

Aufgabe 1

Sei $V = \mathbb{R}^3, \beta_a(x, y) = x^T \cdot A_a \cdot y (x, y \in V, a \in \mathbb{R}), M = \{a \in \mathbb{R} | \beta_a \text{ ist Skalarprodukt}\}$

und $A_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$

(a) Bestimme M.

(b) Wähle für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus M$ ein $x \in V \setminus \{0\}$ so, dass $\beta_a(x, x) \leq 0$ ist.

Aufgabe 2

Sei $S \in \mathbb{R}_{reg}^{n \times n}$ und \langle, \rangle mit $\langle x, y \rangle := x^T S y (x, y \in \mathbb{R}^n)$ ein Skalarprodukt.

Zeige: β mit $\beta(x, y) = x^T S^{-1} y$ ist ebenfalls ein Skalarprodukt.

Aufgabe 3

Für eine reelle $(n \times n)$ -Matrix $(n \geq 2)$ A mit $A = ((a_{i,j}))_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ gelte

$\det A_1 > 0, \det A_2 > 0, \dots, \det A_{n-1} > 0$, wobei $A_k := ((a_{i,j}))_{i,j \in \{1, \dots, k\}}$.

Zeige: (a) $a_{nn} \leq 0 \Rightarrow \det A \leq 0$.

(b) Die Aussage $\det A \leq 0 \Rightarrow a_{nn} \leq 0$ ist falsch.

(c) Untersuche für $n=1$.