Aufgabe 1

Hier fr Aufgabe 1 nur die Zwischenergebnisse:
$p(x) = -x(1-x)(3-x)$. Tipp zur Rechnung: Entwickeln!

Über $\mathbb{R}$: $E_1 = [(1,0,0)^T], E_0 = [(3,-2,1)^T], E_3 = [(3,2,2)^T] \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Über F_2: $p(x) = x(1+x)^2$. $E_1 = [(1,0,0)^T], H_1 = [(1,0,0)^T, (0,1,1)^T], E_0 = [(1,0,1)^T]$.
Es ist $(A-I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Über F_3: $p(x) = x^2(1-x)$. $E_1 = [(1,0,0)^T], E_0 = [(0,1,1)^T], H_1 = [(1,0,2)^T, (0,1,1)^T]$.
Es ist $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

(a) Determinante einer Dreiecksmatrix = Produkt der Diagonaleinträge. Da auf der Diagonale Linearfaktoren $(a_{kk} - X)$ stehen, zerfällt p(x) in LinFakt $\Rightarrow \tilde{A}$ existiert.
(b) Diagonalmatrizen können es nach (a) nicht sein. Also $a_{21} = a_{12} = 1$. Durchprobieren der vier Kombinationen für a_{11} und a_{22} liefert: Nur $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ haben keine JNF.
(c) Hier für die erste Matrix aus (b): $p(x) = x^2 - x - 1$. $F_3 : p(0) = 2, p(1) = 2, p(2) = 1 \Rightarrow$ keine JNF.
F_5: Probieren liefert $p(3) = 0$; Polynomdivision $\Rightarrow p(x) = (x-3)^2$. Der Kern von (A-3I) ist eindimensional $\Rightarrow$ 1 Kästchen, Länge 2 $\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
(d) Erster Fall: Wähle trivialerweise $\mathbb{C}$. Mitternachtsformel liefert $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Kerne trivialerweise eindimensional $\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$. (Klappt auch mit $\mathbb{R}$)
Zweiter Fall: genau hinschauen! Mit $\mathbb{Q}$ selbe Nullstellen, aber $x_{1,2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ keine Linearfaktorzerlegung $\Rightarrow$ keine JNF.