf{1,-2})(\mathbf{2,1}) = \mathbf{0}$$

Paso cada vector de la base a Versor, dividiendo por la norma de cada uno:

$$\boldsymbol{Base_{Versor}} = \left\{\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}; -\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\right)\left(\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}; \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\right)\right\} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} & \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \\ -\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \end{pmatrix}$$

b-

$$Det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = x^2-2x=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \wedge \lambda_2=2$$

Busquemos el autoespacio generado por 0:

$$S_{\lambda_1=0} = \begin{cases}x+y=0\\ x+y=0\end{cases} \Rightarrow \mathbf{S_{\lambda_1}} = \{(\mathbf{-1},\mathbf{1})\}$$

Busquemos el autoespacio generado por 1:

$$S_{\lambda_2=2} = \begin{cases}-x+y=0\\ x-y=0\end{cases} \Rightarrow \mathbf{S_{\lambda_2}} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1})\}$$

$$(\mathbf{-1},\mathbf{1}) \perp (\mathbf{1},\mathbf{1})\ \boldsymbol{ya\ que}\ (\mathbf{-1},\mathbf{1})(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \mathbf{0}$$

Paso cada vector de la base a Versor, dividiendo por la norma de cada uno:

$$\boldsymbol{Base_{Versor}} = \left\{\left(-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}};\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right)\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}};\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right)\right\} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\end{pmatrix}$$

Si probamos en todos los casos, vemos que:

$$\boldsymbol{P^{-1}AP = P^TAP = D_\lambda}$$

14-

a-

Veamos si forma una base para el AUTOESPACIO

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}T(1,1,0,1) = (-1,-1,0,-1)\\ T(0,1,1,2) = (0,-1,-1,-2)\\ T(1,0,0,0) = 0_w\\ T(0,1,0,0) = 0_w\end{cases}$$

Busquemos el autoespacio generado por 4:

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=x\\ \alpha+\beta+\omega=y\\ \beta=z\\ \alpha+2\beta=t\end{cases} = \begin{cases}\gamma=x-\alpha\\ \alpha+z+\omega=y\\ \beta=z\\ \alpha=t-2z\end{cases} = \begin{cases}\gamma=x-t+2z\\ \omega=y+z-t\\ \beta=z\\ \alpha=t-2z\end{cases}$$

$$\boldsymbol{T(x,y,z,t)} = (t-2z)(-1,-1,0,-1)+z(0,-1,-1.-2) = (\mathbf{2z-t;z-t;-z;-t})$$

b-

Consigamos la Matriz estándar de esta Transformación:

$$M_{EE} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Busquemos el autoespacio generado por 0:

$$\{t=z=0\} \Rightarrow S_{\lambda_1} = Gen\{(1,0,0,0)(0,1,0,0)\}$$

Busquemos el autoespacio generado por -1:

$$S_{\lambda_2=-1} = \begin{cases}x+2z-t=0\\ y+z-t=0\end{cases} \Rightarrow S_{\lambda_2} = Gen\{(-2,-1,1,0)(1,1,0,1)\}$$

$$M_{BB}(T) = D = P^{-1}M_{EE}P = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$