Aufgabe 1

Sei K ein Körper. $V := K[X]$ sei ein K-Vektorraum. Sei $U := [1] = [1+0X+0X^2+\dots] = [(1,0,0,\dots)]$.

(a) Gib eine Basis B von ${}^{K[X]}/_{U}$ an!
(b) Gib einen Isomorphismus f von ${}^{K[X]}/_{U}$ nach K[X] an! Zeige auch: f ist wohldefiniert!
(c) Gib $B^* = (g_1, g_2, g_3, \dots)$ (die duale Vektorenmenge von B; für unendlichdimensionale Vektorräume ist B^* keine Basis) an! Zeige: $g_1, g_2, \dots$ sind wohldefiniert!
(d) Sei $v = (2,5,3,6,7,0,0,\dots) + U$. Berechne $g_1(v), g_2(v), g_3(v), \dots$

Aufgabe 2

Sei $V := {F_3}^3, B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (b_1, b_2, b_3)$.
(a) Zeige: B ist Basis von V.
(b) Berechne B^*.
(c) Sei $\Phi\colon V \to V^*, \Phi(b_i) = b_i^*$. Sei $x := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Berechne $\varphi := \Phi(x)$ und $\varphi(x)$.