Aufgabe 1

Lösungsskizze (Zwischenergebnisse):
Das charakteristische Polynom ist $(\lambda-4)^2(\lambda-i)(\lambda+i) \Rightarrow \lambda_{1,2}=4, \lambda_3=i, \lambda_4=-i=\bar{i}$.

$\mathrm{Kern}(A-4I) = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$

$\mathrm{Kern}((A-4I)^2) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$

$\mathrm{Kern}(A-i\cdot I) = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1+i\\-1\end{pmatrix}\right]$

Als (ein mögliches) Fundamentalsystem ergibt sich

$$\left\{ e^{4x}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, e^{4x}\begin{pmatrix}1-x\\x\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\\cos x-\sin x\\-\cos x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\\cos x+\sin x\\-\sin x\end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2

Lösungsskizze (Zwischenergebnisse):
(a) A ist schon in Jordan-Normalform. Damit lässt sich das Fundamentalsystem direkt ablesen als

$$\left\{ e^{2x}\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}, e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e^{-x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Inhomogene Gleichung:

$c'(x) = (Y(x))^{-1}\cdot b(x) = \begin{pmatrix}1\\-x\\(1+x)e^x\end{pmatrix}$

$\Rightarrow c(x) = \begin{pmatrix}x\\-\frac{1}{2}x^2\\xe^x\end{pmatrix} \Rightarrow y_p(x) = Y(x)\cdot c(x) = \begin{pmatrix}xe^{2x}\\\frac{1}{2}x^2e^{2x}\\x\end{pmatrix}.$

Als allgemeine Lösung ergibt sich

$$c_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix} + c_2e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3e^{-x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}xe^{2x}\\\frac{1}{2}x^2e^{2x}\\x\end{pmatrix} \qquad (c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R})$$

(b) Es ergibt sich $c_1=1, c_2=0, c_3=2$.