

Aufgabe 1

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$, $\det H_f(x, y) = -2xe^{x+y} \Rightarrow$ für $x \neq 0$ ist die Determinante nicht 0 und $H_f(x, y)$ damit invertierbar. Zusätzlich ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Nach dem Umkehrsatz folgt daraus, dass die Umkehrfunktion von f (lokal) existiert. Außerdem liefert der Satz:

$$(f^{-1})'(f(1, 0)) = (f'(1, 0))^{-1} = \begin{pmatrix} e & e \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{e} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

f ist auf D nicht injektiv, da z.B. $f(1, 0) = f(-1, 2) = (e, 1)$.