Aufgabe 1

(a) A_a ist symmetrisch. Hurwitzkriterium: $\det(2) = 2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0$, und $\begin{vmatrix} 2 & 1^0 & \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5a^2$. Für $a \neq 0$ ist $5a^2 > 0$, für $a = 0$ ist $5a^2 = 0$. Nach Hurwitz ist damit $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) $\mathbb{R} \setminus M = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{0\}$.
Untersuchung also für $a = 0$: Wähle z.B. $x = (0,0,1)^T$, da x im Kern von A_0 liegt.
Also ist $\beta_0(x,x) = x^T \cdot A_0 \cdot x = x^T \cdot 0 = 0 \leq 0$.

Aufgabe 2

$<,>$ ist Skalarprodukt, also ist S symmetrisch und positiv definit.
Symmetrie: $S^{-1} = (S^T)^{-1} = (S^{-1})^T$.
pos. def: z.z. $x^T S^{-1} x > 0 (x \neq 0)$.
S regulär $\Rightarrow$ $(x \mapsto Sx)$ ist bijektiv $\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n : x = Sy$. Aus y=0 würde x=0 folgen (Widerspruch).
Also ist $y \neq 0$. $\Rightarrow x^T S^{-1} x = (Sy)^T S^{-1} (Sy) = y^T \underbrace{S^T}_{=S} \underbrace{S^{-1} S}_{=E_n} y = y^T S y > 0$, da S positiv definit und $y \neq 0$.

Aufgabe 3

(a)Beweis durch Widerspruch: Sei $a_{nn} \leq 0$, aber det A $>$ 0. Nach Hurwitz gilt dann: A ist positiv definit.
Wähle $x = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$x^T A x = a_{nn} \leq 0$. WIDERSPRUCH zur positiven Definitheit von A!
(b)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\det A_1 = 1 > 0, \det A = -3 < 0$, aber $a_{22} = 1 > 0$.
(c)$\det A = a_{11} \Rightarrow \big(\det A \leq 0 \Leftrightarrow a_{11} \leq 0\big)$.