Este apunte fue puesto
a disposición por el
Centro de Estudiantes
para la distribución digital

Centro de Estudiantes
de Ingeniería Tecnológica

Carreras:

INGENIERIA MECANICA (Plan 1994). INGENIERIA INDUSTRIAL - EN SISTEMAS DE INFORMACION - CIVIL - ELECTRICA - ELECTRONICA - METALURGIA - NAVAL QUIMICA - TEXTIL (Planes 1995).

ASIGNATURA: **ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA**
ORIENTACIÓN : **GENERAL**
DEPARTAMENTO: **CIENCIAS BASICAS - U.D.B. MATEMATICA**
ÁREA: **MATEMATICA**
FORMACION BASICA HOMOGENEA (Resolución N° 68/94)

CODIGO : 95-0701
Clase: **Cuatr./Anual**
Horas Sem.: **10 / 5**
Horas/año : **160**

Objetivos generales:

- Ser capaces de utilizar los conocimientos matemáticos para resolver problemas básicos de la Ingeniería.
- Concebir a la Matemática como una práctica social de argumentación, defensa, formulación y demostración.

Objetivos específicos:

- Operar entre vectores.
- Operar con matrices. Evaluar determinantes.
- Analizar y resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Aplicar el concepto de espacio vectorial, dependencia lineal, bases y dimensiones.
- Aplicar las transformaciones lineales.
- Operar con autovalores y autovectores.
- Operar y representar rectas y planos.
- Diagonalizar formas cuadráticas y aplicaciones en la geometria.
- Distinguir tipos de cónicas o cuádricas a partir de una ecuación de 2° grado con 2 o 3 incógnitas.
- Operar con curvas en paramétricas y polares.
- Aplicar cambios de sistemas de coordenadas.
- Utilizar la computadora como instrumento de resolución de cálculo y representaciones gráficas.

Programa sintético:

1. **ALGEBRA**

- Vectores y matrices. Operaciones básicas.
- Algebra de matrices: matriz inversa, partición de matrices.
- Ejemplos motivadores: cadenas de Markov, modelos de crecimiento de poblaciones, planificación de producción u otros
- Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos de solución.
- La noción de los cuadrados mínimos en el estudio de sistemas lineales.
- La matriz speudoinversa.
- Introducción motivada a los espacios vectoriales.
- Independencia lineal, bases y dimensión.
- Matrices y transformaciones lineales.
- Autovalores y autovectores.
- Diagonalización. Transformaciones de similaridad.
- Norma de vectores y matrices.
- Producto interno y ortogonalidad.
- Programa lineal.
- Computación numérica y simbólica aplicada al algebra.

2. GEOMETRIA

- Rectas y planos.
- Dilataciones, traslaciones, rotaciones.
- Cónicas, cuádricas.
- Ecuaciones de segundo grado en dos y tres variables.
- Curvas paramétricas.
- Coordenadas polares, cilíndricas, esféricas.
- Computación gráfica, numérica y simbólica.

Programa analítico:

Unidad Temática I: VECTORES GEOMETRICOS. RECTA Y PLANO

Adición. Propiedades. Producto de un vector por un escalar. Propiedades. Módulo. Propiedades. Producto escalar: definición. Interpretación geométrica. Producto vectorial: definición. Interpretación geométrica. Producto mixto: definición. Interpretación geométrica.

Recta en R^2. Plano. Recta en R^3. (enfoque vectorial). Distancias.

Unidad Temática II: ESPACIO VECTORIAL

Espacio vectorial real: plano geométrico, espacio geométrico, polinomios. Combinación lineal de vectores.. Subespacio vectorial.. Definición. Ejemplos. Enunciado de la condición suficiente. Dependencia e independencia lineal de un conjunto de vectores. Rango de un conjunto finito de vectores. Sistema de generadores. Base y dimensión de un espacio vectorial. Cambio de base. Bases ortonormales: definición.

Unidad Temática III: MATRICES

Definición. Igualdad. Adición. Propiedades. Producto de una matriz por un escalar. Propiedades. Producto de matrices. Definición. Propiedades. Matrices especiales: triangular, diagonal, escalar, unidad. transpuesta -propiedades-, simétrica y asimétrica -propiedades-, singular, regular, inversa, ortogonal. Operaciones elementales en una matriz. Matrices equivalentes. Cálculo de una matriz inversa: Gauss-Jordan.

Unidad Temática IV: DETERMINANTES

Determinantes. Definición. Propiedades. Menor - complementario y cofactor de un elemento de una matriz. Desarrollo de un determinante por los elementos de una líneá (Laplace). Suma de los productos de los elementos de una línea por los cofactores de una línea paralela. Matriz adjunta: aplicación del cálculo de la matriz inversa.

Unidad Temática V: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición. Forma matricial: solución. Estudio de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales: Teorema de Rouche-Frobenius. Resolución por los métodos: inversión de matrices, Gauss-Jordan. Regla de Cramer.

Unidad Temática VI: TRANSFORMACIONES LINEALES

Definición y ejemplos. Propiedades de las transformaciones lineales: recorrido y núcleo. Representación matricial de una transformación lineal. Matrices semejantes. Transformación identidad. Dilatación y contracción. Propiedades de una transformación lineal.

Unidad Temática VII: CONICAS

Definición de lugar geométrico en base a la excentricidad. Elementos de las cónicas y construcción. Parametrización de cónicas.

Unidad Temática VIII: SUPERFICIES

Las cuádricas en forma canónica. Estudio por secciones paralelas a los planos coordenados. Superficies de rotación. Conos y cilindros.

Unidad Temática IX: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Definición. Propiedades. Cálculo. Formas cuadráticas. Diagonalización de formas cuadráticas. Sistemas dinámicos: Potencias de una matriz diagonalizable. Autovalores complejos: Números complejos, operaciones básicas. Lugar geométrico en el plano complejo. Aplicaciones a la geometría.

Metodología de enseñanza

Clases teórico-prácticas incentivando la participación activa de los alumnos y orientadas a la comprensión de los diferentes temas de la asignatura en forma integradora, no sólo como herramientas aisladas de cálculo, y con aplicaciones a disciplinas ligadas con la Ingeniería. Diseño de trabajos prácticos especiales para la utilización de software matemático, con temas elegidos por los docentes y temas libres a elección de los alumnos.

Cronograma:

UNIDAD	Nº DE SEMANAS (Cuatrimestral)	Nº DE HORAS (Cuatrimestral)	Nº DE SEMANAS (Anual)	Nº DE HORAS (Anual)
I	2 1/2	25	5	25
II	2 1/2	25	5	25
III	1 1/2	15	3	15
IV	1	10	2	10
V	1	10	2	10
VI	1 1/2	15	3	15
VII	1 1/2	15	3	15
VIII	1 1/2	15	3	15
IX	1 1/2	15	3	15

<u>Nº de horas destinado a evaluaciones parciales y recuperatorios</u> : 15.

Régimen evaluación

Consta de evaluaciones parciales y una evaluación final.

* **Con relación a las evaluaciones parciales**:

• Cuando el dictado de la asignatura es cuatrimestral la normativa vigente recomienda, por lo menos, una evaluación parcial. Este parcial se divide en dos partes: **parte A** (que incluye los contenidos conceptuales de las cinco primeras unidades) y **parte B** (que incluye los contenidos conceptuales de las cuatro unidades restantes).

La preparación de ambas partes será supervisada por los coordinadores de la Cátedra.
Para firmar la libreta de trabajos prácticos y tener derecho a presentarse a la evaluación final, el alumno debe aprobar ambas partes del parcial. De no cumplir con este requisito, está previsto el siguiente sistema de recuperación: una fecha para recuperar la parte A, otra fecha para recuperar la parte B y una última fecha para recuperar A y/o B.

• Cuando el dictado de la asignatura es anual, se recomiendan dos evaluaciones parciales, que se corresponden con la parte A y la parte B del régimen cuatrimestral.
Las demás consideraciones del régimen anual son análogas a las del régimen cuatrimestral.

Régimen promocional (sin examen final)

Por Ordenanza 643/89 del Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional, la asignatura Algebra y Geometría Analítica cuenta con el régimen de promoción directa.
Para promocionar el alumno deberá tener como mínimo una asistencia del 80% de la totalidad de las clases y aprobar las dos evaluaciones parciales en primera instancia con un promedio de siete puntos como mínimo. Cuando el promedio resultare con fracción de cincuenta centésimos se tomará el entero inmediato superior. La nota así obtenida será la calificación definitiva.

* **Con relación a la evaluación final** :

Es individual y escrita. Se desarrolla frente a un tribunal integrado por tres docentes de la Cátedra, elegidos aleatoriamente en cada fecha. Los miembros del tribunal pueden completar la evaluación interrogando oralmente al alumno, si lo considerasen oportuno.

El alumno puede presentarse a rendir la evaluación final hasta en cuatro oportunidades.

Bibliografía General:

- Howard Anton. Introducción al Algebra Lineal. Ed. Limusa.
- F. Florey. Fundamentos de Algebra Lineal y Aplicaciones. Edit. Prentice Hall.

- Stanley-Grossman. Algebra Lineal con Aplicaciones. Edit. Mc Graw Hill.
- Juan Burgos. Algebra Lineal. Edit Mc Graw Hill.
- C. Pita Ruiz. Algebra Lineal. Edit. Mc Graw Hill.
- Enzo Gentile. Notas de Algebra II: Algebra Lineal. Edit. Docencia.
- Paige y Swift. Elementos de Algebra Lineal. Edit. Reverté.
- Harvey Gerber. Algebra Lineal. Edit. Grupo Editorial Iberoamericano.
- Hoffman- Kunze. Algebra Lineal. Edit. Prentice Hall.
- William Perry. Algebra Lineal con Aplicaciones. Edit. Mc Graw Hill.
- Fraleigh Bearegard. Algebra Lineal. Edit. Addison Wesley.
- Lipschutz. Algebra Lineal (Serie Schaum). Edit. Mc Graw Hill.
- Herstein-Winter. Algebra Lineal y Teoría de Matrices. Edit. Grupo Editorial Iberoamericano.
- Serge Lang. Algebra Lineal. Edit.Fondo Educat. Int.
- George Nakos-David Joyner. Algebra lineal con aplicaciones . Edit.Thomson
- Kozak – Pastorelli – Vardanega. Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal. Ed Mc Graw Hill

Bibliografía por Unidad:

- Howard Anton. Introducción al Algebra Lineal. Ed. Limusa. (Unidades I a IX)
- F. Florey. Fundamentos de Algebra Lineal y Aplicaciones. Edit. Prentice Hall. (Unidades I a VI y IX)
- Stanley-Grossman. Algebra Lineal con Aplicaciones. Edit. Mc Graw Hill. (Unidades I a VI y IX)
- Juan Burgos. Algebra Lineal. Edit Mc Graw Hill. (Unidades I a IX)
- C. Pita Ruiz. Algebra Lineal. Edit. Mc Graw Hill. (Unidades I a IX)
- Enzo Gentile. Notas de Algebra II: Algebra Lineal. Edit. Docencia. (Unidades II y VI)
- Paige y Swift. Elementos de Algebra Lineal. Edit. Reverté. (Unidades II, III y IV)
- Harvey Gerber. Algebra Lineal. Edit. Grupo Editorial Iberoamericano. (Unidades I a IX)
- Hoffman- Kunze. Algebra Lineal. Edit. Prentice Hall. (Unidades I a IX)
- William Perry. Algebra Lineal con Aplicaciones. Edit. Mc Graw Hill. (Unidades I a VI)
- Fraleigh Bearegard. Algebra Lineal. Edit. Addison Wesley. (Unidades I a VIII)
- Lipschutz. Algebra Lineal (Serie Schaum). Edit. Mc Graw Hill. (Unidades II y VI)
- Serge Lang. Algebra Lineal. Edit.Fondo Educat. Int. (Unidades I a IX)
- George Nakos-David Joyner. Álgebra lineal con aplicaciones . (Unidades I a VI y IX)

Prerrequisito

Aprobación del **Módulo B** del Seminario Universitario.

Índice

UNIDAD TEMÁTICA I

VECTORES GEOMÉTRICOS, RECTA Y PLANO.

OBJETIVOS:

- ✓ Operar con vectores geométricos.
- ✓ Identificar condiciones iniciales de un problema.
- ✓ Descubrir la posibilidad de elegir un método de resolución entre muchas alternativas.
- ✓ Adquirir habilidad para aplicar recursos algebraicos a la resolución de problemas de la Geometría.
- ✓ Visualizar el espacio uni-bi-tri-dimensional a través de representaciones de análisis.

CONTENIDOS:

Vectores geométricos. Adición. Propiedades. Multiplicación de un escalar por un vector. Propiedades. Producto escalar: definición. Interpretación geométrica. Producto vectorial: definición. Interpretación geométrica. Producto mixto: definición. Interpretación geométrica.
Plano. Recta en el espacio. Distancias.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

VECTORES GEOMÉTRICOS, RECTA Y PLANO.

1) Dados los vectores $\vec{v} = (1,-2,3)$, $\vec{w} = (3,0,1)$ y $\vec{t} = (-1,1,-2)$,

a) Grafique $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{t}$.

b) Calcule $2\left(\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w}\right) + 3\vec{t}$

c) Calcule $\|\vec{v} + \vec{t}\| - \|\vec{w}\|$

d) Determine, si existen, α y β reales, tales que $\vec{v} = \alpha\,\vec{w} + \beta\,\vec{t}$

2) Dados los puntos $A(3,1,-2), B\left(2,\sqrt{2},0\right), C\left(4,-\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$, Determine:

a) La distancia entre A y B.

b) El punto medio del segmento $\overline{AC}$.

c) Un vector de norma 7 y sentido contrario a $\overrightarrow{BC}$.

3) Calcule $t \in \mathbb{R}$ si :

a) $\vec{a} = (1,\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y $\|t\vec{a}\| = \sqrt{5}$.

b) dist $(A, B) = 2$, $A(t,-t,2)$ y $B(1,1,1)$

c) $\vec{x}$ es unitario y $\vec{x} = t\,(2,1,-2)$

4) Calcule el producto escalar y el ángulo que determinan $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{a} = 2\breve{i} - \breve{k}$, $\vec{b} = \breve{i} + \breve{j} - \breve{k}$

b) $\vec{a} = 3\breve{i} - 2\breve{j} + \breve{k}$, $\vec{b} = -\breve{i} - \breve{j}$

c) $\vec{a} = \left(2,-1,\frac{4}{3}\right)$, $\vec{b} = \left(-1,-\frac{2}{3},1\right)$

5) Determine el vector $\operatorname{proy}_{\vec{b}}\vec{a}$, para los vectores del ejercicio 4.

6) Encuentre los valores reales de k para que la proyección de $\vec{x} = (2,k,-2)$ sobre $\vec{y} = (k-1, 1, -2)$ sea un vector de norma dos.

7) Dados los vectores $\vec{a} = \breve{i} + 3\breve{j} - 2\breve{k}$, $\vec{b} = 4\breve{i} - 6\breve{j} + 5\breve{k}$, descomponga el vector $\vec{b}$ en la suma de dos vectores: uno en la misma dirección que $\vec{a}$ y otro en una dirección ortogonal a $\vec{a}$.

8) Calcule $\|\vec{a}\|$ sabiendo que $áng(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3}{4}\pi$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{2}$ y $4\vec{a} + 2\vec{b} \perp \vec{a}$.

9) Sean $\vec{a} = (1,2,-1)$, $\vec{b} = \breve{i} + \breve{j} - \breve{k}$ y $\vec{c} = \breve{i} - \breve{j} + 4\breve{k}$. Calcule,

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) $\vec{a}\ x\,\vec{c}$

c) $\vec{a}\,.(\vec{b}\ x\ \vec{c})$

d) $\vec{a}\ x\,(\vec{b}\ x\ \vec{c})$

e) $\vec{a}\,x(\vec{a}\,x\,\vec{c})$

10) Sean los vectores $\vec{u}=(1,2,1)\ y\ \vec{v}=(2,-1,-1)$. Encuentre un vector de norma 4 ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?

11) Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tales que $\vec{a}\times\vec{b}=(1,-1,-1)$ y $\vec{a}.\vec{b}=-3$

a) Calcule el área del paralelogramo que determinan los vectores dados.

b) Halle el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

12) Dados los puntos $A(-3,-1,0)$, $B(-2,0,-3)$, $C(0,-2,1)$, Determine:

a) El perímetro del triángulo ABC.

b) La longitud de la mediana correspondiente al lado $\overline{AC}$.

c) El área del triángulo ABC.

13) Sean los vectores $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(1,x,3)\ y\ \vec{c}=(2,-1,0)$. Halle $x\in\mathbb{R}$ de modo que:

a) los tres vectores determinen un paralelepípedo de volumen 3.

b) los tres vectores resulten coplanares.

14) Encuentre todos los versores del plano XY que son coplanares con $\vec{u}=3\ \breve{i}-3\ \breve{k}$ y $\vec{w}=\breve{i}+2\ \breve{j}-\breve{k}$.

15) Analice la validez de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdaderas demuéstrelas, si son falsas proporcione un contraejemplo

a) $\|\ \vec{u}\ \|=2\|\ \vec{v}\ \|\ \Rightarrow\ (\vec{u}+2\vec{v})\ \perp\ (\vec{u}-2\vec{v})$.

b) $\vec{u}\neq\vec{0}\ \wedge\ \vec{v}\neq\vec{0}\ \wedge\ \vec{u}\ x\ \vec{v}=\vec{0}\ \wedge\ \vec{u}.\vec{v}=0$

c) $\vec{u}\perp\vec{v}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{Proy}_{\vec{v}}(\vec{u}-\vec{v})}=-\vec{v}$.

d) $\vec{u}=(1,2,-1)\ \wedge\ \vec{v}=(a,0,-a)$ son paralelos, cualquiera sea el número real a.

e) $\vec{w}.(\vec{u}\ x\ \vec{v})=0\ \Rightarrow\ [\,\vec{u}=\vec{0}\ \vee\ \vec{v}=\vec{0}\ \vee\ \vec{w}=\vec{0}\,]$.

f) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{t}$ coplanares $\Rightarrow\ (\vec{u}\ x\ \vec{v})\ x\ (\vec{w}\ x\ \vec{t})=\vec{0}$

16) Halle la ecuación vectorial, general y segmentaria (si es posible) del plano que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto (-1, 3,-2) y su vector normal es $\vec{n}=(2,-4,1)$.

b) Es perpendicular en el punto medio al segmento que une los puntos (0,-2,1) y (3, -4, 2).

c) Pasa por los puntos (-1, 3,-2), (2, 1,0) y (-1, 0,4).

d) Contiene al eje de cotas y al punto (2,-1,-3).

e) Pasa por los puntos (1,-1,1) y (1, 3,-2) y es paralelo al eje de abscisas.

f) Pasa por el punto (1,-3,2) y es paralelo a los vectores $\vec{u}=3\breve{i}+\breve{j}-\breve{k}$ y $\vec{v}=\breve{i}-2\breve{j}-\breve{k}$

17) Halle:

a) La distancia del punto (3,-2,-1) al plano de ecuación $3x+y+4z-1=0$
b) Un plano paralelo al plano de ecuación $3x-y+2z+4=0$, sabiendo que el punto (1, 2,1) equidista de ambos planos.
c) Los valores reales de k para que la distancia del origen al plano de ecuación: $6x - 3y + kz - 14 = 0$ sea igual a 2.

18) Dados los planos $\alpha_1: 2x-2y+z=0$ y $\alpha_2: hx+z-h=0$, encuentre los valores reales de h para que el ángulo que determinan α_1 y α_2 sea $\frac{\pi}{3}$.

19) Sea el haz de planos, cuya ecuación es:

$$\alpha(x-2y+z-1)+\beta(x-z+3)=0,\ \alpha\in\mathbb{R}\beta\in\mathbb{R}$$

Determine el plano del haz que:

a) Pasa por el origen de coordenadas.
b) Es paralelo al eje de cotas.
c) Tiene ordenada al origen -2.
d) Es paralelo al plano $2x-y+z+2=0$

20) Halle los puntos del eje z que equidistan de los planos $\pi_1 y\, \pi_2$, siendo π_1 un plano que contiene al eje de ordenadas, y que pasa por el punto $(1,0,\sqrt{2})$, y $\pi_2: (x,y,z)=(1,0,0)+\alpha(1,0,1)+\beta(1,1,2)$.

21) Encuentre las ecuaciones vectoriales paramétricas, cartesianas paramétricas, y, si es posible, simétricas de la recta que:

a) pasa por el punto (1 ,-1,3) y tiene la dirección del vector $\vec{u}$= (-2 , 3, 4)
b) pasa por los puntos (1 ,-3 , 1) y (1 , 3 , -4)
c) es paralela al eje de ordenadas, que pasa por el punto (3 , 2 , 1)
d) pasa por el origen de coordenadas y tiene la dirección de un vector cuyas componentes son iguales.
e) pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano $\alpha: x-y+z-1=0$

En cada caso, grafique la recta.

22) Determine las ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta que es intersección de los planos:

$$\pi_1: \quad x-y-z+1=0$$
$$\pi_2: x-2y-3z-2=0$$

23) Halle las ecuaciones de los tres planos que incluyen a la recta $r:(x,y,z)=(2,-2,3)+\lambda(1,2,-1)$, con $\lambda\in\mathbb{R}$, y que son perpendiculares a cada uno de los planos coordenados.

24) Halle la ecuación del plano que pasa por el punto (2, 1, -3) y que contiene a la recta de intersección de los planos de ecuaciones $x-y-z-8=0$ y $3x-y-4=0$.

25) Indique si la recta $L:(x,y,z)=(1,0,-1)+\lambda(2,3,4), \lambda \in \mathbb{R}$, corta al plano $2x-2y+3z+1=0$. En caso afirmativo, halle el punto de intersección.

26) Indique si la recta r_1: (x, y, z)= (-t, 6, t); $t\in\mathbb{R}$ y la recta r_2, determinada por los puntos (1, 2,-5) y (0, 1,-5), son concurrentes; en caso afirmativo, halle el punto de intersección.

27) Determine para qué valores de $k\in\mathbb{R}$, las rectas r y s son alabeadas, siendo:

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$$

s: determinada por los puntos (3, 2,4) y (k, 0, k).

28) Las rectas $r_1:\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z}{3}$ y $r_2: x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ son coplanares, halle el plano que las contiene.

29) Determine la recta incluida en el plano β : x − y + 2 z − 4 = 0 y que es perpendicular a la recta r: (x, y, z)= (2+2λ ,1-λ ,-1+λ), $\lambda\in\mathbb{R}$ en el punto en que r corta a β.

30) Halle el ángulo que determinan la recta $L:\begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ x+2y+3z-4=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 3x-7y+8z-9=0$.

31)a) Halle la distancia del punto A (-2, 1,-1) a la recta: $(x,y,z)=(1,3,-2)+t(3,0,-4)$, $t\in\mathbb{R}$

b) Encuentre la distancia entre las rectas:

$$L_1:\frac{x-1}{2}=y+2=z-3 \quad \text{y} \quad L_2:\frac{x+2}{-3}=y-2=\frac{z+1}{2}$$

32) Dada la recta $L:\dfrac{x+1}{2}=1-y=3+z$. Obtenga el punto donde L corta al plano coordenado XZ y calcule la distancia entre dicho punto y el plano $x-3y+z=0$.

33) Sea el plano $\pi: 3x-2y+4z-3=0$

a) Determine la proyección ortogonal del punto A (3, -1,2) sobre el plano dado.

b) Determine la proyección ortogonal de la recta L: (x, y, z)= (2+t, 1+t, 2+2t), $t\in\mathbb{R}$sobre el plano dado

34) Determine todos los valores de $k \in \mathbb{R}$, para los cuales el punto M dista $\sqrt{6}$ unidades de la recta $L: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = k - \lambda \\ z = 2 \end{cases}$, siendo M el punto de intersección entre el plano $\pi: x + 2y - z - 2 = 0$ y el eje x.

35) Sean las rectas $t_1: \dfrac{x-1}{2} = y = z + 3$ y $t_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Obtenga:

a) el plano β sabiendo que $t_1 \subset \beta$ y $t_2 // \beta$.

b) la proyección ortogonal de t_2 sobre $\pi: x + 3y - z + 3 = 0$.

36) Verifique que la recta definida por el haz de planos del ej.19 está contenida en el plano obtenido en el ej.19 a)

Respuestas

1)

b) $2\left(\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w}\right) + 3\vec{t} = (-3,-1,-\frac{2}{3})$

c) $\|\vec{v} + \vec{t}\| - \|\vec{w}\| = \sqrt{2} - \sqrt{10}$

d) no existen

2)

a) $\|AB\| = \sqrt{8 - 2\sqrt{2}}$

b) $P_M = (\frac{7}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{4})$

c) $(-4, 4\sqrt{2}, -1)$

3)

a) $|t| = 1$

b) $|t| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $|t| = \frac{1}{3}$

4)

a) $\vec{a}.\vec{b} = 3$

$\hat{ab}$ = 0,685 Rad.

b) $\vec{a}.\vec{b} = -1$

$\hat{ab}$ = 1,761 Rad.

c) $\vec{a}.\vec{b} = 0$

$\hat{ab} = \frac{\pi}{2}$ Rad.

5)

a) vector $\Pr oy_{\vec{b}}\, \vec{a} = (1, 1, -1)$

b) vector $\Pr oy_{\vec{b}}\, \vec{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

c) vector $\Pr oy_{\vec{b}}\, \vec{a} = \vec{0}$

6) $k = -2 \pm 2\sqrt{2}$

7) $\left(-\frac{12}{7}, -\frac{36}{7}, \frac{24}{7}\right)$ y $\left(\frac{40}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{11}{7}\right)$

8) $\|\vec{a}\|=\frac{1}{2}$

9)

a) $\vec{a}\ x\ \vec{b}$ =(-1,0,-1)   b) $\vec{a}\ \ x\ \vec{c}$ =(7,-5,-3)   c) $\vec{a}\ .\ (\vec{b}\ x\ \vec{c})$ =-5

d) $\vec{a}\ x\ (\vec{b}\ x\ \vec{c})$ =(-9,-1,-11)   e) $\vec{a}\ x\,(\vec{a}\ x\ \vec{c})$ =(-11,-4,-19)

10) $\pm\frac{4}{\sqrt{35}}(-1,3,-5)$

11)a) El área determinada por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\sqrt{3}$

b) el ángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\frac{5\pi}{6}$

12)

a) Perímetro = $2(\sqrt{11}+\sqrt{6})$ b) longitud de la mediana es $\frac{\sqrt{59}}{2}$

c)área del triángulo ABC= $\sqrt{30}$

13)

a) $x=\frac{5}{2}$ o x=4   b) $x=\frac{13}{4}$

14) $\check{v}=(0,\ 1,0)$ o $\check{v}=(0,-1,0)$

15)

a)V   b)F   c)V   d)F   e) F   f) V

16)

a)2x-4y+z+16 = 0   b)3x-2y+z=12   c)2x+6y+3z=10

d)x+2y=0   e)3y+4z=1   f)-3x+2y-7z+23=0

17)

a) distancia de punto a plano $\frac{2}{\sqrt{26}}$ b) 3x-y+2z-10=0 ó 3x-y+2z+4=0

c) $|k| = 2$

18) $h=-\frac{8}{7}+\frac{3}{7}\sqrt{11}$

19)

a) 2x-3y+z=0   b)x-y+1=0

c)-y+z=2

20) El punto es $(0,0,-\frac{1}{2})$

21)

a) cartesianas paramétricas

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1+3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3+4t \end{cases}$$

b) cartesianas paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3-6\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1+5\lambda \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

d)simétricas

x = y =z

f) simétrica

x = -y = z

22) $\begin{cases} x = -4+t \\ y = -3+2t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$

23)

a)perpendicular al plano xy

2x-y=6

b)perpendicular al plano xz

x+z=5

c)perpendicular al plano yz

y+2z=4

24) 13x-5y-z-24=0

25) punto de intersección P (1, 0,-1)

26) son concurrentes P (5, 6,-5)

27) k$\neq \dfrac{10}{3}$ y el punto es (2, 8,6)

28) -12x+9y-2z=0

29) $\begin{cases} x = 4+t \\ y = 3t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

30) $\hat{\alpha} = 12{,}55°$

31)

a) d=$\dfrac{\sqrt{181}}{5}$

b)d=$\dfrac{51}{5\sqrt{3}}$

32) d=$\dfrac{1}{\sqrt{11}}$

33)a) Proyección del punto A es $(\frac{39}{29},\frac{3}{29},\frac{-6}{29})$

b) $(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(2,47,22)$

34) k=-1 o k=3

35)a) β : x-3y+z+2=0

b) $(x,y,z) = (0,-1,0) + \lambda(3,-2,-3)$

UNIDAD TEMÁTICA II

MATRICES – DETERMINANTES

OBJETIVOS

- ✓ Resolver operaciones con matrices.
- ✓ Identificar matrices particulares.
- ✓ Calcular determinantes.
- ✓ Aplicar propiedades en el cálculo de determinantes

CONTENIDOS

Matrices. Definición. Igualdad. Adición. Propiedades. Multiplicación de una matriz por un escalar. Propiedades. Producto de matrices. Definición. Propiedades. Matrices especiales: triangular, diagonal, escalar, unidad, transpuesta – propiedades –, simétrica y antisimétrica – propiedades –, inversa, ortogonal.

Determinantes. Definición. Propiedades. Menor complementario y cofactor de un elemento de una matriz. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (Laplace). Matriz adjunta: aplicación al cálculo de la matriz inversa.

TRABAJO PRÁCTICO N° 2

MATRICES -DETERMINANTES

1) Escriba las siguientes matrices definidas en forma explícita

a) $A \in \mathbb{R}^{3x2}$ / $a_{ij} = j - i$

b) $B \in \mathbb{R}^{3x3}$ / $b_{ij} = (i-1)^{j}$

c) $C \in \mathbb{R}^{4x3}$ / $c_{ij} = \begin{cases} i+2j & si \quad i \le j \\ 0 & si \quad i > j \end{cases}$

d) $D \in \mathbb{R}^{4x4} / d_{ij} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{(i+j-1)\pi}{4}\right)$

2) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcule:

a) $A+3D$ b) $B-C^{t}$ c) A B d) D + B C e) $B^{t}B$

f) $E\ (A\ F)$ g) F E h) E F i) A^{2} j) D^{3}

3) Halle, si es posible, aplicando la definición la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

4) Analice si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique la respuesta.

a) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{nxn} : (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{nxn} : \ A^2 - B^2 = (A+B).(A-B)$

c) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{nxn} : \ A^2 - I = (A+I).(A-I)$

d) $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{nxn} : \ A.B = A.C \Rightarrow B = C$

e) $\forall\ A, B, C \in \mathbb{R}^{nxn} / \exists\ A^{-1} : A.B = A.C \Rightarrow B = C$

f) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$: A , B simétricas $\Rightarrow$ (A.B) simétrica

g) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$, $\forall\ k \in \mathbb{R}$: A , B simétricas $\Rightarrow$ (kA + B) simétrica

h) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$: A simétrica $\Rightarrow B^{t}AB$ simétrica

i) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$: A , B antisimétricas y conmutables $\Rightarrow (A.B)$ simétrica

j) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$: A , B ortogonales $\Rightarrow (A.B)$ ortogonal

5) Obtenga, sin efectuar cálculos, los siguientes determinantes. Enuncie las propiedades que aplica.

$$a)\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ -2 & 4 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

6) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$, demuestre que:

a) $\text{Det}(A.B) = \text{Det}(B.A)$

b) $\text{Det}(A.B) = 0 \Rightarrow \text{Det}(A) = 0 \vee \text{Det}(B) = 0$

c) $A.B = I \Rightarrow \text{Det}(A) \neq 0 \wedge \text{Det}(B) \neq 0$

d) A inversible $\Rightarrow \text{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{Det}(A)}$

e) B inversible $\Rightarrow \text{Det}(B^{-1}AB) = \text{Det}(A)$

7) a) Sea $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$, $|A| = -3$

Calcule aplicando propiedades: $\left|\frac{3}{4} A^{-1} B^t\right|$ siendo $B = \begin{pmatrix} A_1 - 3.A_3 & A_3 & -A_2 \end{pmatrix}$.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $|A| = k$, $k \neq 0$

Calcule aplicando propiedades: $\left|\frac{2}{3} B^{-1} A^2\right|$ siendo $B = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & A_3 - 2A_4 & A_3 & A_2 \end{pmatrix}$.

8) Halle los valores reales de k para los cuales las siguientes matrices son singulares:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} k-1 & -2 & 3 \\ 0 & k+2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-k \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix}$$

9) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Halle todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la matriz $A^t - \alpha I$ sea regular.

10) Halle las matrices adjunta e inversa (si existen) de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

11) Sea $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & k-1 & 2 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}$

a) Analice para qué valores de k, la matriz P es inversible.

b) Halle P^{-1} para k = 1

12) Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, indique qué valores puede tomar Det(A)

a) Si A es ortogonal ($A^{-1}=A^t$)

b) Si A es idempotente ($A^2 = A$)

c) Si A es antisimétrica y n es impar ($A=-A^t$)

13) Sean A , B , C $\in \mathbb{R}^{3x3}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$A = (A_1 \quad A_2 \quad A_3)$$
$$B = (0 \quad \alpha A_1 \quad 0)$$
$$C = (\beta A_2 \quad \alpha A_1 \quad 0)$$

Analice la validez de las siguientes proposiciones:

a) Det (A – B) = – Det(A)

b) Det(2B – A) = – Det(A)

c) Det(A + C) = Det(A)

d) Si $\alpha.\beta = 1$, entonces (A + C) no es inversible

14) Exprese cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales como una ecuación matricial de la forma A.X =B

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

15) Dado el sistema de ecuaciones lineales A.X = B, tal que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Analice si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique la respuesta.

a) $X = (2 \ \ 0 \ \ -1)^t$ es solución

b) $X = (-7 \ \ 2 \ \ 2)^t$ es solución

c) A es regular

d) El sistema posee infinitas soluciones

16) Estudie la compatibilidad y determine el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de eliminación de Gauss.

a) $\begin{cases} x-y-z=2 \\ 3x-3y+2z=16 \\ 2x-y+z=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ -4x-2y+2z=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y+z=2 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-y=6 \\ 2x+y-z+3t=4 \\ x+3y-2z+6t=2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-2y+t-w=0 \\ y-3z+t=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=0 \\ 2y+2t=1 \\ x-y-z-t=3 \end{cases}$

17) Resuelva el sistema homogéneo A X = N, cuya matriz de coeficientes es:

a) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

18) Dado el sistema $A.X=B$ / $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -3 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$

a) ¿Para qué valores de k el sistema tiene solución única?

b) ¿Para qué valores de k el sistema tiene infinitas soluciones?

c) ¿Para qué valores de k no existen soluciones?

d) Halle la solución del sistema homogéneo $A.X=N$

e) Halle la solución que corresponde al ítem b)

f) Interprete geométricamente los resultados de a) b) c)y d).

Respuestas

1)

a) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 8\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 0 & 6 & 8\\ 0 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

2)

a) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 12\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0 & -2 & -4\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ -1 & 14 & -4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}6 & -8\\ -3 & 20\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 20 & -6\\ 1 & -6 & 2\end{pmatrix}$

f) (-4)

g) $\begin{pmatrix}-4 & 8\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

h) (0)

i) $\begin{pmatrix}4 & 0\\ -5 & 9\end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix}-6 & -7\\ 14 & 15\end{pmatrix}$

3)

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

b) B no admite inversa

4)

a) F	b)F	c)V	d)F	e)V
f) F	g)V	h)V	i)V	j)V

5) Todos los determinantes valen cero

7)

a) $\frac{27}{64}$

b) $\frac{8}{81}k$

8)

a) Para k=-2 ó k=1 ó k=3 la matriz es singular

b)Para k=0 ó k=2 la matriz es singular

9)

La matriz es regular para $\alpha \neq -2 \wedge \alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq 4$

10)

a) $Adj(A) = -10.\ A^{-1}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

b) $Adj(B) = -2.\ B^{-1}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $Adj(C) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ no existe C^{-1}

d)
$Adj(D) = a^3.D^{-1}$,

$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, a \neq 0$

11)a) P es invertible si $k \neq 2 \wedge k \neq -3$

b) $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

12)

a) $Det(A) = \pm 1$ b) $Det(A)=0$ ó $Det(A)=1$ c) $Det(A)=0$

13)

a) F b)V c)F d)V

14)

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

15)

a)V b)V c)F d)V

16)

a) Compatible determinado $S=\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$

b) Incompatible $S=\varnothing$

c) Compatible indeterminado $S=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\\-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}z\\z\end{pmatrix}, z\in R\right\}$

d) Compatible indeterminado

$$S=\left\{\begin{pmatrix}2+\frac{1}{5}z-\frac{3}{5}t & \frac{3}{5}z-\frac{9}{5}t & z & t\end{pmatrix}^T, z\in R, t\in R\right\}$$

e) Compatible indeterminado

$$S=\left\{\begin{pmatrix}2+6z-3t+w & 1+3z-t & z & t & w\end{pmatrix}^T, z\in R, t\in R, w\in R\right\}$$

f) Compatible indeterminado

$$S=\left\{\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2}-t & -\frac{3}{2} & t\end{pmatrix}^T, t\in R\right\}$$

17)

a) $S=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}z\\-\frac{8}{3}z\\z\end{pmatrix}, z\in R\right\}$ b) $S=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ c) $S=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}z\\-\frac{5}{3}z\\z\end{pmatrix}, z\in R\right\}$

d) $S=\left\{\begin{pmatrix}y-t & y & t & t\end{pmatrix}^T, y\in R, t\in R\right\}$

18)

a)nunca b)k=-2 c)$k\neq -2$ d)$\begin{cases}x=\frac{7}{3}z\\ y=\frac{z}{3}\end{cases}$ e)$\begin{cases}x=-\frac{2}{3}+\frac{7}{3}z\\ y=-\frac{2}{3}+\frac{z}{3}\end{cases}$

UNIDAD TEMÁTICA III

ESPACIO VECTORIAL

OBJETIVOS

- ✓ Identificar los conjuntos de vectores geométricos, de polinomios y de matrices como estructuras de espacio vectorial.
- ✓ Relacionar los temas de Geometría Analítica con el concepto de subespacio vectorial
- ✓ Aplicar los conocimientos adquiridos sobre independencia lineal al estudio del rango de una matriz.
- ✓ Adquirir destreza en el manejo del álgebra lineal para estructurar el ingreso de datos a una computadora

CONTENIDOS

Espacio vectorial real (plano geométrico, espacio geométrico, polinomios, matrices). Combinación lineal de vectores. Subespacio vectorial. Definición. Ejemplos. Enunciado de la condición suficiente. Dependencia e independencia lineal de un conjunto de vectores. Sistema de generadores. Base y dimensión de un espacio vectorial. Cambio de base. Espacios fila y columna de una matriz. Rango de una matriz. Método de Gauss-Jordan para determinación del rango. Inversión de matrices por Gauss-Jordan. Operaciones con subespacios. Complemento ortogonal.

TRABAJO PRÁCTICO N° 3

ESPACIOS VECTORIALES

1) Indique cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son subespacios y represente en el plano. Fundamente su respuesta.

   $A= \{(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_1=0\}$

   $B= \{(x_1, x_2)\in \mathbb{R}^2 / 2x_1 +3x_2=0\}$

   $C= \{(x_1, x_2)\in \mathbb{R}^2 / 3x_1 -2x_2 -3 =0\}$

   $D= \{(x_1, x_2)\in \mathbb{R}^2 / x_1 \leq 0\}$

2) Analice cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios e interprete geométricamente:

   $A= \{(x_1, x_2, x_3)\in \mathbb{R}^3 / x_1=2x_3 \wedge x_2 = x_1-3 x_3\}$

   $B= \{(x_1, x_2, x_3)\in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - 3x_2+ 4 x_3 = 0\}$

   $C= \{(x_1, x_2, x_3)\in \mathbb{R}^3 / x_1+x_2 = 2\}$

   $D= \{(x_1, x_2, x_3)\in \mathbb{R}^3 / x_1^2- 4x_3^2 = 0\}$

3) Analice en cada caso si $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ .Justifique la respuesta.

   a) $\mathbb{V}= \mathbb{R}^4$, $W =\{X \in\mathbb{R}^4 / x_1+x_2-x_4= 0\}$

   b) $\mathbb{V}= \mathbb{R}^n$, $W =\{X\in\mathbb{R}^n / x_1= x_n\}$

   c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2x2}$, $W= \{A \in\mathbb{R}^{2x2}$ A es singular$\}$

   d) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{3x3}$, $W= \{A \in\mathbb{R}^{3x3} /$ traza$(A)=0\}$

4) Analice en cada caso si $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$. Justifique la respuesta.

   Sea $\mathbb{V}=P_n = \{ p/ p=0$ ó $gr(p)\leq n\}$

(p es el polinomio nulo o su grado es menor o igual que n)

   a) $\mathbb{V}= P_2$, $\mathbb{W}= \{p \in P_2 / a_0+ a_1-2a_2=0 \}$

   b) $\mathbb{V}= P_4$, $\mathbb{W}= \{p \in P_4 / p=0$ ó $gr(p)= 2\}$

   c) $\mathbb{V}= P_3$, $\mathbb{W}= \{p\in P_3 / a_0- a_1+a_2= 0 \wedge 2a_2 - a_3 =0\}$

   d) $\mathbb{V}= P_2$, $\mathbb{W} = \{p\in P_2 / p (-2) = 0\}$

5) a)Determine si $\vec{a}$ =(1,-1,3) es combinación lineal de los vectores $\vec{b}=(2,0,2)$ y $\vec{c}=(1,-1,1)$

b) Exprese al polinomio p(t)= t^2+ 4 t - 3 como combinación lineal de los polinomios del conjunto {t^2-2t+5, 2t^2-3t, t+3}

c) Halle k∈$\mathbb{R}$ tal que (1, 2, 0) es combinación lineal de

{(2,1,-1) ,(2,1+k, k) ,(2,2,1)}.

6) Estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

a) {(1,1), (2,5), (3,0)} $\subset \mathbb{R}^2$

b) {(0, 2,-3,1,0)} $\subset \mathbb{R}^5$

c) {(1, 2, 3), (-1, 0,1), (0, 2,4)} $\subset \mathbb{R}^3$

d) {x^3+ 3x, 3x, 2x^3+4x} $\subset \mathbb{P}_3$

e) {(0, 0, 0,0)} $\subset \mathbb{R}^4$

f) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2x2}$

7) Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \right\}$, determine los valores reales de k para los cuales el conjunto B es linealmente independiente.

8) Analice el valor de verdad de las siguientes propocisiones, en caso de ser verdaderas demostrarlas, si son falsas dar un contraejemplo.

a) Si $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, entonces $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ es l.i.

b) Si u, v, w son vectores de V tales que {u,v} es l.i. ,{u,w} es l.i. y{v,w} es l.i., entonces {u,v,w} es l.i. en V.

c) Si {u,v,w} es un conjunto de vectores l.i. de V, entonces {u+v,v+w,w}es li en V

9) Interprete geométricamente el subespacio $\mathbb{S}$ =gen(A) e indique en cada caso si $\vec{v} \in \mathbb{S}$.

a) A= {(1, 2, 3), (0, 1, 1)} $\vec{v}$= (-2,-1,-3)

b) A= {(1, 2), (1, 1)} $\vec{v}$= (3,4)

c) A= {(1,-1,-2), (-2, 2, 4)} $\vec{v}$=(3,-3,6)

d) A= {(-3, 1,-1), (-1, 5, 3), (1, 2, 2)} $\vec{v}$= (-5,1,4)

10)a) Halle el subespacio W de $\mathbb{R}^{2x2}$ generado por $A=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

b) Halle el subespacio W de $\mathbb{P}_2$ generado por $A = \{-3x, x^2 + x + 1\}$

11) En cada caso determine si $\mathbb{S}$ es una base para $\mathbb{V}$.

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}=\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0), ((1,0,-1,1)\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{P}_2$, S= $\{x+1, x, x^2-x\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2x2}$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

d) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{3x1}$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$

12) a) Demuestre que B =$\{(1, 1, 0), (0, 1, 1),(1, 0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

b) Encuentre las coordenadas de (1, 2,-1) en la base B.

13) a) Pruebe que B = $\{x^3-3x^2+3x-1, x^2-1, x-1, 1\}$ es una base de $\mathbb{P}_3$

b) Determine las coordenadas de $2x^3-3x^2+4$ en la base B.

14) Determine una base y la dimensión de los subespacios de los ejercicios 1, 2, 3a) y 4 d).

15)a) Estudie si los siguientes subconjuntos son subespacios de $\Re^{nxn}$

i) $S_1=\{A \in \mathbb{R}^{nxn}$ /A es diagonal$\}$

ii) $S_2=\{A \in \mathbb{R}^{nxn}$ /A es simétrica$\}$

iii) $S_3=\{A \in \mathbb{R}^{nxn}$ /A es antisimétrica$\}$

iv) $S_4=\{A \in \mathbb{R}^{nxn}$ /A es ortogonal$\}$

b) Cuando sea posible, obtenga base y dimensión para n = 2 y n = 3.

16) Sea $\mathbb{S} = \{X \in \Re^{3x1} / AX = N\}$, siendo $A \in \mathbb{R}^{3x3}$.

a) Demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{R}^{3x1}$ cualquiera sea la matriz A.

b) Para $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, halle una base y la dimensión de $\mathbb{S}$

17) Sean en $\mathbb{V}$ los subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, halle una base y la dimensión de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$:

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1-x_2+x_3=0\}$

$\mathbb{T}=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1+2x_2+x_3=0\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1-x_2-3x_3=0\}$

$\mathbb{T}=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1+x_2-x_3=0;\ x_1-x_2=0\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \ x_1-x_2-x_3+x_4=0,\ x_1-2x_2-x_3=0\}$

$\mathbb{T}=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \ x_1+2x_2-2x_3+x_4=0\}$

d) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2x2}$, $\mathbb{S}=\{A \in \mathbb{R}^{2x2} \,/\, A \text{ es diagonal}\}$,

$T=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

18) Determine una base y la dimensión de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ para los subespacios del ejercicio anterior.

Indique en cada caso si $\mathbb{V}=\mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$.

19) Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ subespacios de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{S}_1=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \ x_1=0;\ x_2=2x_3\}$

$\mathbb{S}_2=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \ x_1-x_2=0;\ x_3=0\}$

Determine un subespacio $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, tal que $\mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{S} \wedge \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}=\mathbb{R}^3$

20) Sean los subespacios $\mathbb{V}=\text{gen}\{(0, 1, -2), (1, 1, 0)\}$,

$\mathbb{W}=\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x+h\,y-z=0\}$ y $\mathbb{S}=\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \dfrac{x}{(h^2-4)}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}\}$.

Halle, si es posible, los valores de h de modo que $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}=\mathbb{S}$

21) Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que:

$\mathbb{S}_1 = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / 3x_1-x_2+kx_3=0;\ 2x_1+x_2=0\}$

$\mathbb{S}_2 = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1+3kx_2-x_3=0\}$

a) Halle todos los valores reales de k tales que $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_2$.

b) ¿Para qué valores de k es $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}^3$?

22) Dados los siguientes subespacios, halle el complemento ortogonal, una base del complemento ortogonal y su dimensión

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}=\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1+2x_2-3x_3=0\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}=\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1+2x_2-4x_3=0;\ x_2-4x_3=0\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\in\mathbb{R}^4 / x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\ x_1+x_2-x_3=0\}$

d) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}=\text{gen}\{(-1,2,3,-2),(2,-3,-1,3),(0,1,5,-1)\}$

23) Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$ tales que:

$\mathbb{S}=\text{gen}\{(1, 1, -1, 2)\}$

$\mathbb{T}=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\in\Re^4 / x_1+2x_2-x_4=0;\ x_3+x_4=0\}$

Determine $\mathbb{S}^\perp \cap \mathbb{T}$.

Respuestas

1)

a) Es subespacio	b) Es subespacio	c)no es subespacio	d)no es subespacio

2)

a) Es subespacio	b) Es subespacio	c)no es subespacio	d)no es subespacio

3)

a) Es subespacio	b) Es subespacio	c)no es subespacio	d)Es subespacio

4)

a) Es subespacio	b) No es subespacio	c)Es subespacio	d)Es subespacio

5) a) no es combinación lineal

b) $t^2+4t-3 = \mathbf{-3}(t^2-2t+5)+\mathbf{2}(2t^2-3t)+4(t+3)$

c) Es combinación lineal si $k\neq 1$

6)

a)ld	b)li	c)ld	d)li	e)ld	f)ld

7) $k \neq -1$

8)

a) F b) F c)V

9)

a)$\mathbb{S}$ genera un plano y $\vec{v} \in \mathbb{S}$. b) $\mathbb{S}$ genera $\mathbb{R}^2$ y $\vec{v} \in \mathbb{S}$.

c) $\mathbb{S}$ genera una recta en el espacio , $\vec{v} \notin \mathbb{S}$. d) $\mathbb{S}$ genera un plano en el espacio, $\vec{v} \notin \mathbb{S}$.

10)a)$\mathbb{S}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} / b = c = d\right\}$ b) $\mathbb{S}=\{p\in\mathbb{P}_2/a_2=a_0\}$

11)

a)no es una base b)es una base c) no es una base d) es una base

12) b) $[(1 , 2, -1)]_B= (2, 0, -1)$

13) b) las coordenadas son 2, 3,-6 y 3.

14) 1)

a) A= gen{(0,1)}, dim A=1 b) B=gen{(-3,2)}, dim B=1

2)

a) A= gen{(-2,1,-1)}, dimA=1 b) B=gen{(3,2,0),(-2,0,1)}, dim B=2

3) a)$\mathbb{W}$=gen{(1,0,01),(0,1,0,1),(0,0,1,0)}

dim$\mathbb{W}$=3

4) d) $V = \text{gen}\{x^2 - 4, x + 2\}$, dim V= 2

15)a)

i) es subespacio ii) es subespacio iii) es subespacio iv) no es subspacio

b)

i) para n=2 la base es

$\mathbb{S}_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y dim $\mathbb{S}_1$=2

ii) para n=2 la base es

$\mathbb{S}_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y dim $\mathbb{S}_2$=3

Para n=3 la base es

Para n=3 la base es

$\mathbb{S}_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$ y dim $\mathbb{S}_1=3$

$\mathbb{S}_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$ y dim $\mathbb{S}_2=6$

iii) para n=2 la base es

$\mathbb{S}_3=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$ y dim $\mathbb{S}_3=1$

Para n=3 la base es $\mathbb{S}_3=\left\{,\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right\}$ y dim $\mathbb{S}_3=3$

16)

b) $\mathbb{S}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}5\\-11\\7\end{pmatrix}\right\}$, dim $\mathbb{S}=1$

17)

a) $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\text{gen}\{(-3,-1,5)\}$, dim$\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=1$

b) $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\{(0,0,0)\}$, dim$\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=0$

c) $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\text{gen}\{(-5,-1,-3,1)\}$, dim$\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=1$

d) $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\right\}$ dim$\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=1$

18)

a) $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{R}^3$ no es suma directa

b) $\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}=\mathbb{R}^3$ es suma directa

c) $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{R}^4$ no es suma directa

d) $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}\right\}$

no es suma directa

19) $\mathbb{S}=\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1- x_2- x_3=0\}$

20) h=3

21)

a) k=1 ó $k=-\frac{5}{6}$

b) $\mathbb{R}-\{1, -\frac{5}{6}\}$

22)

a) $\mathbb{S}^{\perp}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1=\frac{x_2}{2}=\frac{x_3}{-3}\}$

$\dim\mathbb{S}^{\perp}=1$

b) $\mathbb{S}^{\perp}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / -4x_1+4x_2+x_3=0)\}$

$\dim\mathbb{S}^{\perp}=2$

c) $\mathbb{S}^{\perp}=\text{gen}\{(1,1,-1,0),(0,0,-3,1)\}$, $\dim\mathbb{S}^{\perp}=2$

d) $\mathbb{S}^{\perp}=\text{gen}\{(-7,-5,1,0),(0,1,0,1)\}$, $\dim\mathbb{S}^{\perp}=2$

23) $\mathbb{S}^{\perp}\cap\mathbb{T}.=\text{gen}\{(-7,4,-1,1)\}$

UNIDAD TEMÁTICA IV

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

OBJETIVOS

- ✓ Resolver sistemas de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta el estudio del rango de una matriz
- ✓ Analizar la compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales.
- ✓ Relacionar los conocimientos adquiridos en espacio vectorial con el estudio de la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones.
- ✓ Aplicar la resolución de sistemas de ecuaciones en problemas concretos.

CONTENIDOS

Sistemas de Ecuaciones Lineales: definición. Forma matricial: solución. Estudio de compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales: teorema de Rouché-Frobenius. Resolución por los métodos: inversión de matrices, Gauss-Jordan, Regla de Cramer.

TRABAJO PRÁCTICO N° 4

RANGO Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) Halle el rango de las siguientes matrices mediante el método de Gauss – Jordan.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 4 & 1 & -6\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2 & -1\\ 4 & 4 & -3 & 1\\ 2 & 7 & 1 & 8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 6\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

2) Halle, si existe, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices mediante el método de Gauss – Jordan.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 4 & 1 & -6\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -3\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

3) a) Calcule $h\in\mathbb{R}$, para que el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2h+1 & 1\\ -1 & -5 & h\end{pmatrix}$ sea 2.

b) ¿Es inversible la matriz A, para $h = -1$?

4) Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $b_1=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$, $b_3=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$

Encuentre A^{-1} y utilícela para resolver los sistemas $A.X=b_1$, $A.X=b_2$ y $A.X=b_3$

5) Halle el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada de los siguientes sistemas. A partir de los resultados obtenidos determine la compatibilidad de los y resuelva cuando sea posible:

a) $\begin{cases}x+2y-3z=9\\ 2x-y+z=0\\ 4x-y+z=4\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+2y+z=3\\ 2x+y+z=2\\ -x+y=3\end{cases}$

c) $\begin{cases}x+2y-z=3\\ 2x+3y+z=1\end{cases}$

d) $\begin{cases}-x-y+2z+w=1\\ -2x-y+3z+2w=3\\ x-y-w=-3\end{cases}$

6) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Halle el espacio solución del sistema $A.X = N$, una base y su dimensión.

b) Obtenga una base del subespacio columna de la matriz A.

7) Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - ky = 0 \\ y + kz = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

a) Obtenga los valores reales de k para los cuales el sistema es compatible indeterminado.

b) Para los valores de k hallados encuentre una base y la dimensión del espacio solución del sistema.

8) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ k-1 & 1-k & k^2-1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de k para los cuales el sistema $A\,X = N$ admite infinitas soluciones.
b) Halle los valores de k para los cuales la dimensión del espacio solución del sistema $A\,X = N$ es 2.
c) Halle los valores de k para los cuales la dimensión del espacio columna de la matriz A es 2.

9) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + ay + 2z = -b \\ x - 2y + 3z = -4 \end{cases}$

a) Halle los valores de a y b para que el sistema tenga: única solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

b) Para $a = -1$ y $b = 2$, exprese el conjunto solución como combinación lineal de una solución particular y la del sistema homogéneo asociado.

10) Sean $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ dos soluciones particulares del sistema $A.X = B$.

a) Obtenga una solución particular del sistema homogéneo asociado.
b) Halle otra solución del sistema $A.X = B$ distinta de las dadas.

11) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ -x - 2y - z - 1 = 0 \\ 3x + 6y + 3z = -3 \end{cases}$$

a) Exprese el conjunto solución como combinación lineal de una solución particular y la del sistema homogéneo asociado.

b) Sea S el espacio solución del sistema homogéneo asociado al sistema dado. Halle un sistema de ecuaciones homogéneo cuya solución sea $S^{\perp}$.

Respuestas

1)
a) rango(A)=2 b) rango(B)=2 c) rango(C)=3

2) $A^{-1} = \begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ B no admite inversa $C^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -\frac{3}{2} \\ -5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3)a) h=1ó $h=\frac{3}{2}$ b) sí

4)
a) $X=\begin{pmatrix}4\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}-5\\ 2\end{pmatrix}$ c) $X=\begin{pmatrix}6\\ -2\end{pmatrix}$

5)
a) Sistema compatible determinado
x=2, y=5, z=1

b) Sistema incompatible

c)Sistema compatible indeterminado
$x = -7-5z$, $y = 5+3z$, $z \in R$

d)Sistema compatible indeterminado
$x = -2 + z + w, y = 1 + z, z \in R, w \in R$

6) a) S= gen{(2,0,1), dimS=1 b) $B_{Sc}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ dimSc=2

7)a) k=-1 b) B_S={(-1,1,1)}, dimS=1

8) a) para todo valor de $k\in R$ el sistema admite infinitas soluciones.
b) k=0 ó k=1
c) $k\in R$ -{0,1}

9)a) Si a=-1 y b=2 el sistema tiene infinitas soluciones, si a=-1 y $b\neq 2$ el sistema no tiene solución, si $a\neq -1$ el sistema tiene única solución

b) S= {(-1,3,1)+λ(-1,1,1) ,$\lambda\in$ R }

10)a) $S_p=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ b) por ejemplo $S_3=\begin{pmatrix}3\\4\\11\end{pmatrix}$

11) a)S = {(1,0,-2) +a(1,0,-1)+b(0,1,-2), $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$}
b) $\begin{cases} x-z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$

UNIDAD TEMÁTICA V

TRANSFORMACIONES LINEALES

OBJETIVOS

- ✓ Comprobar que una transformación es lineal.
- ✓ Determinar el núcleo y la imagen de una transformación lineal.
- ✓ Aplicar los conocimientos adquiridos para el estudio de la matriz asociada a una transformación lineal respecto de distintas bases.
- ✓ Interpretar geométricamente transformaciones lineales

CONTENIDOS

Definición y ejemplos. Propiedades de las transformaciones lineales: recorrido y núcleo. Representación matricial de una transformación lineal. Transformaciones lineales geométricas: transformación identidad, proyección, simetría, dilatación y contracción, rotación. Transformaciones no lineales: traslación.
Clasificación de transformaciones lineales .Transformaciones lineales inversas.
Composición de transformaciones lineales.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

TRANSFORMACIONES LINEALES

1) Determine cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (x, -y)$

b) $T: \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R} / T(A) =$ rango A

c) $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R} / T(p(x)) = p(0)$

d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / T(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{a}$, donde $\vec{a}$ es un vector fijo de $\mathbb{R}^3$

e) $T: \mathbb{V} \to \mathbb{V} / T(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{a}$, donde $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) es un vector fijo de $\mathbb{V}$

f) $T: \mathbb{R}^{nxn} \to \mathbb{R}^{nxn} / T(A) = A + A^t$

2) Sea $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Pruebe:

a) $F(0_v) = 0_w$

b) $F(-v) = -F(v)$,para todo $v \in \mathbb{V}$

3) Si $T: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal, determine $T(v)$ y $T(w)$, tales que $T(v+2w)=3v-w$ y $T(v-w)= 2v-4w$

4) Sea $C = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$. Considere una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 /$
$T(v_1) = (1, 1, 1)$, $T(v_2) = (0, -1, 3)$ y $T(v_3) = (2, 5, -7)$.

a) Analice la existencia y unicidad de T para los siguientes casos:

i) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (2, -1, 2)$.

ii) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.

iii) $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 0)$.

b) Para aquellos casos en que T existe y es única obtenga la expresión analítica de T.

c) ¿Qué condiciones debe cumplir el conjunto C para que respetando las asignaciones hechas a los vectores v_1, v_2 y v_3 T exista y sea única ?

5) Halle una transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verifique $T(1,2)=(3,-1)$ y $T(0;-1) = (1,5)$
¿Es única? Justifique

6) Sea $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3 / T(x^2) = x^3$, $T(x+1) = 0$, $T(x-1) = x$, obtenga $T(2-x+4x^2)$

7) Determine una aplicación lineal $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^{2x2}$ tal que

$$T(1+x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; T(2x+x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } T(-1-x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8) Halle la expresión analítica de cada una de las siguientes transformaciones ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$):

a) simetría respecto de la recta y =3x

b) rotación de un ángulo de $-\frac{\pi}{3}$

c) proyección sobre la recta y =-x

9) Halle la expresión analítica de cada una de las siguientes transformaciones ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$):

a) reflexión respecto del plano x=y

b) reflexión respecto del plano y+z=0

10) Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, demuestre que:

a) el Nu(T) es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$

b) la Im(T) es un subespacio vectorial de $\mathbb{W}$

11) Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^{nxn} \to \mathbb{R}^{nxn} / T(A)= A - A^t$, demuestre que:

a) el Nu(T) está formado por matrices simétricas

b) la Im(T) está formado por matrices antisimétricas

12)(Relacionado con ej.n°6 de Sistemas) Dada la transformación lineal:

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (x + 2y - 2z, y - 2x + 4z, -x + 3y + 2z)$.

a) Obtenga una base del Nu (T) e indique su dimensión.

b) Obtenga una base de Im (T) e indique su dimensión.

13) Si $T: \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R} / T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+b-c-d$ encuentre una base del Nu(T) y de la Im(T)

14) Encuentre una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / Nu(T) = $\mathbb{S}$ y la Im(T)=$\mathbb{W}$, siendo

$\mathbb{S} = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ y $\mathbb{W}$ =gen{(2,-1,0),(0,1,-2)}

15) Encuentre una transformación lineal $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ / Nu(T)= $\mathbb{S}$ siendo $\mathbb{S} = \begin{cases} x + y = 0 \\ z - w = 0 \end{cases}$

16) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal cuyo Nu(T)= {(x, y, z) /x=2y=-z}

Demuestre que la imagen de T es un plano que pasa por el origen.

NOTA: Clasificación de las transformaciones lineales

$F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformaciones lineales

F es monomorfismo (= inyectiva) sii $Nu(F) = \{ 0_V \}$
F es epimorfismo (= sobreyectiva) sii $Im(F) = W$
F es isomorfismo (= biyectiva) sii es monomorfismo y epimorfismo.

17) Pruebe que : la transformación lineal identidad $Id: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es biyectiva.

18) Demuestre que $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal inyectiva si y sólo si es sobreyectiva

19) (Relacionado con ej.n°8 de Sistemas)Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ /

$T(x, y, z) = (-2x + 2y - 2z, (k-1)x + (1-k)y + (k^2 - 1)z, -x + y - z)$

a) Halle los valores de k para los cuales T es <u>no</u> inyectiva.
b) Halle los valores de k para los cuales la dimensión de Nu (T) = 2
c) Halle los valores de k para los cuales la dimensión de Im (T) = 2.

20) Clasifique la transformación lineal definida por $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^{2x2}$ /$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+c \end{pmatrix}$.

21) Para cada una de las transformaciones lineales halle la matriz asociada respecto de las bases canónicas.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (x + 2y, -x + y)$
b) $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3 / T(a+bx+cx^2)=(a-c,2b,a+c)$
c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / T(x, y, z)=(3x+4y+z,2x+5y+3z,x+2y+z)$

22) Sea $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ / tal que su matriz asociada respecto de las bases canónicas es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & a & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ indique los valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que:

a) rang(A)=2
b) T sea inyectiva

23) Sea el subespacio $\mathbb{S} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2k & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Obtenga, si es posible, los valores de k para los cuales se puede definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^3$ tal que T sea un epimorfismo y $Nu(T) = \mathbb{S}$.

b) Para k = 0, halle la expresión analítica de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^3$ tal que

$Nu(T) = \mathbb{S}$, $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

¿Queda T bien definida ? Justifique su respuesta.

24) Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta (demuestre la proposición si es verdadera y exhiba un contraejemplo si es falsa).

Sea T: $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, siendo $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita:

a) Si $\dim\mathbb{V}=5$ y $\dim \mathbb{W}=3$ y $\dim Nu(T)=2$, entonces T es sobreyectiva.

b) Si $\dim\mathbb{V}=5$ y $\dim \mathbb{W}=4$, entonces T no es inyectiva.

c) Si T es inyectiva, entonces $\dim \mathbb{V} \leqslant \dim\mathbb{W}$.

d) Si $\dim\mathbb{V}=3$ y $\dim \mathbb{W}=5$, entonces T es sobreyectiva.

e) Si $\dim\mathbb{V}=3$ y $\dim \mathbb{W}=7$, entonces el rango de la matriz asociada a T está comprendido entre 3 y 7.

25) Indique si las transformaciones del ejercicio 21) admiten transformación inversa, si es así determine la expresión analítica para T^{-1}.

26) Siendo las transformaciones lineales $T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ /$T_1(x,y,z)=(x-y,x+z)$ y $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ /$T_2(x,y)=(x, y , x-y)$. Encuentre las expresiones analíticas de $T_1 \circ T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ .Verifique usando las operaciones entre las matrices asociadas a cada una de las transformaciones lineales respecto de las bases canónicas.

27) Siendo las transformaciones lineales $T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ /$M_{EE} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y

$T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $M_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre el $Nu(T_1 \circ T_2)$, la $Im(T_1 \circ T_2)$ y $Nu(T_1 \circ T_2^{-1})$

28) Halle $M(\mathbf{Id})_{B1B2}$

a) Si $B_1 = \{(2,1),(1,-2)\}$ y B_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Si B_1 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B_2=\{(3,0,0),(-1,1,0),(1,-1,1)\}$

c) Si $B_1=\{(3,0,0),(-1,1,0),(1,-1,1)\}$ y $B_2=\{(1,2,-1),(1,-1,0),(0,-1,2)\}$

29) Sean B_1 y B_2 bases de R^2 tales que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

a) Si $[u]_{B1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcule $[u]_{B2}$.

b) Si $[v]_{B2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcule $[v]_{B1}$.

c) Sea $B_1 = \{ (1, 0) , (1, -1) \}$. Obtenga la base B_2. ¿Es única?

30) Halle la matriz asociada a la transformación lineal $T:\mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $/T(a+bx+cx^2)=(a+c,3b)$ respecto de las bases: a) $B_1=\{1,x, x^2\}$, $B_2=\{(-1,1),(1,0)\}$
b) $B_1=\{x^2+x,-x+1,3\}$ y $B_2=\{(-1,1),(1,0)\}$

31) Sea la transformación lineal $\mathbf{T}$: $\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada es $M(\mathbf{T})_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Si $B = \{ 1 , x \}$ y $B' = \{ (1, 0, 0) , (1, 1, 1) , (0, 0, 1) \}$
halle todos los $p \in \mathbb{P}_1$ tales que $T(p) = (2, 1, 0)$

32) Sea una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $/T(x,y,z)=(x+z,-2x+y+z,-3y)$:

a) Encuentre la matriz asociada a dicha transformación lineal respecto de las bases: canónica de partida y la base $B=\{(3,0,3),(0,1,2),(0,0,-2)\}$ de llegada
b) Calcule $T(2,-1,1)$ verificando el resultado.

33) Si $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / M_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ siendo las bases $B= \{(1,1,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$,

$B' =\{(1,1,-1),(2,-1,0)(1,0,0)\}$,encuentre $a \in \mathbb{R} / T(1,2,3)= (4,2,1)$

34) Sea $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $/[T(x)]_{B2} = M_{B1B2}[x]_{B1}$. Halle la expresión analítica de la transformación lineal, su núcleo, una base del núcleo y la dimensión de la imagen.

$B_1=\{(1,0,0),(0,2,0),(0,1,1)\}$; $B_2 =\{(2,0,0),(0,0,1),(0,-2,0)\}$, $M_{B1B2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Respuestas:

1)

a) es una transformación lineal

b)no es una transformación lineal

c) es una transformación lineal

d) es una transformación lineal

e)no es una transformación lineal

f) es una transformación lineal

3) $T(\mathbf{v})=\frac{7}{3}\mathbf{v}-3\mathbf{w}$; $T(\mathbf{w})=\frac{1}{3}\mathbf{v}+\mathbf{w}$

4)

a) i) T no es única

ii) T no existe

iii) T existe y es única

b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$T(x,y,z)=(2x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z, 5x+\frac{1}{3}y-\frac{4}{3}z, -7x+\frac{1}{3}y+\frac{8}{3}z)$

c) debe ser una base de $\mathbb{R}^3$

5) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ / $T(x,y)=(5x-y\ ;\ 9x-5y)$, es única

6) $T:\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_3$/ $T(ax^2+bx+c)=ax^3+\frac{b-c}{2}x$, $T(4x^2-x+2)=4x^3-\frac{3}{2}x$

7) $T:\mathbb{P}_2\to\mathbb{R}^{2x2}$/ $T(ax^2+bx+c)=\begin{pmatrix}\frac{-a+b+c}{3} & \frac{2a+b-2c}{3}\\ \frac{-a+b-2c}{3} & \frac{a+b-c}{3}\end{pmatrix}$

8) a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$/ $T(x,y)=(-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y)$

b) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$/$T(x,y)=(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y)$

c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ / $T(x,y)=(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2})$

9)

a) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$/$T(x,y,z)=(y,x,z)$

b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$/$T(x,y,z)=(x,-z,-y)$

12)

Nu(T)= gen{(2,0,1)} , dim Nu(T)=1 ; Im(T)={(1,0,1),(0,1,1)} , dim Im(T)=2

13)

$Nu(T)=gen\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\}$,dimNu(T)=3 ; Im(T)=gen{(1)} , dim Im(T)=1

14)

Una transformación lineal puede ser : $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$/$T(x,y,z)=(2x+z,-x+y-2z,-2y+3z)$

15)

Una transformación lineal puede ser : $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 / T(x,y,z,w)=(z-w,\ x+y\ ,\ 0)$

16) $Im(T) = \{(x,y,z)/x-z=0\}$ una solución posible

19) a) $k \in \mathbb{R}$ b) $k=0$ ó $k=1$ c) $k \neq 0$ y $k \neq 1$

20) T es un monomorfismo

21)

a) $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $M=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

22) a) $a = 1$ b) no existe a

23)

a) $k=1$

b) $T : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^3 / T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=(2a+4b+c+2d, a+2b+c+d, 3a+6b+3d)$

24)

a) V b) V c) V d) F e) F

25)

a) $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ b) $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2 / T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2 / T^{-1}(x, y, z)=\left(\frac{x+z}{2}+\frac{y}{2}t+\frac{z-x}{2}t^2\right)$

c) no existe T^{-1}

26)

$T_1 \circ T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ T_1 \circ T_2\,(x,y)= (x-y,2x-y)$

$T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ T_1 \circ T_2\,(x,y,z)=(x-y,x+z,-y-z)$

27)

$Nu(T_1 \circ T_2) = gen\{(0,-2,1)\}$ $Im((T_1 \circ T_2) =\{(1,0),(0,1)\}$, $Nu(T_1 \circ T_2^{-1})=gen\{(1,-1,1)\}$

28)

a) $M(\mathbf{Id})_{B1B2}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $M(\mathbf{Id})_{B1B2}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $M(\mathbf{Id})_{B1B2}=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & -1 & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

29)a) $[u]_{B_2}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $[u]_{B_1}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ c) $B_2=\{(1,-1),(0,-\frac{1}{2})\}$

30)

a) $M(\mathbf{T})_{B1B2}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $M(\mathbf{T})_{B1B2}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

31) $p(x) = -x+1$

32) $M_{EB}(T)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}_{EB}$

33) $a = -4$

34) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 / T(x,y,z)= (2x,-4x-y+z,\frac{3y-2z}{2})$, $\dim Nu(T)=0$

UNIDAD TEMÁTICA VI

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

OBJETIVOS

- ✓ Expresar las coordenadas de un punto y lugares geométricos en distintos sistemas de referencia
- ✓ Calcular autovalores y autovectores.
- ✓ Reconocer cuáles matrices se pueden diagonalizar
- ✓ Relacionar diagonalización con transformaciones lineales.

CONTENIDOS

Cambio de base. Matriz de cambio de base. Autovalores y autovectores. Definición. Polinomio característico. Subespacios propios. Propiedades. Matrices semejantes. Diagonalización.

TRABAJO PRÁCTICO N° 6
AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1)Sea los subespacios vectoriales

$\mathbb{S}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y=x\}$

$\mathbb{S}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x=0\}$

$\mathbb{S}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -5x=2y\}$

a) determine si permanecen invariantes respecto de la siguiente transformación lineal

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x,y)= (-2x-2y,-5x+y)$

b) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando la respuesta:

b1) $T(x,x)=-4(x,x)$

b2) $T(-2,5) = \lambda\,(-2,5)\ ,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

2) Sea una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z)= (x +y +3z, x+ 5y+ z, 3x+ y + z)$

encuentre los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ y de $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ / tales que $T(\vec{v}) = \lambda . \vec{v}$.

Indique si los valores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ encontrados determinan una base de $\mathbb{R}^3$, en caso afirmativo halle dicha base.

3) Determine para cada una de las siguientes matrices : el polinomio característico, sus autovalores y autovectores.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) En cada caso indicar si la matriz A es diagonalizable. Si lo es encontrar la matriz P tal que $P^{-1}.A.P$ sea diagonal

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5) Demuestre las siguientes propiedades para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

a) $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Leftrightarrow A$ no es inversible

b) Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal

c) A y A^t tienen el mismo polinomio característico(y por lo tanto, los mismos autovalores)

6) Si A y P son matrices cuadradas, tal que P es no singular. Demuestre que las matrices A y B tienen el mismo polinomio característico siendo $B = P.A.P^{-1}$

7)Demuestre que si λ es un autovalor de una matriz idempotente entonces $\lambda=0$ o $\lambda=1$
(Nota Una matriz cuadrada A es idempotente si y sólo si es $A^2 = A$)

8) Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, tal que una por lo menos de ellas es no singular , pruebe que A.B y B.A tienen los mismos autovalores.

9) Si la transformación lineal T es una reflexión sobre el plano z = 0, determine una base formada por los autovectores de T y encuentre la matriz asociada a T respecto a la base de autovectores.

10) Sea una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $T(x,y,z)=(2x-3y + 5z , -y + 5z ,4z)$

a) Si es posible ,halle una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $M_B(T)$ sea diagonal.

b) Halle otra transformación lineal distinta de la dada que tenga los mismos autovalores que T.

11) Analice la validez de las siguientes proposiciones para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

a) Si A tiene n autovalores distintos es diagonalizable
b) Si A es diagonalizable, entonces tiene n autovalores distintos
c) Los autovectores asociados a un mismo autovalor son siempre linealmente dependientes.
d) El número de autovalores distintos de una matriz es siempre menor o igual al grado del polinomio característico de dicha matriz
e) Si A es una matriz cuadrada y $\lambda = 3$ es uno de los autovalores , entonces el sistema de ecuaciones $(A-3I).\vec{x} = \vec{0}$ es compatible determinado

12) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a, b, c $\in\mathbb{R}$ para que $\lambda_1 = 1$ es un autovalor de A y tiene como autovector asociado a $\vec{v}_1 = (1,1,1)$
b) Analice si A es diagonalizable

13) Diagonalice ortogonalmente la matriz simétrica dada. Encuentre la matriz ortogonal P tal que $P^{-1}.A.P = P^t.A.P$

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

14) Sea $\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 2), (-1, 0, 1, 1)\}$

a)Defina, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente: $\mathbb{S}_1$ es autoespacio de T asociado al autovalor (-1) y dim (Nu T) = 2

b)Indique si existe una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores de T. En caso afirmativo, obtenga la matriz asociada a T respecto de dicha base.

Respuestas

1) a) $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_3$ b) V- F

2) {-2,3,6} {(-1,0,1),(1,-1,1) , (1,2,1)}

3)
a) {1,1}
{(1,0)}

b) {-1,-1,2}
{(-1,0,1),(-1,1,0),(1,1,1)}

c){1,1,3}
{(-1,0,1),(1,0,1)}

4)
a){-3,-3,8} es diagonalizable

$$P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b){-1,4,4}no es diagonalizable

9)T(x,y,z)= (x,y,-z) ;Autovectores B= {(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)} $M_{BB}(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10) Autovalores{-1,2,4} autovectores{(1,1,0),(1,0,0),(1,1,1)}

11)
a)V b)F c)F d)V e)F

12)a=b=-2, c=-3 , autovalores {-1,-1,1}
Autovectores{(1,0,1),(-1,1,0),(1,1,1)}

13)
a) autovalores {4,-1}
autovectores {(2,1),(-1,2)}

b) autovalores {2,0}
autovectores {(1,1),(1,-1)}

14) a) $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ / T(x,y,z,w)= (2z-w, z-w, -z, -w)

b)Autovalores{0,0,-1,-1};autovectores{(0,1,0,0),(1,0,0,0)}(1,1,0,1),(-2,1,1,0)}

Matriz asociada a T en base B: $$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

UNIDADES TEMÁTICAS VII y VIII
CÓNICAS Y SUPERFICIES

OBJETIVOS

- ✓ Identificar las cónicas, a partir de su ecuación canónica.
- ✓ Representar gráficamente las cónicas.
- ✓ Obtener los elementos principales de una cónica.
- ✓ Relacionar los conocimientos adquiridos sobre las cónicas al análisis de la ecuación de una superficie
- ✓ Identificar y graficar superficies.
- ✓ Discutir la existencia de un lugar geométrico.

CONTENIDOS

Unidad Temática VII: CÓNICAS

Definición de las cónicas como lugar geométrico. Elementos de las cónicas y construcción.
Ecuación general de segundo grado a dos variables: Estudio de los distintos casos.
Parametrización de cónicas.

Unidad Temática VIII: SUPERFICIES

Superficies. Estudio por secciones paralelas a los planos coordenados. Cuádricas con y sin centro. Ecuación general de segundo grado a tres variables: Análisis de los distintos casos.
Superficies regladas: conos y cilindros.
Curva en el espacio determinada por la intersección de superficies. Proyección de la curva intersección en los planos coordenados.

TRABAJO PRÁCTICO N° 7

Primera parte: CONICAS

1)Determine cuáles de las siguientes ecuaciones representan circunferencias

a) $x^2+y^2-6x+2y+36=0$

b) $x^2+y^2+8x+15=0$

c) $x^2+y^2-4x-4y+8=0$

2) Encuentre la ecuación de una circunferencia

a) si los extremos de uno de sus diámetros son (4,-3) y (-2,7)
b) con centro en el eje de abscisas y pasa por los puntos (2,3) y (6,-1).

3) Encuentre el foco y la directriz de la parábola de ecuación:

a) $6x=-4y^2$

b) $x^2-8y=0$

En cada caso, grafique la curva

4) Encuentre la ecuación de la parábola:

a) con vértice en (2,-3) y foco (2,-5).
b) con foco en (-3,-2) y directriz la recta x=1.

5) En cada una de las siguientes elipses encuentre las coordenadas de los focos y los vértices y grafique la curva:

a) $2x^2+3y^2=12$

b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

6) Encuentre la ecuación de la elipse, con centro en el origen:

a) si sus focos son $(0, \pm 2)$ y la longitud del eje mayor es 6.
b) si el semieje menor es 4, la distancia entre los focos es 15, el centro es (0,0) y los focos están sobre el eje de ordenadas.

7) En cada una de las siguientes hipérbolas encuentre las coordenadas de los focos, de los vértices y las ecuaciones de las asíntotas .Grafique la curva:

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

8) Encuentre la ecuación de la hipérbola, con centro en el origen:

a) si las coordenadas de los vértices son $(0, \pm 2)$ y las coordenadas de los focos $(0, \pm 3)$.

b) las asíntotas son $y = \pm \frac{1}{2} x$ y los focos tienen coordenadas $(\pm \sqrt{10}, 0)$.

9) Indique, si existe, el nombre de la cónica, **el centro o vértice de la misma** y la **ecuación de la traslación** efectuada para obtener su ecuación canónica.

a) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$

b) $x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$

c) $4x^2 - 16x - 9y^2 + 18y + 7 = 0$

d) $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6y + 17 = 0$

f) $y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$

10) Demuestre que una ecuación de la forma $ax^2 + by = 0$, con a y b números reales no nulos es la ecuación de una parábola con vértice en (0,0) y eje de simetría en el eje y.

11) Encuentre las condiciones para que una ecuación de la forma $ax^2 + bx + cy + d = 0, a \neq 0$, represente:

a) una parábola.
b) dos rectas verticales.
c) una recta vertical.
d) no tenga representación gráfica.

12) Dada la ecuación $y^2 + ax^2 = x$
Identifique para que valores de **a** queda determinada una elipse o una hipérbola.

Respuestas

1)

a)no tiene gráfica

b) centro O (-4,0)
radio r=1

b) representa el punto (2,2)

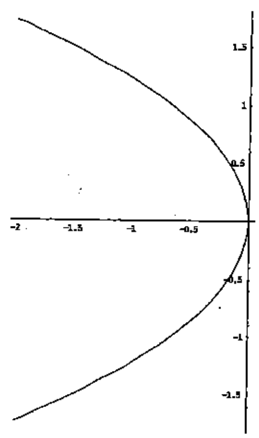
2)

a) $(x-1)^2+(y-2)^2=34$

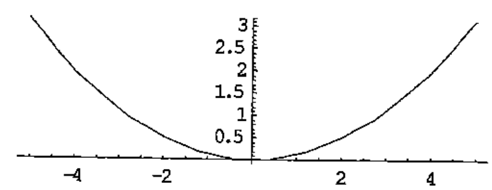
b) $(x-3)^2+y^2=10$

3)

a) foco $F(-\frac{3}{8},0)$ directriz $x=\frac{3}{8}$



b) foco F(0,2) directriz y= -2



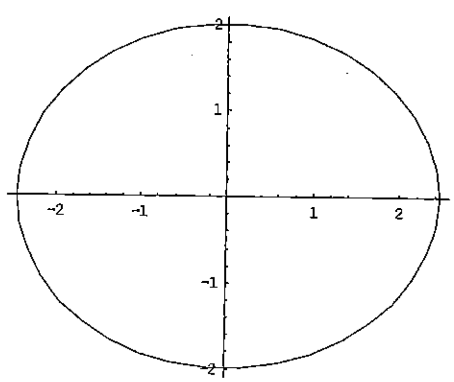
4)

a) $(x-2)^2=-8(y+3)$

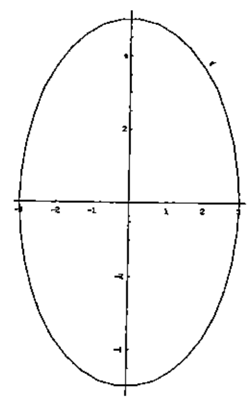
b) $(y+2)^2=-8(x+1)$

5)

a) focos $F(\pm\sqrt{2},0)$ vértices $A(\pm\sqrt{6},0)$



b) focos $F(0,\pm 4)$ vértices $A(0,\pm 5)$

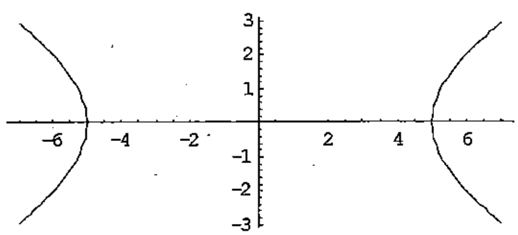


6)

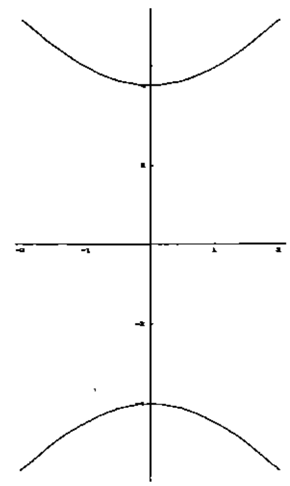
a) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ b) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{4y^2}{289}=1$

7)

a)Vértices $(\pm 5,0)$; asíntotas $y=\pm\dfrac{3}{5}x$; focos $F(\pm\sqrt{34},0)$



b) Vértices $(0,\pm 4)$; asíntotas $y=\pm 2x$; focos $F(0,\pm 2\sqrt{5})$



8)

a) $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{5}=1$ b) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{2}=1$

9)

a)Elipse de centro centro (-3,1)

ecuación canónica $9(x+3)^2+16(y-1)^2=144$

traslación $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-1 \end{cases}$

b)Parábola con vértice (3,5)

ecuación canónica $(x-3)^2=-4(y-5)$

traslación $\begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y-5 \end{cases}$

c)par de rectas 2x-3y=1 ; 2x+3y=7

d) Hipérbola de centro centro (-2,-5)

ecuación canónica $4(y+5)^2-(x+2)^2=36$

traslación $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+5 \end{cases}$

e) no hay lugar geométrico

f)Parábola con vértice $(2,1)$

traslación $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

11)

i)	ii)	iii)	iv)
$c \neq 0$	$c=0 \wedge b^2 - 4ad > 0$	$c=0 \wedge b^2 - 4ad = 0$	$c=0 \wedge b^2 - 4ad < 0$

12) Si $a>0 \wedge a \neq 1$ es una elipse, si $a<0$ es una hipérbola

Segunda parte: PARAMETRIZACIÓN

1) Halle las ecuaciones paramétricas de las siguientes curvas de R^2, indique el rango del parámetro

a) $x^2+y^2=x\ ,\ y\geq 0$

b) $x^2+2x+4y^2-8y=0, x\geq 0$

c) $4x^2-16x-y^2-8y=2$

d) $y+1=x^2-5x$

2) Halle la ecuación cartesiana que corresponde a la ecuación paramétrica y realice su gráfica.

a) $\begin{cases} x=4\ \text{sen}2t \\ y=4\cos 2t \end{cases} 0\leq t\leq \frac{\pi}{4}$

b) $\begin{cases} x=2\ \cos\alpha \\ y=3\ \text{sen}\alpha \end{cases}, 0\leq \alpha\leq \pi$

c) $\begin{cases} x=1-t \\ y=t^2 \end{cases}, -1\leq t\leq 1$

d) $\begin{cases} x=\sec\alpha \\ y=5\ \text{tg}\alpha \end{cases}, 0\leq \alpha\leq 2\pi, \alpha\neq \frac{\pi}{2}, \alpha\neq \frac{3\pi}{2}$

3) Halle una parametrización adecuada de la trayectoria de un punto que se mueve sobre la parábola $y^2=x+1,\ x\geq -1$, comenzando el movimiento en el punto (-1,0), moviéndose hacia la derecha y finalizando en el punto (3,2).

4) Un punto se mueve sobre un arco de curva $\overline{X}\in R^2, \overline{X}=(t,\sqrt{1-t^2}), |t|\leq 1$. Encuentre otra parametrización de dicho movimiento, tal que $t\geq 0$, comenzando por el punto (-1,0)

Respuestas.

1)

a)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha \end{cases}, 0 \le \alpha \le \pi$$

b)

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{5}\cos\alpha \\ y = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{sen}\alpha \end{cases}, 0 \le \alpha \le 2\pi$$

c)

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sec\alpha \\ y = -4 + \sqrt{2}\,\operatorname{tg}\alpha \end{cases}, 0 \le \alpha \le 2\pi \wedge \alpha \ne \frac{\pi}{2} \wedge \alpha \ne \frac{3\pi}{2}$$

d) $\begin{cases} x = \frac{5}{2} + t \\ y = t^2 - \frac{29}{4} \end{cases}, \forall t \in R$

2)

a) $x^2 + y^2 = 16, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y \ge 0$

c) $y = (-x+1)^2,\ 0 \le x \le 2$

d) $x^2 - \frac{y^2}{25} = 1$

3) $\overline{X} \in R^2$, $\overline{X} = (t^2 - 1, t), 0 \le t \le 2$

4) $\begin{cases} x = -\cos\varphi \\ y = \operatorname{sen}\varphi \end{cases},\ 0 \le \varphi \le \pi$

Tercera parte: SUPERFICIES

1) Analice si la ecuación dada corresponde a una superficie esférica, si lo es, indique el centro y radio

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 6z + 20 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x + 10y + 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 6 = 0$

2) Indique las condiciones que deben verificar a, b ,c ,d $\in$ para que

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ represente la ecuación de una superficie esférica.

3) Sean $L_1 : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$ y $L_2 : (x, y, z) = t(1,2,3) + (1,0,0)$

Obtenga la ecuación de la superficie esférica con centro en $L_1 \cap L_2$ y que es tangente al plano $\alpha :\ 2x - z + 3 = 0$

4) Indique, cuando sea posible, qué representan las siguientes ecuaciones en R^2 y R^3.

a) $x^2 - y^2 = z$
b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
c) $2x - y + z = 3$
d) $x^2 - 2y + 2x + 1 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$
f) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 4$
g) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - z = 0$
h) $-4x^2 - y^2 + 2z^2 - 8 = 0$
i) $x = 3$
j) $3x^2 + y^2 + z^2 = 9$

5) Dadas las siguientes superficies:

a) $y = x^2$.

b) $z = 3 + x^2 + y^2$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

d) $36x^2 - y^2 + 9z^2 = 144$.

e) $y^2 = 4x^2 + z^2$.

f) $x^2 - y^2 - z^2 = 4$.

g) $y^2 + z^2 = 9$

h) $z = x^2 - 3y^2$

i) Identifique y grafique cada una de ellas.

ii) Analice para qué valores de la constante $k / k \in R$, existe intersección con planos $x = k$, $y = k$, $z = k$. Cuando exista, encuentre e identifique la ecuación de la curva intersección.

¿Les parece que se podría pedir que

6) Las superficies dadas se cortan según una curva C. Grafique las superficies, parametricen la curva C y su proyección sobre el plano coordenado que se indica.

a) $S_1 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$; $S_2 : z = 1$ plano xy

b) $S_1 : x = z^2 + y^2$; $S_2 : x = 4$ plano yz

c) $S_1 : z^2 = x^2 + y^2$; $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 10$ plano xy ,$z \geq 0$

d) $S_1 : -x^2 - 6y^2 + z^2 = 1$; $S_2 : z = 2$ plano xy

7) Obtenga el hiperboloide de una hoja que cumple con las siguientes condiciones:

a) Su traza con el plano xz es una hipérbola equilátera centrada en el origen tal que uno de sus vértices es el punto (1, 0, 0)

b) Su traza con el plano xy es la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

8)Sea la superficie S de ecuación : $-x^2 + y^2 - Az = B$.

Determine los valores de A y B en cada uno de los siguientes casos:

a) S representa una superficie cilíndrica cuya traza con el plano xy es una hipérbola de distancia focal $3\sqrt{2}$ y eje focal "x".

Obtenga las trazas y grafique la superficie para los valores hallados.

b) S corresponde a un paraboloide hiperbólico que contiene al origen y cuya intersección con el plano $x = 1$ es una parábola de vértice $V = (1; 0; 2)$.

Respuestas

1) a) no corresponde a una superficie esférica

b) es una superficie esférica de centro en $(\frac{3}{2},-\frac{5}{2},0)$ y radio $r=\sqrt{\frac{7}{2}}$

c) corresponde al punto (-1,2,-1)

2) $a^2+b^2+c^2>4d$

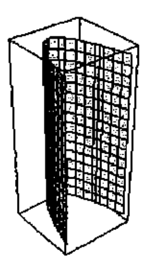
3) $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{16}{5}$

4)

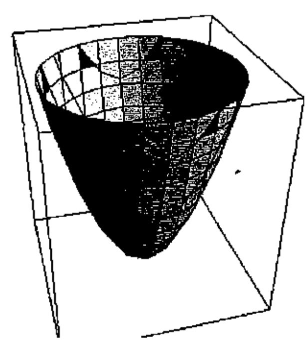
En R^2	En R^3	En R^2	En R^3
a) --------------------	a) paraboloide hiperbólico	f)--------------------	f) hiperboloide de una rama
b) --------------------	b) superficie esférica	g) --------------------	g)paraboloide circular
c) --------------------	c) plano	h) --------------------	h) hiperboloide de dos ramas
d) parábola	d) superficie cilíndrica parabólica	i) recta	i) plano
e)circunferencia	e)superficie cilíndrica circular	j) --------------------	j)elipsoide

5)

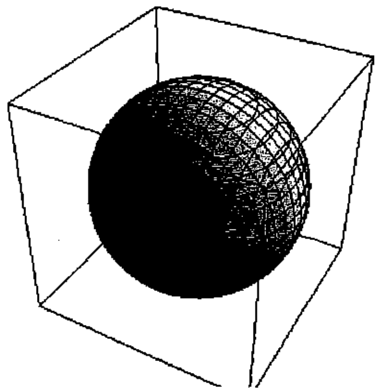
a) superficie cilíndrica parabólica



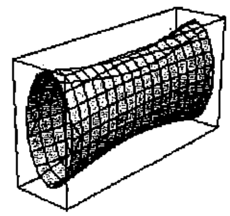
b) paraboloide circular



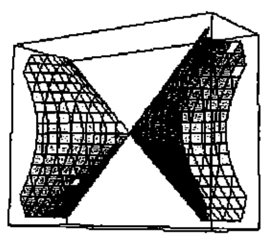
c) superficie esférica



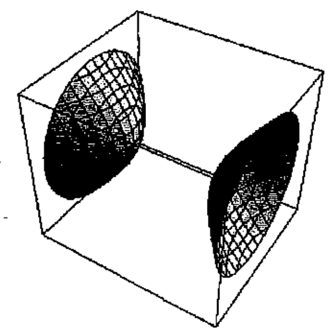
d) hiperboloide de una hoja



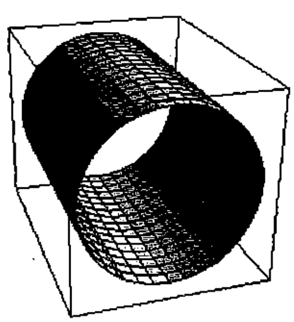
e)superficie cónica



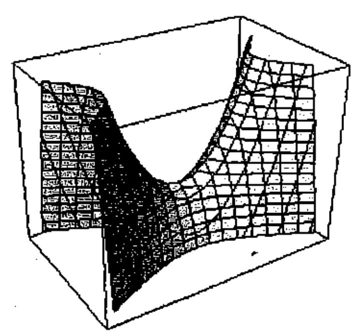
f) hiperboloide de dos hojas



g) superficie cilíndrica circular



h) paraboloide hiperbólico



6)

a) $\boldsymbol{C}(\mathrm{t})\colon \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = \sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha \\ z = 1 \end{cases}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi$

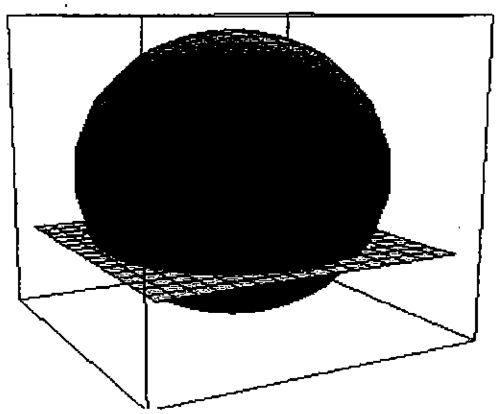
$\boldsymbol{C}(\mathrm{x, y, z}) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

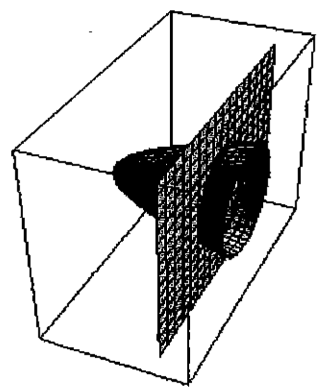
En el plano xy : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

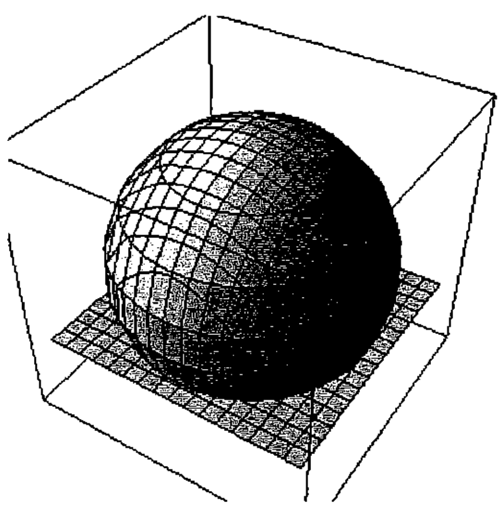
b) $\boldsymbol{C}(\mathrm{t}) = \begin{cases} x = 4 \\ y = 2\operatorname{sen}\alpha \\ z = 2\cos\alpha \end{cases}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi$

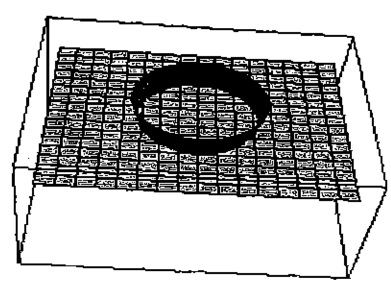
$\boldsymbol{C}(\mathrm{x, y, z}) : \begin{cases} z^2 + y^2 = 4 \\ x = 4 \end{cases}$

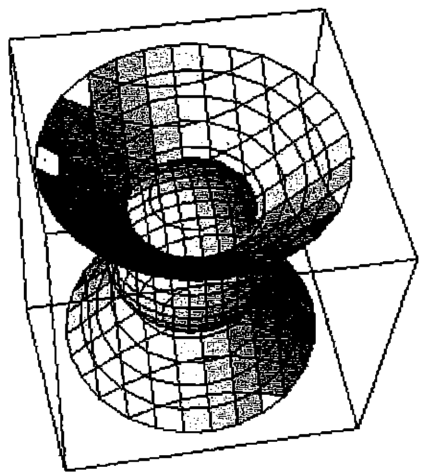
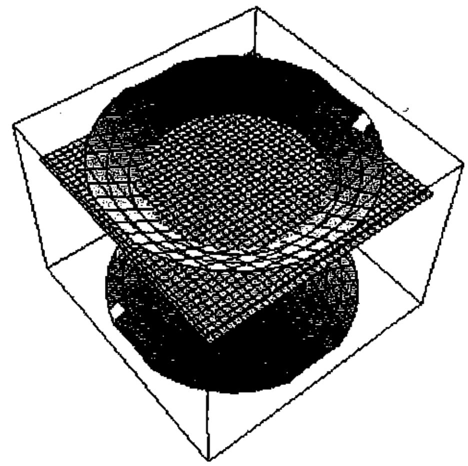
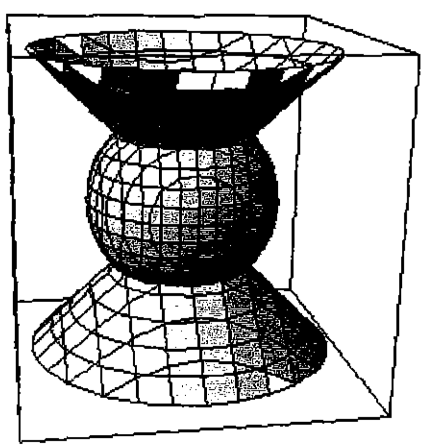
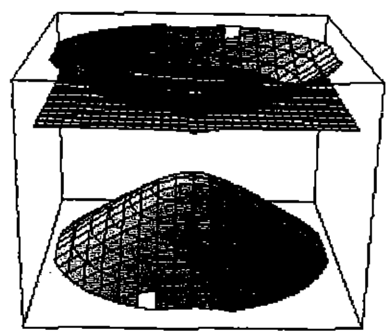
En el plano yz : $\begin{cases} z^2 + y^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$









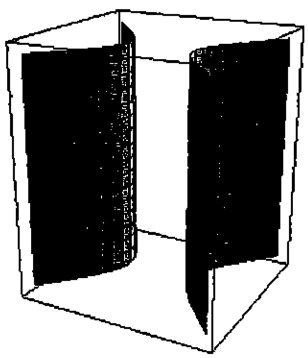
c) $\boldsymbol{C}(t)=\begin{cases} x=\sqrt{5}\ \cos\alpha \\ y=\sqrt{5}\cos\alpha \\ z=\sqrt{5} \end{cases}$, $0\le\alpha\le 2\pi$ $\boldsymbol{C}(x, y, z):\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=\sqrt{5} \end{cases}$ En el plano xy : $=\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=0 \end{cases}$	d) $\boldsymbol{C}(t)$: $\begin{cases} x=\sqrt{3}\ \cos\alpha \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\alpha \\ z=2 \end{cases}$ $0\le\alpha\le 2\pi$ $\boldsymbol{C}(x, y, z):\begin{cases} x^2+6y^2=3 \\ z=2 \end{cases}$ En el plano xy $\begin{cases} x^2+6y^2=3 \\ z=0 \end{cases}$
	
	

7) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

8)

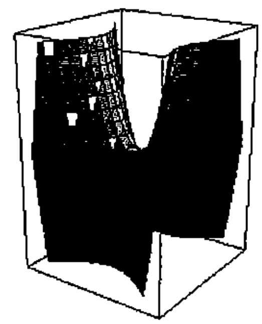
a) $A=0$, $B=-\frac{9}{4}$

La superficie es $-x^2+y^2=-\frac{9}{4}$



b) $A=-\frac{1}{2}$, $B=0$

La superficie es $-x^2+y^2=-\frac{1}{2}z$



UNIDAD TEMÁTICA IX
APLICACIONES de diagonalización

OBJETIVOS:

- ✓ Aplicar los conocimientos adquiridos sobre autovalores y autovectores al cálculo de matrices .
- ✓ Relacionar los temas de Geometría Analítica con el concepto de autovalores y autovectores.
- ✓ Adquirir habilidad para aplicar recursos algebraicos a la resolución de distintos problemas .

CONTENIDOS:

Aplicaciones a la geometría y al cálculo de matrices.

TRABAJO PRÁCTICO N° 8

APLICACIONES DE AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada y $p(\lambda)$ es su polinomio característico verifique que :entonces $p(A)=N$

2) Si $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

a) encuentre P^{-1}

b) Si A y B son matrices semejantes , encuentre B^8

3) Si $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) encuentre P^{-1}

b) si se verifica que $B=P^{-1}.D.P$ calcule B^5

4) Indique , en cada uno de los casos , si para calcular A^3 se debe realizar el producto de matrices o se puede usar alguna propiedad. Justifique su respuesta.

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Autovalores {-2,1,4}

b) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Autovalores {1,1,1}

5) Dadas las siguientes ecuaciones, exprese en forma canónica, identifique y grafique.

a) $x^2+4xy+y^2-3=0$

b) $5x^2+6xy+5y^2-8=0$

c) $9x^2-24xy+16y^2-25=0$

d) $9x^2-24xy+16y^2+y=1$

6) Sea $2x^2+2kxy+y^2=1$.

Halle todos los valores de $k\in\mathbb{R}$ tales que sea un par de rectas.

7) Sea la elipse $x'^2+11y'^2=11$ referida al sistema de coordenadas cuyos ejes son generados por los vectores $\breve{u}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$, $\breve{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.Obtenga la ecuación referida a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Respuestas.

2)

a) $B^8 = \begin{pmatrix} 65536 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix}$ b) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

3)

a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ b) $B^8 = \begin{pmatrix} 469 & 1230 \\ 205 & 614 \end{pmatrix}$

4) a) es diagonalizable , se puede usar que $A^3 = P^{-1}.D^3.P$

b) se debe hacer el producto indicado

5)

<table>
<tr>
<td>
a)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

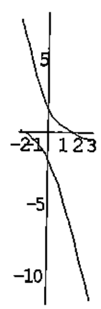
{{1, 2}, {2, 1}}

Eigenvalues[A]

{-1, 3}

Eigenvectors[A]

{{-1, 1}, {1, 1}}



</td>
<td>
b)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

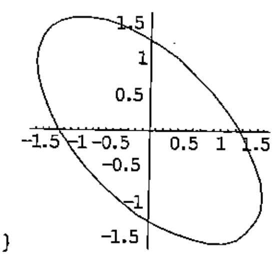
{{5, 3}, {3, 5}}

Eigenvalues[A]

{2, 8}

Eigenvectors[A]

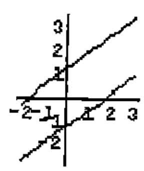
{{-1, 1}, {1, 1}}



</td>
</tr>
<tr>
<td>
$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$

Eigenvalues[A]
{25,0}

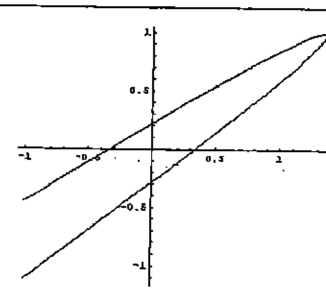
Eigenvectors[A]
{{-3,4},{4,3}}



</td>
<td>
$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$

Eigenvalues[A]
{25,0}

Eigenvectors[A]
{{-3,4},{4,3}}


</td>
</tr>
</table>

6) $|k| = 1$

7) $2x^2+6xy+10y^2 = 11$

APÉNDICE
NÚMEROS COMPLEJOS

INTRODUCCIÓN

I)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Si calculamos sus autovalores resulta:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

El polinomio característico es: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

y sus raíces son: $\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{-4}}{2}$; $\lambda_2 = \frac{2-\sqrt{-4}}{2}$

que no tienen solución en $\Re$; para solucionar esta cuestión, definimos el número imaginario i de modo que: $i^2 = -1$, obtenemos así los autovalores:

$$\lambda_1 = 1 + i \ ; \ \lambda_2 = 1 - i$$

A continuación desarrollaremos los conceptos básicos de nº complejos y sus operaciones, con los cuales extenderemos el conjunto de los números reales $\Re$ al conjunto de los números complejos $\mathcal{C}$. Luego de desarrollar estas operaciones básicas, calcularemos los autovectores de la matriz A y hallaremos la matriz P y su inversa P^{-1} que nos permiten diagonalizar la matriz

II)

Ecuaciones como $x^2 + 9 = 0$ (i)

$x^2 + 4x + 5 = 0$ (ii)

No tiene solución en $\mathcal{R}$, por ejemplo:

en (i) : $x^2 = -9$

$|x| = \sqrt{-9}$

en (ii) : $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{-1}$

Para solucionar este problema matemático podemos definir un nuevo tipo de números que nos permitirá resolver estas ecuaciones: los números imaginarios

Definimos el número imaginario i de modo que: $i^2 = -1$

y esto nos permite resolver las ecuaciones anteriores:

(i) $|x| = \sqrt{-9} = 3i$

Luego las soluciones son: $x = 3i \quad \vee \quad x = -3i$

(ii) $x = -2 + i \quad \vee \quad x = -2 - i$

En las soluciones de la ecuación (ii) tenemos números que tienen una parte real $\mathcal{R}$ y una parte imaginaria $\mathcal{Im}$. A estor números con parte real e imaginaria, los llamamos números complejos $\mathcal{C}$.

Definición: Un número complejo z es un par ordenado de números reales (x, y) donde x es la parte real $\mathcal{R}$ e y es la parte imaginaria $\mathcal{Im}$.

$$z = (x; y) = x + iy$$

$\Re(z) = x$ Parte real de z

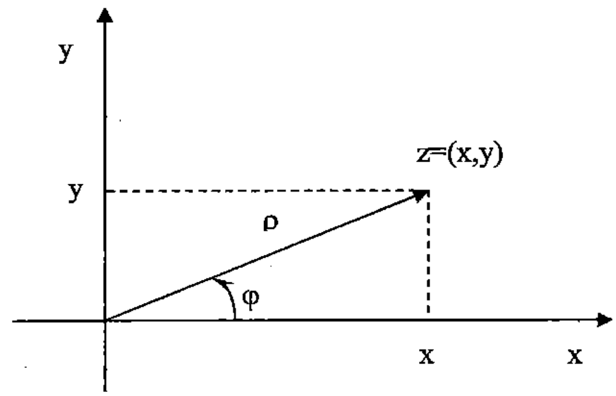
$\Im m(z) = y$ Parte imaginaria de z

Además de la resolución de ecuaciones matemáticas como las anteriores, los números complejos tienen aplicaciones en Ciencias e Ingeniería: utilizamos números complejos en modelos de circuitos eléctricos, en análisis de vibraciones mecánicas de sistemas, teoría del calor, dinámica de fluidos, electrostática, descripción de ondas, especialmente en fenómenos de difracción e interferencia de ondas de luz, en mecánica cuántica la función de onda que describe objetos como los electrones necesita de los números complejos como parte esencial de esta descripción.

Podemos considerar a los números complejos como una extensión del conjunto de los números reales, y en este nuevo conjunto de números, el Teorema Fundamental del Álgebra establece que cualquier polinomio de grado *n* con coeficientes complejos (de los cuales algunos o todos pueden ser números reales) tiene *n* raíces (contando las raíces múltiples).

CONCEPTOS TEÓRICOS BÁSICOS:

Forma Polar o Trigonométrica de los números complejos:



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases}$$

$$z = x + i\,y = \rho\cos\varphi + i\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\boxed{z = \rho\left(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) \quad \text{Forma Polar}}$$

o también utilizando la notación abreviada: $z = \rho\ \mathrm{cis}\varphi$

Siendo:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{módulo o valor absoluto de z} \quad (\rho \geq 0)$$

$$\varphi = \arg(z) = \mathrm{arcsen}\frac{y}{\rho} = \arccos\frac{x}{\rho} = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} \qquad (z \neq 0)$$

Valor principal del argumento de z: $0 \leq \varphi < 2\pi$

Forma Exponencial de los números complejos:

Se basa en la fórmula de Euler (la demostración no está al alcance de este curso)

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi$	**Fórmula de Euler**
$z = \rho e^{i\varphi}$	**Forma Exponencial**

Sean los números complejos:

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 = \rho_1 \left[\cos(\varphi_1) + i\,\mathrm{sen}(\varphi_1)\right] = \rho_1\, e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = x_2 + i\,y_2 = \rho_2 \left[\cos(\varphi_2) + i\,\mathrm{sen}(\varphi_2)\right] = \rho_2\, e^{i\varphi_2}$$

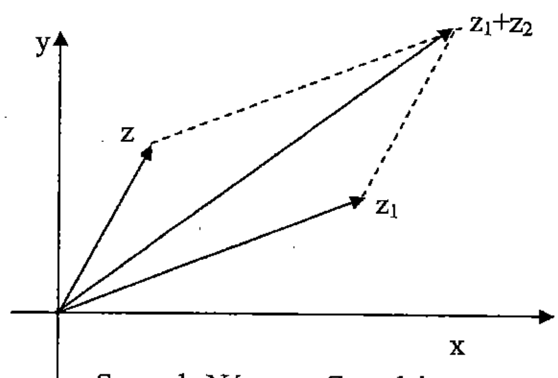
Igualdad:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \wedge k \in Z$$

Suma:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



Suma de Números Complejos

Producto:

En forma binómica:

$$z_1\, z_2 = (x_1 + i\,y_1)\,(x_2 + i\,y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1\, y_2 + x_2 y_1)$$

En forma exponencial:

$$z_1\, z_2 = \left(\rho_1\, e^{i\varphi_1}\right)\left(\rho_2\, e^{i\varphi_2}\right) = (\rho_1\, \rho_2)\left(e^{i\varphi_1}\, e^{i\varphi_2}\right) = (\rho_1\, \rho_2)\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

En forma Polar:

$$z_1\, z_2 = (\rho_1\, \rho_2)\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\mathrm{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

Conjugado de un número complejo:

Sea $z = x + iy$, llamamos conjugado de z al número complejo $\bar{z} = x - i\,y$

Cociente:

Si $z_2 \neq 0$

En forma binómica:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}\,\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}=\frac{(x_1+i\,y_1)(x_2-i\,y_2)}{|z_2|^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}+i\,\frac{x_2y_1-x_1\,y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}$$

En forma exponencial:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1\,e^{i\varphi_1}}{\rho_2\,e^{i\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

En forma Polar:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\,\mathrm{sen}(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Potenciación:

$$z^n=\left(\rho e^{i\varphi}\right)^n=\rho^n\,e^{in\varphi}$$

$$z^n=\rho^n\left[\cos(n\varphi)+i\,\mathrm{sen}(n\varphi)\right]$$

Radicación:

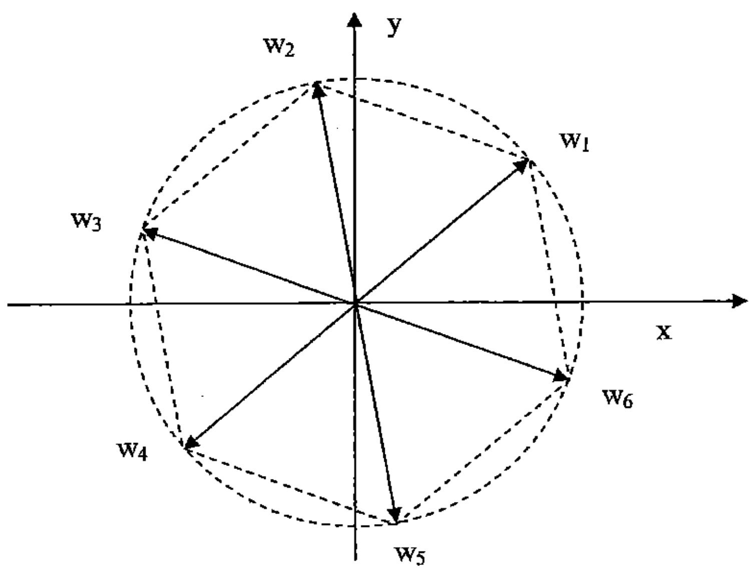
Si $w=re^{i\theta}$

$$\sqrt[n]{z}=w \Leftrightarrow z=w^n \Leftrightarrow \rho e^{i\varphi}=r^n e^{in\theta} \Leftrightarrow \rho=r^n \wedge \varphi+2k\pi=n\theta \Rightarrow r=\sqrt[n]{\rho} \wedge \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\;e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \qquad \wedge\ k=0,1,\ldots,n-1$$

$$\sqrt[n]{z}=w_{k+1}=\sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right] \quad \wedge\ k=0,1,\ldots,n-1$$

En la siguiente figurase muestran las raíces sextas de un complejo z

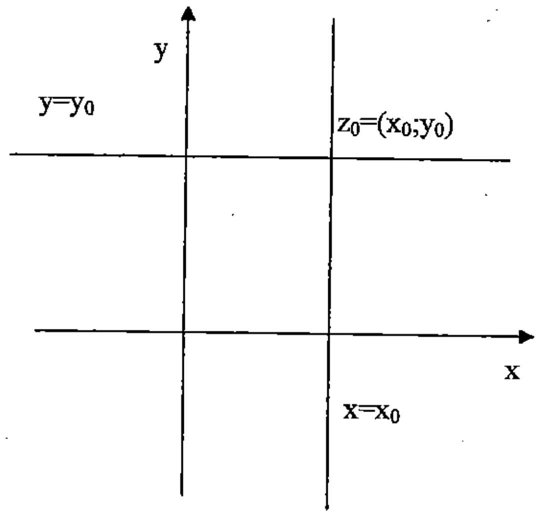


Curvas y regiones en el plano complejo

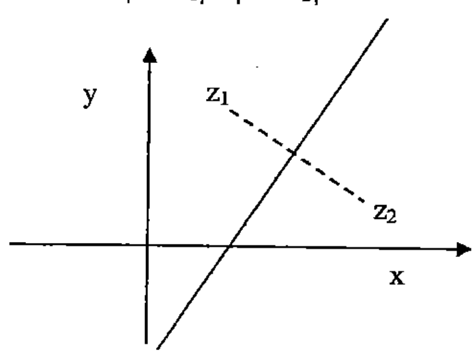
Rectas que contienen al punto $z_0 = (x_0 ; y_0) = \rho_0 \operatorname{cis}(\varphi_0)$:

Paralela al eje real: $y = y_0$

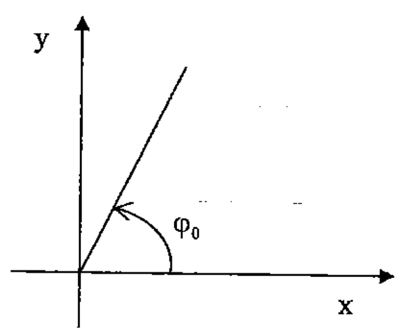
Paralela al eje imaginario: $x = x_0$



Mediatriz del segmento $\overline{z_1 z_2}$: $|z - z_1| = |z - z_2|$

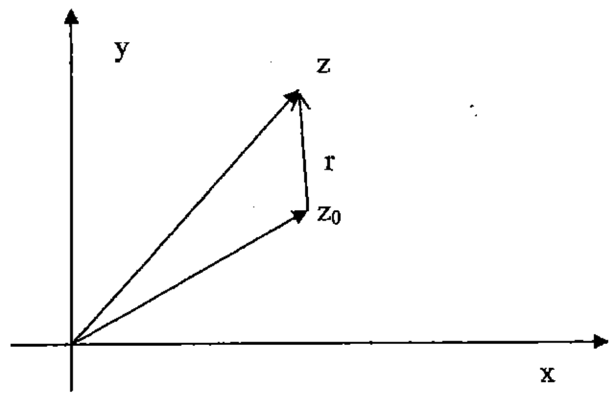


Semirrecta: $\varphi = \varphi_0$



Circunferencia con centro en z_0 y radio r: $|z - z_0| = r$

Círculo con centro en z_0 y radio r: $|z - z_0| \le r$



Elipse con focos en z_1 y z_2 y diámetro mayor "2a", siendo $2a > |\overrightarrow{z_1 z_2}|$

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1:
Dados los siguientes números complejos:

$$z_1 = 3 - 4i \qquad z_2 = 1 + i \qquad z_3 = 5 - 4i$$

Realice los siguientes cálculos:

1.1) $z_1 \overline{z_2}$

1.2) $\Im m(z_2) z_3 + |z_1|$

1.3) $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2}$

1.4) $\dfrac{\Re(z_1 + z_2)}{(z_1 + z_2)}$

1.5) $\left(\overline{z_2 + z_3}\right) z_1^{\,2}$

1.6) $\overline{\left(\dfrac{z_3}{z_1}\right)} |z_1|^2$

1.7) $\Re(z_1^{\,2}) + 2\Re(z_1) + 1$

1.8) $z_2^{\,3} + i z_2^{\,2} - 2z_2$

Ejercicio 2:

Complete el siguiente cuadro según corresponda y represente en el plano complejo:

BINÓMICA	POLAR	EXPONENCIAL
$-2+2i$		
	$3\operatorname{cis}(5\pi/3)$	
		$5e^{\pi i}$
$-4i$		
		e^{π}
	$\sqrt{2}\operatorname{cis}(5\pi/4)$	
	$\operatorname{cis}(n\pi) \wedge n \in Z$	
		$e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Ejercicio 3:

Complete el siguiente cuadro e interprete geométricamente los resultados obtenidos en la sexta columna:

z	$\lvert z \rvert$	arg(z)	z^4	z^6	$\sqrt[4]{z}$
$3i$					
$2+2i$					
-5					
$-\sqrt{3}i-1$					

Ejercicio 4:

Utilice: $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)$ (de Moivre) para probar:

4.1) $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 4.2) $\operatorname{sen}(3\theta) = -4\operatorname{sen}^3\theta + 3\operatorname{sen}\theta$

Ejercicio 5:

Resuelva las siguientes ecuaciones y grafique el conjunto solución:

5.1) $\cos x + i\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}x + i\cos x \wedge x \in R$

5.2) $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$

5.3) $z^4 + 4z^3 i - 6z^2 - 4zi - 15 = 0$

Ejercicio 6:

Diagonalice la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y obtenga la matriz P y su inversa P^{-1} que nos permiten diagonalizar la matriz

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

1.1) $-1-7i$

1.2) $10-4i$

1.3) $1-i$

1.4) $\frac{16}{25}+\frac{12}{25}i$

1.5) $30-165i$

1.6) $31-8i$

1.7) 0

1.8) -6

Ejercicio 2:

$-2+2i$	$2\sqrt{2}\,\text{cis}(3\pi/4)$	$2\sqrt{2}\ e^{i\frac{3}{4}\pi}$
$\frac{3}{2}-3\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$3\,\text{cis}(5\pi/3)$	$3\ e^{i\frac{5}{3}\pi}$
-5	$5\,\text{cis}(\pi)$	$5e^{i\pi}$
$-4i$	$4\,\text{cis}(3\pi/2)$	$4\ e^{i\frac{3}{2}\pi}$
e^{π}	e^{π}	e^{π}
$-1-i$	$\sqrt{2}\text{cis}(5\pi/4)$	$\sqrt{2}\ e^{i\frac{5}{4}\pi}$
$(-1)^n$	$\text{cis}(n\pi)\ \wedge n \in Z$	$e^{in\pi}$
$-i$	$\text{cis}(3\pi/2)$	$e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Ejercicio 3:

z	$\lvert z \rvert$	$\arg(z)$	z^4	z^6	$\sqrt[4]{z}$
$3i$	3	$\frac{\pi}{2}$	81	-729	$\sqrt[4]{3}\,\text{cis}\left[\frac{\pi}{8}(4k+1)\right] \wedge k=0;1;2;3$
$2+2i$	$2\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	-64	-512 i	$\sqrt[8]{8}\,\text{cis}\left[\frac{\pi}{16}(8k+1)\right] \wedge k=0;1;2;3$
-5	5	π	625	15625	$\sqrt[4]{5}\,\text{cis}\left[\frac{\pi}{4}(2k+1)\right] \wedge k=0;1;2;3$
$-\sqrt{3}i-1$	2	$\frac{4}{3}\pi$	$16\left(-1-\sqrt{3}i\right)$	64	$\sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left[\frac{\pi}{6}(3k+2)\right] \wedge k=0;1;2;3$

Ejercicio 5:

5.1) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \wedge k\in Z$

5.2) $z_{k+1}=1+2\,\text{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) \wedge k=0;1;2 \quad \therefore \quad z_1=2+\sqrt{3}i\,;\, z_2=-1\,;\; z_3=2-\sqrt{3}i$

5.3) $z_{k+1}=-i+2\,\text{cis}\left(\frac{k}{2}\pi\right) \wedge k=0;1;2;3 \quad \therefore \quad z_1=2-i\,;\, z_2=i\,;\; z_3=-2-i;\, z_4=-3i$

Ejercicio 6:

$$D=\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} \quad ; \quad P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-i}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2}\end{pmatrix}$$

Aplicaciones a cónicas

Ejercicio 7:

Determine, en cada una de las siguientes ecuaciones o desigualdades, el conjunto de puntos del plano complejo que satisface cada una de ellas. Grafique tal conjunto.

7.1) $|z-8+4i|=9$

7.2) $|z|=|z-i|$

7.3) $|z|^2+\Im m(z)=16$

7.4) $|z-2i|+|z|=6$

7.5) $\Im m(z-i)=\Re(z+1)$

7.6) $|z+2+i|>|z-1|$

7.7) $-1\leq \Re(z)<2$

7.8) $|z+i|>|z| \quad \wedge \quad |z|<1$

7.9) $|z-2i|\leq|z+2-i| \quad \wedge \quad |z|>1$

7.10) $|z-4i|-|z|=2$

Respuestas

Ejercicio 7:

7.1) $|z-(8-4i)|=9$ Lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (8;-4) es igual a 9. Circunferencia con centro en $8-4i$ y radio 9.

O también: $S_1=\{(x;y)\in C/\ (x-8)^2+(y+4)^2=81\}$

7.2) $|z-(0;0)|=|z-(0;1)|$ Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del origen y de A(0;1), la mediatriz del segmento $\overline{OA}$. O también: $S_2=\left\{(x;y)\in \mathcal{C}/\ y=\frac{1}{2}\right\}$ Recta paralela al eje real.

7.3) $S_3=\left\{(x;y)\in C/\ x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{65}{4}\right\}$ Circunferencia con centro en $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{65}}{2}$.

7.4) Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos (0;2) y al origen (focos) es igual a 6 (2a = 6).

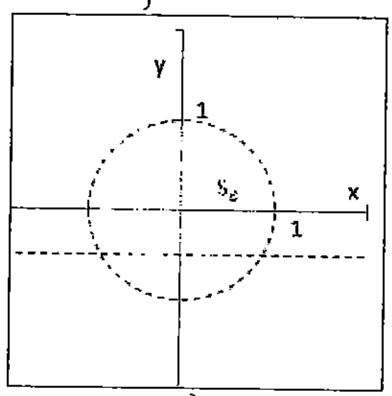
$S_4=\left\{(x;y)\in \mathcal{C}/\ \frac{x^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{9}=1\right\}$ Elipse con centro en (0;1) eje focal eje y; $a=3$; $b=2\sqrt{2}$ y $c=1$.

7.5) $S_5=\{(x;y)\in C/\ y=x+2\}$

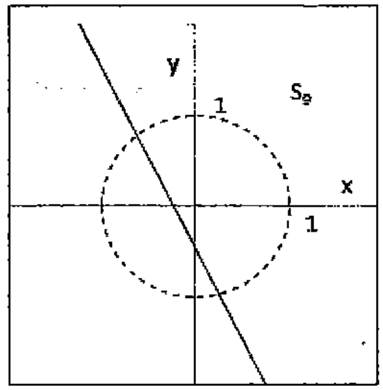
7.6) $S_6=\{(x;y)\in C/\ y>-3x-2\}$ Semiplano.

7.7) $S_7=\{(x;y)\in C/\ -1\le x<2\}$ Franja paralela al eje y.

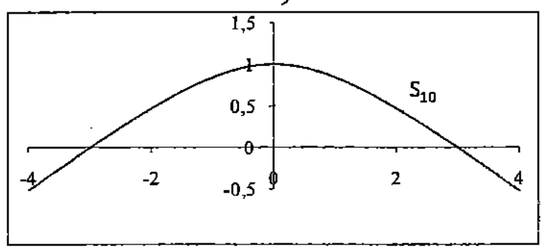
7.8) $S_8=\left\{(x;y)\in C/\ y>-\frac{1}{2}\wedge x^2+y^2<1\right\}$



7.9) $S_9=\left\{(x;y)\in C/\ y\ge -2x-\frac{1}{2}\wedge x^2+y^2>1\right\}$



7.10) $S_{10} = \left\{ (x;y) \in C / -\dfrac{x^2}{3} + (y-2)^2 = 1 \wedge y \leq 1 \right\}$ Rama inferior de una hipérbola



APÉNDICE I

Aplicaciones de Algebra Lineal y Cálculo: Serie de Fourier:

1) Espacios Vectoriales de dimensión infinita:

a) Consideremos un vector de $\Re^n$, pero con infinitas componentes, diremos que $\vec{u} \in \Re^\infty$, pero el vector debe tener longitud finita, es decir:

$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots)$, $\left\|\vec{u}\right\| < k$; $k \in \Re^+$, o sea $\left\|\vec{u}\right\|^2 = <\vec{u}, \vec{u}> = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 < k^2$

Por ejemplo: $\vec{u} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$

su dimensión es: $\left\|\vec{u}\right\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right]^{1/2}$, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie convergente (por el criterio de la integral: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)_1^b = 1$) luego la longitud del vector es finita.

El vector $\vec{v} = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ tiene longitud infinita.

b) Consideremos como vectores las funciones $f(x), g(x), \ldots, h(x)\ldots$ definidas en el $[0, 2\pi]$. Definimos como producto interno de estos vectores reemplazando la sumatoria de los vectores discretos por integrales en el caso de los vectores continuos:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

Y la longitud de un vector resulta entonces: $\|f(x)\| = \left[\int_0^{2\pi} f^2(x) dx\right]^{1/2}$

Ejemplo:

1) Sea el vector $f(x) = sen x$

$\langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} sen^2 x dx = \pi$ luego, su longitud es: $\|sen x\| = \sqrt{\pi}$

2) Las funciones $f(x) = sen x$ y $g(x) = cos x$ son ortogonales pues:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} senx.\cos x dx = 0$$

También son ortogonales entre si las funciones:

$1, senx, sen2x, sen3x, \ldots, sen\, nx, \ldots, cos\, x, cos\, 2x, \ldots cos\, nx, \ldots$

2) **Serie de Fourier:**

La serie de Fourier de una función $f(x)$ es su desarrollo en senos y cosenos:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 senx + a_2 \cos 2x + b_2 sen2x + \ldots$$

Donde los coeficientes a_i , b_i son las coordenadas del vector $f(x)$ en la base $\{1, senx, sen2x, sen3x, \ldots, sen\, nx, \ldots, cos\, x, cos\, 2x, \ldots cos\, nx, \ldots\}$, que es una base ortogonal, y de infinitos vectores.
La longitud de $f(x)$ es:

$$\langle f,f\rangle^{1/2} = \left[\int_0^{2\pi} \left(a_0 + a_1 \cos x + b_1 senx + a_2 \cos 2x + b_2 sen2x + \ldots\right)^2 dx\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} \left(a_0{}^2 + a_1{}^2 \cos^2 x + b_1{}^2 sen^2 x + a_2{}^2 \cos^2 2x + b_2{}^2 sen^2 2x + \ldots\right) dx\right]^{1/2} =$$

$$= \left[2\pi a_0{}^2 + \pi\left(a_1{}^2 + b_1{}^2 + a_2{}^2 + b_2{}^2 + \ldots\right)\right]^{1/2}$$

Una base ortonormal (canónica) es:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cos\, x}{\sqrt{\pi}}, \frac{senx}{\sqrt{\pi}}, \frac{cos\, 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$$

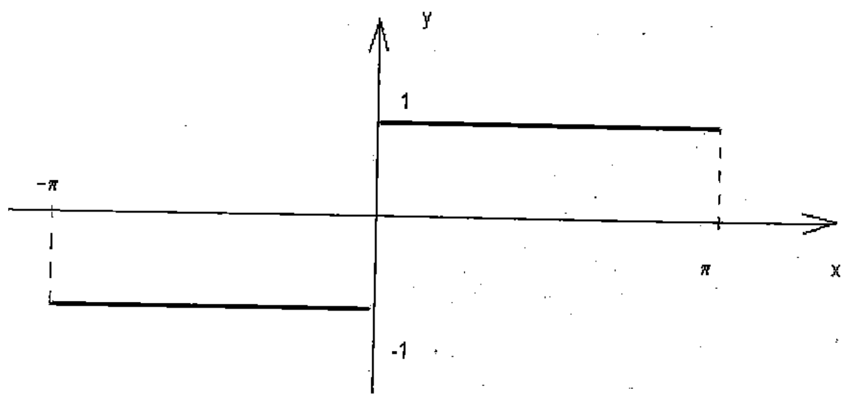
Luego, una función $f(x)$ puede escribirse como una combinación lineal de esta base ortonormal:

$$f(x) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{A_1}{\sqrt{\pi}} cos\, x + \frac{B_1}{\sqrt{\pi}} senx + \frac{A_2}{\sqrt{\pi}} cos\, 2x + \frac{B_2}{\sqrt{\pi}} sen2x + \ldots$$

Y la longitud del vector será: $\|f(x)\|^2 = A_0{}^2 + A_1{}^2 + B_1{}^2 + A_2{}^2 + B_2{}^2 + \ldots$
(recordar que la longitud debe ser finita)

Ejemplo:

Sea la función: $f(x) = \begin{cases} -1\ ; & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1\ ; & si \quad 0 < x < \pi \end{cases}$ (I)



¿Cómo desarrollar en serie de Fourier esta función?

(Nota: observemos que si x representa tiempo, el desarrollo en serie de Fourier de esta función nos dará las componentes de frecuencia de la función, siendo los coeficientes A_i , B_i las amplitudes (o intensidades) de cada frecuencia).

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 sen x + a_2 \cos 2x + b_2 sen 2x + \dots \qquad \text{(II)}$$

Si multiplicamos ambos lados de la igualdad anterior por $\cos x$ e integramos en el intervalo $[0, 2\pi]$obtenemos:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^{2\pi} a_1 \cos^2 x\, dx = a_1 \pi$$ (los restantes términos se anulan)

y obtenemos el coeficiente $a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$

Análogamente obtenemos los restantes coeficientes a_i , b_i multiplicando la igualdad (II) por: $1, sen x\,, sen 2x\,, sen 3x\,, \dots, sen\, nx, \dots, \cos x, \cos 2x, \dots \cos nx, \dots$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx}$$

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) senkx dx}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) dx}$$

Si utilizamos estas fórmulas para obtener los coeficientes, resulta:

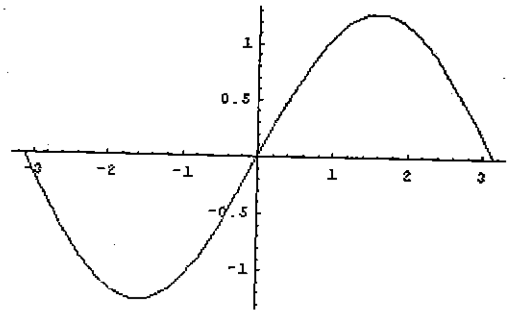
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{senx}{1} + \frac{sen3x}{3} + \frac{sen5x}{5} + \ldots + \frac{sen(2n+1)x}{2n+1} + \ldots\right]$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sen(2n+1)x}{(2n+1)}$$ (serie de Fourier de (I))

Y la longitud del vector resulta: $\|f(x)\| = \sqrt{2\pi}$

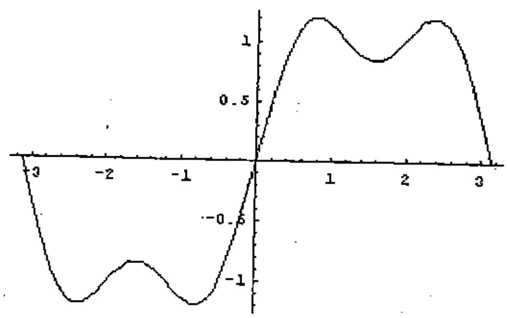
Representamos gráficamente utilizando el Mathematica , primero un solo término de la serie, luego dos términos, y así sucesivamente, vemos como la serie, cuanto mayor es la cantidad de términos considerados, más se aproxima a la función (I).

In[4]:= **Plot[(4 / Pi) (Sin[x]), {x, -Pi, Pi}]**



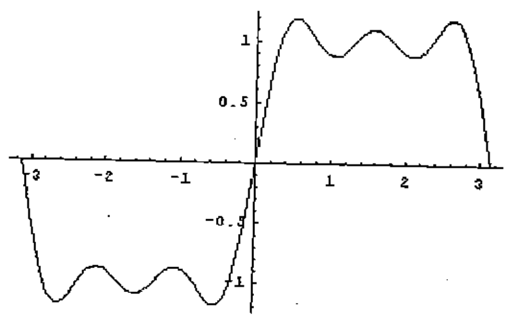
Out[4]= - Graphics -

In[5]:= **Plot[(4 / Pi) (Sin[x] + (1 / 3) Sin[3 x]), {x, -Pi, Pi}]**



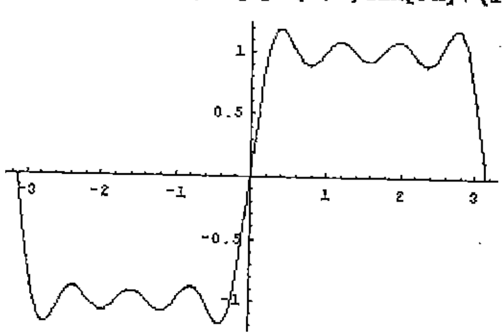
Out[5]= - Graphics -

In[6]:= **Plot[(4 / Pi) (Sin[x] + (1 / 3) Sin[3 x] + (1 / 5) Sin[5 x]), {x, -Pi, Pi}]**



Out[6]= - Graphics -

In[7]:= **Plot[(4 / Pi) (Sin[x] + (1 / 3) Sin[3 x] + (1 / 5) Sin[5 x] + (1 / 7) Sin[7 x]), {x, -Pi, Pi}]**



Out[7]= - Graphics -

Parciales

UTN. FRBA — PARCIAL PARTE A — 2009

Turno Noche — ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALÍTICA

Apellido y nombres: ....Tema 1

La condición para aprobar este parcial es tener 3 ejercicios bien resueltos como mínimo

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) Sea la recta $r:\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x=ky \end{cases}$

a) Halle todos los $k \in \Re$ tales que la distancia de la recta al origen sea $d=2$

b) Para el valor $k=1$, grafique la recta r como intersección de los planos que la definen.

2) Sea el haz de planos $\alpha(x-y+3z)+\beta(y+z+1)=0$

a) Halle la recta común a todos los planos del haz

b) Halle todos los planos del haz, si existen, que son paralelos a la recta r que pasa por el punto $P(-2,3,1)$ y es paralela al eje x y a la recta $l: \vec{X}=\vec{X}_0+\lambda(-3,2,5)$

3) Justifique si las siguientes afirmaciones son V o F

a) Sea $A \in \Re^{nxn} / A^2=A \ \wedge\ A$ es inversible $\Rightarrow \forall k \in \Re: |kA| = k^n$

b) Sea $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} \subset \Re^6$ un conjunto de vectores linealmente independientes $\Rightarrow \forall k \in \Re$ el conjunto $\{k\vec{u}-\vec{v}, 3\vec{v}+\vec{w}, 2\vec{u}+\vec{v}+k\vec{w}\}$ es linealmente independiente

4) Sea $(\Re^{nxn},+,\Re,\cdot)$ espacio vectorial. Sea $S=\{X \in \Re^{nxn} / X.A = A.X\}$ con A matriz fija de $\Re^{nxn}$.

a) Pruebe que S es subespacio vectorial de $(\Re^{nxn},+,\Re,\cdot)$

b) Para $n=2$ y $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, halle base y dimensión de S

5) Sean: $S=\{(x,y,z,u) \in \Re^4 / x+2y-u=0\}$; $W=\{(x,y,z,u) \in \Re^4 / y=z=0\}$

a) Obtenga $S \cap W$, una base y su dimensión.

b) Obtenga $S+W$, una base y su dimensión.

UTN. FRBA PARCIAL PARTE A 2009

Turno Noche ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALÍTICA

Apellido y nombres: ....Tema 2

La condición para aprobar este parcial es tener 3 ejercicios bien resueltos como mínimo

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) Sean las rectas $r_1 = (x,y,z) = (5,0,2) + \lambda(2,1,0)$; $r_2 = (x,y,z) = (2,-1,3) + \lambda(-1,0,1)$

a) Halle su punto de intersección y la ecuación del plano que determinan y calcule la distancia del plano al origen

b) Grafique el plano utilizando sus trazas

2) Sean los puntos $A(3,-1,2)$, $B(1,2,0)$ y $C(2,-2,5)$ los vértices de un triángulo.

a) Calcule el área del triángulo

b) Halle la ecuación del plano que es normal al segmento AC y que contiene al punto medio del segmento BC

3) Justifique si las siguientes afirmaciones son V o F:

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & k \\ -1 & 1 & 2 \\ k & 2 & 12 \end{pmatrix}$ es inversible $\forall k \in \Re$

b) Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \Re^7 / \left\{\vec{u}, \vec{v}\right\}$ es un conjunto $L.I.$. y $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \Rightarrow \left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}\right\}$ es un conjunto $L.D.$ (linealmente dependiente) $\forall \alpha, \beta \in \Re - \{0\}$. Justifique su respuesta utilizando la definición de conjunto de vectores $L.I.$

4) Sean $A = (A_1 \; A_2 \; A_3) \in R^{3x3}$ / $\mathrm{Det}(A) = k \neq 0$ y

$B = (A_1 + 2A_2, \alpha.A_2 + 2A_3, -A_1)$.

Verifique que B es inversible para $\forall \alpha \in R$ y obtenga $\mathrm{Det}(B^{-1})$ en función de k.

5) Sean los subespacios de $(\Re^3, +, \Re, \cdot)$:

$S_1 = \{(x,y,z) \in \Re^3 / 2x + y + z = 0\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \in \Re^3 / ax + z = 0 \wedge by - z = 0\}$

a) Halle los valores de "a" y "b", si existen, para que S_1 sea igual al complemento ortogonal de S_2.

b) Para a = 1, obtenga los valores de "b" para que $S_1 + S_2$ <u>no</u> sea directa.

UTN. FRBA — PARCIAL PARTE A — 2009

Turno Noche — ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALÍTICA

Apellido y nombres: ....Tema 3

La condición para aprobar este parcial es tener 3 ejercicios bien resueltos como mínimo

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) Sea el haz de planos $\alpha(3x-y+z)+\beta(-x+2y+kz+1)=0$

a) Halle $k\in\Re$, si existe, tal que la recta intersección de todos los planos del haz pase por el origen de coordenadas.

b) Para el valor $k=1$, halle el plano del haz, si existe, que es perpendicular a la recta $r:(x,y,z)=(3,-1,2)+\lambda(10,-5,2)$. Graficar el plano hallado.

2) Sean las rectas $r_1:(x,y,z)=(3,2,k)+\lambda(2,-1,1)$ y $r_2:(x,y,z)=(2,-1,0)+\gamma(h,2,1)$

a) Para $k=1$, halle $h\in\Re$ si existe, tales que las rectas sean coplanares.

b) Determine, para $h=1$, el valor de k tal que la distancia entre las rectas sea $d=\sqrt{35}$

3) Justificar si las siguientes proposiciones son V o F:

a) Sean $A,B,C\in\Re^{nxn}$ / $(A+B)C=N\Rightarrow|C|=0$ (N: matriz nula)

b) Sea $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\subset\Re^{2x2}$, una base de S, subespacio vectorial de $(\Re^{2x2},+,\Re,\cdot)\Rightarrow\begin{pmatrix}k&0\\-1&2\end{pmatrix}\in S,\ \forall k\in\Re$

4) Sea $A=\{(1,3,h,-1)\ (2,1,0,0)\ (1,1,1,0)\}$

a) Halle, si existe, $h\in\Re/\ A$ sea un conjunto de vectores linealmente independientes

b) Para $h=2$ obtenga el subespacio $S=gen\,A$

5) Sean los subespacios vectoriales $S=\{(x,y,z,u)\in\Re^4\ /\ x-z=0\wedge u=0\}$

$W=\{(x,y,z,u)\in\Re^4\ /\ x-y+u=0\}$

a) Obtenga $S\cap W$, una base y su dimensión.

b) ¿$S+W$ es una suma directa?

UTN FRBA **Parcial A. Álgebra y G. Analítica** Viernes 23/10/2009

TURNO NOCHE

Apellido y nombres del alumno:...Tema 11

Apellido y nombre del profesor: ....

La condición para aprobar este parcial es tener bien resueltos como mínimo :

a) Dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, o

b) Dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios para justificar sus respuestas. NO USE LAPIZ

1) a) Verifique que todo plano que contenga a los puntos P (1,2,-1) y Q (2,0,1), debe contener también al punto R (-1,6,-5)

b) Halle la ecuación del plano que contiene a los punto P ,Q y al origen de coordenadas.

Grafique el plano utilizando sus trazas.

2) Sean los puntos: A = (3, -1, 2) , B = (1, 1, 0) , C = (1, 2 , -1)

a) Halle el área del triángulo que tiene a los puntos anteriores como vértices

b) Halle la ecuación de un plano que contenga a los puntos anteriores y calcule su distancia al origen.

3) Sea $\left\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}\right\} \subset \Re^9$ un conjunto de vectores linealmente independientes

Verifique si el conjuntos A es linealmente independientes □k□□, justificando la respuesta.

$A = \left\{\vec{x} - \vec{y}\, , \vec{y} - \vec{u}\, , k\,\vec{u} - \vec{x}\right\}$

4) Encuentre una base y la dimensión de W, subespacio vectorial de $\Re^4$, halle su complemento ortogonal , una base del mismo y su dimensión.

Exprese una base de $\Re^4$ utilizando los resultados obtenidos.

$W = gen\{(1,-1,2,0), (2,3,0,3), (1,9,-6,6)\}$

5) Dados los vectores de R^4 :

$\mathbf{v_1} = (1, 0, 1, -1)$ $\mathbf{v_2} = (1, 1, 0, 0)$ $\mathbf{v_3} = (1, 1, \mathbf{k}, 1)$ $\mathbf{v_4} = (0, 0, 2, 2\mathbf{k})$

y los subespacios $S_1 = gen\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ y $S_2 = gen\{\mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$

a) Obtenga la dimensión de $S_1 + S_2$ de acuerdo con los valores de **k**. ¿Para qué valores de **k** la suma es directa?

b) Halle la intersección de S_1 con el subespacio $W = \{ x \in R^4 / x_1 - 2x_3 = x_2 + x_4 = 0 \}$

UTN FRBA **Parcial A. Álgebra y G. Analítica**

TURNO

FECHA: martes 27-10-2009

Apellido y nombres del alumno:..Tema 12

Apellido y nombre del profesor: ....

La condición para aprobar este parcial es tener bien resueltos como mínimo :

a) Dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, o

b) Dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) Sea la recta $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-kz=0 \end{cases}$

   a) Halle todos los $k \in \Re$ tales que la distancia de la recta al origen de coordenadas sea $d=1$

   b) Grafique ambos planos y la recta intersección cuando $k=1$

2) Calcule la distancia de la recta $L_1:(x,y,z)=(2,1,0)+\lambda(1,1,1)$ al plano π que contiene al eje z y que es paralelo a la recta L_1. Grafique el plano.

3) Dados : $A=\{(1,2,1,0)\ (-1,1,1,1)\ (2,-1,0,1)\ (0,5,2,-1)\}\subset \Re^4$. Halle base y dimensión del subespacio generado por A

4) En el espacio vectorial P_2 de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y el polinomio nulo, está incluido el subconjunto $T=\{ax^2+bx+c/3a+b=c\}$

   a) Demuestre que T es subespacio vectorial de P_2

   b) Determine una base y la dimensión de T

5) Dados el subespacio de $\Re^3$: $S=\{(x,y,z)/x=-y=2z\}$ y el vector $\vec{v}=(2,0,1)$, halle un subespacio W que incluya al vector $\vec{v}$ y tal que $S\oplus W=\Re^3$

UTN FRBA **ÁLGEBRA Y G. ANALÍTICA. Recuperatorio Primer parcial.**

Fecha:11/12/09 TT

Apellido y nombres del alumno:...Legajo:..............
Apellido y nombres del docente: ……………………………………………………………..Tema 2C
Apellido y nombres del docente auxiliar: ……………………………………………………..

La condición para aprobar este parcial es tener bien resueltos como mínimo:
a) los dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, ó
b) dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1	2		3		4	5	Calificación Final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ

………

1) La distancia entre las rectas $\mathbf{t_1}$: $(x,y,z) = (1;0;0) + \lambda(2;1;-3)$ con $\lambda \in R$ y $\mathbf{t_2}$ **:** $\dfrac{x-h}{2} = y-1 = \dfrac{z+1}{2}$, es $2\sqrt{5}$.
Calcule $h \in R$.

2) Obtenga y grafique la ecuación del plano paralelo al eje de abscisas, que pasa por el punto $\mathbf{W} = (1;0;1)$ y por la intersección de $\mathbf{t}$: $\begin{cases} x+z=0 \\ y=-1 \end{cases}$ con γ : $3x + 2y - 2z + 12 = 0$.

3) Sean $W = \text{gen}\{3x^2-2; x+2; 2x^2-x\}$ y $V = \text{gen}\{9x^2-x+3;\ -x+6\}$ subespacios de $(P_2;+;R;.)$. Obtenga:
a) W + V y determine si la suma es directa o no.
b) Una base de W + V y su dimensión.

4) Demuestre que:
a) $P \in R^{nxn} \wedge Q \in R^{nxn} \wedge Det(P) = 0 \Rightarrow Det(P.Q) = 0$.
b) $P \in R^{nxn} \Rightarrow Det\left(P.P^t\right) \geq 0$

5) Las coordenadas de A= $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ en la base B = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ son: $\begin{pmatrix} y+u \\ y+z \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}$.

Calcule los números reales x; y; z y u.

UTN **Álgebra y Geometría Analítica. PB/2°P** Fecha Lunes 23-11-2009

TM Tema 1

Apellido y nombres del alumno: ....Legajo: ....

Apellido y nombre del docente: ....

Apellido y nombre del auxiliar docente: ....Curso: ....

La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos, como mínimo:

a) los dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, o

b) dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1		2		3		4	5		Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para **justificar** sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) a) Halle las ecuaciones de todas las elipses cuyos diámetro menor es la tercera parte del mayor y los extremos del diámetro menor pertenecen a las rectas de ecuaciones $x = 0$; $x = -4$

b) Grafique la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y + 25 = 0$ y parametrícela de modo que se recorra en el sentido de las agujas del reloj, el arco correspondiente a $x \geq 2$

2) Sea $hx^2 + ky^2 + z^2 = 25$.

a) Determine h y k reales para que la ecuación represente un hiperboloide de una hoja cuya intersección con el plano $\pi : z = 3$ sea una hipérbola de eje focal paralelo al de ordenadas.

b) Identifique y grafique la superficie para $h = k = -1$

3) Determine el valor de verdad de:

a) $\forall A \in R^{n \times n}$: Si $\lambda = 0$ es valor propio de A $\Rightarrow$ no existe A^{-1}

b) Si λ es raíz del polinomio característico de A $\Rightarrow$ λ es raíz del polinomio característico de A^t

4) Sea $T: R^4 \rightarrow R^4 / T(x,y,z,u) = (x+y+u\,;\ -y+2z+3u\,;\ 2x+(k+1)y+(k-1)z+2u\,;\ z+4u)$

Halle $k \in R$, si existe, para T sea un epimorfismo (sobreyectiva).

5) Sea $F: P_2 \rightarrow R^2 / F(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 - a_0\,; 2a_1 + a_0)$ y las bases $B_1 = \{x^2+1; x; 3\}$; $B_2 = \{(1;1),(1;0)\}$

a) Obtenga la matriz asociada $M_{B_1B_2}(F)$.

b) Utilizando la matriz hallada, obtenga $F(x^2 + 2x - 1)$

UTN FRBA **PB/2°P AGA** **Lunes 23/11/2009 Turno noche**

Apellido y nombres: ....Tema 3
Corrigió:.. Revisó:......................................
La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos como mínimo 3 ejercicios.
(2 de Algebra y 1 de Geometría o 1 de Algebra y 2 de Geometría)

1		2		3		4		5		Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) Sea $T: \Re^3 \to \Re^4 / Nu(T) = \{(x,y,z) \subset \Re^3 : x + y - z = 0\} \wedge T(0,1,0) = (0,2,1,1)$
   a) Halle la expresión analítica de la transformación lineal T, y enuncie los teoremas, definiciones y propiedades que utilice.
   b) Obtenga la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases:
$B1 = \{(0,2,0)(0,0,-1)(1,0,0)\}$; $B2 = \{(2,0,0,0)\ (0,1,1,0)(0,-3,0,0)(0,0,0,1)\}$
   y obtenga la imagen de $\vec{u} = (2,1,3)$ utilizando la matriz obtenida

2) Sea $T: \Re^3 \to \Re^3 / T(x,y,z) = (x,\ x+y, y-z)$
   Halle todos los vectores $\vec{v} \in \Re^3$, *si existen* / $T(\vec{v}) = \vec{v}$

3) a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Halle todos los valores de $h \in \Re$, si existen, tales que la matriz A <u>no</u> sea diagonalizable.

   b) Justifique si la siguiente afirmación es V o F:
   Sea la transformación lineal $T: \Re^n \longrightarrow \Re^n$
   Si dim V = dim Im (T) = n , entonces T es monomorfismo (inyectiva).

4) Determine si las siguientes ecuaciones representan una cónica, en tal caso identifíquela, grafíquela y obtenga una parametrización de modo que se recorra en dirección horaria, en el primer cuadrante
   i) $9x^2 + y^2 - 18x + 6y - 18 = 0$
   ii) $x^2 - 6x = y$

5) a) Identifique y grafique las siguientes superficies
   i) $x^2 + 2y^2 - 2y = 1$
   ii) $x^2 - y^2 + z = 1$
   b) Sea la superficie: $\sigma : A(x-2)^2 - B(y-1)^2 - Cz^2 = 1$
   Halle todos los valores de A, B, $C \in \Re$, si existen, tales que la superficie sea un cilindro circular recto de eje paralelo al eje y, tal que su traza con el plano coordenado $y = 0$ sea una circunferencia de radio 2. Grafique el cilindro.

UTN Álgebra y Geometría Analítica - 2ºP/PB Fecha: Martes 24-11-2009

T.M. Tema 4

Apellido y nombres del alumno: .... .Legajo: ....

Apellido y nombre del docente: ……………………………………………………………...Curso: ……….

Apellido y nombre del auxiliar docente: ……………………………………………………………

La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos, como mínimo:

a) los dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, o

b) dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1		2			3	4		5		Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para **justificar** sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1)a) Dadas, en R^2, las ecuaciones: $x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$ y $\begin{cases} x = 4P + Q\cos\theta \\ y = W + sen\,\theta \end{cases}$ $con\,\theta \in [0, 2\pi]$,

determine todos los valores de P, Q y W para los cuales ambas ecuaciones corresponden a la misma curva.

b) Grafique la curva.

2) Dada en R^3 la ecuación $5x^2 + h\,y + k\,z^2 = 0$, identifique y grafique el lugar geométrico para cada uno de los siguientes casos:

a) $h.\ k > 0$;

b) $h = 0$ y $k < 0$;

c) $h > 0$ y $k = 0$.

3) Dados : T (1,1, 0) = (– 1,2,3) ; T (0,0, 1) = (1, 1, 1) ; T (0,1,0) = (– 5 ,0 , 1)

a) Analice si existe y es única una transformación lineal T: $R^3 \to R^3$ que verifique las condiciones dadas.

b) En caso afirmativo halle el valor de "k", si existe, para que T(1,2,3) = (-3 , k , k+2)

4) Sea T: $R^3 \to R^3$ / T(x,y;z) = (h x + y – z , x –y + z , x + 2 y) una transformación lineal.

a) Halle $h \in R$ para que T ***no*** sea inyectiva.

b) Proporcione, para h = -1, Nu(T) , Im(T), sendas bases y dimensiones.

5) Dada la transformación lineal F: $R^3 \to R^3$ / F(x,y,z)) = (2x – y , 0 , 2x – y)

Halle, si es posible una base B de R^3 tal que la matriz asociada a F respecto de la base B, sea diagonal.

UTN **Álgebra y Geometría Analítica 2ºP/PB** Fecha: Martes 25/11/2009

T.N. Tema 6

Apellido y nombres del alumno: ....Legajo:......................

Apellido y nombre del docente: ....Curso:..................

Apellido y nombre del auxiliar docente: ....

La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos, como mínimo:

a) los dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, o

b) dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1		2		3		4		5		Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para **justificar** sus respuestas. NO USE LAPIZ.

1) Sea $M_{B1B2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a uno transformación lineal

$T : \Re^3 \to \Re^3$, siendo: $B1 = \{(1,0,1)\,(0,1,0)\,(0,0,-1)\}$

$B2 = \{(0,0,2)\,(0,-1,0)\,(1,0,0)\}$

a) Halle la imagen por la transformación lineal de $\vec{u} = (1,0,2)$

b) Halle la expresión analítica de la transformación lineal, el núcleo, la imagen, y una base de cada uno de ellos

2) Sea una función :

$F : \Re^3 \to \Re^3 /$

$F(0,2,1) = (1,0,0)$; $F(3,1,0) = (2,1,0)$; $F(3,5,2) = ((5,1,0))$

¿ F es una transformación lineal? Justifique su respuesta

3) Justifique si las siguientes afirmaciones son V o F:

a) Sea $T : V \to W$ tal que: $\dim V = 3$; $\dim W = 4$; $\dim Nu(T) = 1 \Rightarrow$

a1) $\forall \vec{u} \neq \vec{v} \Rightarrow T(\vec{u}) \neq T(\vec{v})$

a2) T es un epimorfismo (sobreyectiva)

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; A es diagonalizable $\forall k \in \Re$

4) Sea, en R^2, la ecuación: $x^2 + Ay^2 + B\,x + 3 = 0$.

Determine los valores de A y B para los cuales la curva correspondiente puede ser parametrizada como:

$r(t) = \begin{cases} x = 2 + \text{sen}\,t \\ y = 3\cos t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ Grafique la curva.

5) Sea $\sigma : (A-1)x^2 + Ay^2 + (A+1)z^2 = 1$

Halle todos los valores de $A \in \Re$, si existen, tales que la superficie sea:

i) Un elipsoide

ii) Un hiperboloide de una hoja, de eje x

iii) Un cilindro de eje paralelo al eje x .Grafique el cilindro utilizando sus trazas

UTN FRBA PB/2ºP Álgebra y G. Analítica Viernes 4/12/09

T.T. Tema 23

Apellido y nombres del alumno:...

Legajo:.........

Apellido y nombre del profesor: ....

La condición para aprobar este parcial es tener bien resueltos como mínimo:

a) Dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, o

b) Dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1		2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) Sea $T : \Re^3 \to \Re^2 / T(x,y,z) = (x+y\,,\,z-2y)$

Sean las bases $B1 = \{(1,0,0)\,(-1,1,0)\,(0,0,3)\}$; $B2 = \{(1,1)\,(0,2)\}$

a) Halle la matriz asociada a la transformación lineal en las bases $B1$, $B2$

b) Halle las coordenadas, en la base $B2$, de la imagen por la transformación lineal del vector $\vec{u} = (1,2,3)$, utilizando la matriz hallada en a)

2) a) Halle $a \in \Re$ tal que exista una única transformación lineal que cumpla las siguientes condiciones: $T(0,2,0) = (2,0,2)$; $T(1,0,1) = (0,1,2)$; $T(1,1,1) = (a,1,3)$

Núcleo $T = \{(x,y,z) \in \Re^3 / 2x = -y = z\}$. ***Justifique***

b) Obtenga la expresión analítica de la transformación lineal, su imagen y verifique el teorema de las dimensiones.

3) Verifique si la matriz A es diagonalizable. Si lo es, halle la matriz $P / P^{-1}AP = D$ siendo D la matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4) Sea la curva : $x^2 - 2x + 2y^2 + 12y + 15 = 0$

a) identifique y grafique la curva, obtenga las coordenadas de los focos y la excentricidad

b) parametrice la curva de modo que se recorra desde el punto $A(3,-3)$ hasta el punto $B(1,-3+\sqrt{2})$

5) Sea la superficie $\sigma: (A-1)x^2 + Ay^2 - Az^2 = 1$

a) Halle, si es posible, todos los valores de $A \in \Re$ tales que la superficie sea:

i) Elipsoide ii) Hiperboloide de 2 hojas

b) Para $A = -1$ identifique la superficie halle sus trazas y grafique la superficie

Finales

FINAL DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA **19 febrero de 2009**

Apellido y nombres: ....Tema 1
Corrigió:... Revisó:......................................
La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos como mínimo 3 ejercicios.

1		2		3		4		5		Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) Sea la recta $r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2y-z=0 \end{cases}$

a) Halle $a,b,c,k \in \Re$, si existen, tales que el plano $\pi: ax+by+cz=k$ sea perpendicular a la recta r y el punto $P(3,2,-1) \in \pi$

b) Grafique los planos que definen la recta r, y la recta como intersección de tales planos

2) Sea la superficie $\sigma: Ax^2+By^2+Cz^2=1$.

a) Halle $A,B,C \in \Re$, si existen, tales que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones: i) La traza de la superficie con el plano $z=0$ es la curva c, siendo:

$$c:\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ii) La traza de la superficie con el plano $x=0$ es la hipérbola $y^2-z^2=9$

Identifique y grafique la superficie con los valores hallados de A,B,C

b) Halle las ecuaciones paramétricas de la traza de la superficie σ con el plano $y=0$.

3) Sea la transformación lineal $T:\Re^3 \to \Re^3$ tal que su matriz asociada en la base canónica es:

$$M_E=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Halle todos los valores de $k \in \Re$ tales que $Nu(T)=\{(0,0,0)\}$. ***Justifique su respuesta***

b) Si $k=1$ halle la dimensión de la $Im(T)$ y una base de ella.

4) Justifique si las siguientes afirmaciones son V o F

a) Sea $A \in \Re^{n \times n}$ no inversible $\Rightarrow A.Adj(A)=N$ (N matriz nula)

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & k \end{pmatrix}$ es diagonalizable $\forall k \in \Re$

5) Mediante una rotación, identifique la curva y grafíquela en el nuevo sistema de coordenadas superpuesto al sistema de coordenadas original.

$$xy=1$$

FINAL DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA **5 de marzo de 2009**

Apellido y nombres: ....Tema 3
Corrigió:.. Revisó:......................................
La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos como mínimo 3 ejercicios.

1		2		3		4		5		Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) Sea la recta $r: \begin{cases} y = x \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

a) Halle su ecuación vectorial y grafique los planos que la determinan y la recta como intersección de tales Planos
b) Halle la ecuación de todos los planos perpendiculares a la recta hallada tales que su distancia al origen es $d = 2$

2) a) Sean las curvas: $c_1 : \vec{r}_1(t) = (3\cos t\,,\, 2\,sent) \quad ; 0 \le t \le 2\pi$

$$c_2 : \frac{x^2}{9} - z^2 = 1$$

Halle la ecuación, identifique y grafique la superficie $\sigma : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ sabiendo que su traza con el plano $z = 0$ es la curva c_1, y su traza con el plano $y = 0$ es la curva c_2

b) Sea la superficie $\sigma : Ax^2 + By + Cz^2 = 1$ Identifique y grafique la superficie cuando:
i) $A = 1$, $B = 0$ y $C = -1$
ii) $A = 0$, $B = 1$ y $C = -1$

3) Sea $T : \Re^3 \to \Re^4$ tal que $T(0,0,a) = (b,0,0,0)\,;\, T(1,1,1) = (b,0,0,1)\,;\, T(a,1,1) = (0,0,0,b)$

a) Obtenga todos los valores de $a \in \Re$ tales que las condiciones dadas definan una transformación lineal única. Justifique su respuesta.
b) Para $a = 2$ obtenga todos los $b \in \Re$ tales que la dimensión de la imagen de T sea 1. Justifique su respuesta y obtenga la expresión analítica de la transformación lineal

4) Justifique si las siguientes afirmaciones son V o F:

a) Si $A = (A_1\,, A_2\,, A_3) \in \Re^{3x3} /\ A$ es inversible $\Rightarrow B \in \Re^{3x3}$ es inversible $\forall k \in \Re$ siendo $B = (3A_2\,, -A_1 + A_3\,, 2A_1 - kA_3)$
(Nota A_i : i-ésima columna de la matriz A)

b) Sea el sistema de ecuaciones lineales $C^{4x3}.X^{3x1} = B^{4x1}$ tal que la dimensión del espacio columna de la matriz C es 2 $\Rightarrow$ el sistema homogéneo asociado $C^{4x3}.X^{3x1} = N^{4x1}$ es incompatible.

5) a) Halle todos los valores de $k \in \Re$ tales que la matriz A sea diagonalizable y sus autovectores ortogonales

b) Para el menor valor de k hallado en a), y para $a = b = 0$, identifique la cónica mediante una rotación.

a) $A = \begin{pmatrix} a & 3k^2 - 10 \\ -2k^2 + 25k + 20 & b \end{pmatrix}$; b) $(x \;\; y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$

FINAL DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA **18 de agosto de 2009**

Apellido y nombres: ....Tema 5
Corrigió:.. Revisó:.....................................
La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos como mínimo 3 ejercicios.

1		2		3		4		5		Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) a) Calcule la distancia de la recta r al punto $P(2,1,-3)$, si la recta $r \subset \pi_1$ y $r \subset \pi_2$, con: $\pi_1 : x+3y+2z=4$ y $\pi_2 : -y+z=1$

b) Halle la ecuación de la recta $l : \pi_1 \cap \pi_2$, y grafique ambos planos y la recta intersección

2)a) Sea la superficie $\sigma : Ax^2+By^2+Cz^2=1$

Obtenga el valor de los coeficientes A,B,C si se cumplen las siguientes condiciones simultáneamente: i) $\sigma \cap (z=0)$ es la curva $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$; $0 \le t \le 2\pi$

ii) $\sigma \cap (y=0)$ es una hipérbola de eje focal x ,y semiejes de valores 2 y 3

Identifique y grafique la superficie para los valores hallados de A,B,C

b) Sea $\sigma : Ax^2+Bz^2=y$

Identificar y graficar la superficie para cada una de las siguientes de las siguientes condiciones: i) $A=B=-1$ ii) $A=0 \wedge B=-1$

3) Sean S y W subespacios vectoriales de $(\Re^3, +, \Re, \cdot)$ tales que:

Los vectores de S están sobre la recta: $(x,y,z)=\lambda\,(3,-1,2)$, $\forall \lambda \in \Re$

Los vectores de W están en el plano $\pi : (x,y,z)=\gamma(2,-1,0)+\delta(0,1,-1)$

a) Defina una transformación lineal $T:\Re^3 \to \Re^3$ tal que:
$Nu(T)=S^{\perp}$ e $Im(T)=W^{\perp}$ (no es necesario hallar la expresión analítica de la T.L.)

b) ¿Puede definirse una transformación lineal $T:\Re^3 \to \Re^3$ tal que:
$Nu(T)=W$ e $Im(T)=S^{\perp}$? Justifique su respuesta.

4) Justifique si las siguientes afirmaciones son V o F:

a) Sea $A \in \Re^{2x2}$ tal que $A=A^T \wedge A.A^T=I \Rightarrow A^2=I$

b) Sea $A \in \Re^{2x2}$ una matriz simétrica / $A.\vec{v}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \lambda_1=4 \vee \lambda_2=0 \Rightarrow$
$(x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=d>0$ es la ecuación de una hipérbola

5) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿Es diagonalizable $\forall a \in \Re$? Justifique su respuesta.

FINAL DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA **29 de octubre de 2009**

Apellido y nombres: ....Tema 7
Corrigió:.. Revisó:.....................................
La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos como mínimo 3 ejercicios.

1		2		3		4		5		Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) a) Halle $h \in \Re$, si existe, tal que las rectas r_1 ; r_2 definan un plano.

$$r_1 : (x,y,z) = \lambda\,(1,2,3) \quad ; \qquad r_2 : (x,y,z) = (h,-4,\ 0) + \gamma\ (2,2,1)$$

b) Obtenga la ecuación del plano con el valor de h obtenido en a). Grafique el plano utilizando sus trazas.

2) Sea la superficie $\sigma : A(x+1)^2 + By^2 + C(z-2)^2 = 1$

a) Halle todos los valores de $A, B, C \in \Re$, si existen, tales que la superficie sea:

i) Cilindro circular recto de eje paralelo al eje y.

ii) Hiperboloide de una hoja de eje paralelo al eje y tal que su traza con el plano $y = 0$ sea la curva $c: \begin{cases} x = -1 + 2\cos t \\ z = \ \ 2 + 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$; $0 \le t \le 2\pi$

b) Identifique y grafique la superficie cuando $A = B = -1$ y $C = 1$

3) Sea la transformación lineal $T: \Re^3 \to \Re^3$ / $M_{B1B2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es su matriz asociada en las bases:

$B1 = \{(0,2,1)\ (-1,0,0)\ (0,0,3)\}$; $B2 = \{(1,1,1)\ (0,0,1)\ (0,1,0)\}$

a) Halle la imagen de $\vec{u} = (2,0,3)$ en la base canónica

b) Halle, si existe, una matriz diagonal que represente la transformación lineal, e indique en que base.

4) Indique V o F, demuestre o indique un contraejemplo según corresponda:

a) $P \in \Re^{n \times n}: P^{-1} = P^t \Rightarrow |P|^2 = 1$

b) Sea $\left\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}\right\} \subset \Re^9$ un conjunto de vectores **L.I.** $\Rightarrow A$ **es L.I.** □ **k**□□

Siendo: $A = \left\{\vec{x} - \vec{y},\ \vec{v} - \vec{u},\ k\,\vec{u} - \vec{x}\right\}$

5) Sea la curva: $x^2 - 2hxy + 3y^2 = 5$

a) Halle el conjunto de valores de $h \in \Re$ tales que la curva sea:

i) un par de rectas

ii) una elipse

iii) una hipérbola