Aufgabe 1

Addition: $(\mathbb{C},+)$ abelsche Gruppe, $V \subset \mathbb{C}, 0 \in V, (a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i \in V$, da $a-c, b-d \in \mathbb{Q}$. Nach UGK ist $(V,+)$ eine Gruppe.
Ebenso mit $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(V \setminus \{0\}, \cdot)$: Für $(c+di) \neq 0$ ist $(c+di)^{-1} = \frac{c-di}{c^2+d^2} \Rightarrow$ Für $(a+bi), (c+di) \in V \setminus \{0\}$:
$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi) \cdot \frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i \in V$, da $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \in V$; $\frac{a+bi}{c+di} \neq 0$ wegen $(a+bi) \neq 0$. Nach UGK ist $(V \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe und abelsch, da Untergruppe von $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2

Zuerst wird bewiesen: F_4, F_9 sind abelsche Ringe mit eins.
Addition: Stichwort Vektorraum!
Multiplikation: Abgeschlossenheit folgt aus Definition (nur Rechnungen in F_2 bzw. F_3).
Kommutativität und Assoziativität:
Nachrechnen oder (sauberes!) Argumentieren mit Komm. und Assoz. in $\mathbb{C}$ (wobei $(1,0)^T \widehat{=} 1; (0,1)^T \widehat{=} i$)).
Neutrales Element: $(1,0)^T$ (geht leicht wenn man vorher mit $\mathbb{C}$ argumentiert, sonst: nachrechnen!). Distributivgesetze: nachrechnen oder $\mathbb{C}$. $\Rightarrow$ (c)
(Ab hier sind alle Vektoren transponiert geschrieben)
(b): $(1,1) \circ (1,1) = (1-1, 1+1) = (0,2) = (0,0)$ in $F_2 \Rightarrow F_4$ nicht nullteilerfrei $\Rightarrow$ kein Körper
(a): es fehlt noch die Existenz der inversen Elemente in $F_9 \setminus \{(0,0)\}$:
$(1,0) \circ (1,0) = (2,0) \circ (2,0) = (1,0)$
$(0,1) \circ (0,2) = (-2,0) = (1,0)$
$(1,1) \circ (2,1) = (2-1, 2+1) = (1,0)$
$(1,2) \circ (2,2) = (2-4, 4+2) = (1,0)$