Aufgabe 1

(a) f ist stetig differenzierbar und $f'(0) = 0$. Also ist f auf einem Intervall $[0, \epsilon)$ von 0 streng monoton wachsend, daher ist f(x)>0 ($0 < x < \epsilon$).
Fall 1: f(2) > 4. Dann ist $f(x+2) - 4$ in einer Umgebung von 0 positiv. Der Nenner des Bruchs geht gegen 0 (wobei er positiv ist) und der Zähler bleibt größer 0. Damit ist $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x+2)-4}{f(x)} = \infty$.
Fall 2: f(2) < 4. Dann ist $f(x+2) - 4$ in einer Umgebung von 0 negativ. Der Nenner des Bruchs geht gegen 0 (wobei er positiv ist) und der Zähler bleibt kleiner 0. Damit ist $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x+2)-4}{f(x)} = -\infty$.
Fall 3: f(2) = 4. Dann liefert l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x+2)-4}{f(x)} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x+2)}{f'(x)} = \frac{3}{3} = 1$$

.
(b) Sei f die lineare Funktion $f(x) = 3x - 2$. Dann ist $\frac{f(2)-4}{f(0)} = \frac{0}{-2} = 0$
$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x+2)-4}{f(x)} = 0$.

Aufgabe 2

Berechne folgende Grenzwerte:
(a) L'Hospital liefert $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{\cos x e^{\sin x}}{\cos x} = 1$.
(b) Elementare Umformungen liefern $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sinh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-e^{-2x}} = 2$.
L'Hospital liefert nach zweimaligem Anwenden wieder die Ursprungsfunktion!
(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{e^x} = \frac{\sinh 0}{e^0} = 0/1 = 0$. Hier darf L'Hospital NICHT angewendet werden!